

8 Aportaciones de la tecnología a la educación estadística: la comprensión de la variabilidad estadística como ejemplo.

Felipe Castro Lugo^{*}, Enrique Hugues Galindo^{**} e Irma Nancy Larios Rodríguez^{**}
Instituto Tecnológico de Sonora^{*} y Universidad de Sonora^{**}. México

felipecastrolugo@hotmail.com, ehugues@gauss.mat.uson.mx, nancy@gauss.mat.uson.mx

Resumen

Desde hace tiempo se ha venido afirmando que la tecnología tiene grandes potencialidades para apoyar a la educación estadística y se han dado experiencias en esa dirección, pero aún se requiere sistematizar esfuerzos a fin de concretar y afianzar la expectativa que genera. La tecnología se pregona desde lo institucional como un rasgo modernizante en sus más recientes reformas, mas su inserción real a los procesos de enseñanza y de aprendizaje requiere de esfuerzos sustentados en una visión específica de cada campo disciplinar en que intervenga, lo que no parece estar sucediendo.

En el caso particular de la enseñanza de la estadística, las tendencias actuales contemplan a la tecnología entre sus elementos, sin embargo para su incorporación exitosa en la práctica de la educación estadística debe clarificarse por qué acudir a la tecnología, cuál es el papel que tendría en ella y cómo implementarlo.

En el caso de los estudiantes universitarios, se podría aducir que en muchas carreras universitarias no cuentan con un sustento matemático lo suficientemente sólido como para tener un acercamiento sintético a las ideas estadísticas claves, algunas fundamentadas en resultados matemáticos sofisticados, y además que deben tratar con datos que resultan tener variabilidad inherente acarreado en ella incertidumbre en las conclusiones que de ellos puedan extraer, lo que se traduce en una complejidad adicional. No obstante tales estudiantes podrían beneficiarse con un acercamiento más accesible basado en la observación y reflexión de resúmenes o representaciones de datos, de transformaciones de estos y de varias reproducciones de estas acciones obtenidas mediante el apoyo de un ambiente soportado con tecnología.

Para ilustrar algunas respuestas iniciales más precisas a los cuestionamientos planteados sobre las aportaciones de la tecnología a la educación estadística, se hará uso de algunas actividades didácticas diseñadas con apoyo de tecnología para el tratamiento de un tópico central en este campo: la variabilidad estadística; respuestas que se considera debieran formar parte de una visión actual de la educación estadística en la cual se sustenten esfuerzos encaminados a la formación de los ciudadanos y de los profesionistas.

Palabras clave: Estadística, educación estadística, tecnología, variabilidad estadística, transnumeración estadística.

1. Introducción

Dada la importancia que socialmente se le concede a la *estadística*, diferentes movimientos o reformas educativas le han abierto un lugar en el currículo de todos los niveles educativos¹, buscando satisfacer la necesidad de que el ciudadano sea capaz de proporcionar argumentos basados en evidencias empíricas y de evaluar críticamente afirmaciones basadas en datos.

Hoy en día se percibe a la estadística como una disciplina que interviene al abordar problemas en distintas áreas de la vida cotidiana o del desempeño profesional, lo que se tiene presente al justificar la incursión que curricularmente ha logrado y que se extiende a la formación de prácticamente todo tipo de profesionista.

Esta descripción del quehacer estadístico también se debe tener presente al delinear la formación estadística requerida por los ciudadanos y profesionistas. En ese tenor, aunque no pudiera pensarse en esta formación como algo uniforme², resulta pertinente la idea compartida por diferentes tendencias en *educación estadística* de impulsar el desarrollo del pensamiento involucrado en el proceso de resolución de problemas estadísticos para incidir formativamente en el estudiante y la de incorporar el uso de la *tecnología*, ya que en ese proceso propio del quehacer estadístico resulta ser una herramienta prominente.

¹Con la salvedad, dentro el sistema educativo mexicano al que se hace referencia, del nivel medio superior donde no para todos los estudiantes está prevista la continuidad de su formación estadística.

²Toda vez que existen niveles, orientaciones y contextos educativos diversos y que en el caso particular de la educación superior se refleja en perfiles diferentes asociados a profesiones distintas, en particular con expectativas matemáticas dispares.

En los siguientes apartados se presentan cuestionamientos sobre dicha incorporación que resultan pertinentes desde una perspectiva didáctica, algunas ideas para configurar una visión actual de la educación estadística, algunas respuestas iniciales a los cuestionamientos planteados sobre la aportación de la tecnología a la educación estadística y para ilustrar esto se hará uso de algunas actividades didácticas diseñadas con apoyo de tecnología para el tratamiento de un tópico importante en la formación estadística³: la *variabilidad estadística*.

2. Antecedentes

En este trabajo se recoge una preocupación surgida hace tiempo y también presente en la realización de una tesis reciente para obtener el grado de maestría en ciencias en matemática educativa (Castro, 2013), que consiste en dimensionar adecuadamente la intervención didáctica de la tecnología computacional en la promoción del sentido que un concepto estadístico particular tiene en la disciplina: la variabilidad; no obstante que otras preocupaciones estuvieron también presentes⁴.

Precisamente, con todo y que las visiones actuales de la educación estadística ya contemplan a la tecnología computacional como uno de sus elementos, para su incorporación exitosa en la práctica de la educación estadística debe clarificarse por qué acudir a la tecnología, cuál es el papel específico que tendría en ella y cómo implementarlo. Las respuestas a estos cuestionamientos se considera que debieran formar parte de una visión actual de la educación estadística en la cual se sustenten esfuerzos encaminados a la formación de los ciudadanos y de los profesionistas.

2.1 La estadística y la educación estadística

En la actualidad la estadística es concebida como una disciplina altamente matematizada que provee técnicas y procedimientos para el abordaje de problemas en distintas áreas de la

³Aunque las actividades para ejemplificar la intervención de la tecnología en la educación estadística fueron diseñadas para el tópico señalado y dirigidas a estudiantes de carreras de ingeniería, la parte esencial de las ideas involucradas pueden ser llevadas a otros tópicos y niveles educativos.

⁴El objetivo de dicha tesis era construir una secuencia de actividades didácticas para promover el sentido de la variabilidad estadística entre estudiantes de ingeniería, que estuviese debidamente sustentada en el modelo curricular vigente en la institución sede (el Instituto Tecnológico de Sonora - ITSON), las tendencias actuales en educación estadística y la posibilidad de incorporar la tecnología computacional como un componente importante para apoyar los procesos de aprendizaje.

vida cotidiana y del desempeño profesional, interviniendo desde su planeación hasta su resolución, participando en análisis y predicciones ya sea con fines de descripción o de toma de decisiones. Ésta suele ser descrita como la ciencia de los datos y también como la ciencia de la incertidumbre, expresiones que hacen referencia a dos ideas que resultan características esenciales de la disciplina estadística: Por un lado, la estadística trabaja con datos para dar respuesta a situaciones problemáticas pero estos sólo constituyen parte de la información que puede producirse en la situación, y, por otro, la situación y/o la toma de datos es afectada por factores fortuitos que producen variabilidad en los datos mismos, de modo que las respuestas que proporciona llevan algún grado de incertidumbre. A fin de complementar estas ideas habría que considerar en la definición de estadística lo que cotidianamente hacen tanto estadísticos como practicantes de la estadística (Chance, 2002), entre los que se encuentra una variada gama de profesionistas, en el entendido de que tal quehacer incluye una dosis fuerte de metodología.

Tanto en el ámbito nacional como en el internacional, estas características de la estadística son las que han venido fortaleciendo su lugar en la escuela, ya que se considera que:

“ha jugado un papel primordial en el desarrollo de la sociedad moderna, al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar en forma óptima estudios y experimentos y mejorar las predicciones y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.” (Batanero y Godino, 2005, p. 203).

Así mismo en llevar tales características a la escuela se identifica una complejidad que viene siendo abordada por una disciplina científica emergente: la educación estadística. La investigación en esta disciplina ha constatado dicha complejidad a través de identificar errores y dificultades que enfrentan los estudiantes para aprender estadística pero también ha generado recomendaciones para su inserción escolar. Un ejemplo influyente de este tipo de recomendaciones es el resultado de un análisis colectivo realizado por una comisión de la American Statistical Association (ASA), que fue reportado por G. W. Cobb en 1992 (Garfield, Aliaga, Cobb, Cuff, Gould, Lock, Moore, Roosman, Stephenson, Utts, Velleman, Witmer, 2005) y que señala: enfatizar el pensamiento estadístico desde cursos introductorios procurando que el estudiante comprenda que el proceso estadístico tiene

como elementos básicos: la necesidad de los datos, la importancia de la producción de los datos, la omnipresencia de la variación y la cuantificación y explicación de la variabilidad; poner mayor énfasis sobre los datos y conceptos procurando que la realización de cálculos y gráficas sea automatizada; y fomentar las actividades de aprendizaje priorizándolas por sobre las de enseñanza, diversificando medios y estrategias de participación de los estudiantes.

Recomendaciones como las de la ASA resultan congruentes con el planteamiento de desarrollar el pensamiento involucrado en el proceso de resolución de problemas estadísticos, ya que en este resulta necesario contar con datos y analizarlos en búsqueda de respuestas a cuestiones específicas de los problemas utilizando diversas herramientas, incluyendo la realización de tratamientos o resúmenes de datos, efectuar transformaciones de estos productos con fines de modelación, así como el uso de herramientas intelectuales que permitan interrelacionar las producciones iniciales hacia nueva información a fin describir, predecir o confirmar comportamientos de variables, tareas que suelen apoyarse en papel y lápiz o bien, cada vez más frecuentemente, mediante dispositivos tecnológicos.

Precisamente, este tipo de recomendaciones y planteamientos deben ser valorados en vías de configurar una visión actual de la educación estadística en la cual se sustenten esfuerzos para alcanzar sus fines e ir proporcionando respuestas iniciales a los cuestionamientos planteados sobre la aportación de la tecnología a la educación estadística.

2.2 La variabilidad estadística

La importancia que la variabilidad puede tener como objeto de estudio para la educación estadística es percibida en las recomendaciones del reporte Cobb (Garfield, *et al.*, 2005) pero también de observar que la resolución de un problema estadístico ineludiblemente involucra datos, que esos datos tendrán variabilidad estadística como algo inherente a su naturaleza y que la explicación de esa variabilidad proporciona el eje de la práctica estadística así como pautas de análisis cruciales en el quehacer estadístico. Se pueden resumir ideas como las anteriores diciendo que la variabilidad es la razón de la existencia de la estadística, lo que hace de éste un tópico fundamental de la educación estadística más

sin embargo un tópico que no es debidamente atendido y que frecuentemente no es explicitado ni en el currículo ni en libros de texto.

Esta serie de circunstancias fueron las que llevaron a formular la propuesta didáctica que aquí será utilizada para ejemplificar la intervención de la tecnología en la educación estadística, propuesta mediante la cual se pretende incidir en el pensamiento y el razonamiento estadístico de los estudiantes alrededor de la variabilidad estadística, objeto de estudio en que se centra, involucrando aspectos esenciales para la comprensión de ésta como son: su percepción, su descripción, su cuantificación y así como su explicación.

2.3 La presencia de la tecnología en educación estadística

La apertura a la tecnología viene a ser un denominador común presente en los modelos educativos promovidos en algunas instituciones, ya sea en lo general acudiendo al uso sistemático de recursos computacionales como elementos modernizantes (UNISON, 2003) o particularmente proponiendo en cursos de contenidos estadísticos que sus objetivos sean alcanzados con apoyo de software estadístico (ITSON, 2009), para lo que no hay ni la experiencia ni las orientaciones apropiadas para efectivamente ponerlo en práctica en el aula⁵.

Sin embargo este tipo de ideas parecen partir del atractivo encefaleador que generalmente ejerce la tecnología y que automáticamente le adjudica potencialidades a su incorporación en la educación. De hecho existen formas simples de empezar a usar la tecnología en el aula, sin embargo la falta de claridad en torno a esas potencialidades en un campo específico puede llevar a que esas formas resulten insuficientes, por lo que es necesario ir más a fondo para asegurar el éxito de tal incorporación.

En el caso de la educación estadística, en el desarrollo del pensamiento involucrado en el proceso de resolución de problemas estadísticos la intervención de la tecnología tiene un doble cometido: tanto estadístico-técnico como formativo-didáctico; y en ambas direcciones se le identifica una aportación importante. En el reporte Cobb (Garfield, *et al.*,

⁵En ocasiones no se cuenta con los recursos adecuados pues, para el caso específico de la educación estadística, es común adolecer de disponibilidad de equipos de cómputo, de software y, lo que puede resultar aún más grave, de docentes con formación disciplinar, práctica, didáctica y tecnológica, adecuadas.

2005) se alude ya al uso de la tecnología computacional en educación estadística para automatizar los aspectos operativos involucrados en la realización de cálculos y gráficas y, con esto, permitir el poder enfatizar más los aspectos cualitativos encerrados en la observación de los datos y las producciones que operativamente se obtienen a partir de ellos, así como en la reflexión de todo esto en conexión con los conceptos interviniendo hacia la resolución de la situación o problema que se esté abordando. Sin duda que tales orientaciones pueden asociarse a las facilidades de representación y manipulación gráfica, numérica y tabular que para el tratamiento de datos ofrecen diversos software producidos mediante la tecnología computacional⁶.

De ahí que, para atender algunas necesidades educativas como las descritas en párrafos anteriores, en educación estadística se tiene algún sustento para hablar de las potencialidades que la tecnología computacional puede aportar en beneficio de sus metas.

3. Elementos teórico metodológicos

Las acciones didácticas que se emprenden en algún campo están íntimamente ligadas a la concepción de la disciplina involucrada y a la concepción del aprendizaje de sus conceptos e ideas subyacentes. En relación con esto, los intentos de clarificar o responder a cuestionamientos planteados en el presente trabajo sobre el uso de la tecnología en el campo de la educación estadística deben tener en cuenta las concepciones existentes sobre la estadística y su aprendizaje, de lo que enseguida se hace un bosquejo así como de algunas de sus implicaciones hacia clarificar la intervención de la tecnología en el aula de estadística, lo cual no pretende ser completo ni definitivo sino ser una síntesis del avance alcanzado.

3.1 La disciplina estadística y su aprendizaje

Siendo una disciplina matematizada, la estadística comparte algunos rasgos característicos de la matemática, de entre los que cabe destacar:

⁶Algunos de estos productos cuentan con capacidades interactivas, con la posibilidad de vincular representaciones para actualizarse en tiempo real ante cambios de condiciones en una de las representaciones e incluso la posibilidad adicional de que tales cambios y la reconstrucción en la(s) representación(es) correspondientes pueda(n) efectuarse dinámicamente.

- sus objetos y conceptos son constructos abstractos e ideales cuyos aspectos definitorios son complementados por el uso que de ellos se hace;
- la actividad que desarrolla se asocia a la serie de actos encaminados al planteamiento o a la resolución de un problema;
- tanto en el planteamiento del problema como en la actividad encaminada a su resolución, se hace uso de diferentes representaciones semióticas o combinaciones de estas en varios registros de representación semiótica.

Lo que puede llevar a pensar en que también tienen rasgos en común en las formas de aprendizaje, como podría ser:

- las representaciones utilizadas y la coordinación de estas a través de diversas transformaciones permitidas tienen una fuerte relación con la comprensión de los conceptos y con las dificultades que esto representa para los aprendices;
- la incorporación de la tecnología influye tanto en lo que se enseña como en lo que se aprende por lo que debería implicar un refinamiento consiente de ambos procesos.

Empero sería erróneo hacer una completa identificación toda vez que también hay rasgos disciplinares que no se comparten.

Precisamente el punto nodal de esto último se encuentra en que la estadística trabaja con datos, de los que se extraen conclusiones e inferencias dando lugar a un pensamiento inductivo y no determinístico, contrastante con otros rasgos de la matemática. También es de notarse que los datos no son simples números sino números con contexto, el cual debe ser considerado durante todo el proceso estadístico pues las conclusiones a extraer han de comunicar algo sobre tal contexto.

Así, la actividad estadística inicia en etapas previas a la toma de datos desde las cuales empieza a tomar forma el pensamiento estadístico. A partir de contar con datos, contempla acciones que tienen que ver con la elaboración de algunas representaciones (verbal, numérica, tabular, gráfica, analítica, etc.) y transformaciones de estas (tratamientos y

conversiones), como plantea R. Duval (1993) sucede en la actividad matemática⁷. Adicionalmente se dan esfuerzos por interconectar estas elaboraciones estadísticas con el contexto o situación que da lugar a los datos, en la conciencia de cuál es la naturaleza de estos. Se trata de un escrutinio encaminado a extraer información que arroje nuevas perspectivas para el problema bajo consideración y que puede ser catalogado como parte de las operaciones cognitivas que realizan los sujetos, denominado *transnumeración estadística*, en concordancia con la literatura en educación estadística (Wild y Pfannkuch, 1999) pero subrayando el carácter de la disciplina involucrada⁸.

La transnumeración estadística es una forma de indagar y de aprender de los datos:

“... ocurre cuando encontramos formas de obtener datos (a través de medición o clasificación) que capture elementos significativos de un sistema real. Se extiende a todo el análisis estadístico de datos, ocurriendo cada vez que cambiamos nuestra forma de observar los datos en la esperanza de que esto nos lleve a nuevos significados. Podemos revisar muchas representaciones gráficas para encontrar varias informaciones. Podemos re-exresar los datos vía transformaciones y reclasificaciones buscando nuevas señales. Podemos intentar una variedad de modelos. Y al final del proceso, la transnumeración ocurre de nuevo cuando descubrimos representaciones de los datos que nos ayudan a transmitir nuestras comprensiones del sistema real a otros. La transnumeración es un proceso dinámico de cambiar representaciones para generar comprensión.” (Wild *et al.*, 1999, p. 227)

Sin duda que el desarrollo del pensamiento involucrado en el proceso de resolución de problemas estadísticos o el quehacer estadístico no se reduce a estas formas de indagar y aprender de los datos, ya que en él se identifican al menos cuatro elementos estructurales: 1) tomar en cuenta la variación, 2) la transnumeración, 3) la construcción de modelos y razonamiento sobre ellos, y 4) la integración o síntesis del conocimiento del contexto y el conocimiento estadístico que surge en el proceso, sin embargo se dice que los dos primeros son los que dan el toque esencialmente estadístico a la actividad del campo en el sentido

⁷ En tal planteamiento se resalta que tales manejos de representaciones constituyen operaciones para la cognición matemática y que son complementadas por una acción que resulta central: la interrelación de estas, denominada articulación o coordinación.

⁸ Aquí se le ha agregado el adjetivo: estadística; para tal fin.

moderno (Pfannkuch y Wild, 2000). Lo anterior hace que ese par de elementos también resulten centrales para el aprendizaje de la estadística.

3.2 La tecnología en la educación estadística

En el señalamiento del doble cometido de la tecnología en la educación estadística, por una parte, se hace mención de lo técnico en el sentido de que, al ser una herramienta que resulta eficiente en todo tipo de cálculos, resúmenes y elaboraciones, se vuelve indispensable tanto para estadísticos como para practicantes de la estadística que enfrentan conjuntos grandes de datos, incluso multivariados, por lo que les es necesario conocer el manejo de una alternativa para estos fines, ya sea alguna calculadora avanzada, algún lenguaje de programación o algún software de computadora. Y por otra parte, la mención de lo didáctico en el sentido de que resulta ser una herramienta que facilita la parte cualitativa del análisis estadístico, descargando la tensión que produce la sofisticación alcanzada en algunos cálculos y dando con ello la apertura para el desarrollo de conceptos, particularmente a través de la transnumeración.

Volviendo a los cuestionamientos de lo que es necesario clarificar para una inserción exitosa de la tecnología, lo dicho en el párrafo anterior proporciona parte de una respuesta inicial al por qué acudir a la tecnología para la educación estadística, que se aúna, en el caso de los estudiantes universitarios, a que en muchas carreras universitarias no cuentan con un sustento matemático lo suficientemente sólido como para tener un acercamiento sintético a las ideas estadísticas claves, algunas fundamentadas en resultados matemáticos sofisticados, y además que deben tratar con datos que resultan tener variabilidad inherente acarreado con ella incertidumbre en las conclusiones que de ellos puedan extraer, lo que se traduce en una complejidad adicional. Mientras que tales estudiantes podrían beneficiarse con un acercamiento más accesible basado en la observación y reflexión de resúmenes o representaciones de datos, de transformaciones de estos y de varias reproducciones de estas acciones obtenidas con el apoyo de un ambiente de aprendizaje soportado con tecnología.

Dirigiéndonos ahora a la cuestión de cuál es el papel que tendría en educación estadística, una respuesta inicial se vincula a las capacidades de movilizar diferentes objetos

estadísticos o matemáticos a través de representaciones numéricas, tabulares, gráficas y simbólicas que permiten generar ambientes propicios para el surgimiento o diseño de variadas experiencias de aprendizaje a través de un acercamiento concreto y visual, permitiendo arrancar intuitivamente el contacto con conceptos pero además para posibilitar el descubrimiento de complejas relaciones entre tales tipos de objetos. En esto es preciso agregar que las posibilidades de contar con interactividad, la vinculación en tiempo real de cambios entre representaciones en diferentes registros de representación y la posibilidad de manipulación dinámica de tales cambios acompañada de la producción de un sin número de representaciones vendrían a asistir a la transnumeración estadística así como al desarrollo de otras habilidades y destrezas para la resolución de problemas estadísticos.

Precisamente, la transnumeración implica el desarrollo de destrezas y habilidades como las descritas en los niveles de lectura de gráficas propuestos por S. Friel, F. Curcio y G. Bright (2001) en su lectura, descripción, interpretación y análisis pero ampliada a otros tipos de representaciones y a sus interconexiones. Para llevar a cabo esto, cualidades en la tecnología como las mencionadas pueden tener un impacto en el aprendizaje favoreciendo las indagaciones acerca de los datos a diferentes niveles de profundidad y poder extraer de ellos nueva información.

También se confía en que la tecnología ayudará a utilizar estrategias diferentes en los proceso de enseñanza y de aprendizaje como herramienta de colaboración entre estudiantes, a generar un mayor número de situaciones, a simular fenómenos, y a incentivar la construcción de conocimiento a través de visualizar objetos estadísticos en juego, como lo señalan especialistas en educación estadística (Chance, Ben-Zvi, Garfield, Medina, 2007).

La incorporación de la tecnología al aula de clase de estadística puede traer consigo una reorganización de la educación estadística teniendo en consideración las siguientes ventajas (Ben-Zvi, 2001):

- Cambio en las actividades a un nivel cognitivo más alto; los estudiantes deben realizar esfuerzos en una planificación más detallada requiriendo la anticipación de resultados a obtener y con esto cambiar el foco de atención puesto comúnmente en la elaboración de cálculos y gráficos.

- Cambio de los objetos de la actividad; los estudiantes deben enfocar su actividad en la transformación y análisis de las representaciones; toda vez que es este tipo de trabajo es parte sustancial del proceso que hace posible arribar a la solución de situaciones problemáticas dadas.
- Apoya a la cognición situada del pensamiento y la resolución de problemas; con el apoyo tecnológico se puede favorecer la interrelación de la estadística y la realidad mediante la apertura y el acceso a la modelización de una situación concreta y con datos reales.

3.3 Diseño de las actividades didácticas

En congruencia con todo lo anterior, una propuesta de intervención en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la estadística debiera girar en torno a situaciones que planteen problemas estadísticos cuyo abordaje, para un aprendiz, signifique desarrollar acciones semejantes a las que desarrollaría un estadístico o un practicante de la estadística. Teniendo esto presente, se plantea recurrir a actividades didáctica que partan de una situación problema y algunas preguntas, que requieren que los estudiantes participen en las diferentes etapas del proceso estadístico: el análisis previo de un problema, el planteamiento de preguntas sobre él, la selección de una muestra aleatoria –quizá tomando como población al grupo mismo- y el tratamiento de datos -su organización, resumen o representación encaminadas hacia un análisis, hasta arribar a la interpretación de resultados o a la comunicación de los mismos en el contexto de la situación. En este desarrollo se considera recomendable la incorporación del uso tecnología, así como la participación activa de los estudiantes y la reflexión alrededor de algunos conceptos básicos de la estadística, bajo la guía del profesor.

En este tipo de actividades, sin embargo, lo central está constituido en la tarea de comparar las diversas elaboraciones estadísticas que pueden ir siendo producidas, de hacer algunas cambios sobre estas y observar efectos, de interrelacionarlas, etc., de modo que las preguntas que dirigen la actividad del estudiante apuntan a una evolución paulatina en las interpretaciones y descripciones de los estudiantes producto de su reflexión individual, en equipo o con la participación de todo el grupo.

Tal es el caso de las actividades que se usarán para ilustrar la implementación de una serie de ideas planteadas, las cuales forman parte de una secuencia didáctica diseñada para promover el sentido de la variabilidad estadística entre estudiantes universitarios (Castro, 2013), contando para ello con el apoyo de tecnología computacional. Así mismo, para abonar a la comprensión del sentido de la variabilidad estadística, se consideró necesario la elaboración de una serie de actividades didácticas que muestren diferentes contextos reales así como los diversos aspectos y modos en que se presenta la variabilidad, además de recurrir a diversos contextos de uso, como: generación de datos, representación de los datos, análisis y comparación de conjuntos de datos, simulación de datos y situaciones de muestreo. (Reading y Shaughnessy, 2004).

Para su diseño, se estableció que la variabilidad tenía que ser entendida inicialmente como la capacidad de cambio en lo que se observa y, por tanto, la posibilidad de que sus resultados puedan ser diferentes entre sí, para evolucionar paulatinamente hacia la apreciación de razonamientos acerca de ella y que se encuentran implicados en la apreciación de diversos aspectos fundamentales en ellas y que deben dar lugar al desarrollo de capacidades para: su percepción (notarla, identificarla, reconocerla), su descripción (representarla, caracterizarla, interpretarla, buscar regularidades), su cuantificación (medirla, tratarla, manipularla), y su explicación (analizarla, identificación de causas, modelarla, controlarla o reducirla) (Shaughnessy, 2008).

Además, las actividades parten de una situación problema con contexto real para que los estudiantes la asocien a su futuro campo profesional, captar su interés y poderles mostrar los fuertes vínculos de las herramientas estadísticas con la realidad, utilizando tecnología como apoyo a través del software Excel de Microsoft Office. Si bien no es un software creado con fines estadísticos o educativos, con algunas limitaciones, permite resúmenes, representaciones y el análisis de datos aunado a facilidades interactivas y de vinculación dinámica entre sus elaboraciones así como la posibilidad de programar estas a través de macros. Sin embargo algo que ha influido fuertemente en su elección es la disponibilidad que de él se tiene en el medio y al acceso fácil que su manejo puede representar para la mayoría de los estudiantes en nivel superior.

4. Un ejemplo del uso de tecnología en educación estadística y consideraciones para su implementación

La secuencia que será utilizada en esta sección, consta de tres actividades y fue planeada para insertarse en el tema de estadística descriptiva dentro de un curso de Probabilidad y/o Estadística y, para su implementación, se apoya tanto en hojas de trabajo con cuestionamientos que guían la actividad de los estudiantes como en hojas Excel prediseñadas con datos sobre la situación, algún tratamiento inicial o incluso macros para automatizar exploraciones convenientes. Enseguida se comentan partes de dos de las actividades para el fin declarado.

4.1 Amplitud de brazos y estaturas

La primera de las actividades a la que se hará referencia, y primera en la secuencia, lleva por nombre “Amplitud de brazos y estaturas”. Tiene un contexto que puede ser ubicado dentro de la antropometría, el cual resulta conveniente conocer para diversas carreras de ingeniería y consta de 16 cuestionamientos. Tiene como referentes el trabajo de L. Da Vinci conocido como el “Hombre del Vitrubio” y se concreta en cuestionar una de las afirmaciones contenidas en él: la longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a la su altura. Se espera que esto lleve a la necesidad de contar con datos, obtener datos de estudiantes del grupo y abordar su análisis, implicando la presencia de la variabilidad y enfatizando el tratamiento en su percepción y descripción inicial, como parte de un primer acercamiento a la apreciación de la variabilidad que parte de las preconcepciones de los estudiantes desde un plano intuitivo. Con ella se persigue que: Los estudiantes descubran la necesidad de tener datos para resolver la situación planteada, perciban la variabilidad de los datos, la manipulen en diferentes formas, intenten encontrar patrones o regularidades y traten de explicarla para obtener conclusiones.

La actividad requiere adentrarse en el contexto, para lo que la participación del profesor, exponiendo aplicaciones actuales de la antropometría y de relaciones como la contenida en la afirmación que inicialmente se cuestiona, juega un papel clave. Se pide a los estudiantes que analicen tal afirmación y de ahí parten los cuestionamientos en torno a la posibilidad de corroborarla, con los cuales vayan surgiendo: la necesidad de contar con datos, la toma de

datos de mediciones de algunos estudiantes seleccionados como muestra, análisis iniciales de la variabilidad mediante representaciones espontáneas de los estudiantes y respuestas iniciales al cuestionamientos de la validez de la afirmación que se trata de corroborar.

En la última fase de la actividad interviene la tecnología proporcionada por un programa o macro en Excel con el fin de extraer una muestra aleatoria de un conjunto de datos conteniendo las mismas variables que las observadas en el aula y que ha sido obtenido de un contexto similar, lo que se puede hacer varias veces con opciones de un macro que además genera una organización de los datos así como resúmenes numéricos y gráficos. De estos resultados se pedirá a los estudiantes que observen, analicen y describan la distribución que siguen los datos en la muestra, argumentando particularmente la presencia de la variabilidad. Se trabajará en forma individual en un principio de esta fase y para finalizar se pasará a la reflexión colectiva a partir de comentar lo encontrado, para generar un debate de ideas bajo la guía del profesor, para lo cual contará con el apoyo de video proyección del archivo Excel.

Dadas las explicaciones y aclaraciones iniciales sobre el contenido y manejo del archivo Excel, los estudiantes abren el archivo “Datos amplitudes_estaturas.xls” para hacer exploraciones y empezar a descubrir los elementos puestos en funcionamiento.

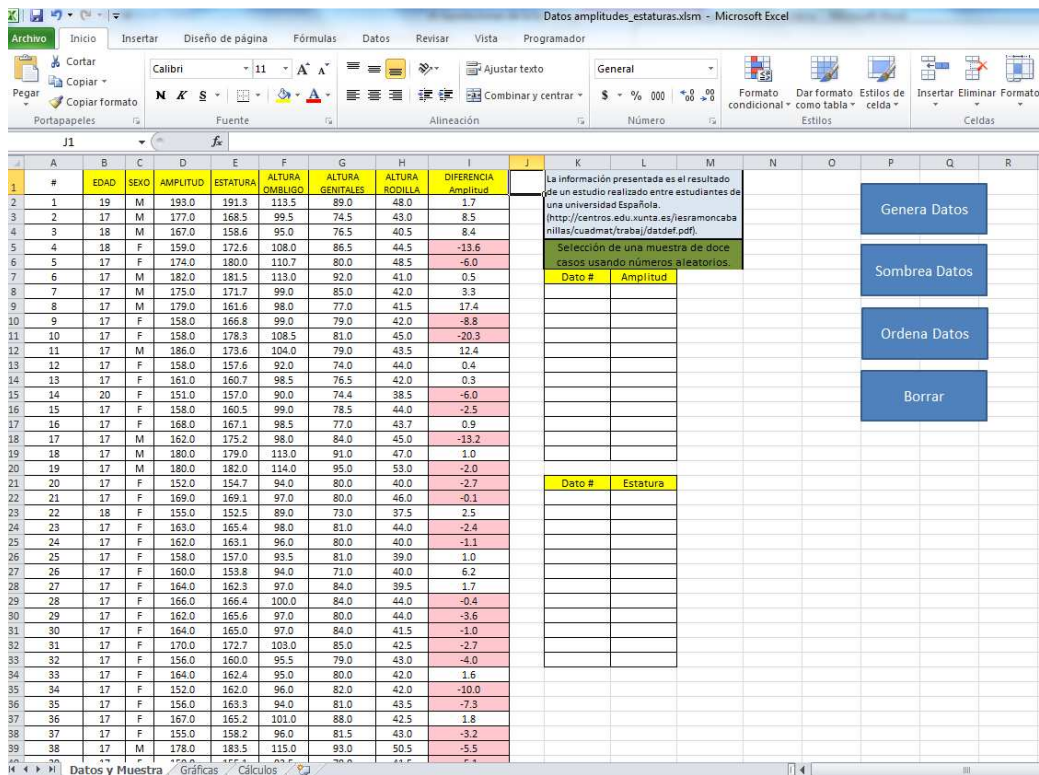


Figura 1. Pantalla de inicio del macro en Excel: Datos amplitudes_estaturas.xlsm, hoja “Datos y Muestra”.

El archivo Datos amplitudes-estaturas.xls, consta de tres hojas con los nombres: Datos y Muestra, Gráficos y Cálculos. Cada una de ellas proporciona información en diferentes registros de representación. En la primera de ellas, en su margen superior derecho (figura 1), se encuentran cuatro “botones” azules que permiten activar los macros:

a) “Generar Datos”, al pulsar este botón se obtendrá una muestra de doce individuos cuyas amplitudes se registran en el bloque de celdas L8:L19 y sus estaturas en el bloque L22.L33.

b) “Sombrear Datos”: realiza la clasificación de los datos seleccionados en cuatro grupos de acuerdo a su magnitud y los sombrea usando cuatro colores distintos.

c) “Ordenar Datos”: lleva a cabo la ordenación de los datos conservando los colores del sombreado.

d) “Borrar”: Limpia las celdas para una nueva selección.

En la figura 2 se muestra los resultados de activar sucesivamente los tres primeros botones,

cuyos resultados deben ser paulatinamente revisados por los estudiantes tratando de descubrir lo que hacen las macros y demás elementos de la hoja. La generación de una muestra así como las acciones complementarias puede ser realizada las veces que le resulte necesario al estudiante.

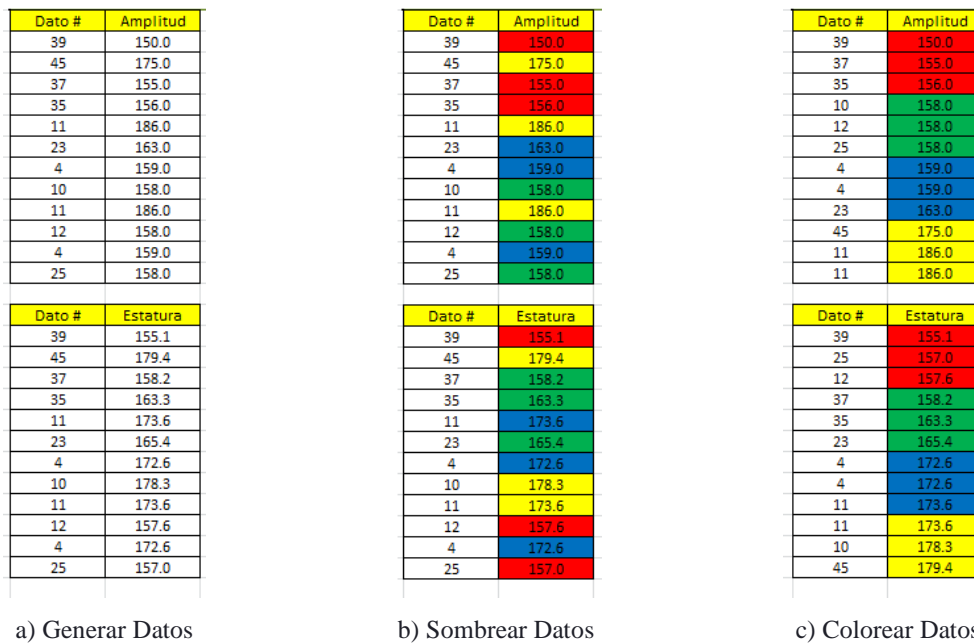


Figura 2. Resultados de accionar cada uno de los botones en una corrida del macro en Excel: Datos amplitudes_estaturas.xlsm, hoja “Datos y Muestra”.

Al generar la muestra en la hoja “Datos y Muestra”, las macros realizan gráficas y cálculos (estos en diversas unidades para resaltar algunas propiedades de los estadísticos calculados) en las hojas que adicionalmente cuenta el archivo, cuyos resultados (figura 3 y 4) también se solicita revisar al estudiante y plasmar sus conclusiones en los cuestionamientos.



Figura 3 Resultados en Hoja Gráficas de una corrida del macro en Excel: Datos amplitudes_estaturas.xlsm.

En este caso la interactividad entre el sujeto y la tecnología se da a través de los botones, cuyas producciones en diferentes registros de representación se encuentran vinculadas, reajustándose conforme se dan cambios en la muestra.

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | |
|----|---|--------------|---------------------|-----------|-----------|--------------|------------|---------------------|----------|-------------|------------|---------------------|--------|--------|
| 1 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | Resumen (mm) | | | | Resumen (cm) | | | | Resumen (m) | | | | |
| 3 | | | Amplitudes | Estaturas | | | Amplitudes | Estaturas | | | Amplitudes | Estaturas | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | Media | 1620.8333 | 1648.8333 | | | Media | 162.0833 | 164.8833 | | Media | 1.6208 | 1.6488 |
| 6 | | | Desviación Estandar | 83.0617 | 80.1451 | | | Desviación Estandar | 8.3062 | 8.0145 | | Desviación Estandar | 0.0831 | 0.0801 |
| 7 | | | Rango | 230.0000 | 247.0000 | | | Rango | 23.0000 | 24.7000 | | Rango | 0.2300 | 0.2470 |
| 8 | | | Mediana | 158.5000 | 166.0000 | | | Mediana | 158.5000 | 166.0000 | | Mediana | 1.5850 | 1.6600 |
| 9 | | | Varianza | 6899.2424 | 6423.2424 | | | Varianza | 68.9924 | 64.2324 | | Varianza | 0.0069 | 0.0064 |
| 10 | | | CV | 5.1246 | 4.8607 | | | CV | 5.1246 | 4.8607 | | CV | 5.1246 | 4.8607 |
| 11 | | | | | | | | | | | | | | |

Figura 4. Resultados en Hoja Cálculos de una corrida del macro en Excel: Datos amplitudes_estaturas.xlsm.

La transnumeración estadística acerca de la variabilidad se espera que surja de la observación de los productos de estas macros, de la reflexión individual, de compartir conclusiones y debatir ideas conforme se van dando avances en responder a los cuestionamientos previstos en las hojas de trabajo (ver Anexo 1).

4.2 El volumen de un recipiente

La segunda de las actividades a la que se hará referencia, y tercera en la secuencia lleva por nombre “El volumen de un recipiente”. Su contexto puede ser ubicado en la producción de recipientes cilíndricos para muestras médicas y el cumplimiento de especificaciones, control de calidad, que resulta conveniente conocer para diversas carreras de ingeniería y consta de 10 cuestionamientos. En este caso no se plantea trabajar con datos reales sino que se recurre a la simulación mediante un macro de Excel, que además de generar datos los resume tabular, gráfica y numéricamente para su análisis. Se trata de sistematizar la apreciación de la variabilidad recapitulando las concepciones elaboradas, pretendiéndose que los estudiantes lleguen evaluar la variabilidad en una muestra de datos, encontrando argumentos en las diferentes formas de representar la variabilidad que se les presenta.

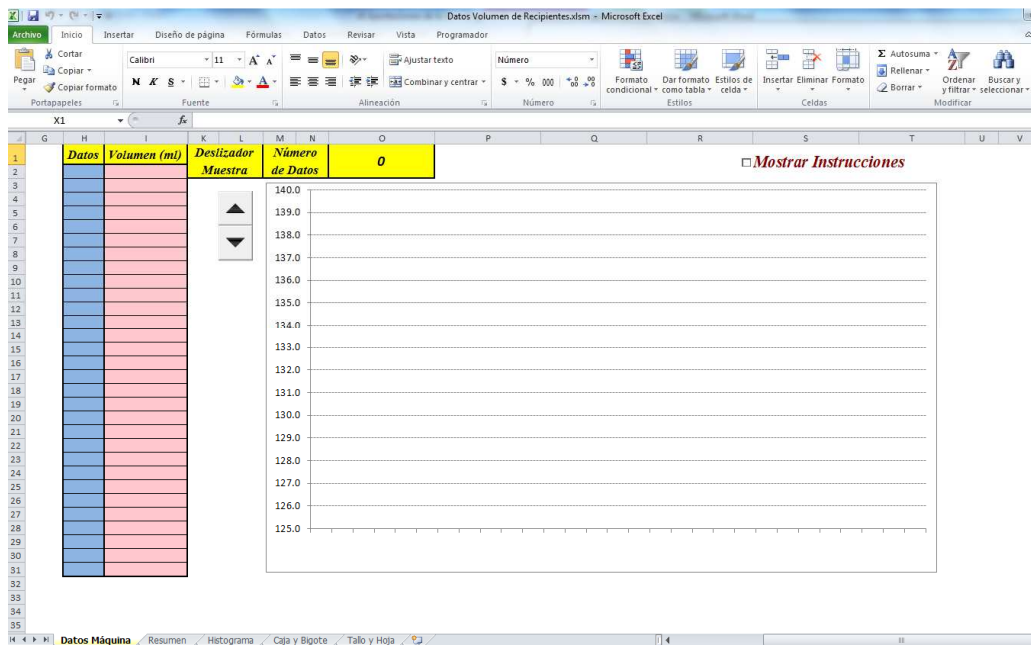


Figura 5. Resultados en una corrida del macro en Excel: Datos volumen de Recipientes.xlsm.

Los datos son simulados emulando los posibles resultados que se obtendrían en una recolección real en una fábrica que se dedica a la producción de artículos médicos, siendo los recipientes cilíndricos para muestras médicas el de interés para la actividad. Para asegurar el cumplimiento de la especificación por parte del equipo de calidad se tiene interés en calcular el volumen del recipiente con la intención de monitorear y detectar posibles defectos en la especificación del volumen de fabricación que es en promedio de 133 ml.

Con la participación del profesor detallando la actividad inicia la actividad. La naturaleza del contexto se presente como algo que cotidianamente ocurre en una compañía preocupada por la calidad de sus productos y por el cumplimiento de especificaciones establecidas en el mercado. Se pide a los estudiantes lean detenidamente la situación que se les presenta por escrito (ver Anexo 2) y a continuación que abran el archivo que se ha preparado para apoyar el desarrollo de la actividad y, a través del deslizador⁹ que presenta en su margen superior izquierdo (figura 5), se pide que hagan funcionar el macro que simula la selección

⁹Realmente el deslizador realiza dos funciones: El botón que tiene un triángulo con un vértice apuntando hacia arriba genera un nuevo dato al activarlo, mientras que el botón en que el triángulo tiene vértice hacia abajo elimina cada vez un dato simulado.

de un recipiente y arroja la determinación de su volumen, uno por uno hasta totalizar 30 datos.

Esto se puede realizar las veces que resulten necesarias al estudiante para descubrir los diversos elementos que de los que consta la hoja: al accionar el deslizador aparece el dato generado, un conteo de datos acumulados, se distingue mediante un sombreado en color rosa los datos mínimo y máximo, se registra el dato gráficamente con un punto y se actualiza una recta horizontal que indica el valor correspondiente a la media de la muestra, todo lo cual se busca sea descubierto por el estudiante.

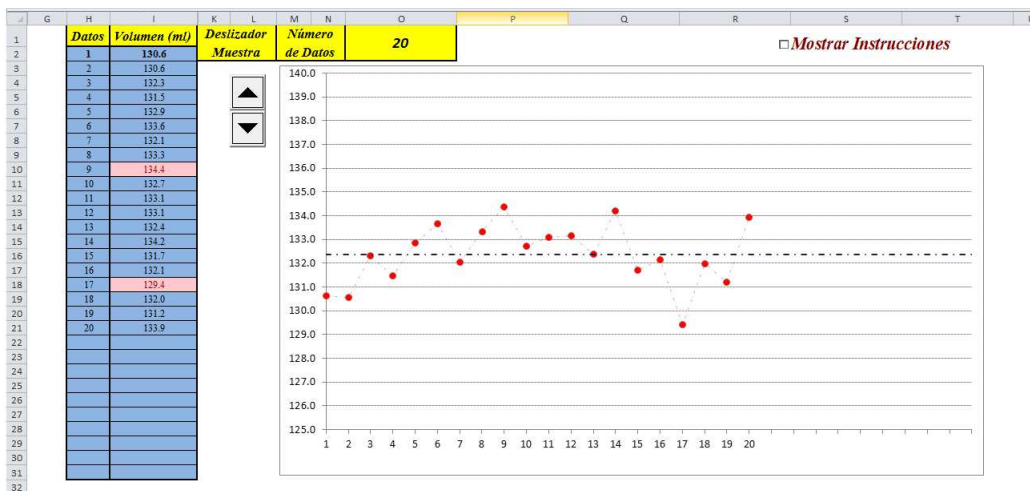


Figura 6. Resultados primeras veinte simulaciones en una corrida del macro en Excel: Datos volumen de Recipientes.xlsm.

En la figura 6 se muestra una corrida parcial del macro con información de cuya observación y análisis el estudiante, vía los cuestionamientos previstos para la actividad (ver Anexo 2), irá destacando elementos presentes para describir, representar y cuantificar a la variabilidad de los datos. Paralelamente, el macro irá generando resúmenes y representaciones en las hojas adicionales, cuyos nombres corresponden a su contenido: Resumen (numérico), Histograma, Caja y Bigotes, y, Tallo y Hoja; que proporcionarán información numérica y visual para abordar la variabilidad por medio de elementos como: el rango, las medidas de tendencia central, otras medidas de dispersión, la forma de la distribución, aglutinamientos presentes y patrón de los datos.

Particularmente la figura 7, correspondiente a la hoja “Caja y Bigote” con una corrida de 30 datos, permite visualizar de nueva cuenta los datos pero ahora con colores que implícitamente indican la formación de los cuatro grupos en que los cuartiles dividen al conjunto de datos, un resumen de los cinco números en que se basa el diagrama de caja y bigote para estos datos y el diagrama mismo.

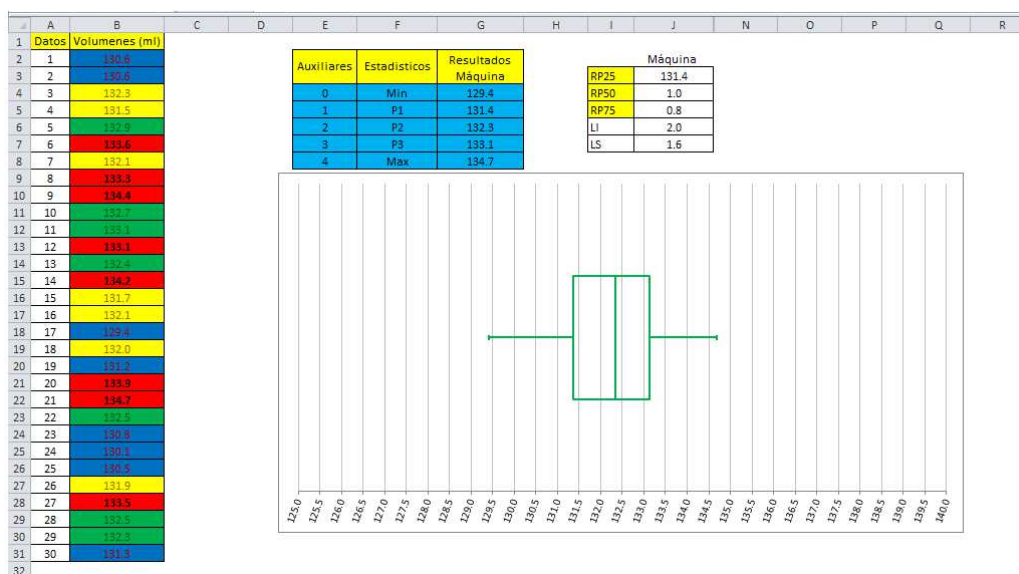


Figura 7. Resultados primeras treinta simulaciones en una corrida del macro en Excel: Datos volumen de Recipientes.xlsm.

Además, apoyados por los cuestionamientos previstos en la hoja de trabajo (ver Anexo 2), se espera que los estudiantes tomen algunas decisiones sobre la utilidad de las representaciones ofrecidas por el macro, que propongan algún estadístico o gráfico diferente para representar los datos, y, principalmente, que de todo esto extraigan argumentos y conclusiones acerca de la variabilidad que presentan los datos, utilizando los elementos proporcionados.

5. Reflexiones finales

Una puesta a prueba de la secuencia didáctica en un grupo de estudiantes de ingeniería (Castro, 2013), ha arrojado que ésta contribuye incipientemente a alcanzar los objetivos trazados, ya que: a través de los cuestionamientos se observa que los estudiantes desarrollan percepción de la variabilidad, que utilizan argumentos basados en estadísticos para

describirla y cuantificarla aunque más frecuentemente el recorrido y el rango que la desviación estándar o la varianza, y que entran en la consideración de posibles factores que contribuyen a la variabilidad cuestionando la posibilidad de controlar algunos de ellos. Tales resultados no son indicadores de una incorporación exitosa de la tecnología al aula de clases de estadística pero tampoco se puede soslayar que se requieren esfuerzos continuos y sistemáticos para mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la estadística, particularmente para lograr efectividad en tal incorporación.

Cabe decir, por un lado, que los resultados también pueden estar indicando la falta de refinamiento en los cuestionamientos, de una mayor compenetración en el profesor de las estrategias adoptadas o de una planificación que dosifique en mayor medida su intervención para permitir la contribución de más ideas de parte de los estudiantes finalmente reforzada por una institucionalización de los objetos estadísticos emergentes. También que debe valorarse la complejidad del objeto de estudio, la consideración de que el nivel previo no necesariamente aporta a los estudiantes un acercamiento inicial, inconvenientes en cuanto al número de estudiantes por grupo y el tamaño de las aulas, que pudo haber faltado familiaridad de los estudiantes la dinámica implementada o que faltó intensidad y consistencia en las interacciones docente-discente.

Por otro lado, tratándose de valorar más directamente la incorporación de la tecnología existen factores de afectación que debieran considerarse detenidamente para una valoración más completa, como: el uso de tecnología siempre es presionada por el tiempo disponible, el supuesto de familiaridad de los estudiantes con la tecnología puede estar fallando, la actitud de los estudiantes se ve afectada por fallas en el uso de los recursos tecnológicos, las acciones de observación de representaciones y la comparación de repeticiones de muestreos no se implementa con la intensidad suficiente, entre.

Finalmente debe tenerse presente que adquirir el sentido de la variabilidad estadística es un proceso que no se completa en la brevedad de una secuencia didáctica como la que se ha usado, sino quizá a lo largo del curso y que la aportación de la tecnología como aquí se concibe tiene un lugar posible en ese proceso que va más allá de la comprensión de la variabilidad.

6. Referencias bibliográficas

- Batanero, C., Godino, J. D. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. E. R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz, España: Universidad de Extremadura.
- Ben-Zvi, D. (2001). Technological Tools in Statistical Education. In *Jornades europees d'estadística. L'ensenyament i la difusió de l'estadística* (201-220). Palma de Mallorca, España: Ed. Conselleria d'Economia, Comerç i Indústria.
- Castro L., F de J. (2013) *Actividades Didácticas para Promover el Sentido de la Variabilidad Estadística*. (Tesis inédita de maestría). Programa de Maestría en Ciencias Especialidad en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora, Hermosillo, México.
- Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instructions and assessment. *Journal of Statistics Education*,10(3). Recuperado del sitio: www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J., Medina, E. (2007). The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1). Recuperado del sitio: <http://www.escholarship.org/uc/item/8sd2t4rr>
- Cobb, G. W. (1992). Teaching Statistics. In Lynn A. Steen (Ed.) *Heeding the Call for Change: Suggestions for Curricular Action* (3-43). Washintong D. C.: The Mathematical Association of America.
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65. Traducción al español realizada por F. Hitt y A. M. Ojeda, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, 1997, México.

Friel, S., Curcio, F., Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Garfield, J., Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Gould, R., Lock, R., Moore, T., Roosman, A., Stephenson, B., Utts, J., Velleman, P., Witmer, J., (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) College report*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado del sitio: <http://www.amstat.org/education/gaise/GAISECollege.pdf>

ITSON (2009). Programa del curso Probabilidad y Estadística. Cd. Obregón, México: Instituto Tecnológico de Sonora.

Pfannkuch, M., Wild, C. (2000). Statistical Thinking and Statistical Practice: Themes Gleaned from Professional Statisticians. *Statistical Science*, 15(2), 132-152.

Reading, C.; Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 201–226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Shaughnessy, J. M. (2008) What Do We Know Student's Thinking and Reasoning about Variability in Data? *NCTM Research Brief*. Recuperado del sitio: <http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=15521>

UNISON (2003) Lineamientos generales para un modelo curricular de la Universidad de Sonora. *Gaceta*, febrero de 2003. Hermosillo Sonora México: Universidad de Sonora.

Wild, C., Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.

7. Anexos

7.1 Anexo 1

Cuestionamientos de la última fase de la actividad: “*Amplitud de brazos y estaturas*”

Para lo que se te solicita en los siguientes puntos será necesario trabajar en el archivo Excel: Datos amplitudes-estaturas.xls, el cual contiene datos semejantes a los aquí obtenidos pero en mayor número y más variables consideradas, datos que provienen de un estudio realizado en otra universidad.

Al abrir el archivo se te presentará la hoja con nombre “Datos y muestra” en su pestaña. Contiene todos los datos y, a su derecha, una muestra aleatoria que te pedimos actualizar pulsando el botón “Genera Datos”, varias veces si gustas, observando lo que ocurre.

12. De la revisión de datos de la última muestra obtenida en la hoja “Datos y muestra”,

¿Qué puedes decir de la distribución o comportamiento de las doce amplitudes (se ubican en las celdas L8:L19)? Y ¿qué puedes decir acerca de su variabilidad? Explica tus respuestas.

¿Qué puedes decir de la distribución o comportamiento de las doce estaturas (se ubican en las celdas L22:L33)? Y ¿qué puedes decir acerca de su variabilidad? Explica tus respuestas.

13. Revisando ahora lo que muestra la hoja de “Gráficas”,

¿Qué puedes decir de la distribución de las amplitudes? Explica tu respuesta.

¿Qué puede decir de la distribución de las estaturas? Explica tu respuesta.

Al comparar gráficas de amplitudes y estaturas, ¿qué puedes decir de su variabilidad relativa? Explica tu respuesta.

14. Revisando ahora lo que muestra la hoja de “Cálculos”,

¿Qué puedes decir de la distribución de las amplitudes? Explica tu respuesta.

¿Qué puede decir de la distribución de las estaturas? Explica tu respuesta.

Al comparar resúmenes de amplitudes y estaturas, ¿qué puedes decir de su variabilidad relativa? Explica tu respuesta.

15. ¿Qué tipo de representación te da más argumentos para decidir acerca de la variabilidad de los datos? Explica ampliamente.

16. ¿Qué puedes decir de la afirmación de Da Vinci que se intenta corroborar? ¿A qué conclusión puedes llegar? Explica ampliamente.

7.2 Anexo 2

Situación problema y algunos cuestionamientos de la actividad: “*E volumen de recipientes*”

Una compañía dedicada a proveer ciertos implementos al ramo médico, tiene como uno de sus principales productos a fabricar contenedores de plástico para muestras. Para monitorear el proceso y detectar posibles defectos de fabricación en las dimensiones del producto, los inspectores de control de calidad, recaban cada hora una muestra de 30 recipientes del producto y toman medidas de su diámetro y de su altura. Los datos obtenidos son capturados para su estudio por el departamento de control de calidad. Para

después calcular el volumen, cuyo valor pretendido es de 133 ml o 4 Oz.

Los valores obtenidos se comparan entre sí y con el volumen pretendido ya que fluctuaciones grandes en estos no son deseables y su detección oportuna permite acciones de control para mantener esta característica importante del producto en valores razonablemente aceptable.



1. Habiendo generado los 30 datos utilizando el archivo Excel proporcionado (pestaña, Datos maquina 1), ¿Qué puedes decir acerca de la variabilidad de los datos presentados tabular y gráficamente?

4. Selecciona la pestaña Resumen, contesta lo siguiente, ¿Qué puedes decir acerca de la variabilidad en el resumen presentado? Argumenta tomando como referencia lo ya expuesto en la parte anterior y contrastando con los argumentos que te genera la nueva representación.

6. Selecciona la pestaña de Caja y bigote, contesta lo siguiente, ¿Qué puedes decir acerca de la variabilidad en el diagrama de caja y bigote presentado? Argumenta tomando como referencia lo ya expuesto en la parte anterior y contrastando con los argumentos que te genera la nueva representación.

8. ¿Cuál de las diferentes representaciones analizadas anteriormente permite mejores argumentos para describir, y cuantificar la variabilidad?

10. ¿A qué conclusiones puedes llegar acerca de la variabilidad de los datos