Actividades selectos de Matemáticas I

Material del estudiante

CENTRO REGIONAL DE FORMACIÓN DOCENTE E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA DEL ESTADODE SONORA

Programa de especialidad en el uso de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas

Martha Cristina Villalba Gutiérrez Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez Maricela Armenta Castro José Ramón Jiménez Rodríguez Manuel Alfredo Urrea Bernal Guadalupe Villaseñor Gándara

[Título del curso]

El presente documento fue elaborado por académicos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Corresponde al material de la asignatura Actividades selectas de Matemáticas I que será utilizado por el estudiante que participe en el Programa de especialidad en uso didáctico de tecnología digital para la enseñanza de las matemáticas del Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora.

Comisión de Diseño Curricular
Autores
M.C. Martha Cristina Villalba y Gutiérrez
M.C. Maricela Armenta Castro
M.C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez
M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal
M.C. Guadalupe Villaseñor Gándara

ISBN:

Blvd. Rosales y Luis Encinas s/n. Col. Centro
C.P.83000, Hermosillo, Sonora, México.

Tabla de contenidos Secuencia1
Pensamiento Geométrico

Secuencia 1

Pensamiento Geométrico

Presentación

Esta secuencia de actividades tiene como intención llevar a cabo desarrollos del pensamiento geométrico personal a través de experiencias que involucran de manera central los procesos generales de visualización, construcción y validación que los constituyen, todo ello generado a partir de interacciones con el software de geometría dinámica GeoGebra. Se propone el estudio de figuras o formas geométricas no solo con el fin de reconocerlas o clasificarlas, sino de llevar a cabo aquellas construcciones y procesos que incluyen relaciones más finas de las propiedades de los objetos estudiados en este ambiente dinámico. Se pretende generar articulaciones conceptuales que faciliten realmente la promoción de habilidades particulares de los procesos generales de visualización, construcción y validación, como son: observar, experimentar, clasificar, describir, relacionar, trazar, calcular, argumentar, justificar, intuir, conjeturar, deducir y probar; entre otras que distinguimos como propias de ese pensamiento geométrico que, como profesores, tenemos la responsabilidad de perfeccionar; no solamente saber que existen, sino advertirlas como parte de nuestra manera de pensar para ser capaces de promoverlas en los estudiantes a nuestro cargo.

En las actividades que conforman la Secuencia se colocan al centro, como se mencionó antes, la manipulación y construcción de trazos y figuras en el ambiente de geometría dinámica: esto permite que las acciones requeridas para llevarlas a cabo pongan en juego la utilización de estrategias que implican, a su vez, búsqueda de relaciones entre los elementos geométricos implicados (procesos de visualización). Asimismo, una constante en las actividades propuestas se relaciona con la descripción de las estrategias utilizadas y la argumentación de sus propósitos y resultados.

Al abordar los temas propuestos a través de situaciones en las que los cuestionamientos implican conceptos o propiedades que utilizamos en clase de manera rutinaria, se espera que despierten la actitud crítica sobre reglas establecidas, y así, lograr determinar con la debida justificación las restricciones y los alcances de las mismas.

El común denominador en dichas actividades es combinar la reflexión personal con el trabajo en equipo y la socialización de los diversos procesos llevados a cabo, tratando de argumentar sobre su eficacia y/o validez. Consideramos que ésta será la estrategia central para asegurar esa promoción del pensamiento geométrico que buscamos.

Inicio

Actividad 1
Construcciones en el ambiente de geometría dinámica

Tarea 1. ¿Son iguales o diferentes?

1. Revise con cuidado la Figura G1 para que describa enseguida lo que se le solicita.

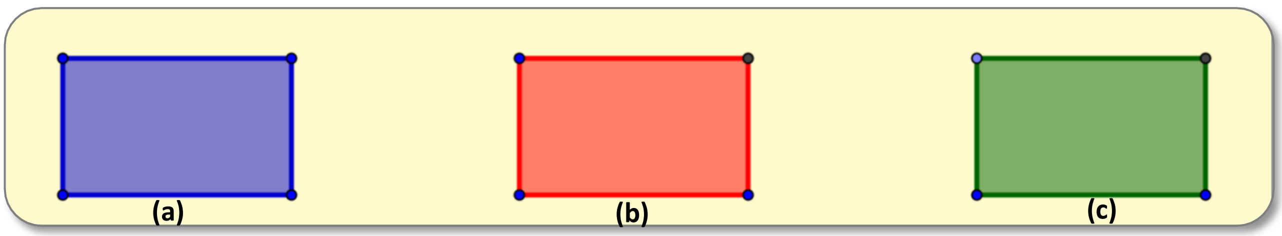


Figura G1

¿Cuáles son las características que tienen en común las tres figuras geométricas **(a), (b) y (c),** y cuáles son las que las hacen diferentes? Escriba a continuación su respuesta y coméntela con el grupo bajo la guía del instructor.

2. Abra el applet de GeoGebra *tres figuras* en donde usted verá en pantalla las figuras **a, b y c.** Mueva libremente los vértices o lados de cada una para que explore lo que sucede con ellas.

   a. En este caso, ¿cuáles son las características que tienen en común las tres figuras a, b y c, y cuáles son las que las hacen diferentes?

b. ¿Qué características geométricas deben prevalecer en la figura **a** para que, a pesar de los movimientos ejercidos en sus lados o vértices, la figura se mantenga como rectángulo?

c. ¿Qué características geométricas prevalecen en las otras figuras a pesar de los movimientos ejercidos en sus lados o vértices?

d. Exprese brevemente su idea acerca de la manera en que, durante la producción de cada rectángulo representado en las figuras a, b y c, se trazaron sus lados para que al mover sus elementos adquieran las formas resultantes. Comente su idea en el equipo y, posteriormente, con el grupo bajo la guía de su instructor.

3. Abra un archivo nuevo de GeoGebra y reproduzca las tres figuras que acaba de examinar. Verifique que al mover los vértices o lados en cada una, sucede exactamente lo mismo que en las anteriores; es decir, que las características dinámicas se replican. Guarde su archivo con el nombre “Apellidos-G1” y envíelo a su instructor por la plataforma.

4. Enseguida se le solicitan las descripciones de los pasos que usted siguió para replicar cada una de las figuras. Trate de hacerlo en forma secuenciada aún si se dio el caso que no haya tenido éxito. Coméntelas con sus compañeros de equipo y luego con el grupo:

a. Describa los pasos que siguió para replicar la **figura (a)**.

b. Describa los pasos que siguió para replicar la **figura (b)**.

c. Describa los pasos que siguió para replicar la **figura (c)**.

Cuando una figura geométrica mantiene las características que la determinan como tal, a pesar de cambiar de tamaño o posición al ser manipulada por el movimiento de sus componentes, se dice que ha sido *construida:* la figura se considera una *construcción geométrica.* En cambio, si bajo las mismas condiciones de manipulación la figura pretendida se deforma, se concluye que *no es una construcción geométrica de tal figura sino un dibujo de ella*.

Una construcción geométrica en el ambiente de geometría dinámica se verifica a través de "*la prueba del arrastre*" (la manipulación de elementos).

Tarea 2. Nociones geométricas que fundamentan las construcciones básicas con software de geometría dinámica.

1. Abra un nuevo archivo GeoGebra. En la ventana gráfica construya tres triángulos: un triángulo arbitrario, un triángulo equilátero y un triángulo isósceles. Estos triángulos deben conservar sus propiedades definitorias al aplicar la "prueba del arrastre", es decir, al mover cualquiera de sus vértices. Guarde su archivo y envíelo

al instructor con el nombre "Apellidos-G2" Describa a continuación los pasos de sus construcciones.

2. En otro archivo (envíelo al instructor como "Apellidos-G3") construya un pentágono regular de lado $3\ cm$ sin usar la herramienta disponible en el menú del GeoGebra que lo traza directamente, es decir, se le solicita que su construcción la lleve a cabo haciendo los trazos convenientes de tal forma que la construcción final soporte la *prueba del arrastre*.
    a. ¿Qué elementos del pentágono permitieron que la construcción fuera adecuada?

    b. Una vez que considere que su pentágono está bien construido, trace en la misma ventana gráfica y haciendo uso de la herramienta disponible en el menú del software, otro polígono regular de mayor número de lados pero con la longitud de sus lados igual a la longitud de las diagonales del pentágono anterior.
        i. Copie la ventana gráfica en el portapapeles y péguela aquí convenientemente como una imagen.

        ii. Describa su procedimiento de construcción y precise qué nociones geométricas entraron en juego al llevarlo a cabo.

3. En la Figura G1 se le presentaron tres rectángulos y seguramente usted los identificó rápidamente como tales. Trataremos ahora de ponernos de acuerdo sobre algunas nociones implicadas en sus elementos principales, es decir, sobre las nociones de: ángulo recto, la perpendicularidad y el paralelismo que presentan

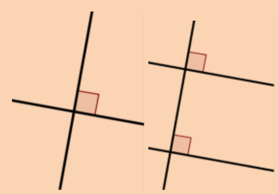
respectivamente los lados consecutivos y los lados opuestos de cada figura. Responda a las siguientes preguntas y luego coméntelas en el grupo bajo la guía de su instructor.

a. ¿Cómo define usted dos rectas perpendiculares entre sí? Mediante doblado de papel, construya un par de ellas en una hoja blanca cuidando que ninguna sea paralela a los bordes de la misma.

b. Seguramente al definir rectas perpendiculares, se hace mención del ángulo recto. ¿Cómo define usted a un ángulo recto, sin usar su medida y sin mencionar la perpendicularidad? Para apoyar la concreción de su respuesta, abra el applet GeoGebra *ángulos rectas secantes* y siga la guía de exploración propuesta en el mismo.

c. ¿Cómo define usted dos rectas paralelas? Construya un par de ellas, utilizando el recurso del doblado de papel con las mismas indicaciones del inciso *a.* de este punto. ¿Cómo interviene la noción de perpendicularidad en esta construcción?

d. Exprese su opinión sobre las bondades y limitaciones de las maneras de llevar a cabo las construcciones solicitadas, tanto con doblado de papel como con GeoGebra. Coméntelo con el grupo bajo las indicaciones del instructor.



- La perpendicularidad de dos rectas secantes se determina mediante *el tipo de ángulos* que forman.
- La definición de ángulo recto descansa en *las características de los ángulos* que forman dos rectas secantes.
- La construcción de rectas paralelas en el plano descansa en la doble perpendicularidad: una recta l_1 es paralela a *otra* recta l_2 si ambas son perpendiculares a una recta m.

Ejercicio 1 (EG1):

1. Realice las siguientes construcciones en un archivo de Geogebra y envíe el archivo como "Apellidos EG4a":
    a. Un triángulo arbitrario.
        i. Sus medianas, en color rojo.
        ii. Sus bisectrices, en color verde oscuro.
        iii. Sus mediatrices, en color azul.
        iv. Sus alturas, en color naranja.
    b. Para cada tipo de las rectas notables que construyó, determine su punto de intersección y márquelo.

i. En cada caso, ¿cómo se denomina este punto? Enlístelos y enuncie enseguida alguna de sus características.

ii. Arrastre libremente los vértices del triángulo y analice en qué casos los puntos quedan alineados o coinciden. Escriba sus conclusiones.

2. Trace la apotema de los dos polígonos regulares que construyó en el archivo GeoGebra solicitado en punto 2 de la Tarea 2 y envíe el archivo como “Apellidos-EG4b”.
    a. Describa su procedimiento.

Tarea 3. Virtual. Construcciones dinámicas que ilustran teoremas geométricos interesantes.

1. Circunferencia inscrita en un triángulo arbitrario.

a. Observe la figura G2 y explique cómo se construye una circunferencia inscrita en un triángulo. Enliste todos los elementos geométricos involucrados.

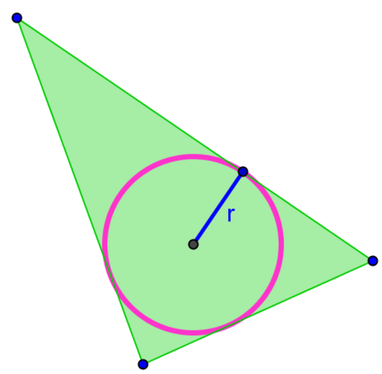


Figura G2

b. Utilice GeoGebra para llevar a cabo la construcción (“Apellidos G5”) y explique detalladamente el protocolo[1] de la misma.

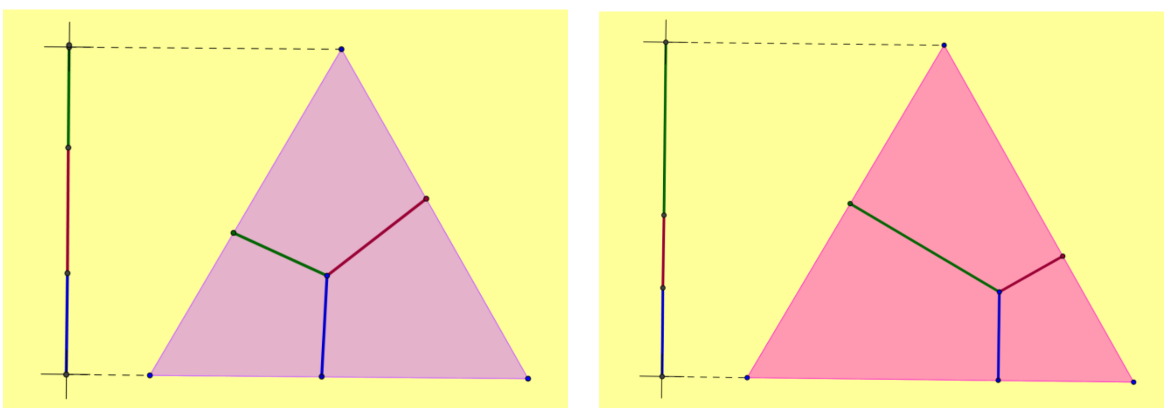
c. Argumente, en el Foro que se disponga para ello, sobre la validez de la siguiente afirmación: “El producto del semi-perímetro de un triángulo

[1] En un ambiente de geometría dinámica el “protocolo de la construcción” es la secuencia de pasos para llevarla a cabo.

arbitrario por el radio de su circunferencia inscrita es igual al área de dicho triángulo". Explore la construcción dinámica contenida en el applet GeoGebra *radio-semiperímetro* para apoyar sus procesos de argumentación mediante la visualización de los elementos involucrados.

2. Teorema de Viviani.

   a. Para ilustrar este interesante teorema geométrico, dos profesores de secundaria hicieron las construcciones con GeoGebra mostradas en la Figura G3:



(a) **(b)**

Figura G3

   b. Abra los applets *viviani-a* y *viviani-b*. Analice ambas construcciones e identifique semejanzas y diferencias entre ellas. Comente en el Foro disponible sus observaciones.

   c. Investigue en internet el enunciado del Teorema de Viviani, enúncielo e identifique cuál de las construcciones es adecuada para ilustrar el teorema. Justifique ampliamente su respuesta. Explique por qué la otra construcción no es adecuada.

d. Construya el triángulo equilátero, un punto interior arbitrario y los segmentos que representan las distancias de ese punto a cada uno de los lados del triángulo de manera que resulte adecuada al teorema de Viviani. Guarde y envíe como "Apellidos-G6".

e. Utilice el applet "*viviani-reconfiguración"* como apoyo para justificar la validez del Teorema de Viviani. Comparta en el Foro los argumentos derivados de la visualización y comente sobre algunos de los presentados por sus compañeros.

La geometría dinámica permite visualizar las afirmaciones hechas en los enunciados de los teoremas. Las argumentaciones que se derivan de esas visualizaciones se apoyan en las propiedades y relaciones que se perciben.

La expresión de los razonamientos sobre la validez de un teorema debe ser lo más clara posible de manera que efectivamente los argumentos asociados a la visualización se consideren una *demostración* de tal teorema. En este caso se dice que el razonamiento lógico utilizado se expresa mediante un *discurso figural.*

La *demostración* basada en el *discurso figural* es diferente a la *demostración formal*, ya que esta última no se apoya en la visualización, sino únicamente en la concatenación lógica y formal de proposiciones derivadas de propiedades, definiciones o axiomas.

▸ Desarrollo

Actividad 2
Áreas y Perímetros de Figuras Geométricas

Tarea 4. Áreas en el geoplano virtual

Para esta actividad puede utilizar las plantillas con los puntos marcados, o bien, puede utilizar el archivo GeoGebra *Geoplano Virtual*.

La unidad de área en el geoplano será la del cuadrado más pequeño que pueda obtenerse al unir cuatro puntos. A esta unidad la llamaremos unidad cuadrada. Asimismo, la unidad de longitud será la distancia vertical u horizontal entre dos puntos consecutivos. Ver Figura G4.

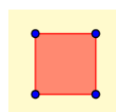
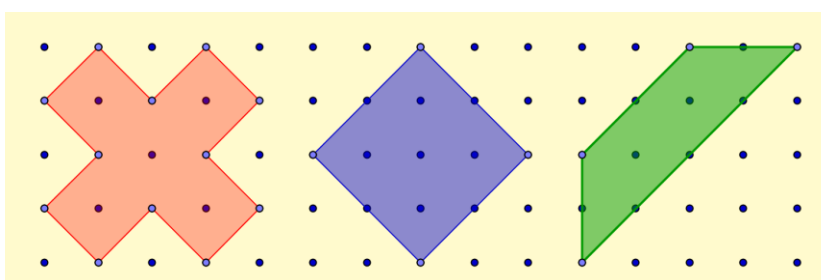


Figura G4

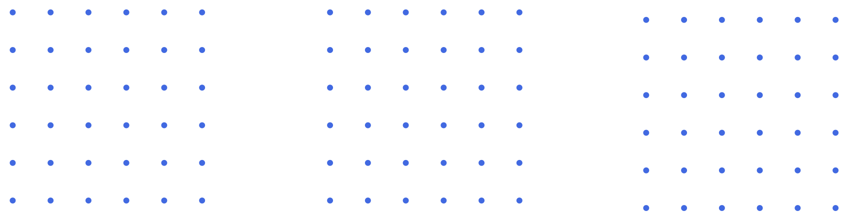
1. Determine el área y perímetro de los polígonos que se muestran en la Figura G5:



(a) **(b)** **(c)**

Figura G5

2. Ahora, construya en la plantilla las siguientes figuras:
   a. Un cuadrado con área de cuatro unidades cuadradas.
   b. Un triángulo isósceles con área de cuatro unidades cuadradas.
   c. Un cuadrado con área de dos unidades cuadradas.

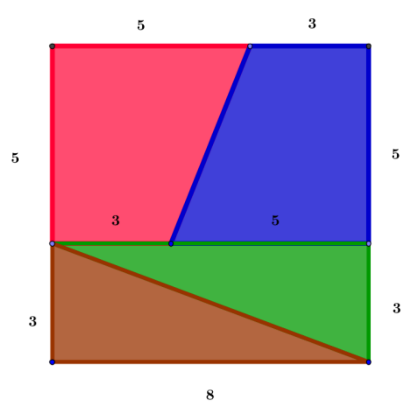


Las unidades de longitud, aunque no sean estándar, deben ser unidimensionales (D1).
Asimismo, las unidades convenidas de área (medida de superficie), deben ser bidimensionales (D2).

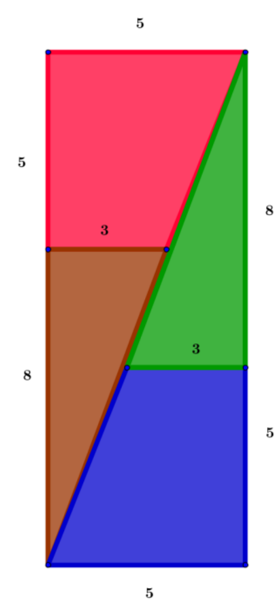
Tarea 5. El geoplano virtual como apoyo en la medición

1. **¿Una paradoja?**

   La Figura G6 muestra un cuadrado (a) que se corta en cuatro partes y, reordenando las piezas, se reconfigura en un rectángulo (b).
   Compare el área y el perímetro de ambas figuras.



(a)



(b)

Figura G6

a. ¿Es explicable el cambio en el valor del perímetro considerando que ambas figuras están conformadas por las mismas piezas? ¿Cómo?

b. ¿Cuál cree que es la razón por la cual existe el cambio en el valor del área? ¿Es explicable este cambio? ¿Por qué?

c. Comente en equipo sus conclusiones, y descríbalas a continuación para posteriormente exponerlas ante el grupo bajo la guía del instructor.

d. Abra el applet *paradoja área* para que, en el ambiente del geoplano virtual, reconfigure el cuadrado en el rectángulo. ¿Se valida su explicación sobre el cambio en el valor del área?

e. Si se tienen distintos rectángulos con el mismo perímetro ¿Todos deben de tener la misma área? Justifique su respuesta.

f. Para verificar su respuesta, consulte el applet *rectángulo perímetro fijo* y siga la guía de exploración. Escriba y comparta sus respuestas con sus compañeros

2. Utilice los applets que se indican en los incisos correspondientes para que, en el ambiente del geoplano virtual obtenga las áreas que se le solicitan:
   a. En equipo encuentre el área del triángulo que se muestra en el applet *área triángulo geoplano virtual* y describa su estrategia de solución.

   b. Encuentre el área en cada uno de los casos mostrados en el applet *área de triángulos rectángulos* y describa su estrategia de solución.

La determinación del área de un polígono cualquiera puede ser lograda mediante reconfiguraciones, descomposiciones, combinaciones y cálculos derivados de las propiedades de las figuras resultantes.

3. Siga las acciones indicadas en cada inciso para que logre establecer una regla que le permita determinar el área de polígonos irregulares de una manera alternativa a las que ha estado utilizando.

   a. Encuentre las áreas de los polígonos se muestra en Figura G7. Luego complete la Tabla G1

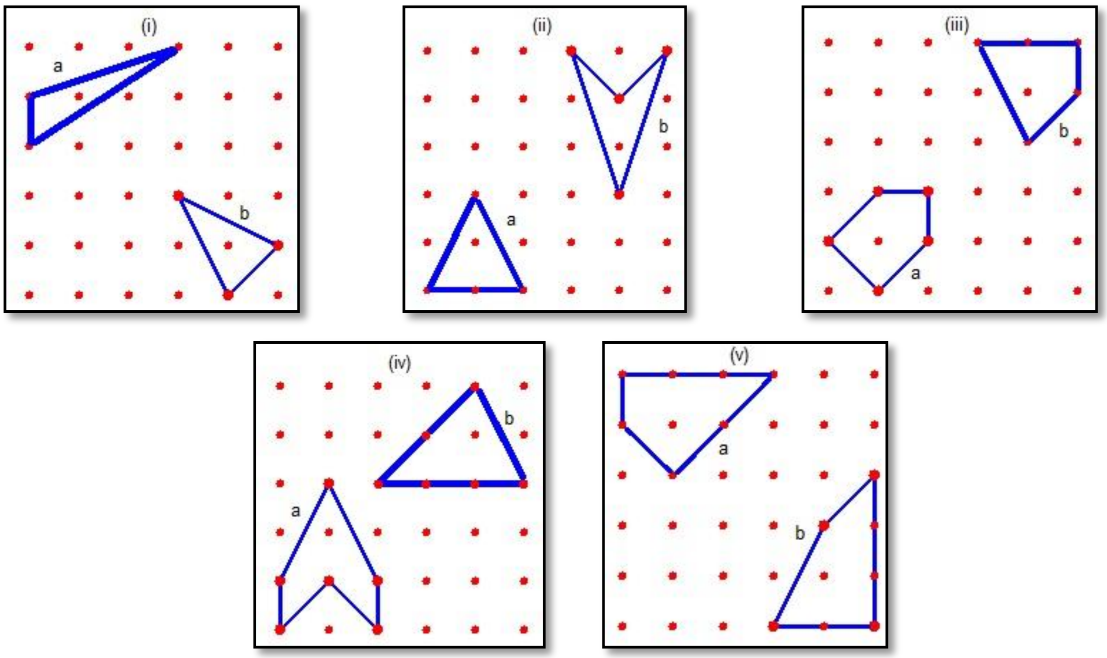


Figura G7

Tabla G1

Figura	Puntos interiores	Puntos en el perímetro	Área del polígono	
			a	b
(i)	1	3		
(ii)		4		
(iii)				
(iv)				
(v)				

b. Encuentre las áreas de los polígonos que se muestran en la Figura G8. Luego complete la Tabla G2

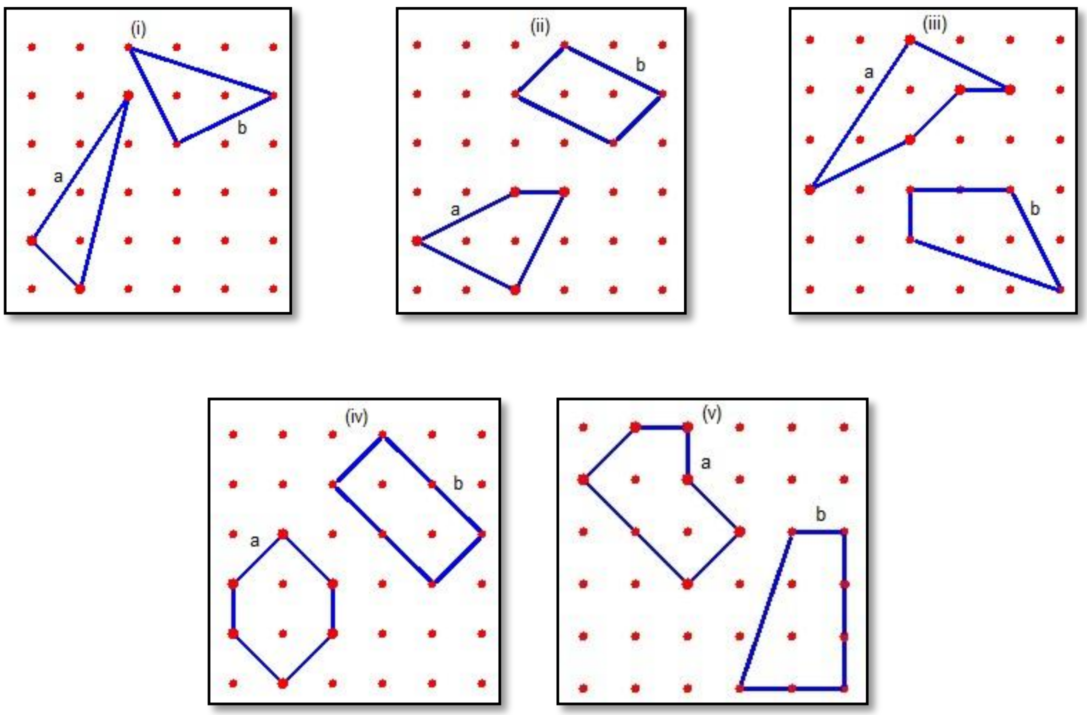


Figura G8

Tabla G2

Figura	Puntos interiores	Puntos en el perímetro	Área del polígono	
			a	b
(i)	2			
(ii)		4		
(iii)				
(iv)	2			
(v)		7		

c. Encuentre las áreas de los polígonos que se muestran en la Figura G9. Luego complete la Tabla G3

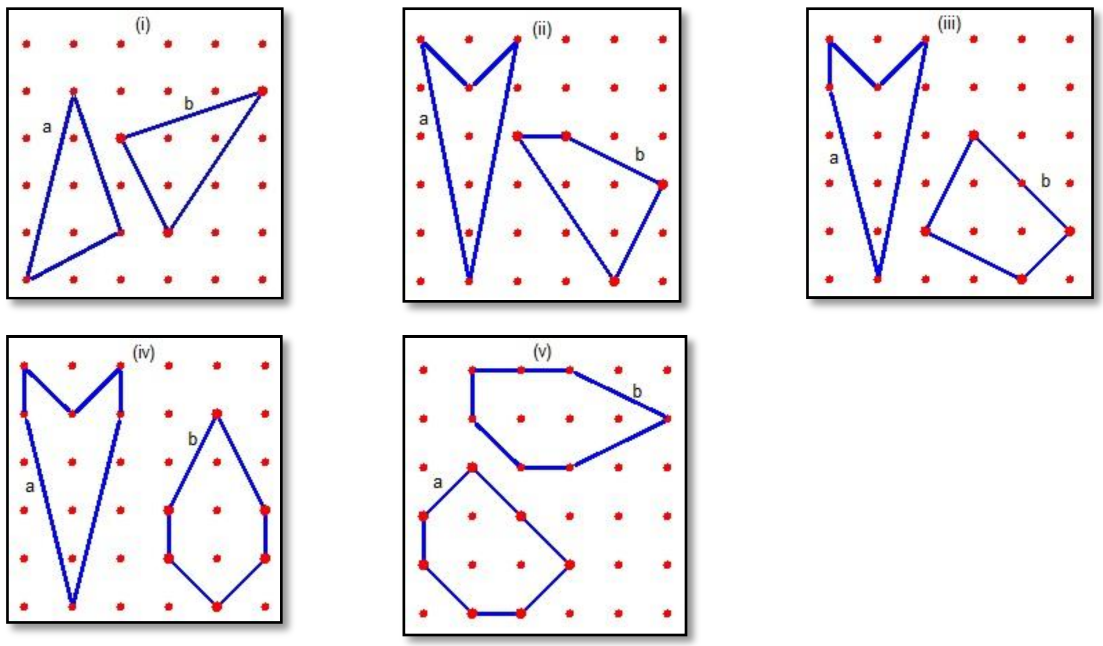


Figura G9

Tabla G3

Figura	Puntos interiores	Puntos en el perímetro	Área del polígono	
			a	**b**
(i)	3			
(ii)		4		
(iii)				
(iv)	3			
(v)		7		

d. Utilice el parámetro b para indicar un cierto número de puntos en el perímetro

Tabla G4

Puntos interiores	Puntos en el perímetro	Área del polígono
0	b	

1	b	
2	b	
3	b	
…	…	…
i	b	

e. En equipo compare con sus compañeros la expresión que construyeron en el último renglón, y comenten sobre las expresiones encontradas. Anote sus conclusiones.

f. En el geoplano virtual construya varios polígonos y verifique que mediante la expresión encontrada efectivamente se puede calcular el área de los mismos.

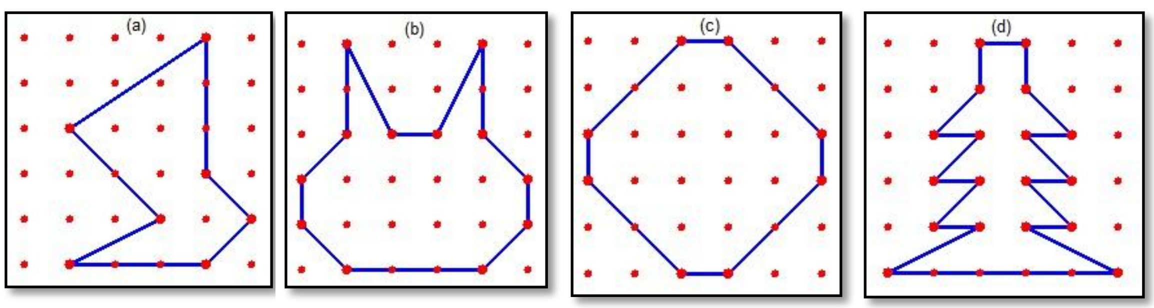
La "fórmula" encontrada es la llamada "Regla de Pick"

Obtener fórmulas para el cálculo de áreas mediante procesos inductivos responde a la necesidad de dar significado a la expresión de la misma. Formalmente, el **Teorema de Pick** (1899) establece que si tenemos un *polígono simple* cuyos vértices tienen coordenadas enteras, es decir, cuyos vértices están sobre los nodos de una cuadrícula en el plano, y llamamos **b** al **número de nodos sobre la frontera del polígono** e **i** al **número de nodos de la cuadrícula en el interior del polígono,** entonces el área **A** del polígono se puede calcular con la fórmula encontrada. Su demostración rigurosa la publicó el matemático George Pick en su trabajo *Geometrisches zur Zahlenlehre,* en Praga en 1899.

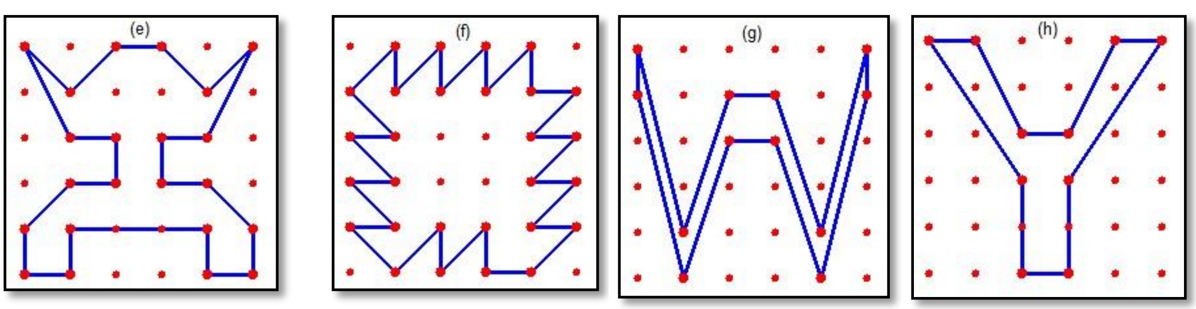
Ver: http://blogs.20minutos.es/mati-una-profesora-muy-particular/tag/formula-de-pick/

4. A continuación se presentan unos ejercicios de aplicación de la *regla de Pick,* con el fin de hacer uso de este recurso para el cálculo de áreas en el geoplano.

   a. Use la *regla de Pick* para encontrar el área de cada uno de los polígonos que se muestran en la Figura G10. Seleccione al menos tres figuras para que contraste el área encontrada mediante esta regla de Pick y la que encuentre utilizando alguno de las estrategias usadas anteriormente.



Área: ______ Área: ______ Área: ______ Área: ______



Área: ______ Área: ______ Área: ______ Área: ______

Figura G10

   b. Comente con sus compañeros de grupo las ventajas y limitaciones que puede tener la Regla de Pick. ¿Considera que el proceso para obtenerla y las verificaciones de su validez son suficientes para considerar que su funcionalidad está *demostrada matemáticamente* en un sentido formal?

5. ¿Se pueden considerar polígonos las figuras (a), (b) y (c) en Figura G11? Explique y comente con sus compañeros sus argumentos.

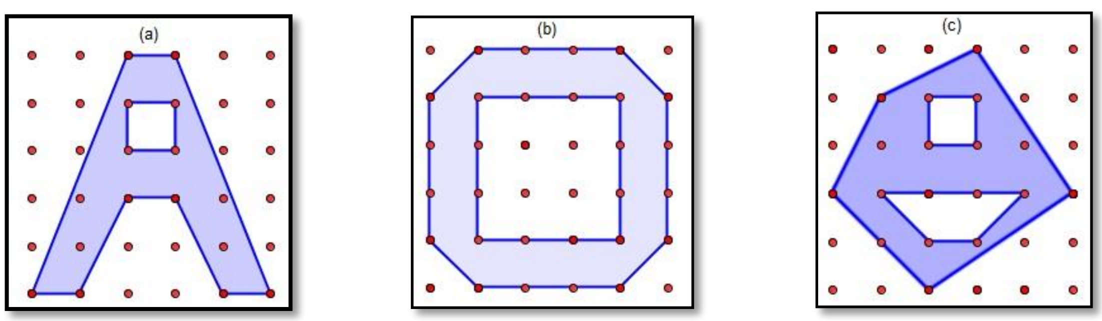


Figura G11

a. Utilice alguna estrategia para para determinar el área sombreada de cada una de las figuras de la Figura G11. Comente con su equipo y luego con el grupo.

b. ¿Se considera polígono la Figura G12?, ¿cómo es conveniente determinar su área?, ¿puede verificarse usando la fórmula de Pick para calcularla? Explique cada una de sus respuestas. Comente con su equipo y luego con el grupo.

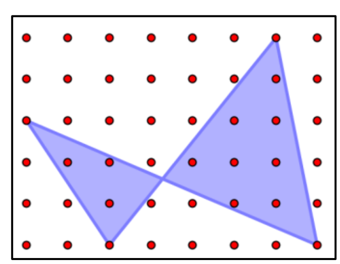


Figura G12

Una vez establecida la definición de polígono, resulta muy útil clasificarlos de acuerdo a características no comunes:

Los polígonos son *regulares* cuando tienen todos sus lados y ángulos iguales, es decir, son equiláteros y equiángulos. En otro caso se denominan *irregulares*.

Cualquier tipo de polígono en el plano es posible descomponerlo en triángulos para calcular su área.

c. ¿Qué tipo de polígonos, dada la clasificación anterior, puede contener a la clase de polígonos regulares?

▸ Cierre

Actividad 3
Polígonos Regulares y Círculo

Tarea 6. El panal de las abejas: ¿Por qué las abejas construyen sus panales con hexágonos?

"Abandonando aquella tierra, llegamos enseguida a otra, en la que las abejas y los pájaros son matemáticos de tanto genio y erudición que diariamente dan lecciones científicas de geometría a los sabios del imperio."

- El Cuento Mil y dos de Scherezade. Edgar Allan Poe

Las abejas obreras, en una etapa de su vida, desarrollan unas glándulas llamadas *cereras* que les permiten dedicarse exclusivamente a producir cera para mantener los panales que forman la colmena en las condiciones adecuadas, ya sea sellando celdas o construyendo nuevos panales. La producción de cera diaria de cada abeja es limitada, por lo que deben aprovecharla de la mejor manera para que la cantidad de miel que almacenan en ellas sea la mayor posible. Las celdas que conforman cada panal se construyen con la misma profundidad, así que su capacidad depende del área superficial de cada una.

1. Enseguida se muestran algunas imágenes de teselados regulares con el fin de que identifique algunas características y luego dé respuesta a lo que se le solicita.

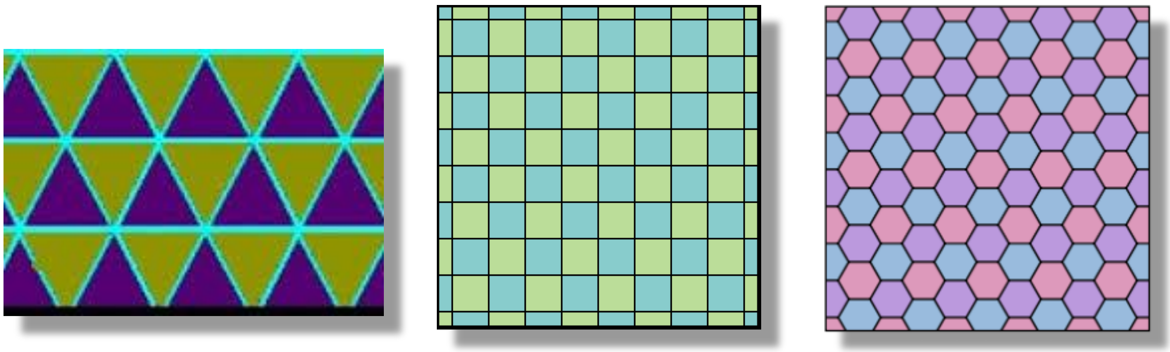


Figura G13

a. ¿Qué característica o características tienen estos teselados que le parece importante resaltar? Mencione a continuación y comparta con el grupo.

b. ¿Es posible hacer un mosaico con polígonos pentagonales? Explique ampliamente su respuesta y coméntela con sus compañeros de equipo. Pónganse de acuerdo para expresar ante el grupo la que consideren más completa.

c. ¿Con cuáles polígonos es posible hacer teselaciones regulares, es decir, cubrir una región limitada del plano de manera que no haya traslapes ni queden huecos utilizando polígonos regulares congruentes? Revise el applet *polígonos regulares* para que observe algunas características gráficas y numéricas que le apoyen en producir y argumentar su respuesta. Se plantean enseguida algunas preguntas que pretenden orientar la visualización del applet hacia la consecución de tal fin.

i. Al aumentar el número de lados del polígono ¿a qué figura se empieza a parecer?

ii. ¿Qué sucede con la medida del ángulo interior del polígono regular conforme se aumenta su número de lados?

iii. ¿A qué valor se acerca la medida del ángulo interior cuando n se hace mayor?

iv. ¿Puede el ángulo interior de un polígono regular medir 180º?, ¿por qué?

v. ¿Qué sucede con el número de polígonos del mismo tipo que se necesitan para cubrir 360º conforme se aumenta el número de lados del polígono?

vi. ¿A qué valor se acerca este número?

vii. ¿Se pueden cubrir 360º solamente con dos polígonos regulares del mismo tipo? ¿Por qué?

d. Revise cuidadosamente el applet *área fija perímetro variable* para que, junto con las reflexiones anteriores, redacte una respuesta argumentada matemáticamente a la pregunta inicial de esta tarea.

- La medida de los ángulos interiores de un polígono regular aumenta conforme aumenta el número de sus lados, sin embargo, la medida de cada uno de esos ángulos debe ser menor de $180°$
- Una teselación es la repetición de una figura de tal manera que, sin superponerse, cubra totalmente una región del plano. Cuando se utiliza la repetición de un sólo polígono regular se le llama teselación regular. Solamente hay tres teselaciones regulares.
- Polígono. Figura plana cerrada delimitada por segmentos de recta. Tiene los siguientes elementos:
    - Lado. Segmento de recta que delimita la figura.
    - Vértice. Punto donde concurren dos lados.
    - Ángulo interior. Se forma con dos lados adyacentes de un polígono.
    - Ángulo exterior. Se forma entre la prolongación de uno de los lados y su lado adyacente.

Tarea 7. Virtual. Las áreas de triángulos y rectángulos como fundamento para deducir las fórmulas

1. Revise el applet *área de polígonos regulares,* siga la guía de visualización que ahí se muestra y argumente a continuación por qué el área de los polígonos regulares se calcula mediante la fórmula: $A = \frac{P \times a}{2}$, donde P es el perímetro y a su apotema. Coloque esta respuesta en el Foro correspondiente.

2. Revise el applet *área del círculo*, siga la guía de visualización que ahí se muestra y argumente a continuación por qué el área del círculo se calcula mediante la fórmula: $A = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo, tomando en cuenta que su perímetro o circunferencia se calcula mediante la fórmula $C = \pi D$.

   Coloque esta respuesta en el Foro correspondiente.

   a. ¿Cuál es el área del sector circular que se muestra si el ángulo central es de $60°$? Escriba una justificación para la fórmula utilizada.

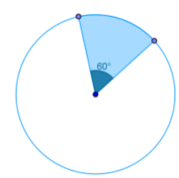
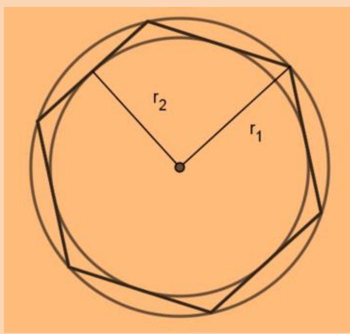


Figura G14

   b. ¿Cuál es la longitud de su arco? Escriba una justificación para la fórmula utilizada.

   c. Revise el applet *arcos y radianes.* Siga la guía que ahí se presenta y responda aquí y en el Foro correspondiente lo que se le pregunta: ¿Qué es un radián?

Relaciones entre polígonos regulares y circunferencias



El *centro* de un polígono regular corresponde al centro de la *circunferencia circunscrita* y también al centro de la *circunferencia inscrita.*

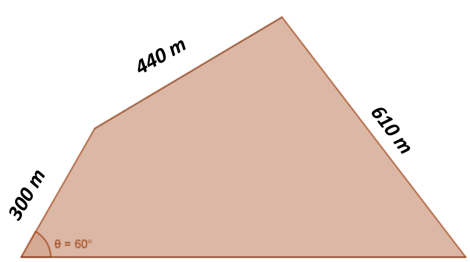
El radio r_1 de la circunferencia circunscrita corresponde a cualquier segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices.

El radio r_2 de la circunferencia inscrita corresponde a la apotema del polígono.

Ejercicio 2 (EG2):

1. Calcule el área de las siguientes figuras:

   a. El cuadrilátero cuyos lados miden según se indica en la figura G15 y el ángulo $\theta = 60°$:



900 m

Figura G15

b. La flor trazada en el interior del hexágono cuyo lado mide $2\ cm$

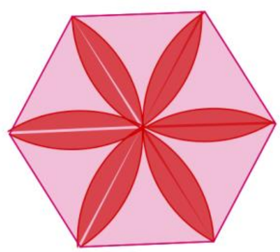


Figura G16

Cualquier polígono, convexo o no convexo, puede dividirse en triángulos.

Dos figuras se llaman ***equicompuestas*** si dividiendo una de ellas en un número finito de partes, éstas se pueden reacomodar para formar la otra.

Cualquier polígono es ***equicompuesto*** con algún rectángulo.

Dos polígonos de igual área son ***equicompuestos*** (Teorema de Bolyai-Gerwien)

Tabla de contenidos Secuencia 2

Pensamiento Algebraico
Introducción al Álgebra mediante la generalización de sucesiones numéricas figurales

Secuencia 2

Pensamiento Algebraico

Introducción al Álgebra mediante la generalización de sucesiones numéricas figurales

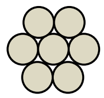
Presentación

Las Actividades Selectas de Matemáticas para el área de *Pensamiento Algebraico* tienen como principal propósito desarrollar (o fortalecer, en su caso) las competencias matemáticas relacionadas con la introducción al estudio del álgebra y al desarrollo del pensamiento algebraico en sus alumnos. En relación con este propósito, son dos los objetivos fundamentales que se pretenden alcanzar, mediante el trabajo en torno a dichas actividades, a saber:

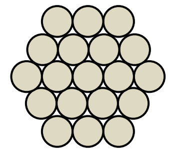
1. Arribar a una conceptualización clara de lo que implica *pensar aritméticamente* versus *pensar algebraicamente*, es decir, distinguir con precisión los significados de los términos ***pensamiento numérico*** y ***pensamiento algebraico***.
2. Desarrollar una concepción del álgebra como una herramienta matemática cuyo sentido, esencia y utilidad consiste en *expresar la generalidad*, es decir, en coadyuvar a resolver la importante tarea matemática de la ***generalización***.

Problema 1
Cables de acero

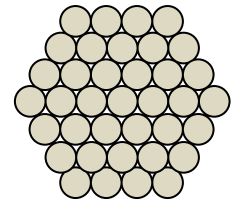
En la industria metalúrgica, los cables trenzados se fabrican a partir de hilos metálicos, que inicialmente se disponen en una formación hexagonal, y luego son retorcidos en conjunto para formar una trenza. Para satisfacer diferentes propósitos, estos cables se fabrican en diversos calibres. En las figuras que siguen se muestra la sección transversal de los cables de calibre 2, 3 y 4 respectivamente.



Un cable metálico trenzado de calibre **2** se forma con **7** hilos.



Un cable metálico trenzado de calibre **3** se forma con **19** hilos.



Un cable metálico trenzado de calibre **4** se forma con **37** hilos.

Figura A1

Inicio

Presencial. Trabajo en equipo.

Actividad 1. Elaboración de una estrategia para resolver el problema *Cables de acero*.

Con base en el análisis de la situación planteada arriba, responda las siguientes preguntas. Justifique sus respuestas.

1. ¿Cuántos hilos se requerirán para formar un cable de calibre 5?

   Respuesta.

2. ¿Cuántos hilos se requerirán para formar un cable de calibre 9?

   Respuesta.

3. ¿Cuántos hilos se requerirán para formar un cable de cualquier calibre?

   Respuesta.

Tarea 1:

1. Discuta en su equipo las posibles estrategias que pueden emplearse para resolver el problema planteado, sin necesariamente pasar a resolverlo, aunque puede hacerlo si lo desea. Formule de manera explícita y clara cada una de las estrategias

asumidas por el equipo, mostrando de manera inobjetable que conducen a una solución.

Estrategia A.

Estrategia B.

Estrategia C.

2. Describa y defienda ante el grupo la(s) estrategia(s) de solución asumidas por el equipo.

Algunas institucionalizaciones locales, definiciones o propiedades que se deben enfatizar.

Sucesión o secuencia matemática

Una sucesión matemática es un conjunto ordenado de objetos de cierta clase; habitualmente se trata de objetos matemáticos (números, figuras, funciones, etcétera).

Al número de elementos que componen la sucesión se le denomina *longitud* de dicha sucesión. Una sucesión matemática puede ser *finita* (en cuyo caso su longitud es un número natural), o bien *infinita* (su longitud no puede ser determinada por ningún número).

Habitualmente, los elementos de una sucesión matemática se numeran ordinalmente y se les denomina *términos*: primer término, segundo término, tercer término, etcétera.

A diferencia del concepto de conjunto, en las sucesiones numéricas el orden en que aparecen los términos es relevante, y un mismo término puede aparecer más de una vez en la sucesión.

Sucesión figural

Se trata de toda sucesión o secuencia cuyos términos son figuras. Aquí la palabra "figura" tiene un significado genérico, y comprende tanto dibujos como letras u otros elementos similares, con la excepción de números. Dichos elementos pueden o no estar sujetos a cierta regularidad o patrón.

Sucesión numérica

Toda sucesión o secuencia cuyos elementos son números (naturales, enteros, racionales, reales, complejos), habitualmente expresados en el sistema decimal de numeración.

Sucesión numérica figural

Toda sucesión o secuencia cuyos elementos, siendo números naturales, están representados no mediante su notación habitual en el sistema decimal, sino mediante cierto arreglo o configuración de objetos (puntos, círculos, segmentos, cubos, palillos, etcétera), para formar cierta figura. El total de objetos en la figura corresponde al respectivo número natural en la secuencia o sucesión.

Sucesión numérica sujeta a un patrón o regularidad

Toda sucesión numérica cuyos términos comparten algún rasgo o propiedad en común, en función del lugar que ocupan en ella, y que puede ser expresado mediante una regla matemática, habitualmente usando el lenguaje algebraico.

Progresión aritmética y progresión geométrica

Entre las sucesiones numéricas sujetas a un patrón, se distinguen las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas.

Progresión aritmética

Se le llama así a toda sucesión de números (no necesariamente enteros), tales que la *diferencia* entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre igual a una constante.

Progresión geométrica

Se le llama así a toda sucesión de números (no necesariamente enteros), tales que la razón o *cociente* entre dos términos consecutivos cualesquiera es siempre igual a una constante.

Término general de una sucesión numérica

Comúnmente se hace referencia a él como "el n-ésimo término", y se le describe (habitualmente usando el lenguaje algebraico) mediante la regla matemática que expresa la propiedad común relevante que subyace a todos los términos de la sucesión, en dependencia del lugar que en ella ocupan.

Generalización de una sucesión numérica figural

Proceso de abstracción mediante el cual se llega a formular (habitualmente usando el lenguaje algebraico) una regla matemática que expresa una propiedad común subyacente a todos los términos de la sucesión, es decir, el término general de la misma. Esta propiedad puede ser inferida o deducida analizando la estructura de la configuración en casos particulares, es decir, puede ser detectada o advertida recurriendo a la visualización geométrica.

Desarrollo

Presencial. Trabajo en equipo.

Actividad 2. Aplicación de la estrategia para resolver el problema *Cables de acero*.

Trabajando en equipo, aplique la(s) estrategia(s) de solución asumida(s), hasta resolver el problema.

Tarea 2:

1. Aplique de manera ordenada la(s) estrategia(s) asumida(s) por el equipo para resolver el problema planteado. En particular, haga explícita(s) la(s) técnica(s) matemática(s) utilizada(s) en dicho proceso de solución. Formule de manera explícita y clara cada una de las soluciones obtenidas.

   Técnica A.

   Técnica B.

   Técnica C.

2. Exponga y defienda ante el grupo cada una de las soluciones obtenidas por el equipo.

Algunas institucionalizaciones locales, definiciones o propiedades que se deben enfatizar.

Expresión numérica

Se le llama *expresión numérica* a cualquier combinación de numerales, signos de operación aritmética y signos de agrupación (paréntesis, corchetes), con la condición de que tenga sentido (es decir, de que sea posible realizar las operaciones en ella indicadas). Por ejemplo, $5+3-$ no es una expresión numérica pues carece de sentido; en cambio, $5+(3-2)\cdot 2$ sí lo es.

Valor de una expresión numérica

Al número obtenido como resultado de realizar las operaciones indicadas en la expresión numérica, se le conoce como *valor numérico* de dicha expresión.

Igualdad numérica

Representemos mediante a y b dos expresiones numéricas. (Observar que aquí se ilustra el papel fundamental de las literales en el lenguaje matemático: el de servir como medio de representación generalizada). Si unimos estas dos expresiones mediante el signo de igualdad, obtenemos una *igualdad numérica*: $a=b$.

Igualdad numérica verdadera

Una igualdad numérica se dice que es *verdadera*, si los valores de las expresiones numéricas que figuran en los miembros derecho e izquierdo de dicha igualdad coinciden (son los mismos).

Igualdad numérica falsa

Una igualdad numérica se dice que es *falsa*, si los valores de las expresiones numéricas que figuran en los miembros derecho e izquierdo de dicha igualdad no coinciden (son diferentes).

Criterios de igualdad de expresiones numéricas

Representemos mediante a y b dos expresiones numéricas. En relación con la igualdad de estas expresiones numéricas, se puede afirmar lo siguiente:

1. Si $a = b$, entonces ambas expresiones tienen el mismo valor numérico, y viceversa.
2. Si $a = b$, entonces $a - b = b - a = 0$, y viceversa, si $a - b = b - a = 0$, entonces $a = b$.
3. Si $a = b$ y ambas expresiones numéricas son distintas de cero, entonces $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$, y viceversa.

Sumas de números naturales consecutivos. Fórmulas de Gauss.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, con $n, m > 1$. Entonces

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1+n}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+m) = \frac{(n+(n+m))}{2}(m+1) = \frac{(2n+m)(m+1)}{2}$.

Presencial. Trabajo en equipo.

Actividad 3. Búsqueda de otra solución al problema *Cables de acero*.

Trabajando en equipo, encuentre al menos otra manera de resolver el problema *Cables de acero*.

Tarea 3:

1. Desarrolle otra manera de resolver el problema planteado. En especial, haga explícita(s) la(s) técnica(s) matemática(s) requeridas en este nuevo proceso de solución. Formule de manera explícita y clara la solución obtenida.

   Estrategia D.

   Técnica D.

2. Exponga y defienda ante el grupo la nueva solución obtenida por el equipo

Algunas institucionalizaciones locales, definiciones o propiedades que se deben enfatizar.

Expresión algebraica

Se le llama *expresión con literales* (o también *expresión algebraica*) a cualquier combinación de símbolos de operación (suma, resta, multiplicación, división, potenciación, etc.), signos de agrupación (paréntesis, corchetes) y literales (minúsculas y/o mayúsculas), que tenga sentido matemático. Por ejemplo, $(2a + 3b) \cdot (c - d)$ es una expresión algebraica.

Dominio de una expresión algebraica

Es común que, en una expresión con literales, éstas puedan ser sustituidas por números, a condición de que la expresión numérica resultante tenga sentido matemático. Al conjunto de números por los que puede ser sustituida con sentido una literal en una expresión algebraica, se le denomina *dominio* de dicha literal, mientras que cada uno de dichos números es llamado *valor* de la literal.

Rango de una expresión algebraica

Es el conjunto de todos los valores numéricos que puede tomar dicha expresión algebraica, a partir de los valores de sus literales.

Términos de una expresión algebraica

En un sentido amplio, la palabra *término* se refiere a cada una de las partes de que consta una expresión algebraica *no simplificada*, que están separadas por alguno de los signos de suma $(+)$ o resta $(-)$, siempre que éstos no se encuentren en el interior de alguno de los signos de agrupación (paréntesis, corchetes).

En sentido estricto, la palabra *término* se refiere a cada una de las partes de que consta una expresión algebraica *simplificada*, y que están separadas por alguno de los signos de suma $(+)$ o resta $(-)$.

Términos semejantes

Se les llama así a los términos de una expresión algebraica que contienen exactamente la misma parte literal.

Término independiente
Es el que consiste sólo en un valor numérico, y por lo tanto, no tiene parte literal.

Expresión algebraica simplificada
Se dice que una expresión algebraica ha sido *simplificada*, si ha sido sometida a un proceso técnico de transformación, que consiste en aplicar exhaustivamente ciertas reglas algebraicas a las partes que conforman a dicha expresión algebraica.

En caso de que dicho proceso, siendo factible, aun no haya sido ejecutado sobre la expresión algebraica, se dice que ésta no ha sido simplificada.

Presencial. Trabajo en equipo.

Actividad 4. Analizando las soluciones al problema *Cables de acero*.

Se han formulado varias maneras de resolver el problema. Discuta con sus compañeros y formule una argumentación que apoye sus respuestas a las siguientes preguntas.

1. ¿Qué significado tiene cada una de estas soluciones?

   Respuesta.

2. ¿Por qué razón podemos afirmar que todas estas soluciones son correctas?

   Respuesta.

3. ¿Existe alguna manera de asegurarnos que estas soluciones no se contradicen entre sí en ningún momento?

   Respuesta.

Tarea 4:

1. Discuta en equipo las tres preguntas anteriores, y formule una respuesta consensada.

Algunas institucionalizaciones locales, definiciones o propiedades que se deben enfatizar.

Razonamiento inductivo
Proceso mental de abstracción mediante el cual se llega a expresar, a través del análisis sistemático de algunos casos particulares conocidos, una propiedad común a *todos* los casos, aunque no sean conocidos. Es un movimiento del pensamiento que va de lo particular a lo general.

Generalización numérica de una sucesión figural
Proceso de abstracción mediante el cual se llega a expresar, en términos sólo de números concretos, la regla matemática que permite obtener (es decir, calcular) cualquier término particular de la sucesión numérica.

Generalización algebraica de una sucesión figural
Proceso de abstracción mediante el cual se llega a expresar simbólicamente, por lo común usando el lenguaje algebraico, la propiedad común subyacente a *todos* los términos de la sucesión, esto es, la regla matemática que define al n-ésimo término.

Equivalencia de expresiones algebraicas en términos de sus valores numéricos.
Se dice que dos expresiones algebraicas con una literal son *idénticamente iguales* o *equivalentes*, si al sustituir en ellas cada uno de los valores permisibles de dicha literal y realizar las operaciones indicadas, dan ambas el mismo valor numérico. En otras palabras, a cada valor numérico en el dominio de la literal, ambas expresiones le hacen corresponder con el mismo valor numérico en el rango.

Expresión algebraica cerrada o explícita
Aquella cuyo valor numérico puede ser obtenido conociendo solamente el valor numérico de la literal que en ella figura. Esto se logra sustituyendo directamente el valor de interés de la literal en la expresión algebraica y ejecutando las operaciones en ella indicadas.

Expresión algebraica recursiva
Aquella cuyo valor numérico no puede ser obtenido mediante la sustitución directa del valor de interés de la literal en la expresión algebraica. Esto se debe a que la expresión algebraica contiene uno o más términos que se corresponden con el valor numérico de ella misma, pero para uno o más valores previos de la literal.

Trabajo extra clase en equipo.

Actividad 5. Comparando las soluciones: enfoque en la estructura de las expresiones algebraicas.

Volvamos a las diferentes maneras de resolver el problema, concretadas en diferentes expresiones algebraicas. Discuta con sus compañeros de equipo y formule una argumentación que apoye sus respuestas a las siguientes preguntas.

1. ¿Tienen estas expresiones algebraicas algún parecido o semejanza que explique el hecho de que sean equivalentes?

   Respuesta.

2. ¿Existe(n) alguna(s) expresión(es) algebraica(s) más simple(s) que las demás? ¿En qué sentido?

   Respuesta.

3. ¿Qué criterios podríamos emplear para clasificar estas expresiones algebraicas, según su grado de complejidad?

   Respuesta.

Tarea 5:

1. Discuta en equipo las tres preguntas anteriores, y formule una respuesta consensada.

   Respuesta.

2. Elabore al menos dos clasificaciones de estas expresiones algebraicas. En cada caso, explicite el criterio que se toma como base para la clasificación.

   Primera clasificación.

   Segunda clasificación.

Algunas institucionalizaciones locales, definiciones o propiedades que se deben enfatizar.

Clasificación de las expresiones algebraicas por su número de términos: monomios, binomios, trinomios, polinomios.

Monomio

Expresión algebraica que no contiene operaciones de suma y resta, únicamente la multiplicación (por un número o entre literales) y la potenciación. En un monomio se distinguen las siguientes partes:

a) el *coeficiente*: es el número que aparece, normalmente al principio, multiplicando a la parte literal, y no puede ser igual a cero; cuando este coeficiente es igual a 1 suele no escribirse, y cuando es igual a -1 suele simplemente escribirse el signo negativo “$-$”.

b) la *parte literal*: es la que sigue a continuación del coeficiente, y está formada por una o más literales que se multiplican, cada una con su respectivo exponente.

c) el *exponente*: habitualmente se trata de un número, que se escribe como superíndice a continuación de la literal. Cuando el exponente es igual a 1, se omite escribirlo.

Binomio

Expresión algebraica que resulta de sumar y/o restar dos monomios.

Trinomio

Expresión algebraica que resulta de sumar y/o restar tres monomios.

Polinomio

Expresión algebraica que resulta de sumar y/o restar dos o más monomios. Los binomios y trinomios son los casos más simples de polinomios.

Clasificación de las expresiones algebraicas por el carácter de las operaciones sobre la literal: expresiones lineales, expresiones cuadráticas.

Expresión lineal en una literal dada: expresión algebraica en la que el máximo exponente de la literal es igual a 1, que habitualmente no se escribe. Usualmente se trata de un binomio, formado por un término lineal (en el que figura la literal dada, sin exponente explícito, que se asume igual a 1), y un término independiente.

Expresión lineal *completa*: $an + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, y $a, b \neq 0$.

Expresión lineal *incompleta*: an, donde $a \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$.

Forma general de una expresión lineal de una literal: $an + b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$.

Expresión cuadrática en una literal: expresión algebraica en la que el máximo exponente de la literal es igual a 2. Si dicha expresión consta de un solo término (es un monomio), se dice que es *puramente cuadrática*. En general, una expresión cuadrática de una literal es un trinomio, formado por un término cuadrático, uno lineal y uno independiente.

Expresión cuadrática *completa*: $an^2 + bn + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, y además $a, b, c \neq 0$.

Expresión *puramente cuadrática*: an^2, donde $a \in \mathbb{R}$, y además $a \neq 0$.

Expresión cuadrática *sin término lineal*: $an^2 + c$, donde $a, c \in \mathbb{R}$, y además $a, c \neq 0$.

Expresión cuadrática *sin término independiente*: $an^2 + bn$, donde $a,\ b \in \mathbb{R}$, y además $a, b \neq 0$.

Forma general de una expresión cuadrática de una literal: $an^2 + bn + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, y además $a \neq 0$.

Presencial. Trabajo en equipo.

Actividad 6. Reconstruyendo la solución a partir de la expresión algebraica.

María y José, alumnos de otra escuela secundaria, presentaron a su profesor y a su grupo las siguientes soluciones al problema de los *Cables de Acero*:

Solución de María:

Solución de José:

Tarea 6:

1. ¿Es correcta la solución presentada por estos alumnos? Argumente.

   Respuesta.

2. Explique de qué modo cada alumno descompuso la figura hexagonal para contar el total de hilos en cada caso, y a partir de ello, formular una solución general al problema.

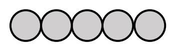
   Explicación.

3. Regresemos nuevamente a la(s) solución(es) al problema de los *Cables de Acero*, que fueron formuladas en su equipo. Analice una vez más dicha(s) solución(es), y explique qué nos dice(n) respecto a la estructura de los cables de calibre 1 y 2: ¿es congruente con la estructura de todos los demás cables?

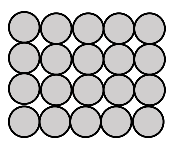
Presencial. Trabajo en equipo.

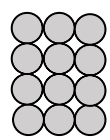
Actividad 7. Comparando las soluciones: enfoque en las transformaciones de las expresiones algebraicas.

Volvamos a las diferentes maneras de resolver el problema de los *Cables de Acero*. En las expresiones algebraicas que lo resuelven, los términos que las componen representan productos de números generalizados, o bien son números simples. Recordemos que a los números naturales los podemos representar, según sea más conveniente, como arreglos lineales o como arreglos rectangulares de altura igual a una unidad. Por ejemplo, el número 5 como un arreglo lineal o rectangular puede representarse como sigue:

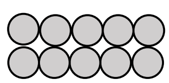


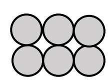
Por otro lado, los productos de números naturales los podemos interpretar como arreglos rectangulares. Por ejemplo, los productos 5×4 y 3×4 los podemos representar mediante los siguientes arreglos rectangulares:



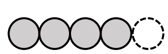


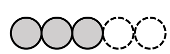
Del mismo modo, es posible interpretar ciertos semi productos de números naturales como arreglos rectangulares. Por ejemplo, $\frac{5\times4}{2}$ y $\frac{3\times4}{2}$ pueden ser representados mediante los siguientes arreglos rectangulares, obtenidos a partir de las ilustraciones de arriba:



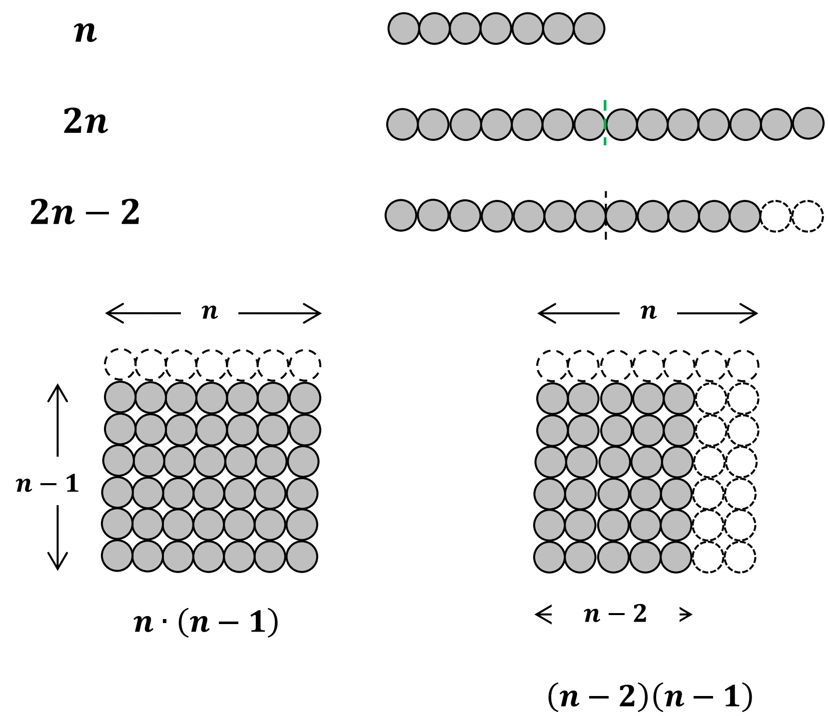


Finalmente, algunas restas entre números naturales también pueden ser representadas como arreglos lineales. Por ejemplo, $5-1$ y $5-2$ se pueden representar, respectivamente, como sigue:





Esta situación se puede aprovechar para dar una interpretación icónica a las expresiones numéricas generalizadas, es decir, a las expresiones algebraicas en que la literal representa un número generalizado. Para ello, bastará con tomar algún número concreto como “representante” de dicho número generalizado, e interpretar las operaciones sobre dicho número generalizado como un arreglo lineal o rectangular. Por ejemplo:



Tarea 7:

1. Trabajando en equipo, desarrolle una representación icónica en forma de arreglo rectangular para cada una de las soluciones al problema de los *Cables de Acero* que previamente obtuvieron.

2. A medida que en el equipo vayan desarrollando dicho arreglo rectangular, identifiquen y anoten por separado algunos resultados intermedios que les parezcan importantes.

   Resultados intermedios interesantes.

3. Una vez concluidos todos los desarrollos para cada una de las soluciones, discutan en el equipo las similitudes que en ellos encuentren.

   Similitudes en las soluciones.

Algunas institucionalizaciones locales, definiciones o propiedades que se deben enfatizar.

Regla para simplificar la suma repetida de una literal.

Sean n un número natural y a una expresión algebraica. Entonces se cumple que

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ veces}} = na$$

Propiedad del neutro multiplicativo.

Sea a una expresión algebraica. Entonces se cumple que

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

En otras palabras, el multiplicar por 1 a una expresión algebraica no la altera.

Propiedad conmutativa de la suma de expresiones algebraicas.

Sean a y b expresiones algebraicas. Entonces se cumple que

$$a + b = b + a$$

En otras palabras, el orden en que se sumen dos expresiones algebraicas no altera el resultado de la suma.

Propiedad conmutativa de la multiplicación de expresiones algebraicas.
Sean a y b expresiones algebraicas. Entonces se cumple que

$$ab = ba$$

En otras palabras, el orden en que se multipliquen dos expresiones algebraicas no altera el resultado de la multiplicación.

Propiedad asociativa de la suma de expresiones algebraicas.
Sean a, b y c expresiones algebraicas. Entonces se cumple que

$$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$$

En otras palabras, el orden en que se sumen tres expresiones algebraicas no altera el resultado de la suma.

Propiedad asociativa de la multiplicación de expresiones algebraicas.
Sean a, b y c expresiones algebraicas. Entonces se cumple que

$$a(bc) = (ab)c = (ac)b$$

En otras palabras, el orden en que se multipliquen tres expresiones algebraicas no altera el resultado de la multiplicación.

Ley distributiva.
Sean a, b y c expresiones algebraicas. Entonces se cumple que

$$a(b + c) = ab + ac$$

En otras palabras, en las expresiones algebraicas la multiplicación se distribuye con la suma.

Regla para la factorización.

Sean a, b y c expresiones algebraicas. Entonces se cumple que

$$ab + ac = a(b + c)$$

Regla para el desarrollo de un producto de binomios.

Sean a, b, c y d expresiones algebraicas. Entonces se cumple que

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

Análogamente

$$(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd\,;$$
$$(a - b)(c + d) = ac + ad - bc - bd\,;$$
$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd\,.$$

Igualdades algebraicas.

Sean a y b expresiones algebraicas de una literal, cuyo dominio es el mismo para ambas. Si relacionamos estas expresiones mediante el signo de igualdad, obtenemos la nueva expresión

$$a = b\,.$$

Si esta relación se satisface (es verdadera) para algunos valores del dominio de la literal, y no se satisface para otros, entonces decimos que se trata de una *igualdad algebraica*.

Identidades algebraicas.
Sean a y b expresiones algebraicas de una literal, cuyo dominio es el mismo para ambas. Si relacionamos estas expresiones mediante el signo de igualdad, obtenemos la nueva expresión

$$a = b\,.$$

Si esta relación se satisface (es verdadera) para todos los valores del dominio de la literal, entonces decimos que se trata de una *identidad algebraica*.

Simplificación de expresiones algebraicas.
El proceso más elemental de simplificación de expresiones algebraicas consiste en:

a) *Abrir* o *cancelar* los signos de agrupación (paréntesis, corchetes), habitualmente aplicando la ley distributiva o la regla para la multiplicación de binomios; y
b) *Reducir los términos semejantes*, habitualmente aplicando la regla para la factorización.

Cierre

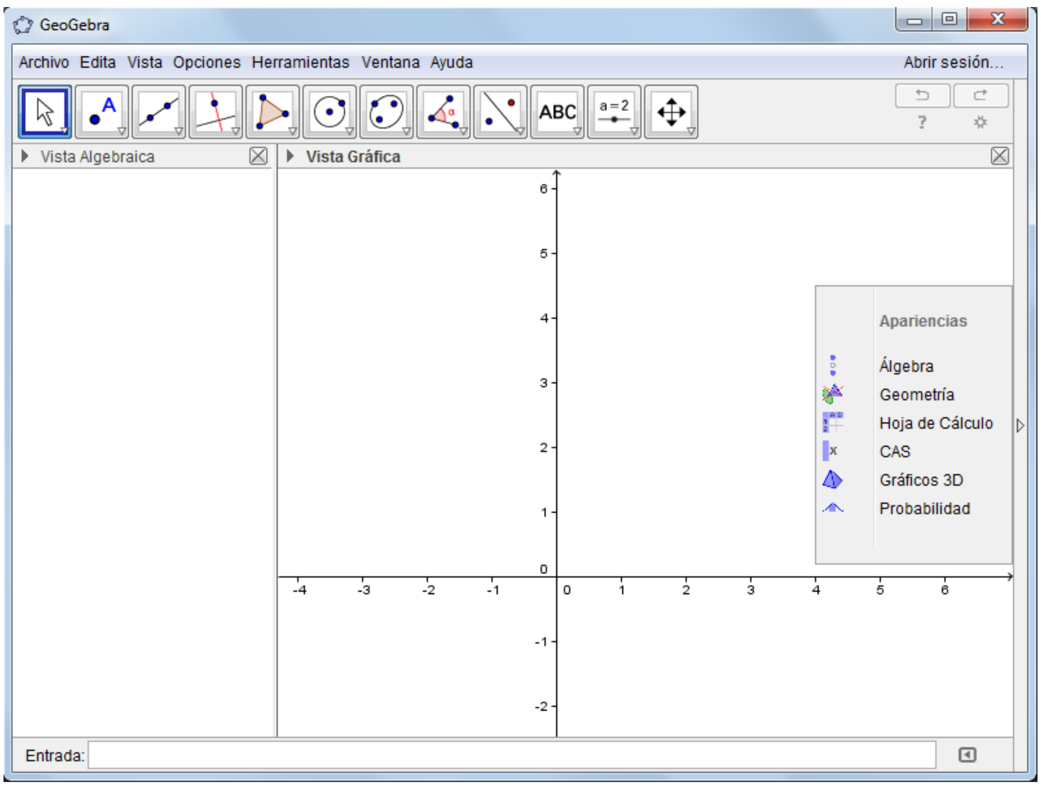
Presencial. Trabajo en equipo.

Actividad 8. Comparando las soluciones: criterios de equivalencia de las expresiones algebraicas.

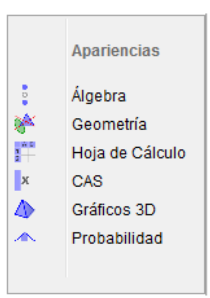
Los avances en el desarrollo de las tecnologías digitales han llevado al diseño de muchas aplicaciones con fines educativos. Entre las destinadas a las matemáticas, se distingue un tipo especial de software, al que técnicamente se le clasifica como *CAS* (**C**omputer **A**lgebra **S**ystem). Este término técnico se traduce al español de diversas formas: Programa de Álgebra por Computadora (PAC), Programa de Cálculo Simbólico (PCS), Sistema Algebraico

Computarizado o Sistema Algebraico Computacional (SAC), entre otras. La característica distintiva de este tipo de software consiste en la capacidad para ejecutar operaciones con literales, esto es, operaciones algebraicas. Para más detalles, puede consultar la página Web http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_algebraico_computacional.

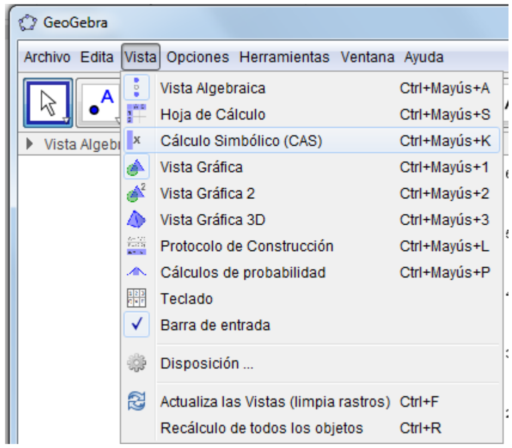
En el reciente decenio, se ha venido popularizando el uso de *GeoGebra*, un software de tipo CAS, que además es no comercial (gratuito). En este software, las operaciones algebraicas se ejecutan en la llamada **Vista CAS**, que no está activa al iniciar el programa. Cuando se le inicia, habitualmente aparece la siguiente imagen en pantalla:



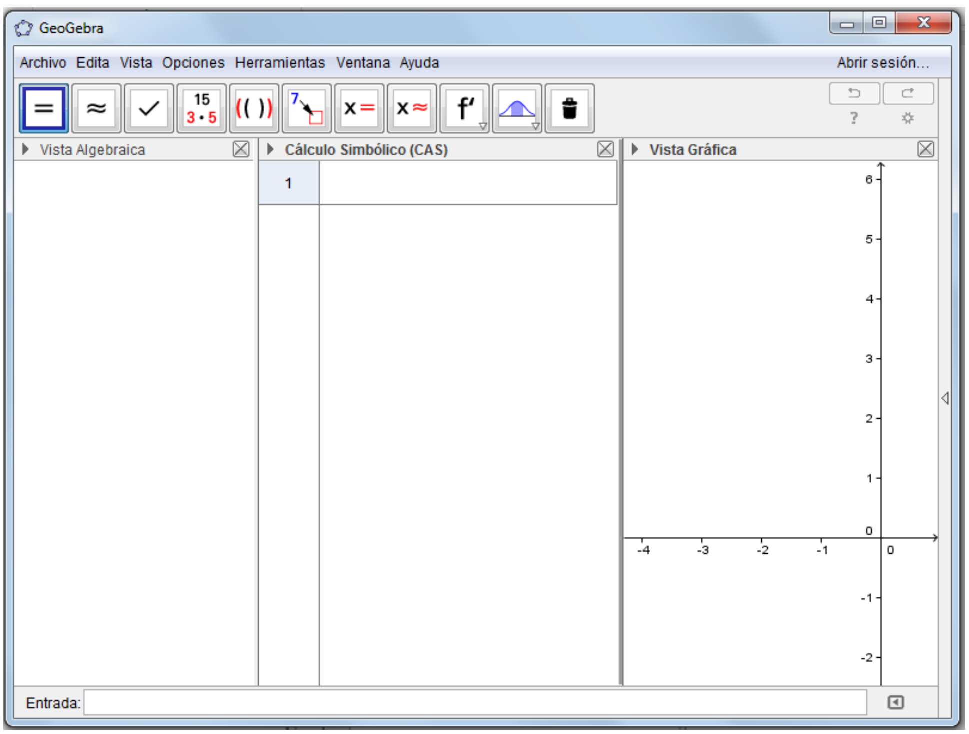
Para activar la **Vista CAS**, puede hacer click en la opción **CAS** del recuadro de la derecha,



o bien activar la pestaña **Vista** (tercera desde la izquierda) de la barra de herramientas, y en ella seleccionar la opción **Cálculo Simbólico (CAS)**:



En la siguiente imagen se muestra la **Vista CAS** activa:



En la **Vista CAS**, las operaciones algebraicas se ejecutan de tal modo que cada cálculo o conjunto de cálculos ocupará un renglón, que *GeoGebra* progresivamente irá numerando. En dicha vista, las operaciones algebraicas se pueden ejecutar de dos maneras:

a) Introduciendo directamente las expresiones algebraicas y las operaciones que entre ellas se desean realizar, y enseguida presionando **ENTER**; y

b) automáticamente, mediante el uso de *Comandos* específicos de *GeoGebra*, que se ejecutan al presionar **ENTER**.

Tarea 8:

1. En equipos, use el software *GeoGebra* para simplificar manualmente y paso a paso las diferentes expresiones algebraicas que resuelven el problema *Cables de Acero*, y que previamente fueron obtenidas en el equipo. La simplificación manual también puede realizarse en un solo paso.

2. En equipos, use el comando **Simplifica[ ]** de *Geogebra*, para simplificar en un solo paso las diferentes expresiones algebraicas que resuelven el problema *Cables de Acero*, y que previamente fueron obtenidas en el equipo.

3. En equipos, use el comando lógico **==** de *Geogebra* para verificar si son equivalentes las diferentes expresiones algebraicas que resuelven el problema *Cables de Acero*, y que previamente fueron obtenidas en el equipo.

4. Trabajando en equipos, use *Geogebra* para verificar, usando el criterio de la resta, si son equivalentes las diferentes expresiones algebraicas que resuelven el problema *Cables de Acero*, y que previamente fueron obtenidas en el equipo.

5. Trabajando en equipos, use *Geogebra* para verificar, usando el criterio de la división, si son equivalentes las diferentes expresiones algebraicas que resuelven el problema *Cables de Acero*, y que previamente fueron obtenidas en el equipo.

6. Trabajando en equipos, use *Geogebra* para verificar, usando el criterio de la gráfica, si son equivalentes las diferentes expresiones algebraicas que resuelven el problema *Cables de Acero*, y que previamente fueron obtenidas en el equipo.

Algunas institucionalizaciones locales, definiciones o propiedades que se deben enfatizar.

La equivalencia de expresiones algebraicas mediante su reducción a la forma simplificada.

Sean a y b expresiones algebraicas de una literal, cuyo dominio es el mismo para ambas. Si mediante el proceso de simplificación cada una de ellas puede ser reducida a una misma expresión algebraica c, entonces diremos que a y b son ***expresiones algebraicas equivalentes***. También diremos que la expresión algebraica c es la *forma simplificada* de a y b.

El criterio de la resta.

Sean a y b expresiones algebraicas de una literal, cuyo dominio es el mismo para ambas. Si se cumple que $a - b = b - a = 0$, entonces a y b son expresiones algebraicas equivalentes, y viceversa.

Obsérvese que la condición $a - b = b - a$ no es trivial, dado que en la resta importa el orden de los operandos.

El criterio de la división.

Sean a y b expresiones algebraicas de una literal, cuyo dominio es el mismo para ambas, y tales que $a \neq 0,\ b \neq 0$. Si se cumple que $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} = 1$, entonces a y b son expresiones algebraicas equivalentes, y viceversa.

En este caso, la condición $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ tampoco es trivial.

El criterio del valor de verdad.

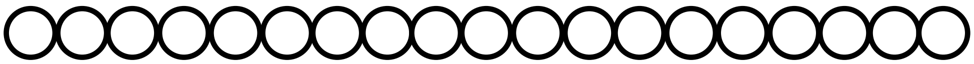
Sean a y b expresiones algebraicas de una literal, cuyo dominio es el mismo para ambas. Si el valor de verdad de la igualdad algebraica $a = b$ es V, entonces a y b son expresiones algebraicas equivalentes. En caso contrario no lo son.

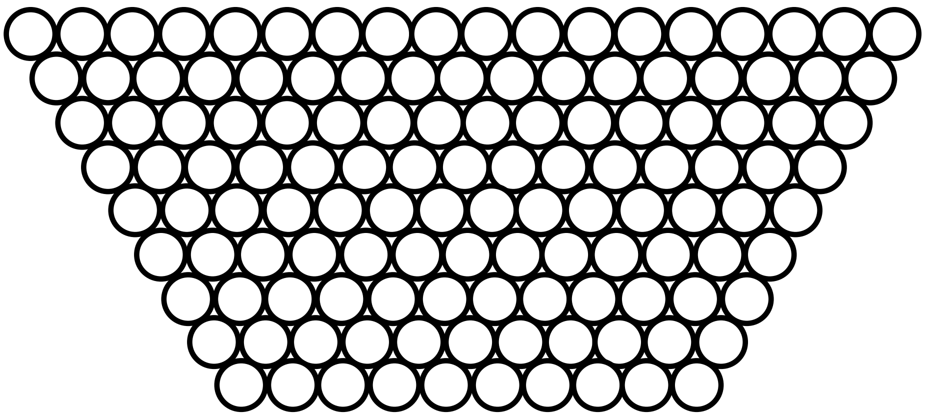
El criterio de la gráfica.

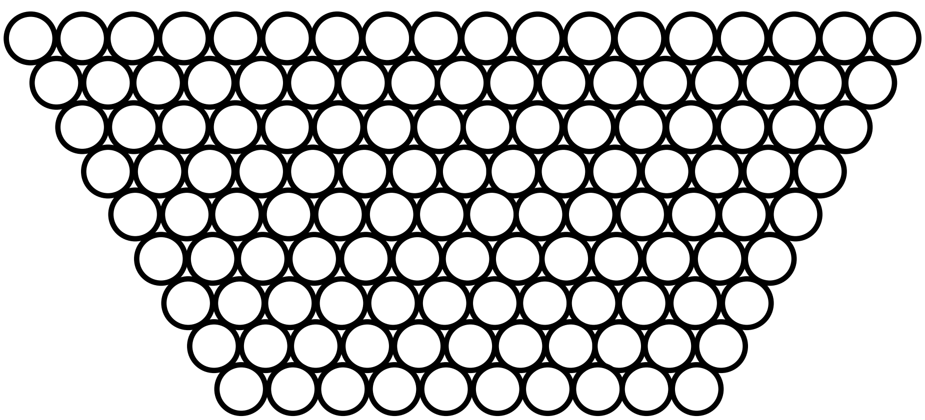
Sean a y b expresiones algebraicas de una literal n, con el mismo dominio para ambas. Si al graficar estas expresiones como función de su literal se obtiene la misma gráfica, entonces a y b son expresiones algebraicas equivalentes.

En otras palabras, a y b son expresiones algebraicas equivalentes si las gráficas de $a(n)$ y $b(n)$ coinciden en toda su extensión, es decir, en todo el dominio de la literal n.

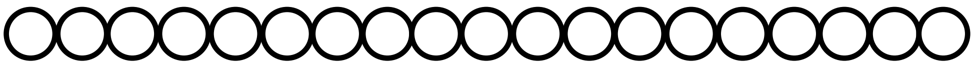
Actividad 1. Plantilla 1

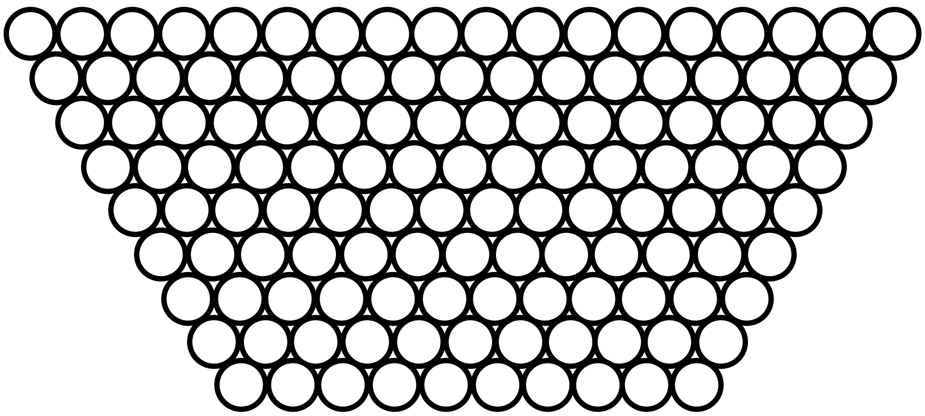


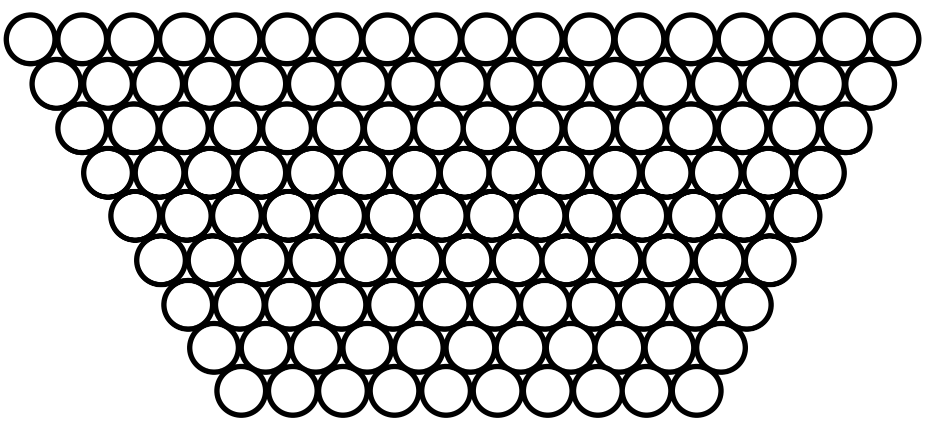




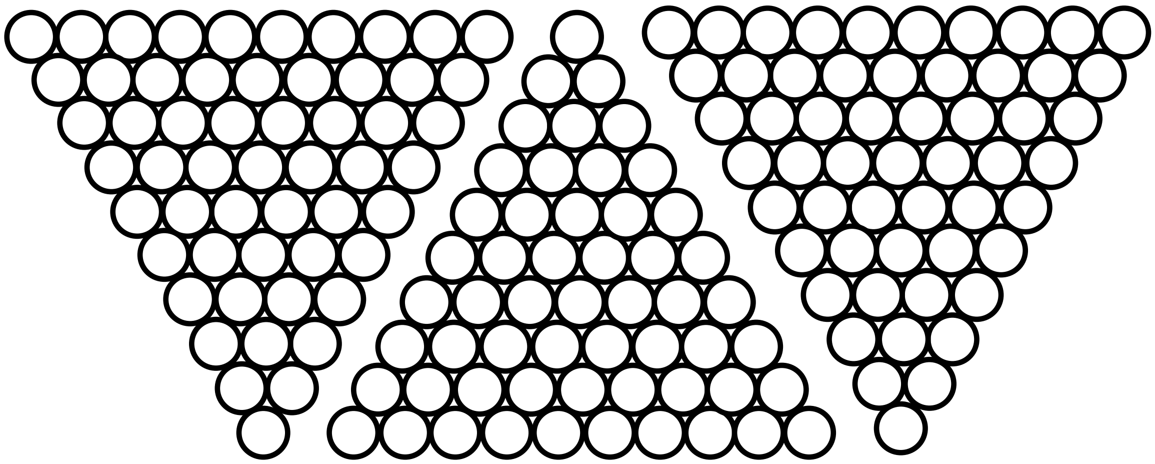
Actividad 1. Plantilla 2

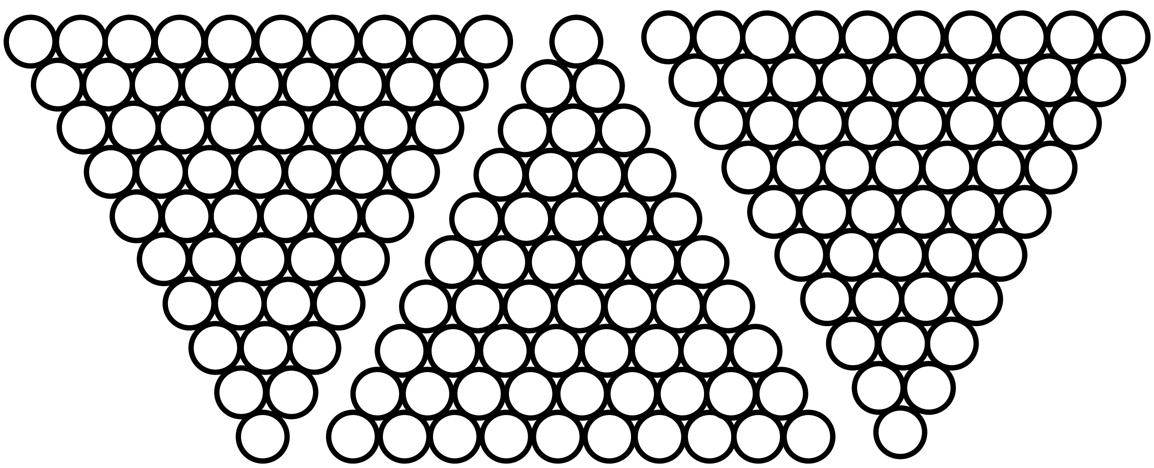




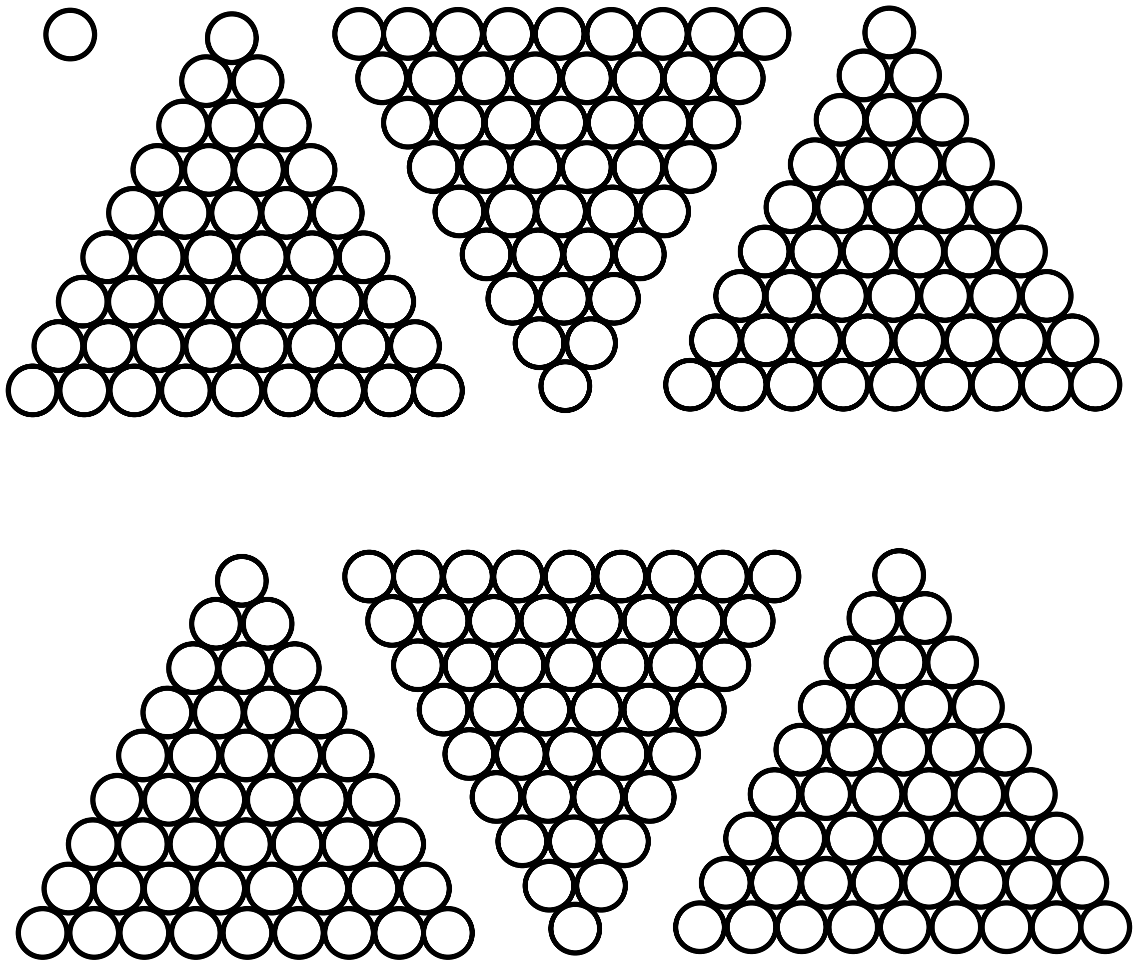


Actividad 1. Plantilla 3

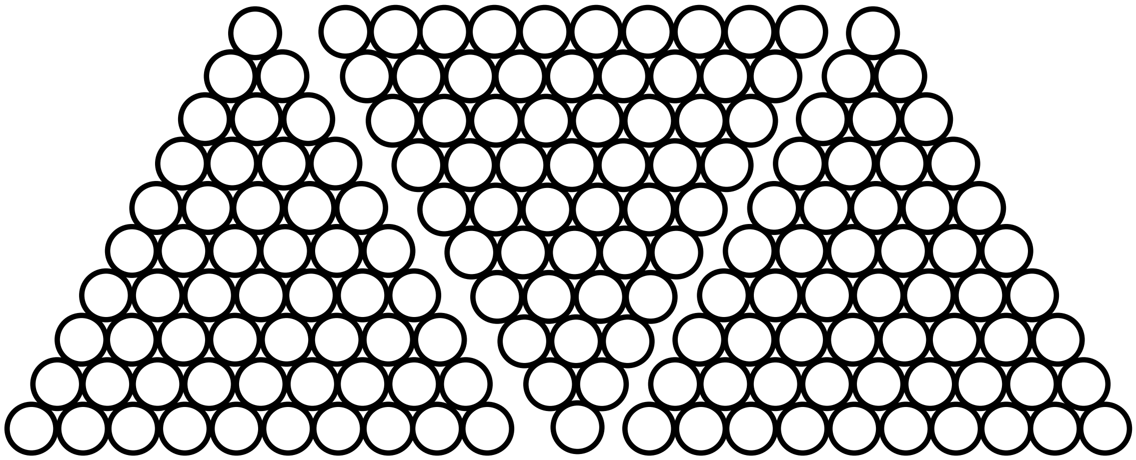


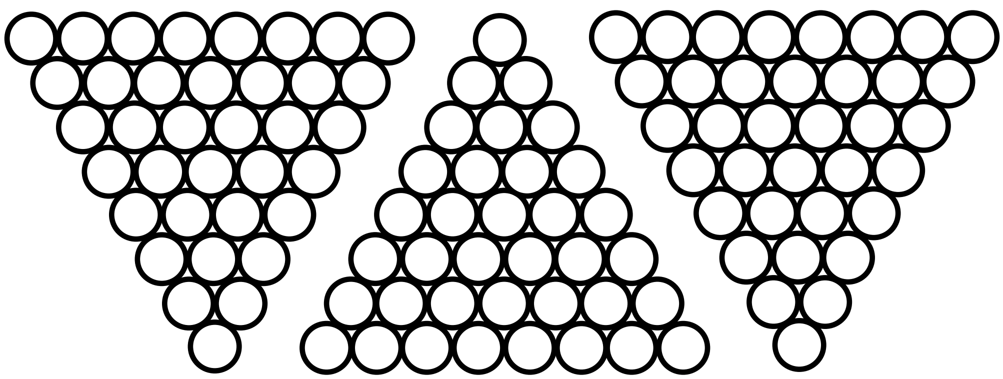


Actividad 1. Plantilla 4

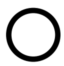


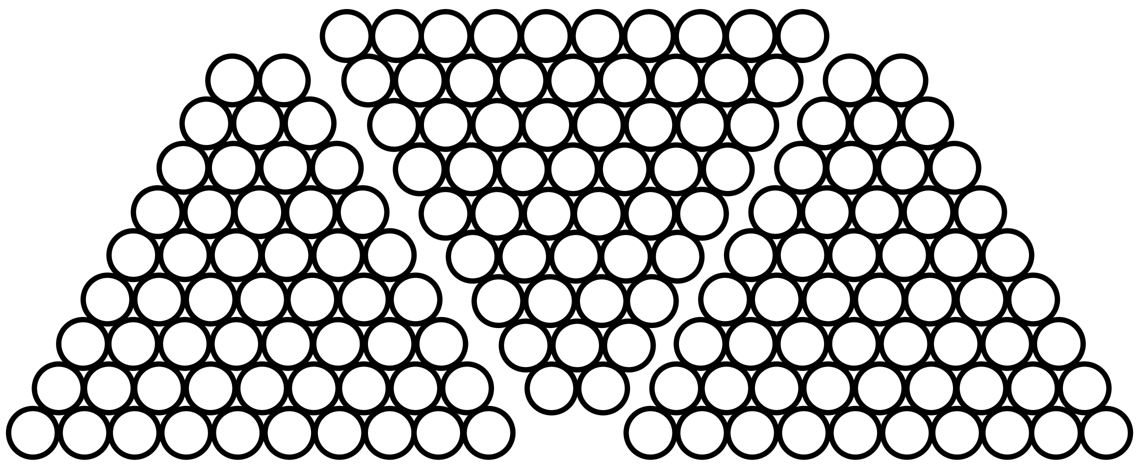
Actividad 1. Plantilla 5

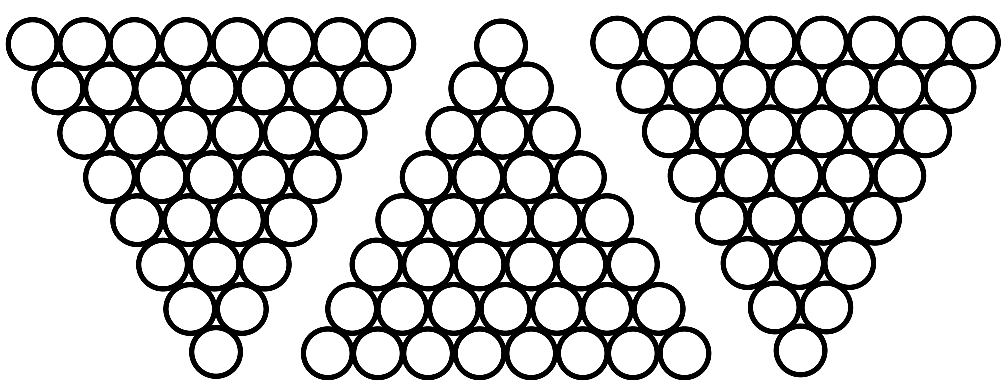




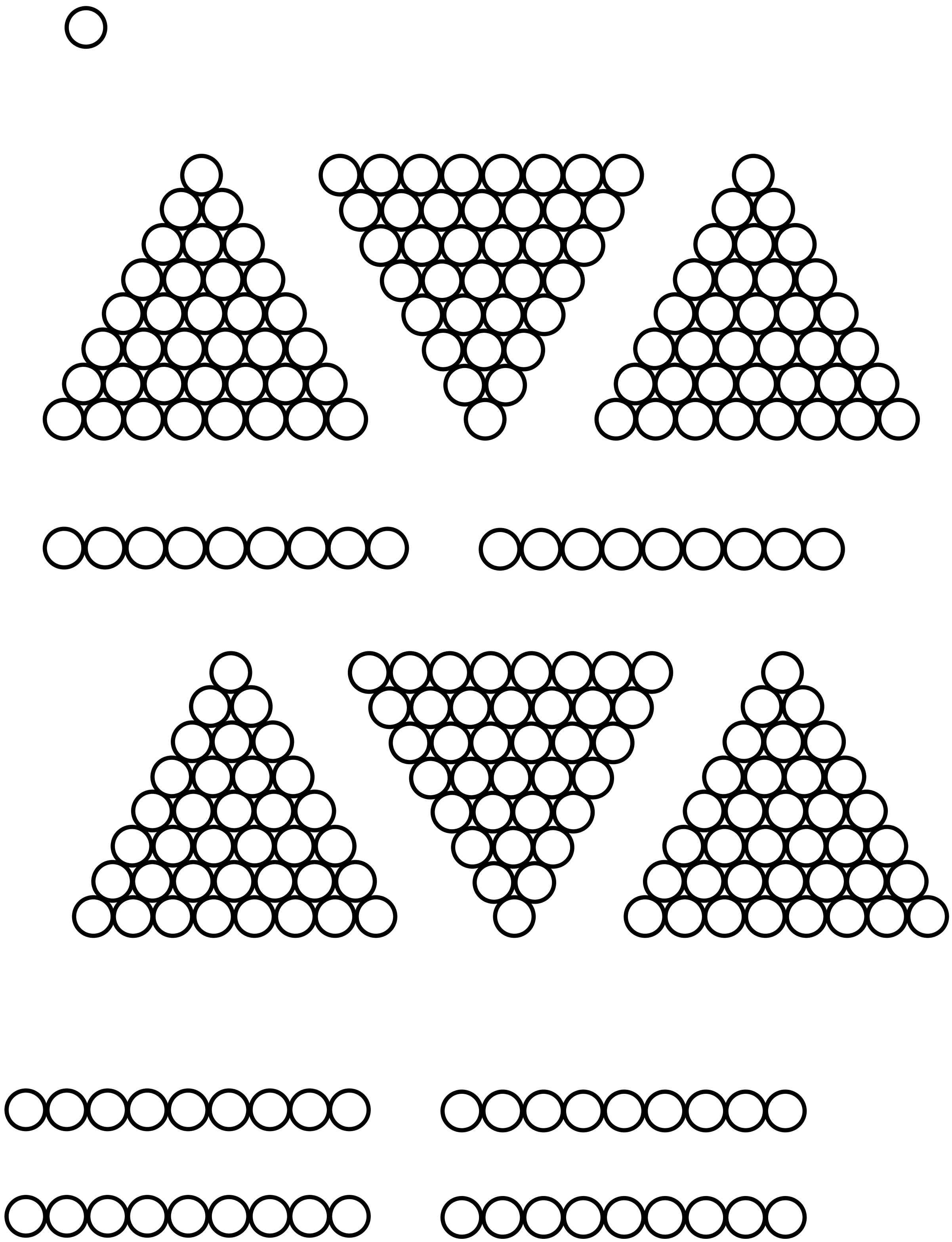
Actividad 1. Plantilla 6



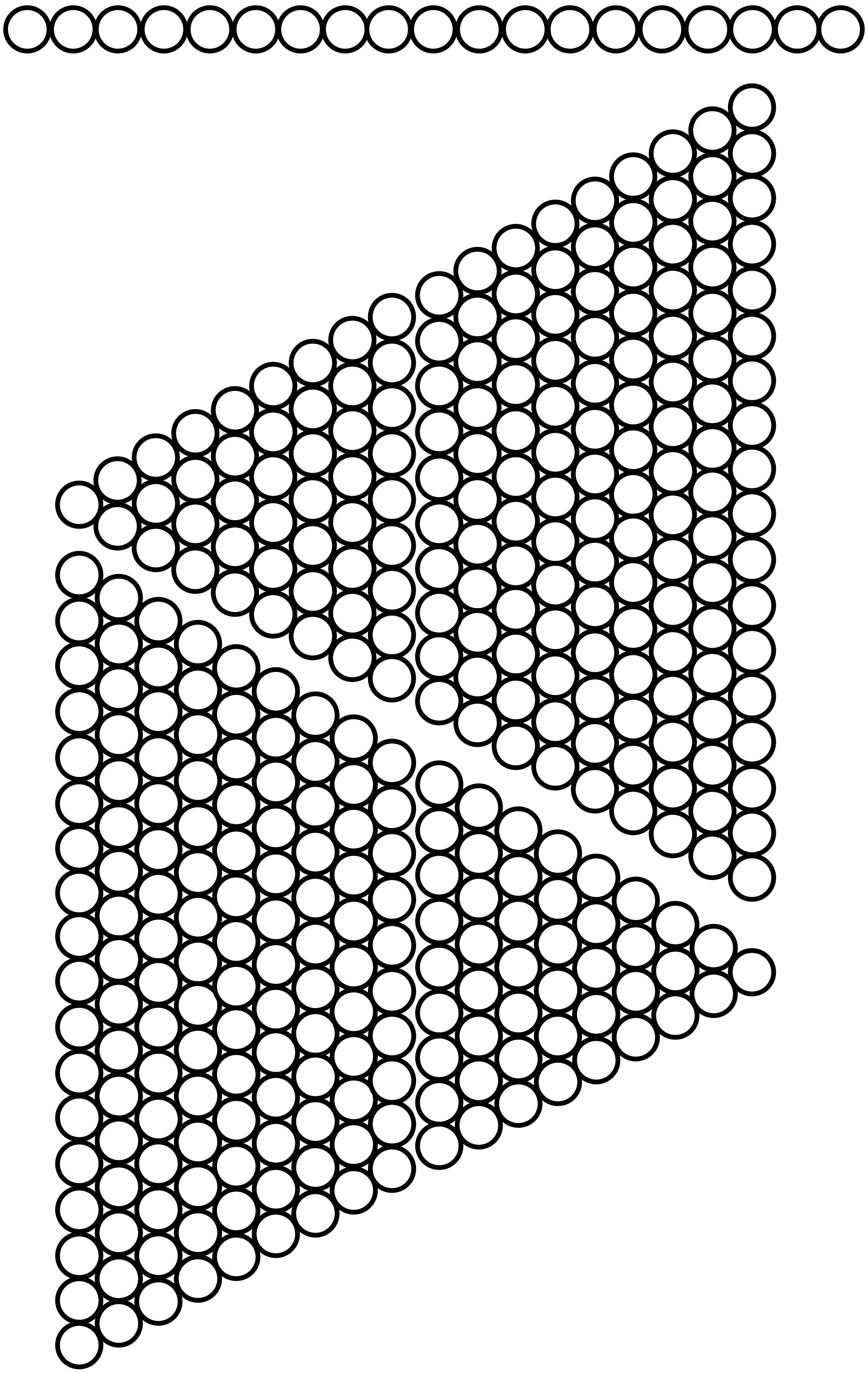




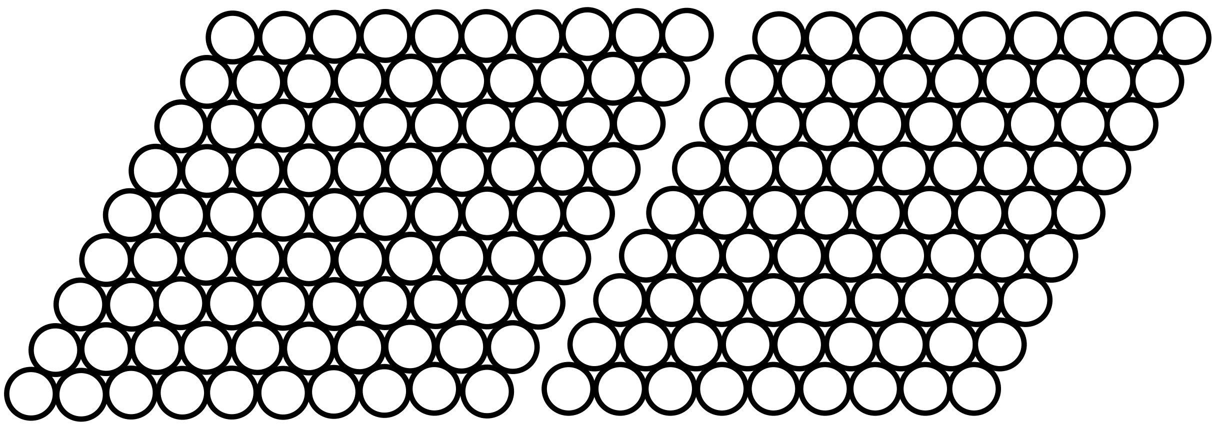
Actividad 1. Plantilla 7

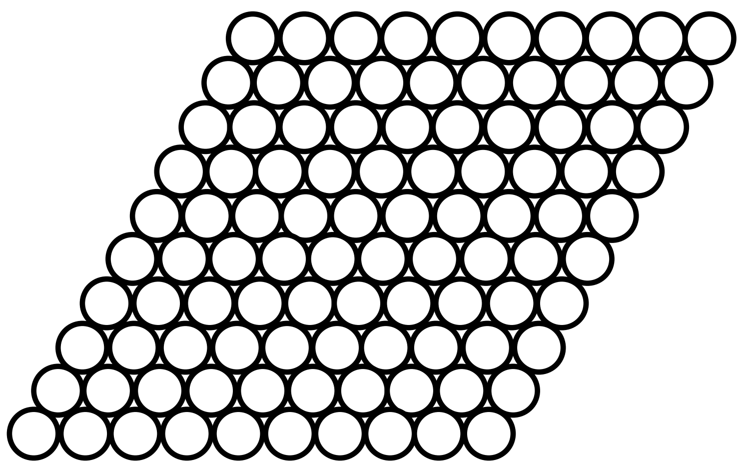


Actividad 1. Plantilla 8

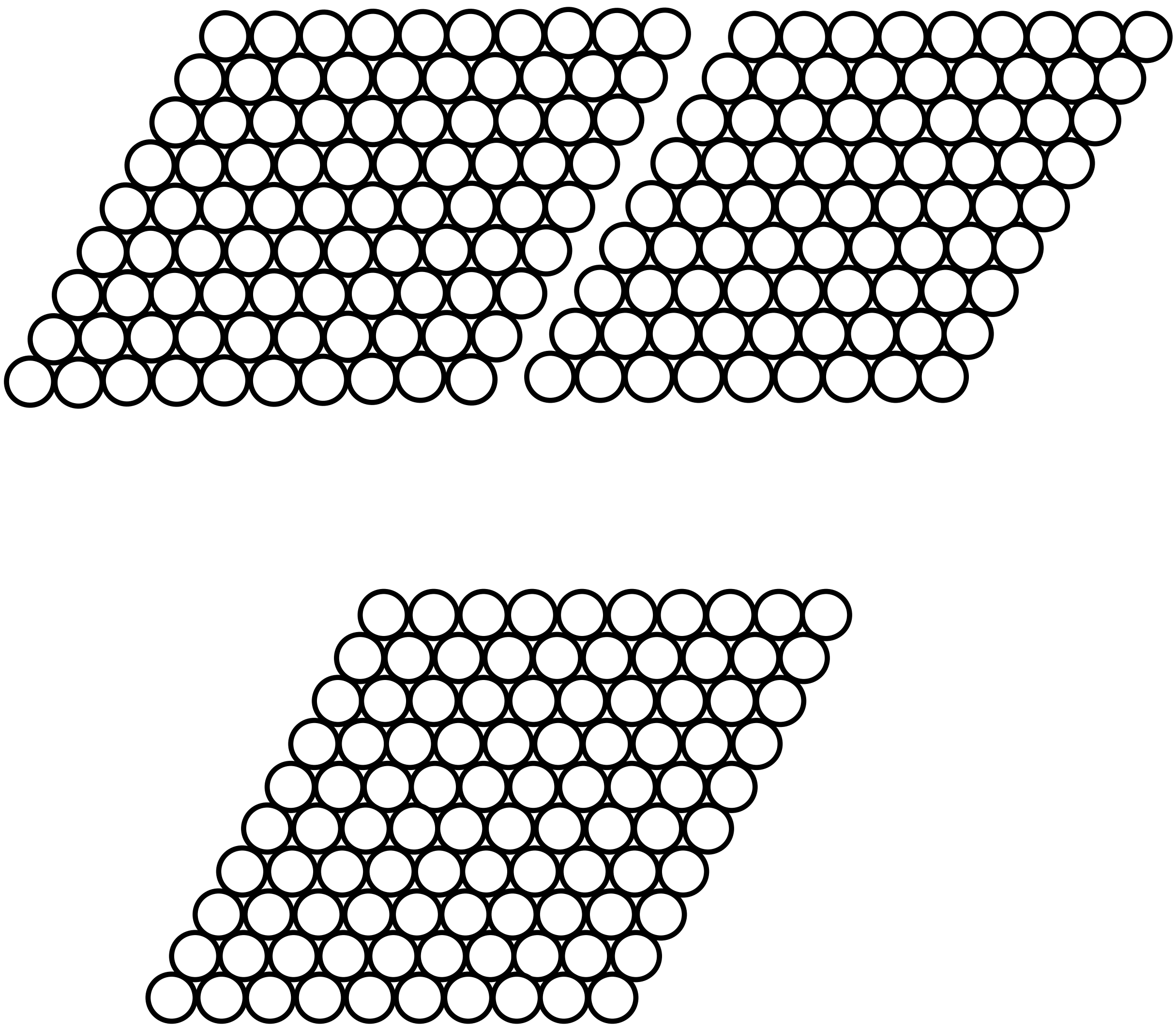


Actividad 1. Plantilla 9

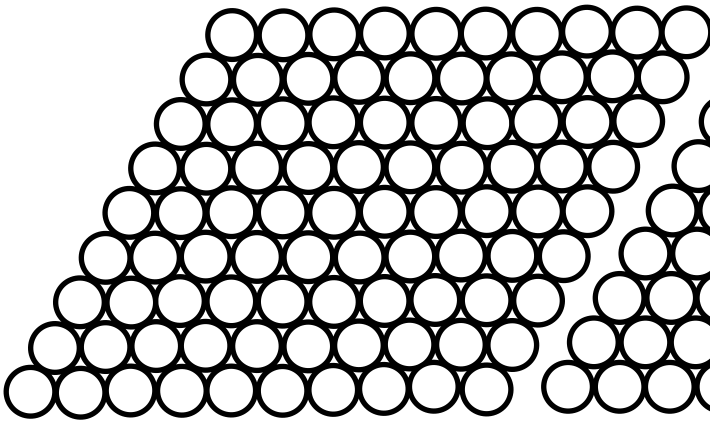


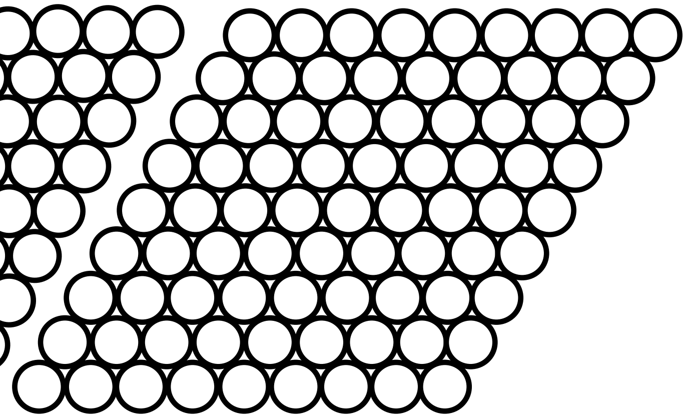


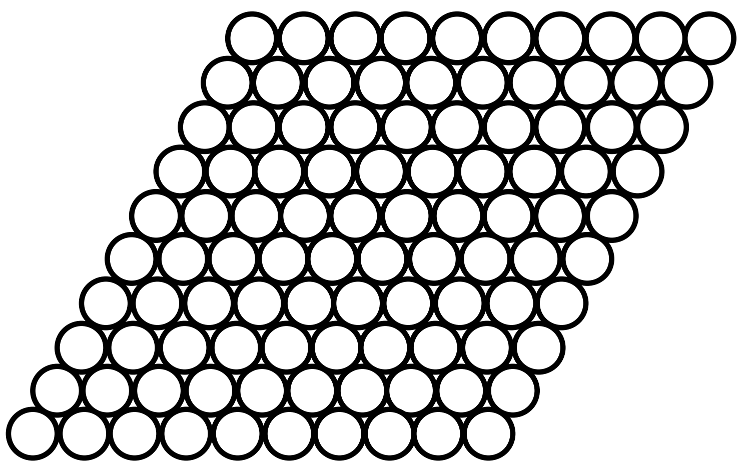
Actividad 1. Plantilla 10



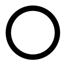
Actividad 1. Plantilla 11

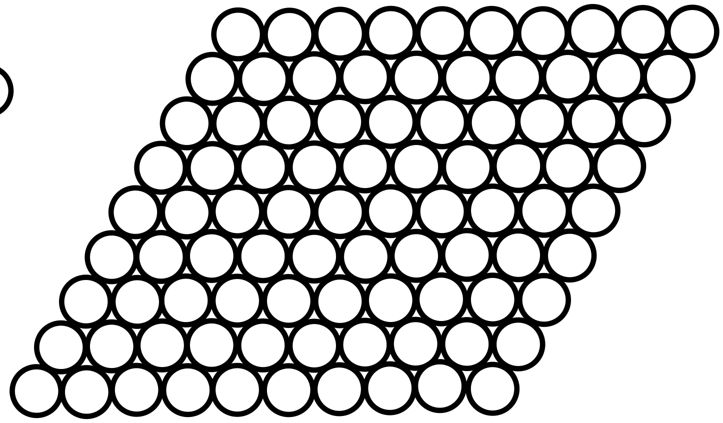


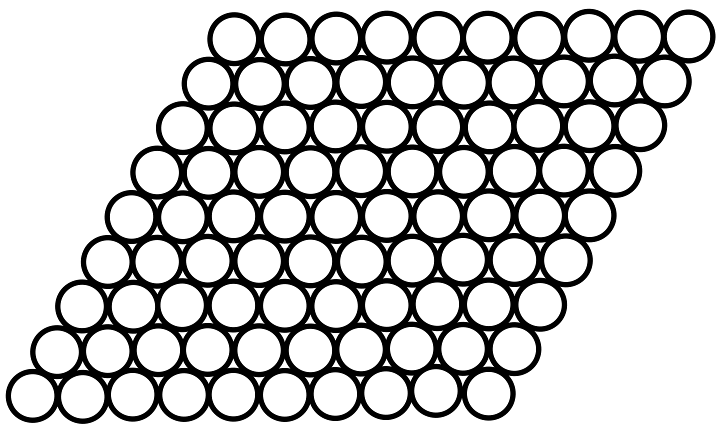


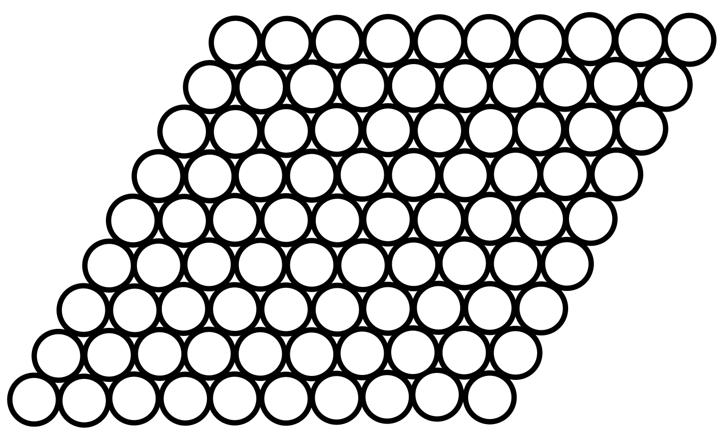


Actividad 1. Plantilla 12

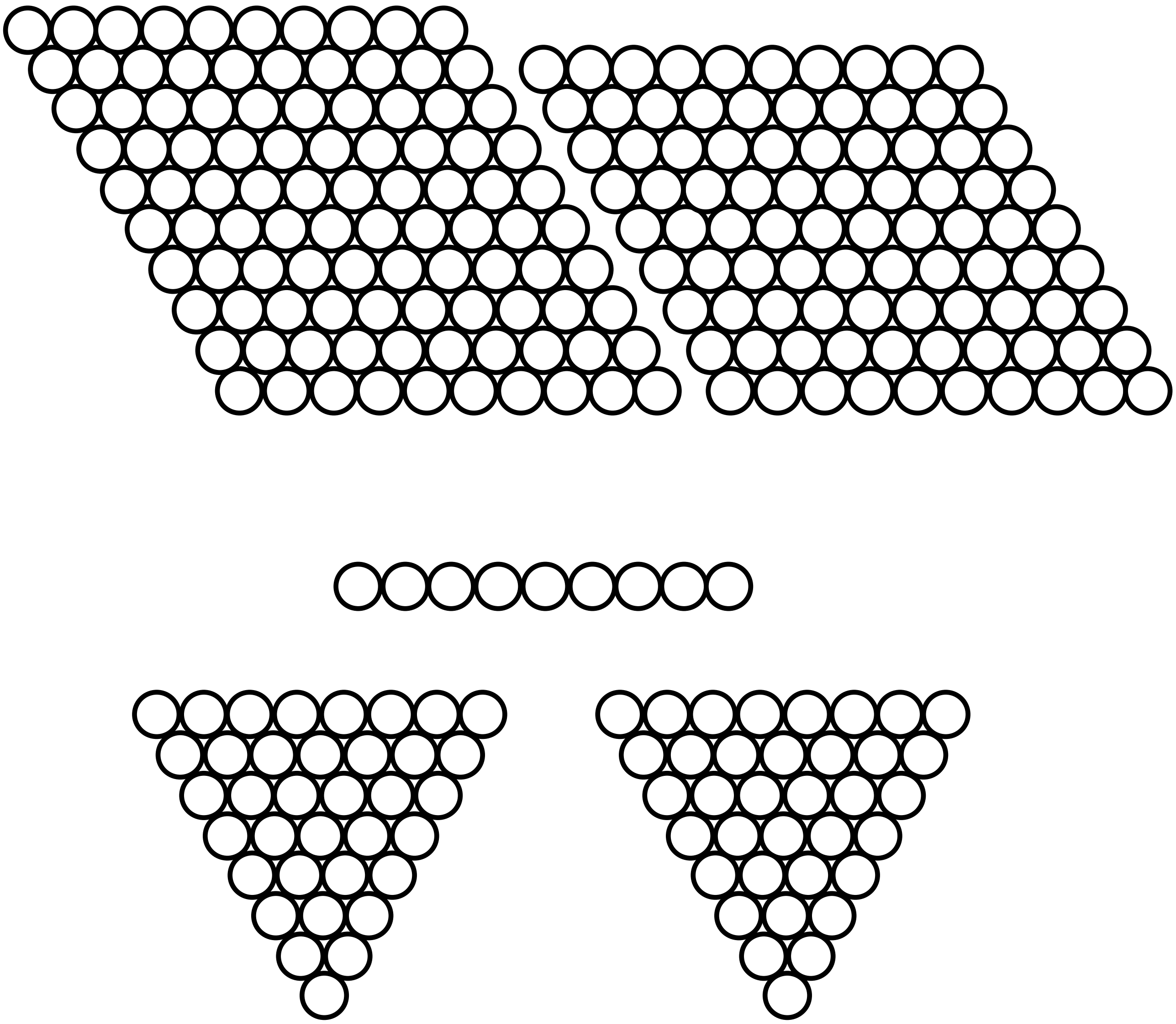




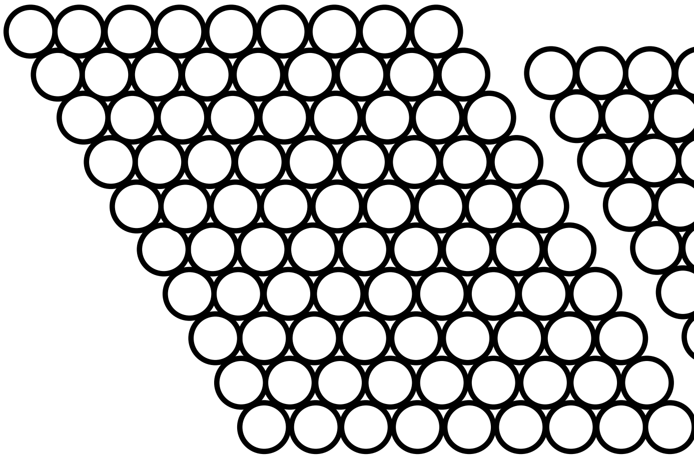


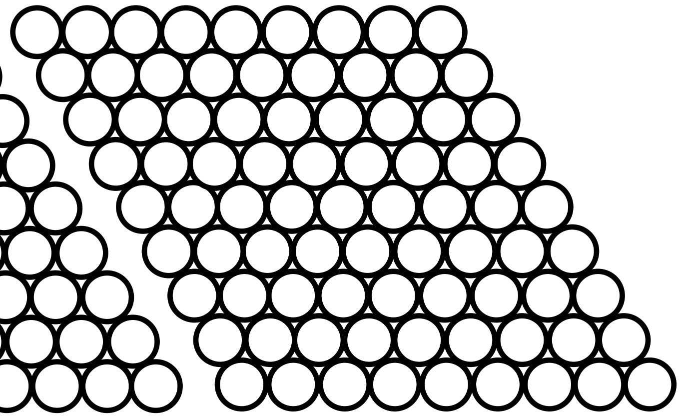


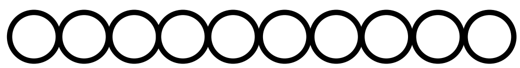
Actividad 1. Plantilla 13

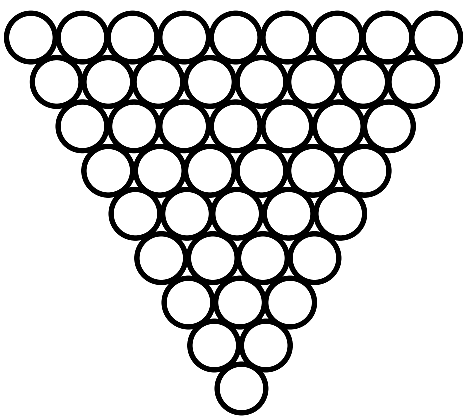


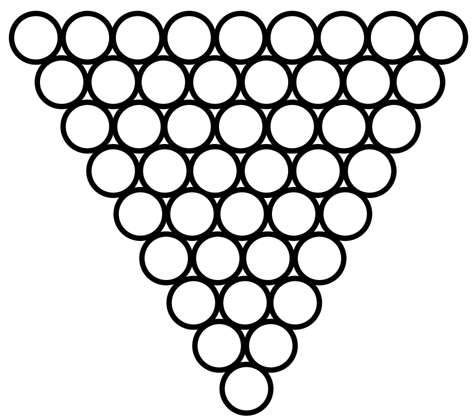
Actividad 1. Plantilla 14



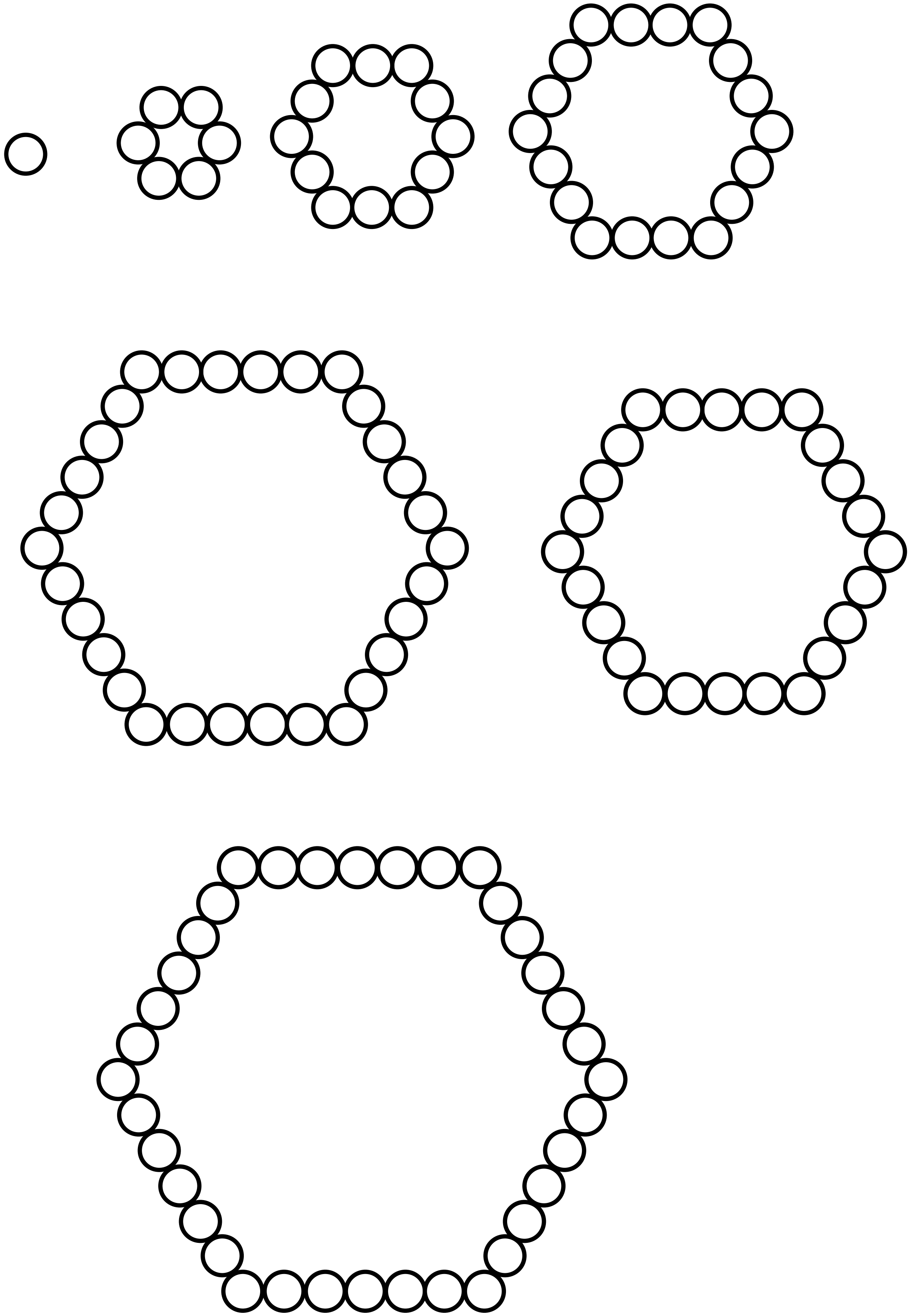


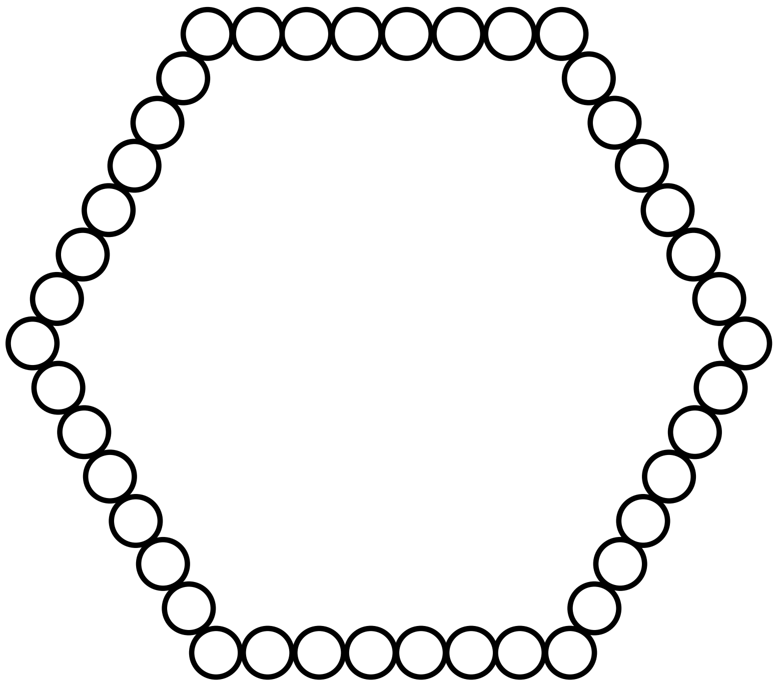


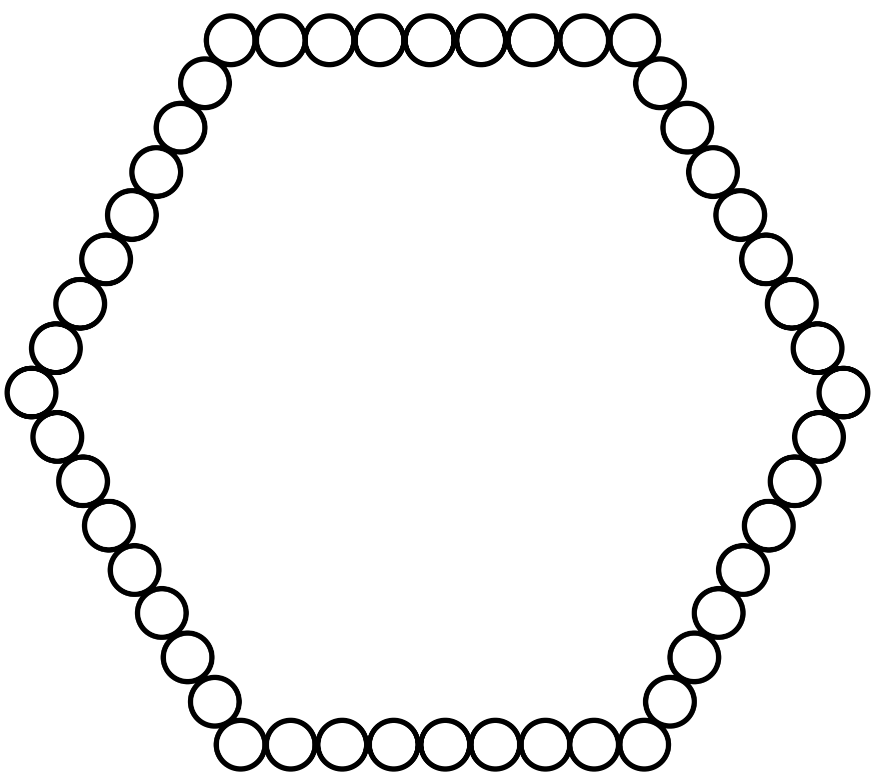


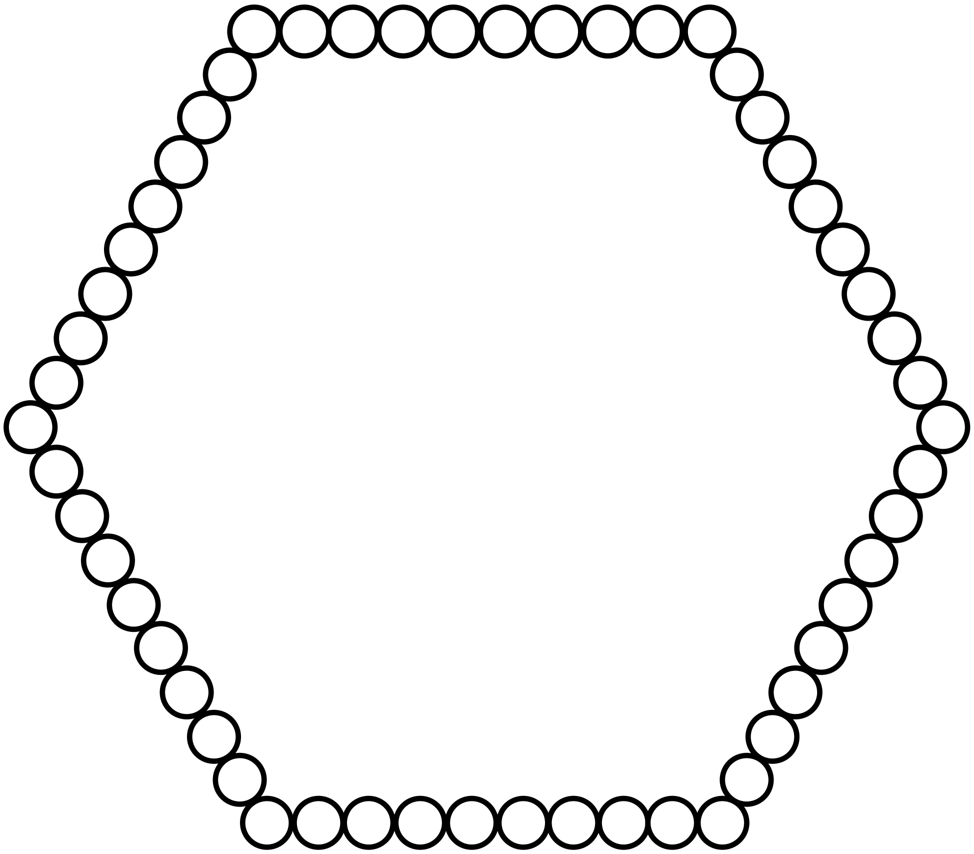


Actividad 1. Plantilla 15

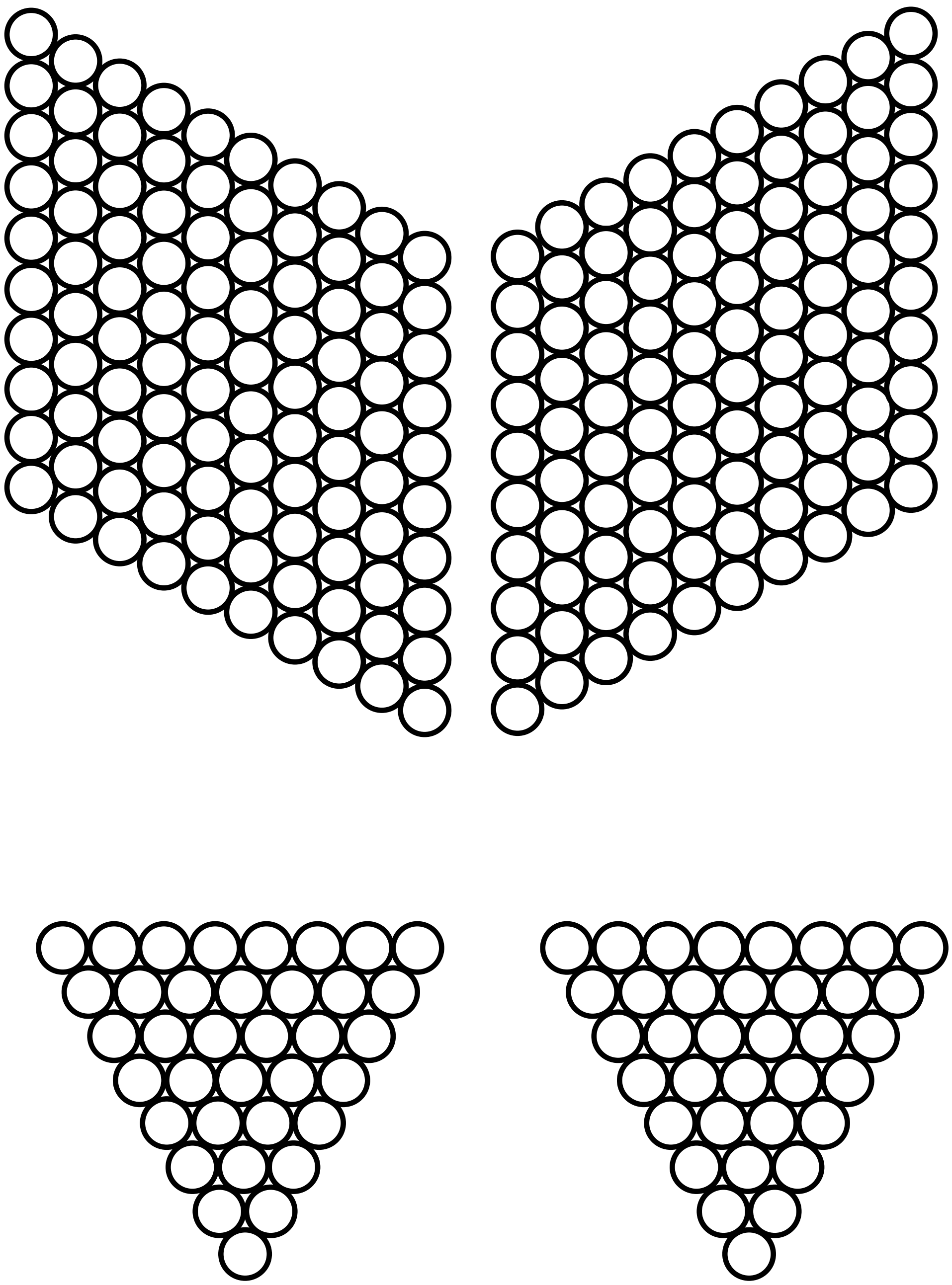




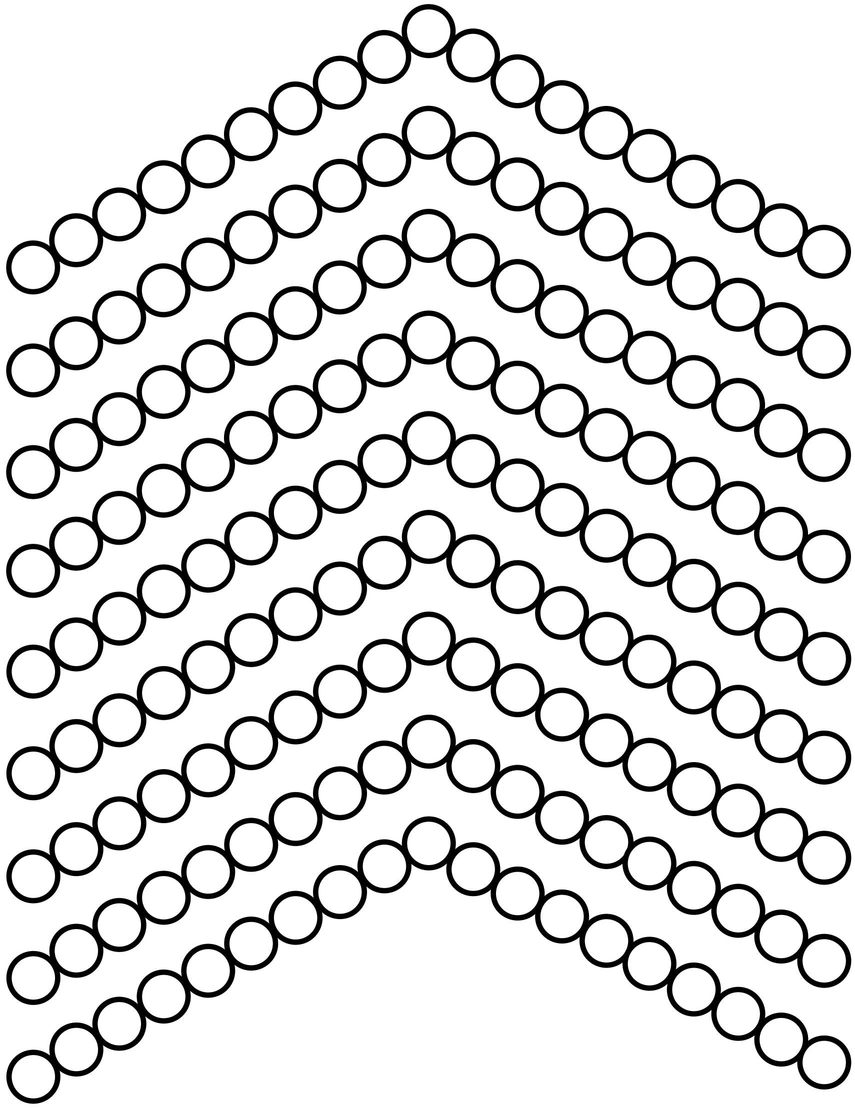


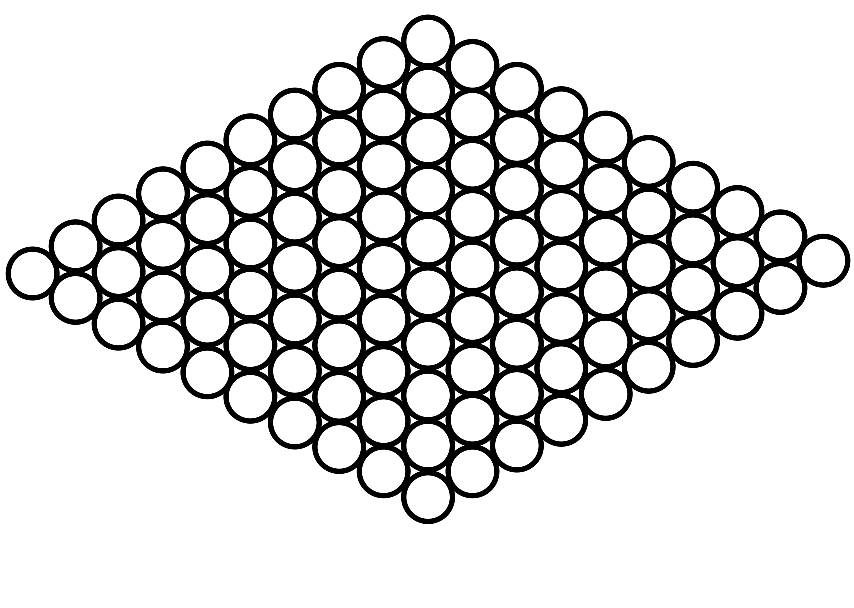


Actividad 1. Plantilla 16

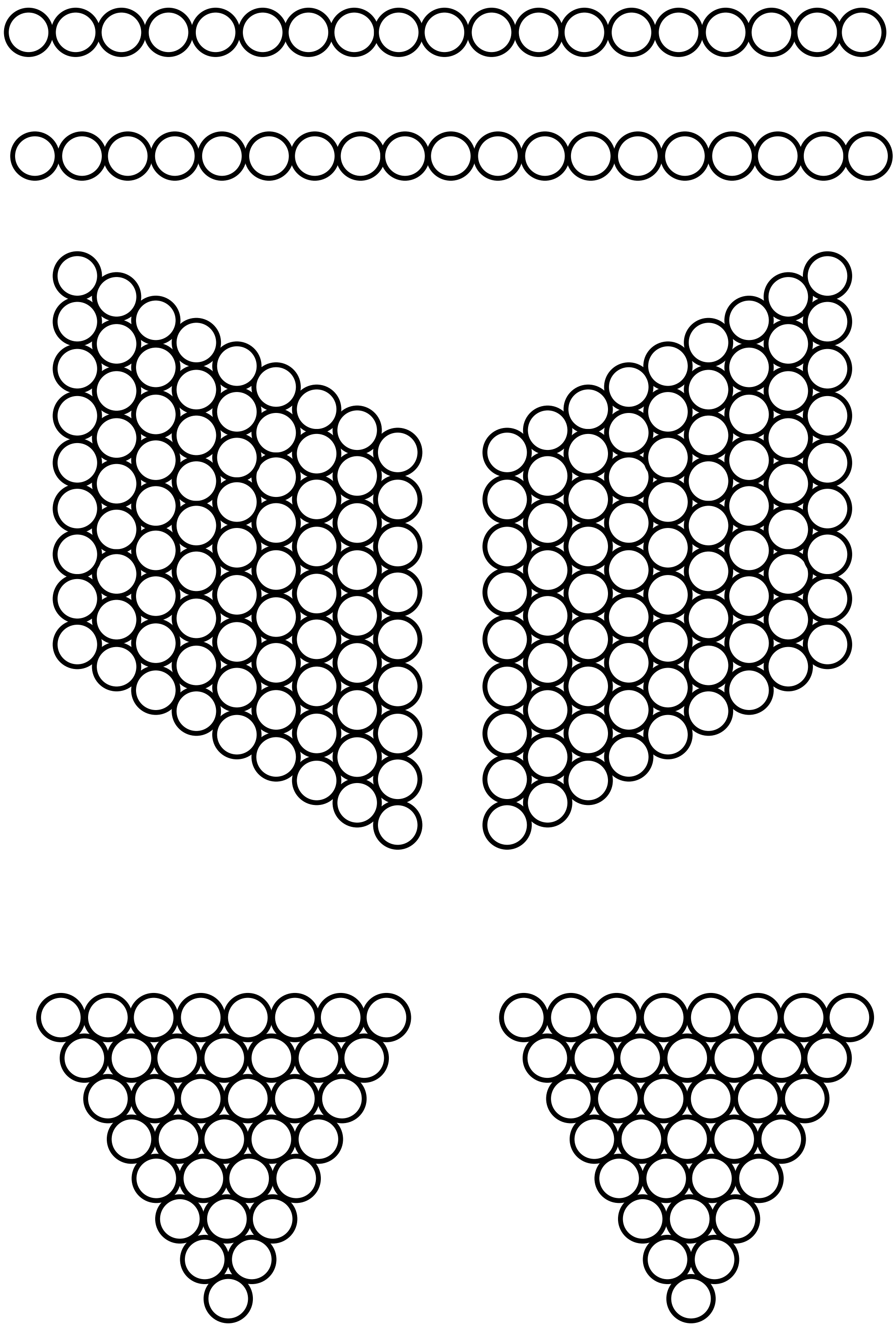


Actividad 1. Plantilla 17

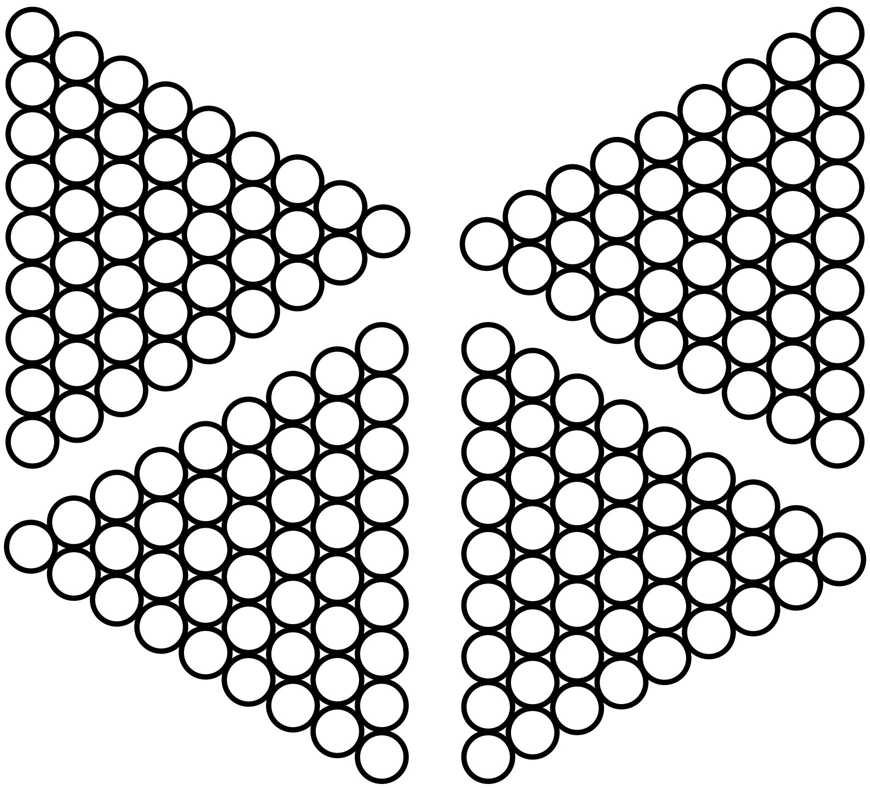


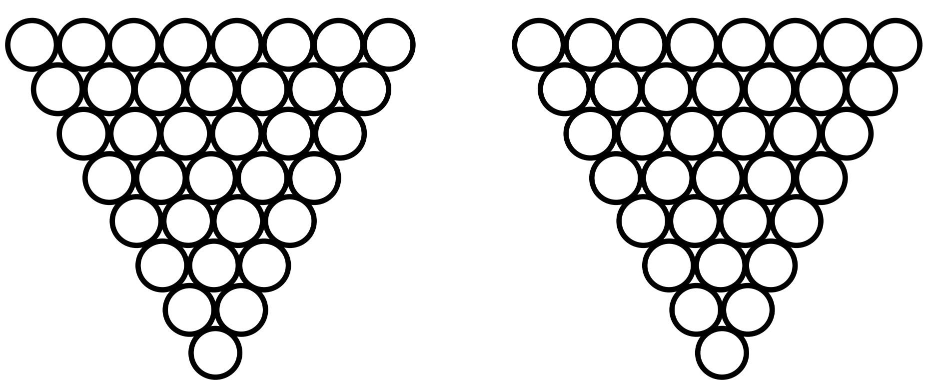


Actividad 1. Plantilla 18

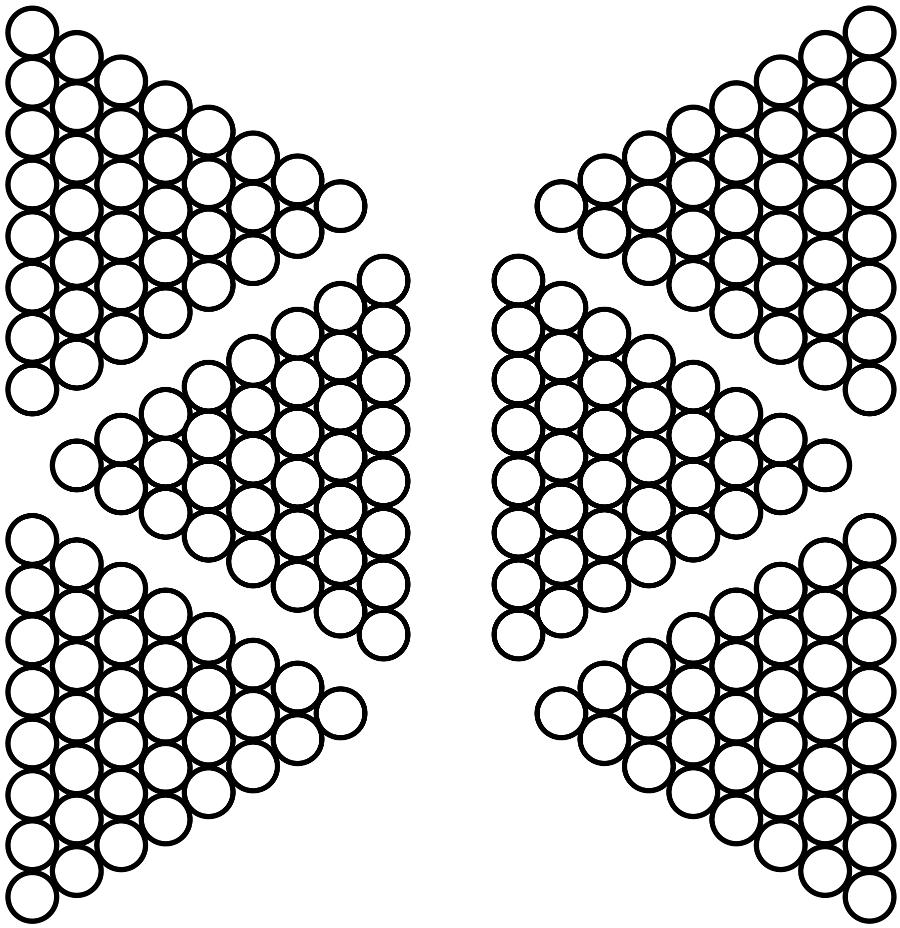


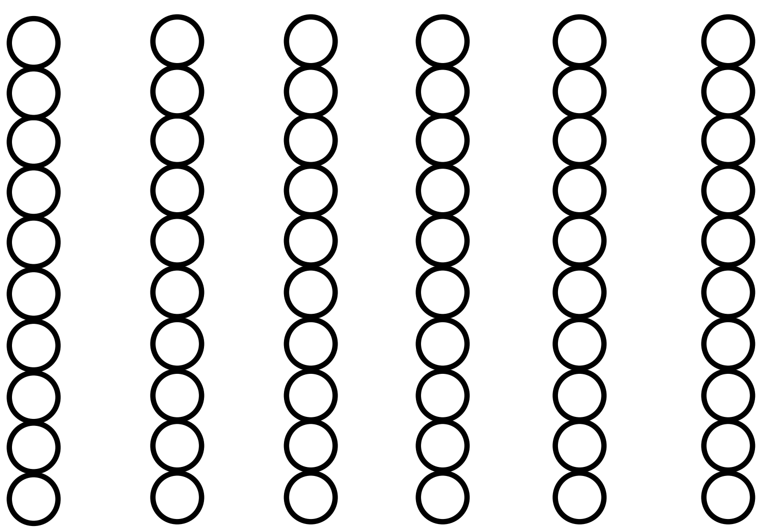
Actividad 1. Plantilla 19



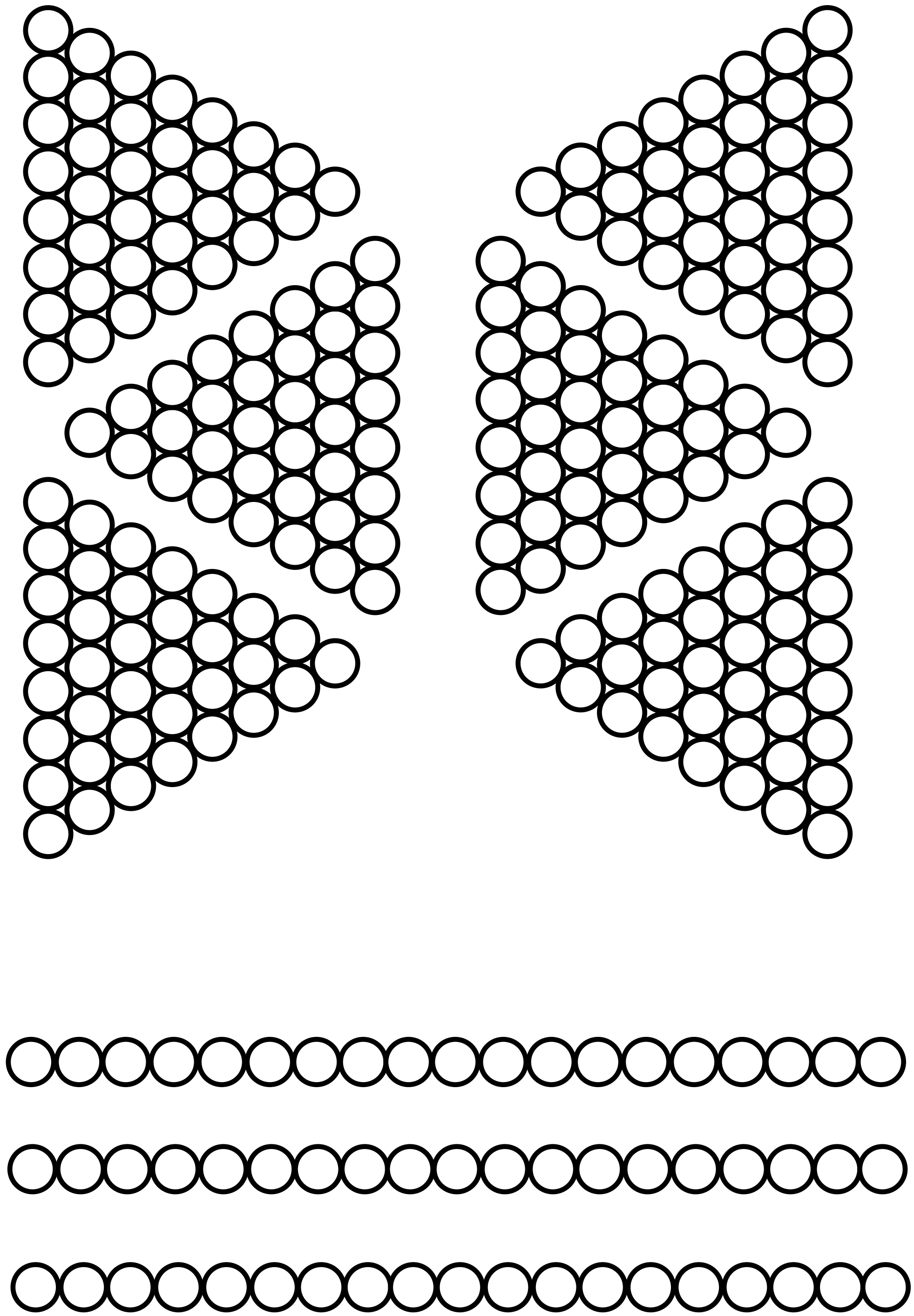


Actividad 1. Plantilla 20A

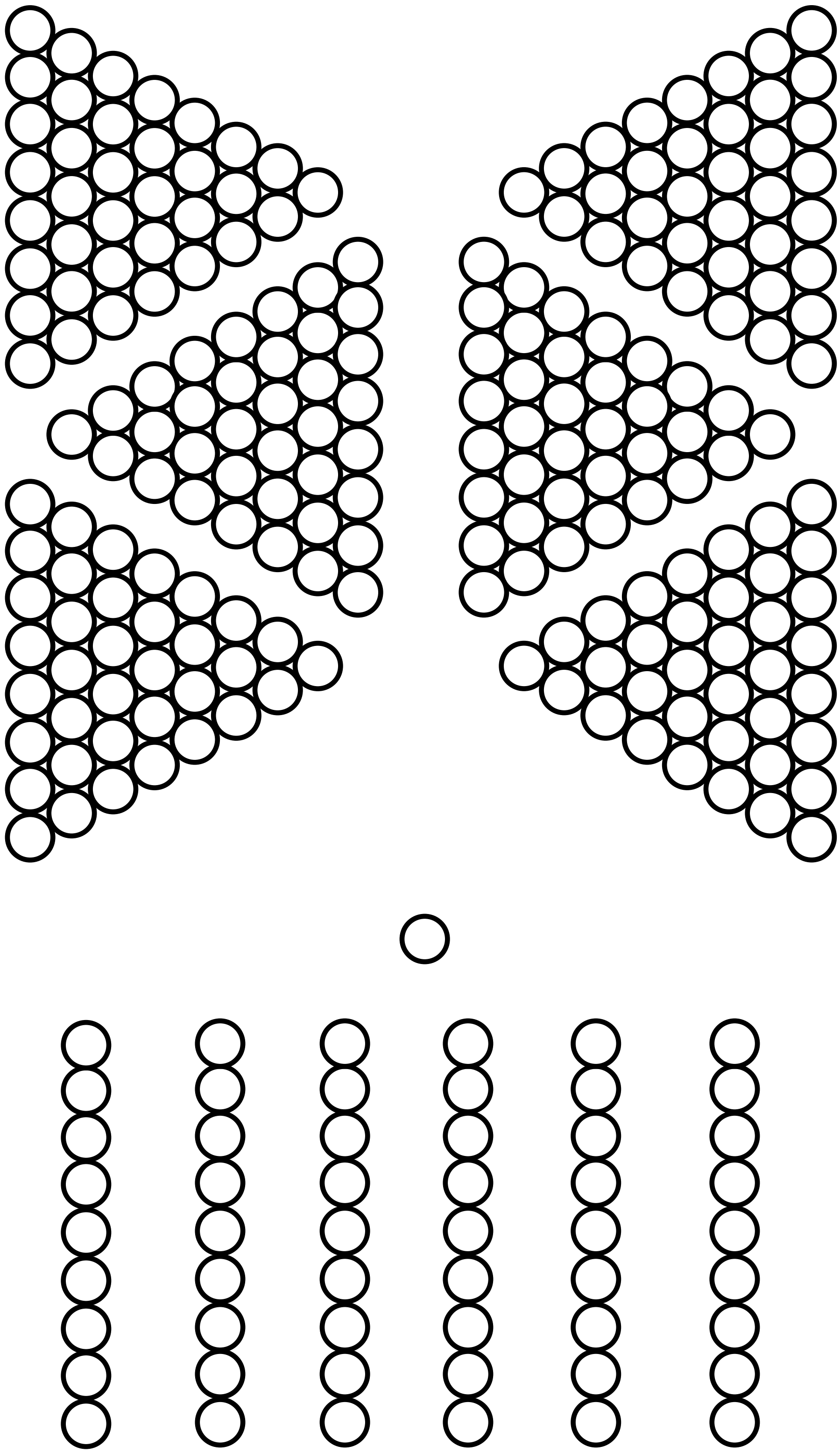




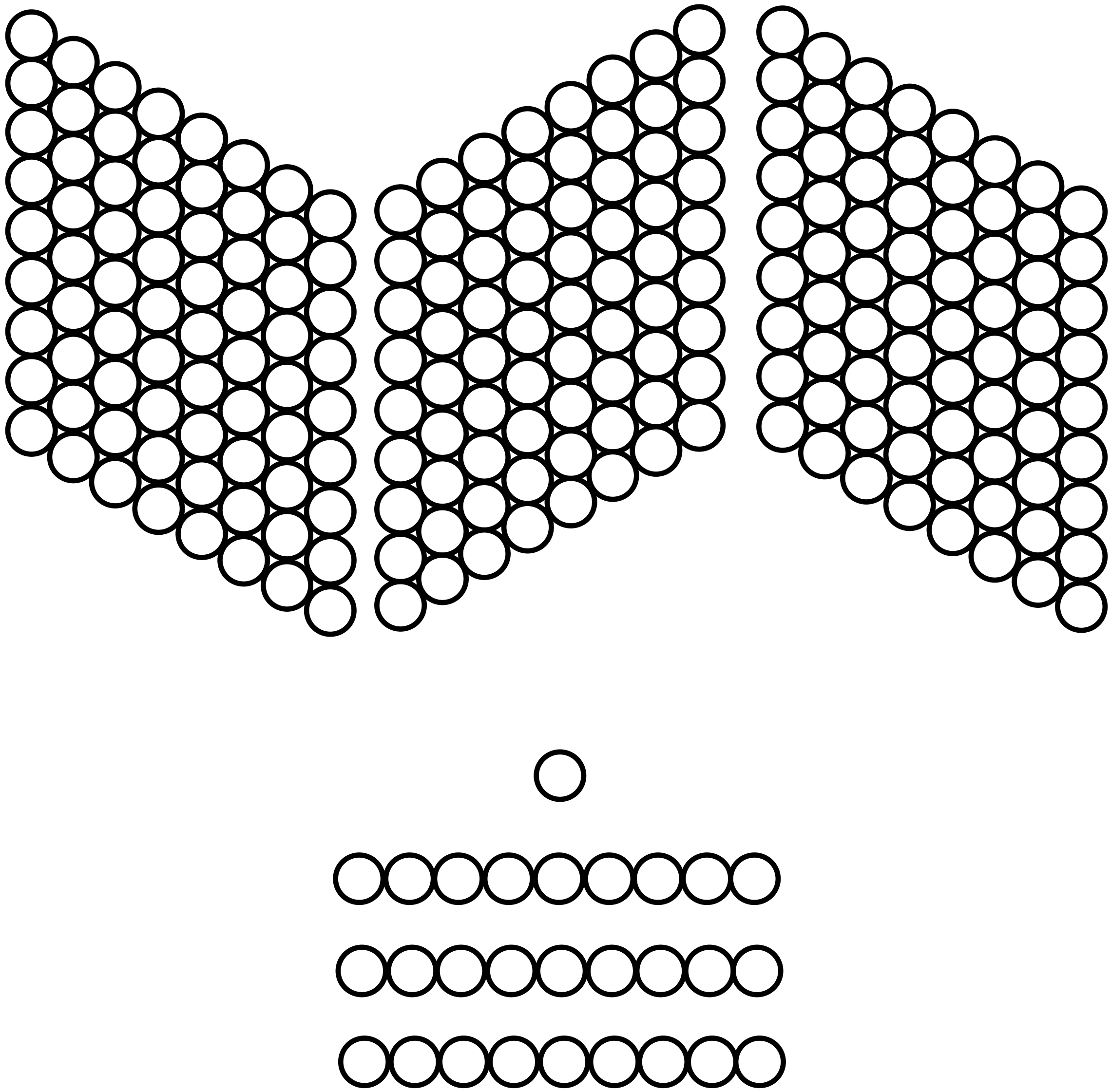
Actividad 1. Plantilla 20B



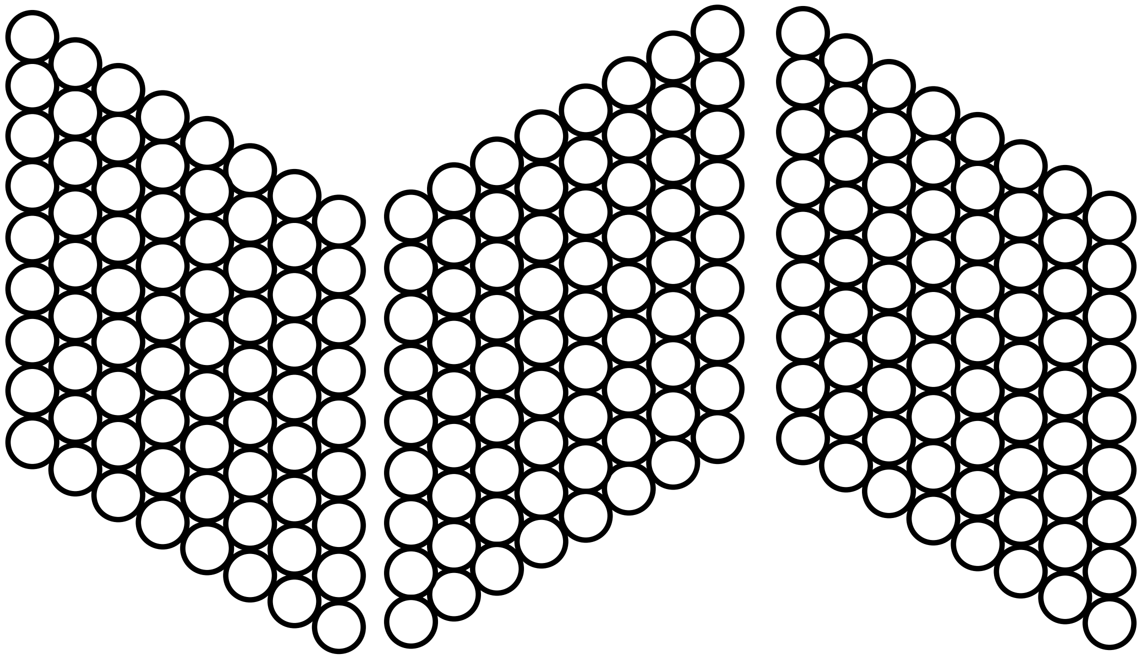
Actividad 1. Plantilla 20C

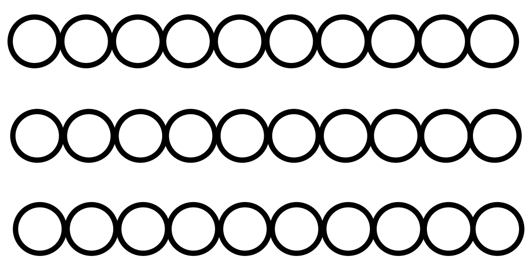


Actividad 1. Plantilla 21A

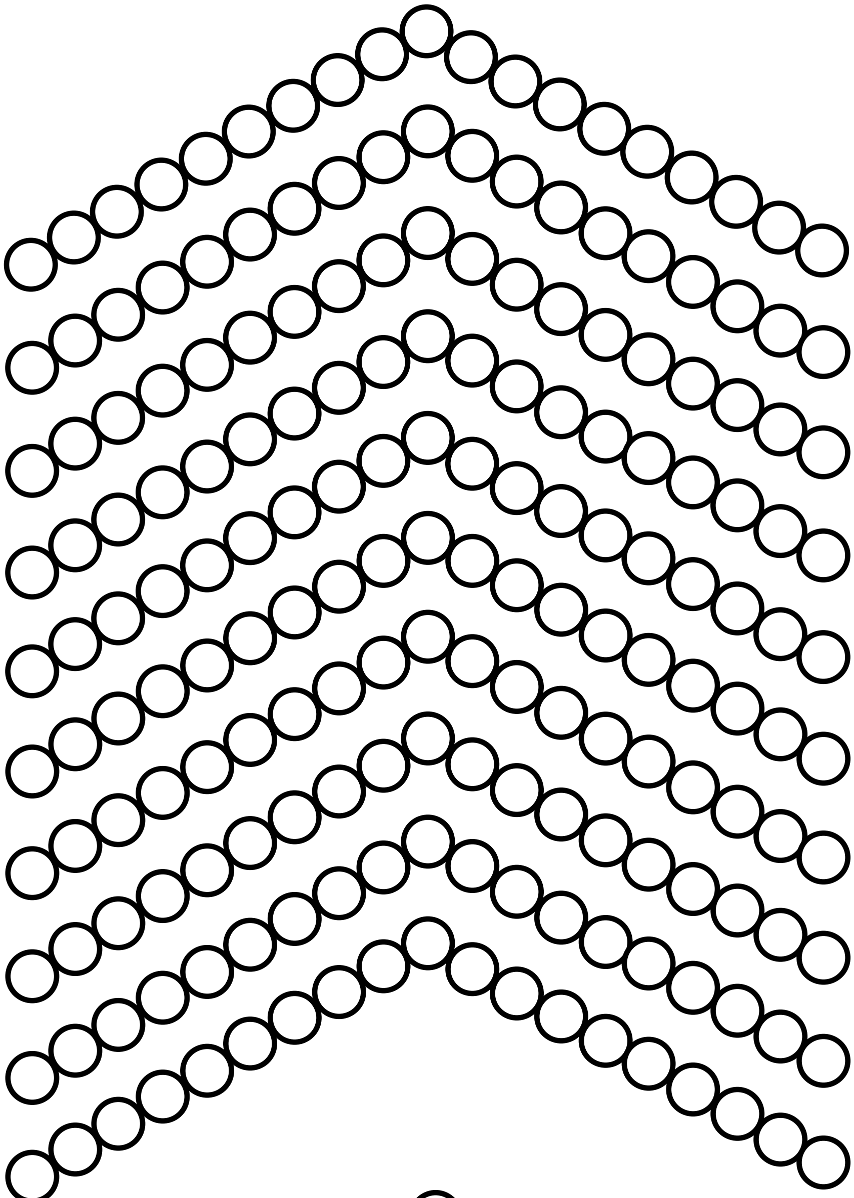


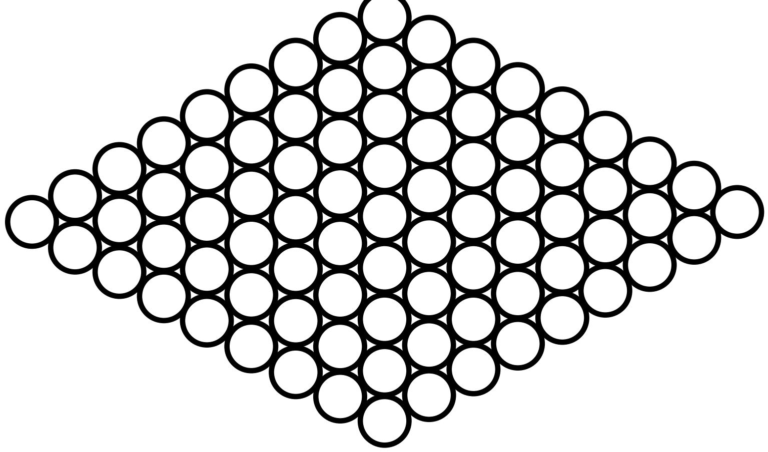
Actividad 1. Plantilla 21B



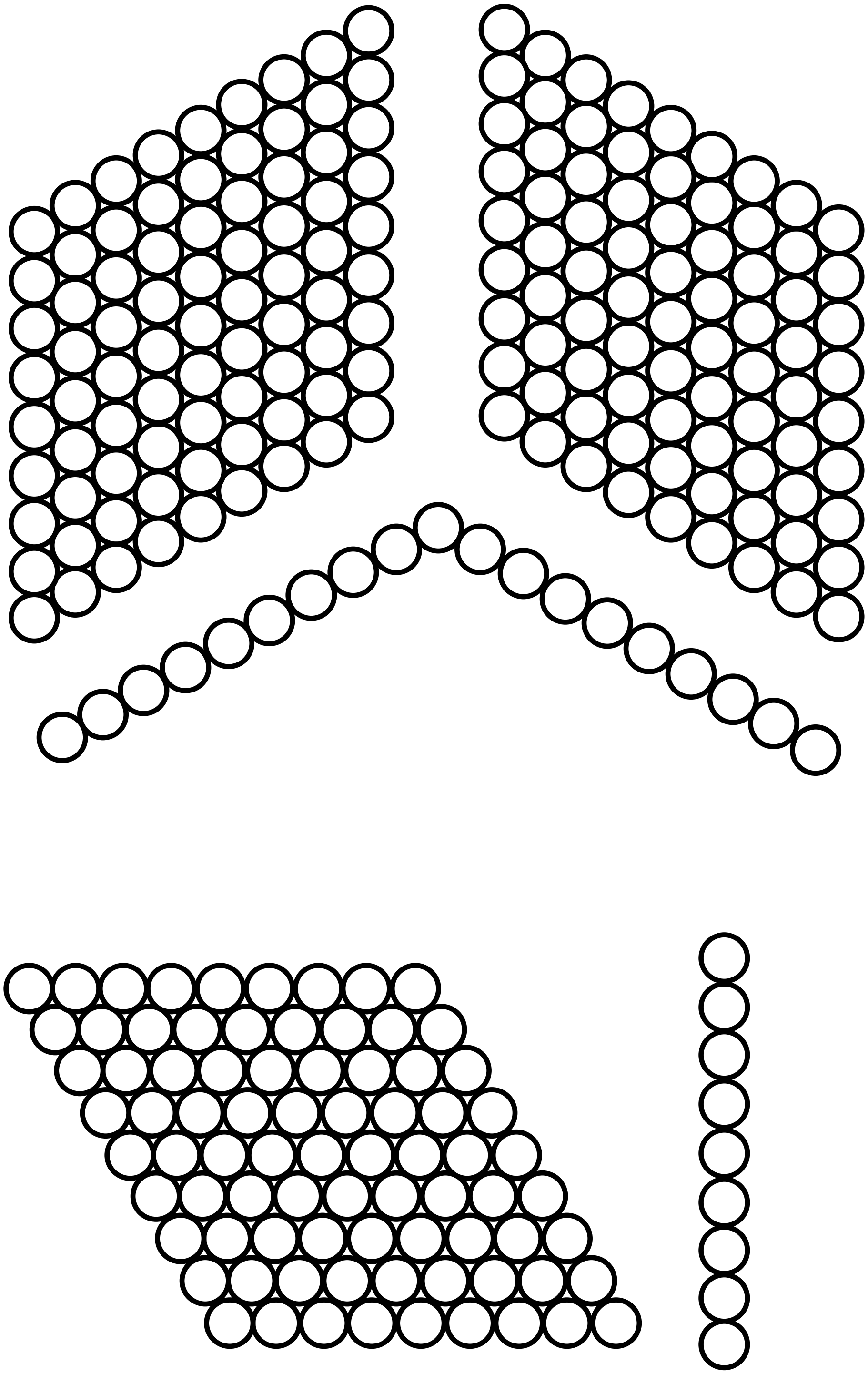


Actividad 1. Plantilla 22

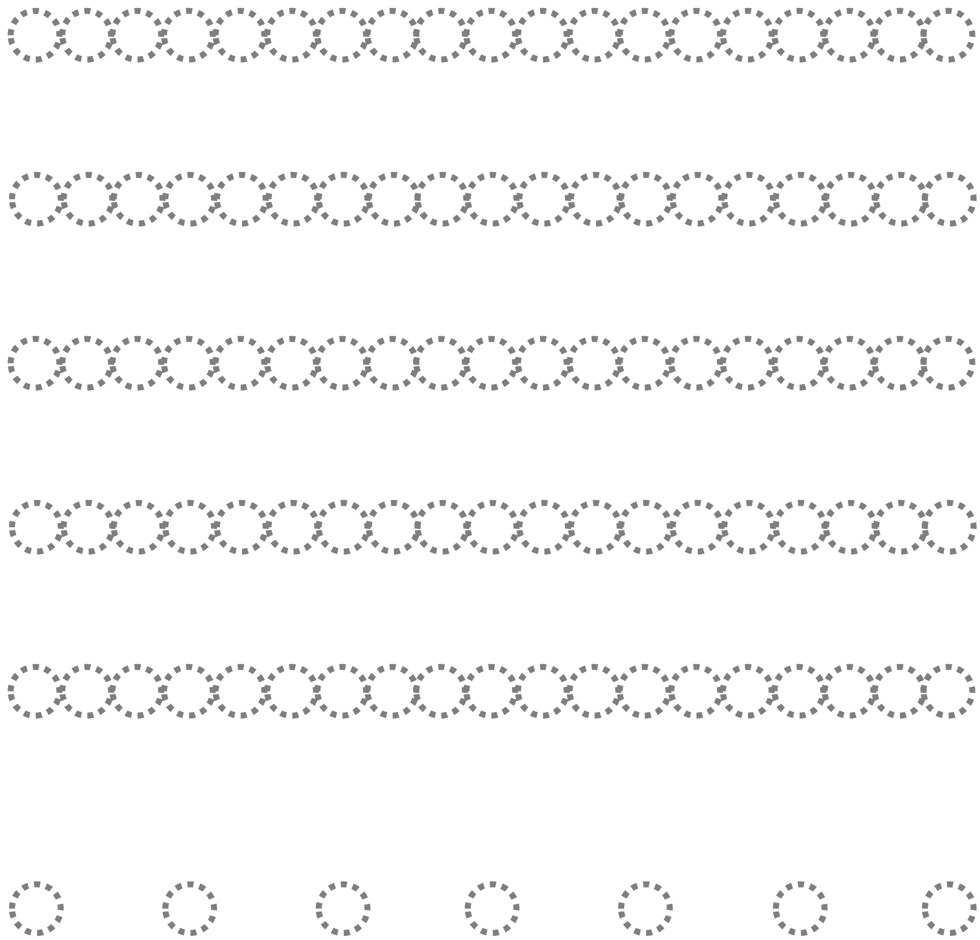




Actividad 1. Plantilla 23

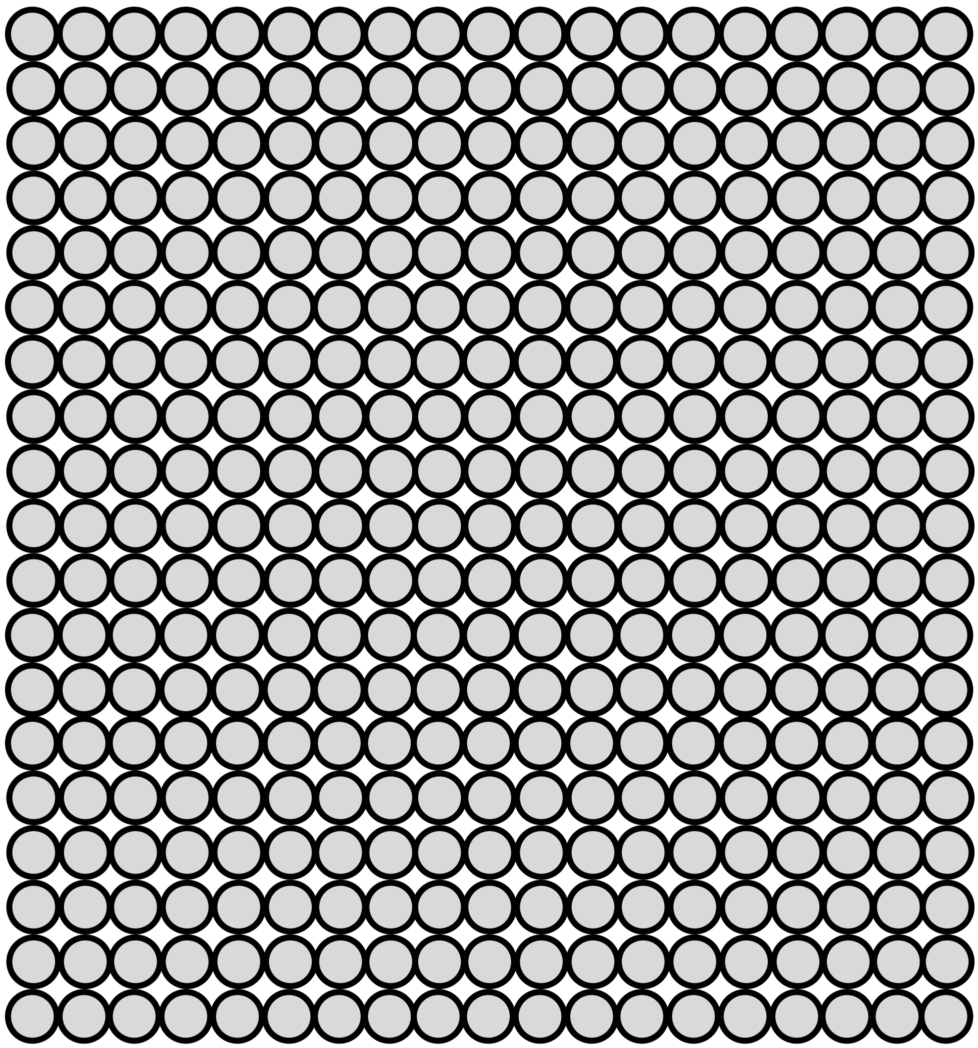


Actividad 1. Plantilla -n y -1

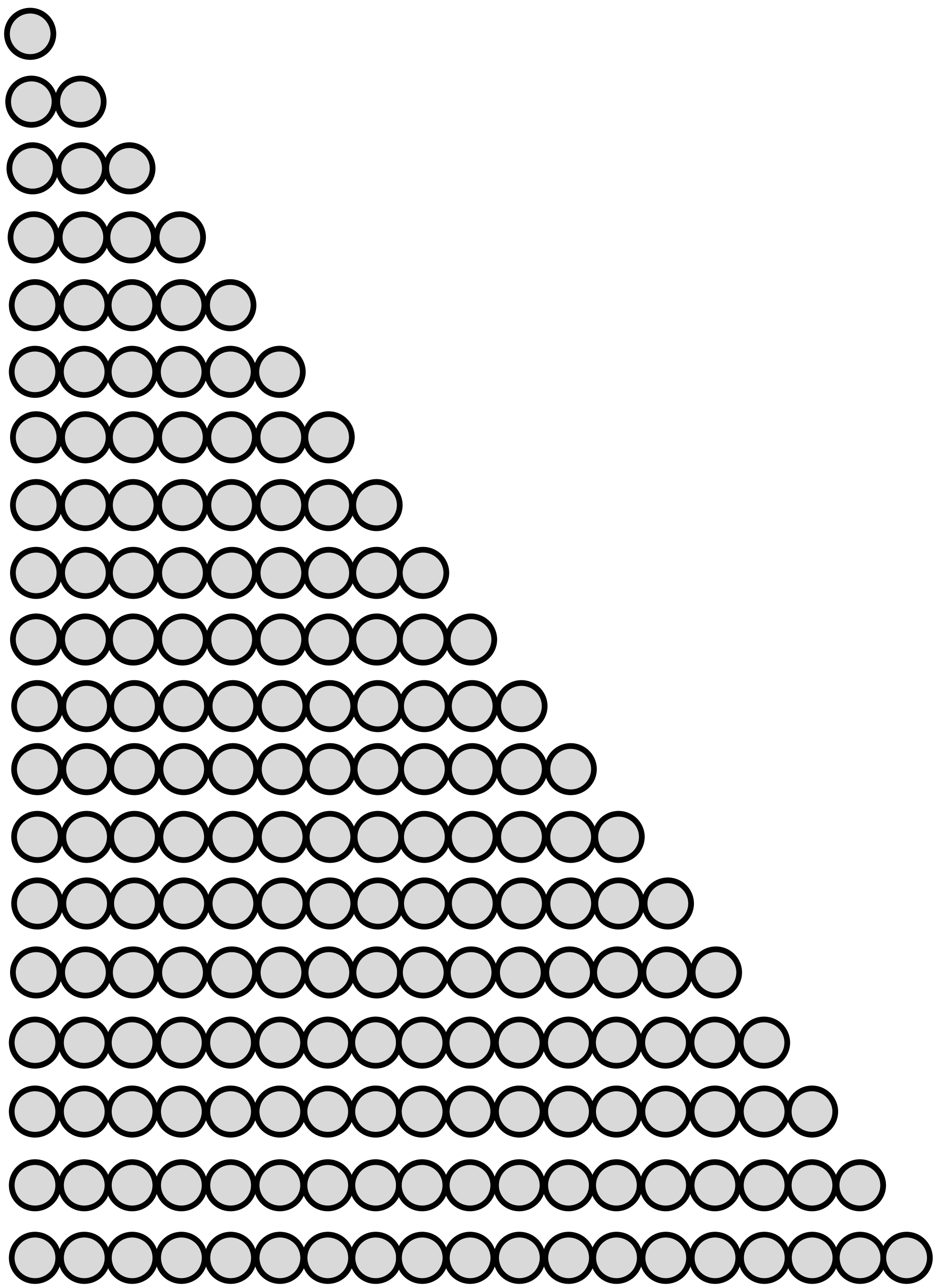


Actividad 1. Plantilla nxn

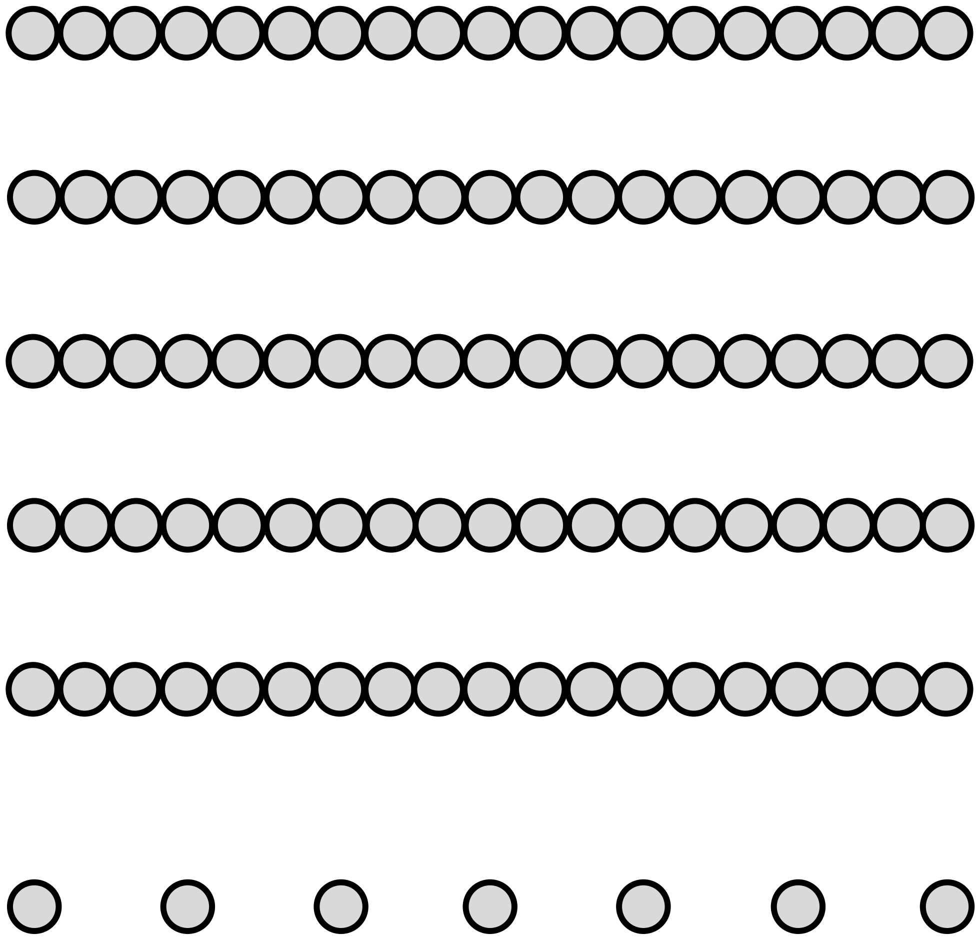
NOTA: A cada equipo, se le deberán proporcionar TRES ejemplares de esta plantilla.



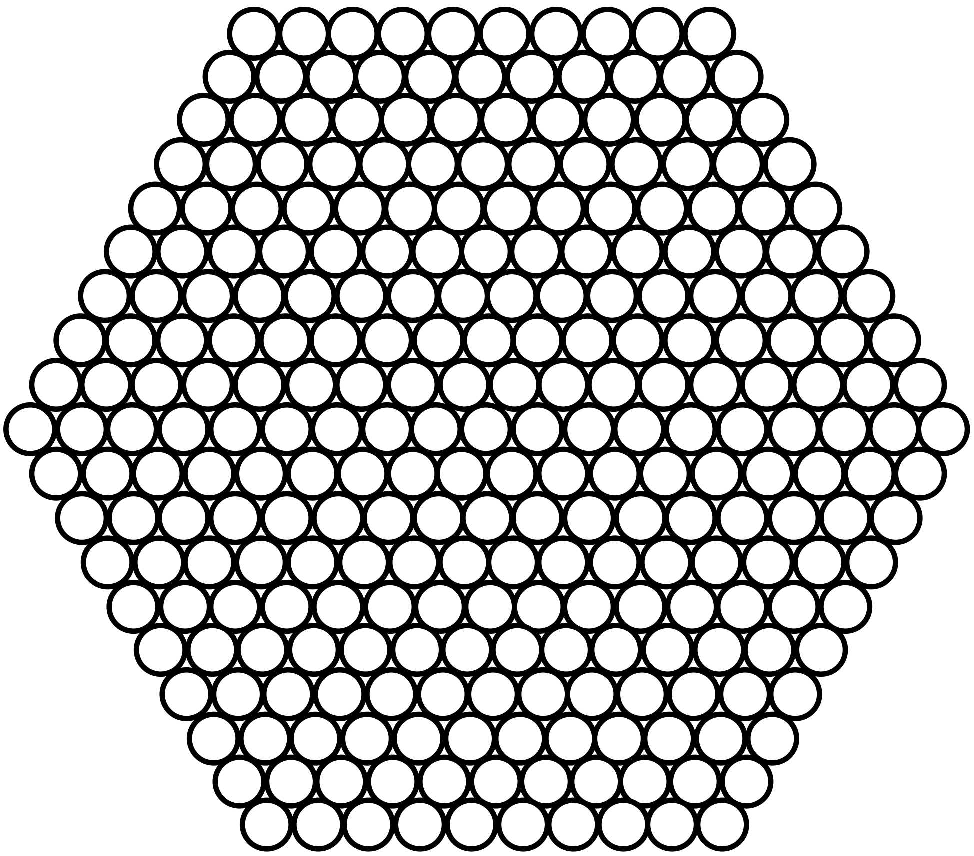
Actividad 1. Plantilla para sumas



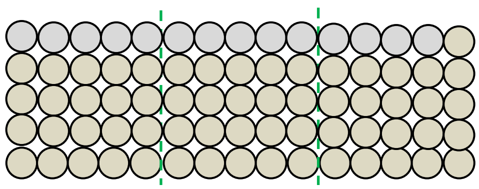
Actividad 1. Plantilla +n y +1



FORMATO PARA PLANTILLAS



PLANTILLA PARA ANÁLISIS ALGEBRAICO



PLANTILLA FINAL

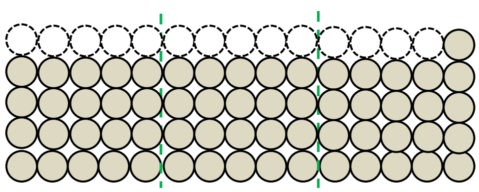


Tabla de contenidos Secuencia 3
Pensamiento Estadístico

Secuencia 3

Pensamiento Estadístico

Presentación

En esta secuencia didáctica se promueven objetos matemáticos relacionados con el eje curricular de secundaria, Manejo de la Información, particularmente en aspectos que tienen que ver con el pensamiento estadístico. Se centra la atención en el desarrollo de objetos matemáticos tales como: Variable, tipo de variable, población, muestra, medidas de tendencia central, medidas de dispersión.

Se plantea la resolución de problemas en situaciones bajo incertidumbre, mediada por el uso de tecnología digital, que reclaman el uso de herramientas estadísticas, para promover los procesos cognitivos que intervienen en dicha actividad. Estos procesos van más allá del manejo algorítmico de datos, se trata además, de formular preguntas, establecer conjeturas, recopilar datos pertinentes y significativos, analizar su variabilidad, establecer resultados, interpretarlos y valorarlos de acuerdo a la situación planteada para la toma de decisiones fundamentadas.
La resolución de problemas se concibe como una actividad que permite el desarrollo de habilidades para: la interpretación del lenguaje natural, el manejo del lenguaje propio de la matemática en sus múltiples representaciones, explorar, formular y validar conjeturas, comunicar, argumentar, entre otras. El uso de tecnología digital se considera como un medio para potenciar el desarrollo de estas habilidades.

El propósito de esta secuencia es que los estudiantes identifiquen el papel que puede jugar la tecnología digital, tanto en la elaboración de instrumentos para recabar información, como en ser fuente de información recabada por instituciones o dependencias gubernamentales o no, así como un recurso didáctico que permite promover el desarrollo de competencias genéricas y matemáticas, al permitir al estudiante visualizar gráficamente características de las variables estadísticas o sus distribuciones para identificar regularidades y/o realizar conjeturas sobre su comportamiento.

▸ Inicio

Actividad 1
Sobrepeso y obesidad en adolescentes en México

Tarea 1. Lectura e interpretación de información estadística

1. Estimaciones mundiales de la Organización Mundial de la Salud (OMS), indican resultados preocupantes acerca del sobrepeso y la obesidad en la población adulta y una tendencia a incrementarse en la población infantil. En México, la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012 (ENSANUT 2012), proporciona información acerca de la prevalencia nacional en sobrepeso y obesidad en diferentes categorías de edad. Enseguida se muestra la información correspondiente al grupo de edad de
12 a 19 años, rango de edad en el que se encuentran los estudiantes de secundaria.

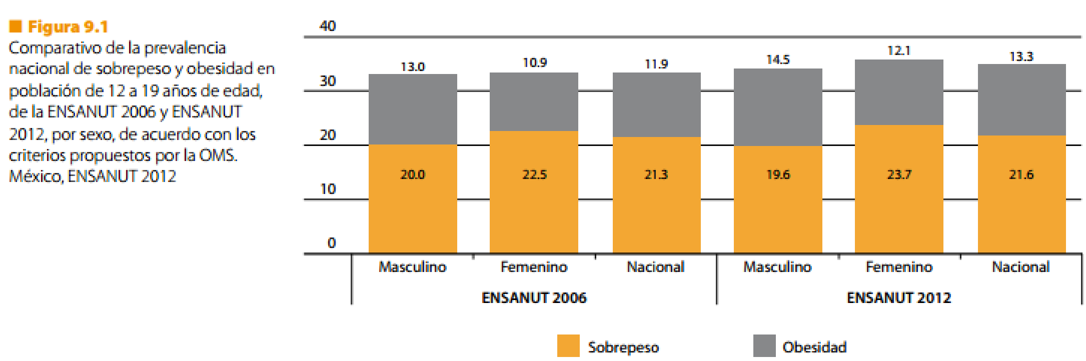


Figura E1. Sobrepeso y obesidad en adolescentes. ENSANUT 2012

a. Con base en la información proporcionada en la gráfica, describa la situación que prevalece en México durante los periodos reportados.

b. De acuerdo a esta información, así como a la percepción que usted tiene del Estado, ¿qué puede decir acerca de lo que sucede en relación a este problema en Sonora, se presentará de la misma manera? Argumente.

c. ¿Se presentará también de manera similar en el entorno personal inmediato, por ejemplo en la comunidad donde usted vive o en la escuela que trabaja? Argumente.

d. ¿Qué indicadores de sobrepeso u obesidad conoce?

2. Una medida utilizada para identificar si una persona tiene problemas de sobrepeso es la Circunferencia de Cintura (CC), considerado como un buen indicador de la obesidad central: “La medición regular del perímetro de la cintura constituye una estimación sencilla del total de grasa acumulada en el cuerpo, así como de la

obesidad central. Se considera que hay obesidad central cuando el perímetro de la cintura es igual o superior a 102 cm en los varones y a 88 cm en las mujeres. Su peso óptimo depende de su talla, edad y sexo (OMS)".

Mujeres	Varones
Igual o superior a 88 cm	Igual o superior a 102 cm

Tabla E1. Indicador de obesidad central

Otro indicador del sobrepeso y la obesidad es el cociente cintura-cadera (CCC), esto es "el resultado que se obtiene dividiendo el perímetro de la cintura por el perímetro de la cadera (OMS)". La tabla siguiente muestra la clasificación de los valores del ICC asociados con riesgos de enfermedad, para hombres y mujeres.

Mujeres	Varones	Riesgo de enfermedad
Menor a 0.80	Menor a 0.95	Muy bajo
De 0.81 a 0.84	De 0.96 a 0.99	Bajo
Mayor a 0.84	Mayor a 0.99	Alto

Tabla E2. Clasificación de valores del ICC

a. Organizados en equipo, complete la tabla siguiente:

Equipo:	Cintura	Cadera	ICC
Integrante 1			
Integrante 2			
Integrante 3			
Integrante 4			

b. Describa los resultados obtenidos para su equipo.

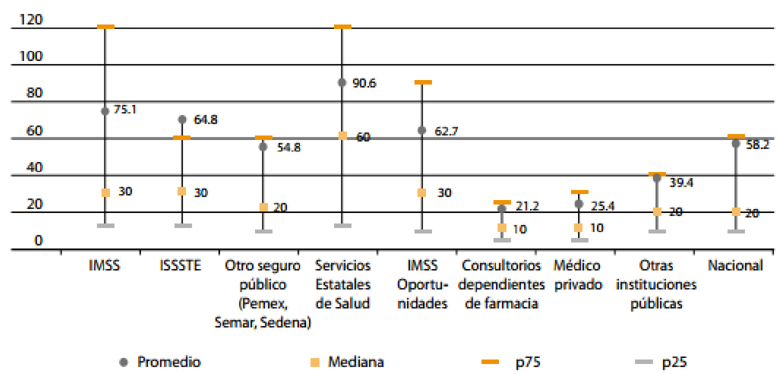
c. ¿Considera que en el resto de los equipos se obtuvieron resultados similares? Argumente.

d. Recabe los datos del resto de los equipos del grupo, organícelos y describa la situación del grupo con respecto a estos indicadores. Utilice las herramientas de Excel o GeoGebra para el procesamiento de los datos.

Tarea 2. Tiempos de espera en consultas médicas

La siguiente gráfica muestra información del tiempo de espera, para consulta médica, de los usuarios de diferentes sistemas de salud.

Figura 2.5
Tiempo de espera en minutos para recibir consulta de servicios médicos curativos ambulatorios, por institución de atención. México, ENSANUT 2012



De acuerdo a esta información:

a. ¿En qué modalidad de sistema de salud el promedio de espera es mayor? Argumenta tu respuesta.

b. ¿En qué modalidad de sistema de salud el tiempo de espera registrado es mayor para el 75% de los usuarios? Argumenta tu respuesta.

c. ¿En qué modalidad de sistema de salud el 25% de los usuarios esperan menos tiempo? Argumenta tu respuesta.

d. ¿En qué modalidad de sistema de salud el 50% de los usuarios son atendidos en el menor tiempo? Argumenta tu respuesta.

e. ¿En qué modalidad de sistema de salud el rango de espera es menor para el 75% de los usuarios? Argumenta tu respuesta.

f. ¿En qué casos el tiempo de espera del 75% de los usuarios de un sistema de salud, es menor que el promedio de tiempo de espera de otro sistema médico? Argumenta tu respuesta.

g. ¿Cuál es el tiempo de espera para el 50% de los usuarios del ISSSTE que esperan menos tiempo de ser atendidos? Argumenta tu respuesta.

h. ¿En qué modalidad de sistema de salud son “similares” (diferencias de hasta cinco minutos) los promedios de tiempo de espera? Argumenta tu respuesta.

i. Escribe un resumen de la información de la situación descrita en la gráfica.

Desarrollo

Actividad 2. ¿Para qué y cómo recopilar de datos?

Tarea 3. Activación física y tiempo frente a una pantalla

Realizar alguna actividad física con cierta regularidad, es una recomendación que se hace desde el sector salud para mantener un estado de salud favorable. En el caso de los jóvenes, la ENSANUT 2012 presenta información respecto a la cantidad de actividades realizadas por los adolescentes en deportes de tipo competitivo, como el fútbol soccer o el básquetbol. La Figura 2 contiene la distribución obtenida en adolescentes de 10 a 14 años de edad. Por otra parte, también se tienen datos acerca del tiempo que destinan los adolescentes frente a una pantalla, sea de televisión, teléfono o computadora. La Figura 3, muestra la distribución para adolescentes en edad de 15 a 18 años.

Distribución de actividades organizadas en adolescentes de 10 a 14 años de edad. México, ENSANUT 2012

Indicador‡	Nacional				Urbano				Rural			
	Muestra	Expansión*			Muestra	Expansión*			Muestra	Expansión*		
	n	N	%	(IC 95%)§	n	N	%	(IC 95%)§	n	N	%	(IC 95%)§
Sin actividad	1 972	6 605 553	58.6	(55.7, 61.5)	1215	4 594 066	58.4	(54.8, 61.8)	757	2 011 488	59.2	(54.1, 64.2)
Una o dos actividades	1 314	4 385 036	38.9	(36.1, 41.8)	850	3 090 520	39.3	(35.8, 42.8)	464	1 294 516	38.1	(33.6, 42.9)
Tres o más actividades	94	277 665	2.5	(1.8, 3.3)	63	188 356	2.4	(1.7, 3.3)	31	89 309	2.6	(1.4, 4.7)
Total	3 380	11 268 254	100		2128	7 872 941	100		1252	3 395 313	100	

* Número de casos representados por la encuesta después de aplicar el factor de expansión correspondiente (ver métodos)
‡ Reportado en los últimos 12 meses
§ Intervalo de confianza del 95% para el porcentaje estimado

Figura E2. Distribución de actividades organizadas. ENSANUT 2012

Distribución del tiempo total frente a una pantalla en adolescentes de 15 a 18 años de edad. México, ENSANUT 2012

Indicador‡	Nacional				Urbano				Rural			
	Muestra	Expansión*			Muestra	Expansión*			Muestra	Expansión*		
	n	N	%	(IC 95%)§	n	N	%	(IC 95%)§	n	N	%	(IC 95%)§
≤ 14 horas por semana[1]	823	3 394 985	36.1	(32.4, 40.0)	425	2 204 724	31.8	(27.1, 37.0)	398	1 190 261	48.0	(43.0, 53.1)
> 14 horas por semana[2]	796	3 231 272	34.4	(30.9, 38.0)	500	2 326 184	33.6	(29.2, 38.3)	296	905 088	36.5	(31.8, 41.5)
≥ 28 horas por semana[3]	643	2 776 989	29.5	(26.1, 33.2)	487	2 393 670	34.6	(30.3, 39.2)	156	383 318	15.5	(12.0, 19.7)
Total	2 262	9 403 246	100		1412	6 924 579	100		850	2 478 667	100	

* Número de casos representados por la encuesta después de aplicar el factor de expansión correspondiente (ver métodos)
‡1 ≤ 2 horas por día(≤ 840 minutos por semana)
‡2 > 2 horas por día (> 840 minutos por semana)
‡3 ≥ 4 horas por día (≥ 1680 minutos por semana)
§ Intervalo de confianza del 95% para el porcentaje estimado

Figura E3. Distribución de tiempo frente a una pantalla. ENSANUT 2012

a. Si se tratara de hacer una comparación entre las frecuencias obtenidas en este estudio y las correspondientes a los jóvenes de tu escuela secundaria, ¿qué resultados esperarías para cada variable analizada? ¿Qué utilidad tendría este ejercicio?

b. Plantea una estrategia para recabar datos que te permitan construir una distribución que muestre las frecuencias correspondientes a las categorías de cada una de las variables reportadas en estas distribuciones.

c. Una vez establecida la estrategia de recolección de datos, recolecte la información de sus estudiantes respecto estas variables estadísticas.

d. Organice la información, haga una distribución de frecuencias y represéntela gráficamente (para esto utilice algún recurso de tecnología digital).

e. A partir de la información recabada con sus estudiantes, diga si existe diferencia significativa respecto a la información que proporciona ENSANUT 2012.

Tarea 4. Violencia y daños a la salud

1. Enseguida analizaremos información estadística relacionada con el fenómeno de la violencia juvenil en las escuelas. Para la reflexión tratemos de responder las siguientes preguntas:

    a. ¿Cómo se manifiesta la violencia escolar?

b. ¿Qué aspectos y qué indicadores podrían utilizarse para cuantificar la violencia escolar?

c. ¿Cómo es la situación en su escuela con respecto a este fenómeno?

d. ¿Por qué es importante respaldar estadísticamente la percepción que se tiene de este fenómeno?

Distribución de adolescentes de 10 a 19 años que sufrieron daños a su salud por algún tipo de violencia en el último año, según variables seleccionadas y por sexo. México, ENSANUT 2012

	Sexo				Total	
	Hombre		Mujer			
	Frecuencia*	%	Frecuencia*	%	Frecuencia*	%
Tipo de violencia						
Agresiones con sustancias	2.2	0.4	3.1	0.8	5.3	0.6
Sofocación, estrangulamiento, ahogamiento	5.7	1.1	10.6	2.8	16.4	1.8
Arma de fuego	7.8	1.5	2.3	0.6	10.1	1.1
Objetos cortantes	20.9	4.1	16.5	4.4	37.4	4.2
Empujón desde lugar elevado	7.9	1.6	4.6	1.2	12.6	1.4
Golpes, patadas, puñetazos	335.9	66.6	138.4	36.4	474.4	53.6
Agresión sexual	0	0.0	39.3	10.3	39.3	4.4
Agresiones verbales	166.4	33.0	139.9	36.8	306.3	34.6
Otras agresiones o maltrato	28.5	5.7	44.9	11.8	73.4	8.3
Otro	37.8	7.5	61.1	16.1	98.9	11.2
Lugar de la agresión o violencia						
Hogar	29.5	5.8	70.5	18.6	99.9	11.3
Escuela	148.2	29.4	115.3	30.4	263.6	29.8
Trabajo	5.4	1.1	4.1	1.1	9.5	1.1
Transporte público	17.8	3.5	35.1	9.3	53	6.0
Vía pública	272.5	54.0	134.1	35.3	406.6	46.0
Campo	7	1.4	0	0.0	7	0.8
Lugar de recreo o deportivo	13.5	2.7	4.4	1.2	17.9	2.0
Centro nocturno	2.6	0.5	0.3	0.1	2.9	0.3
Establecimiento comercial	3.7	0.7	7	1.8	10.7	1.2
Otro	4.1	0.8	4.9	1.3	8.9	1.0
Total	504.3	4.4	380.1	3.4	884.4	3.9

* Frecuencia en miles
Nota: Los porcentajes suman más de 100% por doble motivo de agresión.
Fuente: Cuestionario de adolescentes, ENSANUT 2012.

Plantee una estrategia para recabar datos, con el uso de algún recurso digital, que le permita construir una distribución que muestre las frecuencias correspondientes a las categorías de cada una de las variables reportadas en estas distribuciones.

Ejercicio 1 (EE1). Trabajo independiente.
El diseño de una encuesta utilizando tecnología digital.

a. Utilizando algún recurso de tecnología digital en línea, diseñe una encuesta para recolectar datos de sus estudiantes respecto a las variables estadísticas que se presentan en las Tareas 3 y 4. Agregue otras que considere relevantes para el mejor conocimiento de la situación de sus estudiantes respecto a estos fenómenos.

b. Recolecte la información, organícela y preséntela gráficamente (utilice algún recurso de tecnología digital).

c. A partir de la información recabada con sus estudiantes, diga si existe diferencia significativa respecto a la información que se proporciona en las Tareas 3 y 4.

Actividad 3

Resúmenes y análisis gráfico de datos

Tarea 5. Distribución y resúmenes de datos

Un sondeo realizado por la Procuraduría Federal del Consumidor (PROFECO) sobre los hábitos de consumo de salchichas en niños de 6 a 12 años, indica que un alto porcentaje de niños (74% de la muestra) “gusta mucho” de este alimento y señala también en un alto porcentaje (72%) que la razón principal "porque saben rico". Por otra parte, se sabe que existe una variedad de marcas de salchichas en el mercado y que algunas por su alto contenido calórico las convierten en un alimento con el que hay que tener cuidado en su consumo.

Enseguida se muestra un conjunto de datos correspondientes a un análisis de laboratorio del contenido en calorías y sodio de 54 marcas distintas de salchichas. Las salchichas se clasifican en tres tipos: res, pavo y combinada.

Tipo de Salchicha	Calorías	Sodio
Res	186	495
Res	181	477
Res	176	425
Res	149	322
Res	184	482
Res	190	587
Res	158	370
Res	139	322
Res	175	479
Res	148	375
Res	152	330
Res	111	300
Res	141	386
Res	153	401
Res	190	645
Res	157	440
Res	131	317
Res	149	319
Res	135	298
Res	132	253
Combinada	173	458
Combinada	191	506
Combinada	182	473
Combinada	190	545
Combinada	172	496
Combinada	147	360
Combinada	146	387
Combinada	139	386
Combinada	175	507
Combinada	136	393
Combinada	179	405
Combinada	153	372

Combinada	107	144
Combinada	195	511
Combinada	135	405
Combinada	140	428
Combinada	138	339
Pavo	129	430
Pavo	132	375
Pavo	102	396
Pavo	106	383
Pavo	94	387
Pavo	102	542
Pavo	87	359
Pavo	99	357
Pavo	107	528
Pavo	113	513
Pavo	135	426
Pavo	142	513
Pavo	86	358
Pavo	143	581
Pavo	152	588
Pavo	146	522
Pavo	144	545

1. Con base en estos datos, ¿qué tipo de salchicha considera que es más saludable para el consumo humano? Argumente su respuesta.

2. La base de datos BASE_CEREALES, contiene información nutricional de 77 cereales. Una recomendación de los nutriólogos es que los adultos deben consumir no más de 30% de sus calorías en forma de grasa, que necesitan cerca de 50 gramos (mujeres) o 63 gramos (hombres) de proteína al día, y deben completar el resto de su ingesta calórica con hidratos de carbono. Un gramo de grasa contiene 9 calorías y los hidratos de carbono y las proteínas contienen 4 calorías por gramo. Una "buena" dieta también debe contener de 20 a 35 gramos de fibra dietética.

a. Realice un análisis de las variables reportadas en la base de datos (BASE_CEREALES) para argumentar gráficamente cuales cereales son los "mejores" y "peores" en alguna categoría.

b. ¿Es posible, gráficamente, establecer alguna relación entre dos variables, por ejemplo, azúcares y calorías o grasa y calorías? Argumente.

Tarea 6. La variabilidad en los datos estadísticos

En el análisis estadístico de datos se presenta un fenómeno que influye de manera importante en la toma de decisiones, particularmente cuando se trata de comparar el comportamiento de dos poblaciones a partir de la información que se tiene de sus respectivas muestras, así como al inferir sobre el comportamiento que tiene una población a partir de la información que proporciona una muestra.

1. ¿Cuáles son las variables estadísticas que aparecen en la:
   Tarea 1?
   Tarea 2?
   Tarea 3?
   Tarea 5?

2. ¿En todos los casos se puede determinar el rango (diferencia entre el dato mayor y el menor) entre los valores que se tienen de la variable? Argumenta en cada caso.

3. ¿Qué estimadores conoce para determinar la variabilidad (dispersión) de un conjunto de datos?

4. Describa la diferencia que hay entre los estimadores que conoce para determinar la variabilidad de un conjunto de datos.

5. Comente con sus compañeros de equipo las diferentes formas que usted ha identificado para determinar la variabilidad de un conjunto de datos.

6. Presente al grupo las conclusiones a las que llegaron en el equipo respecto a la pregunta 5.

Ejercicio 2 (EE2). Trabajo independiente

Estimación de la variabilidad de un conjunto de datos

1. Utilizando la información que se proporciona en la base de datos (de salchichas), y los estimadores que hayas identificado para estimar la variabilidad de un conjunto de datos, determine el valor correspondiente a cada estimador para la cantidad de calorías y sodio. Se recomienda utilizar algún recurso de tecnología digital.

2. Represente gráficamente la información para cada una de las variables estadísticas (por separado), e interprete en la gráfica lo que representa el valor o los valores estimados para medir la dispersión.

Cierre

Actividad 7. Institucionalización

Tarea 7. Nociones estadísticas básicas

Como ya se mencionó en la introducción de esta secuencia, en las actividades aquí formuladas se trataron algunas cuestiones alrededor de la recolección, organización y representación gráfica de datos, relacionados con algún fenómeno de interés. Se buscó promover la identificación de variables estadísticas, sus valores representativos y su variabilidad, así como su utilidad para la interpretación y análisis de la información y su utilidad en la toma de decisiones.

1. Concluiremos esta secuencia, con la revisión de algunas nociones estadísticas aquí estudiadas, intercalando preguntas que orientar la discusión que permita profundizar en algún aspecto de interés.

Seguramente muchos términos le resultaron familiares. Formule una definición para cada caso y lo ejemplifique:

a. Variable:

b. Variable estadística:

c. Variables no numéricas o cualitativas:

d. Variables numéricas o cuantitativas:

e. Población física:

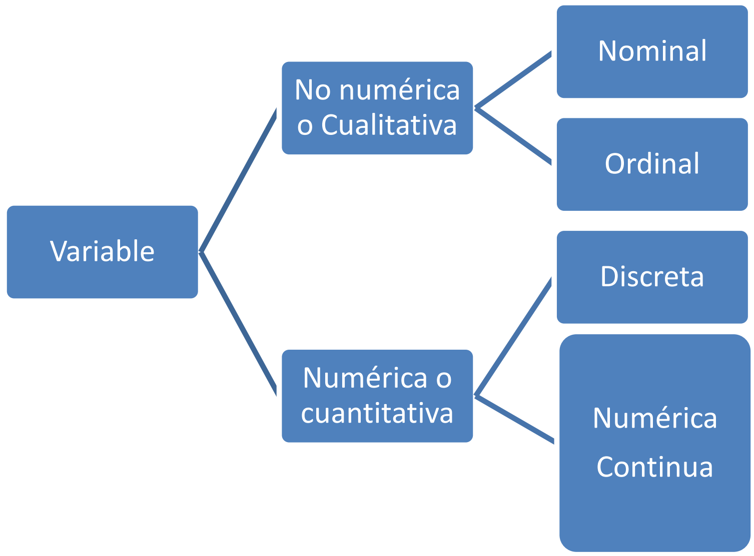
f. Población estadística:

g. Muestra:

2. La siguiente definición fue tomada de un texto de bachillerato. Compare sus respuestas y comente diferencias y/o similitudes.

> *Una **variable** en estadística es una característica que se desea estudiar de un grupo de personas, animales o cosas; por ejemplo: edad, estatura, promedio de la escuela, deporte favorito, grado escolar, duración de la batería, color, etc. Las variables se pueden clasificar en no numéricas o cualitativas y numéricas o cuantitativas*.

La clasificación anterior se muestra en la siguiente gráfica:



Población física, es el universo de sujetos (personas, animales o cosas, fenómenos físicos o sociales, etc.) sobre los que se pretende hacer un estudio estadístico, con base en el análisis de alguna o algunas variables.

Población estadística, es el universo de datos que se obtienen de la población física al observar una de las variables.

Muestra, es un subconjunto de la población. Cuando el estudio estadístico se hace sobre una muestra y no sobre la totalidad de la población, que es el caso de un censo, entonces lo deseable es que la composición de la muestra que se seleccione sea muy parecida a la composición de la población, cuando una muestra cumple con esta condición se dice que es una muestra representativa.

Tarea 8. Promedios y variabilidad

En las actividades de esta secuencia, trabajando con la interpretación de valores representativos de un conjunto de datos, realizamos cálculos de dichos valores representativos en diferentes situaciones con el fin de resumir información que se presenta en conjuntos de datos. Lo anterior se realiza con el propósito de tener una idea de cómo pueden comportarse y distribuirse un conjunto de datos, entre otras cosas para poder hacer comparaciones entre ellos. Enseguida resumiremos algunos aspectos aquí estudiados.

Organizados en equipo, lea y revise esta sección integrada por algunas reflexiones que se presentan a manera de institucionalización de los objetos estadísticos involucrados en las actividades. Comente en cuáles actividades aparecieron y cómo se estuvieron utilizando.

La media aritmética, la mediana y la moda se utilizan con mucha frecuencia para estimar un ***valor representativo*** de un conjunto de datos numéricos. Comúnmente, se les refiere utilizando su modo de cálculo. Al promedio obtenido de sumar todos los datos de un conjunto (muestra o población) y dividir el resultado entre el total de datos, se le llama ***Media Aritmética*** o simplemente ***Media.*** A la ***Mediana*** se le identifica como el dato central, cuando los datos están ordenados, en orden ascendente o descendente y la ***Moda*** es aquel dato que aparece con mayor frecuencia.

Las siguientes son expresiones generales o fórmulas para calcular la media, la mediana y la moda cuando se tiene un conjunto de datos sin agrupar:

Media	$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ Donde x_1 , x_2 , x_3 , … , x_n representan cada uno de los datos de conjunto (muestra o población) y n el número de datos del conjunto.
Mediana	Si el número de datos es impar, se ordenan los datos y se selecciona el que está en el centro, es decir, si $n = 2k - 1$ $\tilde{X} = x_k$ Si el número de datos es par, se ordenan los datos y se obtiene la media de los dos datos centrales, es decir, $si\ n = 2k$ $\tilde{X} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$
Moda	$\hat{X} = x_i$ Donde x_i es el dato que tiene mayor frecuencia.

Estas tres medidas son útiles para resumir la información de un conjunto de datos y por eso se les llama en Estadística **medidas de tendencia central** y pueden tener varias interpretaciones; por ejemplo, se puede interpretar como: el resumen del conjunto de datos, el valor representativo del conjunto de datos, o cómo el valor a partir del cual se distribuyen[2] los datos del conjunto, entre otros.

A partir de la media, la mediana y la moda es posible encontrar un valor representativo de un conjunto de datos, por ejemplo se puede saber: la edad promedio de un grupo de personas, la edad hasta la que se acumula el 50% de los datos, el tipo de transporte más utilizado por los habitantes de una población, el tiempo promedio que le dedican los jóvenes a las redes sociales, etc.

La ***media***, por ser un ***punto de equilibrio***, ***compensa las diferencias negativas con las positivas***, de manera que la sumatoria de estas diferencias da como resultado 0.

Otra noción estadística fundamental que complementa la información que un promedio puede proporcionar sobre la distribución de un conjunto de datos, es la variación, dispersión o variabilidad de un conjunto de datos.

Para cuantificar el grado de dispersión de un conjunto de datos, se utilizan varias nociones, partimos del Rango, el cual se determinar de la siguiente manera:

$$R = x_{mayor} - x_{menor}$$

donde x_{mayor} es el dato mayor y x_{menor} es el dato menor.

El Rango, por definición, sólo considera los dos valores extremos del conjunto de datos y "deja de lado" el resto, siendo así una medida limitada para medir dispersión. Por esta razón construimos tres medidas que consideraran a todos los datos para cuantificar la variación de los mismos, dos de ellas son a su vez un promedio, y la última es la raíz cuadrada de uno de estos promedios.

[2] En ... os
a un v...

La primera de estas medidas es conocida como **Desviación Media**, y se obtiene calculando el promedio de las distancias de cada dato a la media, lo cual se puede expresar de la siguiente manera:

$$DM = \frac{|x_{1|} - \bar{X}| + |x_2 - \bar{X}| + \cdots + |x_n - \bar{X}|}{n}$$

Donde x_1 , x_2 , x_3 , …, x_n representan cada uno de los datos de conjunto (muestra o población), $\bar{X}$ la media de los datos y n el total de datos.

La desviación media cuantifica el grado de dispersión de un conjunto de datos, entre mayor sea este valor mayor el grado de variación.

Además de la desviación media, otra medida de dispersión se obtiene elevando al cuadrado las diferencias de los datos respecto a la media y calculando la media de dichas diferencias al cuadrado.

Esta medida de dispersión es conocida como **varianza** y para calcularla se utiliza la expresión siguiente:

$$V = \frac{(\mathrm{x}_1 - \bar{x})^2 + (\mathrm{x}_2 - \bar{x})^2 + (\mathrm{x}_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (\mathrm{x}_n - \bar{x})^2}{n}$$

La varianza cuantifica el grado de variación de un conjunto de datos, cuanto mayor es este valor, mayor es el grado de variación. Sin embargo, el valor resultante tiene unidades cuadráticas y dificulta su interpretación, por lo cual se utiliza su raíz cuadrada. Al calcular la raíz cuadrada de la varianza se genera una nueva medida de dispersión llamada **desviación estándar**, y una forma de calcularla es la siguiente:

$$DS = \sqrt{\frac{(\mathrm{x}_1 - \bar{x})^2 + (\mathrm{x}_2 - \bar{x})^2 + (\mathrm{x}_3 - \bar{x})^2 + \cdots + (\mathrm{x}_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Finalmente, es importante destacar que tanto las medidas de tendencia central como las medidas de dispersión nos proporcionan información respecto a la forma en que se distribuye un conjunto de datos, lo cual nos permite dar una interpretación del comportamiento de los sujetos que se están estudiando. En los estudios estadísticos el trabajo se puede realizar con la población completa o con una muestra de la población, en este último caso lo que obtenemos al calcular las medidas de tendencia central o de dispersión son estimaciones de los valores verdaderos.

Ejercicio 3 (EE3). Trabajo independiente

Propuesta de proyecto.

Bosqueje un proyecto para estudiar alguna problemática o característica de sus estudiantes, en el que se pongan en juego las herramientas estadísticas que se han trabajado en esta sección.

Referencias

Matemáticas 2, COBACH

Sitos Web revisados:

http://lib.stat.cmu.edu/DASL/Stories/HealthyBreakfast.html

http://lib.stat.cmu.edu/DASL/

http://www.math.grin.edu/~mooret/maa-notes/ballman.html

http://www.amstat.org/publications/jse/v1n1/garfield.html

Sitio de la Profeco

Sitio de la Secretaría de Salud