Fundamentos de Análisis Didáctico I

CENTRO REGIONAL DE FORMACIÓN DOCENTE E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA DEL ESTADO DE SONORA

Programa de especialidad en el uso de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas

Martha Cristina Villalba Gutiérrez
Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
Maricela Armenta Castro
José Ramón Jiménez Rodríguez
Manuel Alfredo Urrea Bernal
Guadalupe Villaseñor Gándara

El presente documento fue elaborado por académicos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Corresponde al material de la asignatura Fundamentos de Análisis Didáctico I que será utilizado por el estudiante que participe en el Programa de especialidad en uso didáctico de tecnología digital para la enseñanza de las matemáticas del Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora.

Universidad de Sonora

Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Rector

Dr. Enrique Fernando Velázquez Contreras
Secretario General Académico

Dr. Agustín Grijalva Monteverde
Director del Bufete de Asesoría en Educación Matemática

Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora

Dra. Norma Guadalupe Pesqueira Bustamante
Rectora

Autores
M.C. Martha Cristina Villalba y Gutiérrez
M.C. Maricela Armenta Castro
M.C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez
M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal
M.C. Guadalupe Villaseñor Gándara

ISBN:

Blvd. Rosales y Luis Encinas s/n. Col. Centro
C.P.83000, Hermosillo, Sonora, México.

Tabla de Contenidos Secuencia 1

Pensamiento Geométrico

El problema didáctico de la promoción inicial de procesos de visualización, construcción, y justificación mediante el uso de tecnología digital

Cierre

Actividad 3

Geometría, Pensamiento Geométrico y Génesis Instrumental

Tarea 5. ¿Qué es la Geometría?

Tarea 6. ¿Qué es pensar geométricamente?

Tarea 7. La génesis instrumental: GeoGebra y el desarrollo del pensamiento geométrico

Tarea de cierre: Un ensayo sobre el desarrollo del pensamiento geométrico en un ambiente apoyado por GeoGebra, mencionando las tareas y lecturas de esta secuencia.

Extractos de Lecturas Seleccionadas

- *Extracto1*
- *Extracto 2*
- *Extracto 3*

Secuencia 1
Pensamiento Geométrico

El problema didáctico de la promoción inicial de procesos de visualización, construcción, y justificación mediante el uso de tecnología digital.

Presentación

En esta sección del curso se proponen acciones de reflexión didáctica orientadas inicialmente a que usted haga consciente el tipo de procesos que estuvo desarrollando durante la experiencia de utilizar el software de geometría dinámica GeoGebra. De acuerdo a los propósitos del curso, se hace énfasis en la reflexión y el análisis en torno a los aspectos didácticos y tecnológicos centrados en los tópicos geométricos concretos que han sido abordados por usted en el curso anterior.

Se pretende que en la sección de Inicio, las tareas planteadas provoquen una reflexión personal sobre diferentes aspectos de carácter cognitivo, didáctico, metodológico, afectivo, de pertinencia, entre otros. La expresión escrita o comentarios verbales con sus compañeros serán presentados como consideraciones personales basadas en su experiencia.

Durante el Desarrollo, la actividad central retoma tareas de la Secuencia 1 del curso Temas Selectos de Matemáticas 1 con el fin de tener un referente concreto en el cual se puedan apoyar para enfatizar y diferenciar el rol que juegan los archivos de GeoGebra presentados como *applets* frente a los archivos en los que se solicitan *construcciones* en relación con la promoción de los procesos de visualización, construcción y validación. Estos procesos cognitivos se consideran la base del desarrollo del pensamiento geométrico.

Finalmente, en el Cierre, las tareas propuestas tienen que ver con referir las relaciones anteriormente hechas, a lo que teóricamente les da sustento. Con este propósito las tareas giran alrededor de extractos de lecturas que proponen, aclaran o utilizan tanto la *génesis instrumental* como *los procesos cognitivos del pensamiento geométrico*.

Inicio

Actividad 1

Reflexiones didácticas iniciales sobre el desarrollo del pensamiento geométrico en un ambiente que incorpora la tecnología digital

Tarea 1. ¿Qué aprendemos cuando desarrollamos tareas geométricas en el ambiente de la geometría dinámica?

1. Describa brevemente qué habilidades considera usted que se desarrollan *al estudiar geometría en un ambiente de geometría dinámica.* Trabajando en equipo, intercambien sus opiniones y comenten lo que hayan acordado ante el grupo.

2. Considere los problemas de construcción en GeoGebra que se le plantearon en la primera secuencia del curso Actividades Selectas de Matemáticas 1 para responder lo siguiente:
    a. ¿Qué actividad o tarea se le facilitó más? ¿Por qué?

b. ¿Qué actividad o tarea se le facilitó menos? ¿Por qué?

c. ¿Qué parte de la secuencia le pareció más interesante? Comente en equipo y redacte los puntos principales

d. ¿Considera que el uso del software GeoGebra tiene una influencia positiva o negativa para motivar el aprendizaje de la Geometría?

e. ¿Considera que mediante la secuencia propuesta aprendió geometría? ¿Por qué?

f. ¿Cómo ubican, curricularmente hablando, los objetos geométricos propuestos en la secuencia? Coméntelo en equipo.

En esta secuencia, llamamos *applet* a un componente de GeoGebra que ofrece información gráfica –dinámica preestablecida, para llevar a cabo una función muy específica que limita su uso independiente, según los propósitos del autor. En cambio, en un archivo GeoGebra, todas las herramientas del software están disponibles y es posible llevar a cabo nuevas construcciones.

3. Abra un *applet* utilizado en la primera secuencia del curso anterior. Analice lo que se le pidió que hiciera al interactuar con él y lo que se le preguntó al respecto.

   a. ¿Cuáles habilidades y conocimientos geométricos considera que se pusieron en juego al responder?

4. Abra un archivo GeoGebra con una construcción personal solicitada en algún momento de la secuencia 1.
   a. ¿Qué características geométricas considera que fueron las más importantes para llevar a cabo la construcción solicitada? ¿Cómo intervinieron en su realización?

   b. ¿Qué conocimientos sobre las herramientas disponibles en GeoGebra considera que fueron las más importantes para llevarla a cabo? ¿Cómo fueron utilizadas?

5. En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se considera fundamental el uso de diferentes formas de lenguaje. En la secuencia estudiada se utilizó el lenguaje verbal y el figural.
   a. ¿Qué ventajas presenta el uso de GeoGebra para el manejo del lenguaje figural?

b. ¿Considera usted que ambos tipos de lenguaje, el verbal y el figural (enunciados mediante trazos o figuras), se utilizaron de manera coordinada, de modo que durante el desarrollo de la secuencia se propició que usted lograra integrarlos para ofrecer una mayor comprensión de los objetos geométricos involucrados en las tareas? Apoye su respuesta mediante un ejemplo tomado de la secuencia analizada.

Desarrollo

Actividad 2
Reflexiones sobre el uso didáctico de GeoGebra

Tarea 2. El papel de GeoGebra como medio para promover el desarrollo del pensamiento geométrico

1. Abra el applet "*tres figuras*" y el archivo que contiene la Tarea 1 de la primera sesión del curso anterior. Analice lo que se le pidió que hiciera con el applet (incluida la reconstrucción del mismo) y lo que se le preguntó al respecto.
   a. ¿Cuáles habilidades y conocimientos matemáticos, propios del conocimiento geométrico, considera que se pusieron en juego al responder?

   b. ¿Qué características geométricas considera que fueron las más importantes para llevar a cabo la reproducción de las tres figuras solicitadas en esa actividad? ¿cómo intervinieron en su construcción?

c. ¿Qué conocimientos sobre las herramientas disponibles en GeoGebra considera que fueron las más importantes para llevar a cabo la reproducción de las tres figuras solicitadas en esa actividad? ¿cómo intervinieron en su construcción?

2. Revise con cuidado las Tareas 2 y 3 de la Secuencia 1 (Pensamiento Geométrico) del curso anterior, Actividades Selectas de Matemáticas 1. De acuerdo al proceso de estudio implementado en ese curso reflexione sobre las siguientes cuestiones:
   a. ¿Qué contenidos geométricos se abordaron con las tareas señaladas? Menciónelos a continuación:

   b. ¿Cuáles de ellos no conocía previamente?

   c. ¿Cuáles de ellos conocía previamente, pero logró enriquecer con el desarrollo de las actividades? Explique en qué consistió la profundización y qué papel jugaron las exploraciones y construcciones hechas con el software GeoGebra

3. Comparta sus reflexiones con sus compañeros de equipo e identifique similitudes y diferencias. Si existen diferencias, revisen nuevamente las actividades y las construcciones con GeoGebra. Explique si se modificó y cómo se modificó su visión en lo particular a través de la interacción con sus compañeros y con el software GeoGebra ¿Cree que sus hallazgos influyeron de alguna manera en las concepciones de sus compañeros? ¿Cómo y por qué?

4. ¿Por qué son importantes las nociones de paralelismo y perpendicularidad en la escuela secundaria? ¿Qué conceptos geométricos en el currículo de secundaria se asocian a estas nociones? Realicen una construcción en GeoGebra asociada a uno de estos conceptos que han identificado y explique qué efectos podría tener esta construcción en la enseñanza y el aprendizaje de dicho concepto.

5. ¿Cómo intervinieron las nociones de paralelismo y perpendicularidad en los teoremas revisados en la Tarea 3, y en las construcciones dinámicas asociadas? ¿Cómo se relacionan estas nociones con la prueba del arrastre y con el uso efectivo de deslizadores?

6. A lo largo de estas tareas, tuvo que llevar a cabo construcciones, arrastrar componentes que representan objetos geométricos, o bien, utilizar efectivamente algunos deslizadores. ¿Qué ventajas o limitaciones identifica al haber utilizado GeoGebra? ¿Qué diferencias habría si se hubieran abordado tales contenidos de geometría utilizando sólo lápiz y papel?

Cuando se hacen construcciones o se arrastran componentes que representan objetos geométricos en las construcciones hechas con GeoGebra, se actúa sobre el software y sobre los componentes involucrados, llevándose a cabo un proceso conocido como *instrumentalización*. Al mismo tiempo, nuestros esquemas de acción se modifican y profundizamos en el conocimiento de los objetos geométricos en cuestión, es decir, el software actúa sobre nosotros, llevándose a cabo un proceso conocido como *instrumentación*. Así, ambos procesos se dan simultáneamente, dando lugar a lo que se conoce como *génesis instrumental*, durante la cual un *artefacto*, en este caso GeoGebra, se transforma en un *instrumento (Rabardel, 2001, Trouche, 2005)*.

Tarea 3: Los procesos de visualización y de construcción en un ambiente de geometría dinámica

De acuerdo a Raymond Duval, los procesos cognitivos que dan lugar al desarrollo del pensamiento geométrico son: la visualización, la construcción y el razonamiento (demostraciones, validaciones o pruebas de carácter argumentativo o lógico-formal)

No son jerárquicos, son independientes, pero deben estar en continua interrelación. No son espontáneos, deben *promoverse*

1. ¿Qué papel considera usted que jugó la Tarea 6 *El Panal de las Abejas* del curso anterior en la activación de los procesos cognitivos para el *desarrollo del pensamiento geométrico*? Escriba enseguida su opinión y compártala con sus compañeros de grupo, particularmente sobre:

   a. ¿Qué conocimientos geométricos considera usted que eran necesarios para responder a la pregunta inicial?

b. Comente por qué considera usted que se propusieron los dos *applets* que apoyan esa tarea y opine cómo se combinan para ofrecer una respuesta válida a esa pregunta sobre el panal de las abejas.

c. Abra el applet *polígonos regulares* que se utilizó en esa actividad y enliste, entre las características que posee, aquellas que considere más importantes para apoyar los procesos cognitivos de visualización. Particularmente:

    i. ¿Qué es lo que favorece la *relación dinámica* de los datos que se produce *en y entre* las columnas de la tabla?

    ii. ¿Qué papel cognitivo juega la figura poligonal que aparece *dinámicamente asociada* a cada renglón de la tabla?

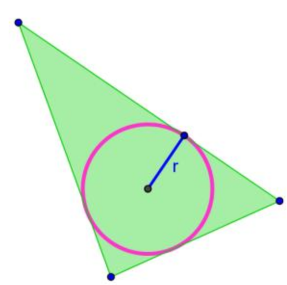
d. Explique usted cómo la visualización que promueve la interacción con el applet *área fija perímetro variable* da lugar a completar la respuesta que se solicita en la pregunta inicial de esa tarea.

e. ¿Qué ventajas o desventajas advierte usted al haber hecho uso de estos *applets,* frente a dar respuesta a esta misma tarea, pero sin mediar este tipo de recursos tecnológicos digitales?

f. Particularmente, ¿qué *habilidades matemáticas* se ven favorecidas mediante esa tarea haciendo uso de *applets* propuestos? y, ¿qué relación considera usted que tienen estas habilidades con los procesos cognitivos del pensamiento geométrico según lo refiere Raymond Duval? Sea preciso en sus referencias.

Una vez que haya respondido el punto 1 y sus incisos, comente sus respuestas en equipo y en forma grupal según lo indique su instructor.

Virtual[1]. Las respuestas a los incisos *e* y *f* cópielas y péguelas en el foro correspondiente para que las comparta y discuta con sus compañeros más libremente.



2. **Virtual.** En el punto 1 de la Tarea 3 de la secuencia del curso anterior que estamos revisando, "Circunferencia inscrita en un triángulo arbitrario" se

[1] El trabajo virtual deberá llevarse a cabo atendiendo a los foros que el instructor ponga a la disposición del grupo, así como espacios para enviar las respuestas por escrito, según sea el caso.

le solicita que lleve a cabo esta construcción como un archivo de GeoGebra y describa el protocolo de la misma.

a. ¿Qué es lo que caracteriza esta tarea? Es decir, ¿qué requirió "tener en mente" para emprenderla? Sea explícito.

b. ¿Verificó que su construcción soportara la prueba del arrastre? Comente por qué:

c. Una vez comprobada la validez de la construcción, qué propiedades de ella –de la construcción– fueron utilizadas para darle sentido al applet *radio-semiperímetro* que apoya la afirmación: "El producto del semi-perímetro de un triángulo arbitrario por el radio de su circunferencia inscrita es igual al área de dicho triángulo". Argumente.

d. Al estar trabajando en el ambiente de GeoGebra, ¿cuáles considera usted que son las diferencias principales entre una tarea de construcción como ésta y una de interacción con un *applet*? Sea explícito en su respuesta; mencione las diferencias relacionadas con la naturaleza de la interacción con el software, con los procesos de aprendizaje llevados a cabo, con las intenciones didácticas y los requerimientos de equipamiento tecnológico.

La manipulación de las representaciones geométricas proporcionadas en un *applet,* permite la visualización de propiedades geométricas que dan paso a una validación de las mismas o a establecer una conjetura; ésta a su vez, requiere de su validación

La construcción de figuras geométricas requiere de la anticipación mental o visualización de los elementos que conforman la figura para iniciar su construcción. Una vez concluida, la construcción se valida mediante la *prueba de arrastre.*

Así, los procesos de construcción, visualización y validación se relacionan para dar lugar al desarrollo del pensamiento geométrico.

Tarea 4: El proceso de justificación en un ambiente de geometría dinámica (virtual)

En algunos momentos, durante la Secuencia 1 del curso anterior, se tuvieron que llevar a cabo procesos de validación o justificación: en una construcción recién elaborada, para analizar una conjetura asociada a la visualización dinámica de una construcción proporcionada, para verificar una propiedad conocida anteriormente sólo en ambientes de lápiz y papel, entre otros. Cuando se trabaja en ambientes de geometría dinámica es muy importante conocer que la manipulación de las representaciones de los objetos geométricos intervinientes, se da de diferentes maneras y con diferentes intenciones.

1. Recuerde que, al construir un rectángulo en una tarea del curso anterior, realizó la prueba del arrastre para verificar que su construcción estaba bien hecha. ¿En qué elementos se fijó para afirmar que su construcción era válida?

2. Revise las construcciones hechas con anterioridad e identifique en qué momentos utilizó la prueba del arrastre con la misma finalidad. Comente en el foro correspondiente qué elementos consideró para validar que su construcción estaba bien elaborada.

La *prueba de arrastre* se utiliza para comprobar si la figura construida conserva las condiciones geométricas requeridas.

3. Abra el applet viviani-b. En un primer momento, se utilizó la prueba de arrastre para verificar que la construcción era apropiada. En un momento posterior, al arrastrar el punto al interior del triángulo, ya no lo hizo para validar la construcción de la figura. Recuerde con qué intención lo hizo.
   a. ¿Alcanzó a formular una conjetura? ¿Cuál?

   b. ¿Qué objetos o relaciones entre objetos permanecieron invariantes al arrastrar el punto al interior del triángulo? Mencione más de uno.

   c. Comente sus reflexiones en el foro correspondiente.

En ocasiones se arrastran elementos de una figura previamente construida, de manera libre, para buscar invariantes matemáticos. Este tipo de arrastre es conocido como *arrastre errático* (Arzarello, Olivero, Paola, Robutti, 2002).

4. El arrastre en los applets radio-semiperímetro y viviani-reconfiguración se hizo a través de deslizadores. Se requería guiar de alguna manera la manipulación de los mismos.
    a. ¿Qué invariantes matemáticos detectó al hacer uso de los deslizadores?

    b. ¿Cómo intervino el proceso de visualización en el proceso de justificación de los teoremas revisados? ¿Qué papel jugaron los invariantes detectados, la conservación del área y la propiedad distributiva, para justificar la validez de los teoremas asociados?

    c. Comente con sus compañeros en el foro correspondiente

Cuando se arrastran elementos de una figura previamente construida, para obtener una configuración específica, decimos que se lleva a cabo un *arrastre guiado* (Arzarello, Olivero, Paola, Robutti, 2002). Cuando se utilizan deslizadores para conducir hacia la nueva configuración, diremos que el arrastre guiado es indirecto, puesto que no se manipulan directamente los elementos de una construcción.

5. Para el cierre de esta actividad, comenten bajo la guía del instructor en la siguiente sesión presencial, las dudas, observaciones y conclusiones a las que se llegó en los foros.

Cierre

Actividad 3
Geometría, Pensamiento Geométrico y Génesis Instrumental.

Tarea 5. ¿Qué es la Geometría?

Enseguida se ofrece el extracto de la visión de la geometría que en este siglo XXI expusieron connotados investigadores y académicos dedicados al estudio de las matemáticas, particularmente en geometría, y que han profundizado seriamente sobre la problemática de su aprendizaje y de su enseñanza. Se tiene la intención de que reflexionemos sobre la importancia de dejar atrás el tratar de limitar la visión sobre la geometría que se limita a ofrecer una única definición memorizable, a saber: *Es la parte de las matemáticas que estudia la extensión, la forma de medirla, las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos y figuras, y la manera cómo se miden.*

1. Lea detenidamente el Extracto 1 y responda lo que posteriormente se le solicita.

Extracto 1[2]

… No sólo se considera (la geometría) como una herramienta necesaria para describir el espacio circundante, comprenderlo e interactuar en él, sino que, como disciplina científica, descansa sobre importantes procesos de formalización que son ejemplo de rigor, abstracción y generalidad. Mammana y Villani (1998) han identificado las siguientes dimensiones, que en estrecha vinculación unas con otras y vinculadas también con los demás campos de las matemáticas, las ciencias y la vida cotidiana, aportan elementos para el logro de dicha formación. La geometría puede verse como:

- Una ciencia del espacio y la forma. Desde sus raíces como herramienta para describir y medir figuras, se han ido constituyendo teorías, ideas y métodos mediante los cuales podemos construir y estudiar modelos idealizados del mundo físico o de fenómenos que acontecen el mundo real.
- Un método para representar visualmente conceptos y procesos de otras áreas de las matemáticas como la aritmética, el álgebra o el cálculo, o de otras ciencias naturales y sociales.
- Un punto de encuentro entre la matemática vista como una teoría abstracta y la matemática vista como un recurso de modelación.
- Una vía para desarrollar pensamiento y comprensión, y, en un nivel avanzado, como una teoría formal.
- Un ejemplo paradigmático para enseñar razonamiento deductivo.
- -Una herramienta en diversos campos de aplicación, tanto en forma tradicional, como de manera innovativa mediante

[2] Del libro Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales Ministerio de Educación Nacional. Colombia (2004). Recuperado en: www.colombiaaprende.edu.co/html/.../1685/articles-113753_archivo.pdf

el uso de recursos computacionales.

La geometría tiene una larga historia siempre ligada a las actividades humanas, sociales culturales, científicas y tecnológicas. Ya sea vista como una ciencia que modela nuestra realidad espacial, como un excelente ejemplo de sistema formal o como un conjunto de teorías estrechamente conectadas, cambia y evoluciona permanentemente y no se puede identificar únicamente con las proposiciones formales referidas a definiciones, conceptos, o teoremas. **Ella *es el resultado de una combinación entre diversos procesos cognitivos asociados a la actividad geométrica y la comunicación de los resultados de dicha actividad. En ese sentido, el conocimiento geométrico no existe únicamente en los enunciados formales ni puede considerarse como algo absoluto e impersonal. Por el contrario, se convierte en algo relativo a las experiencias individuales y grupales que, mediadas por diversas herramientas materiales o simbólicas producen diversos niveles de sofisticación del conocimiento, útiles para resolver problemas, interpretar hechos o dar explicaciones, entre otras cosas*** (el énfasis es nuestro)***.***

****

…Probablemente cualquier situación geométrica, por elemental que sea, permite una amplia gama de posibilidades de exploración, formulación de conjeturas y experimentación de situaciones con la idea de explicar, probar o demostrar hechos. También ofrece amplias oportunidades de usar modelos matemáticos para comprender la actividad humana y la social dadas sus estrechas relaciones con la cultura, la historia, el arte, la filosofía y la ciencia. Adicionalmente, no hay mejor lugar que la geometría para dilucidar el papel de la prueba y la demostración en matemáticas.

a. ¿Alguna de las concepciones sobre Geometría que se tienen actualmente, según se enlistan en la lectura, le parece acorde a lo que se trabajó en la Secuencia 1 del curso anterior, Actividades Selectas de

Matemáticas I? ¿Por qué? Apoye su argumento mediante referencias a algunas de las tareas de la secuencia mencionada

b. ¿Considera usted que el énfasis que hemos puesto al penúltimo párrafo de lo dicho por los autores corresponde al tipo de tareas de la Secuencia 1 ya mencionada? Trate de ejemplificar sus consideraciones e intercambie opiniones con los demás.

c. ¿De qué manera lo expresado en el último párrafo de la lectura tiene relación con orientar la *enseñanza de la geometría* hacia *provocar el desarrollo del pensamiento geométrico*? Comparta su respuesta y discuta su punto de vista con los demás.

Tarea 6. ¿Qué es pensar geométricamente?

Virtual. El siguiente extracto se presenta con el propósito de fortalecer el anterior, de tal manera que usted le dé un significado más amplio y exprese las razones por las cuales considera que durante estos cursos nos hemos referido al "*desarrollo del pensamiento geométrico"* como un proceso fundamental e inherente al *"aprendizaje de la geometría".*

Extracto 2[3]

…
Así, nuestra investigación está ligada al análisis y estudio de lo que genéricamente podríamos llamar capacidades geométricas; particularmente, a los procesos cognitivos que evidencia el alumno al resolver un problema de geometría. El conocimiento de dichos procesos y sus relaciones va a servir para diagnosticar al estudiante y dirigir el desarrollo de las nociones y conceptos geométricos asociados; de igual manera, entender su desarrollo, evolución, tratamiento e integración en el currículo escolar puede ayudarnos a conocer el mapa cognitivo de los alumnos, facilitando el aprendizaje. Según Gutiérrez, "la principal dificultad está en la necesidad que tenemos de conocer lo que pasa por la cabeza de los estudiantes cuando están envueltos en una actividad matemática, cuáles son sus procesos de razonamiento, cómo analizan y transforman la información que les llega del exterior, cuándo y cómo toman decisiones, etc. Todo ello para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje" (2005, p. 28).

Por tal motivo, saber la caracterización de estos procesos es fundamental para el profesorado, que debe constantemente interpretar las producciones de los estudiantes y ofertar algunas pautas de actuación en aras de mejorar sus capacidades

[3] Torregrosa, Germán, Quesada, Humberto, Coordinación de procesos cognitivos en Geometría Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en linea] 2007, 10 (julio) : [Fecha de consulta: 2 de junio de 2016] Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500205> ISSN 1665-2436

geométricas [procesos cognitivos][4]. Si somos capaces de aproximarnos a una interpretación sobre los procesos de resolución de los problemas geométricos, podemos intervenir mucho más eficazmente en el aprendizaje geométrico [mediante la generación y desarrollo de procesos cognitivos] de los alumnos, y por ende en el matemático, pues contaremos con una mayor comprensión de sus respuestas, lo cual nos ayudará a establecer métodos de enseñanza ajustados a sus necesidades.

El caso de la geometría ha sido estudiado por varios autores. Una diversidad de modelos teóricos han servido para avanzar en esta línea de investigación, basada en el estudio de los procesos cognitivos que intervienen en el desarrollo de las capacidades geométricas; por ejemplo, los de Krutetskii (1976), donde se identifican distintas habilidades en la resolución de problemas.

+++++++

En este trabajo, a partir de la teoría cognitiva de Duval [Raymond Duval, connotado autor de la *teoría de las representaciones semióticas* y de los *procesos cognitivos en el desarrollo del pensamiento geom*], proponemos un modelo para caracterizar las interacciones entre los procesos de visualización, construcción y razonamiento que intervienen en la resolución de problemas de geometría.

La definición y caracterización de los procesos de construcción, visualización y razonamiento son un avance en esta línea de conocimiento, ya que separa la acción cognitiva (proceso) de las distintas presentaciones e imágenes mentales. En particular, consideramos que la caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, al igual que el estudio de su coordinación como puerta de entrada hacia el razonamiento deductivo, resulta de gran importancia para resolver los problemas geométricos (Duval, 1998). Como consecuencia, la visualización no queda relegada a un simple papel ilustrativo de las afirmaciones geométricas.

[4] Todas las frases entre corchetes son nuestras

Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), a la resolución de problemas e incluso a la prueba. Por ello vemos a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos; en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer en la medida de lo posible el interfaz de la actividad matemática cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría.

+++++++

En este trabajo hemos adoptado la orientación de la investigación de Duval (1993, 1995, 1998, 1999a), la cual atiende a los procesos que intervienen en el aprendizaje de la geometría, manifestando su desacuerdo con la jerarquización de los procesos cognitivos (1998). Las hipótesis de las que partimos, surgidas por adaptaciones al marco de análisis propuesto por Duval (1998) cuando habla del problema básico de la enseñanza de la geometría, son:

- La actividad geométrica involucra tres clases de procesos cognitivos: la visualización, el razonamiento y la construcción.
- Las tres clases de procesos deben ser desarrollados separadamente.
- Es necesario realizar durante el currículo escolar un trabajo que reconozca los diferentes procesos de visualización y de razonamiento, pues no sólo hay varias formas de ver una figura, sino también de razonamiento.
- La coordinación entre visualización y razonamiento sólo

puede ocurrir realmente tras este trabajo de diferenciación.

Cuando estudiamos los procesos cognitivos involucrados en el estudio de la geometría debemos tener en cuenta la diferencia entre los conceptos de dibujo [figura geométrica construida o dibujada en papel o en pantalla] y figura [mental], puesto que hay que distinguir el contenido de una representación y lo que representa (Duval, 1995).

Si se habla de *figura* (mental), entendemos la imagen mental de un objeto físico; el *dibujo* es la representación gráfica de una figura (mental) en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico.

VISUALIZACIÓN

…

Hershkowitz et al. (1996) indican: “entendemos por visualización la transferencia de objetos, conceptos, fenómenos, procesos y sus representaciones a algún tipo de representación visual y viceversa. Esto incluye también la transferencia de un tipo de representación visual a otra” (p. 163). En este sentido, se denomina visualización en el estudio de la geometría al proceso o acción de transferencia de un dibujo a una imagen mental o viceversa.

El significado que atribuimos a la visualización en este estudio se refiere a la transferencia que ocurre entre dibujo y figura mental, en la línea de Hershkowitz et al. (1996). Asimismo, debemos resaltar que si visualizamos un dibujo podemos obtener un objeto mental que no tiene por qué ser el mismo para todos los observadores, ya que el dibujo está unido a unas afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades o relaciones) que la figura mental no posee, sino le son atribuidas por el observador.

Así, una figura (imagen mental de un objeto físico) se puede representar mediante una configuración geométrica –*dibujo*– y se compone de otras figuras mostradas por subconfiguraciones geométricas más simples, de dimensión geométrica menor o igual que la original, las cuales también están vinculadas a afirmaciones matemáticas.

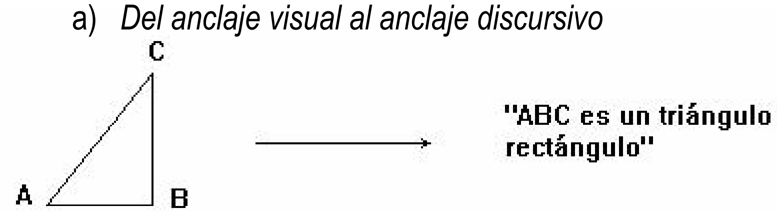
Aprehensión

…el término *aprehensión*, cuya definición, según el *Diccionario de la Real Academia Española* (2001), es "concebir las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar", mientras que la *aprehensión simple* se describe como "la que capta las formas de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin afirmar ni negar". De este modo tratamos de hacer operativa, para su estudio, la acción de *transferencia* de la descripción de visualización formulada por Hershkowitz et al. (1996), ya que al introducir características de dicha transferencia obtenemos *formas de aprehender* (de ver la figura matemáticamente):

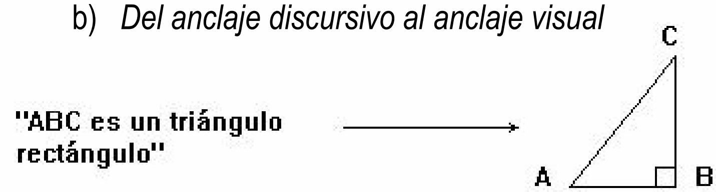
- *Aprehensión perceptiva*
  La aprehensión perceptiva se caracteriza como la identificación simple de una configuración. Es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno.

- *Aprehensión discursiva*
  Llamamos aprehensión discursiva a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse de dos maneras según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se le denomina cambio de anclaje:

  a) *Del anclaje visual al anclaje discursivo*



  b) *Del anclaje discursivo al anclaje visual*



- *Aprehensión operativa*
  La aprehensión operativa se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Este cambio puede ser de dos tipos:

  a) *Aprehensión operativa de cambio figural*
     Cuando a la configuración inicial se le añaden (quitan) nuevos elementos geométricos (nuevas subconfiguraciones).

     Ejemplo: En la Figura 7, $\overline{\mathrm{AD}} \equiv \overline{\mathrm{EB}}$ y $\overline{\mathrm{AB}} \equiv \overline{\mathrm{ED}}$ probar que $\widehat{\mathrm{B}} \equiv \widehat{\mathrm{D}}$.

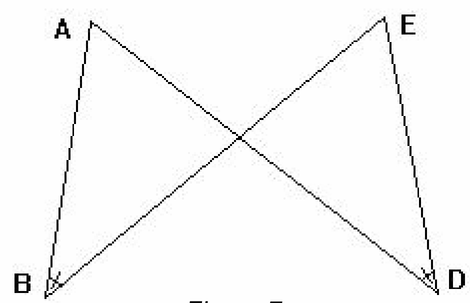


Figura 7

Una posible solución consiste en introducir un nuevo elemento geométrico en la configuración inicial: el segmento $\overline{AE}$ (Figura 8):

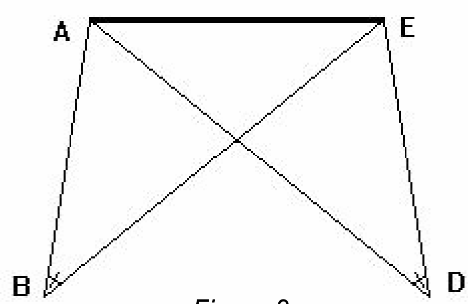


Figura 8

Al introducir el segmento *AE* es posible razonar utilizando el criterio de congruencia de triángulos *LLL.*

b) *Aprehensión operativa de reconfiguración*

Cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como las piezas de un puzzle. La Figura 9 ilustra una prueba del Teorema de Pitágoras, realizada por Bhaskara en el siglo XII: *en un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa ($a^2 + b^2 = c^2$).* Aquí, se ponen de manifiesto la aprehensión operativa de cambio figural y la aprehensión operativa de reconfiguración.

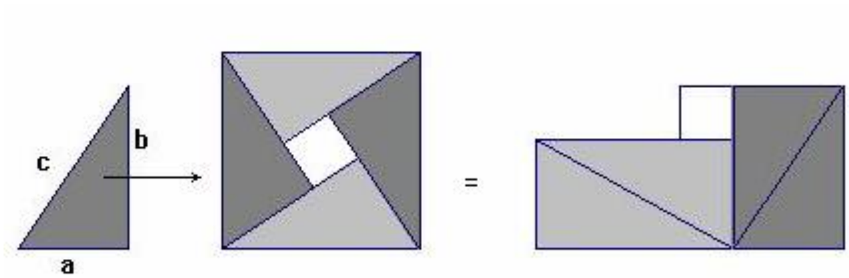


Figura 9. Tomada de Nelsen, R. (1993). *Proofs without words: Exercises invisualthinking*. Washington, USA: The Mathematical Association of America,

…

La caracterización de las distintas aprehensiones –perceptiva, discursiva y operativa– puede facilitar, por un lado, el análisis de las respuestas a los problemas de geometría; por otro, a mostrar los cambios que manifieste el alumno. Por ejemplo, una aprehensión discursiva está caracterizada por el uso que hace el alumno de un cambio de anclaje, y una aprehensión operativa por el cambio configural (ya sea de reconfiguración o de cambio figural).

Destacamos que el cambio de anclaje es de gran importancia para coordinar los distintos modos de representación al solucionar problemas geométricos. Con respecto a los modos de representación se puede señalar que, debido a las características del contenido geométrico, gran cantidad de tareas vienen dadas en el modo figurativo y demandan traslaciones al modo numérico/simbólico y viceversa (Escudero, 2003).

+++++++

RAZONAMIENTO

…

Los procesos de razonamiento son considerados hoy día como una variedad de acciones que toman los alumnos para comunicarse y explicar a otros, tanto como a ellos mismos, lo que ven, descubren, piensan y concluyen (Hershkowitz, 1998), [es decir, para comunicar lo que visualizan]. En este artículo entendemos por razonamiento a cualquier procedimiento que nos permita desprender nueva información de informaciones previas, ya sean aportadas por el problema o derivadas del conocimiento anterior. Se pueden diferenciar al menos tres tipos de razonamiento en relación con los procesos discursivos desarrollados (Duval, 1998, p. 45): el proceso configural, que se identifica con la aprehensión operativa; el proceso discursivo natural, que es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación, y el proceso discursivo teórico, que se caracteriza por un desarrollo del discurso mediante la deducción y puede ser hecho en un registro estrictamente simbólico o en el del lenguaje natural.

…

El proceso configural, entendido como la coordinación entre la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva en la resolución de problemas de geometría, es un proceso de razonamiento derivado de la interacción entre dos procesos de visualización que el alumno genera con frecuencia para resolver y transmitir la solución de un problema.

Dicho proceso suele organizar la respuesta del alumno, es decir, puede encontrarse inmerso en un discurso natural que lo explique o dé la "idea" para organizar un proceso discursivo teórico. Esto parece indicar que constituye el punto de apoyo sólido desde el cual el estudiante puede enfrentar la resolución de problemas en muchas situaciones geométricas.

Consideramos que el proceso configural, en particular su manifestación a través del truncamiento [la validez se asume al exponer la configuración geométrica que finalmente muestra lo que se afirma], permite explicar la conducta de los estudiantes al solucionar problemas de geometría, siendo un posible nexo entre la visualización y el razonamiento. Si aceptamos la relevancia del proceso configural, entonces podemos entender el papel importante que desempeña el desarrollo de los procesos de

- visualización en los estudiantes

2. Atendiendo a los diferentes párrafos de esta lectura, conteste o dé su opinión sobre las siguientes cuestiones, las cuales estarán abiertas como temas en el foro correspondiente, o bien en foros distintos según el criterio de su instructor.

    a. ¿Qué opina sobre la necesidad que tiene un profesor de conocer los procesos cognitivos llevados a cabo mientras se resuelven problemas (tareas) geométricos?

    b. Exprese qué es lo que hace diferente una figura mental de una figura representada mediante un dibujo. Ponga un ejemplo que clarifique esa diferencia y comente por qué cree usted que los autores le dan importancia.

    c. Apoyándose en la lectura, ¿cómo describe usted la diferencia entre *visualizar* y *ver*?

    d. ¿Cree usted que en las actividades propuestas a lo largo de esta secuencia se ha tenido oportunidad de identificar los procesos de visualización, construcción y razonamiento? Explique y ponga ejemplos.

        i. En este sentido, ¿cree usted que en la Secuencia 1 del curso anterior usted desarrolló esos procesos? Mencione momentos que ejemplifiquen su afirmación. Si su respuesta es negativa, argumente por qué.

    c) En las Figuras 7 y 8 se muestra un ejemplo de a*prehensión operativa de cambio figural*. De manera discursiva se induce cómo, en la configuración lograda se puede probar lo que se pide. Reproduzca en

GeoGebra ambas figuras y "resalte" visualmente los triángulos en los que se apoyaría la demostración, luego concluya dicha demostración.

i. Describa el proceso de razonamiento (según lo dicho en la lectura) que advierte durante todo el proceso.

e. Haga una descripción verbal de la *reconfiguración* que se muestra en la Figura 9 para apoyar una prueba de la validez del teorema de Pitágoras.

f. ¿Qué expresión algebraica se asocia al área de la figura final? Desarrolle una transformación en dicha expresión para obtener la que finalmente se asocia al enunciado del teorema.

   i. Mencione los procesos cognitivos que identifica durante este proceso de demostración.

   ii. ¿Cree usted que estuvieron presentes los procesos de visualización y razonamiento que dieron lugar a la subconfiguración inicial del triángulo rectángulo inicial? Explique.

Tarea 7. La génesis instrumental: GeoGebra y el desarrollo del pensamiento geométrico

Virtual. El siguiente extracto tiene la intención de conocer elementos de una teoría que permite analizar la interacción del estudiante con un medio tecnológico-didáctico.

Extracto 3[5]

…en la teoría de la instrumentación de Rabardel (2001) que diferencia entre el artefacto (Geo-Gebra en este caso) y el instrumento. El instrumento es la conjunción del artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para construirlo. El proceso de transformación de un artefacto en un instrumento se llama génesis instrumental. Según Rabardel (2001), el software restringe no sólo la manera de actuar, sino también la manera de pensar del usuario. Por tanto, el alumno tiene que movilizar conscientemente, durante la génesis instrumental, estructuras de control sobre el conocimiento geométrico implicado (el artefacto se transforma en instrumento para el usuario). Los estudiantes desarrollan esquemas mentales en los que sus propios conceptos geométricos y las técnicas empleadas están interrelacionadas. El proceso de génesis instrumental tiene dos direcciones. Por un lado, las características del software influencian las estrategias de resolución y las concepciones del estudiante (proceso de instrumentación). Por otro lado, el proceso de instrumentalización, dirigido del estudiante al software, lleva a una internalización del uso del artefacto. Así, un mismo artefacto puede ser instrumentalizado de distintas formas en función del alumno y del problema propuesto (White, 2008). Caracterizamos a continuación los procesos de instrumentación e instrumentalización.

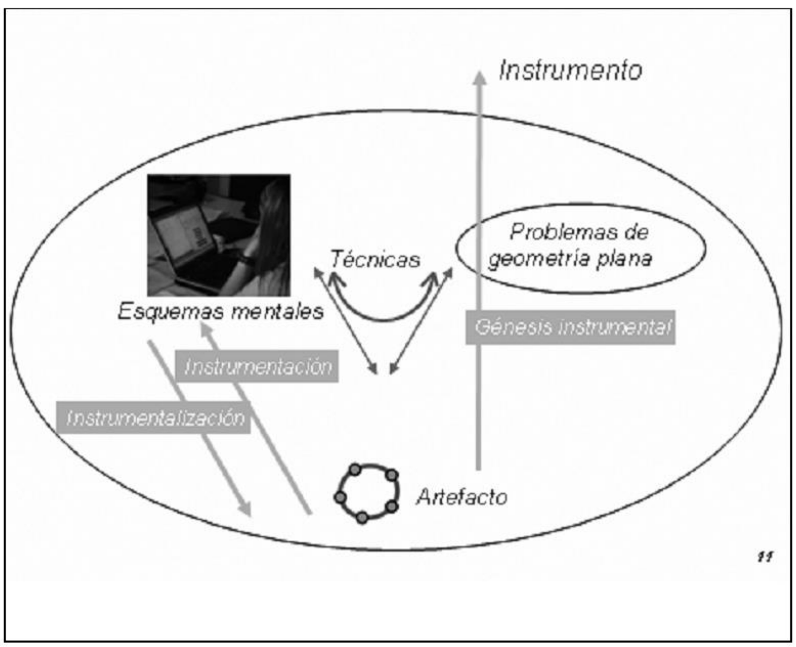
– Instrumentación: Es el proceso mediante el cual el artefacto influye en el alumno. Las posibilidades y restricciones del software (GeoGebra) influyen en las estrategias de resolución de problemas de los estudiantes, así como en las correspondientes concepciones emergentes. Por ejemplo, el software de geometría dinámica permite construir objetos y desplazar una parte de éstos. Si el objeto ha sido construido respetando sus propiedades geométricas, se pueden observar invariantes geométricos al desplazar la figura. Sin embargo, el hecho de poder desplazar objetos para observar elementos invariantes es una posibilidad del software siempre y cuando el alumno sea capaz de entender este proceso. En la instrumentación encontramos el desarrollo de esquemas mentales que proporcionan un medio predecible e iterable de integración de artefacto y acción (Verillon y Rabardel, 1995).

---

[5] Iranzo, N. and Fortuny, J.M. (2009). La Influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias. Vol. 27. No. 3. pp 433-446,*

– Instrumentalización: El conocimiento del alumno y su forma de trabajar guía la forma en que utiliza el artefacto. El proceso de instrumentalización depende del estudiante y es un proceso que lleva a una internalización del uso del artefacto (un artefacto no varía pero puede ser instrumentalizado de distintas formas). Este proceso puede dar lugar a un enriquecimiento del artefacto (Trouche, 2005).
El artefacto se transforma en instrumento durante el proceso bidireccional de génesis instrumental. El alumno construye esquemas mentales, asimilando esquemas ya existentes o produciendo nuevos esquemas para llevar a cabo la tarea propuesta. Como cita White (2008), «instrumental genesis both make artifact meaningful in the context of an activity, and provides a means by which users make meaning of that activity» (p. 3). En la figura 1 podemos ver un esquema del proceso de génesis instrumental.

Figura 1
Instrumento y artefacto (Drijvers, 2003)



….
En el análisis de las producciones de los alumnos con GeoGebra, consideramos las distintas finalidades que un estudiante puede tener cuando utiliza acciones de arrastre. En las investigaciones sobre el uso del modo de desplazar, Arzarello y otros (2002)

> describen los siguientes tipos de arrastre:
> – Arrastre de test: se utiliza el arrastre de test para comprobar si la figura construida conserva las condiciones matemáticas del problema. Se puede considerar como un instrumento de validación para la solución de un problema de construcción (Hoyles y Noss, 1994). Por ejemplo, después de construir un rectángulo usando segmentos horizontales y verticales, podemos observar que la figura se transforma en un cuadrilátero general al desplazar uno de los vértices.
> – Arrastre errático: Una vez construida la figura, se arrastra algún elemento de la figura, sin ninguna idea previa, para buscar invariantes matemáticos. Por ejemplo, en el problema de la construcción de la recta de Euler, los alumnos desplazan los vértices del triángulo de forma aleatoria, buscando invariantes (relación entre las distancias entre el baricentro, el circuncentro y el ortocentro).
> – Arrastre guiado: Se arrastra un objeto para obtener una figura particular. Por ejemplo, en el problema de Varignon los alumnos construyen el cuadrilátero de Varignon (paralelogramo) formado al unir los puntos medios de un cuadrilátero general. A continuación desplazan los vértices del cuadrilátero inicial (arrastre guiado) para transformar el cuadrilátero de Varignon en un rombo.

3. De acuerdo a los diferentes párrafos de esta lectura, conteste o dé su opinión sobre las siguientes cuestiones, las cuales estarán abiertas como temas en el foro correspondiente, o bien en foros distintos según el criterio de su instructor.

    a. Para Rabardel, ¿qué diferencia existe entre artefacto e instrumento? Ilustre la idea considerando el software GeoGebra.

    b. ¿Qué es la génesis instrumental, en esta teoría?

    c. ¿Cómo se conciben los procesos de instrumentalización e instrumentación? ¿Se dan por separado o son simultáneos?

d. Abra un archivo GeoGebra que haya construido en el curso anterior. Explique cómo actuó sobre el software (proceso de instrumentalización).

e. ¿Cuál acción considera usted que conlleva un nivel más alto de instrumentalización?

    i. El uso de deslizadores en una construcción previa.

    ii. La construcción de un archivo GeoGebra

   Justifique su respuesta

f. Considere el mismo archivo GeoGebra del inciso d). Explique cómo su interacción con el software enriqueció su visión de la geometría, cómo apoyó el desarrollo de su pensamiento geométrico y/o cómo le permitió profundizar el significado de algunos objetos geométricos (proceso de instrumentación).

g. Considerando los diferentes tipos de arrastre referidos en este tercer extracto, explique cómo percibe los procesos de instrumentación e instrumentalización, en cada uno de ellos.

Tarea de cierre: Un ensayo sobre el desarrollo del pensamiento geométrico en un ambiente apoyado por GeoGebra, mencionando las tareas y lecturas de esta secuencia.

Para las especificaciones de este ensayo, siga las recomendaciones de su instructor.

Tabla de contenidos Secuencia 2

Pensamiento Algebraico

Análisis didáctico de procesos matemáticos y cognitivos de generalización algebraica de sucesiones numéricas, mediados por el uso de tecnologías digitales matemáticas.

Secuencia 2

Pensamiento Algebraico

Análisis didáctico de procesos matemáticos y cognitivos de generalización algebraica de sucesiones numéricas, mediados por el uso de tecnologías digitales matemáticas.

Presentación

El propósito principal de las actividades que conforman a esta Secuencia Didáctica consiste en promover la reflexión crítica del participante sobre los procesos cognitivos que caracterizan al pensamiento algebraico, y sobre el papel que en dichos procesos pueden y deben desempeñar las tecnologías digitales matemáticas. Tal reflexión se centra en el importante problema de la transición desde la aritmética hacia el álgebra, es decir, en *la introducción del álgebra en la escuela secundaria*.

Dicha reflexión deberá apoyarse, en primer término, en las competencias matemáticas desarrolladas y/o perfeccionadas por el participante de este Diplomado durante el curso previo, denominado *Actividades Selectas de Matemáticas I*. Son precisamente las competencias disciplinares previamente desarrolladas las que constituyen el punto de partida para la reflexión crítica y sistemática sobre los principios didácticos y de uso de tecnologías digitales, asociados a contenidos matemáticos específicos.

Inicio

Actividad 1.

(Modalidad virtual) El problema didáctico de la transición desde la aritmética hacia el álgebra en la escuela secundaria.

Tarea 1. (Modalidad virtual) La concepción personal del álgebra elemental.

Retome las experiencias vividas durante la resolución de las distintas actividades que, conjuntamente con su equipo, abordó usted durante la Secuencia 2 del curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*. Apoyándose en dichas vivencias, así como en los conocimientos matemáticos desarrollados y/o perfeccionados en dicha etapa del curso, reflexione y trate de responder brevemente, sin intentar ser exhaustivo, las siguientes cuestiones.

1.1. ¿*Qué es el álgebra elemental, y qué papel juega en la actividad matemática*?

1.2. ¿*Cuáles son las cuestiones* (*matemáticas o extra matemáticas*) *a las que responde el álgebra elemental*? ¿*Cuál es su razón de ser*?

1.3. ¿*Qué relación guarda el álgebra elemental con la aritmética*? ¿*Cuáles son las posibles relaciones entre lo algebraico y lo numérico en la enseñanza secundaria*?

1.4. ¿*Cómo se genera y desarrolla el conocimiento algebraico*?

1.5. ¿*Qué es lo significa saber álgebra elemental en la escuela secundaria*?

En los espacios de más abajo, trate de responder a estas preguntas en relación con dos entornos en los que usted como profesor ha intervenido: a) el ambiente escolar en su centro de trabajo, y b) el curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*.

a) Mi opinión a partir de mis experiencias en mi escuela o centro de trabajo:

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

b) Mi opinión a partir de mis experiencias en el curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*:

1.1

1.2

1.3

1.4

1.5

Desarrollo

Tarea 2. (Modalidad virtual-presencial) *¿Qué el álgebra? La opinión de algunos autores*.

Lea detenidamente y analice las definiciones del álgebra y los comentarios sobre ellas, formuladas por algunos autores, tanto matemáticos (de distintas épocas históricas), como investigadores en Matemática Educativa, y que se transcriben en los párrafos siguientes.

François Vieta (1540–1603), considerado por muchos historiadores de las matemáticas como el fundador del álgebra.

> El álgebra fue descubierta por los antiguos a partir de la Aritmética, y es la más noble —y de ninguna manera suficientemente celebrada— técnica de los números. Como dice Cardano, toda vez que el Álgebra sobrepasa toda sutileza humana y toda claridad de cada alma mortal, tiene que ser considerada como un verdadero regalo celestial, el cual brinda una experiencia a tal grado iluminadora del verdadero poder del intelecto, que quienquiera que lo domine creerá que no hay nada que no pueda comprender. (...) Hay una cierta manera de buscar la verdad en matemáticas, de la cual se dice que Platón fue el primero en descubrirla. Teón la llamó *análisis*[6], al cual define como asumir aquello

[6] En tiempos antiguos, se consideraba que el *análisis* era el medio para descubrir relaciones o propiedades (teoremas), particularmente en el ámbito de la geometría euclidiana. Por el contrario, la presentación de los resultados (la demostración del teorema) se llevaba a cabo mediante la *síntesis*. Esto es lo que Vieta y sus contemporáneos reprocharon a los geómetras griegos: hallaron sus resultados mediante el análisis, pero sólo presentaron la síntesis, ocultando con ello un paso importante: cómo habían hallado dichos resultados. De modo que, al desarrollar su instrumental algebraico, Vieta puso énfasis en el análisis y su potencial. Con esta idea en mente, postuló que el análisis se compone de dos partes: la primera, a la que llamó *zetética* (búsqueda de la verdad), es decir, el descubrimiento de relaciones o propiedades, y la segunda, a la que denominó *porística* (enunciación del teorema). Pronto vio la necesidad de añadir una tercera, a la que llamó *exegética* (presentación del teorema) en el caso de la geometría, o *rética*, en el caso de los problemas numéricos.

> que es buscado como si fuera admitido, [y razonar] a partir de las consecuencias [asumidas] hacia lo que es [ya] admitido, hasta llegar a obtener y comprender aquello que se busca.
>
> Aunque los antiguos proponían sólo [dos tipos] de análisis, *zetética* y *porística*, a los cuales mejor se aplica la definición de Teón, he agregado un tercero, que podría llamarse *rética* o *exegética*. Es propiamente la *zetética* por la cual uno establece una ecuación y proporción entre un término que debemos hallar y los términos dados; la *porística* por la cual la verdad de un teorema propuesto es evaluada por medio de una ecuación o proporción; y la *exegética* por la cual el valor de un término desconocido en una ecuación o proporción es determinado. Por tanto, todo el arte analítico, asumiendo estas tres funciones por sí mismo, podría denominarse la ciencia del descubrimiento correcto en matemáticas.
>
> Ésta (la zetética) no restringe su razonamiento a números, una limitación del viejo analista, sino que trabaja con la recientemente descubierta *logística especiosa* [simbólica][7], la cual es más fructífera y poderosa que la logística numérica, para comparar las magnitudes unas con otras.
>
> La logística numérica emplea números, mientras que la logística simbólica emplea símbolos o signos como, digamos, letras del alfabeto. En el análisis la palabra "ecuación", por si misma, significa un igualdad construida propiamente de acuerdo con [las reglas] de la zetética. Así, una ecuación es una comparación de una magnitud desconocida y una magnitud conocida.
>
> Finalmente, el arte analítico, dotado de estas tres formas de zetética, porística y exegética, reclama para sí mismo la más grande de todas las tareas, la cual consiste en resolver todo problema. [Traducción de Julio Mosquera].

Para Newton (1643–1727), científico inglés, fundador de la Física Clásica y del Cálculo Diferencial e Integral,

> El cálculo es ejecutado con *Números*, como en la Aritmética Vulgar, o con *Especies*, como es usual entre los Algebristas. Ambos están construidos sobre los mismos Fundamentos, y buscan el mismo Objetivo; la *Aritmética* definitiva y particularmente, el *Álgebra* indefinida y universalmente, de manera tal que todas las Expresiones que son halladas mediante estos Cálculos, y particularmente las Conclusiones, pueden ser

[7] En el álgebra de Vieta, el término *logística especiosa* se refiere a la técnica para operar con las *especies* (incógnitas o literales). Vieta acostumbraba incluir, al final de la solución algebraica de cada uno de sus problemas, una ilustración numérica recurriendo a un caso particular, que resolvía usando la logística numerosa, para mostrar a los escépticos, por contraste, la potencia de su método.

> llamadas *Teoremas*. Pero el Álgebra es particularmente excelente en esto: mientras que las Preguntas Aritméticas son resueltas solamente procediendo desde las Cantidades dadas a las Cantidades buscadas, el Álgebra procede en Orden inverso, de las Cantidades buscadas, como si estuvieran dadas, a la Cantidades dadas, como si fueran buscadas; al final se llega a una Conclusión o Ecuación de una u otra manera, a partir de la cual podremos obtener la Cantidad buscada. [Traducción de Julio Mosquera]

Augusto de Morgan (1806–1871), matemático inglés, considerado como uno de los creadores de la lógica matemática, en uno de sus trabajos comentó que el álgebra

> ... es la parte de las matemáticas en la cual son empleados símbolos para abreviar y generalizar el razonamiento que surge en cuestiones relacionadas con los números.
>
> Hay dos especies de preguntas: teoremas y problemas. Un teorema demuestra la existencia de ciertas propiedades de números dados y conocidos. Un problema tiene por objeto determinar cuáles números tienen relaciones dadas con otros números conocidos. [Traducción de Julio Mosquera]

Según Andrè Lalande (1867–1963), pensador francés que cultivó la filosofía de la ciencia,

> «Con el lenguaje algebraico todo se simplifica: las condiciones que exigirían una página entera para expresarse en lenguaje ordinario apenas exigen una pocas líneas en la otra; se captará la escritura instantáneamente con la vista y será memorizada sin dificultad. Las consecuencias de los razonamientos se escribirán con la misma simplicidad; y de un solo vistazo se podrá captar al final el conjunto de todos los pasos intermedios por los que se ha avanzado».
> Lalande*, Conferencia sobre la filosofía de las ciencias,* 1913*.* [Citado en Boye (2004), pág. 265].

Para Nicolas Bourbaki (1943), seudónimo usado por un colectivo de matemáticos franceses de primera línea, casi todos ellos egresados de la Escuela Normal de París[8], y que sentaron las bases de la matemática moderna,

> El álgebra se ocupa esencialmente del *cálculo*, esto es, ejecutar, sobre elementos de un conjunto, "operaciones algebraicas"; el ejemplo más conocido es proporcionado por las "cuatro reglas" de la aritmética elemental. El álgebra... por largo tiempo ha sido

[8] Entre los fundadores del grupo se menciona a Henri Cartan (1904–2008), Claude Chevalley (1909–1984), Jean Dieudonnè (1906–1992, líder y portavoz del grupo), Andrè Weil (1906–1998), Jean Delsarte (1903–1988), y René de Possel (1905–1974).

> considerada como el estudio de las operaciones algebraicas, independiente de las entidades matemáticas a las que ellas puedan aplicarse.
>
> Privadas de cualquier carácter específico, la noción común subyacente a las operaciones algebraicas usuales es muy simple: realizar una operación algebraica entre dos elementos a, b del mismo conjunto E, significa asociar al par ordenado (a,b) un tercer elemento c bien definido del conjunto E. En otras palabras, no hay más nada en esta noción que una *función*: tener una operación algebraica es tener un función definida sobre $E \times E$ que toma sus valores en E...
>
> En conformidad con las definiciones generales, tener sobre un conjunto E una o varias leyes de composición o leyes de acción define una *estructura* sobre E; para las estructuras definidas de esta manera preservamos precisamente el nombre de *estructuras algebraicas*, y es el estudio de éstas lo que constituye el álgebra. [Traducción de Julio Mosquera]

Pasaremos ahora a considerar algunas definiciones del álgebra elemental propuestas por educadores matemáticos.

Para Carolyn Kieran (1996), el "Álgebra es una herramienta por medio de la cual no sólo representamos números y cantidades con símbolos literales sino que también calculamos con esos símbolos" (p.271). Esta definición de álgebra escolar incluye tanto "acciones" como "objetos".

Para Zalman Usiskin (1988), el álgebra escolar "...tiene que ver con la comprensión de las "letras" (hoy acostumbramos a llamarlas variables) y sus operaciones, y consideramos que los alumnos están estudiando álgebra cuando encuentran las variables por primera vez." (pág.8). Agrega que ésta provee los medios para analizar y describir relaciones. Además, el álgebra es la clave para la caracterización y comprensión de las estructuras matemáticas (Usiskin, 1988, p. 18). El álgebra también es un lenguaje. Dicho lenguaje contiene cinco aspectos importantes (1) incógnitas, (2) fórmulas, (3) generalización de patrones, (4) etiquetas, (5) relaciones. Cada vez que estas ideas son discutidas, desde preescolar y en los niveles subsecuentes, se presenta la oportunidad para introducir el lenguaje algebraico.

Este mismo autor distingue cuatro concepciones del álgebra.
Concepción 1: Álgebra como aritmética generalizada.
Concepción 2: Álgebra como el estudio de procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas.

Concepción 3: Álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades.
Concepción 4: Álgebra como el estudio de las estructuras.
(Usiskin, 1988)

Vance (1998): El álgebra a veces se define como aritmética generalizada, o como un lenguaje para generalizar la aritmética. Sin embargo, el pensamiento algebraico es más que un conjunto de reglas para manipular símbolos: es una forma de pensar.

Nadine Bednarz, Carolyn Kieran y Leslie Lee (1996) distinguen diferentes concepciones referentes al álgebra: (a) El álgebra como expresión de la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, (b) el álgebra como una herramienta para la resolución de problemas, (c) como la modelización de fenómenos físicos, usando variedad de representaciones, y (d) el álgebra como el estudio de las funciones. (Ake 2015)

Jim Kaput (1998, 2000) señala que el álgebra debe presentar, (a) la generalización de patrones y relaciones (particularmente la generalización de la aritmética y del razonamiento cualitativo), (b) el estudio de funciones y relaciones, (c) el estudio de estructuras y sistemas, abstraídos de cálculos y relaciones, (d) un conjunto de lenguajes de modelización y control de fenómenos, y (e) la manipulación sintácticamente guiada de formalismos. (Ake 2015)

González G.:

> El álgebra surge desde el instante en el que se plantea una cuestión relativa a un número inconcreto y se decide identificarlo por medio de una letra. En un principio, bien podríamos decir que es «la aritmética de los números inconcretos».
>
> Sin negar este hecho, resulta mucho más sugerente considerar el álgebra como un lenguaje, puente entre la situación de problema y los resultados, que hace posible abordar tres cuestiones fundamentales:
>
> a) El paso de lo particular a lo general, diferenciando:
> a1. La descripción y utilización de leyes, reglas, propiedades y relaciones generales, referidas a los números y las operaciones.
> a2. La descripción y utilización de relaciones generales referidas a los valores que pueden tomar dos o más magnitudes.

b) El paso de lo concreto conocido a lo inconcreto desconocido:

b3. La descripción y utilización de relaciones numéricas que se dan en una situación particular en la que intervienen valores fijos desconocidos.

Una vez que la situación planteada está expresada algebraicamente, la expresión cobra vida propia, de modo que puede manipularse al margen de la situación, dando lugar a nueva información sobre la misma y, en su caso, a la solución del problema. Y al final, volvemos al principio, contextualizando los resultados y valorando su pertinencia en la situación de partida. (Gonzalez-Razones)

En los párrafos anteriores presentamos una serie de definiciones y consideraciones acerca del álgebra en la escuela.

1. Señale las principales diferencias y semejanzas entre los planteamientos de los autores citados.

2. ¿Cuál de esas concepciones cree usted que predomina en la escuela secundaria mexicana?

3. A partir del análisis y comparación de los distintos planteamientos, refine sus respuestas a las siete preguntas formuladas anteriormente.

   1.1

   1.2

   1.3

   1.4

   1.5

Tarea 3. (Modalidad virtual-presencial) *¿Qué es el pensamiento algebraico? ¿Cuáles son sus rasgos característicos?*

Retome una vez más las experiencias vividas durante la resolución de las distintas actividades que, conjuntamente con su equipo, abordó usted durante la Secuencia 2 del curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*. Apoyándose en dichas vivencias, así como en los conocimientos matemáticos desarrollados y/o perfeccionados en dicha etapa del curso, reflexione y trate de formular una respuesta a las dos preguntas que dan nombre a la presente actividad. Tome también en consideración las citas que se transcriben más abajo.

Abraham Arcavi:

> Comprender “cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados con el objeto de exhibir relaciones, generalidades y demostraciones que de otra manera permanecerían ocultas e invisibles”, y “tener la confianza implícita en que estos son los utensilios apropiados”. (Arcavi, 1994)

Herbert y Brown (1997):

> El pensamiento algebraico significa el uso de símbolos y herramientas matemáticas para analizar diferentes situaciones mediante: (1) la extracción de información a partir de la situación... (2) la representación matemática de dicha información por medio de palabras, diagramas, tablas, gráficas y ecuaciones; y (3) la interpretación y aplicación de los resultados matemáticos, tales como el despeje de incógnitas, la verificación de conjeturas, y la identificación de relaciones funcionales.

> Kaput (1999) sostiene que el pensamiento algebraico aparece cuando, a través de los procesos de conjeturar y argumentar, uno establece generalizaciones acerca de los datos y relaciones matemáticas, expresándolas en un lenguaje cada vez más formal. Este proceso de generalización se puede producir a partir de situaciones aritméticas, geométricas, y de modelación matemática. El autor identifica cinco fases del pensamiento algebraico, íntimamente relacionadas: (i) la generalización y la formalización de patrones y restricciones; (ii) la manipulación de formalismos; (iii) el estudio de las estructuras abstractas; (iv) el estudio de las funciones, relaciones y de la variación conjunta; y (v) el uso de múltiples lenguajes en el modelado matemático y el control de los fenómenos. De esta manera, Kaput hace hincapié en la necesidad de considerar la enseñanza y el aprendizaje de álgebra desde una visión más amplia. Esta idea también es subrayada por el NCTM (2000), quien indica que los estudiantes de la escuela secundaria deben aprender álgebra, tanto como un conjunto de conceptos y destrezas relacionadas con la representación de las relaciones cuantitativas, cuanto como un estilo de pensamiento que

permite la formalización de patrones y las generalizaciones. A pesar de que el álgebra no es sólo un lenguaje, es cierto que algo de su poder proviene de la utilización de símbolos, lo que permite expresar ideas matemáticas de una manera breve y rigurosa (Sfard y Linchevski, 1994). Los símbolos también permiten guardar una distancia con los elementos semánticos a quienes representan, y convertirse en poderosas herramientas para la resolución de problemas (Rojano, 1996).
(Matos & Da Ponte: Exploring functional relationships to foster algebraic thinking in grade 8)

Kieran (1992)

En su opinión, el pensamiento algebraico se desarrolla de una manera más o menos gradual, lo que se manifiesta en la presencia de una *zona de emergencia del pensamiento algebraico*, caracterizada por la identificación y/o formulación de reglas generales mediante el lenguaje, las acciones y los gestos. En este sentido, retoma las aportaciones de Mason (1996), quien durante mucho tiempo ha considerado a la generalización, a la detección de lo general en lo particular y a la identificación de lo particular en lo general, como el corazón de la actividad algebraica, y en donde la existencia o el uso de símbolos (literales) no es esencial para la realización de las actividades recién señaladas. En otras palabras, si un alumno es capaz de formular de manera exitosa generalizaciones y de hacer distinciones entre lo general y lo particular, ya está realizando una actividad algebraica, independientemente de que haga uso o no de símbolos literales en dicha actividad. Para ser más preciso, Mason (2002) señala tres modalidades de manifestación del pensamiento algebraico en los alumnos: a) imaginar y expresar, b) especialización y generalización, y c) conjeturar y justificar. Señala que el pensamiento aritmético no se caracteriza por estas modalidades.

Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005) señalan asimismo que el pensamiento algebraico implica también: (a) Desarrollar un pensamiento relacional, es decir, apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones o ecuaciones, (b) transformar expresiones matemáticas, sin restringirse al cálculo de una respuesta concreta, (c) desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones (ej., asociativa, conmutativa, distributiva), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad).
(Ake 2015)

Radford (2010)

Asumimos esta clase de pensamiento como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Desde nuestras consideraciones filosóficas consideramos el pensamiento algebraico como un conjunto de procesos corporizados de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente. De acuerdo con Radford (2010b), una caracterización de este tipo de pensamiento está constituida por tres componentes: (a) el sentido de indeterminancia (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro) como aquello opuesto a la determinancia numérica; (b) la analiticidad*,* como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos; y (c) la designación simbólica o expresión semiótica de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos. Consideramos estas tres componentes analíticas o vectores estrechamente relacionados.

Radford (2010a) reconoce tres formas de pensamiento algebraico o estratos caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos o lenguaje natural. La tipología de formas de pensamiento algebraico propuesta por Radford está en estrecha conexión con los tres vectores o componentes analíticos que lo caracterizan. Estas formas de pensamiento algebraico son las siguientes.

Pensamiento algebraico factual. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números. Por esto, podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. Por ejemplo, el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice “aquí”, señala y dice “más dos”.

Pensamiento algebraico contextual. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases “clave”. En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice “arriba quito uno” o “dos por la figura más uno”, o “# de la figura más para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total”. Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos.

Pensamiento algebraico simbólico. Las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ ó $2n - 1$. En este estrato de pensamiento “hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica (Radford, 2010a, p. 8).

Todavía no hay una definición concisa del pensamiento algebraico y ello puede muy bien deberse a la amplia gama de objetos algebraicos (por ejemplo, ecuaciones, funciones o patrones) y los procesos y las *distintas formas posibles de concebir pensamiento en general*. La tarea de caracterizar el pensamiento algebraico es todavía ardua. Se han planteado muchas discusiones en torno al tema. Luis Radford, incluso, llama la atención sobre los debates celebrados en los años 1980 y 1990 (Radford, 2010a), en los cuales era imposible ponerse de acuerdo sobre un conjunto mínimo de características sobre este tipo de pensamiento.

No obstante, hay un consenso más o menos general en torno a dos aspectos: (i) el álgebra trata de objetos de una naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros, y (ii) en el álgebra los objetos se tratan en forma analítica, lo cual se traduce en que en álgebra se hacen cálculos con cantidades indeterminadas -es decir, sumar, restar, dividir, etc., incógnitas y parámetros- como si se conocieran, como si fueran números específicos. (Vergel, 2014)

Apoyándose en las citas anteriores, así como en sus experiencias durante el curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*, formule su propia definición de las características fundamentales del pensamiento algebraico:

Descripción de las características fundamentales del pensamiento algebraico:

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

Tarea 4. (Modalidad virtual-presencial) La introducción del álgebra en la escuela secundaria mediante la generalización de sucesiones numéricas figurales.

El estudio de los patrones en la matemática escolar no es reciente. Ya desde 1989, una influyente publicación del NCTM[9], conocida como *Estándares Curriculares y de Evaluación para las Matemáticas Escolares* (NCTM, 1989), señalaba de manera explícita que "el currículo debe incluir la exploración de pautas y funciones para que los estudiantes sean capaces de describir, extender, analizar y crear una amplia gama de pautas", así como el "usar pautas y funciones para representar y resolver problemas". Esta recomendación se sustentaba en diversas consideraciones, empezando por el papel que juega dicha exploración en el desarrollo del pensamiento matemático:

> La investigación de regularidades es un contenido procedimental general de carácter transversal con respecto a todos los contenidos de la matemática (aritméticos, geométricos, de proporcionalidad, estadísticos, probabilísticos…) y de las otras disciplinas, tanto naturales como sociales. De hecho, la ciencia se construye sobre la investigación de regularidades y sus posibilidades de generalización. (…) Es el hombre quien busca, experimenta, describe, crea y generaliza propiedades y relaciones nacidas a partir de la reflexión y la abstracción, buscando regularidades y patrones como medios para organizar su realidad.
>
> En general, toda regularidad del entorno puede ser modelizada en términos matemáticos, ya sean aritméticos, algebraicos o funcionales, del azar o de la estadística, con gráficos o fórmulas, con elementos de la geometría, etcétera. (Bressan y Gallego, 2010)

> Un caso especial de regularidades lo constituyen los *patrones*. Ellos se encuentran en los frisos, los mosaicos, las tablas de las operaciones aritméticas, los sistemas de numeración, la serie numérica convencional escrita y oral, las sucesiones de números especiales (pares, primos, compuestos, cuadrados, capicúas,…), etc.
>
> El término patrón, utilizado en algunos apartados anteriores, es la traducción de la expresión inglesa *pattern*. Se podría haber traducido por otros vocablos sinónimos como pauta, original, molde, muestra. La idea que se asocia a patrón es "*algo*" que se repite con regularidad. (Castro, 2005)

[9] National Council of Teachers of Mathematics, Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, organización fundada en 1920, y que a la fecha es la más numerosa en el mundo (alrededor de 80 000 miembros). Agrupa fundamentalmente a docentes de matemáticas, cuyo ejercicio profesional tiene lugar desde el nivel básico hasta el preuniversitario. Es una de las organizaciones profesionales de más prestigio e influencia en lo que se refiere a la enseñanza de las matemáticas. Sus recomendaciones han sido adoptadas por muchos países para aplicarlas en sus sistemas educativos.

Un ***patrón*** es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla (algoritmo), ya sea de repetición o de recurrencia.

Son patrones de ***repetición*** aquellos en los que los distintos elementos son presentados en forma periódica. Existen y se pueden crear diversos patrones de repetición teniendo en cuenta su estructura de base o *núcleo* (conjunto de elementos que se repiten periódicamente).
A B C (Do Re Mi) (triángulo - cuadrado – círculo)

Son patrones de ***recurrencia*** aquellos en los que el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión puede ser expresado en función de los anteriores, de cuyo análisis se infiere su ley de formación.
(…)
Las actividades con patrones revisten la característica de la resolución de problemas, ya que pueden ser formuladas de modo que el alumno las reconozca como situaciones problemáticas, y así estimular la generación de hipótesis, su comunicación y comprobación y la refutación o confirmación de las mismas (lo cual acerca a los alumnos al modo de pensamiento que las ciencias requieren). (Bressan y Bogisic, 1996)

Los investigadores distinguen entre diferentes tipos de patrones, por ejemplo, los clasifican en numéricos, pictóricos, geométricos, computacionales, informáticos, lineales y cuadráticos, repetitivos, recursivos, etcétera.

Recientemente, el estudio de patrones ha sido tomado como una estrategia para introducir a los estudiantes al aprendizaje del álgebra en el nivel elemental.

El uso de patrones para promover y provocar la generalización es visto por muchos como una actividad prealgebraica… El énfasis en la exploración de patrones es frecuente en los recientes acercamientos al estudio del álgebra. La búsqueda de regularidades en diversos contextos, el uso de símbolos y de variables que representan los patrones y la generalización son componentes importantes del plan de estudios de matemáticas en muchos países. (Barbosa y Vale, 2007)
La generalización de patrones es uno de los contextos en los que es posible empezar a desarrollar formas de pensamiento algebraico en la Educación Primaria. Investigaciones recientes han mostrado que los estudiantes de los primeros cursos son capaces de comprender algunos aspectos de la generalización de patrones antes de ser introducidos el álgebra formal (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Cooper y Warren, 2011; Radford, 2011; Rivera y Becker, 2011; Vergel, 2015). Estos estudios muestran la importancia de centrar la

> atención de los estudiantes de los primeros niveles en comprender patrones, relaciones funcionales, y usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones entre cantidades. (Garcia-Reche 2015)
>
> Tradicionalmente, el puente entre la aritmética y el álgebra se logra a través de patrones de crecimiento. Todos los tipos de patrones son necesarios para el desarrollo del razonamiento matemático, pero los patrones de crecimiento conducen, de una forma más natural, al descubrimiento de una relación entre dos cantidades variables, facilitando de este modo el razonamiento funcional (Lee & Freiman, 2006; Rivera y Becker, 2008). Al explorar este tipo de patrones, se solicita que los alumnos encuentren una relación entre los elementos del patrón y su posición, y que utilicen esta generalización para producir elementos en otras posiciones. Por lo tanto, son motivados a pensar en los patrones de crecimiento como funciones, en lugar de centrarse sólo en la variación de las variables. (Barbosa-Vale 2015)

De este modo, las tareas sobre generalización de patrones son consideradas como un recurso que permite formar y desarrollar en los estudiantes de matemáticas del nivel básico y medio una serie de importantes habilidades del pensamiento matemático: percibir o visualizar un patrón, describirlo, generalizarlo tanto en forma verbal como simbólica, establecer inductivamente un resultado de carácter general, etcétera. Pero también se les considera como un recurso que permite involucrar a los estudiantes en un tipo de actividad genuinamente matemática.

El estudio de patrones ha sido objeto de análisis de una gran diversidad de investigaciones educativas. El interés de estas investigaciones ha estado motivado por "la relación que existe entre la percepción y extensión de pautas, ya sean numéricas o gráficas, su relación con el concepto de función y los procesos de abstracción y generalización, tan importantes en la resolución de problemas" (García y Martiñón, 1999).

> Para resolver problemas de generalización el estudiante debe identificar, analizar y describir patrones y extraer generalizaciones apropiadas a partir de ellos… Estas habilidades son fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas y, en particular, para el aprendizaje del álgebra, hasta tal punto que los problemas de generalización se han tomado como eje central de la introducción al álgebra en muchos currículos. (Roig y Llinares, 2008)

Vemos entonces que el desarrollo de ciertas habilidades del pensamiento matemático, y particularmente del pensamiento algebraico, como las señaladas en el párrafo de arriba, están en el corazón mismo de la actividad de generalización de patrones. Steen (1998) ha resumido de manera brillante esta postura pedagógica relativa al impacto del estudio de patrones en la formación matemática del escolar: “para crecer matemáticamente, los niños deben exponerse a una rica variedad de patrones apropiados a sus propias vidas, a través de los cuales puedan ver la variedad, la regularidad y las conexiones internas”.

Butto y Rojano (2004) comparten esta apreciación:

> …la generalidad es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico. La generalización en álgebra es algo primario hacia la abstracción matemática y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades que favorecen la articulación de la generalización en situaciones cotidianas. Por consiguiente, para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar, para ello necesita percibir un patrón o una regularidad y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien.

En forma sucinta podemos decir que los patrones resultan un tópico esencial de la matemática, ya que:

- La búsqueda de regularidades (es decir, de similitudes y diferencias, de lo que permanece y lo que cambia) es lo que permite interpretar y explicar el mundo. Sin ellas no existiría la ciencia.
- Dan la idea de modelización[10], idea básica en la concepción actual de la matemática. Los patrones pueden tener diferentes representaciones: geométricas, usando figuras; métricas, usando áreas; aritméticas, usando operaciones y relaciones aritméticas; gráficas, usando representaciones; algebraica, usando la designación de valores desconocidos, lo que posibilita el pasaje de un modelo a otro (por ejemplo, se puede pasar de formas dibujadas que contienen una regularidad a expresiones numéricas, o de números a configuraciones puntuales, o de rayas a puntos y letras, etcétera).
- Conducen al proceso de generalización, es decir, a abstraer propiedades a partir de la observación y experimentación en un conjunto de ejemplos, a hacer conjeturas, a simbolizarlas para luego demostrarlas y aplicarlas en soluciones y resultados a otros problemas.
- Alientan el desarrollo de distintos puntos de vista para abordar un problema, muestran que encontrar un enfoque no implica que el problema esté concluido e, incluso, permiten generar nuevos problemas.

[10] Modelizar matemáticamente, en este contexto, significa representar elementos y relaciones existentes en un fenómeno complejo. Incluye no sólo las representaciones sino también acciones sobre las mismas e interpretaciones del significado de esas acciones en el modelo matemático y respecto al fenómeno que se modeliza (Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, NCTM, 1998).

- Son precursores de los conceptos de función, y de secuencia y serie.
- Conducen a reconocer el valor del lenguaje algebraico, tanto para expresar variables como para validar conjeturas, apoyándose en las reglas de transformación de escrituras.
- Favorecen el reconocimiento de que distintas escrituras algebraicas pueden expresar la misma relación, conjetura o fórmula (expresiones equivalentes). (Las fórmulas extraídas de los patrones están más pensadas como relaciones entre números que como maneras de contar o medir)[11].
- Integran distintos ejes de la matemática, ya que las regularidades están presentes en los sistemas de numeración, en las propiedades de los números, en el cálculo (mental, escrito y con calculadora), en la reproducción de figuras y cuerpos, en los sistemas de unidades de medida, en las relaciones funcionales, etcétera.

(Bressan y Gallego, 2010)

En particular, el enfoque de la introducción al álgebra mediante la generalización de descansa en el estudio de un tipo particular de patrones, a saber, los *patrones numéricos*.

Los problemas sobre generalización de patrones numéricos enunciados en el lenguaje numérico generalmente se presentan al estudiante como una lista o sucesión de números, que el alumno debe generalizar, como en los ejemplos siguientes:

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$$
$$7, 10, 13, 16, \cdots$$
$$2, 4, 6, 8, \cdots$$

Situación 1. Los siguientes números forman una secuencia, encuentra los números faltantes.

3, 5, 9, 15, _____ , _____ , 45, _____

Explica con tus propias palabras cómo encontraste los valores que faltaban.

Inventa dos secuencias diferentes, en donde no aparezcan algunos de sus valores. Imagina que eres un profesor o profesora de matemáticas y prepara esta actividad para tus estudiantes. Explica cuál es la clave para encontrar los valores en cada secuencia y cómo la construiste.

(Tomado de Ramírez, Pineda y Roa, 2013)

[11] Por ejemplo, las representaciones visuales de puntos, según configuraciones geométricas, representan un enlace entre la geometría y la aritmética. A través de ellas se visualizan relaciones numéricas que quedan opacadas al darse directamente los números escritos en el sistema decimal. Es necesario desterrar que lo visual no es matemático o que la visualización constituye un proceso poco válido en matemáticas.

Estos problemas también han sido formulados verbalmente, como en los siguientes ejemplos:

- *Encontrar una fórmula que genere la sucesión de todos los números impares positivos*.
- *Encontrar una fórmula o expresión algebraica para los múltiplos de* 3.

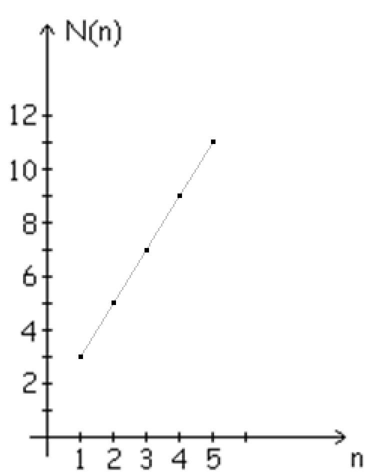
Otro formato común para estos problemas ha sido el tabular, semejante al numérico, pero con la complicación de que en este caso el alumno se encuentra ante dos listas de números, como en los ejemplos siguientes. Obviamente, se requiere también recurrir al lenguaje verbal.

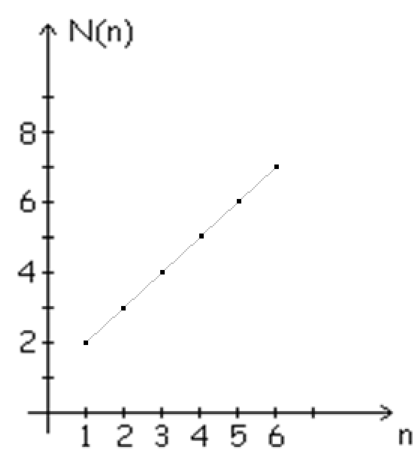
- Encontrar una fórmula o expresión algebraica que permita obtener los valores de $N(n)$ que figuran en las siguientes tablas, y también todos los demás que no se consignan.

n	$N(n)$
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
$\vdots$	$\vdots$

n	$N(n)$
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
$\vdots$	$\vdots$

Por último, los problemas aludidos también han sido planteados en el lenguaje gráfico, obviamente, acompañado del lenguaje verbal o textual. Enseguida se muestran dos ejemplos.





Como lo muestran numerosas investigaciones educativas, en todas las variantes anteriores la mayoría de los alumnos ha experimentado dificultades (a veces serias) para:

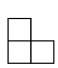
- Entender el problema planteado.
- Desarrollar una estrategia apropiada para resolverlo.
- Resolver correctamente el problema.

En el primer caso, al parecer, las dificultades están relacionadas con un débil desarrollo tanto del sentido numérico como del pensamiento lógico.

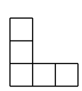
En el segundo caso, además de las dos dificultades consignadas anteriormente, está la inexperiencia del alumno para el trabajo matemático con las tablas numéricas. Habitualmente, los alumnos aprenden a tabular a partir de fórmulas, pero no a encontrar las fórmulas adecuadas para los datos numéricos contenidos en una tabla.

En el caso del planteamiento verbal o textual del problema, las principales dificultades que enfrentan los estudiantes están relacionadas con el uso deficiente del lenguaje (comprensión del texto), y particularmente con el escaso dominio de los términos matemáticos. Si expresiones como “número impar”, “múltiplo”, “sucesión”, etcétera, no tienen un significado preciso para el estudiante, es muy poco probable que éste pueda resolver correctamente el problema sobre generalización que se le plantea.

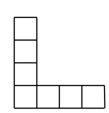
Así pues, la investigación educativa ha evidenciado que cada uno de los formatos mencionados, en los que es posible formular los problemas sobre generalización de patrones numéricos, tiene sus propias ventajas y dificultades. Una innovación en este tipo de problemas ha sido el recurrir al formato figural o icónico para plantearlos, como en los ejemplos siguientes.



L # 1



L # 2



L # 3

> Los problemas relacionados con la búsqueda de patrones y las secuencias numéricas han sido planteados, en ocasiones, en contextos pictóricos para probar con un formato alternativo a las listas de números… Considerando que la componente visual puede jugar un papel crucial en el desarrollo del razonamiento.

La representación de números naturales mediante colecciones de puntos recientemente se ha considerado como una estrategia alternativa para el estudio de los problemas sobre generalización de pautas numéricas en la escuela.

Castro (2005) define de este modo a una configuración puntual:

> Configuración puntual. Es una representación gráfica de una colección finita de puntos que responde a un propósito o a cierta intencionalidad.

Y luego aclara:

> Cuando se trata de representar números, una configuración puntual ofrece una imagen visual de la cantidad, es un modelo gráfico de representación de los mismos… Normalmente, en esta representación gráfica de los números se sigue algún criterio de estructuración, como puede ser considerar algún tipo de simetría o simular alguna figura geométrica.

Surge de esta manera el concepto de *número figurado*.

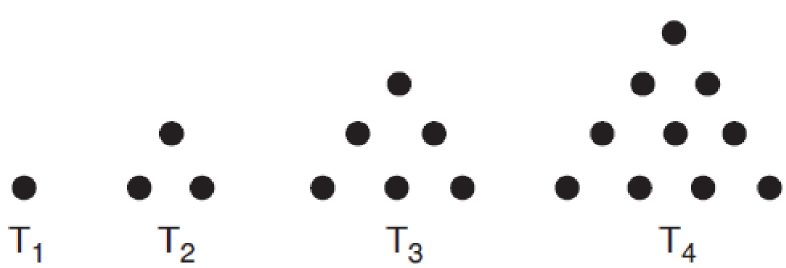
> Números figurados. Se trata de una configuración puntual que representa un cardinal, en donde el criterio de estructuración de los puntos se asemeja a una figura geométrica reconocible.

El ejemplo típico de números figurados lo constituyen los números poligonales.

> Números poligonales. Los números que se pueden organizar mediante configuraciones que son polígonos se denominan números poligonales.

Los siguientes son los ejemplos más simples de números poligonales.

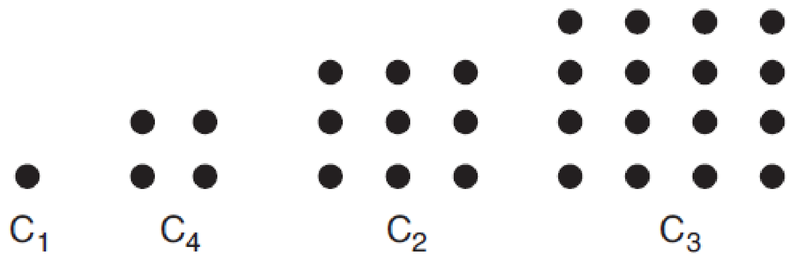
Números triangulares.



1 3 6 10

En este caso, el acomodo de los puntos sobre un triángulo isósceles no es obligatorio ni el único posible; también se puede acomodar los puntos sobre un triángulo rectángulo.

Números cuadrangulares.



1 4 9 16

Para evitar esta innecesaria distinción entre “patrones numéricos”, “patrones gráficos”, “patrones verbales” y “patrones figurales”, en este documento usaremos el término patrones numéricos. Lo que importa es que se trata de encontrar una regularidad que se presenta entre números y de expresarla algebraicamente, independientemente del formato figural en el que la información sobre esa regularidad es presentada.

En esencia, ¿en qué consiste la tarea que se plantea a los estudiantes en los problemas sobre generalización de patrones numéricos? ¿Qué es lo que normalmente se les pide que hagan?

> La presentación más recomendable para estos problemas responde generalmente al siguiente formato, que favorece un razonamiento menos forzado de los alumnos y un desarrollo más intuitivo del proceso de generalización:
>
> 1) Un *dibujo ilustrativo* que describe visualmente los primeros términos de la sucesión ($n = 1, 2, 3$), o un *enunciado contextualizado* en el que se describe la situación del problema.
> 2) Un enunciado que plantea tres cuestiones en el siguiente orden:
>   - *Cuestiones introductorias*: se pide al alumno, de forma contextualizada, el valor de la sucesión para los términos 4 o 5.
>   - *Cuestiones de generalización próxima*: se pide el valor de la sucesión para un término tal que el alumno aún puede calcularlo mediante un procedimiento de recuento directo. En este caso el alumno puede resolver el problema haciendo un recuento directo sobre el dibujo, o extendiendo la sucesión numérica hasta el término solicitado.

- *Cuestiones de generalización lejana*: se pide al alumno el valor de la sucesión para un término tal que resulta muy difícil o complejo hacerlo mediante el procedimiento de recuento directo, y para el que necesariamente debe desarrollar una expresión o fórmula general. (Tomado de Mateos 2012)

Normalmente, como reporta la mayoría de las investigaciones educativas específicas, los estudiantes no muestran grandes dificultades para resolver las dos primeras tareas (continuar la sucesión dibujando o escribiendo, y producir una generalización cercana). Sus problemas empiezan a manifestarse a partir de la tercera tarea, que requiere del uso de una terminología más precisa, con la que los estudiantes no están familiarizados, y del establecimiento de una clara relación de dependencia entre el número n del término en la sucesión numérica o figural, y el valor numérico N asociado a dicho término o figura.

Gradualmente se ha ido estableciendo la idea de que, por su importante papel metodológico en las matemáticas, los patrones numéricos lineales y cuadráticos pueden llegar a constituirse en ejes articulares del currículo de matemáticas en la enseñanza básica.

> Las sucesiones de números naturales lineales, también llamadas progresiones aritméticas (primeras diferencias constantes) admiten una representación estructurada compartida por medio de configuraciones puntuales rectangulares (o alguna variación de la misma), de base o altura constantes, de este modo sus términos pueden analizarse mediante una composición de líneas de puntos y el paso de un término a otro superior se hace por agregación de una nueva línea (fila o columna) que expresa la diferencia constante entre dos términos consecutivos de la sucesión. Las sucesiones de números tanto pares como impares, son ejemplos de ellas.
>
> Para las sucesiones de números naturales cuadráticas (de segundas diferencias constantes) la representación por medio de configuraciones puntuales, sistemas de representación que estamos tomando, conlleva que las dos dimensiones de la figura sean variables, el paso de un término al siguiente requiere del aumento en las dos dimensiones de la figura estructurada y compartida que se está considerando. Estos números, al satisfacer una *ley cuadrática*, responden a una estructura *multiplicativa de dos dimensiones*. El paso de un término de la sucesión al siguiente no es constante sino que es variable, siendo esa variación lineal. Ejemplos de sucesiones cuadráticas son las sucesiones de números poligonales, números triangulares, números cuadrados.” (Castro, 2005)

Tarea 5. (Modalidad virtual-presencial) ¿Qué significa generalizar? ¿Cuáles son los momentos o dimensiones de la actividad matemática de generalización? ¿Qué significa validar una generalización?

Analice y discuta los siguientes comentarios de los profesores:

> PA: Para mi generalizar es "comenzando en los casos particulares pasar a través de un proceso a lo general, que bien puede ser a través de una fórmula matemática o bien mediante palabras, pero siempre y cuando se pueda llegar a cualquier valor a partir de esa fórmula o expresión."
>
> PB: Creo que es muy importante tener en cuenta la explicación verbal de los alumnos como un paso previo hacia la generalización, para mí es un síntoma de que el alumno es capaz de intuir que va a haber algo que le permita encontrar cualquier figura superior que le pidan, aunque lo haga mal, pero por lo menos es consciente de que existe ese algo.
> (Tomado de Callejo-Valls 2014)

¿Expresan estos profesores claramente el significado del concepto "generalizar" en matemáticas?
¿Qué es lo que generalizan los alumnos?
¿Cuándo se puede afirmar que un alumno ha realizado una generalización?
¿Cuál es el papel que juegan el dibujo y la sucesión numérica en la generalización?
¿En qué consiste el proceso de generalización de este tipo de problemas?
¿Qué conocimiento matemático previo permite a los alumnos realizar exitosamente la generalización?
¿Qué nuevo conocimiento matemático desarrollan los estudiantes durante el proceso de generalización de patrones numéricos en figuras?

Para contestar las preguntas anteriores considera también la siguiente información.

Kaput (1999) considera que la generalización consiste en

> … extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso o casos considerados, identificando explícitamente y exponiendo similitud entre casos, o aumentando el razonamiento o comunicación a un nivel donde el foco no son los casos o situación en sí mismos, sino los patrones, procedimientos, estructuras, y las relaciones a lo largo y entre ellos (p. 136). (Citado en Merino 2013)

> Pólya (1945) sostiene que la generalización lleva a construir conocimiento a partir de la acumulación de ejemplos (casos concretos) entre los que se detecta y se sistematiza una regularidad. Usa el ejemplo siguiente para ilustrar cómo se puede llegar al descubrimiento de una propiedad. Una persona puede observar que $1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$. La pregunta de esta persona, si está interesada por el comportamiento de los números, puede ser: ¿será cierto que esto mismo ocurra con todos los números naturales? o sea ¿será cierto que $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$ es un número natural elevado al cuadrado? ¿Cuál es dicho número? (Tomado de Castro 2010)

> La generalización es considerada así mismo por Krutestskii (1976) como la habilidad para generar conocimiento matemático (objetos, relaciones y operaciones) y distingue dos niveles: la habilidad personal para ver lo general y conocido en lo que es particular y concreto, y la habilidad para ver algo general y todavía desconocido en lo que es particular y aislado. (Tomado de Castro, 2010)

La generalización, como cualquier otro proceso, sugiere el desarrollo de una serie de habilidades que dan sentido a dicho proceso y, en algunos casos, se convierten en criterios para categorizar los distintos razonamientos que en él se pueden encontrar. En este orden de ideas, Mason (1999) sugiere algunos aspectos que deben tenerse en cuenta en el proceso de la generalización, a saber: a) la visión de la regularidad, la diferencia, la relación (el *ver),* b) su exposición verbal *(decir, expresar)* y e) su expresión escrita, de la manera más precisa y sucinta posible *(registrar) .*

> 'ver' hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación (ver un patrón puede ocurrir después de un periodo de tiempo trabajando con un número de ejemplos particulares), y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común, logro que va acompañado de una sensación de regocijo. El 'decir', ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras esto que se ha reconocido. 'Registrar' es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos)... (Mason, 1999, p 17). (Citado en Villa 2006)

> La generalización de patrones, en nuestro caso identificar un patrón en una sucesión, implica según Radford (2008): (1) tomar conciencia de una propiedad común, (2) generalizar dicha propiedad a todos los términos de la sucesión y (3) usar esa propiedad común a fin de encontrar una regla que permita calcular directamente cualquier término de la sucesión. (Fernandez-Valls 2015)

El proceso de generalización requiere, secuencialmente:

- *Entender*: qué magnitudes se van a relacionar, cuáles son las magnitudes de partida necesarias para determinar la magnitud estudiada, cuál es la que interesa estudiar a partir de otras…
- *Ver*: lo que cambia y lo que permanece y cómo se relacionan. Para ello es fundamental conocer y utilizar diversas estrategias, según los casos: descomponer en partes de medida o valor conocido (*método puzzle*); completar con valores o medidas conocidas hasta obtener otro valor o medida también conocida, añadiendo, duplicando… (*método marco*); resolver ordenadamente varios casos particulares, dejando todo indicado y escrito en la forma más simple (no se debe efectuar ninguna operación), y comprobar la hipótesis para valores grandes (*método numérico*).
- *Simbolizar*: si se ha «visto» la relación, la pregunta algebraica: ¿si vale *n*?, tendrá fácil respuesta. Ahora podremos escribir algebraicamente la relación, indicando de modo claro y preciso el significado de las letras utilizadas: $B(n)$ = ——. Finalmente, convendrá ponerla en la forma más simple, para su análisis, comprobación y aplicación a casos particulares. (Gonzalez – Razones)

Pólya (1945) sugiere que el razonamiento inductivo requiere del trabajo con casos particulares, de la búsqueda de patrones basados en la regularidad observada en los casos particulares, de la formulación de una conjetura de acuerdo con el patrón, y de la comprobación posterior de dicha conjetura. Tomando en consideración estas ideas y las evidencias mostradas por algunos sujetos en nuestras investigaciones (Cañadas y Castro, 2004), proponemos un modelo de siete pasos, que describimos a continuación.

Trabajo con casos particulares. Casos concretos o ejemplos con los que se inicia el proceso. Suelen ser casos sencillos y fácilmente observables.

Organización de casos particulares. Disponer los datos obtenidos de forma que ayude a la percepción de patrones, ya sea en una tabla, en filas y columnas, con algún orden.

Identificación de patrones. El patrón, o pauta, es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse.

Formulación de conjeturas. Una conjetura es una proposición que se supone verdadera pero que no ha sido sometida a exploración. Dicha exploración puede dar como resultado su aceptación o su rechazo. Si se presenta un ejemplo para el que la conjetura no es válida, ésta se rechaza. En términos de Popper (1967), se dice que la conjetura se refuta.

Justificación de las conjeturas. Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se suele distinguir entre justificaciones empíricas y deductivas.

Las empíricas usan los ejemplos como elemento de convicción. Se vuelve comprobar con otros casos particulares.

Generalización. La conjetura se expresa de tal manera que se refiere a todos los casos de una clase determinada. Implica la extensión del razonamiento más allá de los casos particulares considerados.

Demostración. Proceso de validación formal que no deja lugar a dudas sobre la validez de la conjetura que se trata de probar y que la determina inequívocamente.

[Villa 2006] sobre la validación de una generalización.
Algunos investigadores se han preocupado por los procesos de validación en la generalización, así por ejemplo Radford (1996) llama la atención argumentando que desde el punto de vista didáctico es preciso tomar en cuenta que la generalización depende de los objetos matemáticos que se estén generalizando y agrega que la generalización no es una actividad libre de contexto pues hay tipos de generalizaciones que pueden ser todos muy diferentes.

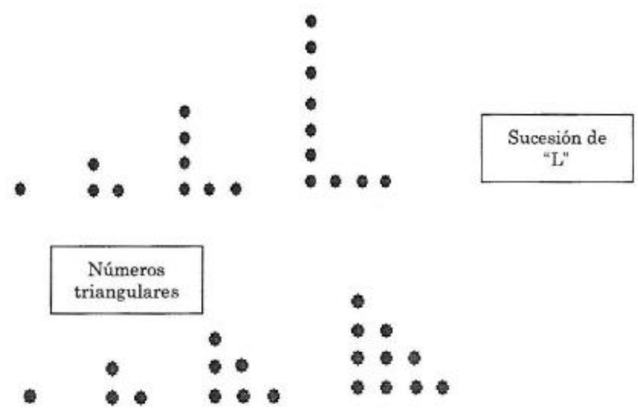
Es necesario entonces dedicar tiempo a generar reflexiones en torno a la naturaleza y validación de los procesos de generalización en patrones aritméticos y geométricos [1]; aquí algunas de ellas: La generalización en patrones geométricos parece tener unas características particulares y significativamente diferentes a la generalización en patrones aritméticos. En primer lugar podemos ver que en los patrones geométricos es posible identificar una serie de “variables visuales” que en los patrones aritméticos por naturaleza misma no existen. Algunas de estas variables son el agrupamiento y la distribución.

Variable "Agrupamiento": cuando se presenta a los estudiantes una secuencia geométrica es imposible predecir una única forma de asociar o agrupar las diferentes unidades del patrón; existen variadas formas de asociar los elementos de un patrón geométrico, cada una de las cuales orientaría el proceso de generalización a alcanzar determinado tipo de expresión simbólica…

Es importante notar que todas las expresiones obtenidas en las diferentes formas de agrupación resultan ser equivalentes; este hecho parece ser lo suficientemente convincente *para justificar* este proceso de generalización, de hecho, Azarquiel (1993:43) afirma que "el término general de una serie de figuras se puede obtener mediante varias expresiones pero que son algebraicamente equivalentes. Precisamente esta equivalencia es la que se puede colocar de manifiesto y *servir de demostración* en un cierto sentido, al construir distintas expresiones que describen una misma realidad" [2]. La incertidumbre con respecto a la validez en la expresión simbólica, parece resuelta en este patrón por medio de la "variable agrupamiento". Sin embargo es preciso plantearse la pregunta ¿con

cualquier tipo de agrupamientos en la secuencia, se obtendrán "siempre" expresiones equivalentes?
(...)

Variable "Distribución" es común encontrar diferentes tipos de patrones que al tratar de generalizarlos pueden llevar a una misma expresión simbólica; por ejemplo, los dos siguientes patrones pueden obedecer a la expresión $\frac{n(n+1)}{2}$.



En ambas sucesiones es posible observar que con una reorganización de las piezas de una de las figuras se puede obtener la otra, y de esta forma cualquier expresión general para una de ellas es también una expresión para la otra.

Actividad 2.

(Modalidad virtual-presencial) Procesos cognitivos asociados con la generalización algebraica de sucesiones numéricas figurales.

Tarea 6. (Modalidad virtual) Evocación de la experiencia personal y grupal alrededor de una tarea de álgebra elemental.

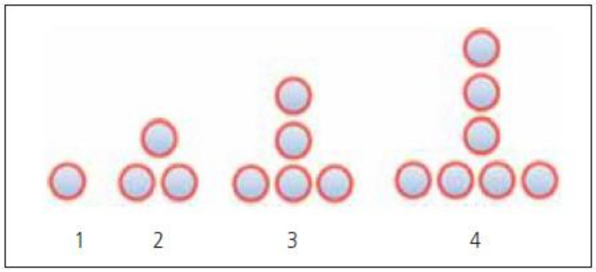
Haga un esfuerzo por evocar los momentos, etapas o fases decisivas durante la resolución de *El problema de los cables de acero* en el Curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*. Describa y caracterice el proceso completo de generalización de la tarea planteada en dicho problema, realizado por usted y su equipo.

Tarea 7. (Modalidad virtual) Análisis de las producciones de los alumnos.

Describa, caracterice y compare el proceso de generalización realizado por algunos alumnos, cuyas respuestas y razonamientos se muestran en los siguientes apartados.

a) Describa cómo ha resuelto cada alumno el problema planteado, en relación con el proceso de generalización.
b) Agrupe a los alumnos que presentan características comunes o similares en cuanto al desarrollo del proceso de generalización.
c) Caracterice cada uno de los subgrupos de alumnos.
d) Compare los subgrupos: indique en qué rasgos se diferencian o distinguen entre sí.

Opción A.

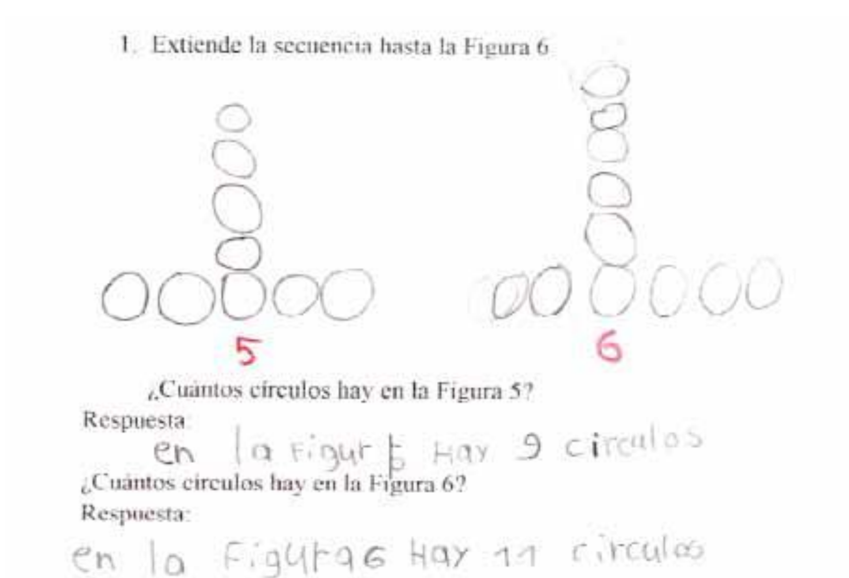


1. Extiende la secuencia hasta la Figura 6.
   ¿Cuántos círculos hay en la Figura 5?
   Respuesta:

   ¿Cuántos círculos hay en la Figura 6?
   Respuesta:

2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica.
3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla.
4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 19 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar la respuesta.

Respuestas del alumno A1:


1. Extiende la secuencia hasta la Figura 6

5 6

¿Cuántos círculos hay en la Figura 5?
Respuesta:
en la Figur 5 Hay 9 circulos
¿Cuántos círculos hay en la Figura 6?
Respuesta:
en la Figura6 Hay 11 circulos

2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de circulos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica

Profe .si se puede porque viendo las anteriores el 6 tiene 6 circulos abajo y arriba tiene 5 circulos pues yo creo que la 15 tiene 15 circulos abajo y 14 circulos arriba.

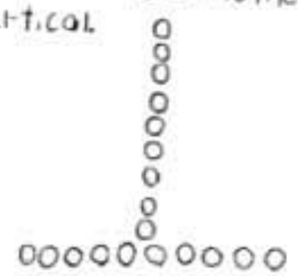
29 circulos.

3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla.

mateo tiene que hacer 25 circulos orisontal y 24 vertical.

4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 19 circulos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.

como santiago tiene 19 circulos yo creo que toca repartir ese número 10 sería orisontal y 9 vertical.



Respuestas del alumno A2

2. ¿Hay alguna manera de encontrar el número de círculos en la Figura 15, sin construir la Figura? Explica Si porque como la Figura 15 tien 15 circulos abajo aese 15 le quito 1 y me da catorce y si a ese 15 le sumo los 14 queme dio de la resta ese es el resultado y el resultado es 29

$$\begin{array}{r} 15 \\ +14 \\ \hline 29 \end{array}$$

3. Mateo quiere construir la Figura 25. Explica lo que debe hacer para construirla. profe yo ona primero tene que poner 25 circulos orizontal y como al 25 le tengo que restar 1 pongo 24 circulos verticalmente

4. Santiago tiene una Figura de esta secuencia. Él usó exactamente 19 circulos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta. la Figura es 10 porque si pongo 10 de esos 19 circulos abajo a ese 10 le quito 1 y como quedo nueve y como antes tenia 19 ya ese 19 le quite 10 le quedan 9 y ese nueve lo pongo vertical mente en forma de circulos

Ejemplo tomado de Vergel (2015)

Opción B.

Problema 2

Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión:

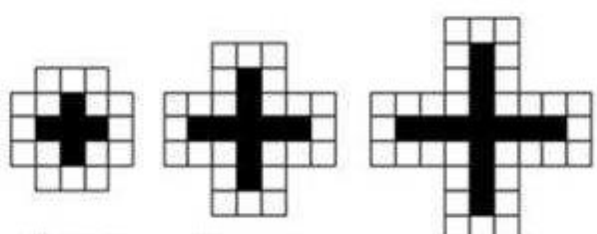
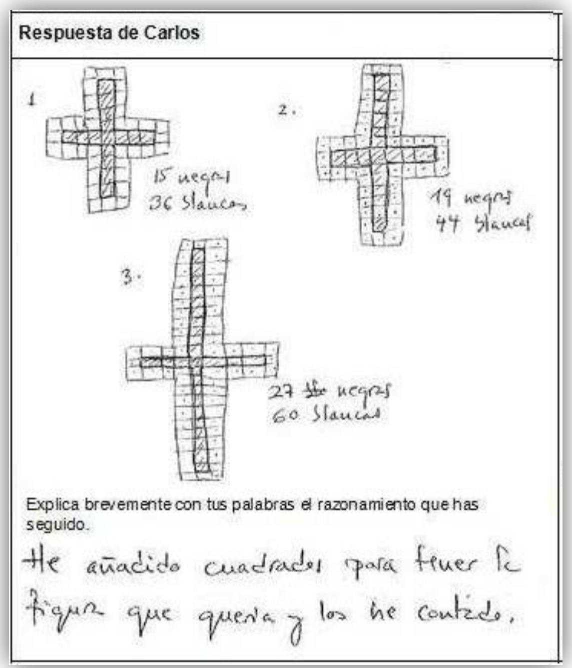


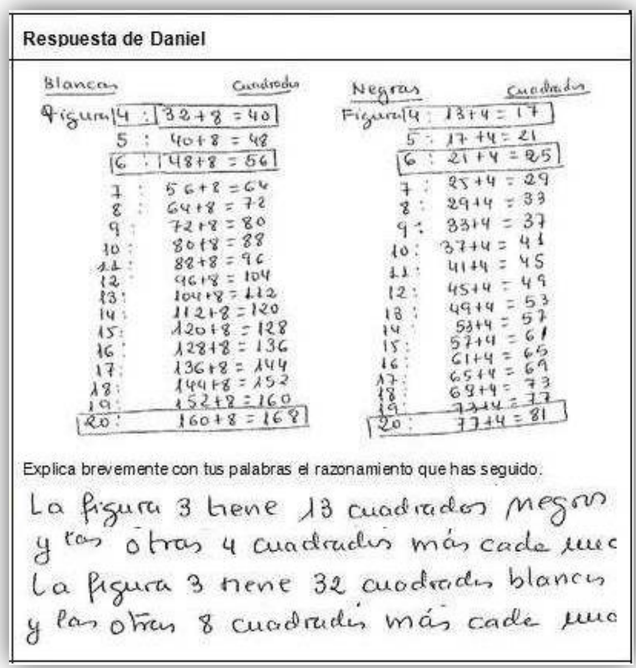
Figura 1 Figura 2 Figura 3

1. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos cuadrados blancos y negros se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados negros.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de cuadrados blancos.

Respuestas del alumno B1 (Carlos)



Respuestas del alumno B2 (Daniel)


Respuesta de Daniel

Blancas	Cuadrados	Negras	Cuadrados
Figura 4 :	32+8 = 40	Figura 4 :	13+4 = 17
5 :	40+8 = 48	5 :	17+4 = 21
6 :	48+8 = 56	6 :	21+4 = 25
7 :	56+8 = 64	7 :	25+4 = 29
8 :	64+8 = 72	8 :	29+4 = 33
9 :	72+8 = 80	9 :	33+4 = 37
10 :	80+8 = 88	10 :	37+4 = 41
11 :	88+8 = 96	11 :	41+4 = 45
12 :	96+8 = 104	12 :	45+4 = 49
13 :	104+8 = 112	13 :	49+4 = 53
14 :	112+8 = 120	14 :	53+4 = 57
15 :	120+8 = 128	15 :	57+4 = 61
16 :	128+8 = 136	16 :	61+4 = 65
17 :	136+8 = 144	17 :	65+4 = 69
18 :	144+8 = 152	18 :	69+4 = 73
19 :	152+8 = 160	19 :	73+4 = 77
20 :	160+8 = 168	20 :	77+4 = 81

Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido.

La figura 3 tiene 13 cuadrados negros y las otras 4 cuadrados más cada una
La figura 3 tiene 32 cuadrados blancos y las otras 8 cuadrados más cada una

Respuestas del alumno B3 (Fernando)

Respuesta de Fernando

(1) Negras $13+4=17$ Blancas $32+8=40$

(2) Negras $17+4+4=25$ Blancas $40+8+8=56$

(3)
$$\left.\begin{array}{l} 2^{a} \text{ Figura} \rightarrow 9 \text{ negras} \\ 20^{a} \text{ Figura} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{20 \cdot 9}{2} = 90 \text{ negras}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a} \text{ Figura} \rightarrow 24 \text{ blancas} \\ 20^{a} \text{ Figura} \rightarrow x \end{array}\right\} x = \frac{20 \cdot 24}{2} = 240 \text{ blancas}$$

(4)

(5)

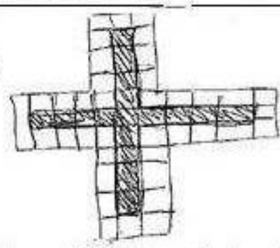
Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido.

Primero he sumado 4 negras y 8 blancas a cada figura para formar el siguiente. Luego igual que en el problema 1 he usado la regla de tres para hallar la figura 20.

Respuestas del alumno B4 (Ana)

Respuesta de Ana

(1)



17 negros y 40 blancas

(2) Negras $6 \times 4 = 24$ $24+1=25$

Blancas $7 \times 8 = 56$ $56+4=60$

(3) Negras $20 \times 4 = 80$ $80+1=81$

Blancas $21 \times 4 = 84$ $84+4=88$

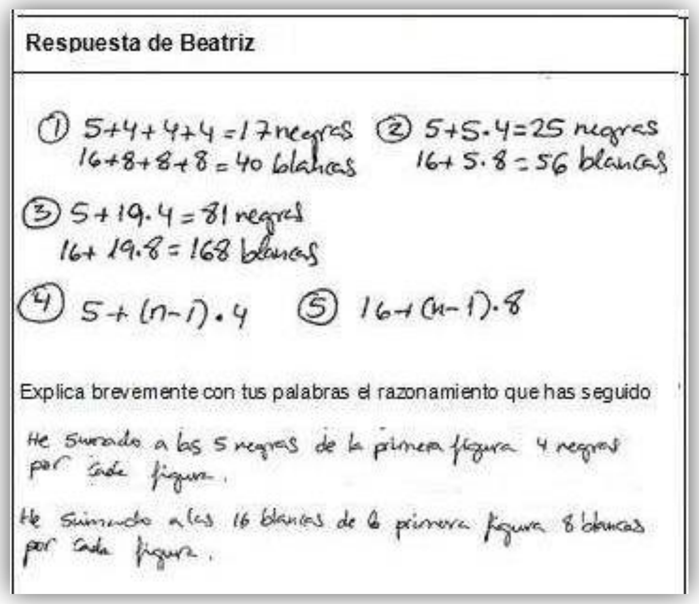
Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido.

He hecho un dibujo para la figura 3, pero en los otros casos he calculado.

Me he fijado en que la cruz negra tiene 4 partes y el cuadrado donde se juntan.

Para contar las blancas me he fijado en que tiene 8 partes y 4 cuadrados de las puntas.

Respuestas del alumno B5 (Beatriz)



Respuesta de Beatriz

① $5+4+4+4=17$ negras ② $5+5\cdot 4=25$ negras
$16+8+8+8=40$ blancas $16+5\cdot 8=56$ blancas

③ $5+19\cdot 4=81$ negras
$16+19\cdot 8=168$ blancas

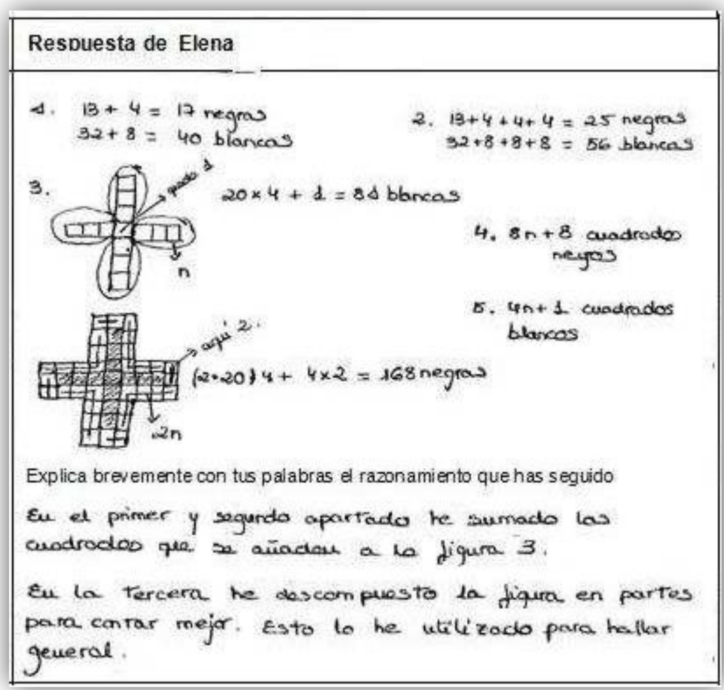
④ $5+(n-1)\cdot 4$ ⑤ $16+(n-1)\cdot 8$

Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido

He sumado a las 5 negras de la primera figura 4 negras por cada figura.

He sumado a las 16 blancas de la primera figura 8 blancas por cada figura.

Respuestas del alumno B6 (Elena)



Respuesta de Elena

1. $13+4=17$ negras
$32+8=40$ blancas

2. $13+4+4+4=25$ negras
$32+8+8+8=56$ blancas

3. $20\times 4+1=81$ blancas

$(2\cdot 20)4+4\times 2=168$ negras

4. $8n+8$ cuadrados negros

5. $4n+1$ cuadrados blancos

Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido

En el primer y segundo apartado he sumado los cuadrados que se añaden a la figura 3.

En la tercera he descompuesto la figura en partes para contar mejor. Esto lo he utilizado para hallar general.

Tarea 8. (Modalidad virtual) Continuación de la reflexión teórica: estrategias de resolución y procesos cognitivos en la generalización algebraica de sucesiones numéricas figurales.

La investigación en Matemática Educativa ha mostrado que, para resolver problemas relacionados con la generalización algebraica de sucesiones numéricas figurales, los alumnos recurren a distintas *estrategias de solución*. Entre las más frecuentemente reportadas en dichos trabajos de investigación podemos enumerar las siguientes.

- *Estrategia visual*: las acciones del alumno se desarrollan sobre el dibujo que acompaña al enunciado del problema. El alumno analiza el dibujo, hace cálculos o conteos, trata de encontrar la pauta o el patrón apoyándose en el dibujo. La solución que presenta depende y se apoya fuertemente en el dibujo.
- *Estrategia numérica*: las acciones del alumno se centran en los términos de la sucesión y sus respectivos valores numéricos, a partir de los cuales intenta obtener la regla que genera todos los términos. Prácticamente, el único papel del dibujo es el de ilustrar el correspondiente valor numérico.
- *Estrategia mixta*: las acciones del alumno se centran en los términos de la sucesión y sus respectivos valores numéricos, pero comprueba la validez de sus cálculos recurriendo al dibujo.

El problema de la visualización en el contexto de las sucesiones numéricas figurales

Stacey (1989) concluyó en su estudio que “el dibujo juega un cierto papel en el método empleado por los alumnos en la resolución de las tareas” (citado por García y Martiñón, 1999). Análogamente, Redden (1994; citado por García y Martiñón, 1999) señaló que “ciertas respuestas de los alumnos están claramente influenciadas por el diagrama que acompaña al ítem”.

Este papel esencial del diagrama consiste en que, al parecer, induce en los estudiantes una cierta estrategia para abordar y resolver el problema de la generalización del patrón numérico, a la que se ha denominado “estrategia visual”, por estar fuertemente influida e incluso determinada por el dibujo.

Este enfoque teórico ha sido desarrollado hasta instancias prácticas, en la intención de que sea útil como herramienta de investigación, y se usa para fijar criterios operativos que permitan decidir cuándo un alumno ha resuelto el problema de la generalización del patrón numérico mediante una estrategia visual.

> ¿Cuándo consideramos que un alumno ha usado una estrategia visual? Como ya indicamos, siguiendo a Presmeg (1986), entendemos que un alumno ha usado una estrategia visual si, en el problema de obtención de la regla de cálculo, el dibujo juega un papel esencial… Según este criterio, las explicaciones que incluyen sólo las palabras tamaño, árbol o escalera, que son palabras que aparecen en los enunciados, no las consideramos incluidas en la estrategia visual. Por otro lado, cuando en la explicación se utilizan palabras como *partes laterales*, *líneas laterales*, *partes de abajo*, *partes de arriba*, *cúspide*, *triángulo*, *nivel*, *capa*, *punto de arriba*, *pisos uno debajo del otro*, *medios triángulos* y similares, que no aparecen explícitamente en los enunciados y que indican claramente una referencia a elementos de la escalera o del árbol, hemos considerado que tal respuesta sí se corresponde con una estrategia visual. (García y Martiñón, 1999).

En un trabajo reciente, Chalé y Acuña (2013) exploran el papel y el funcionamiento de la visualización en la generalización de patrones. Señalan que habitualmente en muchas investigaciones "se da por hecho que el estudiante rápidamente observa cuáles son los cambios entre dos figuras consecutivas", cosa que luego las mismas investigaciones constatan que está lejos de ser así, y que la visualización de los detalles que son relevantes para la generalización es demasiado problemática para la mayoría de los alumnos: "existe una desconexión entre lo que se ve y lo que se está generalizando". En su estudio concluyen que "suponemos que se requiere desarrollar cierta habilidad para realizar esta tarea y que ésta puede ser adquirida".

> La importancia dada a la visualización en el aprendizaje de las matemáticas se basa en el hecho de que ésta no se restringe a la mera ilustración de las ideas, sino que también es reconocida como un componente del razonamiento (Vale, Pimentel, Cabrita, Barbosa y Fonseca, 2012). Aunque no es una tarea fácil, la integración de enfoques visuales es sugerida en las experiencias matemáticas que se proveen a los estudiantes (NCTM, 2000). Hay dos grandes retos en esta situación: la mayoría de los estudiantes asocian las matemáticas con la manipulación de números, expresiones numéricas y algoritmos, lo que pueden contribuir a la desvaloración de la visualización; por otro lado, los profesores deben tener en cuenta que hay muchas formas de ver (Duval, 1998). Las características visuales pueden ser captadas de dos maneras: perceptiva y discursivamente. La aprehensión perceptual de las figuras se produce cuando éstas son vistas como un todo. La aprehensión discursiva implica la identificación del arreglo espacial de los elementos que componen la figura, ya sea individualmente o en relación el uno con el otro, como una configuración de objetos que están relacionados mediante un atributo o característica invariante. (Barbosa-Vale 2015)

Percibir un patrón es necesariamente el primer paso en la búsqueda de una regularidad; sin embargo, los estudiantes deben tener la agilidad perceptiva para ver el patrón de varias maneras, lo que les permite desechar aquellas que no son útiles. Con este apoyo será más fácil, para el estudiante que explora el patrón, producir una ley general que traduzca matemáticamente la estructura del modelo subyacente (Vale y Pimentel, 2013). Podemos decir que los patrones visuales pueden contribuir a generar diferentes reglas que estimulen: el establecimiento de conexiones entre las relaciones aritméticas y geométricas; la asignación de significado a las reglas formuladas; la necesidad de formular y validar conjeturas. De este modo, trabajar con relaciones funcionales mediante los patrones figurales de crecimiento puede potenciar la atribución de significado a las operaciones que transforman la variable independiente sobre la variable dependiente. Por lo general, hay diferentes maneras de expresar la relación entre dos variables en este tipo de tareas, lo que les convierte en contextos privilegiados para analizar múltiples estrategias y reglas de generalización, así como para explotar la equivalencia de expresiones, lo que contribuye a un razonamiento más flexible (Barbosa, 2011). En este sentido, los patrones figurales pueden ser un contexto que facilite el razonamiento funcional, promoviendo diferentes formas de ver y generalizar (Becker & Rivera, 2005; Lannin, Barker y Townsend, 2006).

En el contexto de los patrones figurales, los estudiantes que son capaces de analizar las figuras discursivamente, pueden hacerlo de diferentes maneras: identificando conjuntos disjuntos de elementos que se combinan para construir la figura inicial, formulando una generalización constructiva (Rivera y Becker, 2008); o bien observando la presencia de subconjuntos superpuestos, contando algunos elementos más de una vez, y que posteriormente se restan, lo que significa que la generalización se formula en una forma deconstructiva (Rivera y Becker, 2008). Varios estudios han concluido que los estudiantes tienden a usar más frecuentemente las generalizaciones constructivas que las deconstructivas (por ejemplo Barbosa, 2011; Rivera y Becker, 2008), ya que esta última categoría implica un nivel cognitivo superior con respecto a la visualización. (Barbosa-Vale 2015)

Algunos procesos cognitivos

Las investigaciones sobre cómo alumnos de Primaria resuelven problemas de generalización de patrones lineales han puesto de relieve el papel relevante que juegan en el proceso de generalización de patrones los siguientes elementos matemáticos:

- *Coordinación entre estructura espacial y numérica*: Para extender una secuencia de figuras, el estudiante debe captar una regularidad ligada a la coordinación de las estructuras espacial y numérica. La estructura espacial emerge de la distribución de elementos de cada figura y la numérica del número de elementos en cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010).

- *Relación funcional*: Para identificar un término lejano (o no especificado) es preciso establecer la relación entre la posición de una figura y la cantidad de elementos que la forman (Radford, 2011).
- *Proceso inverso*: Para identificar la posición de una figura conocido el número de elementos que la forman se debe establecer una relación funcional inversa de la anterior. Muchos estudiantes son capaces de establecer la relación entre la posición de una figura y su número de elementos, pero les cuesta revertir el pensamiento (dado el número de elementos de una figura identificar su posición) (Warren, 2005; Merino, Cañadas y Molina, 2013).

(Zapatera 2015)

La acción de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una *aprehensión cognitiva*. Esta acción no es unívoca, pues hay diferentes formas de "ver" un dibujo o de interpretar un estímulo visual. Duval (1993) distingue cuatro formas de aprehensión cognitiva (Figura 1):

- *Aprehensión perceptiva*. Se caracteriza por la identificación de una configuración, en el plano o en el espacio, sin asociarle ninguna afirmación matemática. En esta forma de aprehensión se pueden percibir varias sub-configuraciones. Por ejemplo la configuración mostrada en la Figura 1 se puede ver como cuadrados consecutivos rodeados de arcos de circunferencia, como la decoración de un mantel, etc.

- *Aprehensión secuencial*. Se produce cuando hay que construir una configuración o describir su construcción. En este caso las diferentes sub-configuraciones emergen en un orden que están en relación con las propiedades matemáticas. Por ejemplo en la Figura 1 la aprehensión secuencial puede emerger de reconocer que la construcción (mental o física) del término siguiente requiere introducir un cuadrado y dos arcos.

- *Aprehensión discursiva*. Se produce una asociación de las configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades…) que determinan el objeto representado. Por ejemplo a la configuración De la Figura 1 se le puede asociar la expresión "4 cuadrados están rodeados de 2 x 4 arcos arriba y abajo, más 2 arcos en los extremos, en total 10 arcos."

- *Aprehensión operativa*. Se caracteriza por la realización de alguna modificación en la configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorganizándolos. Por ejemplo podemos modificar la configuración inicial de la Figura 1, separando un cuadrado del extremo izquierdo y los arcos que lo rodean, y añadiéndole un arco del extremo derecho.

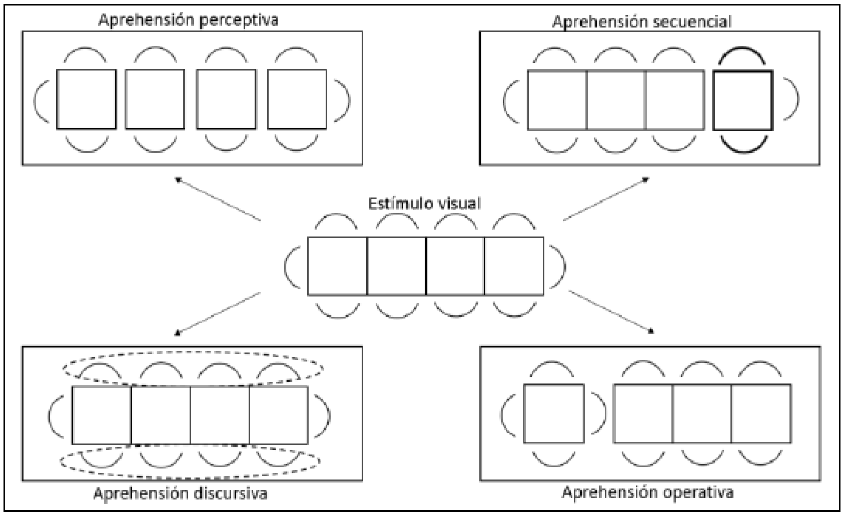


Figura 1. Ejemplos de aprehensiones. Adaptado de Samson y Schäfer (2011, p. 39)

(Tomado de García-Reche, 2015)

Un problema fundamental: la expresión del término general

La predominancia de la generalización verbal hace cobrar importancia a otras formas de expresar la generalización, diferentes a la algebraica. A la luz de los resultados, cabe pensar que la generalización verbal es una forma más accesible para estos estudiantes que la algebraica. (Cañadas y Castro, 2006)

La capacidad de continuar un patrón viene mucho antes que la capacidad para describir el término general. Sin embargo, el reconocimiento de un patrón no lleva necesariamente a una generalización (Zazkis & Liljedahl, 2002), y expresar con palabras una generalización no lleva necesariamente a una generalización en forma algebraica. (Amit y Neria, 2007)

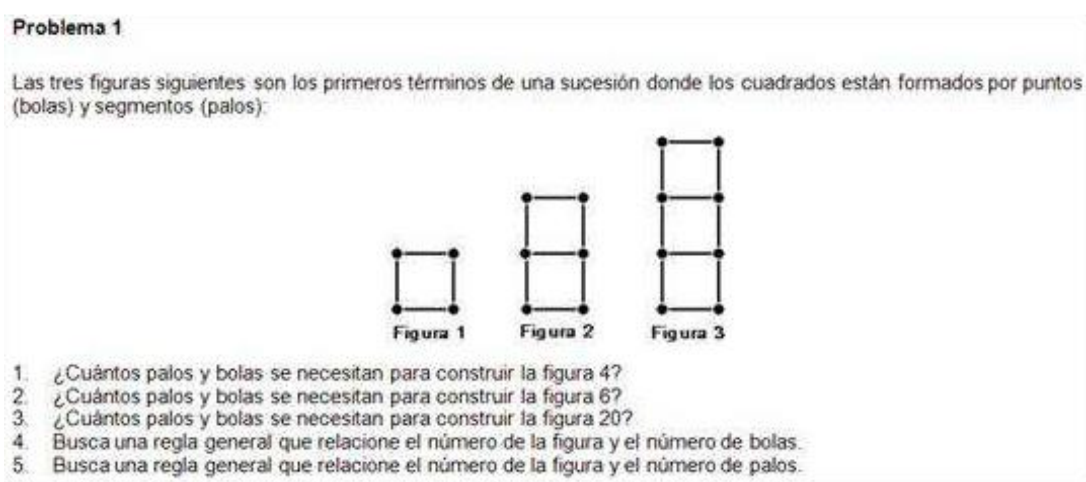
La expresión del término general de una secuencia de naturales presenta grandes dificultades de comprensión y es un punto al que muchos escolares son incapaces de dotar de significado adecuado por el alto grado de abstracción que supone. ¿Qué significa término general de una sucesión? El término general es la expresión algebraica de la ley que satisfacen todos los términos, en función del ordinal correspondiente. El término general de una sucesión expresa la estructura que comparten todos sus términos cuando se les considera como elementos ordenados de un conjunto. Su modo usual de expresión es mediante notación algebraica… Sin embargo, esta noción de estructura común o estructura que comparten todos los términos de la sucesión no se pone de manifiesto analizando las relaciones entre dos o tres términos consecutivos.
Disponer de varios números escritos en el sistema decimal de numeración no permite apreciar la estructura común que tienen; para conocer tal estructura es necesario que los

números estén escritos mediante un desarrollo aritmético compartido, mejor aún, que se presenten mediante una configuración puntual que se ajuste a un mismo patrón. (Castro, Rico, Romero; 1997)

Un componente necesario de la generalización algebraica según Kieran (1989, 2006, 2007) es el uso del simbolismo algebraico para razonar sobre la generalización y expresarla. Según Kieran (1989, p, 165), “para una caracterización significativa del pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, se debe ser capaz de expresarlo algebraicamente”. El simbolismo algebraico es el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, “el lenguaje que expresa la generalidad” (Mason, 1996). No obstante, la naturaleza de dicho lenguaje puede ser diversa. Hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad. English & Warren (1998) sostienen que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones.
(Vergel, 2014)

Identifique y describa algunos procesos cognitivos, indispensables para la elaboración de estrategias de resolución, y para la generalización exitosa de un problema sobre sucesiones numéricas figurales realizados por algunos alumnos, cuyas respuestas y razonamientos se muestran a continuación.

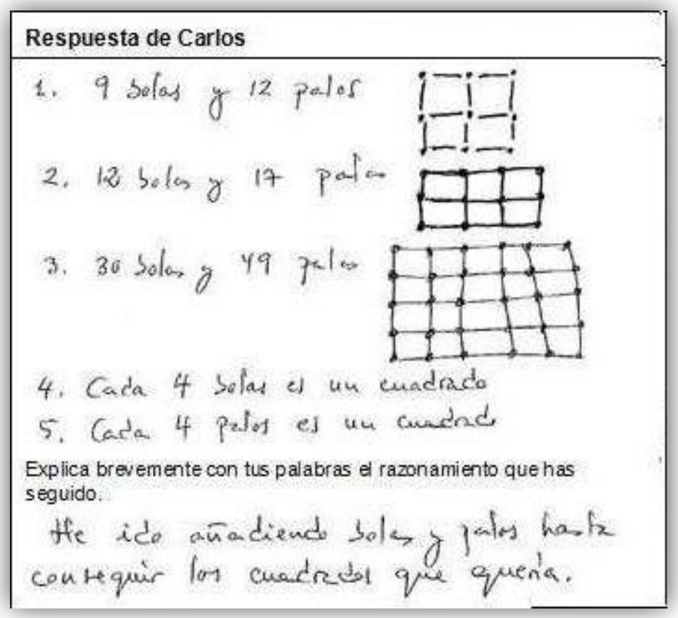
a) ¿Qué tipo de estrategia de resolución ha utilizado cada alumno?
b) Identifique los elementos matemáticos que están presentes en el proceso de generalización.
c) ¿Qué forma de aprehensión cognitiva han utilizado sobre el dibujo?
d) Tipo de generalización que reporta cada alumno.


Problema 1

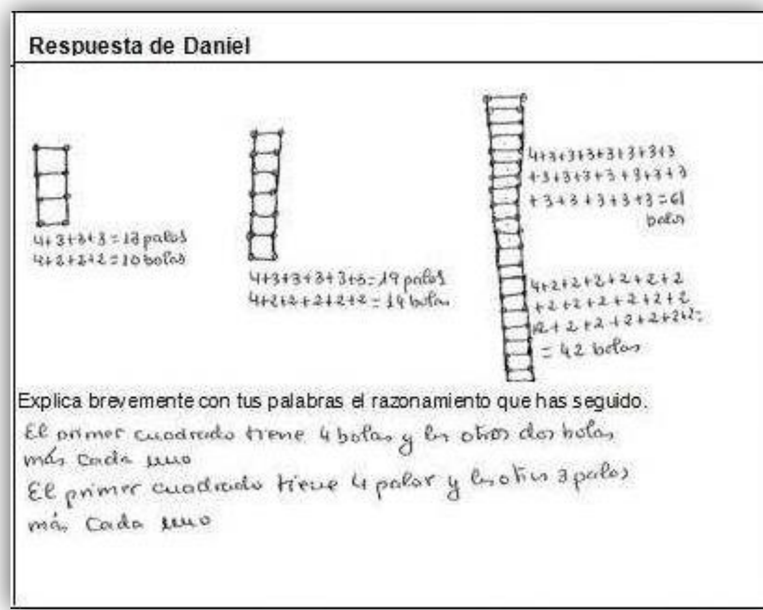
Las tres figuras siguientes son los primeros términos de una sucesión donde los cuadrados están formados por puntos (bolas) y segmentos (palos):

1. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 4?
2. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 6?
3. ¿Cuántos palos y bolas se necesitan para construir la figura 20?
4. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de bolas.
5. Busca una regla general que relacione el número de la figura y el número de palos.

Respuestas del alumno 1 (Carlos)



Respuestas del alumno 2 (Daniel)



Respuestas del alumno 3 (Fernando)

Respuesta de Fernando

① Bolas → 8+2 = 10 bolas Palos → 10+3 = 13 palos
② Bolas → 10+2+2 = 14 bolas Palos → 13+3+3 = 19 pal.
③ 2ª figura → 6 bolas; 20ª figura → x $x = \frac{20 \cdot 6}{2} = 60$ bolas
2ª figura → 7 palos; 20ª figura → x $x = \frac{20 \cdot 7}{2} = 70$ palos
④
⑤

Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido.

Lo primero que hecho ha sido sumar 2 bolas y 3 palos por cada cuadrado que me pedían, luego me he dado cuenta que con una regla de tres también se podía hacer

Respuestas del alumno 4 (Ana)

Respuesta de Ana

①  10 bolas y 13 palos

② 8+4×3 = 8+12 = 20 bolas
10+4×3 = 10+12 = 22 palos

③ 8+4×17 = 8+68 = 76 bolas
10+4×17 = 10+68 = 78 palos

Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido

En el primero he hecho un dibujo.
En el segundo y el tercero me he fijado en la figura 3 en que un cuadrado tiene 4 bolas y 4 palos, y se lo he añadido.

Respuestas del alumno 5 (Beatriz)

Respuesta de Beatriz

① $4+2+2+2=10$ bolas

② $4+5\cdot 2=14$ bolas
$4+5\cdot 3=19$ palos

③ $4+19\cdot 2=42$ bolas
$4+19\cdot 3=61$ palos

④ $4+(x-1)\cdot 2$

⑤ $4+(x-1)\cdot 3$

Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido

He sumado a las 4 bolas del primer cuadrado, 2 bolas por cada cuadrado.

He sumado a los 4 palos del primer cuadrado, 3 palos por cada cuadrado.

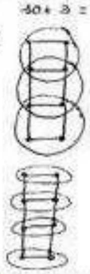
Respuestas del alumno 6 (Elena)

Respuesta de Elena

1. $8+2=10$ bolas
$10+3=13$ palos

2. $8+2+2+2=14$ bolas
$10+3+3+3=19$ palos

3.



$20\times 4-19=80-19=61$ palos

$21\times 2=42$ bolas

5. Número de palos
$4\cdot n-(n-1)$

4. Número de bolas
$2\cdot(n+1)$

Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido.

En el primer y segundo apartado he sumado las bolas o los palos que se añaden.

En el tercer apartado he calculado los palos que tienen 20 cuadrados y luego he restado los que he contado dos veces

Para calcular las bolas he multiplicado 2 por 21 filas de 2 bolas

Actividad 3.

(Modalidad virtual) El papel y las funciones de las tecnologías digitales matemáticas, como mediadoras del aprendizaje de la generalización algebraica de sucesiones numéricas figurales en la escuela secundaria.

Tarea 9. (Modalidad virtual) ¿Qué dispositivos didácticos y tecnológicos se requieren para desarrollar una infraestructura didáctico-matemática adecuada para el estudio del álgebra elemental a partir de los problemas de generalización de sucesiones numéricas figurales?

Retome una vez más las experiencias vividas durante la resolución de las distintas actividades que, conjuntamente con su equipo, abordó usted durante la Secuencia 2 del curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*. Apoyándose en dichas vivencias, reflexione y trate de formular una respuesta a la pregunta que da nombre a la presente tarea. Tome también en consideración la siguiente información.

> La noción de mediación es analíticamente importante. De acuerdo con Vygotski, la presencia de estímulos creados, junto con estímulos dados es la característica diferencial de la psicología humana. Como lo señalan Cole & Wertsch (1996), los instrumentos o herramientas psicológicas recrean y reorganizan la estructura del comportamiento humano. Un corolario de esta argumentación podríamos enunciarlo de la siguiente manera: *los instrumentos o recursos con los cuales se realiza la actividad matemática condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o re-significan dicha actividad y desde luego las maneras de pensar*.
> (Vergel, 2014)

> El desarrollo de los entornos tecnológicos está asociado en los últimos años a la creciente implementación de las múltiples representaciones y a la incorporación de los Programas de Cálculo Simbólico (PCS) (Computer Algebra System, CAS) que generan nuevas aproximaciones al Álgebra escolar.
>
> Se observa con relación a la enseñanza del Álgebra, que los recursos tecnológicos amplían la consideración habitual del Álgebra como un lenguaje. La facilidad de obtener diferentes

formas de representación para expresar relaciones cuantitativas influirá tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del Álgebra.
El potencial del ordenador para crear ambientes de aprendizaje que difícilmente podrían ser logrados sin disponer de este recurso está fuera de duda. Estos ambientes computacionales requieren, unas veces, la elaboración de programas o códigos para establecer secuencias que permiten desarrollar aspectos operacionales del conocimiento algebraico, así como hacer predicciones. Otras, estos ambientes se centran en las relaciones entre distintas representaciones de objetos matemáticos, poniendo énfasis en los aspectos estructurales, y a veces combinan ambos.

Podemos decir que la investigación en ambientes computacionales es un dominio emergente de la investigación en pensamiento algebraico, pero que está aún en sus inicios al no disponer de información respecto a los efectos en el aprendizaje a largo plazo.

Las investigaciones en entornos tecnológicos enfatizan que la inserción de los Programas de Cálculo Simbólico (PCS) en las clases de Álgebra no elimina las técnicas algebraicas de lápiz y papel, sino todo lo contrario, y que el uso de esta tecnología como herramienta didáctica generan discusiones matemáticas que generalmente no ocurren en las clases de Álgebra cuando solamente se utilizan lápiz y papel, pero advierten, también, que en estas discusiones el papel del profesor es de crucial importancia. (Socas, 2011)

Desde este punto de vista, se puede apreciar que la visualización matemática tiene un rol importante. Esta visualización es el primer motor para la articulación entre la aritmética y el álgebra y, más precisamente, entre los procesos de construcción de una estructura de control que actúe sobre la actividad matemática en los estudiantes de secundaria.

Esta estructura de control permitirá a los alumnos descubrir contradicciones (contradicción cognitiva, percibida por un estudiante particular y no señalada por el experto, en este caso, el profesor. Ver p.e. Hitt, 2004, p. 341). Los conflictos que el estudiante percibe en su actividad matemática tienen que ver con una estructura cognitiva ligada a los procesos de control (Saboya, 2010) sobre esa actividad. Bajo este punto de vista, es importante desarrollar la transición de la aritmética al álgebra, construyendo al mismo tiempo una estructura cognitiva relacionada con el control sobre la actividad matemática que realiza cada estudiante. Esta estructura es algo que tiene que ver en cierta manera con el uso de representaciones y su articulación. Ellas pueden proporcionar un control sobre la actividad matemática (Saboya, 2010) y es por eso que nuestra propuesta de enseñanza toma en consideración el uso y producción de representaciones y la promoción de conversiones en el sentido de Duval (1993, 1995).
(Cortes,Hitt,Saboya 2014)

Nosotros creemos que los resultados demuestran que lo importante no es que los alumnos resuelvan un problema, sino que se pueda construir un pensamiento aritmético-algebraico más sólido que permita desarrollar una estructura de control que sirva no solamente para aprender álgebra, sino también para aprender cualquier concepto matemático, en donde la estructura de control juegue un papel fundamental. (Cortes,Hitt,Saboya 2014)

Cierre

Actividad 4.

(Modalidad virtual) Las actividades de generalización algebraica de sucesiones numéricas en los libros de texto, materiales de apoyo para el profesor, planes y programas de estudio de educación secundaria.

Tarea 10. (Modalidad virtual)

De manera general, las diferentes investigaciones realizadas sobre Pensamiento algebraico tratan de buscar respuestas a los principales interrogantes en torno a la naturaleza del Álgebra y a los procesos de pensamiento implicados, que faciliten procesos significativos de enseñanza-aprendizaje del Álgebra que permitan a los alumnos construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación. Muchas son, sin embargo, las preguntas que aún hoy no tienen respuesta en el tratamiento del Álgebra en la Educación Obligatoria. Estas investigaciones ponen de manifiesto, en primer lugar, las implicaciones negativas que tienen para el aprendizaje del Álgebra, el considerar únicamente a la Aritmética como su antecesora; se ha puesto de manifiesto hasta la saciedad, que el Álgebra no se puede considerar únicamente como una simple generalización de la Aritmética; aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en Aritmética; el Álgebra supone un cambio en el pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes de la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal. Y en segundo lugar, en la mayor parte de los trabajos referenciados se muestra la preocupación por la gran escasez de modelos de enseñanza del Álgebra así como de la literatura relacionada con las creencias y actitudes de los profesores de Álgebra. (Socas, 2011)

> Existen varias organizaciones curriculares en que la interpretación funcional del álgebra está presente de diferentes maneras tanto en primaria como en secundaría. En el currículo español, desde el nivel equivalente a 7º año de educación primaria, además del eje de álgebra aparece el eje “Funciones y gráficas” (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). En particular, en el currículo de la Comunidad Autónoma de Cataluña, ya desde el primer año de primaria se introduce el eje llamado “Relaciones y cambio” (DOGC, 2007), organización curricular que destaca el Pensamiento Variacional. Otro caso es el que presentan los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 2006), en el cual uno de los cinco ejes propuestos se denomina “Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos”, en que se amplía evidentemente la visión del álgebra. Asimismo, en la propuesta curricular del NCTM1 (2003) de EEUU, el estándar de contenido Álgebra se refiere a las relaciones entre cantidades incluyendo las funciones, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio. En las nuevas Bases Curriculares chilenas para los cursos de 1º a 6º de primaria (MINEDUC, 2012), contexto donde se sitúa esta investigación, aparecen dos cambios relevantes en torno al álgebra respecto al currículo anterior: por una parte, al eje se le denomina “Patrones y Álgebra” en vez de “Álgebra” y, por otra, comienza a desarrollarse en 1º de primaria, en vez de en 5º de primaria. Estos cambios han tenido como consecuencia una mayor importancia al estudio de patrones desde el primer año de primaria. Estos currículos, en su conjunto, promueven visiones del álgebra que son más amplias que las tradicionales, al ir más allá de la asociación tradicional con el estudio de estructuras matemáticas y manipulación de expresiones algebraicas. (Solar 2015)

> No podemos afirmar que los resultados de la investigación hayan generado cambios profundos en las maneras de proponer el Álgebra en los currículos de la Educación Obligatoria, más bien podemos decir que son muy pocos los países y profesores que interpretan y desarrollan propuestas curriculares en forma de textos para las Matemáticas de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria que incorporan aspectos relevantes de los resultados de la investigación en lenguaje algebraico al desarrollo curricular. (Socas, 2011)

Retomando sus experiencias con las tareas realizadas en esta secuencia, así como sus vivencias en la resolución de las distintas actividades del problema de Cables de Acero, exprese su opinión sobre la manera como se abordan las actividades de generalización algebraica de sucesiones numéricas en los libros de texto, en los materiales de apoyo para el profesor, así como en los planes y programas de estudio de educación secundaria.

Referencias bibliográficas

Ake, L. P.; Mojica, M. L.; Ramos, B. (2015) Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: un reto para la educación básica en México. XIV CIAEM.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274. doi: 10.1023/A:1022103903080

Barbosa, A.; Palhares, P. y Vale, I. (2007) Patterns and generalization: the influence of visual strategies. *CERME5 Proceedings*, WG6, 844-851.

Barbosa, A, Vale, I. y Palhares, P. (2012). Pattern tasks: Thinking processes used by 6th grade students, *Relime* 15(3) 273-293.

Barbosa, A.; Vale, I. (2015) Visualization in pattern generalization; potential and challenges. Journal of the European Teacher Education Network, (10), págs. 57-70.

Becker, J. R. and Rivera, F. 2005. Generalization Strategies of Beginning to Study Algebra.Chick, H. L. and Vincent, J. L. (Eds.).*Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Melbourne: PME. 4: 121-128.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bressan, A.; Gallego, M. F. (2010) El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. Correo del Maestro, 168, págs. 5-21.

Boye, A. (2004) Francois Viete, ¿inventor del álgebra). En: Los orígenes de la ciencia moderna. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia. Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias. ISBN 84-688-6926-0

Butto, C. y Rojano T. (2004) Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, 16(1), 113-148.

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Canavarro, A. P. (2009). El pensamiento algebraico en el aprendizaje de la Matemática los primeros años. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2006) Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran el razonamiento inductivo. *Indivisa. Monografía IV*, 13-24.

Cañadas, M. C.; Castro, E. y Castro E. (2008) Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educación secundaria obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, 2(3), 137-151.

Castro (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.

Castro-Martínez, E. (2005). Configuraciones puntuales: Sistema de representación idóneo para las sucesiones de números naturales. In H. M. Guimarães & L. Serrazina (Eds.), *V CIBEM: Conferências* (pp. 201-220). Lisboa: APM. Consultado en línea en la página: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Castro(CIBEM).pdf

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 57, 55-67.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Castro, E., y Castro, E. (2007). Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*. (pp. 283-294). Badajoz: SEIEM.

Cortés, J.C., Hitt, F., & Saboya, M. (2014). De la Aritmética al Álgebra: Números Triangulares, Tecnología y ACODESA. *REDIMAT*, *Vol 3*(3), 220-252. doi: 10.4471/redimat.2014.52

Davidov, V. (1972/1990). Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. En J. Kilpatrick (Ed.), Soviet studies in mathematics education (Vol. 2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Davydov, V. V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Dougherthy, B. (2007). Measure up: A quantitative view of early algebra. En J. Kaput, D. Carraher y Blanton, (eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México 1997).

Fernández, C.; Callejo, M. L.; Sánchez-Matamoros, G.; Valls, J. (2015) Cómo caracterizan el proceso de generalización de patrones futuros profesores de secundaria. XIV CIAEM, México.

Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

García Cruz, J. A. y Martiñón A. (1998) Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, Vol. 17, No. 1, 31-43.

García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Bolema*, 26, (42), 483-511.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

González G., A. E. ( ) Razones y sinrazones de los contenidos algebraicos en la ESO: lo que hay y no debería haber y lo que no hay y sí debería haber. X JAEM, Ponencia P71, págs. 633-652.

Gonzáles R., A.; Enrique G., F. (2011) Exploración del pensamiento algebraico de profesores de matemática en formación —la prueba EVAPAL. Acta Scientiae, 13(1), págs. 31-54.

Hashemi, N.; Abu, M. S.; Kashefi, H. y Rahimi, K, (2013) Generalization in the learning of mathematics. Proceedings of the *2nd International Seminar on Quality and Affordable Education (ISQAE 2013)*.págs. 208-215. [Hashemi 2013]

Kaput, J. (1995). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers Mathematics. Boston MA.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is Algebraic Reasoning?. In J.J. Kaput, D. Carraher & M.L.Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York : Routledge.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

Krutestskii V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. Mathematical Thinking and Learning, 7(3), 231–258.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J.; GRABAN, A.; PIMM, D. y GOWARD, N. Rutas/raíces hacia el álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 1999.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra.* The Open University Press. Walton Hall, Milton Keynes.

Mason, J., Graham, A. y Johnston–Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra.* London: The Open University y Paul Chapman Publishing.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares de Matemática para Educación Básica*. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá. Disponible en: www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia. (2006). Real decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 5, 677-773*.

National Council of Teachers of Mathematics (2003) Principios y Estándares para la educación matemática. Reston, VA. Traducción al español de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

National Council of Teachers of Mathematics. (1990). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla: S. A. E. M. Thales.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Va: NCTM. En línea en la página Web de NCTM: http://standards.nctm.org

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Radford, L., Bardini, C. y Sabena, C. (2006). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. En M. Bosch (Ed.), *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 684-695). Sant Feliu de Guíxols, Spain: European Society for Research in Mathematics Education.

Radford, L. (2006). Sermiótica y Educación Matemática. En Radford, L. y D´Amore, B. (Eds.) *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, Relime, número especial*. pp. 7-21.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2012a). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education (ICME-12)* (pp. 675-694). Seúl, Korea: National University of Education.

RADFORD, L. (2005): «¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification», en HELEN, L.; CHICK, J.; VINCENT, L. (eds.): *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 1. Melbourne. University of Melbourne, pp. 143-145.

— (2010*a*): «Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective». *Research in Mathematics Education*, vol. 12(1), pp. 1-19.

— (2010*b*): «Layers of generality and types of generalization in pattern activities». *PNA,* vol. 4(2), pp. 37-62.

— (2013): «En torno a tres problemas de la generalización », en RICO, l., y otros (eds.): *Investigación en Didáctica de la Matemática.* Homenaje a Encarnación Castro. Granada. Comares, pp. 3-12.

Rivera, F. (2007). Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization. Mathematics Teacher, 101(1), 69-75.

Rivera, F.D., y Becker, J. (2008). Middle school children’s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 65-82.

Roig A., A. I.; Llinares C., S. (2008). Fases en la abstracción de patrones lineales. En: *Investigación en Educación Matemática* XII / R. Luengo [et al] (eds.). Badajoz : SEIEM, 2008. ISBN 978-84-934488-9-9, pp. 195-204. En línea en la página Web: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas12SEIEM/Com01RoigLlinares.pdf (3Abr09)

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en Matemáticas y Ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 135-165.

SEP, (2006). *Reforma de la educación secundaria. Fundamentación curricular. Matemáticas*. México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos. Disponible en línea en la página Web: http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/doc/UNDAMENTACIONES/matematicas.pdf

Solar, H.; Rojas, F. (2015) Elaboración de orientaciones didácticas desde la reflexión docente: el caso del enfoque funcional de álgebra escolar. REIEC, 10 (1), págs. 14-33.

Socas, M. (2011) La enseñanza del algebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. Números, (77), págs. 5-34. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Stacey, K. (1989) Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.

Steen L. A. (Ed., 1998) La enseñanza agradable de las matemáticas. Editorial Limusa S.A. de C.V. México, D.F.

Sutherland, R. (2007). A dramatic shift of attention: From arithmetic to algebraic thinking. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In F. Hitt (ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.

Vergel, R. (2014): *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* Tesis doctoral no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá).

Vergel, R. (2015) ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. UNO, revista de Didáctica de las Matemáticas. (68). Págs. 9-17.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Villa Ochoa, Jhony Alexánder (2006) El proceso de generalización matemática: Algunas reflexiones en torno a su validación. Tecno Lógicas, núm. 16, julio, 2006, pp. 139-151. Instituto Tecnológico Metropolitano. Medellín, Colombia. [Villa 206]

Warren, E. (2004). Generalizing arithmetic: Supporting the process in the early years. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 417-424). Bergen, Norway: Bergen University College.

Warren, E. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. Educational Studies in Mathematics, 67, 171-185.

Zaskis, R,; Liljedahl, P. y Chernoff, E. J. (2007) The role of examples in forming and refuting generalizations. ZDM,

Zapatera, A., y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds). *Investigación en Educación Matemática XV.* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Zapatera A., & Callejo, M.L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

Zapatera, A. y Callejo, M.L. (2015). Caracterización de una trayectoria de la "mirada profesional" de los estudiantes para maestro sobre la comprensión del proceso de generalización. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 521-528). Alicante: SEIEM.

Tabla de contenidos Secuencia 3

Pensamiento Estadístico

Secuencia Didáctica 3

Pensamiento Estadístico

Presentación

En esta secuencia se promueve una revisión acerca de los aspectos que caracterizan el razonamiento y el pensamiento estadístico y que se destacan como aquellos componentes en los que habrá que centrar la atención para desarrollar la competencia estadística en los alumnos.

El propósito de la secuencia es que su desarrollo permita a los estudiantes caracterizar el razonamiento y el pensamiento estadístico e identificar procesos cognitivos que intervienen en su desarrollo, además de reconocer el papel de los problemas y recursos en el desarrollo del pensamiento estadístico, particularmente, de las tecnologías digitales.

En el desarrollo de la secuencia se retoman las actividades realizadas en la Secuencia Pensamiento Estadístico de la Asignatura Actividades Selectas I, de manera tal que se puedan identificar aspectos del pensamiento estadístico que están puestos en juego en su diseño, así como visualizar aquellos que pueden incorporarse y dar lugar a propuestas específicas de diseño que los complementen.

Se espera que al cierre de la Secuencia se tengan elementos suficientes que se conviertan en el punto de partida del apartado correspondiente en el curso de Experiencia de Intervención, con el cual se concluye el Primer Cuatrimestre del Programa de Especialidad.

▸ Inicio

Actividad 1.

Reflexiones iniciales

Tarea 1. Un acercamiento personal

1. Responda a cada una de las siguientes preguntas:
    a. ¿En qué consiste el pensamiento estadístico?

    b. ¿Por qué es necesario, hoy día, la formación de una cultura estadística en los estudiantes?

    c. ¿Cómo podemos identificar si los estudiantes están pensando estadísticamente?

    d. ¿Cómo podemos contribuir al desarrollo del pensamiento estadístico en nuestros estudiantes?

    e. Como profesores, ¿cómo podemos promover el desarrollo del razonamiento estadístico en nuestros estudiantes?

f. ¿De qué manera se pueden incorporar la tecnología digital para el desarrollo del pensamiento estadístico en nuestros alumnos?

Desarrollo

Actividad 2.

Razonamiento y Pensamiento Estadístico

Tarea 2. Un primer análisis

Con base en la siguiente cita, ¿qué diferencia(s) observa entre el razonamiento estadístico y el pensamiento estadístico?

> *Razonamiento Estadístico.*
>
> *Según Garfield, del Mas y Chance (2003) puede ser definido como la manera que las personas razonan con ideas estadísticas y el sentido que le dan a la información estadística. Esto implica hacer interpretaciones basadas en conjunto de datos, representaciones de datos o resúmenes estadísticos de datos. El razonamiento estadístico puede implicar conectar un concepto con otro (por ejemplo, centro y distribución), o puede combinar ideas sobre datos y azar. Razonar estadísticamente significa entender y poder explicar procesos estadísticos y de interpretar completamente resultados estadísticos.*
>
> *Pensamiento Estadístico.*
>
> *En lo referente al pensamiento estadístico, importantes investigadores se han enfocado en este concepto. De acuerdo a con Garfield, del Mas y Chance (2003), el pensamiento estadístico involucra una comprensión del por qué y de cómo las investigaciones estadísticas son conducidas y las “grandes ideas” que son la base de las investigaciones estadísticas.*

1. Con base en la cita, identifique qué aspectos del razonamiento y del pensamiento estadístico se promueven en las actividades indicadas en la Tabla 1, correspondiente de la asignatura Actividades Selectas I.
   Argumente su respuesta.

Actividad/Tarea/Ejercicio		**Aspectos del razonamiento y del pensamiento estadístico que se promueven**
Actividad 1	Tarea 1	
	Tarea 2	
Actividad 2	Tarea 3	
	Tarea 4	
	Ejercicio 1	
Actividad 3	Tarea 5	
	Tarea 6	
	Ejercicio 2	

Tabla 1.

2. Continuando con la revisión, Wild y Pfannkuch (1999) plantean que el desarrollo del razonamiento estadístico incluye cinco componentes fundamentales, que se describen enseguida:
   i. Reconocimiento de la necesidad de los datos: El reconocimiento de las carencias de las experiencias personales y la evidencia anecdótica lleva al deseo de basar las decisiones sobre la recogida deliberada de datos.
   ii. Trasnumeración: La idea más importante en el aprendizaje de la estadística es la de formar y cambiar las representaciones de los datos relativos a un sistema para llegar a una mejor comprensión de ese sistema, esto es, el proceso dinámico de cambiar las representaciones de los datos numéricos para facilitar su comprensión.
   iii. Variación (percepción de la variación): El pensamiento estadístico moderno se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual surge de la omonipresente variación.
   iv. Uso de un conjunto de modelos (Razonamiento con modelos estadísticos): La principal contribución de la estadística al pensamiento ha sido su propio conjunto de modelos específicos, esto es, marcos para pensar sobre determinados fenómenos que incluyen componentes aleatorios.
   v. Conocimiento estadístico relacionado con el contexto (integración con el contexto): El material de base del pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos. El pensamiento en sí mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, compresiones y conjeturas.

a) Ejemplifique cada una de las componentes descritas.

b) ¿De qué manera se puede involucrar la tecnología digital para el desarrollo de cada una de las componentes descritas?

c) Revise las actividades, tareas o ejercicios propuestas en la Secuencia Pensamiento Estadístico de la Asignatura Actividades Selectas I y mencione qué componente(s) del razonamiento estadístico están involucrados en el desarrollo de la actividad, tarea o ejercicio. Argumente su respuesta.

3. Un aspecto que engloba tanto la cultura estadística como el razonamiento estadístico es el sentido estadístico, que de acuerdo a Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) se entiende como:

> *… unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico. Asimismo, también consideramos que la cultura estadística implica la comprensión adecuada de las ideas estadísticas fundamentales (Burrill y Biehler, 2011), pues estas ideas aparecen en la mayoría de las situaciones en que hay que aplicar la estadística; por tanto son necesarias para enfrentarse con éxito a dichas situaciones. Además, pueden ser enseñadas con diversos niveles de formalización y, por tanto, son asequibles en cualquier nivel educativo, siendo potentes como herramientas de modelización estadística. En segundo lugar, se requiere un razonamiento específico, el razonamiento estadístico que permite tomar decisiones adecuadas o efectuar predicciones a partir de datos y en presencia de incertidumbre.*

De acuerdo a lo que se plantea en la cita de Batanero (2013),

a) ¿Con qué aspectos de los que se deben trabajar en el aula asocia usted a la cultura estadística?

b) De acuerdo a Burrill y Biehler (2011), las ideas estadísticas fundamentales son las siguientes: Datos, gráficas, variación, distribución, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia.

¿Cuáles de estas ideas estadísticas fundamentales identifica en la Actividad 2 de la Secuencia Pensamiento Estadístico de la Asignatura Actividades Selectas I?

c) Y, ¿con qué aspectos de la Actividad 2 asocia usted el razonamiento estadístico?

Cierre

Actividad 3.

Síntesis e Implicaciones

Tarea 3. Pensamiento, Cultura y Razonamiento Estadístico

Diversos autores coinciden en que la enseñanza de la estadística debe transitar desde una enseñanza que enfatiza el aprendizaje de fórmulas, técnicas y procedimientos hacia una que propicie el desarrollo de la competencia estadística, el razonamiento estadístico y el pensamiento estadístico.

Con respecto a la **competencia estadística** se menciona que ésta *consiste en los conocimientos, habilidades y disposiciones estadísticos que todo ciudadano debe tener para funcionar adecuadamente en una sociedad caracterizada por la circulación de grandes cantidades de información. Involucra la comprensión y el uso del lenguaje y las herramientas básicas de la estadística (Watson, 2006; Gal. 2004).*

*El **razonamiento estadístico** es la manera de razonar con ideas estadísticas, es decir, consiste en realizar inferencias o deducciones (cuyas premisas y/o conclusiones son enunciados estadísticos) y utilizarlas en la solución de problemas propios del campo. Implica conectar conceptos estadísticos y probabilísticos, entender y explicar procesos estadísticos e interpretar los resultados (Garfield y Ben-Zvi, 2008 a) el **pensamiento estadístico** consiste en la forma en que piensa un estadístico profesional. Implica saber cómo, dónde y porque llevar a cabo una investigación estadística, así como utilizar un método, aplicar un modelo o idear un diseño estadístico; para hacerlo se requiere una comprensión profunda de las teorías que subyacen a los métodos y procesos estadísticos (Wild y Pfannkuch, 1999)*.

Batanero et al (2013), señalan que;

> *El **sentido estadístico**, como unión de la cultura y razonamiento estadísticos debe construirse en forma progresiva desde la educación primaria, secundaria, bachillerato y hasta la universidad. En este sentido, las nuevas propuestas curriculares proporcionan una oportunidad de introducir gradualmente ideas estadísticas desde la educación primaria, aumentando el nivel de formalización progresivamente. Pensamos que la mejor forma de ayudar al estudiante a desarrollar su sentido estadístico es basar las clases de estadística en el trabajo con proyectos, bien planteados por el profesor o escogidos libremente por los alumnos. En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, o aplicadas únicamente a problemas tipo, difíciles de encontrar en la vida real, se trataría de presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado.*

1. Mencione implicaciones que Usted considera tiene este planteamiento para la enseñanza de la Estadística en Secundaria.

2. ¿Qué relación tiene lo antes expuesto con el enfoque curricular actual en Secundaria?

3. Comente que papel corresponde al profesor realizar para promover el desarrollo de:
   a) Pensamiento estadístico

   b) Cultura estadística

   c) Razonamiento estadístico

4. Comente que papel de la tecnología digital para promover el desarrollo del pensamiento estadístico.

Trabajo independiente. Reformulación del proyecto.

Con base en lo revisado en esta secuencia, recupere el proyecto formulado al finalizar la Secuencia 3 de Pensamiento Estadístico en la asignatura Actividades Selectas I. Reelabore su proyecto considerando lo aquí revisado y haciendo explícitos los aspectos del pensamiento estadístico que espera abordar.

Referencias bibliográficas

BAEM (2016). *Materiales de apoyo para la asignatura Actividades Selectas I,* del Programa de Especialidad en Uso Didáctico de Tecnología Digital para la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Sonora.

Batanero, C., Díaz C., Contreras J. y Roa R. (2013). *El sentido estadístico y su desarrollo*. Números, volumen (38), 7-18.

Chance, Beth L. (2002). *Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment.* Journal of Statistics Education, Volume 10, Number 3. Recuperado en junio de 2016 de www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html.

Jiménez R. J.V; Inzunsa, C. S; (2011*). Razonamiento y pensamiento estadístico en estudiantes universitarios;* XIII CIAM-IACME Recife, Brasil.

Leiria, A. C., González, M. T. y Pinto, J. E. (2015). *Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico.* PNA, 10(1), 25-52.

Sánchez, Ernesto; Gómez-Blancarte, A.L. (S/F). *El desarrollo del pensamiento estadístico de profesores de secundaria en servicio.* Publicado en Investigaciones Actuales en Educación Estadística y Formación de Profesores, Universidad de Granada; (55-72).