Experiencia de Intervención

CENTRO REGIONAL DE FORMACIÓN DOCENTE E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA DEL ESTADO DE SONORA

Programa de especialidad en el uso de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas

Martha Cristina Villalba Gutiérrez
Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
Maricela Armenta Castro
José Ramón Jiménez Rodríguez
Manuel Alfredo Urrea Bernal

El presente documento fue elaborado por académicos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Corresponde al material de la asignatura Experiencia de Intervención que será utilizado por el estudiante que participe en el Programa de especialidad en uso didáctico de tecnología digital para la enseñanza de las matemáticas del Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora.

Universidad de Sonora

Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Rector

Dr. Enrique Fernando Velázquez Contreras
Secretario General Académico

Dr. Agustín Grijalva Monteverde
Director del Bufete de Asesoría en Educación Matemática

Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora

Dra. Norma Guadalupe Pesqueira Bustamante
Rectora

Autores
M.C. Martha Cristina Villalba y Gutiérrez
M.C. Maricela Armenta Castro
M.C. Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez
M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal

Colaborador:
M.C. Guadalupe Villaseñor Gándara

ISBN:

Blvd. Rosales y Luis Encinas s/n. Col. Centro
C.P.83000, Hermosillo, Sonora, México.

Tabla de Contenidos Secuencia 1
Pensamiento Geométrico

Adaptación, con el propósito de llevarla al aula, de una tarea matemática relacionada con el área denominada *Pensamiento Geométrico*

Presentación

[1] Disponibles en www.geogebra.org/materials/?lang=es

Secuencia 1

Pensamiento Geométrico

Adaptación, con el propósito de llevarla al aula, de una tarea matemática relacionada con el área denominada *Pensamiento Geométrico*

Presentación

Esta secuencia de pensamiento geométrico ha sido diseñada para que a través de su desarrollo logre usted hacer una primera concreción de las acciones de estudio de la geometría y la reflexión didáctica sobre ésta cuando se tiene la particularidad de estar apoyado en el uso de tecnología digital.

La exigencia de llegar a presentar un proyecto de intervención al finalizar la especialidad, encuentra en esta experiencia que ahora se le propone, un primer acercamiento a lo que pudiera ser su elaboración. A grandes rasgos podemos describir las actividades de esta secuencia como un proceso que incluye acciones acordes a las competencias docentes que es imperativo mantener en un continuo desarrollo; esto es, acciones como llevar a cabo búsqueda de información curricular pertinente; así también, acciones de fortalecimiento del conocimiento geométrico implicado; de reflexión del papel de los problemas, de la administración específica de las tareas planteadas para que cubran la movilización de los procesos cognitivos del desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes, del impacto del debate de opiniones entre pares y de la comunicación argumentada de resultados obtenidos, de la evaluación de los aprendizajes, de las acciones de enseñanza y los medios utilizados como apoyo didáctico, entre otros.

Aunque la propuesta general para este curso se plantea con una orientación tipo taller, hemos organizado las actividades, sin contravenir dicha orientación, como una secuencia de ellas con el fin de mantener el orden natural de las acciones propuestas. Esperamos que todas ellas le sean significativas y útiles para lograr el objetivo general del curso y alcanzar la meta establecida en él.

Inicio

Actividad 1

Revisión de una propuesta metodológica de intervención basada en la resolución de problemas y uso de tecnología

Tarea 1. Revisión de las referencias proporcionadas.

Como parte de las actividades a realizar durante este curso, a continuación se les presentan dos temas de geometría contemplados en el Plan de Estudios, algunos planes de clase, así como sendas actividades didácticas, con el fin de que ustedes, en equipo, revisen la que su instructor les indique.

1. Por equipos, revisen el programa de estudios para secundaria, así como las orientaciones didácticas y planes de clase, según el tema que les sea asignado. Para ello recurran a las fuentes originales:
   - Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. SEP.
   - Orientaciones didácticas y planes de clase en línea.

   Temas propuestos:

   I. 7.2.5 (Primer grado, Bloque 2, Tema 5) *Resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo*.

   II. 8.1.4 (Segundo grado, Bloque 1, Tema 4) *Construcción de triángulos dados ciertos datos. Análisis de las condiciones de posibilidad y unicidad en las construcciones*.

2. Por equipos, revisen la propuesta didáctica correspondiente al tema que les haya asignado

   I. Actividad didáctica: "En el Centro Ecológico del Estado" para el tema 7.2.5 Resolución de problemas geométricos que impliquen el uso de las propiedades de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo.

En el Centro Ecológico del Estado[2]

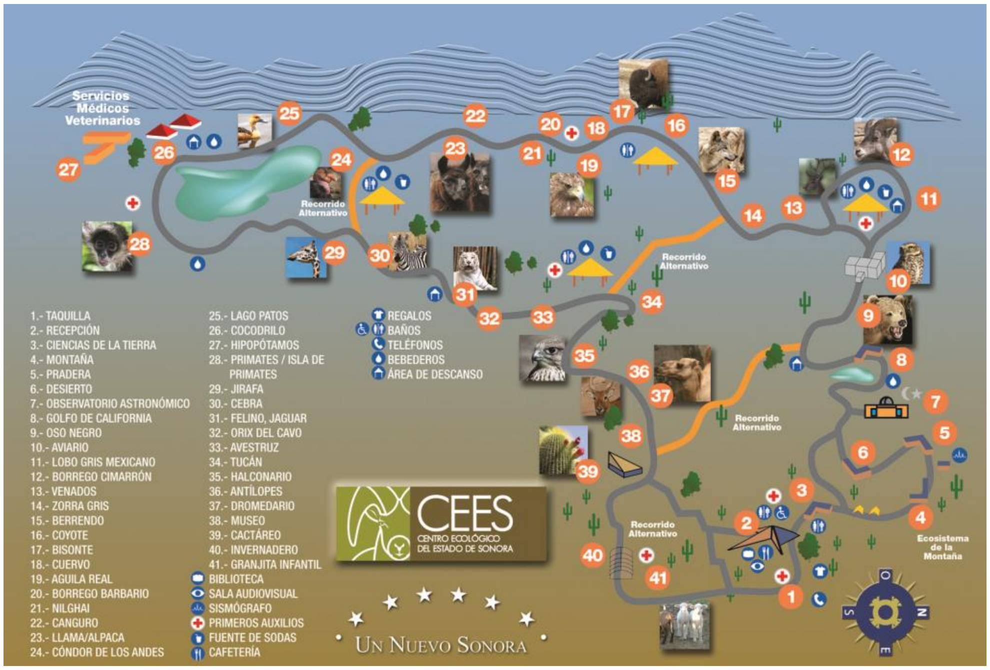


Figura 1. Plano del Centro Ecológico del Estado

El Director General del Centro Ecológico del Estado está llevando a cabo distintas obras de mejora y mantenimiento con el fin de dar mejor atención a los visitantes y a las especies de animales y plantas que alberga la institución.

Por una parte, acaba de inaugurar un nuevo estacionamiento para los visitantes. Entre los detalles pendientes se encuentra la organización del mantenimiento que éste requiere. Por tal motivo está en espera que el encargado de mantenimiento reporte que ya han sido instalados aspersores de agua para césped en las áreas verdes del estacionamiento. Estas áreas verdes tienen formas triangulares y cuadradas de diferentes tamaños. Enseguida, en la Figura 2, se muestra el croquis de dos áreas verdes representativas.

Área Verde Cuadrada **Área Verde Triangular**

Figura 2.

[2] BAEM Universidad de Sonora (2014). Matemáticas 2. Módulo de Aprendizaje de Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Bloque 1, Secuencia Didáctica 3. Disponible en http://www.cobachsonora.edu.mx/files/semestre2-2016/fb2smatematicas2.pdf

El Sr. Máximo Riego –conocido como Don Max–, jefe de mantenimiento, está tratando de encontrar el sitio adecuado para instalar los aspersores de manera que cubran la mayor área posible de césped sin mojar los andadores que la limitan. Estos aspersores cuentan con un mecanismo que permite cubrir un área circular, por lo que Don Max requiere encontrar el mejor lugar para colocar uno de ellos en cada área verde y que cumpla con las condiciones señaladas.

Por otra parte, Don Max, tiene la encomienda de situar un centro de abasto de materiales para las obras de remodelación que se están llevando a cabo en el interior del Centro, particularmente en los albergues de Dromedarios, Osos Negros y Venados. Para facilitar el traslado de dichos materiales a cada uno de estos sitios, requiere situar el centro de abasto a la misma distancia de los tres. En la Figura 1 puedes localizar los sitios mencionados, están etiquetados con los números 37, 9 y 13, respectivamente.

I. Ayuda a Don Max:

1. En el caso de las áreas cuadradas, Don Max consideró dos casos posibles: instalar el aspersor en el centro del jardín o en una de sus esquinas, dado que se puede restringir el ángulo de rociado. Si el agua no debe mojar las vías peatonales ¿cuál será la mejor opción? Explica brevemente el porqué de tu elección.

    a. Coloca sobre el área cuadrada de la Figura 2 el punto en donde consideres que debe instalarse el aspersor. Verifica si el punto cumple con las condiciones del contexto.

    b. En el caso de que se coloque el aspersor en el centro del cuadrado, determina (considerando de manera genérica que su lado mide a metros):
        i. El alcance que éste debe tener.
        ii. El área que se logra regar.
        iii. El área que no se alcanza a regar.

    c. En el caso de que se coloque el aspersor en un vértice del cuadrado, determina (considerando de igual manera que su lado mide a metros):

i. El alcance y el ángulo de rociado que éste debe tener.
ii. El área que se logra regar.
iii. El área que no se alcanza a regar.

2. En el caso de las áreas triangulares, si se considera instalar el aspersor en el centro de cada jardín ¿dónde deberá ser colocado? Ubica sobre el área triangular de la Figura 2 el punto en donde consideres que debe instalarse el aspersor. Verifica, utilizando un compás, si el punto cumple con las condiciones del contexto. Describe enseguida qué hiciste para decidir la posición del punto y cómo fue que verificaste si resultó adecuada o no.

3. Explora la posición y cobertura de riego de este tipo de aspersores en jardines triangulares en el applet “jardín triangular”.

4. De la misma manera, explora en el applet “centro de abasto” el punto donde consideras que debe colocarse el centro de abasto de materiales para la remodelación de los albergues de los dromedarios, osos negros y venados para que cumpla con las condiciones establecidas. Escribe y comenta las dificultades que tuviste para localizar el punto adecuado.

II. Construcciones con doblado de papel

Es posible determinar con precisión la colocación adecuada del aspersor y del centro de abasto de materiales que exploraste en la actividad anterior, si conoces algunas propiedades de rectas y puntos notables que se identifican en los triángulos: algunas de esas propiedades están relacionadas con el centro de una circunferencia inscrita (dentro del triángulo y tangente a sus tres lados), o de una circunferencia circunscrita (que pasa por los tres vértices del triángulo).

Enseguida se te plantean dos Actividades con algunas tareas para que logres hacer diferentes construcciones, descubrir sus propiedades y, finalmente, decidir qué te sirve para dar una solución precisa tanto a la colocación del aspersor como a la del centro de abasto de materiales.

1. En la mitad de una hoja blanca dibuja un triángulo cualquiera y etiqueta los vértices como se muestra en la Figura 3.

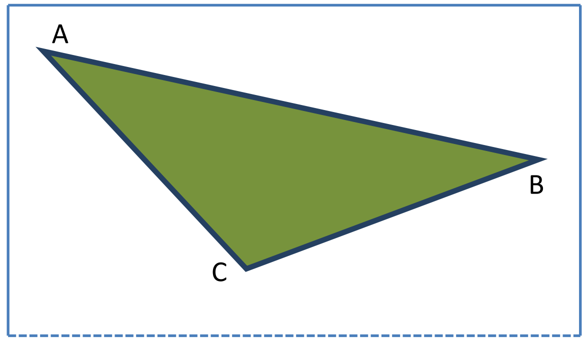


Figura 3

2. Toma la hoja y desde el vértice A del tiángulo, haz un doblez de manera que el ángulo el que corresponde a ese vértice (ángulo $C\hat{A}B$) quede dividido en dos partes iguales. Describe cómo lo hiciste y cómo te aseguras que el doblez está marcando exactamente la mitad del ángulo.

3. Comparte con tus compañeros la estrategia y acuerden cuál resulta ser la más apropiada.

    a. Ahora marca los dobleces que corresponden a la mitad de los otros dos ángulos del triángulo.
    b. Extiende la hoja y remarca con lápiz o pluma las rectas marcadas por los dobleces y señala el punto donde se intersecan las tres rectas. Si no se intersecan las tres es que algún doblez estuvo mal hecho o mal remarcado; si este es el caso, rectifica.
    c. Etiqueta el punto de intersección como centro $\boldsymbol{O}$ y traza algunas circunferencias. Trata de encontrar alguna inscrita o circunscrita, según tenga sentido para el problema del aspersor en el área triangular.

4. Si consideras que has identificado el tipo de circunferencia que responde al problema del aspersor, reproduce en el triángulo de la Figura 4 las rectas trazadas en la hoja donde hiciste los dobleces y la exploración:

a. Traza en este triángulo las rectas que bisecan sus ángulos internos (sigue las instrucciones dadas en el recuadro o consulta el applet “trazo de bisectriz”) y señala el punto de intersección de esas rectas, llámale $\boldsymbol{O}$

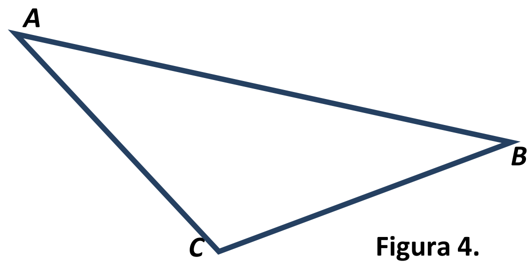
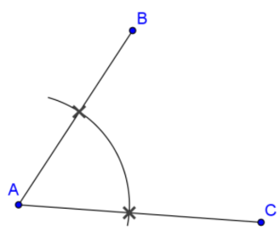
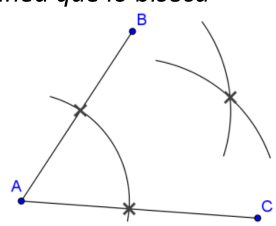


Figura 4.

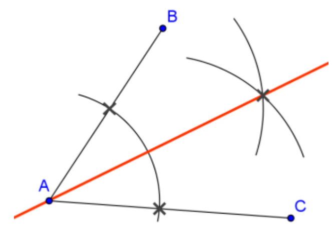
Dado el ángulo $C\hat{A}B$, trazar con regla y compás la línea que lo biseca



1. *Apoya tu compás en A y con una abertura adecuada, traza un arco que interseque los lados del ángulo. Marca los puntos de intersección.*



2. *Apoya tu compás en uno de los puntos de intersección; abre tu compás un poco más y traza un arco de circunferencia; con la misma abertura traza otro arco apoyándote en el otro punto marcado. Señala el punto de intersección de ambos arcos.*



3. *Traza la recta que pasa por A y por el punto de intersección de ambos arcos*

b. Traza la circunferencia que consideraste importante para dar respuesta al problema del aspersor.

c. Compara tu construcción con las de tus compañeros de equipo y comenten qué tipo de circunferencia es (inscrita o circunscrita). En el siguiente espacio explica por qué:

d. Señala los puntos que son comunes a la circunferencia y al triángulo; nómbralos como P, Q y R; únelos con el centro $\boldsymbol{O}$ ¿Qué elementos de la circunferencia son estos tres segmentos?

e. Los lados del triángulo ¿son tangentes o son secantes a la circunferencia?

f. ¿Qué tipo de ángulo forma cada uno de los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ con el lado correspondiente del triángulo?

5. Ahora marca sobre la Figura 2 el punto en donde debe colocarse el aspersor para que cumpla con las condiciones dadas. Enseguida argumenta por qué ese punto es el adecuado.

6. Si llamas R al alcance del aspersor que cumple con las especificaciones dadas, ¿Cómo calculas el área que se alcanza a regar?

7. ¿Qué datos necesitas para calcular el área que queda sin regar?

Para dar respuesta al problema de la colocación del centro de abastos de materiales, deberás seguir también un procedimiento de dobleces, pero las rectas que vas a construir las harás de diferente manera:

8. Traza en la mitad de una hoja blanca un triángulo parecido al formado por las rectas que conectan los tres albergues que se van a remodelar (Ver Sección de Inicio), representados en la Figura 5. Nombra los vértices del triángulo como A, B y C

9. Doblando adecuadamente el papel, encuentra el punto medio de un lado del triángulo. Remarca con lápiz o pluma la línea de doblez que lo determinó.

Figura 5.

a. ¿Qué tipo de ángulos forman entre sí el lado del triángulo y la línea del doblez?

b. ¿Qué nombre reciben las rectas que forman ángulos de este tipo?

c. Haz lo mismo con los otros dos lados.

10. Localiza el punto donde se intersecan las tres rectas remarcadas. Si no se intersecan las tres es que algún doblez estuvo mal hecho o mal remarcado, o bien se sale de la hoja, en cuyo caso es recomendable que dibujes de nuevo tu triángulo en una hoja más grande. Llámale $\boldsymbol{D}$ a ese punto de intersección y traza circunferencias de diferente radio. Explora para que veas si hay alguna que quede inscrita o circunscrita.

11. Reproduce en el siguiente triángulo –Figura 6– las líneas rectas que remarcaste en tu hoja (para hacerlo, utiliza regla y compás. Las indicaciones dadas en el recuadro que sigue pueden ser de utilidad, o bien, consulta el applet "trazo perpendiculares"; señala el punto de intersección $\boldsymbol{D}$ como centro y traza la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo. Explica por qué esta circunferencia te ayuda a verificar que el punto $\boldsymbol{D}$ equidista de los tres albergues representados por los vértices del triángulo.

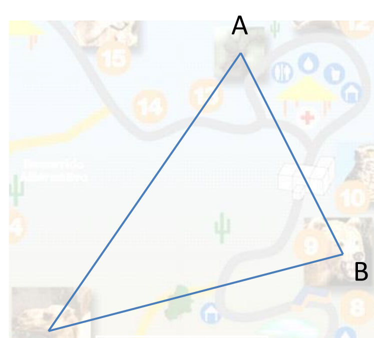
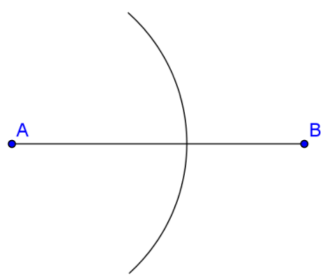


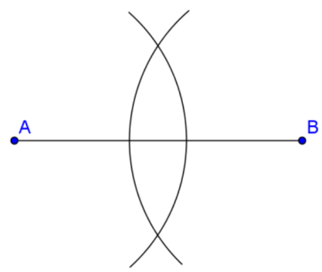
Figura 6

Trazo de una perpendicular con regla y compás:

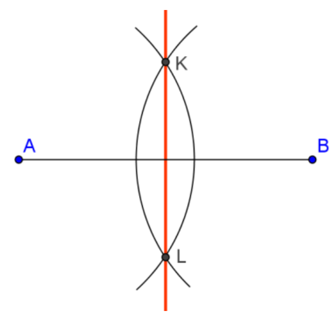
Dado el segmento $\overline{AB}$, sigue los siguientes pasos trazar una recta perpendicular en su punto medio utilizando regla y compás:



1. *Apoya tu compás en A y con una abertura mayor que la mitad del segmento, traza un arco de circunferencia*



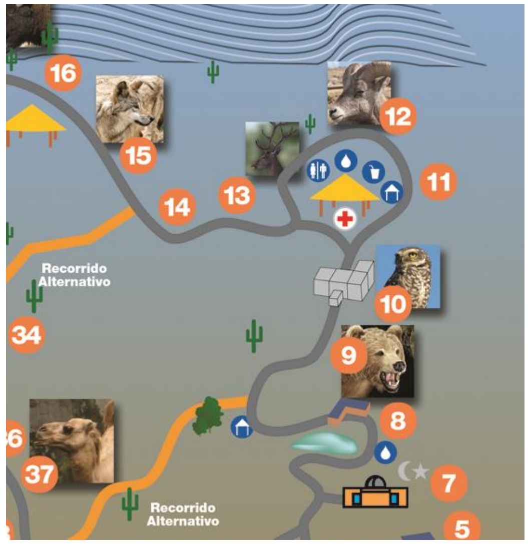
2. *Con la misma abertura, apoya el compás en B y traza otro arco de circunferencia*



3. *Marca los puntos de intersección de los dos arcos y traza la recta que los une: Esta recta es la perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio.*

12. Une cada uno de los vértices del triángulo con el centro $\boldsymbol{D}$, ¿qué elementos de la circunferencia son esos segmentos?

13. Señala en el croquis el punto donde deberá colocarse el centro de abastos de materiales y proporciona argumentos que sostengan tu elección.



III. Construyendo triángulos[3]

Construir triángulos no es una actividad nueva para ti. Desde la escuela primaria aprendiste que hay diferentes tipos de triángulos según sus lados y según sus ángulos.

1. Escribe lo que recuerdes de tales clasificaciones.

Para la siguiente actividad necesitarás varios palillos de dientes, o bien, si tienes acceso a internet, abre el applet "palillos" para simular el trabajo con palillos de dientes. Se trata de construir todos los triángulos posibles con un determinado número de palillos, colocándolos uno seguido de otro. Considera que los palillos de dientes son todos de la misma medida y que ésta se toma como la unidad.

[3] BAEM Universidad de Sonora (2014). Matemáticas 2. Módulo de Aprendizaje de Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Bloque 1, Secuencia Didáctica 2. Disponible en http://www.cobachsonora.edu.mx/files/semestre2-2016/fb2smatematicas2.pdf

2. Para iniciar, utiliza solamente tres palillos de dientes y construye todos los triángulos posibles. Para cada uno de ellos, escribe las medidas de los lados (recuerda tomar como unidad la medida de un palillo), el tipo de triángulo según sus lados y según sus ángulos. Organiza tus hallazgos en la siguiente tabla (puedes agregar o ignorar renglones, según sea conveniente):

Tabla 1

Tres Palillos				
Lados			Tipo de triángulo	
			Según sus lados	Según sus ángulos

   a. ¿Cuántos triángulos diferentes es posible construir? ¿Por qué?

3. Ahora utiliza exactamente cuatro palillos.

Tabla 2

Cuatro Palillos				
Lados			Tipo de triángulo	
			Según sus lados	Según sus ángulos

   b. ¿Cuántos triángulos diferentes es posible construir? ¿Por qué?

Continuaremos nuestras construcciones de triángulos utilizando los palillos de dientes o el applet señalado en la actividad anterior. Completa las siguientes tablas (puedes agregar o ignorar renglones, según sea conveniente):

4.

Tabla 3

Cinco Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	3			
1	2	2			

a. ¿Cuántos triángulos diferentes es posible construir?

b. ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el triángulo? ¿Por qué?

5.

Tabla 4

Seis Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	4			
1	2	3			
2	2	2			

a. ¿Cuántos triángulos diferentes es posible construir?

b. ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el triángulo? ¿Por qué?

6.

Tabla 5

Siete Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	5			
1	2	4			
1	3	3			
2					

a. ¿Cuántos triángulos diferentes es posible construir?

b. ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el triángulo? ¿Por qué?

Tabla 6

Ocho Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	6			
1	2	5			
1	3	4			
2	2				
2					
3	3				

a. ¿Cuántos triángulos diferentes es posible construir?

b. ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el triángulo? ¿Por qué?

7. Continúa con la exploración y organiza la información en la siguiente tabla.

Tabla 7

Número de Palillos		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Número de triángulos posibles											
Número de triángulos	Equiláteros										
	Isósceles										
	Escalenos										
	Acutángulos										
	Rectángulos										
	Obtusángulos										

a. ¿Qué criterios utilizaste para decidir cuándo dos triángulos son diferentes?

b. ¿Qué criterios utilizaste para decidir si un triángulo es rectángulo?

c. Escribe ternas de números que no representan las longitudes de los lados de un triángulo. ¿Qué característica esencial tienen estas ternas de números?

d. De acuerdo con lo observado hasta el momento ¿qué condición adviertes que deben satisfacer los números a, b y c para que representen las medidas de los lados de un triángulo?

8. En la siguiente tabla, escribe ternas de números enteros que representen las medidas de un triángulo que corresponda a la categoría de la fila y columna correspondiente.

Tabla 8

Triángulo	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

9. ¿Cómo cambiaría la tabla anterior si quitamos la restricción de utilizar números enteros?

En esta actividad iniciaremos trabajando con los palillos de dientes, pero dedicaremos nuestra atención a los triángulos rectángulos.

Hasta ahorita, mediante las actividades anteriores te diste cuenta que, si trabajas con números enteros, solamente con ciertas ternas de ellos es posible construir triángulos rectángulos. También te diste cuenta que siempre hay un lado mayor a cualquiera de los otros dos.

10. ¿Es posible que uno de los lados del triángulo que forman el ángulo recto sea el mayor de los tres lados? Explica tu respuesta.

11. Observa la construcción de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo que se muestra en la Figura 7

    a. ¿Cuáles son las medidas de los lados que forman el ángulo recto?

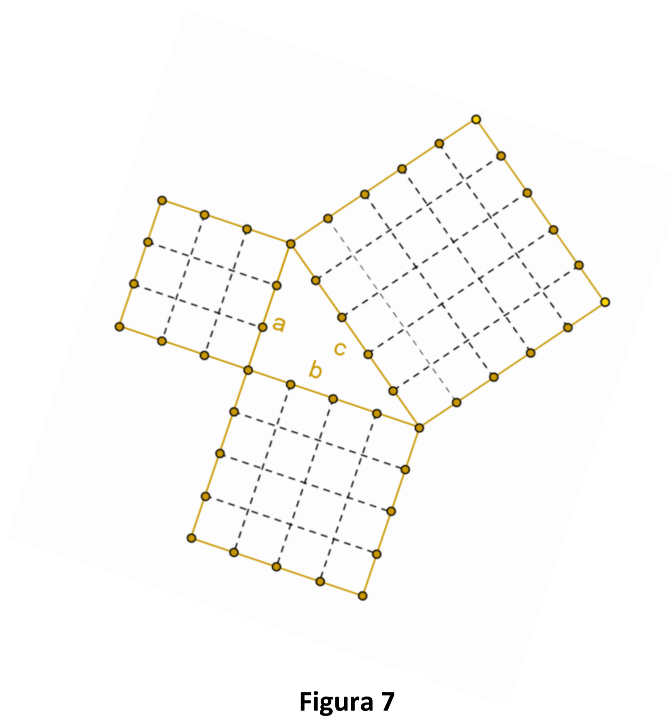


Figura 7

    b. ¿Cuál es la medida del lado mayor?

    c. ¿Cuáles son las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados del triángulo?

    d. ¿Encuentras alguna relación entre las áreas de los cuadrados? Si es así, exprésala:

12. Junto a tus compañeros de equipo construyan con los palillos (o hagan la construcción sobre el papel con sus instrumentos geométricos) cualquier otro triángulo rectángulo con medidas enteras (ustedes deciden el tamaño de la unidad); luego, en cada uno de los lados del triángulo completen un cuadrado de manera similar a la que se muestra en la anterior Figura 7.

    a. ¿Cuáles son las medidas de los lados que forman el ángulo recto en el triángulo que construyeron?

    b. ¿Cuál es la medida del lado mayor?

    c. ¿Cuáles son las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo que construyeron?

    d. ¿Encuentras alguna relación entre las áreas de los cuadrados? Si es así, ¿es la misma que para la Figura anterior?

13. Como se dieron cuenta, la construcción de otros triángulos rectángulos con medidas enteras en todos sus lados y diferentes a los dos anteriores requeriría explorar muchos palillos. Por tal razón, se les pide que en cada equipo:

    a. Asignen medidas enteras posibles a cada uno de los lados a, b y c del triángulo rectángulo de la Figura 8; tales medidas se encuentran en las tres primeras columnas de la Tabla 9. Aseguren, con la ayuda del profesor, que cada equipo seleccione una terna diferente y válida.

    b. Enseguida calculen el área de cada uno de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo basándose en las medidas asignadas.

    c. Anoten sobre la figura cada una de las áreas calculadas en su equipo.

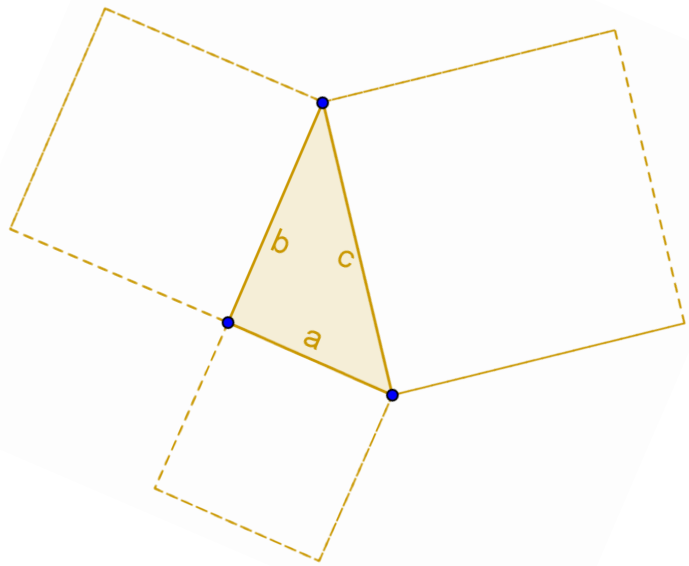


Figura 8

14. Con la ayuda del profesor organicen la información sobre las medidas asignadas por los diferentes equipos en la Tabla 9.

Tabla 9

Medidas enteras de lados			Área del cuadrado de lado a	Área de cuadrado de lado b	Suma de áreas de cuadrados de lados a y b	Área del cuadrado de lado c
Lados que forman ángulo recto		Lado mayor				
a	b	c				
3	4	5	9	16	25	25
8	6	10				
12	9	15				
12	16	20				
5	12	13				
24	10	26				
21	28	35				
15	36	39				
27	36	45				

a. ¿Cómo son las cantidades registradas en las dos últimas columnas?

b. Escriban un enunciado que exprese la relación entre las medidas que se asignaron en la Tabla 9 a los lados del triángulo rectángulo y las áreas de los cuadrados construidos sobre ellos. Compartan en el grupo sus respuestas y ajusten la redacción si es necesario.

15. Ahora, si se asignan cualesquiera medidas enteras a los lados a y b del triángulo rectángulo, sin importar que el lado c no sea entero, utiliza la relación que enunciaste en la tarea anterior para completar la tabla 10:

Tabla 10

Medidas enteras de lados			Área del cuadrado de lado a	Área de cuadrado de lado b	Suma de áreas de cuadrados de lados a y b	Área del cuadrado de lado c
Lados que forman ángulo recto		Lado mayor				
a	b	c				
1	2		1	4	5	5
1	1					
2	3		4	9		
4	1					17
5	6				61	
3	5					
8		$\sqrt{128}$	64		128	
7	3				58	58
10						200

d. Escribe otros tres casos en los que usando esta relación, logres encontrar el área del cuadrado construido sobre uno de los lados de un triángulo rectángulo cuando te dan datos relacionados con los otros dos (lados o cuadrados construidos sobre ellos)

I. Caso 1.

II. Caso 2

III. Caso 3

Desarrollo

Actividad 2
Adaptación e implementación de la propuesta asignada

Tarea 2. Adaptación de la propuesta didáctica asignada

La adaptación de la actividad didáctica asignada debe tomar en cuenta diversos aspectos, los cuales se plantean a continuación. Deberán quedar incorporados en dicha adaptación, la cual deberá presentarse en un formato que incluya también los elementos de un plan de clase.

1. A partir de la Actividad didáctica asignada, seleccionen la situación problema que acuerden para llevar a cabo la experiencia de intervención.

2. Describa el contexto que utilizarán para el desarrollo de la situación problema.

3. ¿Cuáles son los conceptos geométricos que intervienen en la actividad?

4. ¿Cómo se articularán las representaciones figurales, discursivas y/o tabulares?

5. ¿Cuáles son los procedimientos o estrategias que se promoverán y cómo se validarán?

6. ¿Cuáles son los procesos cognitivos asociados al desarrollo del pensamiento geométrico que se enfatizarán en los diferentes momentos de la actividad?

7. ¿Qué relación tendrán estos procesos con las habilidades y saberes previos de los estudiantes?

8. ¿Cuáles son las competencias que se promoverán?

9. ¿Qué dificultades se pudieran presentar y cuáles serían las estrategias didácticas para enfrentarlas?

10. ¿Qué tiempo se requerirá para llevar a cabo la actividad? Consideren el tiempo que les indique el instructor

11. ¿Qué tipo de tecnología digital se utilizará y en qué momento? ¿Se requerirá algún tipo de material concreto manipulable?

12. ¿Cómo se organizará la interacción en el aula: trabajo individual, trabajo en equipo, trabajo grupal? ¿Qué papel jugará el instructor? ¿Y los estudiantes?

13. ¿Habrá momentos en los que se promueva el debate? ¿Con qué propósito?

14. ¿Cómo se evaluará el desarrollo de la actividad? ¿Qué elementos le proporcionarán información para ello?

Tarea 3. Implementación de la propuesta didáctica asignada

La implementación de la actividad didáctica adaptada se llevará a cabo de acuerdo a la calendarización marcada por el instructor. Tomen en cuenta que deberán jugar distintos papeles, ya sea como profesores, dirigiendo la actividad, o como estudiantes, desarrollando las actividades adaptadas por otros equipos. En el primer caso, planeen y determinen en el equipo las funciones de monitoreo y/o conducción de la puesta en escena de la actividad. Recuerden que los monitores tendrán como función principal recabar la información para la evaluación del desarrollo de la actividad.

Cierre

Actividad 3

Análisis y reporte de resultados de la experiencia de intervención

Tarea 4. Análisis de la implementación de la propuesta didáctica asignada

La implementación de su actividad didáctica debe valorar los aspectos que se consideraron en su adaptación, así como algunos otros que surjan y que consideren de interés.

1. ¿El contexto de la actividad motivó el interés de los participantes?

2. ¿Se lograron las intenciones didácticas propuestas, en relación con contenidos, representaciones, habilidades, competencias, procesos cognitivos para el desarrollo del pensamiento geométrico?

3. ¿Resultaron suficientes las habilidades y saberes previos de los estudiantes?

4. ¿Qué dificultades se presentaron y cómo se enfrentaron?

5. ¿Fue suficiente el tiempo considerado para el desarrollo completo de la actividad? Explique con detalle

6. ¿Qué papel jugó la tecnología digital utilizada? ¿Fue adecuada? Si se utilizó algún tipo de material concreto manipulable, ¿resultó adecuado? ¿Qué relación se dio en el uso de ambos tipos de recursos?

7. ¿Cómo se dio la interacción en el aula? ¿Cómo favoreció el logro de los propósitos planteados? ¿Se asumieron los roles de acuerdo a lo esperado? ¿Surgió el debate como se había previsto? ¿Resultó enriquecedor? Explique

8. ¿Resultó pertinente la información recabada para la evaluación del desarrollo de la actividad? De acuerdo a ella, ¿cuál es su valoración general? ¿Qué cosas resultaron adecuadas y qué cosas necesitan mejora?

Tarea 5. Reporte de la experiencia de intervención

A partir de la adaptación, implementación y análisis de la actividad didáctica desarrollada, generen un reporte escrito que integre, a manera de síntesis, las experiencias llevadas a cabo.

El formato para la presentación de este reporte deberá ceñirse a las indicaciones que el instructor proporcione a todo el grupo.

Tabla de contenidos Secuencia 2

Pensamiento Algebraico

Experiencia de Intervención

Secuencia 2

Pensamiento Algebraico

Experiencia de Intervención

Presentación

Propósitos de esta secuencia;

Determinar y describir las características esenciales de las tareas sobre generalización algebraica de sucesiones numéricas figurales, a partir del análisis crítico de diferentes ítems empleados en las investigaciones especializadas.

Rescatar algunos de los principales resultados de la investigación educativa sobre la generalización algebraica de sucesiones numéricas en formato figural, tomándolos como criterios para el diseño y/o adaptación de situaciones de aprendizaje relacionadas con la introducción al álgebra en la escuela secundaria, así como para la gestión y conducciones de dichas situaciones de aprendizaje en el aula, en un entorno de tecnologías digitales matemáticas.

Proporcionar los elementos básicos para la elaboración de un formato para la Hoja de Trabajo del alumno, que incorpore las características esenciales de las tareas de generalización, y que por lo mismo incorpore los principales resultados de la investigación educativa en este aspecto.

▸ Inicio

Actividad 1

Características de las tareas de generalización de sucesiones numéricas.

Tarea 1.

A partir de su experiencia como participante en la Sesión 2 de cada uno de los dos cursos anteriores (*Actividades Selectas de Matemáticas I* y *Fundamentos de Análisis Didáctico I*), analice con detenimiento las situaciones de aprendizaje propuestas a alumnos de educación básica, que se transcriben más abajo. Basándose en dicho análisis, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles de estas situaciones recurren a la experiencia cotidiana del alumno de secundaria?
   Respuesta:

2. ¿Cuáles de estas situaciones tienen solamente la intención de promover la exploración de patrones? Argumente su respuesta.
   Respuesta:

3. ¿Cuáles de estas situaciones tienen la pretensión explícita de provocar la generalización algebraica del patrón? Argumente su respuesta.
   Respuesta:

4. ¿Cuáles de estas situaciones pueden ser adaptadas para promover la construcción de significado para el concepto de expresiones algebraicas equivalentes? ¿De qué modo habría que adaptarlas?

   Respuesta:

5. ¿Cuáles de estas situaciones pueden ser adaptadas para promover la construcción del significado para las transformaciones algebraicas? ¿De qué modo habría que adaptarlas?

   Respuesta:

6. ¿Cuáles de estas situaciones conducen a patrones de tipo lineal? ¿Cuáles son las distintas expresiones algebraicas lineales a las que conducen?

   Respuesta:

7. ¿Cuáles de estas situaciones conducen a patrones de tipo cuadrático? ¿Cuáles son las distintas expresiones algebraicas cuadráticas a las que conducen?

   Respuesta:

8. ¿Cuáles de estas situaciones conducen de manera natural a formular una relación de recurrencia entre los términos, en vez de una expresión algebraica cerrada para el término general?

   Respuesta:

SITUACIÓN 1[4]

Un videoclub alquila 50 películas al día. En este mes han observado que aumentan sus alquileres de forma que cada día alquilan 3 películas más que el anterior.

- ¿Cuántas películas alquilarán en los cinco días siguientes al día en que se hizo la observación?
- Justifica tu respuesta.

SITUACIÓN 2[5]

Se tiene la siguiente secuencia de números:

$$3, 7, 13, 21, \cdots$$

- Escribe los cuatro números siguientes de la secuencia.
- Justifica tu respuesta.

SITUACIÓN 3[6]

Se tiene la siguiente secuencia de números:

$$1, 4, 7, 10, \cdots$$

- Escribe el número que estará en el lugar 234 de esta secuencia.
- Justifica tu respuesta.

[4] Tomado de Cañadas S., M.C; Castro M., E. & Castro M., E. (2006) *Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas*.

[5] Tomado de Cañadas S., M.C; Castro M., E. & Castro M., E. (2006) *Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas*.

[6] Tomado de Cañadas S., M.C; Castro M., E. & Castro M., E. (2006) *Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución de problemas que involucran sucesiones lineales y cuadráticas*.

SITUACIÓN 4[7]

Las latas metálicas se empaquetan para formar pirámides.
La tabla muestra cuántas latas se necesitan para diferentes pirámides. Completa la tabla.

Pirámide número	1	2	3	4	5		20		100
Número de latas	1	4	9	16					

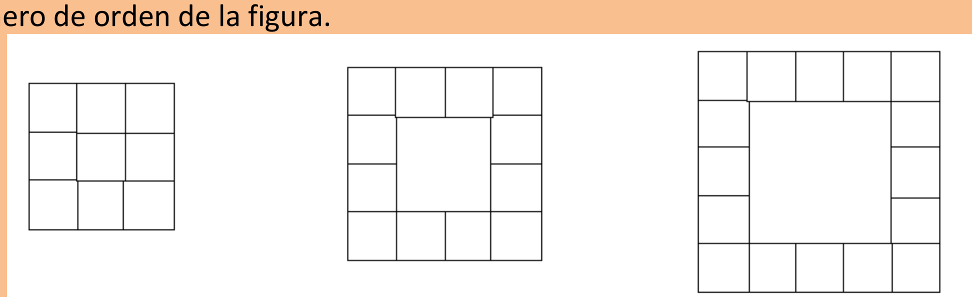
SITUACIÓN 5[8]

Se utilizan azulejos para crear imágenes según un patrón. La siguiente tabla muestra el número de azulejos para una imagen en particular.

Imagen número	1	2	3	4	5	6	7	8	…	20	…	60	…	n
Número de azulejos	2	5	10	17	26	37								

SITUACIÓN 6[9]

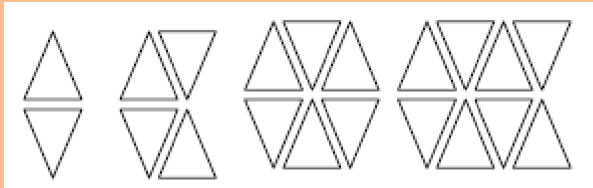
Juego 1: Bordes
Encuentra una fórmula general para calcular el número de cuadrados en función del número de orden de la figura.



[7] Tomado de Sasman, M.; Linchevski, L.; Olivier, A. & Liebenberg, R. (1998) *Probing childrens' thinking in the process of generalisation*. En: Proceedings of the Fourth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa (pp. 210-218). Pietersburg: University of the North.
[8] Tomado de Sasman, M.C.; Linchevski, L. & Olivier, A. (1999) *The influence of different representations on children's generalization thinking processes*. En: J. Kuiper (Ed.), Proceedings of the Seventh Annual Conference of the Southern African Association for Research in Mathematics and Science Education (pp. 406-415). Harare, Zimbabwe.
[9] Tomado de Olfos A., R.; Villagrán C., E. (2001) *Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra*. Integra, No. 5. Departamento de Matemáticas, Universidad de Viña del Mar, Chile.

SITUACIÓN 7[10]

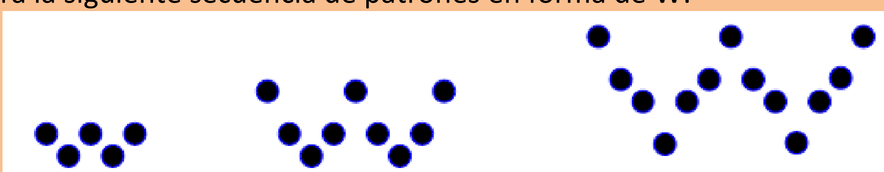
Dibuja el siguiente paso en este patrón de crecimiento:



Escribe la regla general para este patrón.

SITUACIÓN 8[11]

El problema de la secuencia de puntos en forma de W.
Considera la siguiente secuencia de patrones en forma de W:



Patrón 1 Patrón 2 Patrón 3

(A) ¿Cuántos puntos hay en el patrón 6? Explica.

(B) ¿Cuántos puntos hay en el patrón 37? Explica.

(C) Encuentra una fórmula directa para el número total D de puntos en el patrón n. Explica cómo has obtenido tu respuesta. Si has obtenido tu fórmula numéricamente, explícala en términos del patrón de puntos de arriba.

(D) La fórmula directa de Zac es la siguiente: $D = 4(n + 1) - 3$. ¿Es correcta esta fórmula? ¿Por qué sí o por qué no? Si esta fórmula es correcta, ¿cómo podría él haberla imaginado?

[10] Tomado de Warren, E. A. (2005) *Young childrens' ability to generalize the pattern rule for growing patterns*. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 305-312. Melbourne: PME.

[11] Tomado de Becker, J. R., & Rivera, F. D. (2007). *Factors affecting seventh graders' cognitive perceptions of patterns involving constructive and deconstructive generalization*. In J. Woo, K. Park, H. Sew, & D. Seo (Eds.), Proceedings of the 31st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 129–136). Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

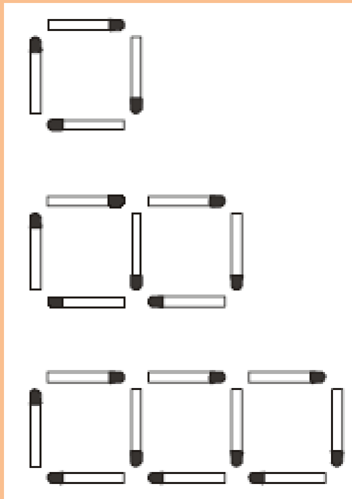
SITUACIÓN 9[12]

Cerillas

Arreglo 1

Arreglo 2

Arreglo 3



Arreglo número	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de cerillas	4	7	10					

a) Encontrar el número de cerillas necesarias para el arreglo 4. Puedes usar cerillas o dibujar un diagrama, si lo encuentras útil.

b) Completa la tabla.

c) ¿Cuántas cerillas se necesitan para el arreglo 20?

d) ¿Cuántas cerillas se necesitan para el arreglo 30?

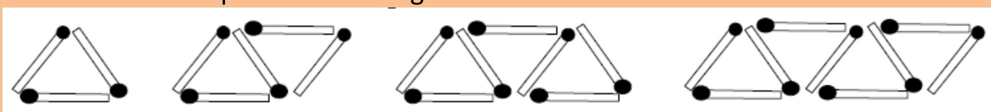
e) Describe una regla que te ayude a averiguar el número de cerillas de acuerdo con el número de arreglo.

f) ¿Cuántas cerillas se necesitan para el arreglo N?

[12] Tomado de Axiak, C. (2003) *Developing algebraic notation trough number patterns*. Journal of Maltese Education Research, Vol. I, No. 1, pp-73-95.

SITUACIÓN 10[13]

Se utilizan cerillas para construir figuras como éstas:



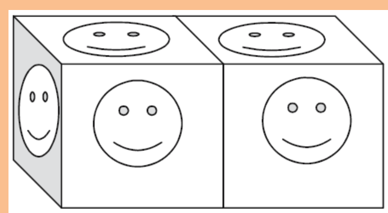
La tabla siguiente muestra cuántas cerillas se utilizan para las distintas figuras. Completa la tabla.

Pirámide número	1	2	3	4	5		20		100
Número de latas	3	5	7	9					

SITUACIÓN 11[14]

El problema de las etiquetas engomadas en los cubos

Una empresa fabrica barras de color uniendo cubos en una fila y utilizando una máquina para pegar etiquetas de "emoticones" en las barras. La máquina pega exactamente una etiqueta en cada cara expuesta de cada cubo. Cada cara expuesta de cada cubo debe tener una etiqueta, de manera que esta barra de longitud 2 (dos cubos) necesitará diez etiquetas.



1. ¿Cuántas etiquetas se necesitarían para las barras de longitudes 1–10?

2. ¿Cuántas etiquetas se necesitarán para una barra de longitud 20? ¿Para una de longitud 50? ¿Para una de longitud 127? Explica cómo encontraste estos valores.

3. Explica cómo se puede encontrar el número de etiquetas necesarias para una barra de cualquier longitud. Escribe una regla que se pueda utilizar para determinar esto.

[13] Tomado de Axiak, C. (2003) *Developing algebraic notation trough number patterns*. Journal of Maltese Education Research, Vol, I, No. 1, pp-73-95.

[14] Tomado de Lannin, J.; Barker, D.; Townsend, B. (2006) *Why, why should I justify*? Mathematics Teaching in the Middle School 11(9), 438-443.

SITUACIÓN 12[15]

El problema de los pirulines.

La Directora ha decidido organizar un concurso de lectura para todos los estudiantes de la escuela. Cada día, el estudiante que haya leído más libros en su grado recibirá un pirulín. La Directora ha comprado una caja con 800 pirulines. Cada día 7 pirulines se toman de la caja y se dan a un mejor lector (uno por cada grado, K-6).

¿Cuántos pirulines habrá en la caja después de que el concurso se ha prolongado 4 días? ¿6 días? ¿10 días? ¿20 días? 34 días? 45 días?

Escribe una regla que permita calcular el número de pirulines después de cualquier número de días.

¿Cuánto tiempo tomará hasta que la Directora se quede sin pirulines?

Desarrollo

Actividad 2

Rescatando algunos resultados de la investigación educativa

"Muchos profesores cubren el tema muy rápidamente, presentando solamente patrones que conducen a expresiones del tipo $an + b$, y comparten su truco para llegar a esa expresión desde el primer ejemplo. En el caso de la T creciente, los maestros a menudo la transforman en un patrón numérico, planteando de inmediato estas preguntas: "¿Cuántas estrellas hay en la primera T? ¿Y en la segunda? ¿Cuántas en la tercera? ¿En qué número están aumentando cada vez?" Una vez que los estudiantes han respondido a la última pregunta, se les dice que ese número es la a en la expresión $an + b$. Para obtener b, los estudiantes sólo tienen que examinan la primera T en el patrón. Es difícil aceptar que el pensamiento algebraico podría ser desarrollado mediante este enfoque".

Lee y Freiman (2006): Pattern exploration…

[15] Tomado de Lannin, J.; Barker, D. & Townsend, B. (2006) *Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection*. Mathematics Education Research Journal, Vol. 18, No. 3, pp. 3-28.

Tarea 2.

Ciertamente, la situación descrita en la cita anterior no es la que quisiéramos reproducir en nuestras aulas. Sin embargo, para encontrar alternativas que permitan mejorar esta situación, es necesario apoyarse con sentido crítico en los resultados de la investigación en Matemática Educativa, relacionados con la generalización algebraica de sucesiones numéricas figurales. En la presente Actividad, se analizan algunos de los más importantes resultados de dicha investigación. Trabajando en equipo con sus compañeros (y, a solicitud del Instructor, con todo el grupo) analice estos resultados, y trate de formular las implicaciones que cada uno de ellos tiene para el diseño o la adaptación de situaciones de aprendizaje para el aula. Formule estas implicaciones como sugerencias o características para el diseño de dichas actividades.

Resultado 1: Tres obstáculos

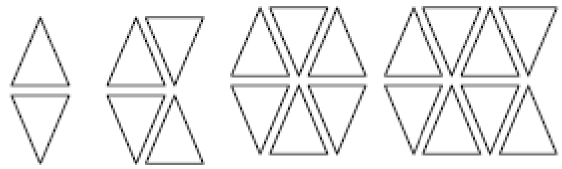
> En primer lugar, hubo obstáculos en el nivel de la percepción, lo que implica visualizar el patrón. En segundo lugar, se han presentado obstáculos al nivel de la verbalización, lo que implica expresar el patrón claramente. En tercer lugar, hay obstáculos en el nivel de la simbolización, lo que tiene que ver con usar una variable n en una expresión general.
> Dindyal (2007): HS students' use of patterns…

Resultado 2: El papel del dibujo

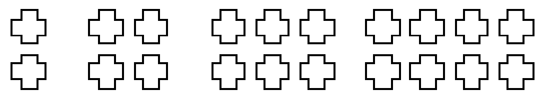
El primer resultado importante que de manera casi unánime reportan las investigaciones específicas consiste en que "el dibujo juega un cierto papel en el método empleado por los alumnos en las resolución de las tareas" (Stacey, 1989; citado por García y Martiñón, 1999), de que "ciertas respuestas de los alumnos están claramente influenciadas por el diagrama que acompaña al ítem" (García y Martiñón, 1999).

En su investigación, García y Martiñón (1999) asumen este hecho como una hipótesis de trabajo: "Partimos de la hipótesis de que en el desarrollo y establecimiento de la generalización por parte de muchos alumnos juega un papel esencial el diagrama que acompaña a las situaciones".

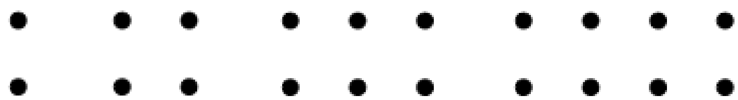
Ejemplo 2.1 Analice las siguientes cuatro variantes de una misma situación de generalización. ¿En cuál de ellas el dibujo sugiere más fácilmente o de una manera más directa el patrón, así como su descripción verbal y/o simbólica? Discuta estas preguntas con sus compañeros de equipo.



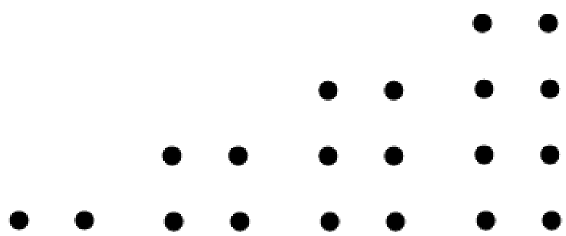
Variante 1



Variante 2

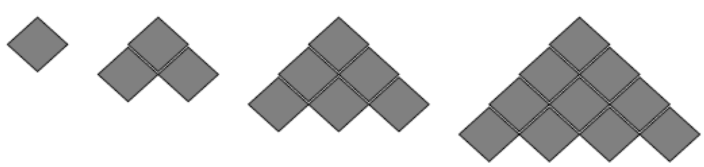


Variante 3

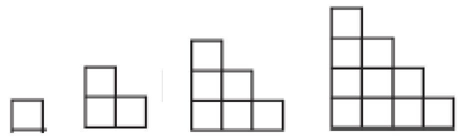


Variante 4

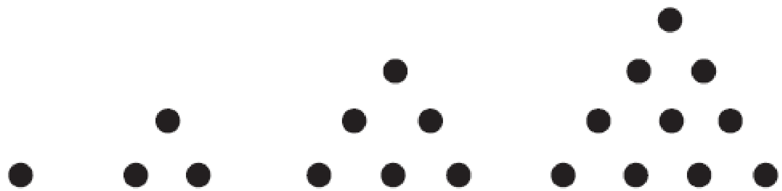
Ejemplo 2.2 Analice las siguientes cuatro variantes de una misma situación de generalización. ¿En cuál de ellas el dibujo sugiere más fácilmente o de una manera más directa el patrón, así como su descripción verbal y/o simbólica? Discuta estas preguntas con sus compañeros de equipo.



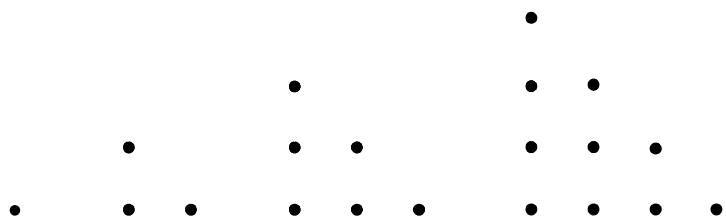
Variante 1



Variante 2

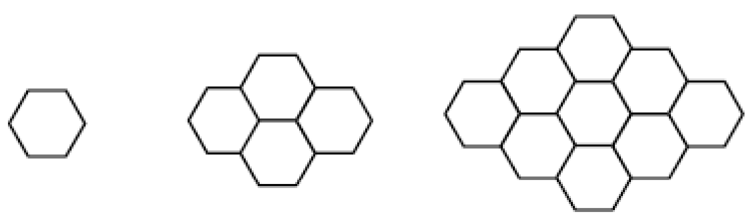


Variante 3

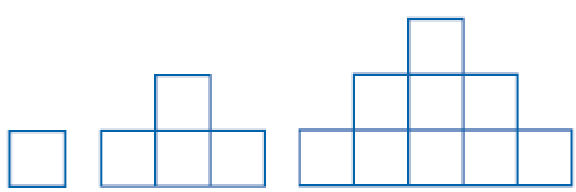


Variante 4

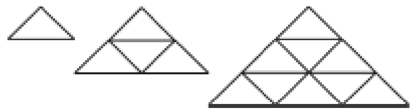
Ejemplo 2.3 Analice las siguientes cinco variantes de una misma situación de generalización. ¿En cuál de ellas el dibujo sugiere más fácilmente o de una manera más directa el patrón, así como su descripción verbal y/o simbólica? Discuta estas preguntas con sus compañeros de equipo.



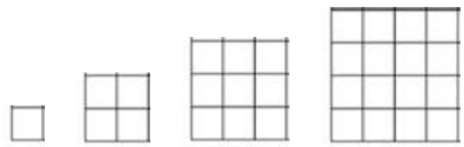
Variante 1



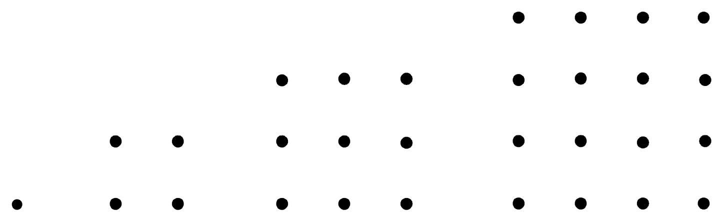
Variante 2



Variante 3



Variante 4



Variante 5

En nuestra investigación hemos mostrado que el dibujo que acompaña a las preguntas juega un doble papel en el proceso de abstracción y generalización (García Cruz y Martiñón, 1997a), sirviendo como el entorno en el que la generalización es establecida por los estudiantes al desarrollar una estrategia visual, y también como el escenario en el que los estudiantes comprueban la validez de la estrategia numérica que desarrollan durante el proceso de abstracción y generalización.
García y Martiñón (1997b): LP&SocioMathematical Norms…

1. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 3: Continuar dibujando para entender el patrón

Sin embargo, para algunos niños, hay una cierta evidencia de que dibujar las figuras pudo haberles ayudado a comprender la relación entre ellas. (…) Hay una sugerencia de que algunos niños que hicieron uso correcto de los dibujos se volvieron más conscientes de la estructura del patrón a medida que dibujaban las figuras.
Houssart y Evens (2002): Extending a sequence of shapes…

2. Después de haber analizado esta cita bibliográfica, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 4: La tendencia a usar la regla de tres

García (1999) detectó la presencia de una estrategia a menudo empleada por los alumnos en los problemas sobre generalización de patrones lineales, basada en el uso de la regla de tres, lo que explicó del siguiente modo: "es conocida la predisposición que tienen algunos alumnos a utilizar la regla de tres en aquellas cuestiones en que se les da tres datos y se les pide el cálculo de un cuarto, ya que no se detienen a analizar la situación dada y aplican tal algoritmo sea o no directamente proporcional la relación entre las variables".

Una consecuencia de esta estrategia es considerar que un tamaño buscado tiene el doble de elementos que el tamaño mitad correspondiente.

Sin embargo, el error más común y casi universal hecho por los niños en sus esfuerzos por encontrar un método manejable para calcular los valores más grandes, fue el de utilizar la propiedad de proporcionalidad de que si $x_2 = k \cdot x_1$, entonces $f(x_2) = k \cdot f(x_1)$.
Sasman, Linchevski,… Probing children's thinking… (1998)

Stacey (1989) identificó esta estrategia de "razonamiento proporcional" como una importante fuente de dificultades y errores en el trabajo con patrones.

La investigación educativa ha tratado de determinar la causa de esta tendencia común. Una explicación plausible es la observación siguiente:

> Uno podría argumentar que nuestra selección de números *accionó* el error de la multiplicación proporcional, es decir, que nuestra elección de "números atractivos" como n = 5, 20 y 100 *estimuló* el error. Uno podría también sostener que si utilizáramos números no atractivos como n = 17, 27 y 83, los niños no utilizarían el método erróneo de la multiplicación proporcional. Sin embargo, creemos que nuestra evidencia muestra que los niños, en su búsqueda de un método corto manejable, *crean* "números atractivos" ellos mismos.
> Linchévski y otros (1998) Moments of conflict…

> ... Como se desprende de los ejemplos presentados en este documento, el uso de números no atractivos probablemente no evitará el error de la multiplicación proporcional, omnipresente cada vez que los estudiantes encuentran números atractivos, ni impedirá que recurran a las otras estrategias erróneas divulgadas aquí.
> Sasman, Linchevski y Olivier (1999)

Estos autores han tratado de encontrar alternativas para hacer conscientes a los alumnos del error de usar la regla de tres en situaciones en las que no es aplicable:

> …tratamos de crear un conflicto cognitivo, utilizando tres estrategias diferentes, como se describe a continuación.
>
> Estrategia 1: La primera estrategia que usamos fue la de confrontar la respuesta inferida mediante el enfoque recursivo con la obtenida mediante el enfoque equivocado.
>
> Estrategia 2: La segunda estrategia fue crear un conflicto, eligiendo un punto de partida diferente del que el niño había utilizado al aplicar el método de multiplicación. Elegir diferentes puntos de partida llevó a respuestas diferentes para $f(n)$. Por ejemplo, Vusi espontáneamente evaluó $f(100)$ como $2 \cdot f(50) = 2 \cdot 147 = 294$. El entrevistador le invitó a utilizar diferentes puntos de partida. Él tomó $f(10)$ y $f(20)$ y obtuvo $f(100) = 10 \cdot f(10) = 330$ y $f(100) = 5 \cdot f(20) = 315$.
>
> Estrategia 3: La tercera estrategia fue aplicar el método que el niño utilizó en el dominio extendido, al dominio en la tabla original. Por ejemplo, Thandi obtuvo una respuesta para

$f(5)$ utilizando correctamente el método recursivo $f(5) = f(4) + 8 = 36$. Para $f(20)$, sin embargo, obtuvo 28.

Sasman, Linchevski y Olivier (1999)

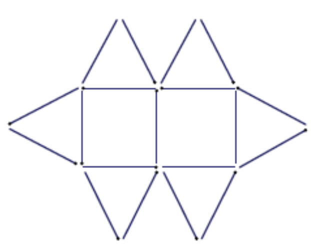
3. Después de haber analizado las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

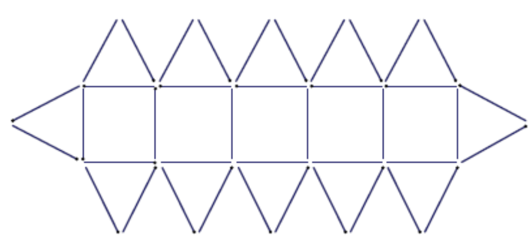
Resultado 5: ¿Términos consecutivos o no consecutivos? ¿Proporcionales o no proporcionales?

La elección de valores de entrada consecutivos o no consecutivos, o de valores que son múltiplos el uno del otro (por ejemplo, 5, 10 y 20), también actúan como factores potenciales que influyen en la selección de la estrategia por parte del estudiante.
Lannin et al (2006): Algebraic generalization strategies

En consecuencia con esta observación, el formato sugerido por estos autores para presentar las tareas de generalización de sucesiones numéricas figurales es análogo al que se muestra enseguida.



For 2 squares you need a total of 19 matches.

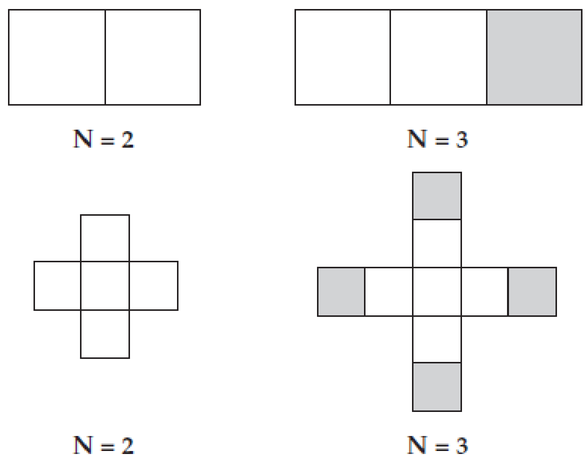


For 5 squares you need a total of 40 matches.

Tal como era de esperar, la presentación de términos no consecutivos tendió a desalentar las estrategias numéricas, basadas simplemente en la diferencia común entre los términos consecutivos, y por lo tanto produjo una mayor diversidad de expresiones para el término general.
Samson (2007): Patterns of visualization

Por lo tanto, hemos encontrado que algunas tareas pueden promover el uso del razonamiento recursivo, mientras que otras pueden alentar el uso del razonamiento explícito.

Los estudiantes tienden a usar reglas recursivas cuando los valores de entrada son consecutivos, independientemente de la imagen visual que se les presente.
Lannin et al (2006): Algebraic generalization strategies



En estas imágenes, la parte sombreada ilustra la diferencia entre términos consecutivos.

4. Después de haber analizado las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

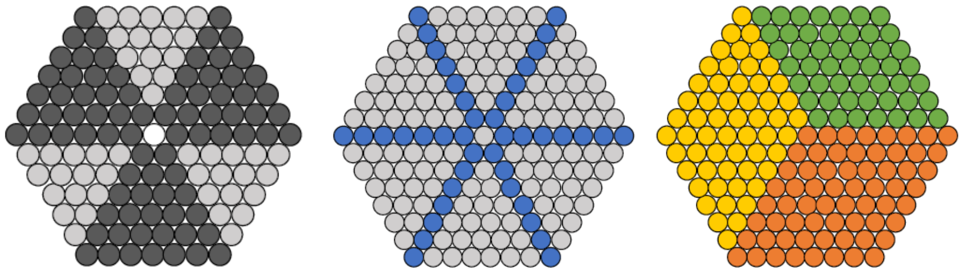
Resultado 6: Fomentar la multiplicidad de soluciones y compararlas

Las tareas de enseñanza deben estar dispuestas de manera que promuevan una amplia gama de estrategias. Las tareas deben incluir tanto situaciones lineales crecientes y decrecientes, como situaciones que fomenten tanto el razonamiento recursivo como el explícito. Mezclar situaciones que inciten a los alumnos a utilizar una multitud de estrategias y construir una variedad de reglas les permite reflexionar sobre las ventajas y limitaciones de estas formas de razonamiento. Las tareas que se utilizan en el aula deben motivar a los estudiantes a utilizar estrategias de generalización correctas e incorrectas, animándoles a examinar cuándo se deben aplicar las diferentes estrategias. Los profesores deben promover la reflexión sobre los errores de los estudiantes, para que éstos comprendan mejor por qué se producen estos errores.

Este paso es crucial en el uso de patrones para desarrollar un pensamiento algebraico rico. También conduce a múltiples expresiones del mismo patrón, abriendo así la puerta a las expresiones equivalentes y la manipulación simbólica. (…) Percibir un patrón no es suficiente. Aunque los niños menores expresan una amplia gama de percepción de los patrones para una sola configuración y muestran una considerable flexibilidad para pasar de una a otra, los de mayor edad tienden a aferrarse a una sola percepción de los patrones y a bloquear otras, por temor a que múltiples percepciones "me confundan".
Lee y Freiman (2006): Pattern exploration…

Habíamos subrayado durante la sesión de clase que, cuando se habla de un problema, los estudiantes deben ofrecer soluciones diferentes de las ya aportadas, lo que es una norma social habitual, pero lo que hace una diferencia matemática es una norma socio matemática. Cuando se discute la validez o diferencia de una estrategia, los estudiantes tienen que contribuir con argumentos específicos, poniendo de relieve cómo una estrategia o esquema es diferente y por qué es correcta, y al hacerlo, los estudiantes tienen que reflexionar sobre su propio pensamiento, y encontrar los argumentos apropiados. Así pues, estas normas regulan la argumentación matemática e influyen en las oportunidades de aprendizaje para toda la clase.
García y Martiñón (1997b): LP&SocioMathematical Norms..

Es una lección valiosa para los estudiantes tener en cuenta que algunas de las percepciones de los patrones no son fáciles de expresar simbólicamente. Si los estudiantes han desarrollado una cierta flexibilidad en la percepción de patrones, y son capaces de ver un patrón de varias maneras, ellos se mueven con facilidad a una percepción diferente, que es más susceptible de ser expresada simbólicamente, en lugar de bloquearse en una visión inexpresable y ser incapaz de cambiar de punto de vista.
Lee y Freiman (2006): Pattern exploration…



5. Después de haber analizado las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 7: Generalización de la estructura de la figura y del método de conteo de sus elementos

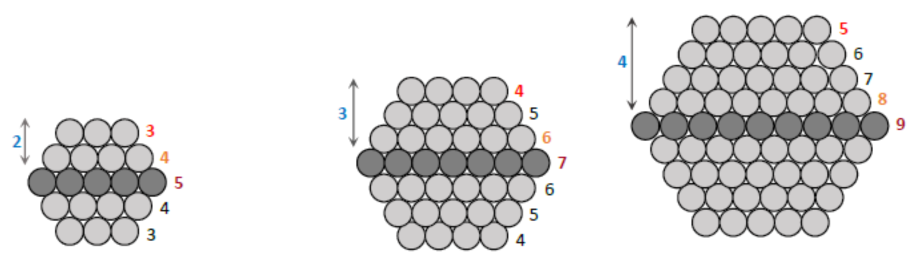
…dos cosas diferentes que están siendo generalizadas: el contexto y el cálculo. (…) Esto nos llevó a conjeturar que la posibilidad de generalizar el contexto no era suficiente para permitir a los alumnos expresar la relación en notación algebraica o similar, y que la posibilidad de generalizar el cálculo requerido sirve como un "puente" que apoya sustancialmente a los alumnos en la construcción de significado para una expresión simbólica de la relación.
(…)
Los estudiantes siempre pensaron en la respuesta numérica, no en el método en sí.

... Está claro que la presentación visual de los números en un formato de tabla para la función no impactó en los errores que cometen los niños.

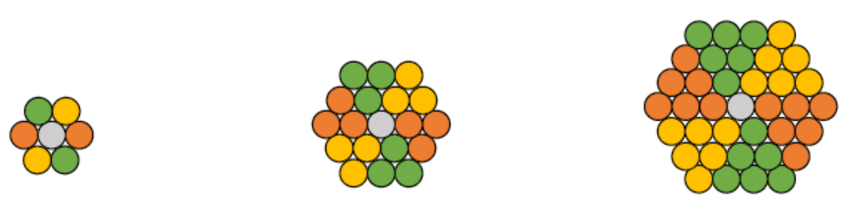
Ainley, Wilson y Bills (2003): Generalising the calculation…

Las situaciones deben ser proporcionadas para desarrollar conexiones entre la imagen visual y los cálculos en la generalización.
Lannin y otros (2006) Algebraic generalization…

Una serie de mecanismos de visualización han sido puestos de manifiesto en este meta-análisis, y son bastante reveladores en términos de la sutileza y la complejidad del razonamiento visual evidente en las estrategias de generalización. La mayoría de las estrategias visuales comenzaron por la deconstrucción de un ejemplo genérico en cierto número de partes componentes. En algunos casos, estas partes componentes se subdividen en partes aún más pequeñas. Esta descomposición del ejemplo genérico es esencialmente una retro-síntesis del todo en partes componentes percibidas. (…) Una vez separados en sus partes componentes, el proceso de visualización se convirtió en uno de la reconstrucción por medio de la multiplicación de las diversas partes por la frecuencia de su aparición y, finalmente, sumando los diversos múltiplos y constantes para llegar a un término general final. En general, cuanto mayor es el número de diferentes partes componentes, mayor será la complejidad de la expresión general derivada.
Samson (2007): Patterns of visualization



$(3+4)\times 2+5$ $\quad$ $(4+6)\times 3+7$ $\quad$ $(5+8)\times 4+9$



$6\times 1+1$ $\quad$ $6\times(1+2)+1$ $\quad$ $6\times(1+2+3)+1$

6. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 8: Escoger el primer término

Decidir cómo iniciar el patrón es importante. Nótese que no empezamos este patrón con una sola estrella, por dos razones. En primer lugar, en nuestra investigación hemos encontrado estudiantes que se oponen a que una sola estrella sea considerada una T. En segundo lugar, la expresión algebraica del patrón que empieza con una sola estrella es un poco más complicada, debido a que dicha expresión general involucra la resta ($3n - 2$, en oposición a $3n + 1$).
Lee y Freiman (2006): Pattern exploration…

7. Después de haber analizado la cita bibliográfica anterior, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 9: La validación de una generalización

Aunque la investigación ha documentado las dificultades de los estudiantes tanto con la generalización como con la justificación, pocos trabajos han dedicado considerable atención a la interacción entre ellas. El razonamiento algebraico sofisticado, sin embargo, depende de la participación profunda en ambas actividades. (…) Por otra parte, la conexión entre la generalización y la justificación es bidireccional: el realizar actos de justificación puede tener más probabilidades de influir en las capacidades de los estudiantes para generalizar, y viceversa.
Ellis (2007): Generalizing and Justifying

Si el debate sobre lo que constituye una justificación válida no se produce, los estudiantes a menudo se basan en los aspectos superficiales de un argumento, como el uso de símbolos matemáticos formales, por encima del razonamiento matemático que subyace en el argumento (Healy y Hoyles, 2000).
…no está claro *cómo* esta regla ha sido obtenida, o *por qué* funciona.
Lannin, Barker y Townsend (2006) Why justify?

Como consecuencia de esta observación, los autores sugieren incluir, en la actividad para el alumno, un apartado que plantee cuestiones para ser discutidas, como la siguiente:

Los tres estudiantes que se mencionan abajo usaron la regla $6 + 3(n - 1)$. ¿Cuál de ellos explica mejor por qué su regla siempre va a funcionar?

Mollie	Raquel	Sam
Hice una tabla de valores para 3, 4 y 5 carteles. Entonces descubrí que podía usar la regla $6 + 3(n - 1)$ para obtener el número de tachuelas igual a 12, 15 y 18, que son los valores correctos. Mi regla siempre funcionará.	Cada cartel adicional añade tres tachuelas más. Así que para encontrar el número de tachuelas agregadas al primer cartel (con 6 tachuelas) es necesario multiplicar el número de carteles adicionales $(n - 1)$ por 3. Mi regla siempre funcionará.	Después de encontrar la regla $6 + 3(n - 1)$, tomé el número 17 para el número de carteles y probé para ver si mi regla daría la respuesta correcta de 54 tachuelas. Dibujé la imagen de 17 carteles, y mi regla dio la respuesta correcta. Mi regla siempre funcionará.

Lannin, Barker y Townsend (2006) Why justify?

También sugieren incluir preguntas como las siguientes, con la finalidad de orientar la argumentación que es esencial para validar la generalización:

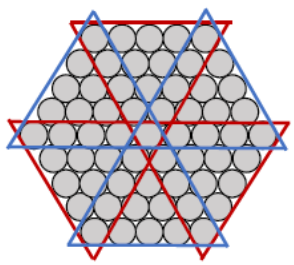
¿Qué está cambiando en esta situación?
¿Qué se mantiene igual?
¿Cómo se relaciona tu regla con la situación del problema?
¿Cómo sabes que la regla funcionará para 105 carteles (o para algún otro número relativamente grande)?
¿Tu regla siempre funcionará (para todos los valores apropiados en la situación)?
¿Cómo sabes que tu regla siempre funcionará?

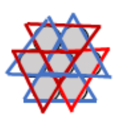
8. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 10: Generalizaciones constructivas y deconstructivas

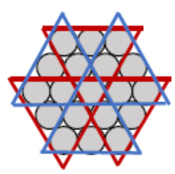
…mientras que todos los de 6to grado en la clase desarrollaron la capacidad de construir generalizaciones constructivas, ninguno de ellos fue capaz de justificar correctamente las fórmulas que representan generalizaciones deconstructivas. Las generalizaciones constructivas, como las que toman la forma lineal $y = mx + b$, son fórmulas cerradas que se pueden obtener con facilidad y ser directamente extraídas de las características de las figuras, sin realizar el esfuerzo de contabilizar los posibles solapamientos de los lados o vértices. Las generalizaciones deconstructivas (…) son también fórmulas directas, sin embargo, son más complejas y, para establecer completamente su validez, requieren el reconocimiento de superposiciones en las partes de las figuras.
Becker & Rivera (2007): Cognitive perception of patterns





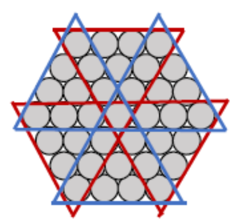
Cable de calibre 2, 7 hilos

$$6 \cdot (1 + 2) - 6 \cdot 1 - 5$$
$$6 \cdot \frac{1 + 2}{2} \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 5$$



Cable de calibre 3, 19 hilos

$$6 \cdot (1 + 2 + 3) - 6 \cdot 2 - 5$$
$$6 \cdot \frac{1 + 3}{2} \cdot 3 - 6 \cdot 2 - 5$$



Cable de calibre 4, 37 hilos

$$6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) - 6 \cdot 3 - 5$$
$$6 \cdot \frac{1 + 4}{2} \cdot 4 - 6 \cdot 3 - 5$$

9. Después de haber analizado la citas bibliográfica anterior, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 11 La expresión algebraica como una historia

De hecho, la fórmula completa es la cristalización de un proceso semiótico dotado de su historia situada. Es una historia en la que cada signo ha adquirido un significado distintivo, y que puede explicar por qué los estudiantes no simplifican la fórmula a una expresión más estandarizada: $2n + 3$. La fórmula aún pende tras los restos de la parte *narrativa* del álgebra (Radford, 2002b), en la cual los signos desempeñan el papel de narrar una historia, y donde la fórmula todavía no ha alcanzado la autonomía de un artefacto simbólico individual. Las letras de las cuales una fórmula se compone juegan por ello el papel de *índices* que apuntan hacia el discurso de las generalizaciones contextual y fáctica de los estudiantes.
Radford (2006): Semiotic perspective

Rivera (2007) sugiere utilizar el siguiente recurso, con el fin de hacer conscientes a los alumnos de que las expresiones algebraicas que obtienen constituyen una especie de historieta que narra el método de conteo que ellos han ideado:

Tres estudiantes propusieron las fórmulas que se enlistan enseguida:

Angelina: $T = (2P + 1) + P$;
Rhea: $T = 3(P + 1) - 2$;
María: $T = (4P + 1) - P$.

(a) Explica de qué modo cada estudiante obtuvo su fórmula.
(b) Rochelle aportó la siguiente fórmula: $T = 3P + 1$. ¿Cómo podría haberla imaginado?
(c) ¿Cuáles estudiantes propusieron fórmulas correctas? Explica.

10. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 12: El papel del lenguaje utilizado y permitido

Desde una perspectiva educativa, es importante tener en cuenta que cada una de las capas de generalidad presenta sus propios desafíos. Como vimos en los ejemplos de clase discutidos antes, en las generalizaciones factual y contextual, los estudiantes a menudo hablan de "la figura" en lugar de "el número de la figura"...
Radford (2006): Semiotic perspective

Otros investigadores (Warren y Cooper, 2008) informan cómo las respuestas escritas de los estudiantes carecen de precisión, lo que apoya la visión de los estudiantes sin experiencia con el lenguaje matemático.
Geraniou, Mavrikis (2008): Constructionist approach

11. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 13: Las estrategias recursivas, ¿fomentarlas o excluirlas?

> La recursividad es algo que no es parte del plan de estudios tradicional, aunque la nueva tecnología puede hacer que sea un enfoque más natural de la actividad matemática. Las hojas de cálculo son capaces de representar tanto la recursividad (mediante la replicación de una fórmula adecuada entre las entradas sucesivas), fórmulas algebraicas, y otros métodos tales como la iteración.
> Tall (1992): Number patterns or proceptual programming?

> Por lo tanto, los estudiantes necesitan avanzar desde un enfoque recursivo hacia un enfoque explícito. En el proceso, los estudiantes deben centrar la atención en el método, no en la respuesta.
> Ma (2007): The potential of patterning…

> ... mecanismos sociales eficaces que ayuden a los estudiantes de la escuela secundaria en la transición desde las fórmulas recursivas a las fórmulas cerradas en la actividad sobre patrones.
> Rivera y Becker (2008) Sociocultural intimations…

Recordemos el problema de los cables de acero, que fue resuelto durante el curso *Actividades Selectas de Matemáticas I*.

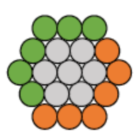


Fig. 1b Un cable metálico trenzado de calibre 3 se forma agregando **12** hilos al cable de calibre 2.

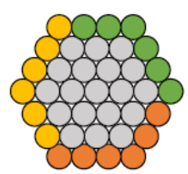


Fig. 1c Un cable metálico trenzado de calibre 4 se forma agregando **18** hilos al cable de calibre 3.

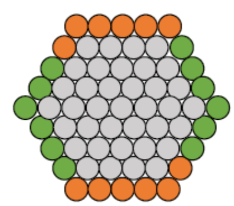


Fig. 1d Un cable metálico trenzado de calibre 5 se forma agregando **24** hilos al cable de calibre 4.

En general, un cable de calibre $n+1$ se forma agregando $6n$ hilos al cable de calibre n:

$$\boldsymbol{c_{n+1} = c_n + 6n}\,.$$

El caso particular de la décima figura puede ser expresado a través de esta relación de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
c_{10} &= c_9 + 6 \cdot 9 \\
c_9 &= c_8 + 6 \cdot 8 \\
c_8 &= c_7 + 6 \cdot 7 \\
c_7 &= c_6 + 6 \cdot 6 \\
c_6 &= c_5 + 6 \cdot 5 \\
c_5 &= c_4 + 6 \cdot 4 \\
c_4 &= c_3 + 6 \cdot 3 \\
c_3 &= c_2 + 6 \cdot 2 \\
c_2 &= 7
\end{aligned}
$$

Sustituyendo consecutivamente estas expresiones en la expresión para la décima figura, tenemos

$$c_{10} = 6 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7\,.$$

Reescribamos el último término para completar el patrón numérico:

$$c_{10} = 6 \cdot 9 + 6 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 1$$

o bien

$$c_{10} = 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1$$

De manera análoga podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= c_{10} + 6 \cdot 10 = 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 + 6 \cdot 10 = \\
&= 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 1\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{12} = c_{11} + 6 \cdot 11 &= 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 1 + \\
&+6 \cdot 11 = 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + 1\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{13} = c_{12} + 6 \cdot 12 &= 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) + 1 \\
&+ 6 \cdot 12 = 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12) + 1\,;
\end{aligned}
$$

etcétera.

En general, podemos afirmar que

$$c_n = 6\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\big) + 1\,.$$

Usando la fórmula de Gauss y simplificando tenemos

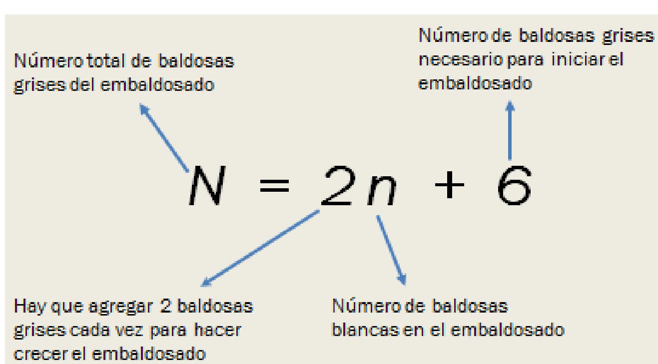
$$c_n = 6 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + 1 = 3 \cdot (n-1) \cdot n + 1\,.$$

12. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 14: ¿Qué es una fórmula general directa?

La discusión fue instructiva para el nuevo grupo, ya que los criterios proporcionaron el contenido sobre cual se construye una generalización aceptada socialmente, y sirvieron como base común para los intercambios comunicativos entre los miembros. El intercambio orientó a los estudiantes hacia: (1) el significado de una fórmula directa; (2) los elementos que componen una fórmula directa (forma de ecuación, dos variables diferentes); (3) la diferencia entre una fórmula directa y una recursiva; y (4) la forma de una fórmula directa. En consecuencia, la nueva cohorte estaba orientada socialmente hacia una práctica compartida de generalizar, lo que les ayudó a evitar formas menos eficientes de expresar una generalización.
Rivera y Becker (2008) Sociocultural intimations…

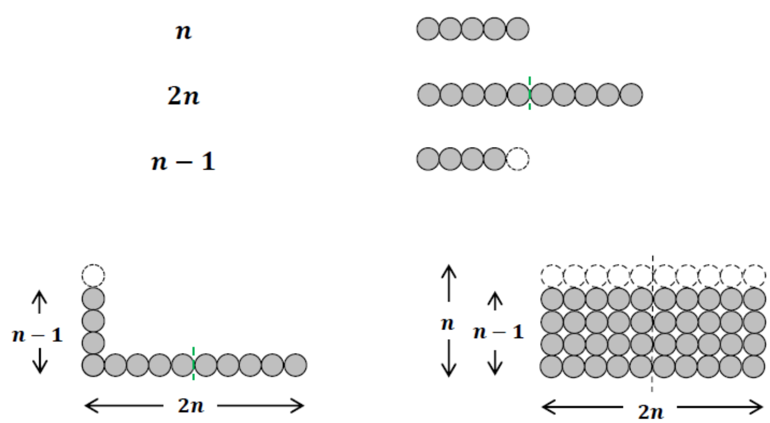


13. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

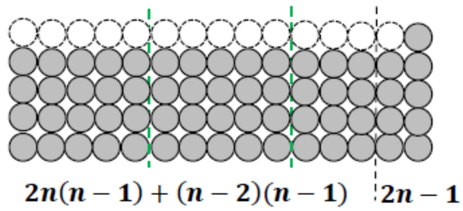
Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

Resultado 15: La equivalencia de expresiones algebraicas

Para generar y comprender tales pruebas (la equivalencia de expresiones algebraicas), el estudiante tiene que ser capaz de ver partes de la figura como entidades en sí mismas, que pueden ser transformadas y manipuladas según sea necesario. En la demostración del cuadro de puntos, por ejemplo, los estudiantes deben ser capaces de tomar una fila de puntos y transformarla en una columna, y en este proceso transformar un rectángulo en un cuadrado sin una esquina. La capacidad de operar sobre las entidades matemáticas como objetos en sí mismos es la esencia del pensamiento algebraico.
Thornton (2001): A picture is worth…



$$2n \times (n-1) = 2n \cdot n - 2n$$



14. Después de haber analizado los ejemplos y las citas bibliográficas anteriores, esboce algunas implicaciones que tiene este resultado, en el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje sobre la generalización de sucesiones numéricas figurales:

Implicaciones para el diseño o adaptación de actividades de aprendizaje:

▸ Cierre

Actividad 3

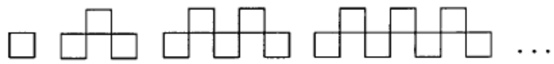
Integrando los elementos básicos al diseño o adaptación de actividades didácticas sobre generalización de sucesiones numéricas figurales.

Tarea 3.

Trabajando con sus compañeros de equipo, sugiera otras preguntas que persigan el mismo propósito que el señalado en cada uno de los apartados siguientes. Discuta también cuál sería la manera más adecuada de ordenar estas preguntas, en una Hoja de Trabajo para el estudiante.

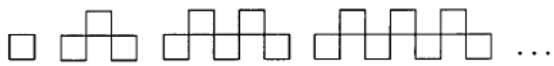
1. *Percibir un patrón*

Examina la siguiente sucesión de figuras. ¿Cómo dibujarías la siguiente figura en la sucesión?



¿Y la siguiente?

2. *Expresar verbalmente el patrón*



Explica con tus propias palabras cómo dibujar las siguientes figuras en la sucesión.

En esta secuencia de figuras, ¿puedes percibir algún patrón? Describe ese patrón.

3. *Promover la multiplicidad de percepciones*

Encuentra al menos otra manera de percibir el mismo patrón.

Encuentra una tercera manera de percibir el patrón.

¿Hay otras maneras de dibujar las figuras? Descríbelas.

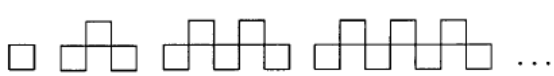
4. *Percibir el generador o referente*

¿Existe alguna relación entre la figura y su posición en la secuencia? Expresar esta relación en el lenguaje cotidiano.

¿Existe alguna relación entre la figura y su posición en la secuencia? Ilustra esta relación usando como ejemplos la séptima y undécima figuras.

5. *Promover la generalización local o cercana*

¿Cuántos cuadritos se requerirán para formar la séptima figura? ¿Y para la undécima figura?



¿Qué papel juegan aquí los números 7 y 11?

6. *Evitar la falsa proporcionalidad*

María dice que la sexta figura tiene el doble de cuadritos que la tercera figura, y que a su vez la octava figura tiene el doble de cuadritos que la cuarta figura. ¿Es cierto lo que dice María?

¿Hay algún par de figuras que cumpla esta propiedad?

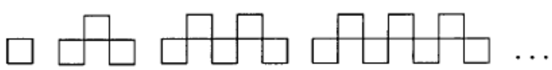
7. *Promover la generalización lejana*

¿Cómo le dirías a alguien que dibuje la figura 113? Escribe aquí tus instrucciones de manera sucinta y clara.

¿Cómo ayudarías a alguien a calcular el número de cuadritos requeridos para formar la figura 113? Escribe aquí tus instrucciones de manera breve y clara.

¿Existe algún método que permita contar o calcular el número de cuadritos que forman una cierta figura, sin dibujarla?

¿Cuál de los diferentes métodos de conteo del total de elementos que forman la figura te parece el más adecuado? ¿En qué sentido? Explica.



8. *Promover la generalización verbal*

Describe con tus palabras las figuras, de manera que cualquier persona, sin necesidad de verlas, pueda dibujar correctamente la sucesión.

¿Cómo le explicarías a alguien, de tal modo que pueda dibujar correctamente cualquier figura de la secuencia?

Describe el procedimiento para dibujar cualquier figura de la secuencia.

Describe el método que permite contar, sin tener que dibujarla, el número total de cuadritos que componen la figura.

9. Promover la generalización algebraica

Encuentra una expresión que sirva para calcular el número total de elementos (en este caso, cuadrados) necesarios para construir cualquier figura de la sucesión.

Encuentra una fórmula que sirva para calcular el número total de cuadrados…

¿Cuántos cuadrados se requieren para formar la n-ésima figura?

Encuentra otra expresión o fórmula…

¿Cuántas fórmulas más puedes encontrar?

10. Promover la validación de la generalización

¿Por qué crees que tu fórmula o regla siempre funcionará?

¿Cómo podrías estar seguro de que tu expresión o fórmula es correcta?

11. Promover la equivalencia de expresiones algebraicas

Dos (tres) alumnos de otra escuela encontraron las siguientes fórmulas… ¿Son correctas estas fórmulas?

¿Cómo podrían estos alumnos haber obtenido las fórmulas?

¿A qué crees que se deba que tu(s) fórmula(s) y las de estos alumnos son correctas, aunque sean diferentes?

¿Existe alguna manera de asegurarnos que estas fórmulas no se contradicen?

12. Promover la transformación algebraica de las expresiones

¿Cuáles de las siguientes fórmulas o expresiones para la n-ésima figura son correctas?

¿Cuál de ellas te parece la más simple, y cuál la más complicada? ¿En qué sentido? Explica.

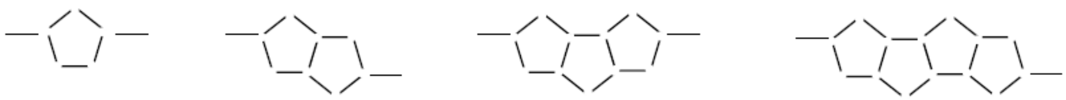
Tarea 4.

Escoja uno de los ejemplos de sucesiones numéricas figurales que se incluyen en el Anexo, y adáptela para utilizarla en su propia experiencia de intervención didáctica en el aula.

ANEXO.

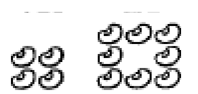
Miscelánea de ejemplos para adaptar.

E1.

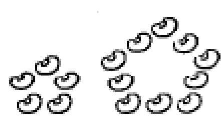


E2.

E3.

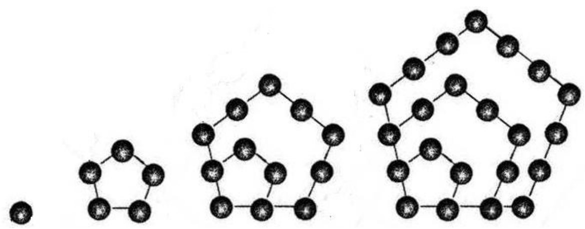


E4.

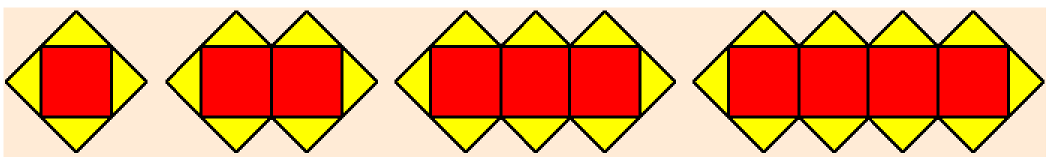


E5.

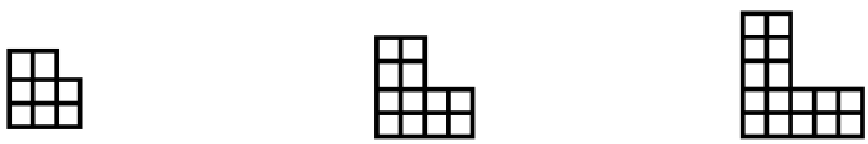
E6.



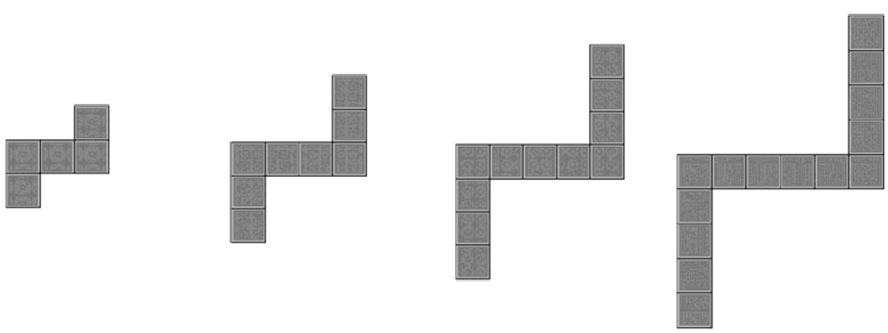
E7.



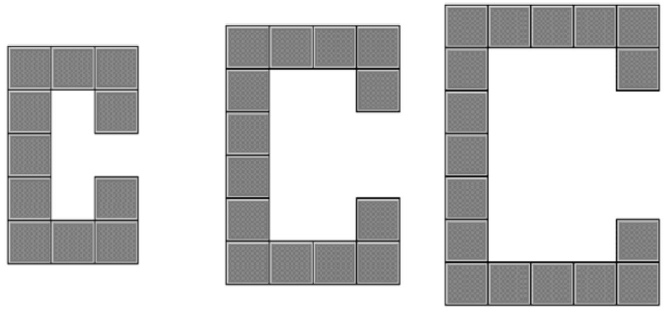
E8.



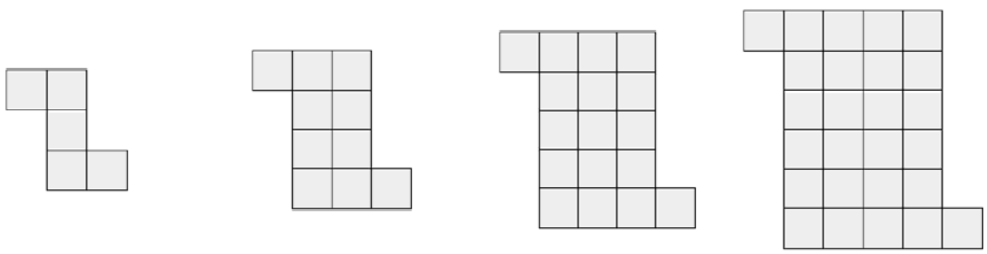
E9.



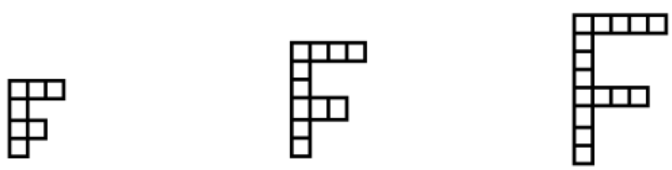
E10.



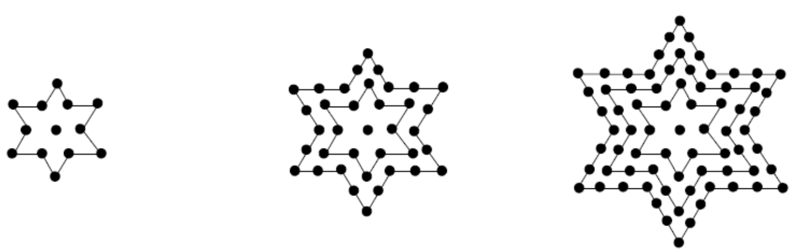
E11.



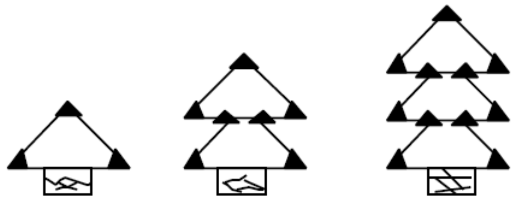
E12.



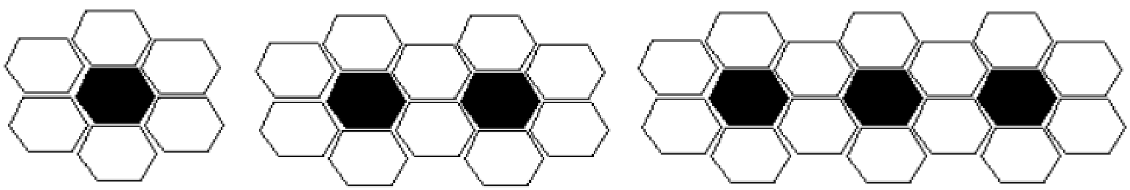
E13.



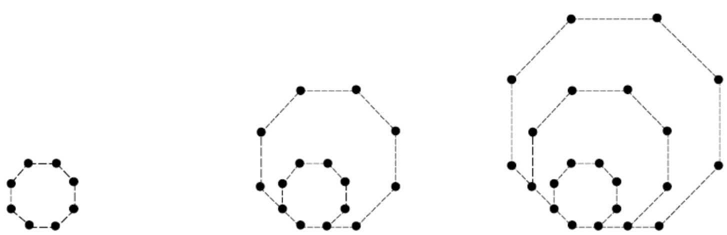
E14.



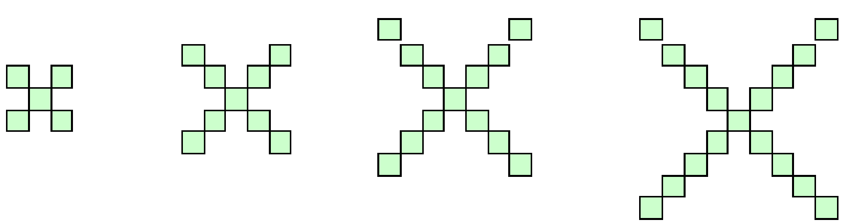
E15.



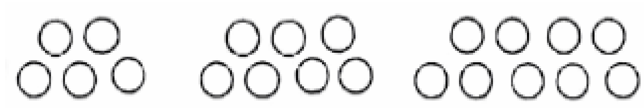
E16.



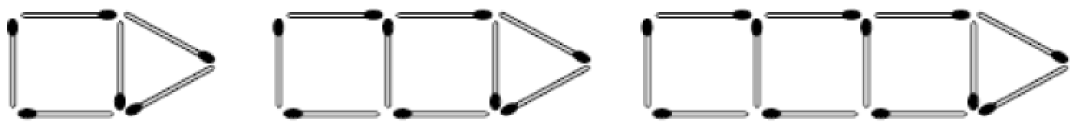
E17.



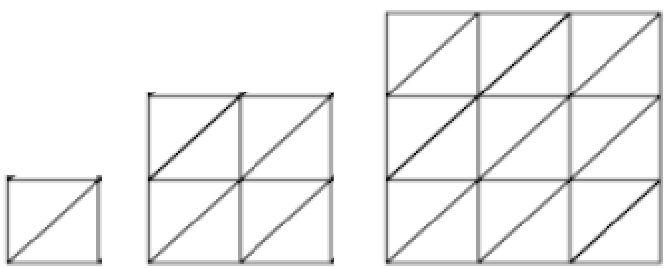
E18.



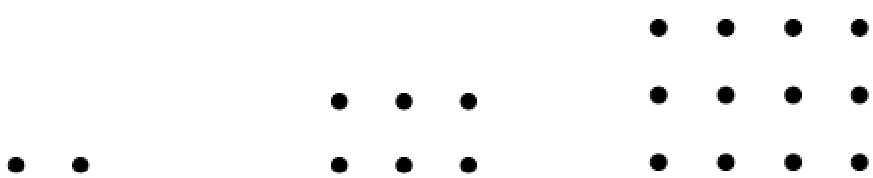
E19.



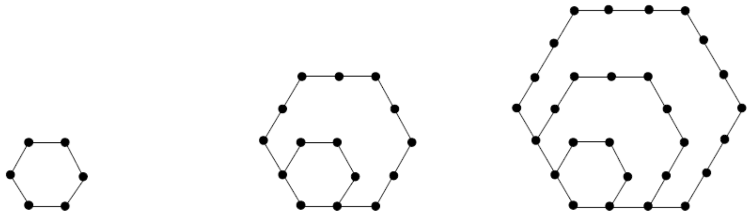
E20.



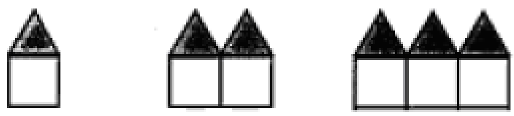
E21.



E22.



E23.



E24.

Tabla de contenidos Secuencia 3
Pensamiento Estadístico

Secuencia 3

Pensamiento Estadístico

Presentación

En esta secuencia se pretende que los participantes tengan la experiencia de implementar una experiencia de intervención, al llevar al aula una propuesta a través de la cual se promueva el desarrollo del razonamiento y el pensamiento estadístico de sus estudiantes. Se sugiere que la propuesta de los participantes sea una adaptación de las actividades que se trabajan en la Secuencia Pensamiento Estadístico de la Asignatura Actividades Selectas I.

El propósito de la secuencia es seleccionar y adaptar las características particulares de una propuesta metodológica de intervención, basada en la resolución de problemas y el uso de tecnología digital, que tenga como finalidad favorecer la producción de determinado conocimiento matemático por parte del alumno, en este caso relacionado con estadística, para llevar a cabo una experiencia de implementación en el aula.

Con la experimentación se espera desarrollar y reflexionar sobre las competencias docentes que desarrollaron los participantes en su papel de docentes al diseñar e implementar su propuesta de intervención.

En la parte de cierre de la secuencia se solicita entregar un reporte en el que se detallen los aspectos que intervinieron en el diseño (adaptación), así como la forma en que se concretan al implementar la propuesta.

▸ Inicio

Actividad 1

Elementos para la adaptación de una propuesta de intervención

Tarea 1. Consideraciones iniciales para la adaptación de una tarea

1. ¿Qué consideraciones es necesario hacer para adaptar una tarea para un grupo específico?

2. Seleccione una tarea de las actividades de inicio o desarrollo de la Secuencia de Pensamiento Estadístico, de la Asignatura Actividades Selectas y describa los ajustes que Usted haría a la tarea seleccionada para implementarla con sus estudiantes de secundaria.

3. Mencione cómo incorporaría las reflexiones realizadas anteriormente sobre la resolución de problemas, el uso didáctico de tecnología en el aula y la detección de dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, particularmente enfocado al desarrollo del Pensamiento Estadístico.

Desarrollo

Actividad 2
Planificación y Puesta en escena

Tarea 2. Planificación de la adaptación de una actividad específica mediada por tecnología digital

Como se ha planteado en cursos anteriores, el desarrollo del pensamiento estadístico como un objetivo de la enseñanza pude cubrir tanto aspectos de la competencia como del razonamiento estadístico y aquellos que sean necesarios para realizar investigaciones estadísticas.
En el modelo de Wild y Pfannkuch, (1999) se organizan los rasgos del pensamiento estadístico en cuatro dimensiones: el ciclo investigativo, los tipos de pensamiento, el ciclo interrogativo y las disposiciones. Cada dimensión a su vez está formado por varios componentes, este modelo está siendo utilizado para la organización de actividades que permitan alcanzar objetivos de la enseñanza de la estadística orientados a la formación del pensamiento estadístico. Las Dimensiones del modelo y su descripción se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Dimensiones para el desarrollo del Pensamiento Estadístico (Wild y Pfannkuch,1999)

Dimensión	Descripción
1. **CICLO INVESTIGATIVO**	**Identifica las etapas, los momentos y las decisiones sobre la manera en que uno actúa y lo que uno piensa durante el desarrollo de la investigación estadística. Proponen una adaptación del modelo PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones).**
2. TIPOS DE PENSAMIENTO	**Tipos de pensamientos general aplicados al contexto de la estadística: (a) Pensamiento Estratégico, (b) buscando explicaciones, (c) modelización, y (d) aplicación de técnicas.** **Elementos centrales del pensamiento estadístico: (a) reconocimiento de la necesidad de los datos, (b) trans numeración, (c) percepción de la variación, (d) razonamiento con modelos estadísticos y (e) integrar la estadística con el contexto.**
3. CICLO INTERROGATIVO	**Es un proceso de pensamiento genérico en uso constante en la resolución de problemas estadísticos, que implica generar, buscar, interpretar, argumentar, valorar, tanto a nivel macro como micro, de forma lineal y recursiva.**
4. DISPOSICIÓN	**Se discuten las cualidades personales (curiosidad, perseverancia, compromiso, imaginación, escepticismo y ser lógico) de los procesos de pensamiento**

Usando este modelo como guía retome el proyecto reformulado al término de la Secuencia de Pensamiento Estadístico de la Asignatura Fundamentos del Análisis Didáctico I y realice las modificaciones necesarias para que se refleje cada una de las dimensiones del modelo. Es importante que el instructor del curso retroalimente el trabajo desarrollado.

Tarea 3. Puesta en escena

1. ¿Cuáles son las características de los estudiantes del grupo al que le aplicará su propuesta?

2. Describa la estrategia que utilizará para desarrollar cada una de las etapas al poner en escena su propuesta.

3. ¿Cuál es el papel de la tecnología digital en el desarrollo de su puesta en escena?

4. ¿Cuenta con algún instrumento de observación que le permita el registro de los aspectos más importantes que sucedan con la puesta en escena?

5. En caso de que no cuente con un instrumento de observación, tendrá que diseñar uno que le permita obtener información relevante de la puesta en escena. Es importante que el instrumento o los instrumentos de observación incluya los aspectos que usted pretende desarrollar su propuesta de intervención, por ejemplo: el papel del contexto, contenidos matemáticos a tratar, aprendizaje esperados de los estudiantes, recursos y materiales didácticos utilizados, el papel de la tecnología en el trabajo de los estudiantes, las competencias a desarrollar en los estudiantes, el proceso de evaluación de los aprendizajes, acciones metodológicas utilizadas por el docente al poner en juego la propuesta, etc.

‣ Cierre

Actividad 3

Análisis y Reporte

Tarea 4. Análisis y reporte de la actuación de los alumnos.

Hacer un reporte en el que se muestre:

- El papel que juega el contexto que se utiliza en su propuesta..
- Un análisis de la organización del contenido matemático propuesto a desarrollar.
- Un análisis de los procesos cognitivos involucrados.
- Un análisis de las acciones metodológicas del docente.
- Un análisis de los materiales y recursos utilizados en la propuesta: tiempo, material concreto, tecnología digital, entre otros.
- Descripción de las competencias que se promueven y la forma en que se propone evaluarlas.

Referencias bibliográficas

BAEM (2016). *Materiales de apoyo para la asignatura Actividades Selectas I,* del Programa de Especialidad en Uso Didáctico de Tecnología Digital para la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Sonora.

BAEM (2016). *Materiales de apoyo para la asignatura Fundamentos del Análisis Didáctico I,* del Programa de Especialidad en Uso Didáctico de Tecnología Digital para la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Sonora.

Batanero, C., Díaz C., Contreras J. y Roa R. (2013). *El sentido estadístico y su desarrollo*. Números, Volumen (38), 7-18.

Chance, Beth L. (2002). *Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment.* Journal of Statistics Education, Volume 10, Number 3. Recuperado en junio de 2016 de www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html.

Jiménez R. J.V; Inzunsa, C. S; (2011). *Razonamiento y pensamiento estadístico en estudiantes universitarios;* XIII CIAM-IACME Recife, Brasil.

Leiria, A. C., González, M. T. y Pinto, J. E. (2015). *Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico.* PNA, 10(1), 25-52.

Sánchez, Ernesto; Gómez-Blancarte, A.L. (S/F). *El desarrollo del pensamiento estadístico de profesores de secundaria en servicio*. Publicado en Investigaciones Actuales en Educación Estadística y Formación de Profesores, Universidad de Granada; (55-72).