Fundamentos de Análisis Didáctico II

CENTRO REGIONAL DE FORMACIÓN DOCENTE E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA DEL ESTADO DE SONORA

Programa de especialidad en el uso de tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas

José Luis Soto Munguía
José Ramón Jiménez Rodríguez
Maricela Armenta Castro
Manuel Alfredo Urrea Bernal

El presente documento fue elaborado por académicos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora. Corresponde al material de la asignatura Fundamentos de análisis didáctico II que será utilizado por el estudiante que participe en el Programa de especialidad en uso didáctico de tecnología digital para la enseñanza de las matemáticas del Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa del Estado de Sonora.

Autores
Dr. José Luis Soto Munguía
Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez
M.C. Maricela Armenta Castro
M.C. Manuel Alfredo Urrea Bernal

Colaborador:
M.C. Guadalupe Villaseñor Gándara

ISBN:

Tabla de Contenidos Secuencia 1

Pensamiento Geométrico

Transformaciones Geométricas

[1] Disponibles en www.geogebra.org/materials/?lang=es

Secuencia 1

Pensamiento Geométrico

Transformaciones geométricas

Presentación

En la opción de Pensamiento Geométrico del Curso "Actividades Selectas de Matemáticas 2", se estudiaron las transformaciones isométricas. Continuando con la idea planteada en el curso de "Fundamentos de Análisis Didáctico 1", en esta secuencia reflexionaremos sobre los procesos generales de visualización, construcción y validación que pueden promoverse al estudiar o enseñar este tema y sobre los conceptos geométricos que se involucran. Pero en este caso, todas las reflexiones tendrán como centro, el concepto de transformación isométrica.

Al usar un software como GeoGebra, el estudiante tendría por lo menos dos opciones, una primera lo involucraría en la construcción y transformación de objetos geométricos, como parte de sus actividades de aprendizaje y la otra lo limitaría a la manipulación de archivos preconstruidos por otros, conocidos como Applets. En el primer caso nos interesará reflexionar sobre lo que los estudiantes aprenden y sobre los procesos que desarrollan, cuando construyen. En el segundo caso nos interesa todo lo que el estudiante aprende, cuando manipula Applets, pero también el impacto que produce el diseño y la elaboración de estos Applets, en los aprendizajes de los profesores.

En la actividad de *inicio* de la secuencia se plantean dos tareas en las que el profesor construirá con el software algunos resultados básicos de transformaciones isométricas. La idea es que estas tareas lo familiaricen con las herramientas básicas sobre el tema que están incluidas en el software, mientras analiza el efecto de estas construcciones sobre su propio aprendizaje y el de sus alumnos.

En el *desarrollo* se proponen ocho tareas, agrupadas en dos actividades. Las tareas de la primera actividad están dedicadas a la reformulación de problemas usando transformaciones isométricas, tema que ya se abordó en el curso anterior; pero ahora se trata de usar GeoGebra para replantear los problemas descomponiendo y recomponiendo las figuras geométricas. En cada tarea usted tendrá que construir un Applet con el software y reflexionar sobre la experiencia de construirlo. Las tareas de la segunda actividad, se analizan los aparatos de trazado ya utilizados en el curso anterior, pero ahora nos interesa hacer un análisis comparativo entre el uso de estos aparatos en clase y el uso de las herramientas con las que GeoGebra transforma objetos directamente. En la última de las tareas se retoma el tema de teselaciones, pero lo que se analiza es un método para teselar el plano con polígonos congruentes pero irregulares.

El *cierre* incluye solamente una tarea de carácter integrador, en la que tendrá que hacer un ensayo en el que compare los diferentes recursos didácticos que se han discutido en la presente secuencia, así como la experiencia que le ha dejado el estudio de esta secuencia.

Inicio

Actividad 1
Las herramientas de GeoGebra sobre transformaciones geométricas

En esta actividad se presentan algunas tareas en las que se aplican las herramientas incluidas en GeoGebra, para transformar unos objetos geométricos en otros. Aunque el software contempla herramientas para seis transformaciones, aquí solamente nos referiremos a cuatro, porque la “Inversión” y la “Homotecia” están fuera del alcance de este curso. El propósito es familiarizarnos con el uso de estas herramientas y promover algunas reflexiones sobre el las ventajas y desventajas que este uso pudiera tener en estudiantes y profesores.

Tarea 1. La reflexión y la traslación vistas con GeoGebra

1. Use la herramienta "Polígono" () para construir un polígono irregular, como el que muestra la Figura 1.

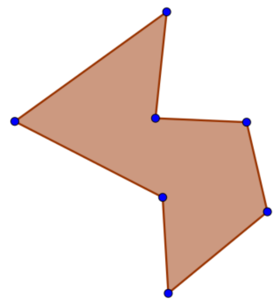


Figura 1.

Luego siga las siguientes indicaciones en GeoGebra:

a) Trace una recta () que no interseque al polígono y luego use esta recta para solicitar a GeoGebra la reflexión () del polígono con respecto a la recta.

b) Trace una recta paralela () a la primera y solicite a GeoGebra la reflexión () del polígono reflejado.

c) Trace ahora un vector () que le permita trasladar el polígono original hasta el tercer polígono obtenido. Explique cómo lo trazó y compare la magnitud de este vector con la distancia entre las dos rectas.

2. Si usted propone a sus estudiantes la tarea de realizar la construcción anterior. ¿Qué resultado geométrico estaría tratando de ilustrar?

3. Como ya se vio en el curso anterior, hay tres procesos importantes de promover al enseñar geometría. Si usted propone a sus estudiantes realizar la construcción anterior, ¿Cuál de estos procesos estaría usted promoviendo con mayor énfasis?

4. Si una vez terminada la construcción, usted propusiera a sus estudiantes arrastrar alguna de las rectas para analizar los cambios que sufre la construcción, ¿con qué propósito lo haría?

Tarea 2. La reflexión y la rotación vistas con GeoGebra

1. Use la herramienta "Poligonal" ( ) para construir una poligonal como la que muestra la Figura 2.

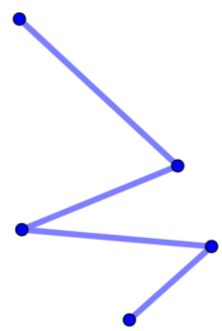


Figura 2.

Siga ahora las indicaciones siguientes:

a) Trace un punto P ( ) y luego trace dos rectas ( ) que pasen por P, pero que no se intersequen con la poligonal. Hágalo de tal manera que al arrastrar una de ellas, pueda rotar alrededor de P.

b) Obtenga una segunda poligonal reflejando ( ) la poligonal original con respecto a la recta más próxima.

c) Obtenga una tercera poligonal reflejando ( ) la segunda con respecto a la otra recta.

d) Use la herramienta "Rotación" ( ) para rotar la primera poligonal hasta hacerla coincidir con la tercera. ¿Cómo obtuvo el ángulo de rotación?, ¿qué relación tiene el ángulo de rotación con el ángulo que forman las dos rectas?

2. ¿Existirá una traslación que transforme la primera poligonal en la tercera? Justifique su respuesta.

3. Si usted propone a sus estudiantes la tarea de realizar la construcción anterior. ¿Qué resultado geométrico estaría tratando de ilustrar?

4. Supongamos que usted propone a sus estudiantes realizar la construcción anterior. Si al llegar al inciso d), uno de sus estudiantes obtiene la poligonal pedida "tanteando" el ángulo de rotación y otro se basa en las propiedades geométricas de la construcción para obtener dicho ángulo. ¿Cuál será la diferencia entre los procesos de visualización desarrollados por cada uno de ellos?

Desarrollo

Actividad 1
El uso de las transformaciones isométricas en la construcción de Applets y la resolución de problemas.

En esta primera actividad se usarán las herramientas sobre transformaciones isométricas, que GeoGebra tiene incorporadas, para replantear problemas geométricos. La idea es que usted pueda utilizar estas herramientas para elaborar Applets sencillos y que reflexione sobre la diferencia entre la presentación estática de un problema ante sus alumnos y su presentación dinámica.

Tarea 3. Un problema de distancias mínimas

En uno de los problemas propuestos en el curso "Actividades Selectas de Matemáticas 2", se pedía trazar el punto P sobre la recta *k*, para que la distancia AP+PB sea mínima (ver Figura 3). Luego se pedía resolver otra versión del problema, en la que se proporcionaba el punto A´, definido como la reflexión del punto A sobre la recta *k* (Figura 4). Finalmente se solicitaba comparar los niveles de dificultad de estos dos problemas y la posibilidad de utilizar la solución de uno de ellos, para facilitar la solución del otro.

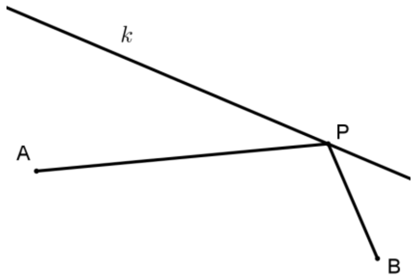


Figura 3.

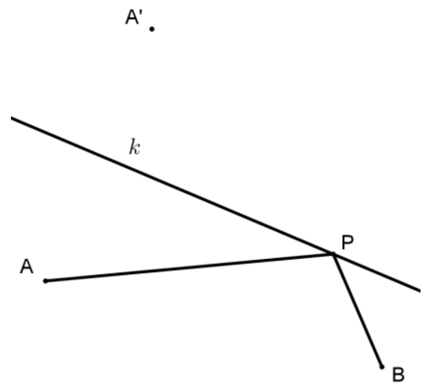


Figura 4.

Construya un Applet en el que pueda arrastrarse el punto P sobre la recta *k* y en el que se muestren los segmentos AP y PB, pero también el segmento PA´, definido como la reflexión del segmento AP sobre la recta *k*. En pantalla, su Applet debiera lucir como en la Figura 5. Combine su primer apellido con el número uno para nombrar al Applet (por ejemplo, Soto1.ggb), grábelo y envíelo a su instructor por correo electrónico.

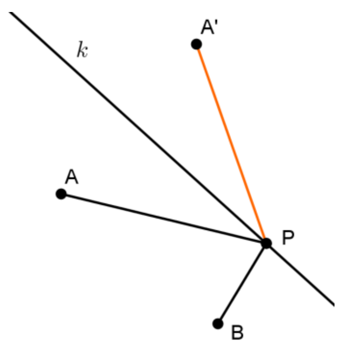
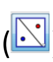


Figura 5.

Sugerencias. Una vez trazada la recta *k* y un punto P sobre ella, use la herramienta "Simetría Axial" () para solicitar a GeoGebra la reflexión del segmento AP sobre la recta *k*, es decir el segmento A´P.

1. ¿Hay alguna noción matemática que usted haya aprendido o afianzado al construir este Applet?

Si usted decidiera usar este Applet para plantear a sus estudiantes este problema:

2. ¿Usted les proporcionaría el Applet ya construido o dejaría la construcción de este Applet como una tarea para ellos?

3. De acuerdo con la teoría de la génesis instrumental de Rabardel, ¿cuál sería la diferencia entre las dos opciones planteadas en el inciso anterior.

4. Supongamos que usted decide usar el Applet construido para apoyar a sus estudiantes a resolver el problema y suponga también que los estudiantes tienen acceso a la manipulación del Applet. Proponga dos tareas que les asignaría, con la intención de ayudarles a resolver el problema. Especifique qué ganarían los estudiantes realizando estas tareas.

Tarea 4. Calculando el área del "pez"

1. En otro de los problemas propuestos en el curso "Actividades Selectas de Matemáticas II", se pedía resolver y comparar el problema de calcular el área de cada una de las dos figuras siguientes, en las que AB=10 y O es el punto medio de AB.

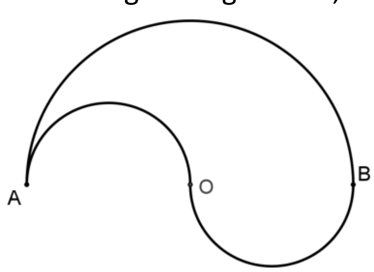


Figura 6.

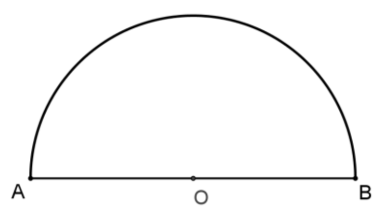
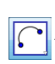


Figura 7.

1. ¿Qué transformación o transformaciones habrá que aplicar a la Figura 6, o a una parte de la Figura 6, para convertirla en la Figura 5? Use las Figuras 6 y 7 para describirlas.

2. Use la herramienta "Semicircunferencia"(), para construir en GeoGebra la Figura 8.

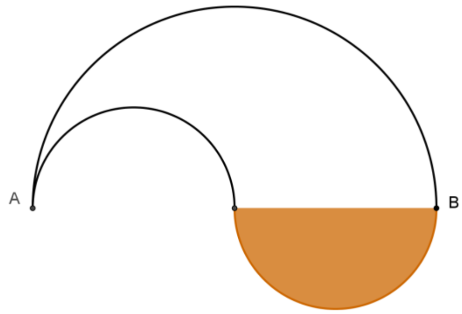


Figura 8.

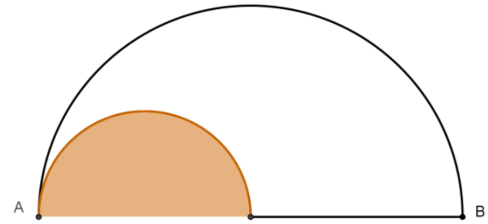
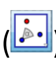
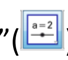


Figura 9.

3. Al aplicar directamente una transformación sobre la parte sombreada de la Figura 8, GeoGebra le proporcionará una construcción como la mostrada en la Figura 9. El software ha ejecutado la herramienta sobre una figura estática y ha generado otra figura estática. Construya un Applet, en el que pueda observarse el movimiento del semicírculo sombreado que permite pasar de la Figura 8 a la Figura 9. Combine su primer apellido con el número dos para nombrar al Applet (por ejemplo, Soto2.ggb), grábelo y envíelo a su instructor por correo electrónico.

Sugerencias:

a) Combine la herramienta “Rotación”() con la herramienta “Deslizador”().
b) Gradúe su deslizador en grados y cuando la herramienta rotación le solicite el número de grados, alimente en su lugar la variable del deslizador.
c) Especifique el rango de variación del deslizador entre 0° y 180°.
d) En pantalla debe observar una construcción similar a la que muestra la Figura 10, en donde la rotación puede controlarse arrastrando el punto del deslizador.

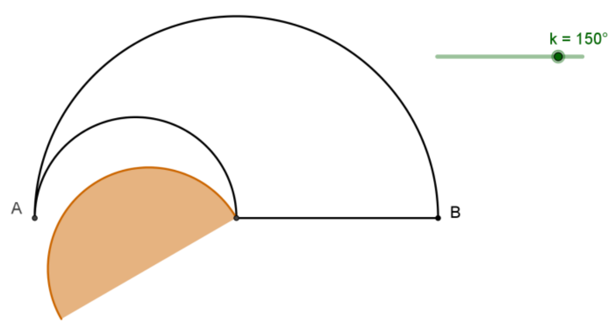


Figura 10.

4. ¿Qué conceptos geométricos aprendió o afianzó usted al construir el Applet?

Si usted planteara a sus estudiantes el problema de calcular el área de la Figura 6.

5. ¿En qué momento del proceso de solución, usaría el Applet que ha construido? Justifique su respuesta.

6. ¿Qué ventajas ofrecería el Applet al estudiante durante el proceso de solución del problema? Justifique su respuesta.

Tarea 5. Un problema sobre trapecios

En la Figura 11 se muestra el trapecio ABCD con ángulos rectos en los vértices A y B. Si M es el punto medio de AB, el segmento MN es perpendicular al segmento AB, AD=*a* y BC=*b*. Exprese la medida del segmento MN en términos de *a* y *b*.

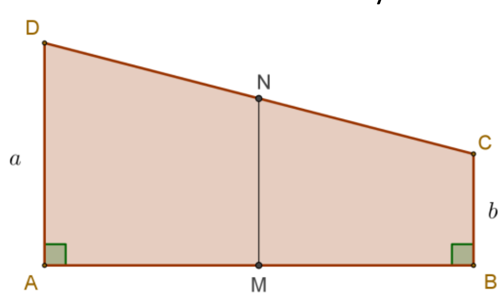


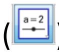
Figura 11.

La descomposición y recomposición de la Figura 11, puede ayudar a resolver este problema. Hay más de una manera de descomponer esta figura, pero aquí sugerimos una descomposición dinámica.

1. Construya un Applet que rote el cuadrilátero AMND un ángulo de 180° con respecto al punto N, en el sentido de las manecillas del reloj.

Sugerencias:

a) Construya en GeoGebra la Figura 11 y verifique que soporta la prueba del arrastre.

b) Sobreponga el cuadrilátero AMND y luego use la herramienta “Rotación” () combinada con la herramienta “Deslizador”(), para que pueda manipular la rotación; tal como lo hizo en la Tarea 2. En pantalla deberá obtener una construcción como la que muestra la Figura 12.

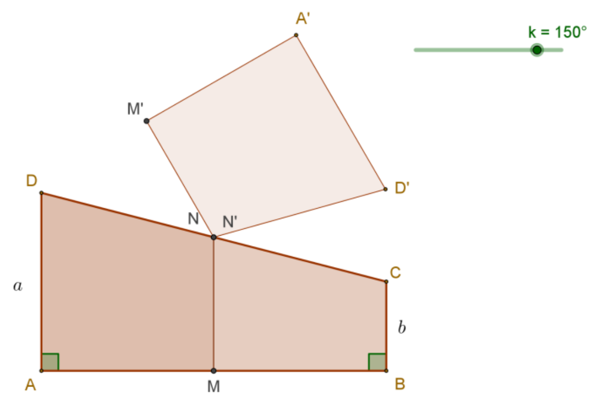


Figura 12.

2. Cuando el cuadrilátero AMND haya rotado 180°, la figura se habrá recompuesto en un rectángulo. Compare los lados verticales de este rectángulo para expresar el segmento MN en términos de *a* y *b*.

3. Arrastre ahora el punto B. ¿Se altera con el arrastre, la relación de a y b con el segmento MN? Si el arrastre no altera la relación encontrada, ¿qué significa esto en el problema?

4. ¿Hay conceptos matemáticos que usted haya aprendido o afianzado, durante la construcción del Applet? En caso afirmativo, explique cuáles.

5. Al rotar el cuadrilátero AMND, ninguna de sus medidas se altera, ¿por qué?

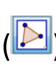
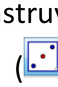
6. Si usted planteara este problema a sus estudiantes y decidiera usar este Applet. Explique con detalle las instrucciones que daría a sus estudiantes y el momento en el que les propondría usar el Applet.

7. Dependiendo de las herramientas que ponga a disposición de sus estudiantes, habría diversas maneras de abordar este problema. Pero supongamos que solamente tenemos dos opciones: una primera en la que el problema se resolvería con lápiz y papel y una segunda en la que el problema se resolvería con apoyo del Applet. En lo que se refiere al aspecto afectivo, ¿cuál es a su juicio, la diferencia entre el impacto que producirá en los estudiantes, tomar una opción u otra?

Tarea 6. Un problema sobre triángulos

En esta tarea construiremos el Applet que pueda "separar" los ángulos de un triángulo y luego reacomodarlos, de la manera en que se indica. Al terminar su construcción, grabe su Applet con un nombre que combine su primer apellido con el número cuatro (por ejemplo, Soto4.ggb) y envíelo a su instructor por correo electrónico.

Instrucciones:

a) Con la herramienta "Polígono" () construya un triángulo ABC, tal que AB=10.
b) Con la herramienta "Medio o Centro" (), trace los puntos medios de los lados del triángulo ABC y con la herramienta "Punto sobre Objeto"(), trace algunos puntos sobre el triángulo ABC, que se usarán, junto con los puntos medios, para trazar un Polígono que contenga uno de los vértices del triángulo y que simulará un "corte de una esquina" del triángulo. Ver Figura 13.

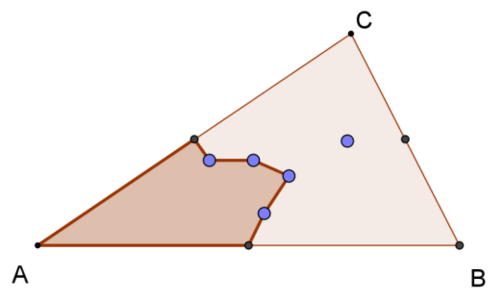


Figura 13.

c) Ahora use la herramienta "Objeto visible", localizable en la cortinilla que se muestra al colocar el cursor sobre el triángulo y oprimir el botón derecho de su mouse, para ocultar el triángulo ABC. Ver Figura 14.

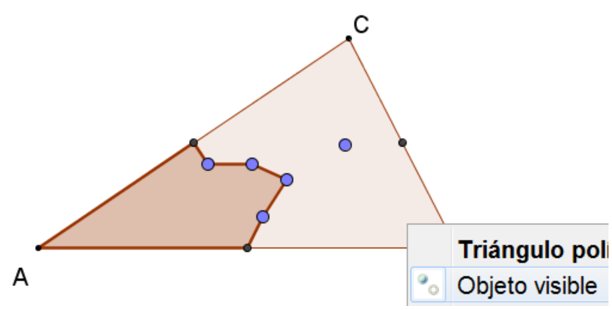


Figura 14.

d) Trace un polígono ( ) similar al construido en el punto 2, pero que ahora contenga al vértice B. Luego trace dos deslizadores, llame al primero TrasladeA, y asígnele un rango de variación entre 0 y 20, llame al segundo TrasladeB y asígnele un rango de variación entre 0 y 10. Estos deslizadores controlarán los vectores de traslación.

e) Capture en la barra de entrada, los vectores "Vector[(0, -4), (TrasladeA, -4)]" y "Vector[(0, -6), (TrasladeB, -6)]". Observe que estos vectores permiten trasladar ( ) horizontalmente cualquier objeto, una distancia igual al valor de los deslizadores.

f) Use los vectores capturados para trasladar los polígonos trazados, que contienen a los vértices A y B respectivamente. En pantalla observará algo similar a lo que muestra la Figura 15:

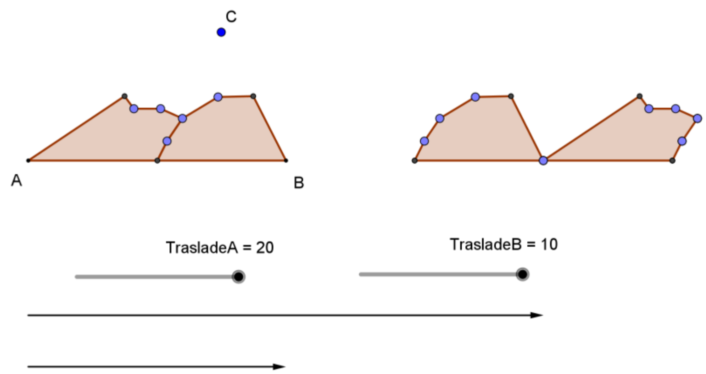


Figura 15.

g) Por último trace el polígono que contiene al vértice C y rótelo para que se acomode en el hueco dejado por los dos polígonos anteriores ya trasladados. Para hacer esto trace un tercer deslizador con un rango de variación entre 0° y 180° y tome como centro de rotación el punto medio del segmento rojo trazado en pantalla.

h) Su versión final del Applet debiera lucir como se muestra en la Figura 16. Después puede ocultar el segmento rojo, el punto O y los vectores de traslado, para que el Applet luzca mejor.

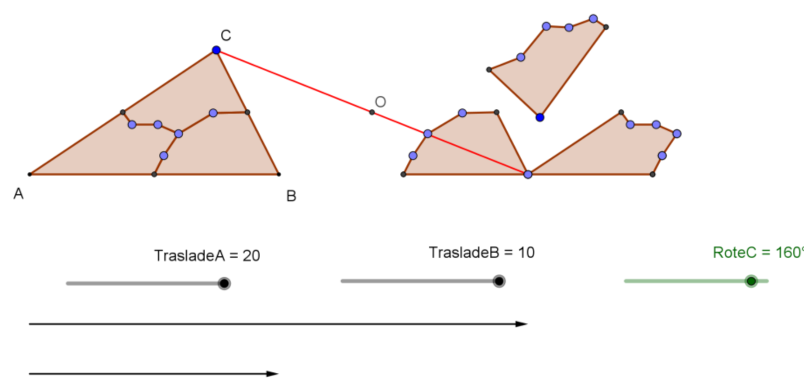


Figura 16.

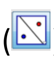
1. Haga una lista con los conceptos geométricos que aprendió o practicó, durante el proceso de construcción del Applet.

2. Describa con detalle, el uso didáctico que podría usted darle a este Applet en el salón de clase, precisando el resultado matemático que pretendería abordar al usarlo.

Actividad 2
El uso de aparatos articulados para generar transformaciones isométricas

En el curso anterior se revisaron tres aparatos articulados que transforman unos objetos geométricos en otros, preservando distancias. En esta actividad haremos algunas reflexiones sobre las implicaciones didácticas de manipular y/o modificar estos aparatos.

Tarea 7. El uso del reflexógrafo

El software GeoGebra puede reflejar objetos geométricos directamente mediante la herramienta llamada "Simetría Axial" (), que ya se usó en el *inicio* de esta secuencia. El aparato analizado aquí, que hemos llamado *reflexógrafo* (ver Figura 17), traza también la reflexión de un objeto geométrico con respecto a una recta.

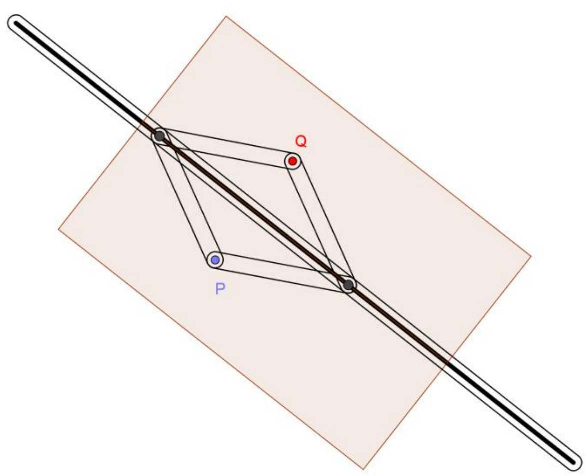
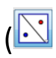


Figura 17.

1 Aunque el aparato le resultará familiar, puede ser conveniente que tenga a la mano el Applet que hemos llamado “Reflexógrafo.ggb” para que constate algunas de sus características, durante el desarrollo de las tareas.

a) Las cuatro regletas iguales de este aparato, forman siempre un rombo. Trace el segmento PQ sobre el “Refexógrafo.ggb”. ¿Qué propiedades de las diagonales del rombo, garantizan que la figura trazada por Q, es siempre la reflexión de la figura trazada por P?

b) Supongamos que sus estudiantes tienes acceso a computadoras con el software GeoGebra instalado y disponen del Applet llamado aquí Reflexógrafo. Considere las dos opciones de uso que tendría para incorporar GeoGebra en clase:

- Usar la herramienta directa de GeoGebra, llamada “Simetría Axial” (), para obtener la reflexión de objetos geométricas, con respecto a una recta.
- Usar el Applet llamado Reflexógrafo.ggb para obtener la reflexión de objetos geométricos que genera este aparato.

2 ¿Cuál de las dos opciones le permitiría promover mejor los procesos de visualización? Justifique su respuesta.

3 ¿Cuál de las dos opciones le resultaría más útil para promover los procesos de construcción? Justifique su respuesta.

4 ¿Cuál de las dos opciones le parece mejor para promover los procesos de validación? Justifique su respuesta.

5 ¿Cuál de las dos opciones será más atractiva (aspecto afectivo) para los estudiantes?

Tarea 8. El uso del trasladógrafo

El software GeoGebra cuenta con una herramienta llamada “Traslación” (), que puede usarse directamente para trasladar objetos geométricos, a condición de contar con un vector de traslación y el objeto a transformar, como se vio en las tareas de inicio de esta secuencia. El *trasladógrafo* usado en el curso anterior, tiene similitudes con esta herramienta de GeoGebra.

Tenga a la mano el Applet “Trasladógrafo.ggb” (ver Figura 18), por si necesita verificar algunas de sus características y responda las preguntas.

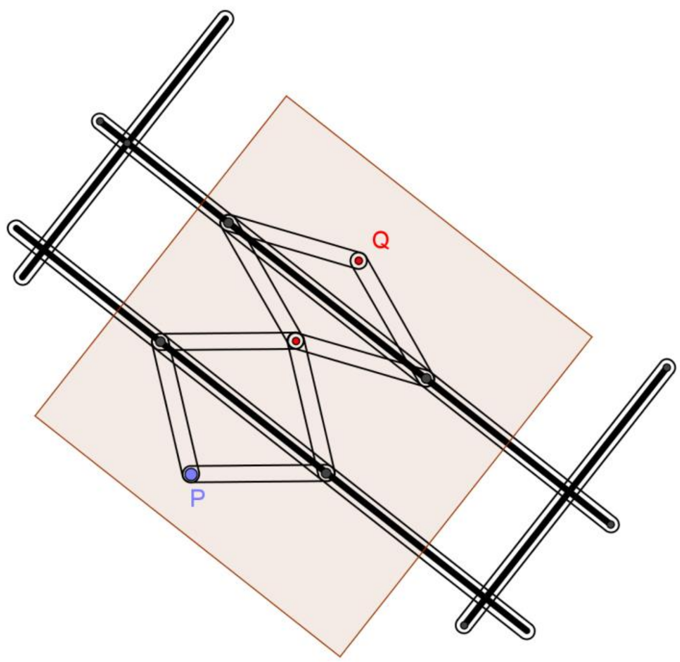
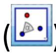


Figura 18.

1. A diferencia de la herramienta “Traslación”, el *trasladógrafo* no muestra, de manera directa en pantalla, ni la dirección ni la magnitud del traslado. ¿Entonces qué sentido tendría usarlo con sus estudiantes? Para responder, tome como referencia la promoción de los procesos de validación.

2. Si al usar el *trasladógrafo* en clase usted propusiera como tarea a sus estudiantes, que identificaran la magnitud y dirección del traslado generado por este aparato. ¿Con qué propósito lo haría?

Tarea 9. El uso del rotógrafo

Si queremos rotar un objeto geométrico en GeoGebra, basta con utilizar la herramienta “Rotación” (), como se ha visto en el *inicio* de esta secuencia. Haremos aquí algunas reflexiones sobre el uso del rotógrafo, que funciona de manera similar a esta herramienta.

Abra el Applet llamado “Rotógrafo.ggb” (ver Figura 19), para responder las preguntas.

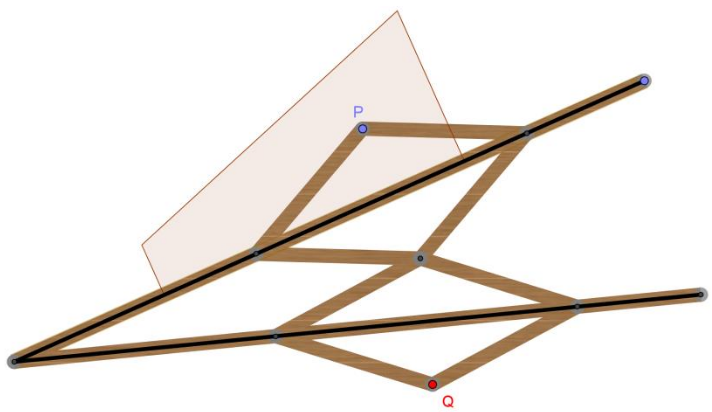


Figura 19.

1 Rotar objetos geométricos con el Rotógrafro, tiene algunas limitaciones, si se compara con la acción de rotar un objeto usando la herramienta “Rotación”. Señale tres de estas limitaciones.

2 Si usted decidiera, a pesar de estas limitaciones, usar el Rotógrafo en clase, ¿con qué propósito lo haría?, ¿estaría este propósito relacionado con la promoción de procesos de visualización, de construcción, de validación o con el pensamiento deductivo?

Tarea 10. Transformaciones isométricas y teselaciones del plano

Como se vio en los cursos “Actividades Selectas de Matemáticas” 1 y 2, los únicos polígonos regulares que teselan el plano, es decir que lo cubren sin traslapes y sin dejar huecos, a saber: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

En la presente actividad construiremos polígono irregulares que teselan el plano y usaremos las herramientas de GeoGebra sobre transformaciones geométricas para verificar que los polígonos construidos teselan el plano.

1. A partir del hexágono regular de la Figura 20, construya el octágono irregular de la Figura 21, siguiendo las instrucciones que se indican.

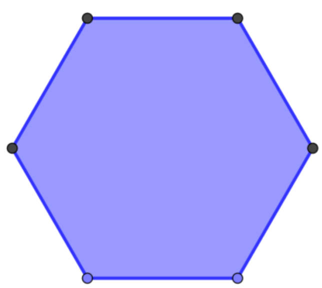


Figura 20.

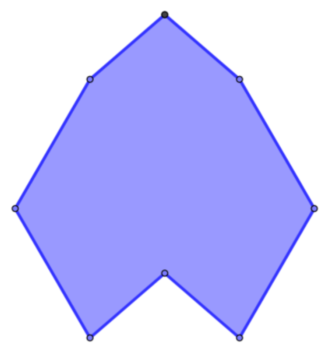
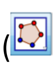
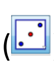
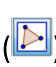


Figura 21.

   a) Con la herramienta “Polígono regular” () construya el hexágono regular de la Figura 20.

   b) Use la herramienta “Medio o Centro” () para trazar el punto medio de la base y con la misma herramienta trace el centro del hexágono. Observe que los puntos trazados definen la apotema del hexágono. Ahora trace el punto medio del apotema, utilizando de nuevo la misma herramienta.

   c) Use ahora la herramienta “Polígono” () para trazar el triángulo formado por la base del hexágono y el punto medio del apotema.

   d) Traslade el triángulo construido, hasta que su base coincida con el lado opuesto a la base del hexágono. Su construcción hasta este momento, debiera lucir como la mostrada en la Figura 22.

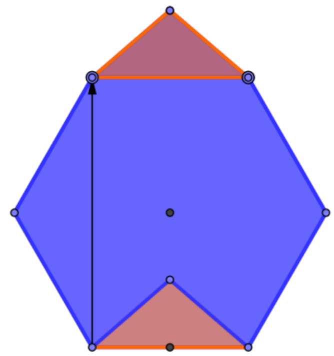


Figura 22.

e) Oculte ahora todos los polígonos trazados, pero no sus vértices. Use ahora los vértices apropiados para construir un octágono irregular como el mostrado en la Figura 21.

f) El polígono que muestra la Figura 21 tesela el plano. Explique por qué.

g) Construya los vectores apropiados y use dos traslaciones () para verificar que el octágono irregular de la Figura 21, tesela el plano. Combine su primer apellido con el número tres para nombrar su archivo (por ejemplo, Soto1.ggb), grábelo y envíelo a su instructor por correo electrónico.

h) A partir del cuadrado o del triángulo equilátero, construya con GeoGebra un polígono irregular que tesele el plano y luego use las herramientas de transformación del software para verificar que el polígono construido tesela el plano.

2. Si usted propusiera a sus alumnos, una actividad como la anterior:

   a) ¿Qué conceptos geométricos tendrían que poner en juego para realizarla?

   b) ¿Qué procesos (visualización, construcción, validación) estaría usted promoviendo?

c) ¿Le parece que este tipo de actividades promueve la creatividad de sus estudiantes? Explique.

d) ¿Qué efecto tendrán estas actividades en el aspecto afectivo de sus estudiantes?

Cierre

Actividad 1
Reflexiones generales

Tarea 11. Comparando los recursos

A lo largo de esta secuencia podemos distinguir dos modalidades de usar el software GeoGebra, con fines de enseñanza: Una en la que el estudiante Interactúa construyendo y otra en la que su interacción se limita a la manipulación de archivos preconstruidos. Sin embargo la práctica docente más extendida, cuando se trata de enseñar Geometría, no incluye el uso de software alguno, está basada en el uso de representaciones estáticas y se le conoce coloquialmente como una enseñanza "a lápiz y papel". Esta última aproximación a la enseñanza no se ha incluido en esta secuencia, pero es muy conocida por los profesores. La selección de una de estas tres opciones depende de lo que el profesor tenga más interés en promover.

1. En la siguiente tabla se muestran, por una parte las tres aproximaciones a la enseñanza, referidas específicamente a las transformaciones isométricas y por otra algunos aspectos del aprendizaje de este tema, que nos interesaría promover. Marque con una cruz una casilla por renglón, para indicar la aproximación a la

enseñanza de transformaciones isométricas, que a su juicio resulte más apropiada para promover los aspectos señalados en la primera columna.

	Interactuar construyendo con GeoGebra	Interacturar manipulando con GeoGebra	Enseñanza a “lápiz y papel”
Promover el proceso de visualización			
Promover el proceso de construcción			
Promover el proceso de justiricación			
Pormover el pensamiento deductivo			
Promover la creatividad			

2. Haga un ensayo, con una extensión de tres cuartillas, en el que aborde los siguientes temas:
   a) La justificación de las respuestas que dio a la tabla anterior.
   b) Un balance de lo que usted aprendió en esta secuencia.
   c) Un recuento de aquellas tareas que no le hayan parecido pertinentes, que incluya las razones por las cuales no le han parecido pertinentes.

3. Escriba su ensayo en un archivo de Word y Grábelo con un nombre que combine su primer apellido con la palabra ensayo (por ejemplo, Soto_ensayo.docx) y envíelo a su instructor por correo electrónico.

Tabla de contenidos Secuencia 2

Pensamiento Algebraico

Introducción al desarrollo del pensamiento variacional en la educación secundaria.

Secuencia 2

Pensamiento Algebraico

Introducción al desarrollo del pensamiento variacional en la educación secundaria

Presentación

El propósito principal de las actividades que conforman a esta Secuencia Didáctica consiste en promover la reflexión crítica del participante, tanto empírica como teórica, sobre los procesos cognitivos que caracterizan al pensamiento variacional, y sobre el papel que en dichos procesos pueden y deben desempeñar las tecnologías digitales matemáticas. Tal reflexión se centrará en el importante problema de la introducción al desarrollo del pensamiento variacional en el alumno de educación secundaria, como extensión del desarrollo de su pensamiento algebraico.

Inicio

Actividad 1

El problema didáctico de la introducción al estudio de las magnitudes variables.

1. Retome las experiencias vividas durante la resolución de las distintas actividades que, conjuntamente con su equipo, abordó usted durante la Secuencia 2 del curso *Actividades Selectas de Matemáticas II*. Apoyándose en dichas vivencias, así como en los conocimientos matemáticos desarrollados y/o perfeccionados en dicha etapa del curso, reflexione y trate de responder brevemente, sin intentar ser exhaustivo, las siguientes cuestiones.

   1.1. ¿Qué es el pensamiento variacional? ¿Cuáles son sus rasgos distintivos?
   1.2. ¿Qué lugar ocupa el pensamiento variacional en la matemática escolar?

1.3. ¿Cómo se desarrolla el pensamiento variacional? ¿Qué actividades de aprendizaje fomentan su desarrollo?

En los espacios de más abajo, trate de responder a estas preguntas en relación con dos entornos en los que usted como profesor ha intervenido: a) el ambiente escolar en su centro de trabajo, y b) el curso *Actividades Selectas de Matemáticas II*.

a) Mi opinión a partir de mis experiencias en mi escuela o centro de trabajo:

1.1

1.2

1.3

b) Mi opinión a partir de mis experiencias en el curso *Actividades Selectas de Matemáticas II*:

1.1

1.2

1.3

Tarea 1. Análisis crítico de un fragmento del artículo *El pensamiento variacional y la modelación matemática*.

Voy a concentrarme en este trabajo en el pensamiento variacional y en el proceso de modelación o modelización de fenómenos y procesos de la realidad, que –como lo veremos– están íntimamente relacionados.

El pensamiento variacional

Una de las dificultades que se ha encontrado en la interpretación de los lineamientos curriculares para área de matemáticas es que no es muy claro qué se debe entender por "pensamiento variacional". Intentemos acercarnos a ese concepto.

Qué no es

Parecería que las funciones, en particular las funciones cuyo argumento es el tiempo t, reflejan matemáticamente las variaciones de la realidad espacio-temporal. Pero pensar en forma variacional no es saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no actúan, no se mueven ni hacen nada. Eso estaría bien a lo sumo para la función idéntica, que es la que no cambia nada; pero la función idéntica es la que no es del agrado de los estudiantes, precisamente porque no hace nada.

El pensamiento variacional no es aprenderse las fórmulas de áreas y volúmenes como ba, πr^2, o las de los modelos matemáticos de la física, como $f = ma$, $V = IR$, o $s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$.

Más aún, esos modelos, entendidos sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas.

No se trata tampoco de dibujar y manejar las gráficas. Al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica.

Qué es

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

El movimiento mental de este pensamiento tiene pues un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar “modelos mentales”; luego tiene un momento de echar a andar o “correr” esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y si es el caso, tiene también el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.
Sólo cuando hay sistemas simbólicos con sus tecnologías socialmente disponibles, como las palabras, dibujos y otros íconos o gráficos, letras o números, se da también un momento de formulación simbólica del sistema o modelo mental por medio de algún sistema simbólico con su tecnología respectiva, simbolización que puede ser verbal, gestual, pictórica o simbólico-formal, y no sólo esta última, como suele creerse

equivocadamente. Esta formulación simbólica permite objetivar el modelo mental, calcular con la representación tecnológicamente disponible, y continuar con los momentos de comparación y reformulación del modelo.

El objeto del pensamiento variacional es pues la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es pues tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad.

El pensamiento variacional requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones.

Para mí, el principal propósito del pensamiento variacional es pues la modelación matemática. No es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios; al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso. Para poder resolver un problema interesante tengo que armar primero un modelo de la situación en donde las variables covaríen en forma semejante a las de la situación problemática, y no puedo hacerlo sin activar mi pensamiento variacional.

El pensamiento variacional está relacionado con los pensamientos numérico (tablas, patrones numéricos), geométrico (mecanismos geométricos y graficas cartesianas), algebraico (expresiones y ecuaciones), métrico (medición de magnitudes en situaciones de variación y cambio) y estadístico (tratamiento de datos y regresiones), a través de las formas de representación cuantitativas de las situaciones de variación y cambio. Esto quiere decir que no es posible dejar de lado los otros pensamientos cuando se estudian situaciones de variación y cambio. (MEN Colombia)

1. Señale las principales características del pensamiento variacional.

Desarrollo

Actividad 2

Procesos cognitivos asociados con la conceptualización y representación de los comportamientos variacionales.

Tarea 2. Evocación de la experiencia personal y grupal alrededor del estudio de situaciones de variación.

Haga un esfuerzo por evocar los principales momentos o problemas decisivos durante el estudio de situaciones de variación, durante el curso *Actividades Selectas de Matemáticas II*. Trate de describir de manera detallada cada uno de esos problemas.

Tarea 3. Problemas fundamentales en el estudio de la variación y los procesos cognitivos asociados.

Analice con detenimiento los siguientes párrafos, en los que se desglosan algunos de los principales problemas en el estudio de las situaciones de variación y, por ende, del desarrollo del pensamiento variacional. Formule su propia interpretación de cada uno de estos problemas, y trate de establecer las implicaciones didácticas que de ellos se pueden derivar, identificando los procesos cognitivos involucrados.

1. ***¿Qué está cambiando aquí? El problema de la percepción, detección o identificación de las variables.***

La primera dificultad al intentar estudiar cualquier fenómeno de variación consiste en ***identificar las magnitudes variables*** que en él intervienen. No siempre resulta fácil, en un fenómeno dado, entender qué es lo que está cambiando. Hay dos razones importantes para ello. En primer término, las cosas se complican porque, en general, en un fenómeno de variación (al igual que en cualquier otro fenómeno natural) intervienen siempre *muchas* variables. Los fenómenos reales son *multivariables*. En segundo lugar, y ésta es quizá la mayor dificultad, ocurre que generalmente las variables importantes no son *directamente perceptibles* a los sentidos, es decir, no es posible percibirlas o advertirlas haciendo uso solamente de las capacidades sensoriales. Con frecuencia estas variables representan conceptos abstractos, tales como densidad, aceleración, luminosidad, concentración, acidez, etcétera, y describen cualidades o propiedades físicas teóricamente concebidas, no percibidas sensorialmente, relativas al fenómeno que es motivo de análisis.

Procesos cognitivos relacionados con este problema:

Implicaciones didácticas:

2. ***El problema de la idealización del fenómeno motivo de estudio.***

La segunda dificultad relacionada con el estudio de la variación consiste en distinguir, de entre todas las variables que ha sido posible identificar en un fenómeno, a las ***variables relevantes***, es decir, a aquellas que en conjunto reflejan la esencia de dicho fenómeno y que lo hacen distinto de cualquier otro. No todas las variables identificadas en un fenómeno resultan igualmente importantes para describir la esencia de dicho fenómeno. Aún más: no todas las variables que sean identificadas realmente importan. Esto significa que algunas de las variables pueden ser ignoradas. En otras palabras, algunas variables pueden ser excluidas del análisis. La exclusión de ciertas variables en el análisis de un fenómeno equivale a aceptar la hipótesis de que dichas variables no tienen qué hacer en absoluto en el fenómeno o proceso, es decir, de que no influyen en absoluto sobre él, o de que, en todo caso, su influencia es insignificante. El proceso de exclusión de ciertas variables irrelevantes en un fenómeno recibe el nombre de ***idealización*** del fenómeno. El término idealización se usa para resaltar el hecho de que se trata de un fenómeno idealizado, a diferencia de un fenómeno real en el que intervienen todas las variables. Aunque parezca contradictorio, *el primer paso importante en el estudio de un fenómeno real consiste en su idealización*.

Procesos cognitivos relacionados con este problema:

Implicaciones didácticas:

3. ***El problema de la cuantificación o medición de las magnitudes variables.***

La tercera dificultad relacionada con el estudio de la variación consiste en determinar la forma en que las variables relevantes del fenómeno pueden ser ***cuantificadas***, es decir, ***medidas***. El notable físico inglés lord Kelvin hacía alusión a esta dificultad en su célebre frase: "Si algo existe en la naturaleza, existe en cierta cantidad; si existe en cierta cantidad, entonces puede medírsele". Cuando es posible medir o cuantificar las variables relevantes de un cierto fenómeno o proceso, entonces también es posible obtener una *relación numérica* (es decir, una relación entre cantidades o números) que refleja igualmente la esencia del fenómeno observado. El mismo lord Kelvin enfatizaba esta idea con las siguientes palabras: "Cuando aquello de lo que se está hablando puede medirse y expresarse con números, se sabe algo acerca de él; pero cuando no puede medirse, cuando no puede expresarse en números, el conocimiento es de calidad pobre e insatisfactoria."

La cuantificación de un atributo implica una dialéctica compleja entre tres aspectos: concebir (percibir) al objeto, concebir (percibir, imaginarse o identificar) un atributo cuantificable del mismo, y concebir un método (y de ser posible, también un instrumento) para medir ese atributo.

Procesos cognitivos relacionados con este problema:

Implicaciones didácticas:

4. ***El problema de la representación de las magnitudes variables.***

La matemática ha desarrollado distintas formas útiles y adecuadas para representar y analizar los fenómenos de covariación. Básicamente, se recurre a dos tipos de representaciones de las magnitudes variables y de los fenómenos de variación: las representaciones cualitativas o *intensivas*, y las representaciones cuantitativas o *extensivas*. Estas últimas se basan en mediciones o cálculos, es decir, en datos numéricos, o bien en el establecimiento de relaciones algebraicas de dependencia entre magnitudes variables.

4.1 Representaciones cualitativas.

La representación verbal.

La representación verbal de la covariación consiste en la descripción de un fenómeno de variación usando el lenguaje hablado o escrito, al que eventualmente pueden incorporársele términos matemáticos con el fin de dotarlo de precisión. La descripción verbal no es necesariamente larga, aunque no es tan concisa como la descripción en el lenguaje puramente matemático.

> El estudiante debe ser capaz de escribir con sus propias palabras lo que está sucediendo en la situación de cambio, al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones. Se espera que en las descripciones de la situación de cambio se usen expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, etc. (MEN Colombia)

La representación icónica o pictórica.

> Los dibujos y gráficos son medios de representación en las situaciones de variación ya que muestran de otra forma lo que el estudiante entiende acerca de la situación. Estos dibujos y gráficos en un comienzo pueden ser muy concretos y mostrar lo que sucede en diferentes momentos de la situación de cambio. Por ejemplo, dibujos del balde mostrando diferentes alturas del nivel de agua. De todas formas estos dibujos y gráficos deberían ir acompañados de explicaciones verbales. Estos dibujos y gráficos ayudarán a darle sentido a las gráficas cartesianas de las funciones que describen las situaciones de cambio. (MEN Colombia)

Es posible contar con varios niveles de esquematización en la representación icónica. Por ejemplo, en la Fig. 1 se muestra una ilustración realista del proceso covariacional de llenado de un recipiente en el transcurso del tiempo.

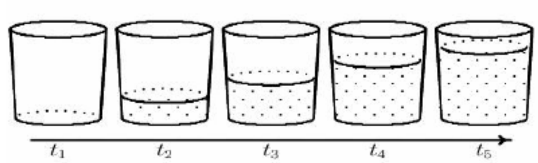


Figura 1.
Representación icónica del proceso covariacional de llenado de un recipiente.

Este mismo proceso puede ser representado en forma aún más esquematizada, como se muestra en la Fig. 2.

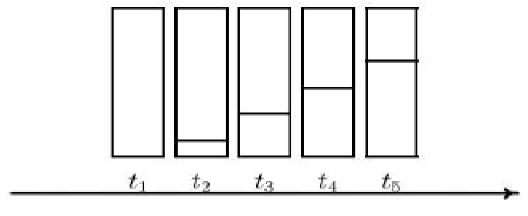


Figura 2.
Representación icónica esquematizada del proceso covariacional de llenado de un recipiente.

También es posible extremar la esquematización anterior, como se muestra en la Fig. 3.

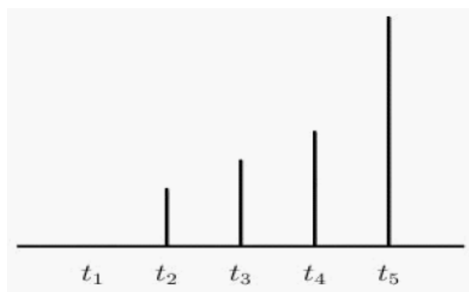


Figura 3.
Esquematización extrema del proceso covariacional de llenado de un recipiente.

La representación digital de la covariación.

En la actualidad, la tecnología de video digital hace posible un nuevo tipo de representación de la covariación, a la que precisamente se le llama representación digital. Este nuevo tipo de representación no es universal, sino solamente aplicable a aquellos casos en los que la magnitud que cambia (la magnitud de interés) en el transcurso del tiempo es directamente perceptible a la vista (al igual que en el caso de la representación icónica), y por lo tanto a la video filmación. La edición del video digital, fotograma por fotograma a intervalos regulares, proporciona un fotograma final en el que se ha realizado un marcaje o "punteo" de la magnitud de interés, y dicho fotograma es considerado la representación digital de la covariación de dicha magnitud, ya sea con respecto al tiempo o a alguna otra magnitud variable de referencia.

Figura 4.
La representación digital de un fenómeno de covariación: el movimiento de un objeto.

Procesos cognitivos relacionados con este problema:

Implicaciones didácticas:

4.2 Representaciones cuantitativas.

La representación numérica de las magnitudes variables.

La representación tabular de las magnitudes variables.

Aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. (…) Se puede hacer un estudio de esos datos numéricos para encontrar patrones de regularidad. Las tablas de datos numéricos se pueden producir también con sensores conectados a calculadoras o a partir de expresiones algebraicas. Los patrones de regularidad o los métodos de regresión permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables involucradas y que se ajustan a los datos que sobre los mismos se tienen. (MEN Colombia)

Nombre de la magnitud variable cuyos valores se consignan en la primera columna (**variable independiente**)

Nombre de la magnitud variable cuyos valores se consignan en la segunda columna (**variable dependiente**)

Unidades empleadas para la medición de la variable dependiente

Símbolo empleado para representar a la variable independiente

Unidades empleadas para la medición de la variable dependiente

Símbolo empleado para representar a la variable dependiente

De preferencia, os valores de la variable independiente están **ordenados en forma creciente e igualmente espaciados**. (Sólo un valor de la tabla no se ajusta a esta regla)

Valores de la variable dependiente, correspondientes a los respectivos valores de la variable independiente

Tiempo	**Temperatura**
t, min	*T*, °C
0	85
2	79
4	73
6	67
8	61
10	55
12	49
14	43
16	37
18	31
20	25
21	22
22	22
24	22
⋮	22

Figura 5.
Representación numérica o tabular de la covariación.

La representación algebraica de las magnitudes variables.
De acuerdo a los patrones de regularidad encontrados en la tabla se pueden establecer expresiones algebraicas que condensen toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas en el problema de estudio. Por ejemplo, los valores de las variables para los cuales una expresión o fórmula se anula dan información acerca de los intervalos donde la expresión es positiva o negativa. El estudio de expresiones algebraicas en el contexto de la variación contribuye de manera significativa en el desarrollo del pensamiento algebraico (MEN Colombia)

La representación gráfica de las magnitudes variables.
Se hace mediante la representación en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas de los datos de la tabla que consigna las mediciones de las magnitudes involucradas. Se puede así mismo producir la gráfica a partir de las expresiones algebraicas que se obtuvieron de la tabla. (MEN)

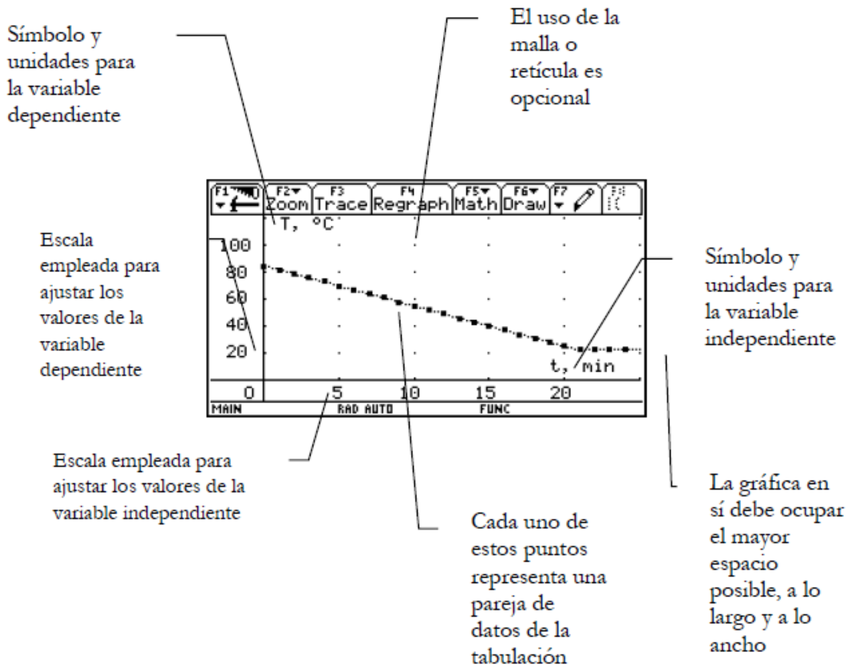


Figura 6.
La representación gráfica de la covariación.

Los análisis y descripciones que pueda hacer un estudiante de las diferentes representaciones serán de vital importancia en el entendimiento del fenómeno de variación. Por ejemplo, la lectura de una gráfica, una tabla, una fórmula, etc., en términos cualitativos, describiendo la forma en que una variable se comporta con respecto a otra y explicando la relación que existe entre las diferentes formas de representación. (MEN)

La calidad de la comprensión de la situación de variación dependerá de las relaciones que el estudiante pueda establecer entre las diferentes representaciones. (MEN)

La representación integrada de la covariación.

En las matemáticas del cambio, la representación de la covariación no se restringe a las seis posibilidades separadas que hemos analizado más arriba. Lo interesante y bello de las matemáticas del cambio es que estas diferentes formas de representación son *complementarias*: a partir de cada una de ellas es siempre posible extraer diferente información valiosa respecto al fenómeno estudiado, que luego se puede verificar en alguna otra de las representaciones. Por eso, desde el punto de vista de las matemáticas del cambio, es más correcto hablar no de varias formas de representar la covariación, sino de una ***única forma*** de representación integrada: la que en su conjunto forman, al menos, las últimas cuatro posibilidades que hemos analizado en los apartados previos, y que podemos ilustrar en la siguiente figura.

Representación matemática del enfriamiento ficticio de una taza de café

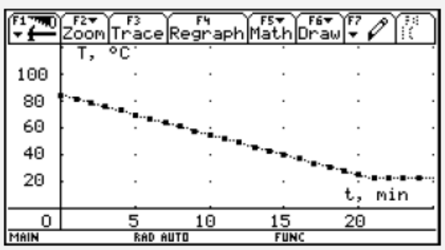
Representación verbal

El café, que había sido calentado hasta una temperatura de 85 °C, al ser expuesto al medio ambiente, cuya temperatura es de 22 °C, se enfría uniformemente a razón de 3 °C por minuto.

Representación tabular

Tiempo t, min	Temperatura T, °C
0	85
2	79
4	73
6	67
8	61
10	55
12	49
14	43
16	37
18	31
20	25
21	22
22	22
24	22
⋮	22

Representación gráfica



Representación analítica

$$T(t)=\begin{cases}85-3t, & 0\le t\le 21\\ 22, & t\ge 21\end{cases}$$

$$85\le T\le 22$$

$$0\le t<+\infty$$

t, min

T, °C

Figura 7.
La representación integrada de la covariación.

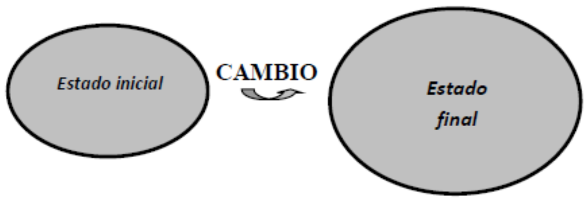
Procesos cognitivos relacionados con este problema:

Implicaciones didácticas:

5. *El problema de la cuantificación del cambio de las magnitudes variables.*

No se puede saber si una magnitud variable escalar aumenta o disminuye, si no se comparan entre sí al menos dos de los valores numéricos (medidos o calculados) que dicha magnitud variable puede tomar. En general, puesto que los fenómenos de variación poseen la cualidad de ser *procesos*, entonces los podemos imaginar o concebir como compuestos por *estados* sucesivos. Entre un estado del proceso y el que le sigue o cualquier otro, tienen lugar cambios. El cambio puede ser cuantificado mediante una *diferencia*, precisamente, la que existe entre el valor de la magnitud en el estado final, y su respectivo valor en el estado inicial. De este modo, el concepto matemático básico y más simple para cuantificar la variación es el de ***cambio absoluto***, y se expresa como una *diferencia*.

Hablando en general, podemos afirmar que, en un proceso dado, el cambio consiste en el paso de un *estado inicial* de dicho proceso a un *estado final*,



y que para medir el cambio lo que se necesita es restar el valor que las magnitudes variables que intervienen en dicho proceso tienen en el estado inicial, al que llamaremos ***valor inicial***, del valor que esas mismas variables tienen en el estado final, conocido como ***valor final***:

El problema de la representación del cambio de las magnitudes variables

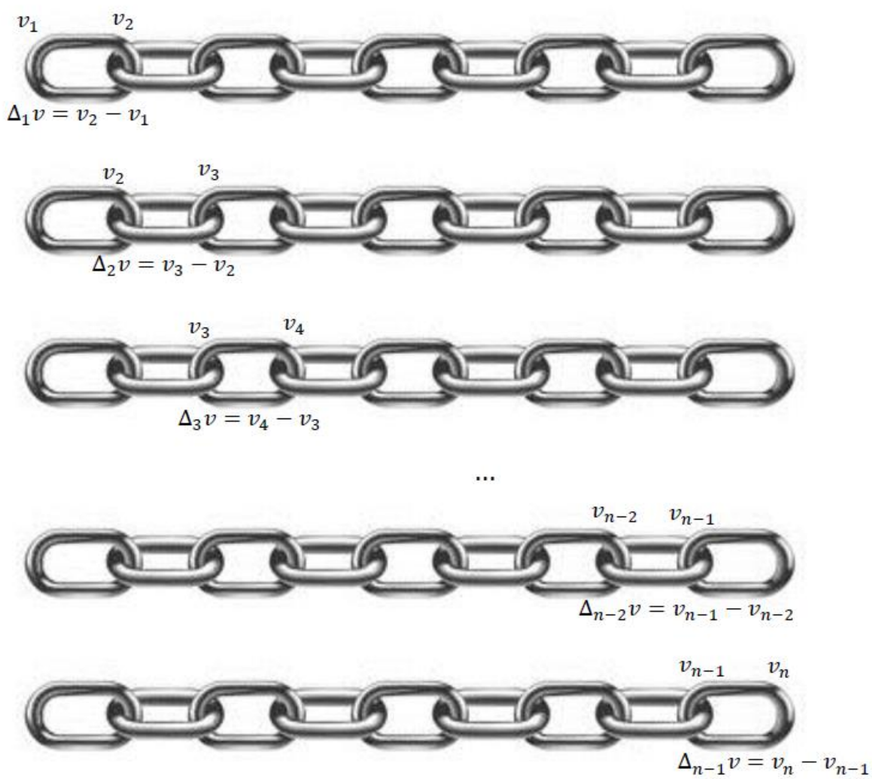
Representación algebraica

En términos generales, tenemos que cuando v representa una magnitud variable, si v_i es el valor que dicha magnitud variable toma en un cierto estado que consideraremos como el inicial, mientras que v_f es el valor que dicha magnitud variable toma en su estado final, entonces el cambio de la magnitud variable v, al pasar del estado inicial al estado final, se representa matemáticamente mediante el símbolo Δv, que se lee "*delta v*", y se calcula mediante la fórmula

$$\Delta v = v_f - v_i \quad .$$

Los cambios de la magnitud variable v calculados con esta fórmula reciben el nombre de ***cambios absolutos***. En otras palabras, la fórmula anterior nos indica el procedimiento para calcular los cambios absolutos de una magnitud variable.

El fenómeno o proceso de variación en su totalidad (o por lo menos una etapa o fase de él) puede ser considerado como una sucesión o cadena de pares de estados “inicial” y “final”. Considerado como parte de una cadena, el estado “final” de un eslabón es a la vez el estado “inicial” del eslabón siguiente (excepto, claro está, el estado efectivamente final del proceso o fenómeno). Comparando los cambios absolutos de la magnitud variable en cada uno de los eslabones consecutivos, podemos obtener una descripción más completa del comportamiento de dicha magnitud, durante dicho proceso o parte de él.



Procesos cognitivos relacionados con este problema:

Implicaciones didácticas:

6. *El problema de la coordinación del cambio entre dos magnitudes variables*

En el caso más simple, en que se consideran sólo dos magnitudes variables intervinientes, esta idea de *covariación* implica lo siguiente:

a) La formación de una imagen del cambio para cada una de estas dos magnitudes variables (cada una de ellas cambia, esto es, toma distintos valores numéricos en diferentes momentos);
b) La coordinación simultánea de estas dos imágenes (ambas magnitudes cambian de manera simultánea: cambia una de ellas, y la otra también cambia); y
c) La formación de una imagen de la covariación de estas dos magnitudes (ellas no pueden cambiar alternando lugares; siempre ocurrirá que el cambio de una de ellas originará el cambio en la otra, y no a la inversa ni alternando. En otras palabras, *una de ellas cambia porque la otra ha cambiado*, y el cambio de roles entre ellas no tiene sentido.)

En resumen, la noción de covariación exige la coordinación de los valores numéricos de dos magnitudes que cambian de manera simultánea, tomando en consideración la forma en que dichas magnitudes cambian una en relación con la otra. El *razonamiento covariacional* implica la consideración y/o la formulación de relaciones entre los valores de dos magnitudes que cambian simultáneamente.

En el contexto numérico, y en el caso más simple de dos magnitudes variables, el razonamiento covariacional implica la coordinación de la variación de los valores numéricos contenidos en las dos columnas de una tabla, mientras se les recorre visualmente de arriba hacia abajo.

En el contexto gráfico, el razonamiento covariacional implica la coordinación de los valores de las dos coordenadas (coordenada x y coordenada y) de un punto que se mueve sobre una curva.

La acción de *coordinar* es clave en el pensamiento variacional, y es fundamental para entender la naturaleza de un fenómeno o proceso de variación.

Procesos cognitivos relacionados con este problema:

Implicaciones didácticas:

Actividad 3

Elementos teóricos de la Matemática Educativa para explicar el desarrollo del razonamiento covariacional.

Concepciones del pensamiento variacional

La investigación en Matemática Educativa ha creado diferentes conceptos, íntimamente relacionados con el aprendizaje de la matemática del cambio y la variación, y que están siendo usados no sólo como herramientas teóricas en diferentes investigaciones, sino también como orientaciones para la reformulación del currículo escolar en algunas de las recientes reformas educativas alrededor del mundo. Uno de esos conceptos es el de pensamiento variacional, y ha tenido diferentes interpretaciones y usos en algunas investigaciones educativas.

En este caso, podemos ubicar dos grupos. En el primero, situaremos a los grupos de investigación que centran sus realizaciones didácticas en introducir el concepto de magnitud física y en el estudio del comportamiento de las magnitudes variables. El modelo matemático abstracto para ellas es la noción de variable. Una vez que el comportamiento de las diferentes magnitudes variables ha sido más o menos estudiado (en solitario; cada magnitud variable por separado), se transita hacia el estudio de la variación conjunta de dos o más magnitudes variables, lo que lleva a la noción de covariación. El modelo matemático abstracto para la covariación es la noción de función, pero está supeditada a la modelación de los fenómenos naturales.

En el segundo grupo colocamos a los investigadores que asumen que el centro de las realizaciones didácticas para el desarrollo del pensamiento variacional reside en el estudio de las funciones y sus propiedades, desde el mismísimo primer momento. Se empieza por el estudio de las funciones más simples: lineal y cuadrática, y se continua con casos más complicados, como las funciones racionales. Bajo este enfoque, los fenómenos naturales (y con ellos, las magnitudes variables) quedan relegados a un segundo o tercer plano; lo que importa son las funciones y sus propiedades. Las funciones eclipsan a las magnitudes variables.

El acercamiento cualitativo al desarrollo del pensamiento variacional

La inclusión de algunas ideas y conceptos elementales relacionados con el pensamiento variacional en el currículo de la educación básica en algunos países obedece a los resultados de diversos trabajos de investigación (Kaput, 1999; Stroup, 2002), que sugieren que desde la educación primaria los niños pueden desarrollar rasgos importantes del pensamiento variacional. Estos resultados también sugieren que, de poner al desarrollo sistemático de ideas variacionales elementales en los niños, podrían disminuirse considerablemente muchas de las dificultades que posteriormente experimentan los estudiantes con las gráficas de funciones y con las ideas básicas del Cálculo.

Por su parte, la NCTM, en diversas directrices curriculares (NCTM, 2000; NCTM, 2006) propone introducir ideas y modos de pensar propios del Cálculo desde la educación primaria.

La finalidad de iniciar a los alumnos en el pensamiento variacional desde los primeros niveles de escolaridad consiste en que ellos, a partir de "conceptos matemáticos poderosos", puedan profundizar en el entendimiento de las matemáticas elementales, así como brindarles la oportunidad de comenzar con sus propias representaciones intuitivas, y poco a poco ir introduciendo las herramientas convencionales cuantitativas para representar y entender las relaciones entre las magnitudes variables. Muchos conceptos matemáticos pueden entenderse sin recurrir a procesos complejos, como lo son sus demostraciones formales. Es decir, es posible presentar conceptos avanzados a alumnos a edad temprana por medio de ejemplos y experimentos, aun cuando la demostración formal presente un alto grado de dificultad.

Bajo el enfoque del "cálculo cualitativo", un objetivo fundamental de la enseñanza consiste en desarrollar en el alumno imágenes cualitativas correctas de la relación que existe entre los valores numéricos de una magnitud variable y los valores de su razón de cambio, en otras palabras, desarrollar un cierto tipo de *razonamiento cualitativo* sobre las magnitudes variables. El enfoque del "cálculo cualitativo" se distingue de otros por "la afirmación de que este razonamiento cualitativo acerca de la relación entre la razón de cambio y la cantidad no es meramente transitorio en el camino hacia una comprensión operacional más completa, basada en la noción de razón (cociente), de la razón de cambio. La comprensión del cálculo cualitativo es cognitivamente importante y "estructural" por derecho propio." (Stroup, 2002) El razonamiento cualitativo, entonces, es un tipo de razonamiento legítimamente matemático.

El razonamiento cualitativo sobre el comportamiento de las magnitudes variables es espontáneamente expresado por los alumnos mediante frases parecidas a las siguientes: "aumenta", "disminuye", "aumenta cada vez más", "disminuye cada vez menos", "aumenta cada vez lo mismo", "crece lento", "disminuye rápido", etcétera. Estas frases están asociadas a imágenes o representaciones gráficas de las magnitudes variables y de sus cambios absolutos. Empleando este razonamiento cualitativo, y bajo una selección cuidadosa de las situaciones a abordar, el alumno puede identificar y describir los tipos básicos de comportamiento variacional.

Otro objetivo importante que se plantea el enfoque del "cálculo cualitativo" es el desarrollo en el alumno de imágenes correctas de la relación que existe entre el comportamiento variacional de la magnitud variable, y el comportamiento variacional de sus cambios absolutos.

El mayor reto didáctico que plantea el enfoque del "cálculo cualitativo" consiste en investigar la relación que existe entre el razonamiento cualitativo y el razonamiento cuantitativo sobre las magnitudes variables, y explotar ambos tipos de razonamiento en beneficio de la comprensión del alumno.

"El cálculo cualitativo, como una forma sostenida de razonamiento, es poderoso para ciertos tipos de tareas. Es particularmente útil para darnos una idea de las situaciones en que la razón de cambio varía, sin tener que preocuparse por la forma en que dicha razón podría ser cuantificada de manera extensiva o analizada numéricamente." (Stroup, 2002)

Precisamente en este punto el enfoque del "cálculo cualitativo" se distingue radicalmente de otros enfoques, más tradicionales. El "enfoque tradicional comienza con la razón de cambio constante, en vez de hacerlo con la razón de cambio variable. El argumento tradicional para iniciar con la función lineal es que se trata del tipo "más simple" de cambio. La razón de cambio es constante. Sin embargo, los alumnos tienen grandes dificultades con la función lineal y, en consecuencia, hay poca o ninguna expectativa de que la mayoría de ellos puedan dar sentido a situaciones donde la razón de cambio es variable." (Stroup, 2002) Una posible explicación de este hecho es la siguiente:

"En lugar de intentar construir una comprensión de la razón de cambio variable (complejidad) a partir de la razón de cambio constante (simplicidad), tal vez tiene más sentido empezar con la razón de cambio variable (complejidad). Al comenzar con la complejidad, los alumnos luego podrán ver la razón constante (simplicidad) como un caso especial o restringido, donde la razón de cambio es la misma en todas partes. La función lineal debe ser sólo una de las muchas posibilidades." Empezar por la razón de cambio variable es tanto posible como de gran alcance para los alumnos (Stroup, 2002).

Stroup (2002) presenta "un resumen parcial de las características intensivas asociadas a la comprensión del cálculo cualitativo *en contextos gráficos*":

- En un contexto gráfico del tipo “cuánto” (por ejemplo, la gráfica de la posición en función del tiempo), la curva llega “más y más arriba” sin “voltearse”, conforme el movimiento en la dirección positiva se hace más rápido.
- Más rápidamente en la dirección positiva está asociada con “más pronunciado” hacia arriba; más rápidamente en la dirección negativa se asocia con “más pronunciado” hacia abajo;
- Los alumnos pierden el sentido de que una gráfica es una imagen de algo –por ejemplo, “las grietas en una acera”– o de que una gráfica es una especie de vista a vuelo de pájaro de la ruta que alguien tomó –por ejemplo, una vista desde arriba de la trayectoria de una persona que camina en un estacionamiento;
- Los alumnos distinguen los tipos de curvatura en la descripción de los aumentos o disminuciones de cantidades del tipo “cuánto” (por ejemplo, ir hacia adelante más y más rápidamente se distingue de ir hacia adelante, mientras se va frenando);
- En una gráfica, un segmento plano significa que no ha habido ningún cambio, en lugar de representar una razón de cambio constante no nula;
- Los alumnos empezarán a relacionar los máximos y mínimos relativos con una razón de cambio igual a cero.

Niveles en el desarrollo del razonamiento covariacional

El enfoque denominado Razonamiento Covariacional, presentado por Carlson y cols. (2002) y por Thompson (1994), modela el desarrollo del pensamiento variacional mediante la concatenación de una serie de acciones mentales complejas, que reflejan distintos niveles de desarrollo de dicha forma de pensamiento.

Este marco clasifica el proceso completo de desarrollo de razonamiento covariacional en cinco niveles, que van desde el Nivel 1 (el más elemental) hasta el Nivel 5 (el más desarrollado), y que quedan descritos por la manifestación, por parte del alumno, de ciertos comportamientos de análisis y de ciertos razonamientos acerca de las situaciones de covariación que les son planteadas. Estos comportamientos corresponden a lo que en este marco se llama *acción mental*, también clasificadas en cinco tipos (AM1 – AM5).

Cada acción mental se puede describir a través de la combinación de las imágenes de covariación que el estudiante vaya formando, y de los razonamientos que exprese durante la actividad. Estos comportamientos reflejan o exteriorizan el tipo de coordinación que el estudiante es capaz de realizar sobre las magnitudes variables involucradas en el fenómeno y sobre su comportamiento variacional.

Es pertinente mencionar que la descripción de cada nivel de razonamiento covariacional, no es sólo en función de la acción mental asociada a ese nivel, sino a ésta y todas aquellas que la preceden; así pues, para poder asegurar que un alumno ha alcanzado el nivel 4, tendrá que mostrar comportamientos y razonamientos que evidencien el dominio de acciones mentales desde el tipo 1 hasta el tipo 4 (AM1 – AM4).

En los párrafos que siguen procedemos a comentar brevemente la definición de cada una de las acciones mentales constitutivas del razonamiento covariacional, y a describirlas en el caso concreto de las actividades sobre llenado/vaciado de recipientes y de movimiento, que se abordaron en el curso *Actividades Selectas de Matemáticas II*.

ACCIÓN MENTAL 1 (AM1) Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.

Según la definición, la AM1 marca el inicio de las habilidades en el razonamiento covariacional. El alumno tiene que ser capaz de coordinar los cambios de una variable con respecto de otra, a través de un proceso que inicia con la identificación de las diferentes magnitudes involucradas en el fenómeno, continúa con la identificación de los tipos básicos de comportamiento variacional que presentan las magnitudes variables detectadas, para culminar con la coordinación de dichas magnitudes en una relación de dependencia.

Algunos de los comportamientos que se pueden observar en los estudiantes, dependiendo del registro de representación en que se analice el fenómeno, son los siguientes.

a) En el uso del lenguaje: éste será un tipo de comportamiento que esperamos se presente en forma simultánea en todos los registros que consideraremos, ya que con explicaciones verbales será como se pueda evidenciar la presencia de los comportamientos esperados. Así por ejemplo, será de forma verbal que el estudiante enumere o señale todas las cualidades medibles del fenómeno; por ejemplo, el tiempo y la altura del líquido en el recipiente.
b) En el video: Identificación visual de magnitudes que cambian, incluyendo la identificación del sistema de referencia para la medición o cálculo de estas magnitudes. Además, se tendrán que señalar de qué forma se relacionan estas magnitudes variables; ejemplos de estas relaciones pudieran ser: altura-tiempo,

volumen-altura, volumen-tiempo, área-radio, área-tiempo, distancia-tiempo. Se deberá especificar en cada caso cuál de las magnitudes se tratará como variable independiente, y por qué.

Figura 8.
Imagen de video con ejemplos de las magnitudes variables que se pueden percibir durante el llenado o vaciado del recipiente.

c) En la tabla: El proceso de punteo da como resultado una tabla de valores numéricos de al menos tres columnas (tiempo, coordenada x, coordenada y). Entre los comportamientos a observar se pueden encontrar algunos gestos o señalamientos sobre la tabla que muestren que cada columna representa una magnitud variable, definiendo así también qué papel jugará cada variable (por lo general, se considera que los valores de la variable en la segunda y tercera columnas dependen de los valores de la que se encuentra en la primer columna).

d) En la gráfica: el establecimiento de los ejes coordenados (por lo general x,) y la asignación de la correspondiente magnitud variable a cada uno de ellos, señalando que si se da un cambio en la coordenada x también se presentará un cambio en el valor de la coordenada y.

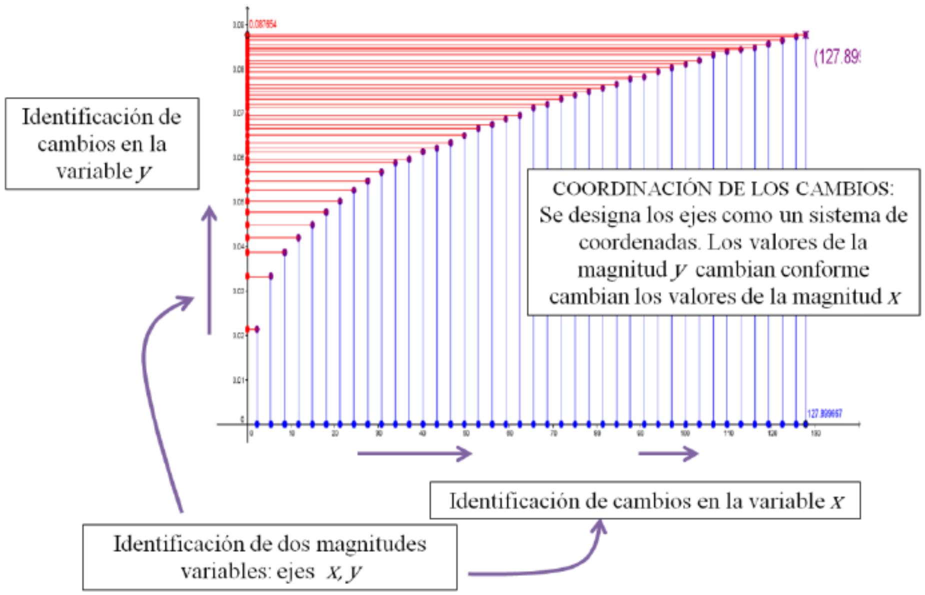


Figura 9.
Indicaciones en el registro gráfico que evidencian la coordinación de los cambios en dos magnitudes variables.

e) En la forma algebraica: Identificación del papel que juega cada una de las variables involucradas, obteniendo expresiones algebraicas donde x es quien determina los valores de y, pudiendo señalar los valores permisibles para x.

ACCIÓN MENTAL 2 (AM2) Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

El avance que se da en esta acción mental, es el hecho de que, además de identificar los cambios en las variables, también se coordina el sentido en el que se da ese cambio; es decir, se identificará que al cambiar una de las variables la otra presenta una disminución o un aumento. Con lo anterior podemos decir que para evidenciar AM2, exigiremos la identificación del comportamiento variacional general que está presentando el fenómeno: crecimiento, decrecimiento o no hay cambio.

a) En el uso del lenguaje: el uso de la verbalización para reforzar el reconocimiento del sentido en el que se está dando el cambio de las magnitudes variables (ej. “La variable independiente siempre crece”, “si la variable independiente siempre crece, entonces la variable dependiente siempre disminuye”).

b) En el video: por ejemplo, en el caso del fenómeno de vaciado del recipiente, que conforme pasa el tiempo, la altura y el volumen del fluido disminuyen; en el caso del péndulo, la identificación del sentido en el que, conforme transcurre el tiempo, cambia la distancia (horizontal o vertical) medida con respecto al eje establecido como referencia, comportándose ésta en algunos momentos de manera creciente, y en otros de manera decreciente.

c) En la tabla: Identificación del hecho de que, conforme se avanza hacia abajo en los renglones de la tabla, los valores de la primer columna siempre aumentan, mientras que los de las segunda columna tienen un comportamiento ya sea creciente (ej. altura respecto al tiempo, en el llenado del recipiente) o decreciente (ej. volumen con respecto a la altura, en el vaciado del recipiente) según sea el fenómeno observado, pudiendo ser (como en el caso del péndulo) que se identifique en una parte decrecimiento y en otra crecimiento.

d) En la gráfica: la construcción del bosquejo de gráficas donde muestre el sentido del cambio en los valores de las magnitudes variables involucradas.

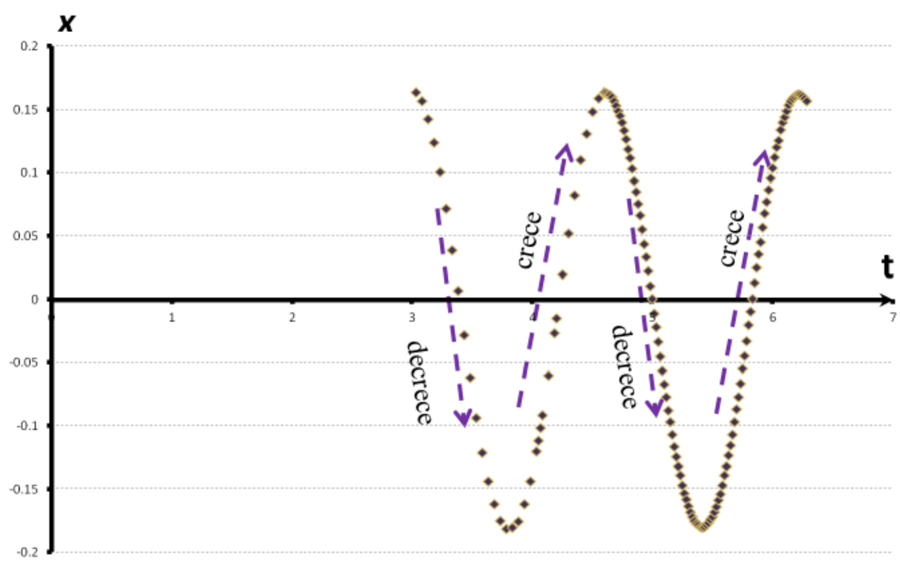


Figura 10.
Gráfica donde se observa el sentido del cambio en los valores de las magnitudes variables x y t relacionadas con el movimiento del péndulo.

e) En la forma algebraica: La interpretación a groso modo del efecto que provoca sobre la variable dependiente el hecho de que se modifiquen (por lo general aumenten) los valores de la variable independiente.

$$x_f = x_i + \Delta x \ ,$$
$$y_f = y_i + \Delta y \ ,$$

donde x_i y y_i representan los valores numéricos de las magnitudes variables en el estado inicial, mientras que x_f y y_f representan los valores finales de dichas magnitudes variables; Δx es el cambio que tiene la magnitud x, y Δy el cambio que tiene la magnitud y.

ACCIÓN MENTAL 3 (AM3) Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.

Esta acción mental se enfoca en la cuantificación del cambio, de tal manera que se lleva a cabo la coordinación de la cantidad de cambio en la variable independiente, con la cantidad de cambio en la variable dependiente.

a) En el lenguaje y en el video: coordinar la magnitud de separación entre las marcas en el fotograma con la conciencia de que dichas marcas fueron realizadas con la misma separación temporal. Se esperan enunciados del comportamiento de esas separaciones (ej. “están cada vez más juntas”, “están cada vez más separadas”).

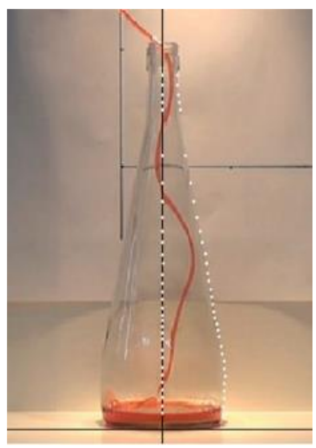


Figura 11.

Imagen del punteo sobre un fotograma, donde se observa la separación de las marcas tomadas a intervalos iguales de tiempo en el vaciado de un recipiente.

b) En la tabla: Se esperan expresiones que relacionen la cantidad de cambio en los valores de la variable de la primera columna de un renglón a otro, relacionándolo con la cantidad de cambio obtenida en los mismos renglones para los valores de la segunda variable (segunda columna).

t	x	Δt	Δx
3.033295	0.16406		
3.083295	0.15703	0.016667	-0.00313
3.133294	0.14297	0.016666	-0.00469
3.183293	0.12422	0.016666	-0.00703
3.233293	0.10078	0.016667	-0.0086
3.283292	0.071875	0.016666	-0.010156
3.333291	0.039063	0.016666	-0.010937
3.383291	0.0070313	0.016667	-0.0085937
3.43329	-0.028125	0.016666	-0.010156
3.48329	-0.061719	0.016667	-0.011719
3.533289	-0.09375	0.016667	-0.010156
3.583288	-0.12109	0.016666	-0.00937
3.633288	-0.14375	0.016667	-0.00625
3.683287	-0.16172	0.016666	-0.00469
3.733286	-0.175	0.016666	-0.00312
3.783286	-0.18125	0.016667	-0.00078
3.833285	-0.18047	0.016666	0.00078
3.883285	-0.17578	0.016667	0.00078
3.933284	-0.16172	0.016667	0.00469
3.983283	-0.14375	0.016666	0.00703
4.033283	-0.12031	0.016667	0.0086
4.049949	-0.11172	0.016666	0.00859
4.066616	-0.10156	0.016667	0.01016
4.083282	-0.091406	0.016666	0.010154
4.133281	-0.060156	0.016666	0.010157
4.183281	-0.026563	0.016667	0.013281
4.199947	-0.014844	0.016666	0.011719
4.249947	0.019531	0.016667	0.0117185
4.299946	0.052344	0.016666	0.011719
4.349945	0.082813	0.016666	0.009375
4.399945	0.11016	0.016667	0.00938
4.449944	0.13125	0.016666	0.00703
4.499943	0.14844	0.016666	0.00547
4.549943	0.15938	0.016667	0.00391
4.599942	0.16406	0.016666	0.00078

Cambios iguales de t se relacionan con cambios negativos cada vez mayores (en valor absoluto) en x, **(decrece cada vez más)**

Cambios iguales de t se relacionan con cambios negativos cada vez menores (en valor absoluto) en x, **(decrece cada vez menos)**

Cambios iguales de t se relacionan con cambios positivos cada vez mayores en x, **(crece cada vez más)**

Cambios iguales de t se relacionan con cambios positivos cada vez menores en x, **(crece cada vez menos)**

Figura 12.

La coordinación de los cambios de las magnitudes variables en una tabla de valores numéricos.

c) En la gráfica: Interpretar los valores de Δx como un conjunto de segmentos horizontales, uno por cada punto de la gráfica, excepto el último, e interpretar los valores de Δy como un conjunto de segmentos verticales (uno por cada punto en la gráfica, excepto el primero); asociar la dirección hacia arriba de estos segmentos verticales con el crecimiento, y la dirección hacia abajo, con el decrecimiento; y también asociar el tamaño de estos segmentos con el comportamiento variacional uniforme (segmentos del mismo tamaño), acelerado (segmentos cada vez más grandes) o desacelerado (segmentos cada vez más pequeños).

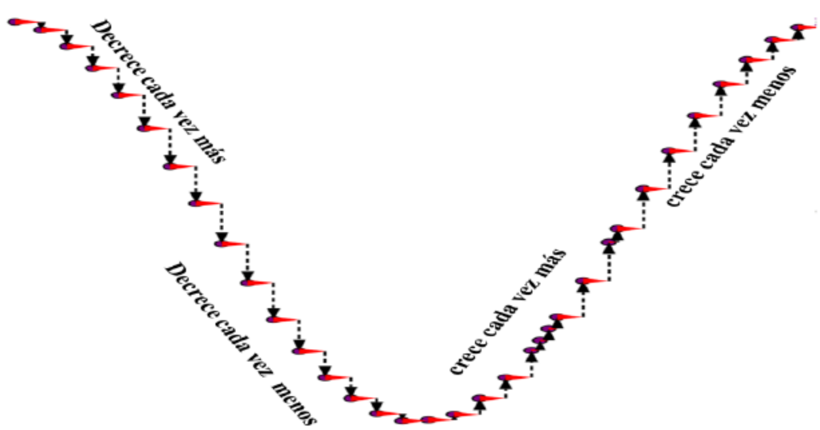


Figura 13.

La coordinación de los cambios absolutos de dos magnitudes variables en la gráfica cartesiana.

d) En la forma algebraica: La cuantificación del cambio mediante procedimientos algebraicos, a partir de la expresión algebraica que relaciona las magnitudes variables.

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) \,.$$

ACCIÓN MENTAL 4 (AM4) Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

Es aquí en donde se presenta de una forma clara la coordinación entre los cambios uniformes de la variable independiente con los cambios de la variable dependiente, hablando claramente de la existencia de las razones de cambio promedio para cada intervalo considerado.

a) En la tabla: La coordinación del cociente de los cambios absolutos, e interpretarlos como una razón de cambio promedio. Se podrán observar otros comportamientos como el agregar columnas a la tabla para incluir en ellas los cocientes de diferencias calculadas, y establecer con mayor precisión la relación entre ellos, es decir, la razón de cambio.
b) En la gráfica: el estudiante debe ser capaz de formar rectas secantes entre los puntos contiguos de la gráfica, y reforzar con la verbalización sobre la relación entre cada una de ellas con su pendiente como la razón de cambio; al igual que la identificación de puntos importantes de la gráfica, como son los puntos extremos (máximos y mínimos), de inflexión o concavidades, y su relación con el comportamiento de las pendientes de las secantes.
c) En la forma algebraica: La forma de coordinar el cambio entre las variables, será calculando su razón de cambio promedio (RCP) en un intervalo tomando en cuenta un valor de interés x0 y el tipo de intervalo a considerar (hacia adelante, atrás o centrado); mediante el análisis de los resultados de los diferentes cálculos, determine que existe una tendencia hacia un valor numérico específico si se van haciendo dichos cálculos con intervalos de menor magnitud.
d) En el uso del lenguaje: Que el alumno exprese la relación que existe entre el valor numérico de la razón de cambio promedio y el comportamiento variacional de la magnitud variable (ej. “la razón de cambio promedio es positiva, entonces la magnitud variable crece”, “la razón de cambio promedio es negativa, podemos decir que la magnitud variable está decreciendo”, “la razón de cambio promedio es cero, entonces la magnitud variable no cambia”).

ACCIÓN MENTAL 5 (AM5) Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente, para todo el dominio de la función.

Esta acción mental es realizada cuando se logra pasar de la coordinación de la razón de cambio promedio a la razón de cambio instantánea, para el continuo de instantes del fenómeno observado.

a) En el video: Este tipo de abstracción de AM ya no se podrá identificar en el video o en alguno de sus fotogramas, ya que no es cuestión visual la identificación de la razón instantánea de cambio (es una abstracción).
b) En la tabla: El trabajo en tablas puede aproximarnos a una razón de cambio instantánea, cuando surge en el estudiante la inquietud de ver lo que sucede si se trabaja con intervalos más pequeños cada vez, sin embargo no se podrá trabajar con intervalos más pequeños ya que no tendríamos de donde obtener información, y se tendrá que pasar a algún otro registro para continuar el análisis. El comportamiento importante será entonces que el estudiante realice ese paso hacia otro registro y continúe con el objetivo de llegar a la razón de cambio instantánea.
c) En la forma algebraica: Para que un estudiante desarrolle la imagen de razón instantánea es necesario considerar que el cambio que sufre la variable independiente es infinitamente pequeño. $\Delta x \to 0$, de nueva cuenta, si tenemos la representación de la función como $y=(x)$, la razón de cambio instantánea la calcularíamos con $RIC=\lim \Delta x \to 0 \frac{\Delta y}{\Delta x}$, y al igual que en la razón promedio, podemos tener diferentes maneras de realizar dicho cálculo. Estos cálculos se apoyan en una interpretación intuitiva de lo infinitamente pequeño y del proceso de paso al límite.
d) En la gráfica: Que el estudiante identifique propiedades importantes de la gráfica, relacionándolas con el comportamiento variable de la razón instantánea de cambio, como son puntos extremos, de inflexión, o concavidades, y relacionándolos con el valor de la pendiente de rectas tangentes. Este comportamiento puede necesitar de la verbalización.

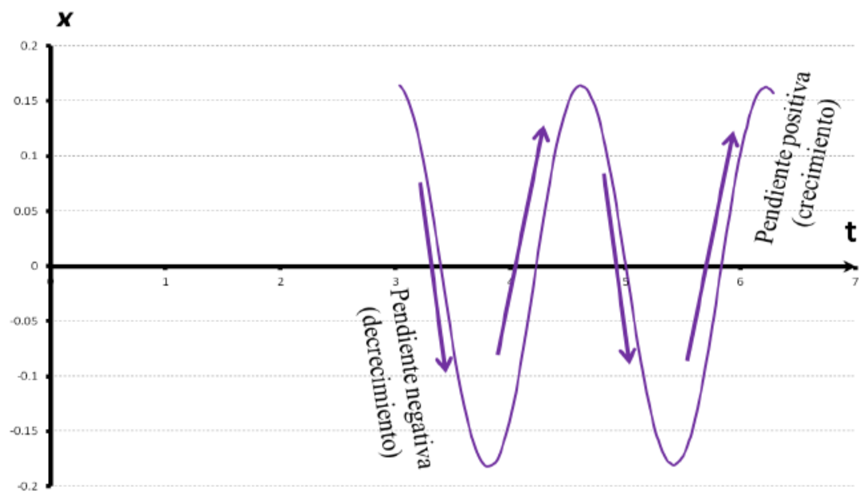


Figura 14.
Representación gráfica de los cambios instantáneos, en donde se manifiesta la relación de la variable dependiente con la razón de cambio instantánea.

Actividad 4

El papel y las funciones de las tecnologías digitales matemáticas como mediadoras en el estudio de las magnitudes variables.

Con la aparición de las tecnologías computacionales, como calculadoras graficadoras, sistemas de algebra computacional (CAS), geometría dinámica, programación, etc. se ampliaron las posibilidades de representación de los fenómenos de variación y de poder pasar de manera versátil de un sistema de representación a otro.

En la actualidad, los instrumentos computacionales (calculadoras algebraicas como la TI-92, las computadoras) encarnan sistemas de representación que presentan características novedosas: son sistemas ejecutables de representación, que virtualmente ejecutan funciones cognitivas que anteriormente eran privativas de los seres humanos. Por ejemplo, graficar una función. Es un proceso que el estudiante ve desplegándose en la pantalla de su calculadora, sin su intervención directa.

Los nuevos sistemas de representación hacen posible también un campo de experiencia que no estaba antes a disposición del estudiante, como por ejemplo el acceso a los sensores (CBL, CBR) que pueden articularse a las calculadoras. El estudiante puede representar gráficamente fenómenos naturales como las variaciones de temperatura, de intensidad sonora, intensidad luminosa, Ph, etc. Es decir, todo un mundo de variación y cambio queda a su disposición como parte de su campo de experiencias. Estas nociones de variación y cambio no tienen que ser estudiadas de modo abstracto (en el sentido en que son extrañas a las experiencias del estudiante) sino que puede tejerse alrededor de ellas y con ellas, una red entre ideas y conceptos que dé como resultado una mayor familiaridad con este complejo conceptual. (MEN Colombia)

Tarea 4.

Retome una vez más las experiencias vividas durante la resolución de las distintas actividades que, conjuntamente con su equipo, abordó usted durante la Secuencia 2 del curso *Actividades Selectas de Matemáticas II*. Apoyándose en dichas vivencias, reflexione sobre el papel y las funciones de las tecnologías matemáticas como mediadoras en el estudio de las magnitudes variables.

Cierre

Actividad 5

Las actividades relacionadas con el estudio de las magnitudes variables en los libros de texto, materiales de apoyo para el profesor, planes y programas de estudio de educación secundaria.

Extracto del artículo *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de la ENSOG*.

La matemática de las variables comienza a enseñarse desde el cuarto grado de primaria, según los programas oficiales (SEP); específicamente cuando el tema es variación proporcional ya sea directa o inversa. En la escuela secundaria se continúa el estudio de este tema; en el primer grado se estudia nuevamente la variación directa e inversa pero ahora mediante tablas y gráficas; en segundo grado se estudia explícitamente el plano cartesiano, representación de intervalos de variación y gráficas de funciones elementales; en el tercer grado se hace énfasis en las razones de cambio, especialmente la variación con tasa constante y el crecimiento geométrico o exponencial y su aplicación a los problemas de crecimiento poblacional.

Por otra parte, de acuerdo con los programas de Ciencias Naturales en la escuela primaria mexicana desde el tercer grado, se plantea el estudio del desplazamiento de objetos, en el cuarto grado, el movimiento de los cuerpos que incluye una noción de velocidad, en el quinto grado se estudia el movimiento pendular, rectilíneo y ondulatorio. El estudio del movimiento de los cuerpos continúa en el segundo grado de la escuela secundaria en la asignatura Física I, en particular se estudia el movimiento rectilíneo, de éste se recomienda su caracterización e identificación a través de la representación gráfica del cambio de posición en el tiempo, asociando a la velocidad con la inclinación de la recta que lo representa. En el siguiente nivel, medio superior, prácticamente todos los bachilleratos mexicanos (SEP, DEGTI, SEIT) que constituyen el nivel preuniversitario y cuya orientación son las ciencias o la ingeniería, incluyen al menos un curso de Física, en el cual se estudia la Cinemática, es decir, el movimiento rectilíneo uniforme y el uniformemente variado.

Tarea 5.

Retomando sus experiencias con las tareas realizadas en esta secuencia, así como sus vivencias en la resolución de las distintas actividades que, conjuntamente con su equipo, abordó usted durante la Secuencia 2 del curso *Actividades Selectas de Matemáticas II*, exprese su opinión sobre la manera como se abordan las actividades relacionadas con el estudio de las magnitudes variables en los libros de texto, en los materiales de apoyo para el profesor, así como en los planes y programas de estudio de educación secundaria.

Referencias bibliográficas.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 5, 352-378. Traducción al español bajo el título *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Publicada en REVISTA EMA 2003, VOL. 8, Nº 2, 121-156.

Gil Balderrama, S. B. (2010) Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de la ENSOG.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 77–156). Hillsdale: Erlbaum.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia, ( ) Pensamiento variacional y Tecnologías computacionales.

Nemirovsky, R. (1993). *Symbolizing Motion, Flow and Contours: The Experience of Continuous Change*. Doctorate: Harvard Graduate School of Education.

Stroup, W. (1996). *Embodying a Nominalist Constructivism: Making Graphical Sense of Learning the Calculus of How Much and How Fast*. Dissertation, Harvard Graduate School of Education.

Stroup, W. M. (2002). Understanding qualitative calculus: A structural synthesis of learning research. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 167-215.

Vasco, C. ( ) El pensamiento variacional y la modelación matemática.

Tabla de contenidos Secuencia 3 Pensamiento Estadístico

Razonamiento Probabilístico

Secuencia 3

Pensamiento Estadístico

Razonamiento Probabilístico

Presentación

En esta secuencia se promueve una revisión acerca de los aspectos que caracterizan el razonamiento probabilístico y que se destacan como aspectos fundamentales en el desarrollo de la competencia estadística en los alumnos.

Reflexiones didácticas sobre actividades selectas previamente abordadas en relación con los contenidos del área denominada Pensamiento Estadístico.

El propósito de la secuencia es que su desarrollo permita a los estudiantes reflexionar sobre aspectos didácticos que se ponen en juego al realizar actividades didácticas en las que están involucrados contenidos del área denominada Pensamiento Estadístico, particularmente algunas ideas relacionadas con la probabilidad.

Por otra parte, se pretende promover la reflexión sobre el papel que juega una parte de la estadística como recurso para recolectar y organizar la información que se obtiene de la realización de experimentos aleatorios, reales o simulados.

Se espera que con esta secuencia se complemente el trabajo previo realizado en la dirección del trabajo iniciado con miras a la determinación del proyecto de intervención a realizar como trabajo terminal del programa de Especialidad.

‣ Inicio

Actividad 1

Reflexiones iniciales.

Tarea 1. Un acercamiento personal

1. Responda a cada una de las siguientes preguntas:
    a. ¿En qué consiste el razonamiento probabilístico?

    b. ¿Por qué es necesario la formación del razonamiento probabilístico en los estudiantes?

    c. ¿Cómo podemos contribuir al desarrollo del razonamiento probabilístico en nuestros estudiantes?

    d. ¿Qué relación guarda el pensamiento estadístico y el razonamiento probabilístico?

    e. ¿De qué manera se pueden incorporar la tecnología digital para el desarrollo del pensamiento probabilístico en nuestros alumnos?

Desarrollo

Actividad 2

Razonamiento Probabilístico

Tarea 2. Una revisión de literatura en didáctica de la probabilidad

1. Plantee cinco ejemplos de situaciones o experimentos que den lugar a la distinción entre experimentos aleatorios y experimentos deterministas.

2. Enseguida se proporcionan algunos fragmentos de artículos y otros documentos que reportan avances en el campo de la investigación en didáctica de la probabilidad. Para cada caso, responda con referencia a la cita que se presenta enseguida.
   a. De ejemplos de fenómenos aleatorios que resulten familiares al entorno social en el que se desenvuelven sus estudiantes.

> Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos no universitarios en los últimos 20 años, encontramos una tendencia reciente a renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, en forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (e.g., M.E.C., 1992; N.C.T.M. 2000, SEP; 2006). Estos cambios nos llevan a reflexionar sobre la naturaleza de la probabilidad, y los fines de su enseñanza en la educación obligatoria, que son dos principalmente:
>
> - La probabilidad es parte de la matemática y base de otras disciplinas.
> - La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998).

3. ¿Qué aspectos de los señalados enseguida se promueven en las actividades correspondientes de la asignatura Actividades Selectas II? Argumente su respuesta.

Otra perspectiva diferente (Nisbett y Ross, 1980) es considerar que podemos adquirir un razonamiento estadístico intuitivo correcto sobre conceptos abstractos, por ejemplo, comprender la Ley de los Grandes Números y aplicarlo para resolver los problemas cotidianos, siempre que reconozcamos la situación como aleatoria La enseñanza podría mejorar nuestro razonamiento estadístico natural, que se adquiere por la experiencia repetida en resolución de problemas. (Sedlemeier, 1999).

Más recientemente, Gigerenzer (1994) sugiere que nuestra mente está mejor equipada para resolver problemas de probabilidad cuando la información y las preguntas se dan en términos de frecuencias absolutas, en lugar de usar porcentajes o proporciones, porque se asemeja más a la forma en que recogemos información de las frecuencias de sucesos aleatorios en una situación de *muestreo natural* a lo largo de nuestra experiencia (por ejemplo un médico en su consulta). Una representación adecuada de los problemas probabilísticos facilita el cálculo de probabilidades y produce soluciones acertadas a los problemas tratados, produciendo buenos resultados incluso en problemas que involucran el teorema de Bayes.

4. Un aspecto que engloba tanto la cultura estadística como el razonamiento estadístico es el sentido estadístico, que de acuerdo a Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) se entiende como:

> *… unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico. Asimismo, también consideramos que la cultura estadística implica la comprensión adecuada de las ideas estadísticas fundamentales (Burrill y Biehler, 2011), pues estas ideas aparecen en la mayoría de las situaciones en que hay que aplicar la estadística; por tanto son necesarias para enfrentarse con éxito a dichas situaciones. Además, pueden ser enseñadas con diversos niveles de formalización y, por tanto, son asequibles en cualquier nivel educativo, siendo potentes como herramientas de modelización estadística. En segundo lugar, se requiere un razonamiento específico, el razonamiento estadístico que permite tomar decisiones adecuadas o efectuar predicciones a partir de datos y en presencia de incertidumbre.*

De acuerdo a lo que se plantea en la cita de Batanero (2013), ¿qué papel juega el pensamiento aleatorio en el desarrollo del pensamiento estadístico?

5. De acuerdo a Burrill y Biehler (2011), las ideas estadísticas fundamentales son las siguientes: Datos, gráficas, variación, distribución, asociación y correlación, probabilidad, muestreo e inferencia. ¿Qué aspectos de la probabilidad, planteada en términos de lo que aquí se expresa, se promueve en las actividades de la asignatura Actividades Selectas II, en la Secuencia Pensamiento Estadístico?

6. Tomando el planteamiento de Wild y Pfannkuch (1999) para el desarrollo del razonamiento estadístico, revisado en la asignatura Fundamentos del Análisis Didáctico I:
    a. Reconocimiento de la necesidad de los datos: El reconocimiento de las carencias de las experiencias personales y la evidencia anecdótica lleva al deseo de basar las decisiones sobre la recogida deliberada de datos.
    b. Trasnumeración: La idea más importante en el aprendizaje de la estadística es la de formar y cambiar las representaciones de los datos relativos a un sistema para llegar a una mejor comprensión de ese sistema, esto es, el proceso dinámico de cambiar las representaciones de los datos numéricos para facilitar su comprensión.
    c. Variación (percepción de la variación): El pensamiento estadístico moderno se refiere al aprendizaje y la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual surge de la omonipresente variación.
    d. Uso de un conjunto de modelos (Razonamiento con modelos estadísticos): La principal contribución de la estadística al pensamiento ha sido su propio conjunto de modelos específicos, esto es, marcos para pensar sobre determinados fenómenos que incluyen componentes aleatorios.
    e. Conocimiento estadístico relacionado con el contexto (integración con el contexto): El material de base del pensamiento estadístico son el conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información contenida en los datos. El pensamiento en sí mismo es la síntesis de estos elementos para producir implicaciones, compresiones y conjeturas.

Comente de qué manera se relaciona el razonamiento probabilístico con cada una de las componentes descritas.

7. Lea la cita siguiente y responda a los cuestionamientos que se hacen enseguida.

Importancia de la simulación en la enseñanza de la probabilidad

Dado que en ocasiones el tiempo del que disponen los profesores para enseñar probabilidad es escaso, lo mejor que podemos hacer es usar el tiempo de enseñanza para hacer a los alumnos conscientes de sus concepciones probabilísticas, ayudarles a superar algunas de ellas e incrementar su interés hacia la probabilidad y su enseñanza. Afortunadamente, contamos con la simulación, donde nosotros podemos operar y observar los resultados en un experimento simulado para obtener información sobre la situación real. Por ejemplo, podemos encontrar una estimación de la probabilidad de que haya más del 60% de mujeres entre los 100 bebés recién nacidos por repetición de un gran número de veces del experimento de lanzar 100 monedas al mismo tiempo. Incluso en este simple ejemplo, la simulación condensa tiempo y espacio en el experimento. Esto es también un modelo concreto y algorítmico de la realidad, además permite un trabajo intuitivo en el modelo sin recurrir a la formalización matemática. Batanero, Henry y Parzysz (2005) indican que, aunque un verdadero conocimiento de la probabilidad solo puede ser conseguido a través del estudio de alguna teoría formal, la adquisición por los estudiantes de dicha teoría debería ser gradual y apoyada por su experiencia práctica. Dantal (1997) sugiere las siguientes etapas en la enseñanza de la probabilidad mediante la simulación: 1) observación de la realidad, 2) descripción simplificada de la realidad, 3) construcción de un modelo, 4) trabajo matemático con el modelo, y 5) interpretación de los resultados en la realidad. También sugiere que los profesores están demasiado interesados en las etapas 3 y 4, las "matemáticas reales", porque son más fáciles de enseñar, aunque las diferentes etapas son igual de relevantes en el aprendizaje de los estudiantes. Entre el dominio de la realidad, donde las situaciones aleatorias están localizadas, y el dominio teórico donde construimos un modelo probabilístico Coutinho (2001) localiza el dominio pseudo-concreto donde nosotros trabajamos con la simulación. En el mundo real llevamos a cabo acciones y experiencias concretas, en el dominio teórico usamos representaciones simbólicas y en el dominio pseudo-concreto llevamos a cabo operaciones mentales y físicas. Ahí, el estudiante está fuera de la realidad y trabaja con una situación ideal. El rol didáctico del modelo pseudo-concreto es inducir de forma implícita el modelo teórico al estudiante, cuando la formalización matemática no es posible (Henry, 1997).

a. ¿Qué analogías, semejanzas o diferencias pudiéramos establecer entre la simulación y lo que ocurre en situaciones reales de incertidumbre?

b. ¿Qué opinión tiene de la importancia que se le debiera brindar a este tópico en la escuela secundaria?

c. Revise las actividades, tareas y ejercicios propuestas en la Secuencia Pensamiento Estadístico de la Asignatura Actividades Selectas II y mencione qué aspectos y de qué manera se han incorporado o no algunas de las ideas expuestas en la lectura.

d. Comente sus experiencias con este tipo de actividades en sus clases.

e. Exponga brevemente ideas para realizar adecuaciones a la Actividad 3 (Tarea de Simulación) de manera tal que pudiera realizar la actividad con sus estudiantes.

Cierre

Actividad 3

Síntesis e Implicaciones.

Tarea 3. Razonamiento probabilístico y Pensamiento Estadístico

Elabore un resumen en el que mencione implicaciones que Usted considera tienen los planteamientos aquí revisados para la enseñanza del Pensamiento Estadístico en Secundaria. Comente que papel corresponde al profesor realizar para promover el desarrollo del razonamiento probabilístico y el papel de la tecnología digital para promover el razonamiento probabilístico.

Trabajo independiente. Aportaciones al proyecto

Con base en lo revisado en esta secuencia, diseñe una actividad en la línea de pensamiento aquí estudiada y que esté relacionado o sirva para apoyar algún aspecto del proyecto formulado en la asignatura de Actividades Selectas I en la línea de Pensamiento Estadístico, y que posteriormente fue retomado en las siguientes asignaturas del Primer Cuatrimestre. Considere en su proyecto lo revisado ahora y haga explícitos los aspectos del razonamiento probabilístico que se desea promover.

Referencias bibliográficas.

BAEM (2016). *Materiales de apoyo para la asignatura Actividades Selectas II*, del Programa de Especialidad en Uso Didáctico de Tecnología Digital para la Enseñanza de las Matemáticas. Universidad de Sonora.

Batanero, C. (2016). Razonamiento Probabilístico en la vida cotidiana: un desafío Educativo. Recuperado en junio de 2016 de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/ConferenciaThales2006.pdf.

Batanero, C., Ortiz, J.J., Serrano, L., Investigación en Didáctica de la Probabilidad; recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/uNOiNVESTIGACION.pdf, el 26 de junio de 2016.

Batanero, C., Díaz C., Contreras J. y Roa R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números, Volumen (38), 7-18. Recuperado en junio de 2016 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/83/Monografico_01.pdf.

Chance, Beth L. (2002). Components of Statistical Thinking and Implications for Instruction and Assessment. Journal of Statistics Education, Volume 10, Number 3. Recuperado en junio de 2016 de www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html.

Leiria, A. C., González, M. T. y Pinto, J. E. (2015). Conocimiento del profesor sobre pensamiento estadístico. PNA, 10(1), 25-52.

Ortiz, J.J., Serrano, L. La simulación de la Estadística y la Probabilidad en los libros de texto de Sducación Secundaria. Universidad de Granada. Recuperado en junio de 2016 de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/24689/1/478.%20n.%2038.pdf.