Diplomado: “Problemas, Tecnologí

**MÓDULO 1**

**Mayo-Agosto de 2015**

Material del Participante. Diplomado “Problemas, Tecnología y Enseñanza de las matemáticas”, fue elaborado en mayo de 2015 por la Universidad de Sonora, bajo convenio de colaboración con la Universidad Tecnológica de Hermosillo.

Universidad de Sonora
Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Rector
Dr. Enrique Fernando Velázquez Contreras
Secretario General Académico

Universidad Tecnológica de Hermosillo
Ing. Juan Francisco Gim Nogales
Rector
Mtra. Guadalupe Marmolejo López
Secretaria Académica

Maestro Sergio Michel Hallack Sotomayor
Responsable institucional por UTH

Autores: Personal del Bufete de Asesoría en Educación Matemática de la Universidad de Sonora:
José Luis Soto Munguía
Silvia Elena Ibarra Olmos
Jorge Ávila Soria



Primera Edición: 2015

Blvd. Rosales y Luis Encinas s/n. Col. Centro
C.P.83000, Hermosillo, Sonora, México.
ISBN en trámite

## Presentación

En nuestro país es un hecho reconocido que las problemáticas asociadas al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas no se han podido resolver. Esta situación obliga a poner especial atención al estudio de las causas de dichas problemáticas, con el propósito de impulsar acciones que contribuyan a superarlas.

El incremento de investigaciones científicas sobre estos tópicos ha tenido como consecuencia la producción de teorías que nos ayudan a explicar y a entender los fenómenos asociados al hecho educativo.  Asimismo, se han construido propuestas metodológicas importantes que se constituyen en alternativas a las formas de trabajo que tradicionalmente se habían venido impulsando en las aulas de matemáticas. Por otro lado, los salones de clase no están exentas de la presencia, en sus diferentes manifestaciones, de las tecnologías digitales.

Los elementos anteriores constituyen retos para los profesores, nos obligan a tomar conciencia de la importancia de nuestra formación continua, de buscar alternativas de desarrollo profesional docente acorde a los tiempos.

En ese sentido, en un esfuerzo de colaboración entre la Universidad de Sonora, a través del Bufete de Asesoría en Educación Matemática y la Universidad Tecnológica de Hermosillo, se ha diseñado el Diplomado “Problemas, Tecnología y Enseñanza de las Matemáticas”, dirigido especialmente a los profesores de matemáticas de  UTH.

Tenemos plena conciencia de que tener mejores profesores es un paso trascendente en las expectativas de mejorar el desempeño de los estudiantes. En ese sentido va esta iniciativa.

# Sesión 1

## Actividad 1. Qué enseñamos cuando enseñamos

En alguna ocasión se ha usted preguntado qué significa enseñar matemáticas? ¿Qué quiere decir enseñar álgebra, aritmética, cálculo y/o geometría? Cuestionamientos como éstos son poco frecuentes entre el profesorado, debido a las prácticas docentes que por muchos años han prevalecido entre los profesores de los distintos niveles educativos.

1. Un profesor de matemáticas inicia el estudio del tema sistemas de ecuaciones lineales planteando a sus estudiantes el siguiente problema:

En una lucha entre moscas y arañas intervienen 10 cabezas y 72 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas.

a) Resuelva el problema.

***Sea***
***M = total de moscas***
***A = total de arañas***

$$\boldsymbol{M + A = 10}$$
$$\boldsymbol{6M + 8A = 72}$$

***Despejando M de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda tenemos que:***

***6(10 – A) + 8A= 72***
***60 + 2 A = 72……A = 6 y M = 4***
***Con Excel….***

M = moscas
A = Arañas

| Opción 1 | Animales | Patas |
|---|---|---|
| M | 2 | 12 |
| A | 8 | 64 |
| Total | 10 | 76 |

| Opción 2 | Animales | Patas |
|---|---|---|
| M | 5 | 30 |
| A | 5 | 40 |
| Total | 10 | 70 |

| **Opción 3** | **Animales** | **Patas** |
|---|---|---|
| **M** | **4** | **24** |
| **A** | **6** | **48** |
| **Total** | **10** | **72** |

b) Si Usted planteara este problema a sus estudiantes, ¿Qué esperaría qué le respondieran? ¿Cómo cree Usted que lo resolverían?

***Pienso que encontraría la respuesta sin problemas, lo harían al tanteo hasta obtener la respuesta deseada.***

c) ¿Le parece apropiada la selección del problema que hizo el profesor? ¿Por qué?

***Para motivar al uso de un sistema de ecuaciones no creo que sea la selección adecuada del problema, la respuesta se obtiene de manera directa.***

***Si lo utiliza como un ejercicio para sumas y multiplicaciones a lo mejor si es adecuado.***

2. Otro profesor que trabaja en la misma escuela que el maestro anterior, selecciona el problema siguiente:

En la granja "La Norteñita", propiedad de don José, éste ha envasado 61 litros de leche en veinte botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada tipo ha utilizado don José?

a) Resuelva el problema.
**Sea:**
**x = no. De botellas de 5 litros**
**y = no. De botellas de dos litros**

$$\boldsymbol{x + y = 20}$$
$$\boldsymbol{5x + 2y = 61}$$

**Resolviendo el sistema obtenemos que el número de botellas de 5 litros es igual a 7 y el número de botellas de 2 litros es 13.**
b) Si Usted planteara este problema a sus estudiantes, ¿Qué esperaría qué le respondieran? ¿Cómo cree Usted que lo resolverían?

***Pienso que la respuesta y la forma en que el estudiante resolvería el problema no se darían como lo mostrado. Es un problema que se puede resolver en base al ensayo y error, método muy utilizado por los jóvenes.***

c) ¿Le parece apropiada la selección del problema que hizo el profesor?

***Al igual que en la respuesta 1.d, depende del escenario en que lo presente el profesor, si se quiere resolver un sistema de ecuaciones lineales apoyado con álgebra, considero que es poco adecuado.***

d) ¿Cuál de las dos situaciones planteadas le parece más apropiada y por qué?

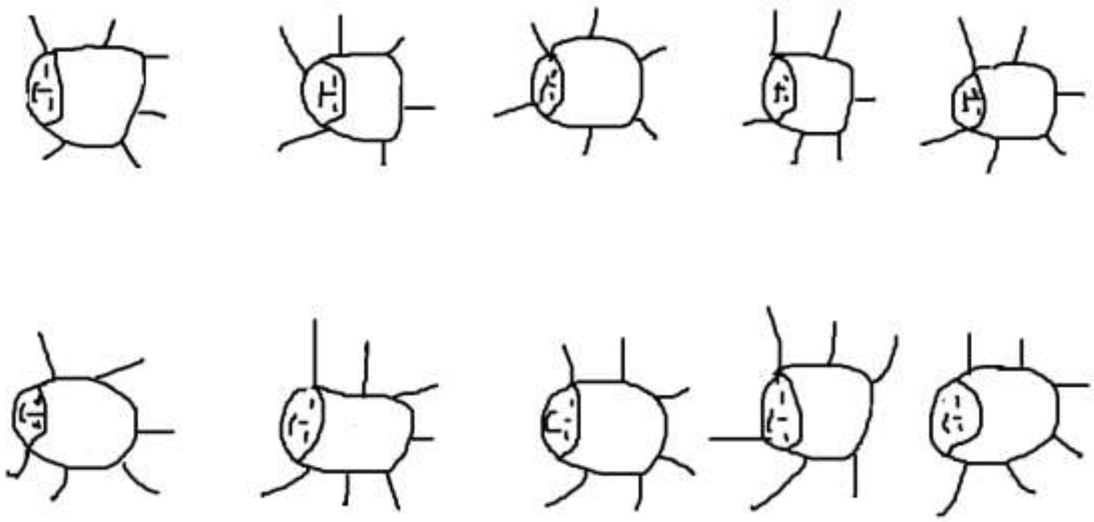
***No veo mucha diferencia en las dos situaciones.***

**Insisto que depende mucho del contexto en el que se quiera utilizar el problema**

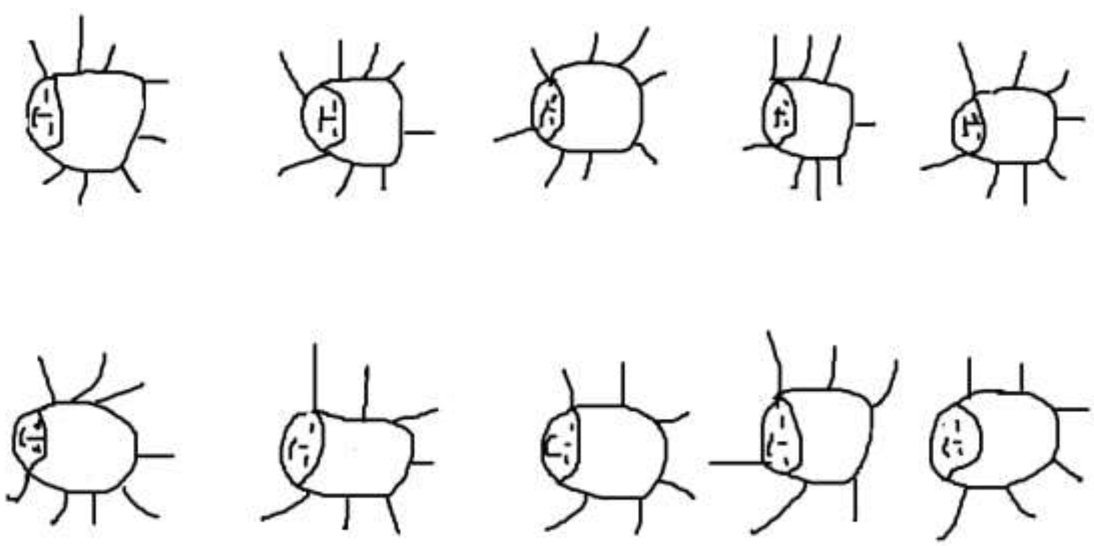
## Las respuestas de Agustín

El problema de la guerra entre moscas y arañas fue planteado a Agustín, un inquieto estudiante de sexto año de primaria. Se reproduce a continuación la explicación que dio a su maestro.

-“Mire, profe. Está fácil.”, dice, mientras toma el gis y empieza a dibujar en el pizarrón:



-Haga de cuenta que estos son los diez animales que tenemos en la lucha. Si a cada uno le acomodo seis patas, ya tengo 60. Me faltan 12 por acomodar. Entonces voy poniendo otras dos patitas más a cada animal hasta que me acabo las patas.-



- Eso quiere decir que son seis arañas y cuatro moscas. Mejor hubiera puesto que son seres extraterrestres. Hubiera estado más emocionante su problema.

a) ¿Qué opina de la respuesta que dio Agustín?

**Me gusta le forma de responder, Agustín utilizó los recursos que tenía cercanos y que conocía.**

**Una situación similar es la utilizada por un niño al resolver el problema: Se tienen 67 naranjas repartidas en dos sacos, ¿cuántas naranjas hay en cada saco si en el primero se tienen 9 naranjas más que en el segundo?**

**El niño procedió de la siguiente manera:**

> **Si en el primer saco hay 9 naranjas más que en el segundo, entonces les quito las 9 naranjas para que cada saco tenga el mismo número de naranjas. Como quité 9 naranjas de un saco, tengo que quitar 9 del total y me quedarías 67-9=58 naranjas en total. Como los sacos tienen el mismo número de naranjas, entonces en cada saco hay 58/2 = 29 naranjas, luego le agrego las 9 naranjas al primer saco y me quedan 29+9=38 naranjas. Entonces en el primer saco hay 38 naranjas y en el segundo 29 naranjas…¿cómo la ven?.....así respondió el niño.**

b) ¿Podría utilizar la estrategia de Agustín para resolver el problema de la granja "La Norteñita"? Escriba su procedimiento a continuación.

| **Tabla 1** | Botellas | Litros |
|---|---|---|
| Botellas de 5 litros | 5 | 25 |
| Botellas de 2 litros | 15 | 30 |
| Total | 20 | 55 |

Observando la Tabla 1, deben de ser más de 5 botellas de 5 litros y menos de 15 de 2 litros

| **Tabla 2** | Botellas | Litros |
|---|---|---|
| Botellas de 5 litros | 8 | 40 |
| Botellas de 2 litros | 12 | 24 |
| Total de litros | 20 | 64 |

Observando la Tabla 2, deben de ser menos de 8 botellas de 5 litros y mas de 12 botellas de 2 litros

| **Tabla 3** | Botellas | Litros |
|---|---|---|
| Botellas de 5 litros | 7 | 35 |
| Botellas de 2 litros | 13 | 26 |
| Total de litros | 20 | 61 |

Observando la Tabla 3, deben de ser 7 botellas de 5 litros y 13 botellas 2 litros

c) ¿Qué reflexiones le dejan los planteamientos que hasta este momento se han hecho?

## Actividad 2. Los mapas de Google (Equipo)

En el sitio https://maps.google.com, pueden encontrarse mapas interactivos casi sobre cualquier lugar del mundo. Las distancias entre dos lugares y las áreas de muchas regiones del mapa, son públicas; pero otras menos conocidas o inexistentes podrían estimarse a partir de los mapas. A este fin dedicaremos las próximas actividades.

1. El mapa del Estado de Sonora, tomado de https://maps.google.com, se muestra en la Figura 1. En la esquina inferior derecha puede verse un segmento con la etiqueta “100 km”. Use este segmento para estimar lo que mide la línea fronteriza entre Sonora y Estados Unidos de América y explique cómo lo hizo.

***Con una regla medimos la línea fronteriza, después hacemos lo mismo con el segmento que tiene la etiqueta 100 km. Multiplicamos la longitud obtenida en la frontera por 100 y lo dividimos entre lo medido en el segemento pequeño.***

***En mi caso pegué la figura en Paint, medí la frontera (10.5 cm aprox) y el segmento (1.5 cm aprox), por lo que la frontera mide 700 km aprox.***

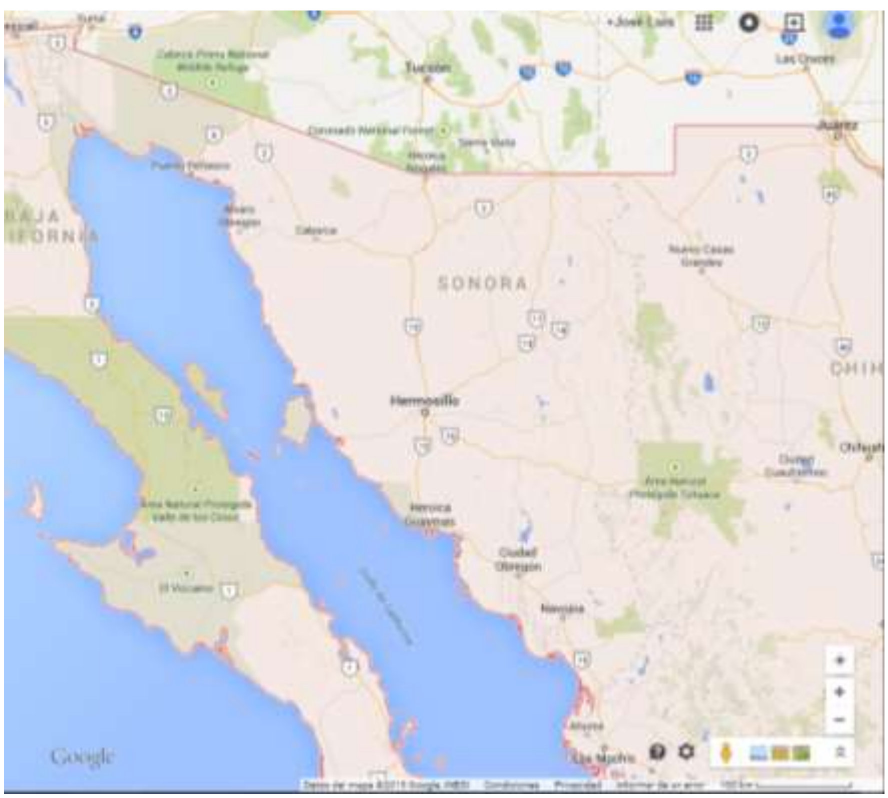



Figura 1

2. Use ahora el plano de Sonora impreso en una mica y el cordel que se le proporcionará, para estimar cuánto mide el perímetro del estado de Sonora. Explique el procedimiento que usó.

1159 km

3. Estimemos ahora el área de la Isla del Tiburón. Use el mapa impreso (ver Figura 2) y la cuadrícula impresa, para hacer una estimación de esta área. Explique el método que usó.

Figura 2

4. Busque en Internet el área de la Isla del Tiburón y compárela con su estimación. Compare sus resultados con los de sus compañeros, para verificar quién logró una mejor estimación. Explique a qué se debe que unos métodos hayan resultado mejores que otros.

## Actividad 3. (Equipo)

1. Copie ahora el mapa de la Isla del Tiburón (Figura 3) en una pantalla de GeoGebra. Este software permite trazar objetos geométricos sobre el mapa y medirlos. Si queremos aproximar con GeoGebra el área de la Isla del Tiburón, ¿qué objetos geométricos podrían servirnos? Discuta con sus compañeros de equipo sus respuestas y seleccionen en cada equipo los objetos que le parezcan más útiles.

Figura 3

Objetos geométricos seleccionados: Polígono, área, segmento, distancia o longitud

2. Trace el o los objetos seleccionados y estime el área de la isla del Tiburón. Explique el método que usó y anote su estimación.

Con el objeto polígono, se ubicaron varios puntos sobre el contorno del plano, hasta obtener un polígono irregular que “encierre” a la isla, después con el objeto área se estima una superficie de 68.44 $u^2$. Se traza un segmento sobre el segmento que tiene una etiqueta “10 km”, y se estima su longitud con el objeto “distancia o longitud”, dando como resultado 2.39 u. Para estimar la medida de la superficie, dividimos 68.44 entre el cuadrado de 2.39 y multiplicamos por 100, obteniendo una estimación de 1198.16 km2, (según wikipedia la medida real es de 1208 km2)

3. Compare los resultados de su equipo con los obtenidos por otros equipos y explique las diferencias en los resultados.

No lo hice

4. En su equipo seleccione ahora el o los objetos geométricos que pudieran ayudarle a estimar el perímetro de la Isla del Tiburón.

Objetos geométricos seleccionados: Distancia y longitud

5. Haga los trazos correspondientes sobre el mapa “pegado” en GeoGebra, estime el perímetro y compare sus resultados con los obtenidos por otros equipos.

el perímetro dado es de 37.96 u. El perímetro de la isla es aproximadamente 907.24 km

6. ¿Cuál será la mejor estimación de todas las obtenidas? Justifique su respuesta.

Supongo que debería de ser aquella en donde la ubicación de los vértices del polígono es lo más apegado al contorno de la figura

## Actividad 4. (Equipo)

En el mapa de la Isla Turón (Figura 4), hemos supuesto que el segmento de referencia representa b km.


Figura 4

1. Sean P y Q dos puntos señalados sobre el mapa de la Isla de Turón (Figura 4). Si el segmento que representa b km., mide 3 cm. y la distancia entre los dos puntos P y Q del mapa es de 15 cm. ¿Cuál será la distancia entre los puntos P y Q de la Isla?

5b km

2. Si el segmento que representa *b* km., mide *a* cm. y la distancia entre los dos puntos P y Q del mapa es de *c* cm. (Figura 5) Encuentre una expresión que represente la distancia entre los puntos P y Q de la Isla

$$\frac{c}{a} b \ km$$


Figura 5

3. Use la respuesta dada a la pregunta anterior para describir un procedimiento general para obtener la distancia real entre dos puntos P y Q de un mapa.

$$\frac{c}{a}b\ km$$

___

___

___

4. Si al estimar el área de una región del mapa, el resultado fuera $c$ cm$^2$, use los datos de la Figura 6 para expresar el área de esta región en la isla. Aproveche el resultado obtenido para describir un procedimiento general que le permita obtener el área de una región delimitada sobre un mapa.


Figura 6

$$\frac{c}{a^2}b^2$$

---

## Actividad 5. Análisis didáctico

1. Haga una lista de los conceptos y los métodos matemáticos que ha puesto en juego durante el desarrollo de esta secuencia.

***Razones y Proporciones, concepto de escala***
***Razón entre dos segmentos, concepto de área y perímetro***
***Razón entre dos áreas, y dos perímetros***

---

2. ¿Usted considera que usar secuencias de actividades como ésta, contribuiría en algo a modificar las creencias que tienen los estudiantes sobre la Matemática? Argumente su respuesta.

***Considero que si. Es muy complicado para un estudiante comparar dos áreas a partir de la comparación de dos longitudes. La ventaje de este tipo de actividades nos permiten llevar al estudiante a la busqueda de la generalización. En internet se puede encontrar las medidas reales de los objetos mostrados (al menos de las islas) En la carrera de mecánica los estudiantes trabajan con objetos a escala utilizando un software para su diseño. Las actividades aquí planteadas pueden ser utilizadas para llevar al alumno a la razón entre dos volumenes.***

---

3. Al inicio de la secuencia se usan materiales manipulables para resolver algunos problemas. ¿Qué ventajas y qué desventajas tendrá para los estudiantes usar estos materiales?

Dentro de las ventajas es que se generan ambientes de aprendizaje a partir de objetos manipulables por ellos.
Desventajas: Si no se buscan las secuencias didácticas adecuadas se corre el riesgo de que el estudiante quiera resolver todos los problemas de la misma manera evitando la generalización

---

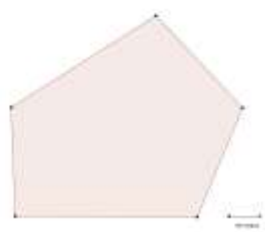
4. Si Usted propone a sus alumnos, una secuencia integrada por actividades como las propuestas aquí, ¿qué actitud considera usted que asumirán sus estudiantes? Explique.

En un principio lo tomarían a juego, después se van integrando y se desarrollaría un trabajo de equipo en el salón de clases, buscando como lo hicieron otros compañeros y haciendo comparaciones.

---

5. Proponga junto con su equipo una situación problema, lo más apegada posible a la vida real, en la que se ponga en juego el concepto de proporcionalidad.

***En el parque indistrial de Hermosillo, una persona tiene un terreno con forma de pentágono irregular cuyo plano se muestra en la figura.***
***Necesita cercar y obtener su área ya que quién elaboró el plano omitió dicho datos, sin embargo indica que el segmento que se encuentra en la parte inferior derecha de la figura representa a 150 m***
***A partir del analisis de la figura, hacer una estimación del área y el perímetro del terreno***



## Actividad 6. (Equipo). Las pirámides financieras


Los fraudes financieros piramidales, conocidos también como Esquemas Ponzi, deben su nombre a un estafador de ascendencia italiana, radicado en Boston, quien se enriqueció en 1920, con una compañía de inversiones a costa de la ruina de sus inversionistas. Los Esquemas de Ponzi tienen un mecanismo de funcionamiento muy sencillo:

Los primeros inversionistas obtienen atractivas ganancias, gracias a los recursos aportados por nuevos clientes, casi siempre convencidos por estos primeros. Para que el sistema funcione se requiere entonces que exista siempre gente dispuesta a invertir, pero llega un momento en el que ya no hay manera de conseguir quien invierta, entonces la empresa se colapsa.

Aunque el truco parece bastante burdo, año con año surgen en todo el mundo nuevas variantes de los esquemas de Ponzi, estafando a grandes cantidades de ciudadanos incautos. Uno de los casos más impresionantes se presentó en Albania[1] en 1997, donde los colapsos de las empresas financieras fraudulentas perjudicaron a las dos terceras de la población, provocaron la insurrección de la población y la caída del gobierno en turno.

Si Usted está de acuerdo en que una financiera piramidal colapsará tarde o temprano, explique cuál será la causa principal del colapso:

---

[1] Una descripción más detallada del caso puede verse en: Christopher Jarvis, C. The Rise and Fall ofAlbania's Pyramid Schemes.Finance & Development [en línea]. Marzo de 2000, Vol. 37, No. 1. [Fecha de consulta: 4 de abril de 2015]. Disponible en: http://www.imf.org/external/pubs/ft/fandd/2000/03/pdf/jarvis.pdf.

Considero que la financiera colapsará en virtud de que llegará un momento en que el número de personas que inviertan se van a terminar por lo que ya no se les podrá pagar la inversión orecida.

## Actividad 7. (Equipo)

Veremos aquí cómo funcionan las cadenas de inversión financiera y por qué invariablemente resultan fraudulentas.

Para explicar el funcionamiento de estas pirámides, usaremos el ejemplo hipotético de una empresa que se funda en la Ciudad de Hermosillo para dedicarse a este negocio.

Una persona, de nombre Timoteo Vil, conocido en el bajo mundo como Timo Vil, crea una “empresa de inversión” y la titula Dinero Gratis. La empresa vende bonos de inversión de $5000.00 con la promesa de regresar al mes la inversión con un 100% de ganancia, es decir $10000 en total; la única condición para pagar los $10 000 al inversionista, es que éste lleve a la empresa otros cuatro inversionistas, que compren también un bono de $5000.00 cada uno, sujetos a las mismas reglas de inversión.

Supongamos que en la Cd. de Hermosillo existen aproximadamente 100 000 personas con la disposición y los fondos para invertir en la empresa Dinero Gratis. Como puede verse en la Tabla 3.8, la empresa inicia con Don Timo y cuatro inversionistas que aportan 5 mil pesos cada uno. El mes siguiente estos cuatro inversionistas consiguen otros cuatro cada uno, es decir hay $4^2$ nuevos inversionistas. Al final del primer mes, los cuatro primeros han cumplido su trato, por lo cual reciben 10 mil pesos cada uno, es decir $4^1 \times 10$ miles de pesos entre todos, Don Timo en cambio recibe $4^2 \times 5$ miles de pesos de los 16 nuevos inversionistas.

En la Tabla 1 se muestra cómo evoluciona, durante los primeros cuatro meses, la situación financiera de Dinero Gratis. Analice en su equipo los cálculos indicados en cada columna y explique por qué las indicaciones son coherentes con el funcionamiento de la empresa.

Al inicio la empresa necesita de 1 + 4 = 5 personas para iniciar el negocio, se obtendrán $20000 de ingresos pero la empresa tiene que pagar a una persona $10000 al concluir el mes. Para el segundo mes cada persona que invirtió si quiere ganar lo ofrecido por la empresa deberá de traer a 4 personas a que inviertan, es decir ahora la empresa tiene a $4^2$ = 16 nuevos inversionistas que aportarán $80000 más a lo ya ganado, al cierre del mes la empresa deberá de pagar 4 x 10000 = $40000 en total a los cuatro inversionistas primeramente invitados. La empresa tendrá por ganancias $10000+$80000-

\$40000=\$50000. Sin embargo las 16 personas para obtener su ganancia por la inversión deberán de invitar a 4 c/u por lo que ingresarán a la empresa al inicio del mes \$320000 más a lo ya ganado….

| Mes | Personas involucradas | Ingresos de la empresa | Egresos de la empresa | Ganancias de la Empresa |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $1+4^1=$ | $4^1\times 5=$ | 0 | |
| 1 | $1+4^1+4^2=$ | $4^2\times 5=$ | $4^1\times 10=$ | |
| 2 | $1+4^1+4^2+4^3=$ | $4^3\times 5=$ | $4^2\times 10=$ | |
| 3 | $1+4^1+4^2+4^3+4^4=$ | $4^4\times 5=$ | $4^3\times 10=$ | |
| 4 | $1+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5=$ | $4^5\times 5=$ | $4^4\times 10=$ | |

Tabla 1. Los ingresos, egresos y ganancias son miles de pesos

En la Tabla 1 puede observarse que los cálculos de cada renglón están relacionados con los cálculos del renglón siguiente. Fijemos la atención, por ejemplo, en la segunda columna en la que los cálculos pudieran ser más laboriosos:

Si

$$S_3 = 1+4^1+4^2+4^3+4^4$$

$$\text{y } S_4 = 1+4^1+4^2+4^3+4^4+4^5,$$

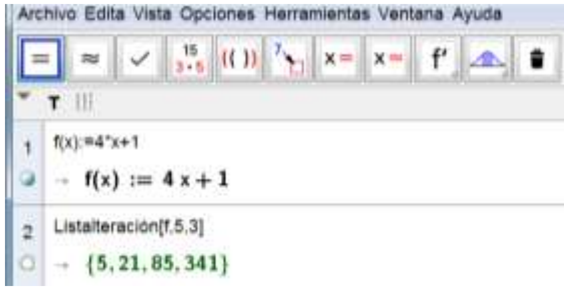
entonces la relación más simple entre $S_3$ y $S_4$, puede escribirse como:

$$S_4 = S_3 + 4^5, \qquad (1)$$

aunque también la relación podría establecerse como:

$$S_4 = 1+4(1+4^1+4^2+4^3+4^4) = 1+4S_3 \qquad (2)$$

Esta última relación parece más complicada que (1), pero tiene la ventaja de que puede ser automatizada fácilmente en un Sistema de Cálculo Simbólico (CAS por sus siglas en Inglés). En la vista “Cálculo Simbólico” de GeoGebra, por ejemplo, capturamos en dos renglones:




En el primer renglón hemos definido la función f(x):=4x+1, como lo haríamos con cualquier función (excepto porque usamos el símbolo “:=”, en lugar del signo “=”), pero en el segundo renglón le indicamos que a partir del valor inicial igual a 5, itere los cálculos 3 veces, lo cual significa que GeoGebra hará los siguientes cuatro cálculos:

$$x = 5$$

$$f(5) = 4(5) + 1 = 21$$

$$f(21) = 4(21) + 1 = 85$$

$$f(85) = 4(85) + 1 = 341$$

Use el Cálculo Simbólico de GeoGebra para llenar la Tabla 1. Luego continúe con los cálculos añadiendo renglones a la dicha tabla. Responda en su equipo la pregunta: ¿hasta qué mes habrá que extender la Tabla 1, para explicar el colapso de Dinero Gratis?

**Hasta el mes 8**

---

Responda de manera individual las preguntas siguientes:

¿Cuál es la causa principal del colapso de la empresa?

El número de inversionistas no es suficiente. El crecimiento del número de inversionistas va creciendo conforme a la expresión $1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n$
para n=8, esta suma es igual a 349525, se requieren de 249525 inversionistas más para poder seguir con el negocio.

---

¿Cuál es el total de personas que invierten en Dinero Fácil?

El número de personas que invierten es de 87381 personas

---

¿Cuántos de los inversionistas obtienen los $10000 prometidos?

Solo 21845 personas

---

¿Cuántos de los inversionistas pierden su inversión?

65536 personas

---

¿Cuál es el monto de la ganancia obtenida por Don Timo Vil, antes de darse a la fuga?

$218,460,000.00

| Mes | Personas involucradas | Ingresos de la empresa | Egresos de la empresa | Reciben el beneficio de la inversión | Han recibido el ingreso | Ganancias de la Empresa |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 5 | 20 | 0 | | | 20 |
| 1 | 21 | 80 | 40 | 4 | 4 | 60 |
| 2 | 85 | 320 | 160 | 16 | 20 | 220 |
| 3 | 341 | 1280 | 640 | 64 | 84 | 860 |
| 4 | 1365 | 5120 | 2560 | 256 | 340 | 3420 |
| 5 | 5461 | 20480 | 10240 | 1024 | 1364 | 13660 |
| 6 | 21845 | 81920 | 40960 | 4096 | 5460 | 54620 |
| 7 | 87381 | 327680 | 163840 | 16384 | 21844 | 218460 |
| 8 | **349525** | **1310720** | **655360** | **65536** | **87380** | **873820** |
| | | | | | | |
| | En la tabla se observa que en el mes 8, la cantidad de personas rebasa a la población inicial | | | | | |

---

## Actividad 8. La propagación de epidemias (Equipo)

El 9 de octubre de 2014, en la sección de Ciencia y Salud, *The Washington Post* publicó, bajo el título de "Las matemáticas ominosas de la epidemia del Ébola"[2] un interesante artículo en el que se hace un llamado a cuantificar la propagación de la epidemia, para tratar de estimar sus potencialidades. La epidemia se ha desarrollado con dos características que la volvieron particularmente peligrosa: por un lado una *tasa de contagio* cercana a 2, lo cual significa que cada persona infectada, transmite en promedio a dos personas más la enfermedad, cada tres semanas (la enfermedad dura en incubar entre 2 y 21 días) y por otro, su *tasa de letalidad* de 0.7, lo cual significa que en promedio 70 de cada cien pacientes infectados mueren de la enfermedad.

El llamado publicado por el Washington Post no es novedoso, ya en 1915 el Premio Nobel de Medicina Ronald Ross, en la introducción a uno de sus artículos[3] lamentaba "Es algo sorprendente qué tan poco trabajo matemático se ha hecho sobre el tema de las epidemias… no solamente es un tema de importancia inmediata para la humanidad, sino que está relacionado fundamentalmente con números… "

Construir un modelo matemático, que explique y prediga el comportamiento de la epidemia, es una tarea que se complica más, entre más factores asociados con la enfermedad se consideren. Algunos de estos factores son: número de individuos susceptibles, número de contagiados, número de recuperados (y fallecidos) y tiempo de incubación. Para modelar este fenómeno se requiere por lo menos un buen manejo de ecuaciones diferenciales.

Haciendo a un lado las herramientas de matemática avanzada, podríamos darnos una idea del total de la población que ha padecido la enfermedad. En el caso del ébola por ejemplo, la Tabla 2 registra la manera como crece la enfermedad con el tiempo, si su tasa de contagio se mantiene igual a 2.

| Tiempo (semanas) | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

[2] Véase http://www.washingtonpost.com/national/health-science/the-ominous-math-of-the-ebola-epidemic/2014/10/09/3cad9e76-4fb2-11e4-8c24-487e92bc997b_story.html [consultado el 30 de abril de 2015]

[3] Véase http://www.jstor.org/stable/93760?seq=1&cid=pdf-reference#references_tab_contents [consultado el 30 de abril de 2015]

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nuevos contagios | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | | |

Tabla 2

Observe los datos de la Tabla 2, para responder en equipo las preguntas siguientes:

¿Por qué los ciclos de tiempo para construir la Tabla 2 tendrán una duración de tres semanas?

Si en las primeras 6 semanas se han infectado 7 personas, ¿por qué en las siguientes tres semanas se registran 8 infectados y no 14?

## Actividad 9. (Equipo)

Independientemente del fallecimiento o recuperación de los enfermos, puede calcularse el número total de personas que han sido víctimas de la enfermedad.

En la Tabla 3, los ciclos de tiempo han sido enumerados, cada ciclo tiene una duración de tres semanas. Use la vista "Cálculo Simbólico" de GeoGebra para calcular el total de afectados por la enfermedad durante las primeras 48 semanas.

| Ciclos | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo (semanas) | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 |
| Total de infectados | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Tabla 3

Si la epidemia se extendiera sin control alguno y tomando en cuenta que Hermosillo tiene 900 000 habitantes, ¿en cuántas semanas contraerán la enfermedad todos sus habitantes?

Supongamos ahora que después de 24 semanas, la tasa de contagio baja de 2 a 1.5 y se mantiene así durante las siguientes 24 semanas. Calcule de nuevo, pero bajo este nuevo esquema, el número total de infectados durante las primeras 48 semanas. ¿Cómo impacta la disminución de la tasa de contagio, en el número total de afectados?

## Actividad 10

En los problemas planteados aquí la solución depende de que podamos sumar los términos de una progresión geométrica, usualmente a esta suma se le llama *serie geométrica*.

Mientras que una progresión geométrica, tiene la forma:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n$$

Una serie geométrica tiene la forma:

$$a + ar + ar^2 + \ ar^3 +, \dots, +ar^n$$

Puesto que esta serie puede escribirse en forma factorizada como:

$$a(1 + r + r^2 + \ r^3 +, \dots, +r^n),$$

donde $a$ es una constante, entonces para calcular esta suma es suficiente con encontrar una expresión algebraica para la suma que llamaremos $S$:

$$S = 1 + r + r^2 + \ r^3 +, \dots, +r^n$$

Pero si multiplicamos $S$ por $r$, tendremos:

$$rS = r + r^2 + \ r^3 +, \dots, +r^n + r^{n+1}$$

Y restando $S$ de $rS$, obtenemos:

$$\begin{aligned} rS &= \quad r + r^2 + r^3 +, \dots, + r^n + r^{n+1} \\ -S &= -1 - r - r^2 - r^3 -, \dots, - r^n \\ rS - S &= -1 \qquad\qquad\qquad\qquad + r^{n+1} \end{aligned}$$

Luego factorizando $S$ en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$$S(r-1) = -1 + r^{n+1}$$

O bien:

$$S = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

Y concluimos finalmente que

$$aS = a(1 + r + r^2 + r^3 +, \dots, + r^n) = a + ar + ar^2 + ar^3 +, \dots, + ar^n = a\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

1. En la actividad anterior, usted ha resuelto el problema: “Supongamos ahora que después de 24 semanas, la tasa de contagio baja de 2 a 1.5 y se mantiene así durante las siguientes 24 semanas. Calcule de nuevo, pero bajo este nuevo esquema, el número total de infectados durante las primeras 48 semanas. ¿Cómo impacta la disminución de la tasa de contagio, en el número total de afectados?”
   Resuelva ahora este problema con la herramienta algebraica discutida en la presente actividad.

## Actividad 2. Análisis didáctico

1. ¿Conoce usted otras situaciones que puedan modelarse usando series geométricas? Ejemplifique.

2. Si Usted organiza la enseñanza con base en situaciones problema, similares a las que se han planteado aquí:
   a) ¿Cuáles serían a su juicio las dificultades que enfrentaría como profesor?

1159 km

   b) ¿Qué dificultades enfrentarían sus alumnos?

3. ¿Considera que las situaciones planteadas aquí, u otras similares, podrían resultar de interés para sus estudiantes? Explique.

4. A lo largo de la secuencia, se han resuelto problemas usando el álgebra o bien el "cálculo simbólico". Desde el punto de vista didáctico, ¿cuál será la diferencia entre usar una herramienta u otra?