Diplomado: "Problemas, Tecnología y Enseñanza de las Matemáticas"

MÓDULO 2

Sesión 3

Material del Participante. Diplomado “Problemas, Tecnología y Enseñanza de las matemáticas”, fue elaborado en mayo de 2015 por la Universidad de Sonora, bajo convenio de colaboración con la Universidad Tecnológica de Hermosillo.

Universidad de Sonora
Dr. Heriberto Grijalva Monteverde
Rector
Dr. Enrique Fernando Velázquez Contreras
Secretario General Académico

Universidad Tecnológica de Hermosillo
Ing. Juan Francisco Gim Nogales
Rector
Mtra. Guadalupe Marmolejo
Directora Académica

Maestro Sergio Hallack Sotomayor
Responsable institucional por UTH

Autores: Personal del Bufete de Asesoría en Educación Matemática de la Universidad de Sonora:
José Luis Soto Munguía
Silvia Elena Ibarra Olmos
Jorge Ávila Soria

Primera Edición: 2015

Blvd. Rosales y Luis Encinas s/n. Col. Centro
C.P.83000, Hermosillo, Sonora, México.
ISBN en trámite

Actividad 10. Relacionando el álgebra con la geometría. Individual

Hasta ahora hemos venido trabajando con situaciones planteadas en contextos no matemáticos, en cuyo estudio y tratamiento aparecieron diversos contenidos matemáticos. En esta ocasión vamos a trabajar con un problema que podría ubicarse en el terreno de la geometría, pero que, como en muchos problemas matemáticos, admite el empleo de herramientas de diferente naturaleza.

Supongamos que Usted ha planteado a sus estudiantes la situación siguiente:

En el triángulo siguiente cada punto P que seleccione en el segmento cuyos extremos son los puntos de coordenadas (0.4) y (2,0), determina un rectángulo, tal y como se muestra en la Figura 1. Determine cuáles son las coordenadas de P que lo llevarán a tener el rectángulo de área máxima.

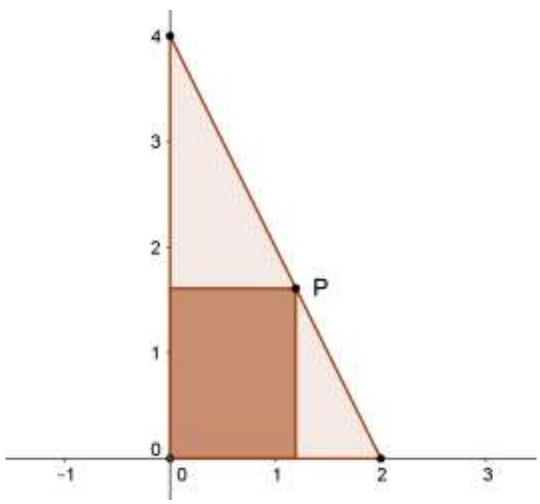

Figura 1

a) ¿Cómo procedería Usted de tal manera que pudiera conducir a sus estudiantes a elaborar alguna conjetura con respecto a lo que el problema le solicita?

b) Para auxiliarle en esta tarea, abra usted el archivo Área máxima.ggb y mueva el punto P. ¿Qué sucede? ¿Le resulta de alguna utilidad lo que observa?

c) Si este apoyo no resulta suficiente, utilice la opción Área (Figura 2), posicionándose en la figura que le interesa, en este caso el rectángulo. Mueva de nueva cuenta el punto P, ¿qué sucede con el valor del área?

d) ¿Será suficiente para que sus estudiantes puedan llegar a obtener una respuesta satisfactoria?

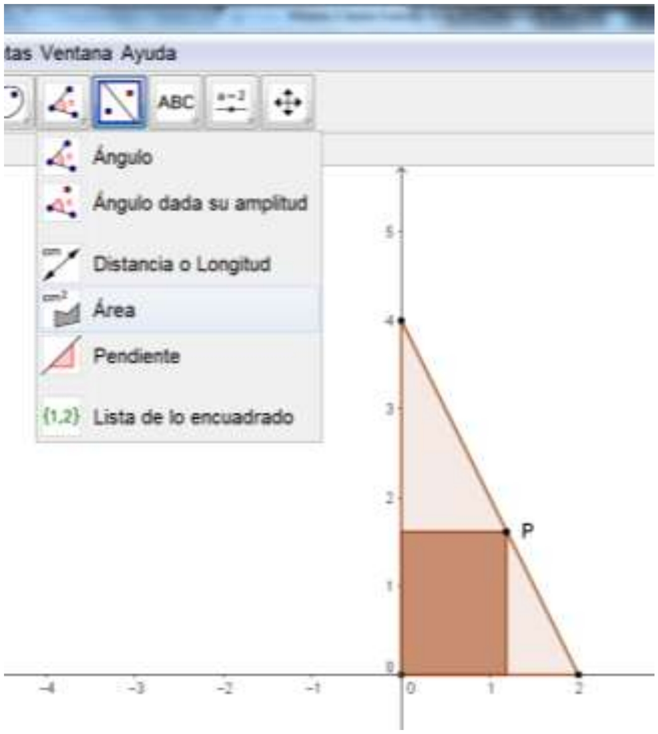

Figura 2

e) ¿Cómo podría resolverse este problema algebraicamente? Sugerencia. Utilice la semejanza de triángulos.

f) ¿Cuál es la expresión de la función Área que obtuvo? ¿Cómo puede obtenerse el valor máximo de esta función? ¿Coincide con lo que encontró mediante la inspección que se realizó con el archivo de GeoGebra?

Actividad 11. Un problema más de áreas. Equipo

Hagan un tratamiento similar al anterior, pero ahora considerando la situación que se expone a continuación.

En el triángulo siguiente cada punto P que seleccione en el segmento cuyos extremos son los puntos de coordenadas $(5,7)$ y $(0,0)$, determina un rectángulo de forma similar a la mostrada en la Figura 3. Exprese el área del rectángulo en función de x encontrando cuáles son las coordenadas de P que lo llevarán a tener el rectángulo de área máxima. ¿Cuál es esa área máxima?

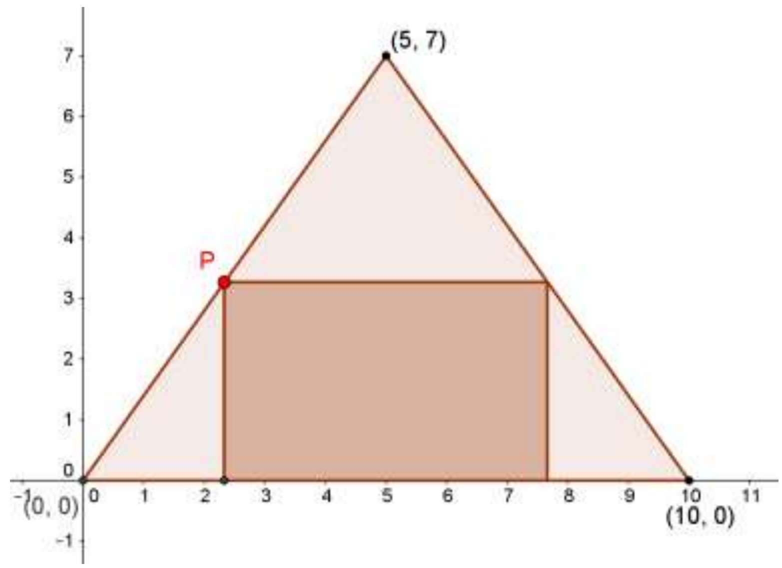

Figura 3. Triángulo de vértices (0,0), (5,7) y (10,0)

Sugerencia. Pueden auxiliarse del archivo Triángulo Área max.ggb, o construir su propio archivo con GeoGebra o con cualquier otro recurso.

Actividad 12. Construyendo Recipientes

Durante la Sesión 4 del Módulo 1 se trabajó la Actividad 22, denominada “El problema de llenado y vaciado de recipientes”. Ahí se habló de la importancia que tienen en diversos campos de la matemática los problemas de recipientes, así como del campo de situaciones didácticas que pueden ser desarrolladas a partir del tratamiento de ese tema.

En esta ocasión estamos interesados en entender algunos aspectos de la construcción de recipientes de base rectangular y los significados que aparecen cuando los trabajamos en diferentes representaciones. Para ello tomaremos como punto de partida la siguiente situación.

De una hoja de madera cuyas dimensiones se determinarán más adelante, se pueden construir 12 tipos de recipientes de base rectangular, de los cuales 4 tipos son recipientes sin tapa y los otros 8 son recipientes con tapa. Si consideramos para cada uno de los recipientes tanto su volumen interno como su volumen externo, podemos obtener un total de 24 cantidades por representar, tomando como base las dimensiones de la hoja de madera dada.

a) ¿A qué nos referimos cuando hablamos de volumen interno y a qué nos referimos cuando hablamos de volumen externo?

El entorno digital que utilizaremos para apoyar esta situación será GeoGebra, por lo que le pedimos que abra la aplicación de GeoGebra en Google Chrome y despliegue las vistas *Algebraica*, *Gráfica*, *CAS*, y *Hoja de Cálculo*, (vea la Figura 4), las cuales serán usadas para tratar de entender la construcción de este tipo de recipientes.

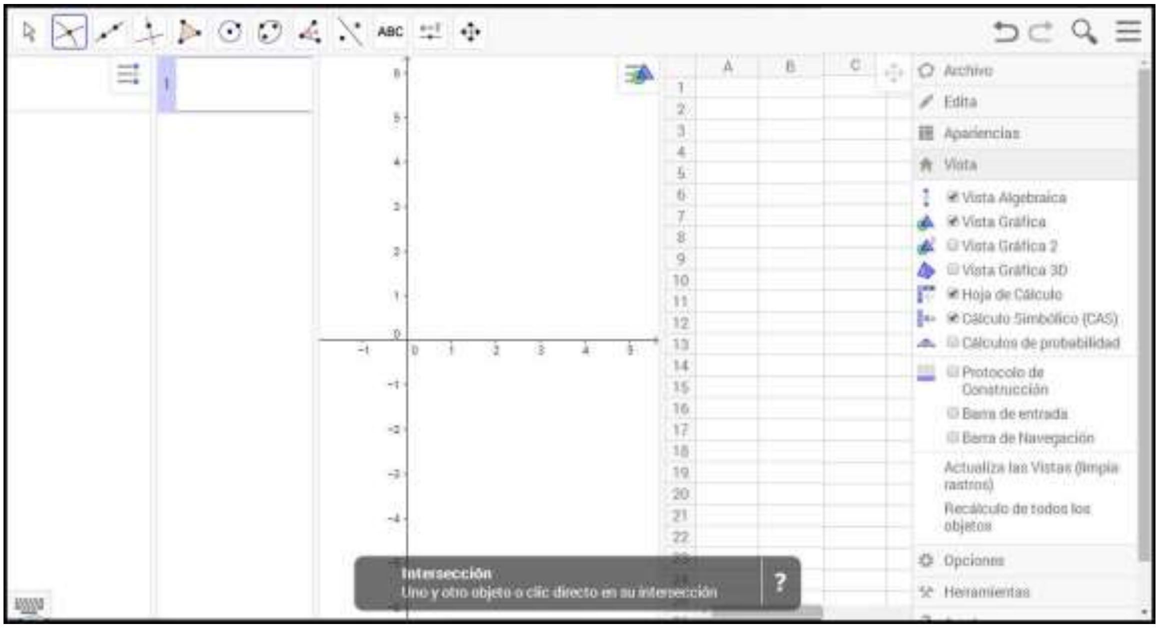

Figura 4. Las cuatro ventanas de GeoGebra

b) Si se supone que la expresión algebraica que representa de manera general el volumen de un recipiente es $V(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ¿qué forma toma esta expresión cuando se consideran los puntos $(1{,}42), (2{,}75), (3{,}60)\ y\ (4{,}21)$? Tome en cuenta que los valores de las abscisas son distintos valores de la altura del recipiente dado y los valores de las ordenadas son los correspondientes valores del volumen.

Sugerencia: Sustituya en la expresión para $V(x)$ las coordenadas de los puntos. Esto le llevará a construir un sistema de ecuaciones lineales. Una vez construido dicho sistema, utilice la Hoja de Cálculo de GeoGebra para construir la matriz de coeficientes. Posteriormente use el comando EscalonadaReducida para resolver el sistema de ecuaciones. Recuerde que en la *Hoja de Cálculo*, todo debe de referenciarse con respecto a las celdas, por lo tanto, use celdas en el comando sugerido.

c) Defina la expresión del volumen del recipiente como $v(x)$ en la *Barra de Entrada Algebraica*, usando el comando Elemento para obtener las soluciones del sistema de ecuaciones. Una vez obtenida la expresión para $v(x)$ ¿Puede usted saber las dimensiones del material con el que fueron construidos los 4 recipientes?

d) En la vista *Gráfica* apareció la gráfica del polinomio cúbico que definió usted en el inciso anterior. Posiciónela y acérquese de tal manera que pueda ver su parte más importante en el primer cuadrante. En esta misma vista, *busque el icono de intersección* (vea la Figura 4) y obtenga los puntos de intersección entre el *polinomio* y el Eje x. ¿Para qué valores de la altura del recipiente el volumen de éste vale cero?

e) Use el comando Factoriza en el CAS, para factorizar $\boldsymbol{v(x)}$, la cual es llamada simplemente $\boldsymbol{v}$. Compare los factores con los puntos de intersección del inciso anterior. ¿Qué muestra esta comparación?

f) En la Hoja de Cálculo, enliste los valores de las alturas que considere válidas para el caso de los recipientes, tomando incrementos de 0.5, de acuerdo con la gráfica del volumen. En la siguiente columna, calcule los valores de la expresión $v(x)$. De nuevo, recuerde que en la *Hoja de Cálculo*, todo debe de referenciarse con respecto a las celdas, por lo tanto, use una celda para calcular $v(x)$. ¿Cómo decidió cuáles alturas son válidas para este contexto de construcción de recipientes?

g) Ahora use el comando Función para definir el acotamiento de la función $v(x)$ que represente sólo a las alturas válidas para construir recipientes. Llame a esta función $V(x)$. Una vez definida, entre a sus propiedades (con el botón derecho del mouse) y cambie su color a rojo.

Basándose en todo lo hecho hasta este momento, ¿podría decir cuáles son las dimensiones de la madera usada para la construcción de recipientes?

Usando tecnología no digital

h) Si no está seguro de haber contestado correctamente la pregunta del inciso anterior, tome una hoja de papel de tamaño carta (*8.5x11 pulgadas*) y construya un recipiente en base al diagrama de la Figura 5 (Nota: las rayas punteadas son dobleces y las esquinas son cuadrados).

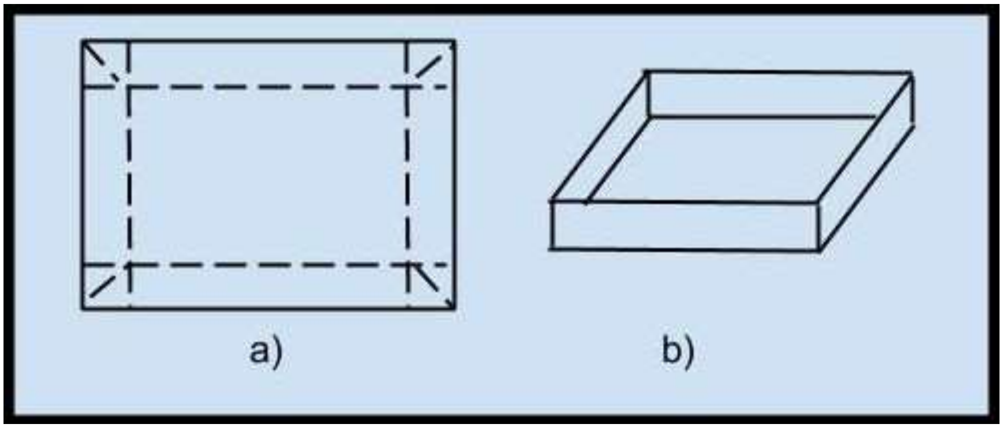

Figura 5: *a)* hoja con dobleces; *b)* recipiente hecho con la hoja

i) Ahora analice el proceso de doblado del papel y escriba una expresión algebraica para calcular el volumen del recipiente sin tapa que construyó (Nota: no debe de usar regla y el recipiente debe tener la misma altura por cada lado).

Viendo sólo la expresión para el volumen que escribió e ignorando que sabe que las dimensiones de una hoja tamaño carta, *de no haberlo construido usted ¿Podría conocer las dimensiones de la hoja de papel con las que se construyó el recipiente?*

Un recurso más

j) Ahora, tome los trozos de madera que se le proporcionarán y acomódelos por orden numérico para formar un rectángulo de madera de *9x14x0.5 pulgadas*. Enseguida, quite los trozos 1, 3, 7, y 9 y arme un recipiente sin tapa con los trozos sobrantes, de forma similar al de la Figura 5.

k) De nuevo, analice el corte del rectángulo de madera, de forma similar a lo hecho en el inciso i) y escriba una expresión algebraica para calcular el volumen que puede contener el recipiente sin tapa que armó con los trozos de madera, esto es el volumen interno del recipiente de madera. *Viendo sólo la expresión para el volumen interno* que escribió, ignorando que sabe que las dimensiones del rectángulo de madera, *¿Podría saber las dimensiones de dicha madera, de no haber armado el recipiente usted?*

¿Qué podemos concluir?

l) Use el comando Desarrolla en el CAS, para obtener el polinomio para el *volumen interno* del recipiente de madera, usando sólo la parte derecha de la expresión factorizada que escribió para el *volumen interno*. ¿Qué puede decir del polinomio obtenido? ¿Le resulta familiar?

m) Ahora ya debe estar seguro de las dimensiones del material con el que fueron construidos los 4 recipientes representados por los puntos en el inciso b. ¿Qué relaciones existen entre las raíces de la expresión del volumen y las dimensiones del material utilizado en la construcción? ¿Le dijo lo mismo la expresión obtenida con el comando Factoriza que la expresión usada en el comando Desarrolla?

n) Finalmente, transforme la expresión obtenida con el comando Factoriza en la expresión que escribió en el inciso m. ¿Qué puede decir de las diferentes representaciones usadas en este material y en el archivo de GeoGebra? Sabiendo lo que ahora sabe, ¿Con qué representaciones puede usted saber las dimensiones del material usado en construcción y en qué incisos se obtiene dicha información?

o) ¿Qué puede decir de lo que intenta mostrarse con la construcción de recipientes? Intente escribir todas las expresiones algebraicas para los volúmenes de otros tipos de recipientes sin tapa hechos con la misma forma y con el mismo material que en el ejemplo. Nota: hay 2 representaciones de *volúmenes internos* y 2 representaciones de *volúmenes externos*.