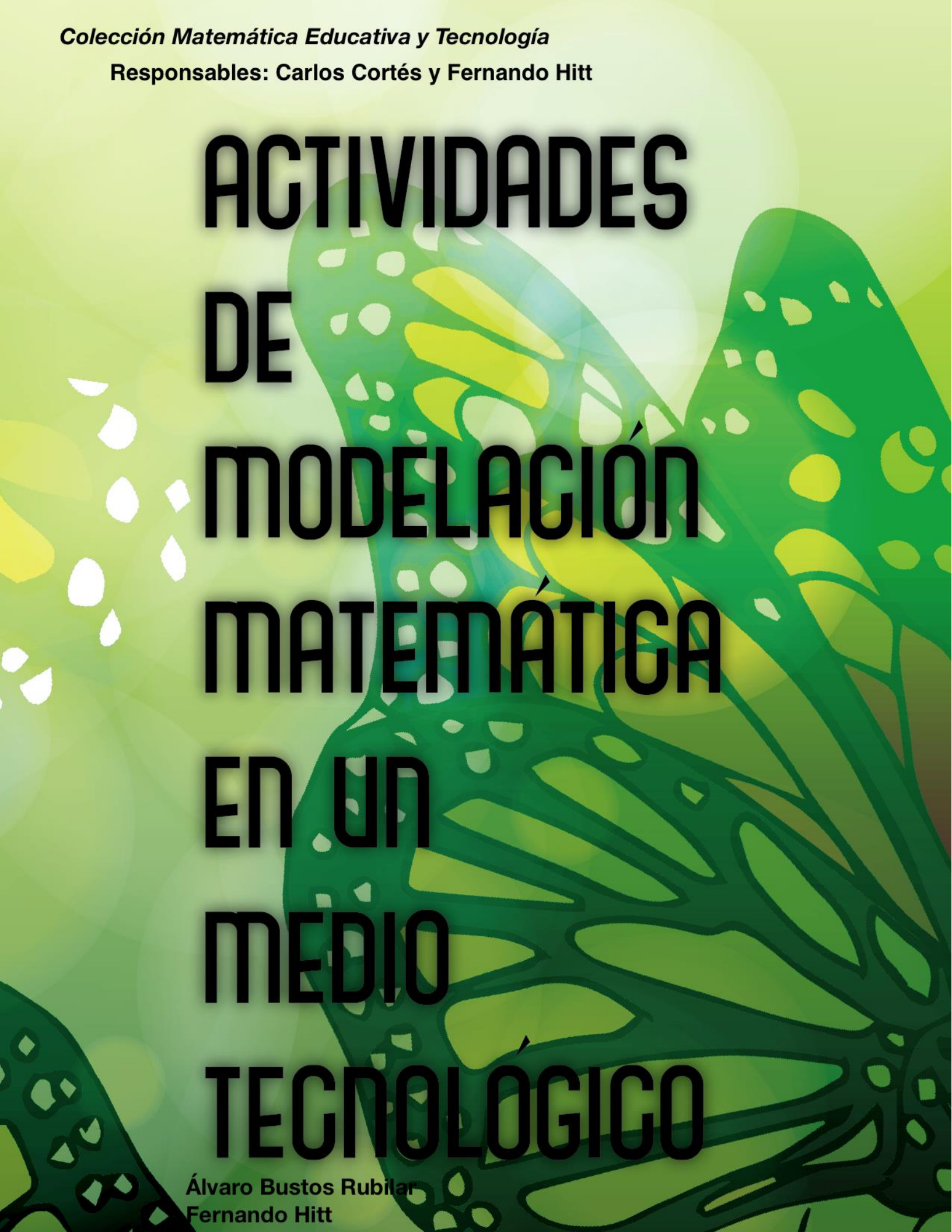


*Colección Matemática Educativa y Tecnología*

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt



**ACTIVIDADES  
DE  
MODELACION  
MATEMÁTICA  
EN UN  
MEDIO  
TECNOLOGICO**

Álvaro Bustos Rubilar  
Fernando Hitt

*Colección Matemática Educativa y Tecnología*

***Actividades de modelación matemática  
en un medio tecnológico***

**Comité editorial (versión electrónica)**

Álvaro Bustos Rubilar

Fernando Hitt

Editores de la colección Matemática Educativa y Tecnología  
José Carlos Cortés Zavala  
Fernando Hitt

**Comité Editorial del libro: Actividades de modelación matemática en un  
medio tecnológico (versión electrónica)**

Álvaro Bustos Rubilar

*Universidad de Valparaíso*

Fernando Hitt

*Université du Québec à Montréal*

Primera edición: Marzo 2019 (México)

---

*Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico*

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

---

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio

Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

© 2019

© **CC-BY-NC-ND**

## Índice

<b>Prefacio y actividades por capítulo</b>	<b>Página</b>
Prefacio	v
<b>Capítulo 1.</b> La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Fernando Hitt Espinosa, Mireille Saboya, Samantha Quiroz Rivera, Álvaro Bustos Rubilar y Zita Antun</i>	1
Remarque. Activités en espagnol et français.	25
<b>Capítulo 2.</b> Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía, Fernando Hitt Espinosa y Samantha Quiroz Rivera</i>	43
<b>Capítulo 3.</b> El aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt Espinosa, Álvaro Bustos Rubilar, Mireille Saboya y Zita Antun</i>	57
<b>Capítulo 4.</b> Entendimiento de postulados básicos de la perspectiva de modelos y modelación por profesores en formación	
Diseño de actividades: <i>Verónica Vargas Alejo y César Cristóbal Escalante</i>	63
<b>Capítulo 5.</b> La inclusión de GeoGebra en el diseño de secuencias didácticas en matemáticas	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía</i>	73
<b>Capítulo 6.</b> Proceso de representación del cambio y la variación: exploraciones digitales	
Diseño de actividades: <i>Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Leal y Nelson Javier Rueda</i>	81
<b>Capítulo 7.</b> Utilización de sensores CBR2 para el estudio de situaciones funcionales a nivel secundaria y universitario	
Diseño de actividades: <i>Valériane Passaro, Ruth Rodríguez Gallegos, Mireille Saboya y Fabienne Venant</i>	85
Remarque. Activités en espagnol et français.	99
<b>Capítulo 8.</b> Actividades de aprendizaje para entender el concepto de función Derivada y Función integral a través de las razones de diferencias y las acumulaciones	
Diseño de actividades: <i>José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera y Eréndira Núñez Palenius</i>	113

<b>Capítulo 9.</b> Variación lineal y movimiento: de la experiencia corporizada a los significados institucionales Diseño de actividades: <i>María Teresa Dávila y Agustín Grijalva Monteverde</i>	159
<b>Capítulo 10.</b> Problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et apport de la méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive Diseño de actividades: <i>Pedro Rogério Da Silveira Castro</i> Remarque. Activités en français.	167
<b>Capítulo 11.</b> La ecuación lineal con dos variables: una propuesta para su aprendizaje en la escuela secundaria mexicana Diseño de actividades: <i>Ana Guadalupe del Castillo y Silvia E. Ibarra Olmos</i>	175
<b>Capítulo 12.</b> Tecnología y usos de las gráficas: una experiencia de modelación del movimiento con estudiantes de bachillerato Diseño de actividades: <i>José David Zaldívar Rojas</i>	197
<b>Capítulo 13.</b> Una forma de enseñanza y aprendizaje: Objetos Para Aprender Diseño de actividades: <i>Ricardo Ulloa Azpeitia</i>	201
<b>Capítulo 14.</b> Secuencia didáctica para el cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución: el caso de recipientes y sandía Diseño de actividades: <i>Rafael Pantoja Rangel, Rosaura Ferreyra Olvera y Rafael Pantoja González</i>	203
<b>Capítulo 15.</b> Geogebra comme outil d'exploration en enseignement de la géométrie Diseño de actividades: <i>Loïc Geeraerts y Denis Tanguay</i> Remarque. Activités en français.	205

## Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolini Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros “Matemática Educativa y Tecnología”. Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-práctico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa  
José Carlos Cortés Zavala

## Referencias

- Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Groupe PME, v. 2, 17-24. Seoul: PME.
- Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.
- Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.
- English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.





## Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen “iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable”, en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al “animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura”. Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

“[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente”.

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de “modelo tabular” y “modelo gráfico” a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, “puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo” (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a “un modelo” fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en “pesar figuras” para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del géomtra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los “Objetos Para Aprender”, como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM



# 7a UTILISATION DES SENSEURS CBR2 POUR L'ÉTUDE DE SITUATIONS FONCTIONNELLES AU NIVEAU SECONDAIRE ET UNIVERSITAIRE

## Activités (niveau secondaire) du chapitre 7: Guide pour l'enseignant

Valériane Passaro<sup>1</sup>, Ruth Rodríguez Gallegos<sup>2</sup>, Mireille Saboya<sup>3</sup>, Fabienne Venant<sup>4</sup>

### NOM DE L'ACTIVITÉ:

*L'étude du déplacement d'une personne*

### OBJECTIF DE L'ACTIVITÉ:

Développer la compréhension de la notion de fonction à travers un questionnement sur la covariation de deux grandeurs dans une situation réelle.

### NIVEAU:

Fin du secondaire (élèves de 14 à 17 ans)

### CONTENU MATHÉMATIQUE ABORDÉ:

Fonction, covariation, représentation graphique, modélisation

DURÉE APPROXIMATIVE: 75 minutes

### MATÉRIEL NÉCESSAIRE:

- Pour les élèves: Chaque équipe dispose d'un CBR2, d'un labQuest<sup>5</sup> et de papier collant pour pouvoir faire des marques au sol.
- Pour l'enseignant : Ordinateur, projecteur, toile, CBR2, labQuest

### RECOMMANDATIONS POUR L'ENSEIGNANT:

Les élèves travaillent en équipe de 3 ou 4.

#### Phase 0: Présentation du contexte aux élèves

Il est souvent utile de savoir comment varie la distance entre un objet et un point de référence fixe au cours du temps. Par exemple, lorsqu'un radar de contrôle aérien capte la présence d'un avion, des capteurs évaluent la distance entre cet avion et la tour de contrôle pour éviter les accidents. Afin de mieux comprendre comment on peut analyser le déplacement d'un objet au cours du temps, nous allons **étudier le déplacement d'une personne.**

<sup>1</sup> Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canada – passaro.valeriane@uqam.ca

<sup>2</sup> Tecnológico de Monterrey - México - [ruthrdz@itesm.mx](mailto:ruthrdz@itesm.mx)

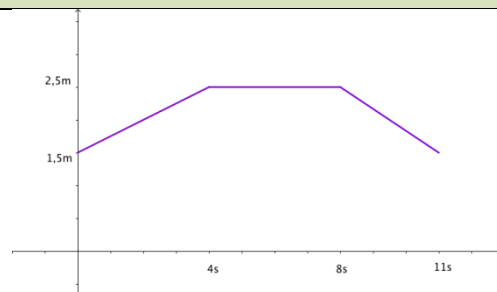
<sup>3</sup> UQAM – Canada – saboya.mireille@uqam.ca

<sup>4</sup> UQAM – Canada – venant.fabienne@uqam.ca

<sup>5</sup> Le labQuest est une machine qui récupère les données prises par le capteur pour les traiter. Ici, nous utilisons le logiciel labQuest pour représenter graphiquement la distance entre la personne et le capteur en fonction du temps.

**Description de l'activité :****Phase I : Exploration de l'outil et de la situation**

**Situation :** Voici un graphique qui représente la distance horizontale entre la personne et le capteur en fonction du temps.

**Consigne**

« Vous devez tenter de reproduire ce graphique en effectuant vous-même le déplacement face au capteur placé sur le bureau ».

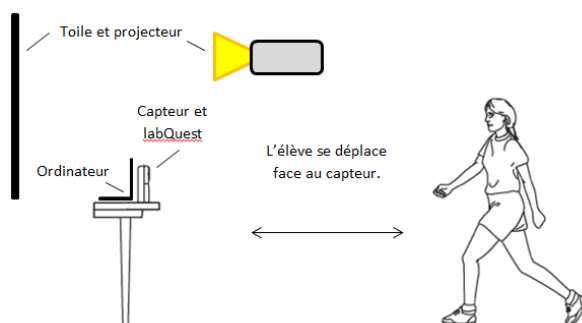
**Déroulement**

En grand groupe.

L'enseignant présente la situation aux élèves.

Il envoie plusieurs élèves faire des essais en avant de la classe (un seul capteur est utilisé, le graphique est projeté en avant de la classe, voir schéma ci-dessous).

Il laisse les élèves expérimenter et échanger spontanément.

**Recommandations à l'enseignant**

- Laisser les élèves s'approprier la situation et le fonctionnement du capteur sans forcer une analyse précoce de la coordination entre leurs actions et l'allure du graphique.
- Envoyer plusieurs élèves en avant de la classe de manière à ce que d'un essai à l'autre ils tentent d'obtenir un graphique mieux ajusté à celui proposé.

**Phase II : Interprétation graphique**

**Situation :** Voici un autre graphique qui représente la distance horizontale entre la personne et le capteur en fonction du temps.

Exemples de graphiques :

Consigne	Déroulement
<p>« Vous devez écrire un texte qui explique à quelqu'un qui n'a pas le graphique sous les yeux comment se déplacer face au capteur pour reproduire exactement ce graphique. »</p>	<p>Équipes de 3 ou 4 élèves.</p> <p>Chaque équipe dispose d'un CBR2 et d'un LabQuest.</p> <p>L'enseignant donne la consigne et <b>attribue un graphique différent à chacune des équipes.</b></p> <p>Il laisse les élèves travailler en s'assurant que le texte est écrit sur une feuille libre sans représentation graphique.</p>
<p><b>Recommandations à l'enseignant</b></p>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Inciter les élèves à expliquer leur raisonnement aux autres membres de leur équipe et à s'entendre sur les instructions à donner à quelqu'un <b>qui ne voit pas le graphique.</b></li> <li>• Suggérer aux élèves de tester leur description en expérimentant à l'aide du CBR2.</li> <li>• Suggérer de séparer le graphique en différentes parties et d'analyser la variation de la distance pour chacune de ces parties.</li> </ul>	

Phase III : Appropriation d'une description verbale et anticipation du graphique	
<p><b>Situation :</b> Voici la description d'un déplacement produite par une autre équipe.</p>	
<p><u>Exemple de description :</u></p>	
<p>« Au départ, place-toi à 3 mètres du capteur. Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur à vitesse constante pendant 3 secondes puis ralentis pendant 2 secondes jusqu'à ce que tu sois à 1 mètre du capteur. Reste immobile pendant 2 secondes puis recule rapidement au départ mais en ralentissant pendant 2 secondes pour te rendre à 2 mètres du capteur. »</p>	
Consigne	Déroulement
<p>A. « Vous devez lire le texte et vous assurer de bien saisir la succession d'actions à faire. Un membre de l'équipe doit s'exercer à effectuer ce mouvement (les autres doivent s'assurer qu'il correspond bien au texte)</p>	<p>Équipes de 3 ou 4 élèves.</p> <p>L'enseignant donne la consigne et distribue les textes produits par les élèves en s'assurant que chaque équipe ne reçoit pas son propre texte.</p>

pour pouvoir le refaire ensuite devant la classe avec le capteur. »	Il laisse les élèves travailler en s'assurant qu'ils comprennent et respectent bien le contenu du texte.
B. « Produisez une esquisse du graphique associé au déplacement que vous venez de travailler (distance en fonction du temps). »	Individuel puis partage avec l'équipe.
<b>Recommandations à l'enseignant</b>	
A. Laisser les élèves s'approprier le texte et identifier les manques ou les erreurs s'il y en a. B. Inciter les élèves à comparer leurs graphiques en expliquant comment ils sont passés de la description au graphique.	

<b>Phase IV : Validation/invalidation des descriptions verbales et des graphiques anticipés, et analyse du comportement des accroissements</b>	
<b>Situation</b> : Chaque équipe a reçu une description d'un déplacement, on veut maintenant produire le graphique associé et voir s'il correspond bien au graphique de départ.	
<b>Consigne</b>	<b>Déroulement</b>
« Pour chaque équipe, un élève vient en avant reproduire le mouvement décrit tel qu'il l'a pratiqué. Nous devons ensuite comparer le graphique obtenu à celui qui avait été donné initialement à l'équipe qui a produit le texte ».	Grand groupe.  Un élève par équipe vient effectuer le mouvement (il peut avoir un maximum de 3 essais). Quand l'équipe est satisfaite du graphique obtenu (ils considèrent que l'élève a effectué le déplacement conformément à ce que le texte décrivait), l'enseignant montre en parallèle le graphique original.  Il demande aux élèves de comparer les deux graphiques et d'expliquer les différences s'il y en a.
<b>Recommandations à l'enseignant</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Choisir au préalable, lors de la phase III, deux ou trois descriptions pour lesquelles l'analyse sera approfondie.</li> <li>• Poser des questions afin d'amener les élèves à repérer et interpréter les points caractéristiques.</li> <li>• Poser des questions sur le comportement des accroissements afin d'amener les élèves à : <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Qualifier le déplacement associé à un segment de droite ascendant ou descendant.</li> <li>2) Qualifier le déplacement associé à des courbes ouvertes vers le haut ou vers le bas.</li> </ol> </li> </ul>	



## Analyse a priori

### Phase I

Dans cette phase, les élèves explorent spontanément l'outil et s'engagent dans la situation. Pendant qu'un élève se déplace, les autres l'observent et observent le traçage simultané du graphique. Cette perception de la relation de dépendance et des variations simultanées du temps et de la distance favorise le travail sur la covariation qui sera sollicité par la suite. Ainsi, même si les élèves commencent à mettre en place des stratégies pour mieux ajuster la courbe tracée à celle proposée, l'objectif n'est pas encore de conscientiser et formuler clairement ces stratégies. La coordination des registres *graphique* et *expérience* est particulièrement sollicitée durant cette phase. Aux vues des travaux de Passaro (2015) et Carlson (2002), nous nous attendons à ce que les élèves adoptent un regard statique (correspondance) sur le graphique en repérant des points caractéristiques. Toutefois, comme le graphique se trace simultanément au déplacement, les élèves pourraient commencer à faire des inférences sur la vitesse du déplacement et donc adopter un regard dynamique sur le graphique (covariation).

### Phase II

Dans cette phase les élèves doivent conscientiser et expliciter les stratégies qui ont émergées à la phase I. La tâche exige des élèves de coordonner les registres *graphique* et *verbal* en passant éventuellement par le registre de l'expérience. Comme le texte doit suffire à ce qu'une tierce personne effectue le bon déplacement permettant de tracer le graphique donné, les élèves doivent composer des descriptions détaillées, ils ne peuvent pas se contenter de donner des informations statiques comme « Place-toi à un mètre au départ » ou « Arrête quand tu arrives à 2 mètres de distance ». Le CBR offre justement la possibilité aux élèves de valider, d'invalider ou d'ajuster les éléments de leur description, particulièrement ceux qui concernent la variation. Voici un exemple de description qui pourrait être produite par une équipe d'élèves pour le graphique B : « Au départ, place-toi à 3 mètres du capteur. Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur à vitesse constante pendant 3 secondes puis ralentis pendant 2 secondes jusqu'à ce que tu sois à 1 mètre du capteur. Reste immobile pendant 2 secondes puis recule rapidement au départ mais en ralentissant pendant 2 secondes pour te rendre à 2 mètres du capteur ».

### Phase III

#### Partie A

À la partie A de cette phase, les élèves doivent visualiser le mouvement à partir de la description écrite puis l'élève qui effectue le mouvement doit transposer cette visualisation dans l'expérience réelle (*embodiment*). Cette coordination entre les registres *verbal* et *expérience* peut

#### Partie B

À la partie B, chaque élève doit tracer une esquisse du graphique de la situation. Cette tâche exige une coordination entre les registres *verbal* et *graphique*. Lors du partage avec les autres membres de l'équipe, la coordination de ces deux registres est approfondie lorsque les élèves explicitent les associations qu'ils effectuent entre des éléments signifiants du texte et des variables visuelles du graphique. Parmi les erreurs possibles, on peut anticiper la confusion entre l'objet source (la trajectoire de la personne) et l'objet cible (le tracé du

favoriser l'anticipation sur l'allure du graphique associé.	graphique qui montre comment varie la distance en fonction du temps, Janvier 1993). Ainsi un élève pourrait tracer un segment horizontal lorsque la personne se déplace en ligne droite à vitesse constante.
---	--

### Phase IV

La confrontation mise en jeu dans cette phase va permettre de renforcer la coordination des trois registres en jeu (expérience, description verbale et graphique) à travers la mise en évidence de la correspondance entre les éléments signifiants de chacun de ces registres. D'abord, les éléments signifiants associés aux points caractéristiques peuvent être relevés (regard correspondance). Par exemple, dans l'exemple de description donné précédemment, l'enseignant pourrait relever trois extraits et mettre en évidence l'association entre les éléments signifiants des registres *verbal* et *graphique* (voir tableau 1).

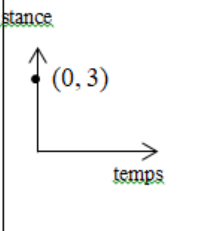
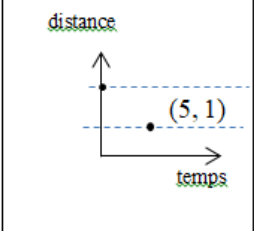
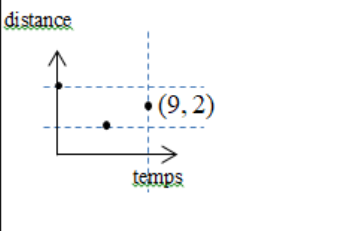
Registre verbal	<b>Description associée à l'expérience</b>	Au départ, place-toi à 3 mètres du capteur	jusqu'à ce que tu sois à 1 mètre du capteur	pour te rendre à 2 mètres du capteur
	<b>Interprétation de la description pour la conversion vers le graphique</b>	Le point (0, 3) appartient au graphique de la fonction. L'ordonnée à l'origine est 3.	Le point (5, 1) appartient au graphique de la fonction. Le minimum est 1 et l'image est [1, 3].	Le point (9, 2) appartient au graphique de la fonction. Le domaine est [0, 9].
Registre graphique	<b>Graphique</b>			

Tableau 1 Association entre les éléments signifiants du registre verbal et les variables visuelles du registre graphique pour les points caractéristiques (regard correspondance)

L'enseignant doit ensuite amener les élèves à aller plus loin afin de caractériser l'allure de la courbe entre ces points et le déplacement associé. Par exemple, si le tracé est une courbe ascendante ouverte vers le haut, on ne pourra pas se contenter de dire à la personne qui se déplace de reculer, il faudra lui dire comment reculer. Comme l'ont montré Passaro (2015) et Carlson (2002), les élèves font spontanément référence à la vitesse et à l'accélération pour décrire plus précisément le déplacement. Par exemple, toujours pour le tracé courbé ascendant ouvert vers le haut, un élève pourrait dire « recule en allant de plus en plus vite » ou même « recule en accélérant ». Cette qualification intuitive du déplacement est un bon point de départ car elle permet d'avoir une idée de l'allure du graphique. Dans la description présentée précédemment, l'enseignant pourrait relever trois extraits et amener les élèves à les interpréter pour la conversion vers le graphique (voir tableau 2).

<b>Registre verbal</b>	<b>Description associée à l'expérience</b>	Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur à vitesse constante pendant 3 secondes puis ralentis pendant 2 secondes.	Reste immobile pendant 2 secondes.	Recule rapidement au départ mais en ralentissant pendant 2 secondes
	<b>Interprétation de la description pour la conversion vers le graphique</b>	Sur $[0, 5]$ la fonction est décroissante. Sur $[0, 3]$ la fonction est affine, elle est représentée par un segment de droite oblique descendant. Sur $[3, 5]$ la fonction est représentée par une courbe ouverte vers le haut.	Sur $[5, 7]$ la fonction est constante, elle est représentée graphiquement par un segment horizontal.	Sur $[7, 9]$ la fonction est croissante. Elle est représentée par une courbe ouverte vers le bas abrupte au départ puis de moins en moins.
<b>Registre graphique</b>	<b>Graphique</b>			

Tableau 2 : Association entre les éléments signifiants du registre verbal et les variables visuelles du registre graphique pour savoir comment relier les points (regard covariation)

L'interprétation suggérée nécessite toutefois une expérience à interpréter graphiquement les concepts de vitesse et d'accélération. De plus, en expérimentant le déplacement, les élèves risquent d'être confrontés à une problématique importante : comment effectuer la bonne accélération. L'enseignant peut saisir l'occasion pour approfondir l'analyse de la variation de la distance à l'aide d'accroissements quantifiés. En effet, lorsqu'on parle intuitivement de la vitesse qui change, on parle en fait du taux de variation qui varie et donc de la variation de la fonction dérivée. Pour amener les élèves vers les concepts mathématiques associés à leur intuition, un travail sur les accroissements est nécessaire. Pour donner un sens à ces concepts dans le registre de l'expérience, on doit se questionner sur le comportement des accroissements de la distance lorsque les accroissements du temps sont constants. L'enseignant pourrait par exemple demander aux élèves de décrire comment augmente la distance à chaque seconde puis proposer d'utiliser le ruban à mesurer en le plaçant à côté de (ou sur) la ligne déjà tracée au sol pour décrire plus précisément le déplacement (voir exemple dans le tableau 3).

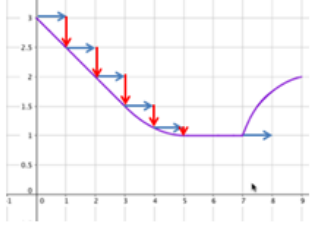
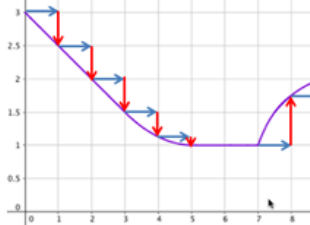
<b>Description associée à l'expérience</b>	Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur à <b>vitesse constante</b> pendant 3 secondes puis <b>ralentis</b> pendant 2 secondes.	<b>Recule rapidement</b> au départ mais en <b>ralentissant</b> pendant 2 secondes
<b>Analyse des accroissements sur le graphique</b>	 <p>Le graphique montre la distance parcourue (axe vertical, de 0 à 3) en fonction du temps (axe horizontal, de 0 à 9). La courbe est composée de deux segments : un segment linéaire descendant de (0, 3) à (3, 1) et un segment courbe descendant de (3, 1) à (5, 1). Des flèches bleues horizontales et des flèches rouges verticales indiquent les accroissements de distance à chaque seconde.</p>	 <p>Le graphique montre la distance parcourue (axe vertical, de 0 à 3) en fonction du temps (axe horizontal, de 0 à 9). La courbe est composée de deux segments : un segment linéaire descendant de (0, 3) à (1, 1) et un segment courbe descendant de (1, 1) à (3, 1). Des flèches bleues horizontales et des flèches rouges verticales indiquent les accroissements de distance à chaque seconde.</p>
<b>Description du comportement des accroissements</b>	<p><b>À vitesse constante :</b> → À chaque seconde, la distance diminue de 0,5 mètre.</p> <p><b>Ralenti :</b> → Pendant la première seconde, la distance diminue de 0,4 mètre puis pendant la deuxième seconde de 0,1 mètre.</p>	<p><b>Reculer rapidement puis ralentir :</b> → Pendant la première seconde la distance augmente de 0,75 m alors que pendant la deuxième la distance augmente de 0,25m.</p>
<b>Interprétation dans le registre de l'expérience</b>	<p>« Fais un pas vers l'avant à chaque seconde de la manière suivante :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- fais 3 pas de 0,5 m (50 cm)</li> <li>- fais 1 pas de 0,4 m (40 cm) puis un pas de 0,1 m (10 cm). »</li> </ul>	<p>« Fais un pas vers l'arrière à chaque seconde de la manière suivante :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- fais 1 pas de 0,75 m (75 cm)</li> <li>- fais 1 pas de 0,25 m (25 cm). »</li> </ul>

Tableau 3 Interprétation du graphique à l'aide des accroissements

## **7b** UTILISATION DES SENSEURS CBR2 POUR L'ÉTUDE DE SITUATIONS FONCTIONNELLES AU NIVEAU SECONDAIRE ET UNIVERSITAIRE

### **Activités (niveau universitaire) du chapitre 7: Guide pour l'enseignant**

Ruth Rodríguez Gallegos<sup>6</sup>, Valériane Passaro<sup>7</sup>, Mireille Saboya<sup>8</sup>, Fabienne Venant<sup>9</sup>

NOM DE L'ACTIVITÉ :

*Étude du changement de température dans l'eau bouillante*

OBJET DE L'ACTIVITÉ :

Approcher / montrer aux étudiants le phénomène du refroidissement de l'eau bouillante, les sensibiliser à la méthode expérimentale et faire le lien avec la partie théorique (analytique).

DEGRÉ UNIVERSITAIRE LORSQU'IL PEUT ÊTRE MIS EN ŒUVRE :

Collège Troisième/ lycée (14-17 ans) et université (18-20 ans)

CONTENU MATHÉMATIQUE :

Fonction, covariation, représentation graphique, modélisation, équation différentielle, représentation symbolique

DURÉE APPROXIMATIVE : 75 minutes

MATÉRIEL NÉCESSAIRE :

- Pour les étudiants : Chaque équipe dispose d'un capteur de température, d'une calculatrice graphique TI-Nspire CX CAS, d'un verre.
- Pour l'enseignant : une bouilloire électrique et un ordinateur portable avec émulateur informatique.

RECOMMANDATIONS POUR L'ENSEIGNANT :

Les étudiants travaillent en équipes de 3.

---

<sup>6</sup> Tecnológico de Monterrey - México - [ruthrdz@itesm.mx](mailto:ruthrdz@itesm.mx)

<sup>7</sup> Université du Québec à Montréal (UQAM) - Canada - [passaro.valeriane@uqam.ca](mailto:passaro.valeriane@uqam.ca)

<sup>8</sup> UQAM - Canada - [saboya.mireille@uqam.ca](mailto:saboya.mireille@uqam.ca)

<sup>9</sup> UQAM - Canada - [venant.fabienne@uqam.ca](mailto:venant.fabienne@uqam.ca)

### Description de l'activité

Phase I - Expérimenter pour mieux comprendre le contexte thermique à modéliser	
<p><b>Situation</b> : Appréhension du phénomène à modéliser et affichage d'un graphique représentation la température de l'eau en fonction du temps à l'aide du capteur de température.</p>	
Consigne	Déroulement
<p>Vous devez essayer de trouver le graphique dans la calculatrice / interface permettant de représenter la température en fonction du temps.</p>	<p>Par équipe de 3 étudiants.</p> <p>L'enseignant présente à la classe la nécessité et l'importance d'étudier la façon dont la température des objets change, et présente le contexte de l'activité : étudier les variations de température lors du refroidissement d'une eau portée à ébullition.</p> <p>Les étudiants sont invités à mesurer les changements de température à l'aide d'un capteur de température, en suivant une procédure expérimentale détaillée, étape par étape.</p>
Recommandations pour l'enseignant	
<p>Présenter la situation aux étudiants, les informer du fonctionnement de l'interface (calculatrice graphique TI Nspire CX CAS) et du capteur de température.</p> <p>Faire émerger les processus intuitifs et les premiers raisonnements pour réfléchir au phénomène. À un stade ultérieur, les étudiants seront invités à spécifier le rapport et la fonction analytique décrivant la variation de la température en fonction du temps.</p>	
Phase II - Mise en place du modèle mathématique et de sa solution	
<p><b>Situation</b> : Établissement du modèle mathématique traduit par une équation différentielle (ED) représentant le changement de température en fonction du temps.</p>	
Consigne	Déroulement
<p>Vous devez établir une ED qui permet de modéliser le changement de température en fonction du temps t.</p>	<p>Travail en équipe de 3 étudiants. L'enseignant amène les étudiants à réfléchir à la manière dont la température change dans le temps et à la manière de l'exprimer mathématiquement. Les étudiants travaillent à l'établissement de l'ED et prennent en compte divers facteurs tels que la température de l'environnement et / ou la température initiale de l'eau en ébullition.</p>
Recommandations pour l'enseignant	
<p>Il est suggéré d'essayer de laisser les étudiants proposer la variation du nouveau modèle de ED qui doit être étudié. Généralement, au cours de cette année universitaire, plus de la moitié de la population sait qu'elle doit "ajuster le modèle" mais ne sait pas comment justifier un tel changement. Une discussion de groupe permet de réunir les arguments des étudiants pour justifier "ensemble" la nouvelle ED.</p>	

<b>Phase III - Résolution du problème pour connaître la température en fonction du temps t</b>	
<b>Situation</b> : Résolution mathématique du modèle mathématique (ED) pour obtenir la température à tout moment.	
<b>Consigne</b>	<b>Développement</b>
Résoudre le modèle mathématique précédemment établi à l'aide d'une méthode analytique. Trouver la solution générale et particulière de celle-ci.	<p>Travail en équipe de 3 étudiants. L'enseignant permet aux étudiants de résoudre l'ED précédemment établi en utilisant une méthode vue en classe.</p> <p>Si l'activité a lieu au cours des premières sessions du cours, il est possible d'utiliser la méthode analytique de séparation des variables. Dans cette phase, il est très important de noter que les données de départ de chaque équipe peuvent / doivent être différentes, en ce qui concerne la température de l'environnement et / ou les données initiales, de sorte que les résultats devraient être différents (bien que similaires) pour chaque équipe.</p>
<b>Recommandations pour l'enseignant</b>	
C'est l'occasion de revenir sur la méthode de résolution analytique par séparation des variables dans un contexte différent de celui de la croissance et décroissance exponentielle, et avec une ED qui diffère de la structure originale connue des étudiants. Il est important de spécifier la différence entre les variables et les paramètres au sein de l'ED.	

<b>Phase IV - Valider le modèle théorique par rapport au modèle expérimental</b>	
<b>Situation</b> : comparaison du graphique obtenu en phase I avec celui donné par la résolution de l'ED en phase III	
<b>Consigne</b>	<b>Déroulement</b>
Il vous est demandé de comparer le graphique obtenu à partir du modèle théorique (graphique de la solution particulière) avec celui obtenu par le capteur de température. Que pouvez-vous dire sur les deux graphiques ? Vous êtes invité à comparer la valeur de la température dans un temps donné t (entre 0 et 15 minutes) à l'aide du modèle théorique. Observez la valeur indiquée par le capteur et concluez cette comparaison. Il est suggéré d'ajuster votre modèle pour que cette différence (le cas échéant) soit minimale.	Les étudiants comparent et s'attendent à ce que la similarité soit observée, mais ils identifient à leur tour les différences qui permettent d'avancer dans la compréhension de la signification d'une solution de l'ED. Chaque équipe présente sa comparaison, ses suggestions d'amélioration et surtout les nouvelles valeurs obtenues dans le modèle ajusté.

### Recommandations pour l'enseignant

Les étudiants sont invités à comparer la valeur de la température à une heure précise. En pratique, on demande  $t = 15$  minutes (900 secondes). En fait, c'est un prétexte pour les amener à comparer et à réfléchir à la validité de leur modèle. Généralement, il existe des différences importantes entre la valeur donnée par le modèle théorique et celle obtenue de façon expérimentale. On demande ensuite aux étudiants ce qui peut causer une telle différence, leurs réponses sont généralement variées, depuis des "erreurs" de la théorie (en fait, il faut recalculer les paramètres,  $k$  principalement) jusqu'à des erreurs dans la manipulation du capteur, ou dans la lecture des "valeurs initiales". La phase d'institutionnalisation devrait permettre une synthèse sur la coordination des registres analytique et graphique, dans le cas de l'étude du changement de température (refroidissement) de l'eau bouillante.

### Analyse a priori

#### Phase I

Les étudiants ont étudié les variations de grandeurs (croissance ou décroissance exponentielle) en raison d'un comportement exponentiel. Cela nous permet d'expliquer pourquoi ils proposent généralement des modèles tels que  $\frac{dT}{dt} = k * T(t)$  ou des modèles de type exponentiel,  $T(t) = Pe^{rt}$  (appris du lycée) ou  $T(t) = Ce^{kt}$  vu dans les classes précédentes de ce même cours (où  $k$  représente une constante de proportionnalité). Un argument qui émerge généralement de manière très intuitive chez certains étudiants est de déterminer que cette fois-ci, la température ne peut pas tomber complètement à zéro mais elle doit correspondre à la température de l'environnement, dans notre cas à la température de la salle de classe. C'est un élément très important qu'ils rencontrent même dans d'autres cours comme la physique ou la thermodynamique.

#### Phase II

Les étudiants proposent généralement des modèles comme  $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$ . Certaines variantes possibles, comme celles pour lesquelles on spécifie que le paramètre est négatif  $\frac{dT}{dt} = -k * (T(t) - T_M)$  au sein de la même ED. Parfois, ils inversent simplement l'ordre dans les différences comme  $\frac{dT}{dt} = k * (T_M - T(t))$ . Ceci est connu verbalement comme "la façon dont la température change en fonction du temps est proportionnelle à la différence entre la température du corps  $T = T(t)$  (eau bouillante dans ce cas) et l'environnement  $T_M$ ". L'ED attendu est  $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$  avec la valeur initiale correspondante de la température  $T(t = 0) = T_0$ . Il est important de préciser qu'il y aura de légères variations dans la valeur de  $T_M$  (Cela arrive généralement pour les très grandes pièces) mais surtout dans  $T_0$  (Cela dépend de la lecture des étudiants eux-mêmes sur ces données).



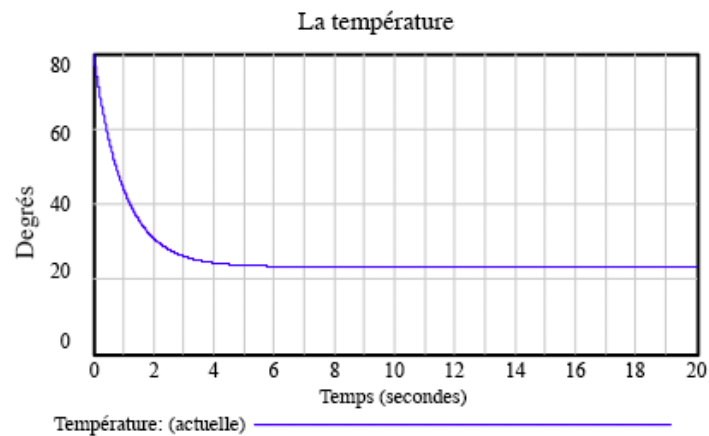
### Phase III

Les étudiants résolvent l'ED par la première méthode vue dans le cours (et la seule à ce jour) appelée Variables séparables, qui consiste à séparer la variable dépendante Température  $T$  et la variable indépendante  $t$  du côté de l'ED, ce qui conduit à l'équation suivante dans laquelle  $C$  est une constante :

$$T(t) = T_M + Ce^{kt}$$

Plus tard, dans des problèmes comme celui-ci, nous nous intéresserons davantage à la solution particulière, à savoir spécifier les valeurs de  $C$  et  $k$ .

**Exemple :** Si la température initiale est de 80 degrés Celsius et celle de l'environnement de 23 degrés Celsius, la solution en question ressemblerait à:



### Phase IV

Le but est de comparer les résultats théoriques et expérimentaux d'un modèle mathématique. Si les conditions le permettent, des modifications au modèle de la solution particulière (conditions initiales) peuvent être suggérées afin que les étudiants puissent réduire les différences entre les solutions. Dans ce cas, ils devraient repenser la solution. Vous pouvez partager un tableau des différences entre les valeurs obtenues par les étudiants :

Les équipes	Température calculée à 900 secondes	Température enregistrée par les capteurs	La différence
9 y 10 (A 600 s)	57.38°C	62°C	4.62
1 y 12	47.63°C	55.2°C	7.57
13	50°C	53.8°C	3.8
6	50.31°C	53.8°C	3.49
2 y 8	47.18°C	53.4°C	6.22
7	48.89°C	52.6°C	3.71
5 y 11	43.48°C	54.0°C	10.52
3 y 4	47.73°C	54.7°C	6.97

