Colección Matemática Educativa y Tecnología

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt

ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLÓGICO

Álvaro Bustos Rubilar
Fernando Hitt

Colección Matemática Educativa y Tecnología

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Primera edición: Marzo 2019 (México)

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio
Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

Índice

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolinni Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros "Matemática Educativa y Tecnología". Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-practico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa
José Carlos Cortés Zavala

Referencias

Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Groupe PME, v. 2, 17-24. Seoul: PME.

Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.

Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen "iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable", en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al "animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura". Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

> "[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente".

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de "modelo tabular" y "modelo gráfico" a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, "puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo" (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a “un modelo” fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en “pesar figuras” para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del geómetra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los “Objetos Para Aprender”, como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM

1 LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN UN MEDIO SOCIOCULTURAL Y TECNOLÓGICO

Capítulo teórico

Fernando Hitt Espinosa[1], Samantha Quiroz Rivera[2]

Actividades desarrolladas en relación con este capítulo en otros estudios por:

Fernando Hitt Espinosa[1], Samantha Quiroz Rivera[2], Mireille Saboya[1], Álvaro Bustos Rubilar[3], Zita Antun[1].

El restaurante de Marcelo

Página 1. El restaurante de Marcelo

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

Grupo: ____________

Fecha: ____________

Instrucciones:

- **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma negra o azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **Después de discutir con el grupo, si tú modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

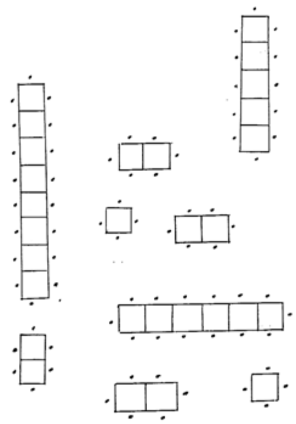
El restaurante de Marcelo

Página 2. Trabajo individual

Página 1 – Situación

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que coloca en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:

[1] Département des Mathématiques, Université du Québec à Montréal.
[2] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila.
[3] Instituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso.



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los pondrá. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin tener la necesidad de contar cada vez el número de sillas.

1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas ?

2. Si buscamos el número de personas para colocar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o sabrías aguna manera rápida de hacerlo ?

3. Y para 15 mesas, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápìdamente el número de personas sin necesidad de dibujar

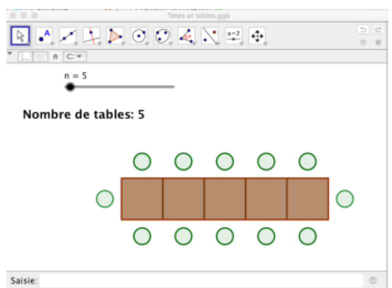
Página 3. Trabajo en equipo

4. En equipo, discute las estrategias que usaste para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿todos usaron la misma estrategia? Encuentra al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.

5. Una vez que escribiste las estrategias y que vieron que son correctas, utiliza alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

Página 4. Trabajo en equipo

6. La aplicación GeoGebra te mostrará el número de personas que se pueden sentar alrededor de las mesas no importa que tan grandes sean. Utilízalo para verificar tus respuestas del problema 5.

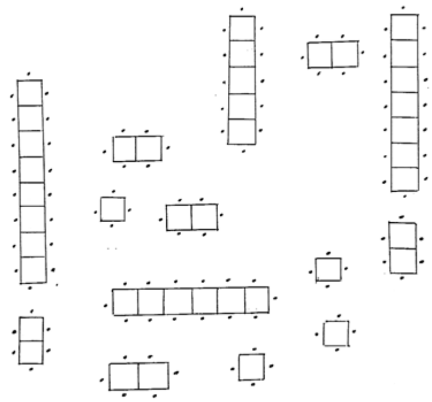


7. Escribe un mensaje escrito a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.

8. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar.

Página 5. Trabajo individual – Autorreflexión

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que ubica en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber donde los podrá colocar. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin contar las sillas.

1. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 4 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

2. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 15 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

3. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 21 mesas y después de 54 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

4. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora
El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

Joyería «El Dorado»

Página 1. Joyería «El Dorado»

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

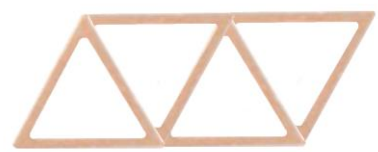
Grupo: ____________

Fecha: ____________

<u>**Instrucciones**</u>:

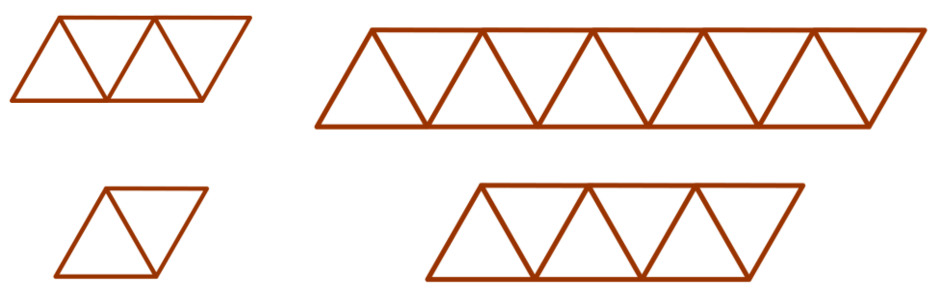
- **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Pulsera y cadenas de oro



Página 2. La situación

En la joyería «El Dorado», Samantha fabrica cadenas de oro en forma triangular como las siguientes:



Ella confecciona pulseras de diferentes tamaños de la cadena. Samantha compra las barritas de oro que ella tiene necesidad, sin necesidad de contar cada 6barrita una a una. Ella quisiera encontrar el número de barritas que necesita sin estar obligada a contar las barritas una a una (¡es demasiado tiempo!). Envía un mensaje a Samantha en el cual le explicas cómo ella podría hacer para encontrar rápidamente el número de barritas que necesita según el número de eslabones deseados sin estar obligada a contarlas una a una.

Página 3. Trabajo individual

1. Calcula el número de barras necesarias, si se te solicita 3 eslabones en forma de triángulo.

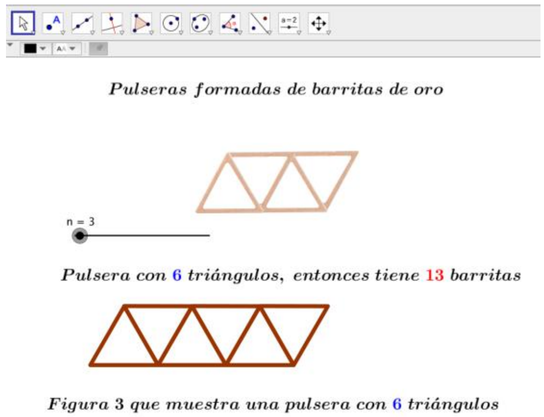
2. Si se busca el número de barras necesarias para 4 eslabones de forma triangular, ¿Tienes necesidad de realizar un dibujo para encontrarlos o existe una manera rápida de proceder?

3. Para 15 eslabones en forma triangular, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de barritas sin necesidad de contarlas una a una y sin necesidad de dibujar?

Página 4. Trabajo en equipo

4. En equipo discute las estrategias que han encontrado para calcular el número de barras para una cadena de 15 eslabones en forma triangular. ¿Los procedimientos de cada uno de los miembros del equipo son iguales? Encuentre al menos 2 estrategias para calcular el número de barras necesarias para una cadena o pulsera de 15 eslabones triangulares.

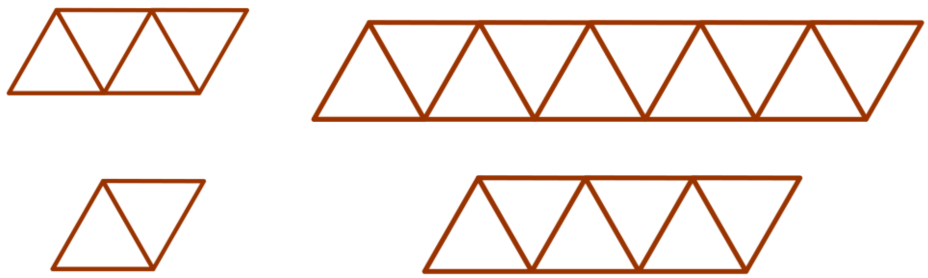
5. Una vez que han escrito las diferentes estrategias y que han decidido que ellas son correctas, utilícenlas cada una de ellas para calcular el número de barras necesarias para una cadena o pulsera de 21 eslabones y otra de 54 eslabones triangulares.

Página 5. Trabajo en equipo
6. La aplicación que pueden utilizar con *GeoGebra* les proporciona en forma directa el número de eslabones en forma triangular. Utilícenla para verificar sus resultados de la pregunta anterior. 
7. Escribe un mensaje en palabras que permita a Samantha calcular el número de barras necesarias para cualquier número de eslabones triangulares.
8. Los mensajes son largos para leer. Samantha está de prisas, ella desea que tú le proporciones algo corto indicando las operaciones a realizar en tú mensaje. Escribe un mensaje corto para Samantha.

Comentario para el maestro: Discusión con toda la clase
Discutir lo que se ha realizado en las primeras etapas de la investigación en un consenso basado sobre la argumentación y la validación. Escribir en una tabla las diferentes estrategias producidas. Es importante iniciar por aquellas estrategias erróneas para que los alumnos tengan la oportunidad de discutir, rechazar o validar por toda la clase. Todas las producciones de los alumnos se recolectan una vez finalizada la discusión.

Página 6. Trabajo individual – Autorreflexión

En la joyería «El Dorado», Samantha fabrica pulseras y cadenas de oro en forma de eslabones de triángulos, como los siguientes:



Ella realiza pulseras y cadenas de diferente tamaño. Samantha compra las barras de oro por pieza. Ella quisiera encontrar el número de barras que necesita sin tener que contar las barras una a una (¡es muy largo el proceso!). Te solicitamos enviar un mensaje a Samantha en el cual le vas a explicar cómo podría hacerle para encontrar rápidamente el número de barras que necesita según el número de eslabones deseados sin estar obligada a contarlas una a una.

1. Calcular el número de barras necesarias para 4 eslabones en forma triangular. Explica las estrategias que has utilizado.

2. Calcula el número de barras para 15 eslabones en forma triangular. Explica las estrategias que has utilizado.

3. Calcula el número de barras para 21 eslabones y para 54 eslabones en forma de triángulo. Explica las estrategias que has utilizado.

4. Calcula el número de barras necesarias para cualquier número de eslabones. Explica las estrategias que has utilizado.

Página 7. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

Las ventanas con vitrales alrededor

Página 1. Las ventanas con vitrales alrededor

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

Grupo: ____________

Fecha: ____________

<u>Instrucciones</u>:

- **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Las ventanas con vitrales alrededor

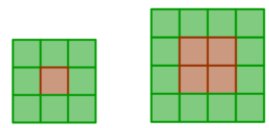


Figura 1 *Figura 2*

Página 2. Situación

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabrican tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadros cafés en el centro y cuadros verdes alrededor. Aquí mostramos algunos ejemplos:

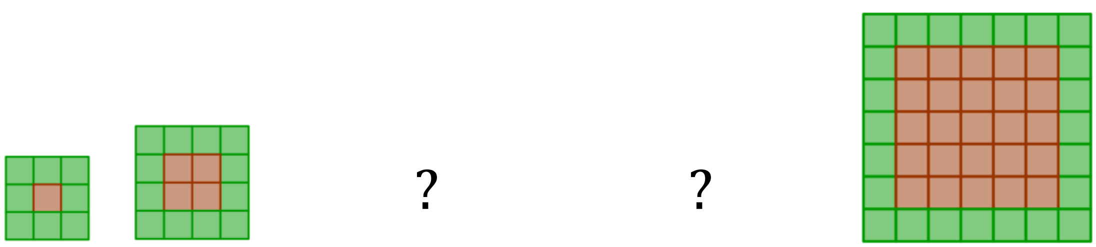


Figura 1 *Figura 2* *Figura 5*

Los trabajadores necesitan contar el número de cuadros color verde alrededor del gran cuadrado café de la ventana y los cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadros de color verde para cualquier tamaño de ventana?

1. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 3 cuadros cafés de lado (o 5 cuadros color verdes de lado).

2. Si buscamos el número de cuadros color verde para una ventana que tiene 4 cuadros cafés de lado (o 6 cuadros color verde de lado), ¿necesitas un dibujo para encontrar la respuesta o encontraste una manera rápida de proceder?

3. Y la ventana de 15 cuadros cafés de lado (o 17 cuadros color verde de lado), ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de cuadros color verde en total sin tener que contar uno a uno y sin tener que dibujar?

Página 3. Trabajo en equipo

4. En equipo, discutan las estrategias que utilizaron anteriormente para calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana que tenga 15 cuadros cafés de lado. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Encuentren al menos 2 estrategias para calcular el número de cuadros color verde para una ventana que tiene 15 cuadros cafés de lado.

5. Una vez que han escrito diferentes estrategias y que han decidido que son correctas, utiliza alguna de estas estrategias para calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana de 23 cuadros cafés de lado y otra ventana de 58 cuadros cafés de lado.

Página 4. Trabajo en equipo

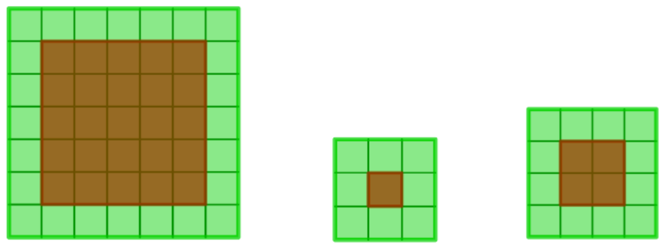
6. cualquier número de cuadros cafés de lado. Pueden utilizarlo para verificar sus respuestas de la sección anterior.

7. Escribe un mensaje con palabras que permita calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana para cualquier número de cuadros cafés de lado.

8. Los mensajes son largos a leer, escriban el mensaje simplificado utilizando solo operaciones.

Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabricas tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadros cafés en el centro y cuadros verdes alrededor. Aquí hay algunos ejemplos:



Hay trabajadores que necesitan contar el número de cuadros color verde alrededor de la ventana y cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadros color verde para cualquier tamaño de ventana?

1. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 4 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.

2. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 15 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.

3. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 23 y 58 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.

4. ¿Cómo podemos calcular el número de cuadros color verde necesarios para cualquier número de cuadros cafés de lado? Explica la estrategia que utilizaste.

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

El camino de las calaveritas

Página 1. El camino de las calaveritas

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

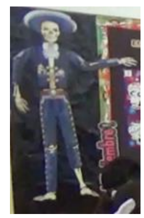
Grupo: __________

Fecha: __________

<u>Instrucciones</u>:

- **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

El camino de las calaveritas



Página 2. trabajo individual – Situación

En México todo mundo se prepara para la fiesta de día de muertos. En el parque de la comunidad, el director responsable del parque decide realizar un "camino de calaveritas" como lo muestra la foto. Él quisiera colocar calaveritas a todo lo largo del camino, ladrillo verde luminoso y una calaverita para mostrar el camino durante la noche, y ladrillos marrones para el resto.

El problema comienza cuando el director quiere saber el precio para hacer el camino, y contar las calaveritas, los ladrillos luminosos verdes, y los ladrillos marrones, para comprarlos.

Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo y discusión de toda la clase. Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicado por tu profesora.

Enseguida, te mostramos un modelo que ha hecho la compañía de ladrillos y también, la persona que lo ha hecho muestra dónde serían colocadas las calaveritas.

El director está interesado en calcular el número de ladrillos verdes, el número de ladrillos marrones, el número de calaveritas de acuerdo a cada figura.

Te mostramos varias figuras para que veas el modelo realizado por el fabricante de ladrillos:

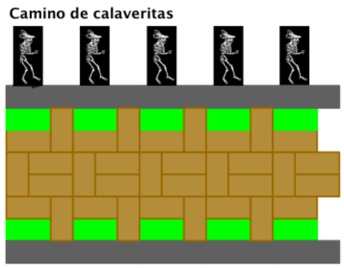


Figura 5

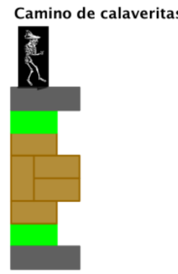


Figura 1

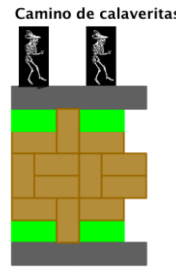


Figura 2

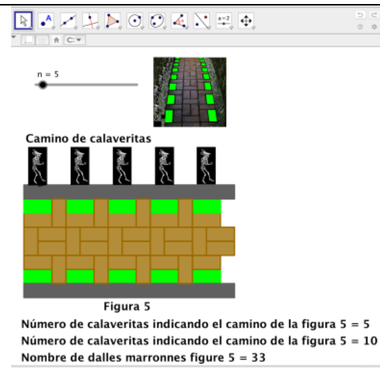
1. Calcula el número de calaveritas de la tercera figura.
2. ¿Tienes necesidad de dibujar la cuarta figura para calcular el número de calaveritas?
3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de calaveritas de la 5ª figura, sin contar las calaveritas una a una?
4. Calcula el número de ladrillos luminosos de la 3ª figura.
5. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos luminosos de la 4ª figura?
6. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos luminosos de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?
7. Calcula el número de ladrillos marrones de la 3ª figura.
8. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos marrones de la 4ª figura?
9. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos marrones de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?

Página 3. Trabajo en equipo

10. Analizar el trabajo de tus compañeros para encontrar diferentes estrategias que te permitan de calcular el número de calaveritas, de ladrillos luminosos y de ladrillos marrones de la 6ª figura. Escribe cada una de las estrategias.

11. Una vez tiene sus estrategias, y que han decidido que son correctas, calcula con cada una de las estrategias el número de calaveritas, el número de los ladrillos luminosos y el número de ladrillos marrones para la 12ª figura. ¿Cuál es su resultado con cada estrategia que han utilizado? ¿Obtienen el mismo resultado con cada estrategia?

12. Utiliza la aplicación GeoGebra para verificar si sus estrategias corresponden a los resultados proporcionados por la aplicación GeoGebra. Si los resultados no corresponden, busca una explicación.



13. Escribe un mensaje escrito donde expliques cómo podría calcular el número de calaveritas, de ladrillos luminosos y de ladrillos marrones para cualquier figura de acuerdo a la misma forma como lo has trabajado antes.

14. Los mensajes son muy largos. Escribe el mismo mensaje simplificado indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar.

Página 4. Trabajo individual - Autorreflexión

En México todo mundo se prepara para la fiesta de día de muertos. En el parque de la comunidad, el director responsable del parque decide realizar un "camino de calaveritas" como lo muestra la foto. Él quisiera colocar calaveritas a todo lo largo del camino, ladrillo verde luminoso y una calaverita para mostrar el camino durante la noche, y ladrillos marrones para el resto.

El problema comienza cuando el director quiere saber el precio para hacer el camino, y contar las calaveritas, los ladrillos luminosos verdes, y los ladrillos marrones, para comprarlos.

Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo y discusión de toda la clase. Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicado por tu profesora.

Enseguida, te mostramos un modelo que ha hecho la compañía de ladrillos y también, la persona que lo ha hecho muestra dónde serían colocadas las calaveritas.

El director está interesado en calcular el número de ladrillos verdes, el número de ladrillos marrones, el número de calaveritas de acuerdo a cada figura.

Te mostramos varias figuras para que veas el modelo realizado por el fabricante de ladrillos:

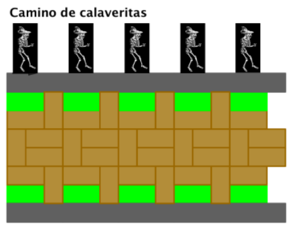


Figura 5

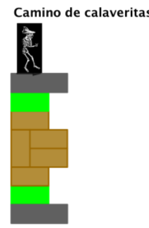


Figura 1

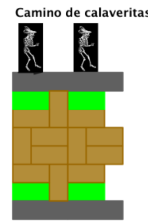


Figura 2

1. Calcula el número de calaveritas de la tercera figura.

2. ¿Tienes necesidad de dibujar la cuarta figura para calcular el número de calaveritas?

3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de calaveritas de la 5ª figura, sin contar las calaveritas una a una?

4. Calcula el número de ladrillos luminosos de la 3ª figura.

5. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos luminosos de la 4ª figura?

6. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos luminosos de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?

7. Calcula el número de ladrillos marrones de la 6ª figura.

8. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos marrones de la 12ª figura?

9. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos marrones de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

Rectángulo y círculos

Página 1. Rectángulo y círculos

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

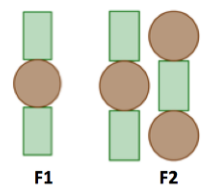
Grupo: ____________

Fecha: ____________

<u>**Instrucciones**</u>**:**

- **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Rectángulos y círculos



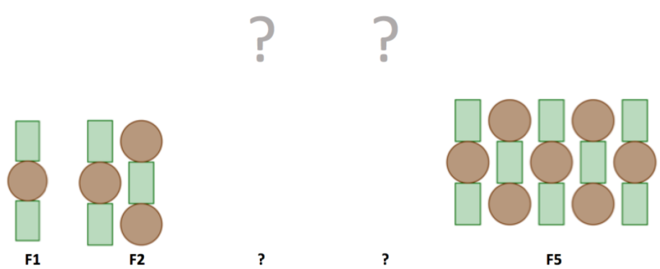
Página 2. Trabajo individual - Situación

Tenemos una serie de rectángulos y círculos arreglados como lo muestra la figura más abajo.

Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo, y en gran grupo.

Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicada por la profesora.

Enseguida te mostramos las dos primeras figuras y la quinta.



1. Calcula el número de rectángulos y de círculos de la figura 3.

2. ¿Tienes necesidad de realizar un dibujo para calcular el número de rectángulos y de círculos de la 4ª figura?

3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de rectángulos y círculos de la 5ª figura?

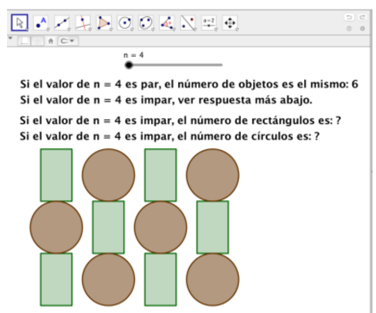
Página 3. Trabajo en equipo

4. Analizar el trabajo de tus compañeros para encontrar diferentes estrategias que te permitan de calcular el número rectángulos y de círculos de la 6ª figura. Escribe cada una de las estrategias.

5. Una vez que tengan sus estrategias, y que han decidido que son correctas, calcula con cada una de las estrategias el número de calaveritas, el número de los ladrillos luminosos y el número de rectángulos y de círculos de la 12ª figura. ¿Cuál es su resultado con cada estrategia que han utilizado? ¿Obtienen el mismo resultado con cada estrategia?

6. Ahora, calcula con tus estrategias el número de rectángulos y de círculos para la 13ª figura.

7. Utiliza la aplicación GeoGebra para verificar si sus estrategias corresponden a los resultados proporcionados por la aplicación GeoGebra. Si los resultados no corresponden, busca una explicación.



8. Una vez que hayas terminado la etapa precedente, proporciona a tus compañeros un procedimiento o una fórmula que les permita de calcular el número de rectángulos y de círculos para cualquier figura de acuerdo con la misma forma como lo han hecho antes.

Página 4. Discusión en gran grupo

9. Discusión de lo que han hecho los equipos en las primeras etapas. Intenta comprender los procedimientos de tus compañeros basado en la argumentación y la validación.

Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión

Un nuevo cuestionario será utilizado por cada alumno para trabajar en casa. Se trata de reconstruir los resultados que permitan de resolver la actividad.

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora
El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

Números triangulares

Página 1. Números triangulares

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

Grupo: ____________

Fecha: ____________

__**Instrucciones**__**:**

- **Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Números triangulares

Página 2. Trabajo individual - Situación

Hace mucho, mucho tiempo (hacia el año 520 antes de Cristo), un matemático llamado Pitágoras fundó una escuela en una isla de la Grecia antigua. Sus alumnos y él estaban fascinados por los números y la geometría. Uno de sus descubrimientos consistía en representar los números por figuras geométricas. Por ejemplo, ellos se percataron que ciertos números podían ser representados en triángulo. Ellos dirían que 1, 3, ?, ? y 10 son los primeros números triangulares ya que se pueden representar por puntos colocados en forma de triángulos, como se muestra enseguida.

		?	?	
Triangular 1	Triangular 2	Triangular ¿?	Triangular ¿?	Triangular 5

Primera actividad (Trabajo individual y luego en equipo)

1. Observa bien esos números. ¿Cuál es el 3er número triangular? Represéntalo. Explica la manera como lo has realizado.

2. ¿Te puedes imaginar el 4º número triangular sin realizar un dibujo?

Página 3. Trabajo ene quipo

3. De acuerdo con tu opinión, ¿cómo están construidos esos números triangulares? ¿Qué observas?

4. ¿Cuál es el 11º número triangular? Explica cómo puedes hacerlo para encontrarlo.

5. Tú debes escribir un mensaje CORTO a un amigo para describirle cómo realizar los cálculos para el triangular 83. Describe lo que le escribirías. NO TIENES NECECIDAD DE REALIZAR LOS CALCULOS.

6. Y para calcular cualquier número triangular, cómo se haría (se quisiera otra vez aquí otro mensaje CORTO).

Página 4. Trabajo individual

7. *Segunda actividad*

Utiliza las mismas ideas que has encontrado antes, pero esta vez, en un ambiente de tecnología (EXCEL). Ver la figura en Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombres polygonaux						
2	Position	1	2	3	4	5	
3	Triangulaire	1					
4							
5							

¿Qué harías para encontrar el 6º, 7º y 8º números triangulares?

Te es posible calcular:

El número triangular 30: ___________________________

El número triangular 83: ____________________________

El número triangular 120: __________________________

¿Cómo lo has realizado?

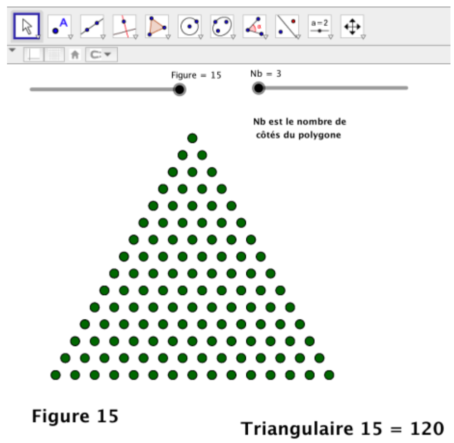
8. ¿Cuáles son las limitaciones y las posibilidades de esta forma de proceder?

9. Proporciona las operaciones para calcular cualquier número triangular.

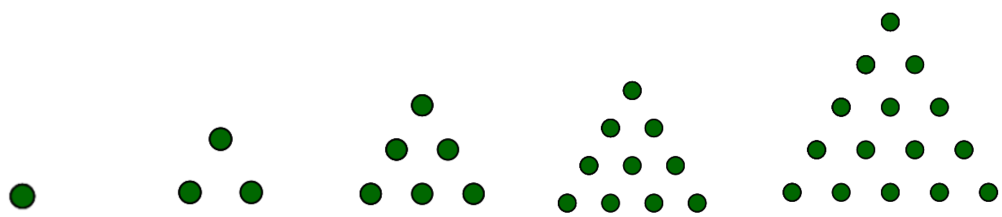
Página 5. Trabajo ene quipo

10. *<u>Tercera actividad</u>* (en equipo)

Utiliza la aplicación *GeoGebra* para esta tercera actividad. Solamente tienes que seleccionar el número triangular que deseas y la aplicación te mostrará el resultado.



a) En seguida mostramos los primeros cinco números triangulares:



Triangular 1 Triangular 2 Triangular ¿? Triangular ¿? Triangular 5

Encuentra una fórmula para calcular el valor numérico de cualquier número triangular. Tú puedes utilizar la aplicación Poly para ayudarte a encontrar la fórmula.

PROCEDIMIENTO (OPERACIONES)

Escribe la regla o fórmula que has encontrado:

Página 6. Trabajo ene quipo

11. Utilizando tu resultado, calcula los siguientes números triangulares.

Posición	Valor correspondiente
Triangular 10	
Triangular 20	

Con tu fórmula, ¿puedes calcular el número triangular 120?

Triangular 120 = ___________

Página 7. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

1 L L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS UN MILIEU SOCIOCULTUREL ET TECHNOLOGIQUE O

Chapitre théorique version en Espagnol seulement

Fernando Hitt[4], Samantha Quiroz Rivera[5]

Activités développées en lien avec ce chapitre dans d'autres études par :

Fernando Hitt[1], Samantha Quiroz Rivera[2], Mireille Saboya[1], Álvaro Bustos Rubilar[6], Zita Antun[1].

Les personnes et les tables

Page 1. Le restaurant de Marcel

Nom de l'élève :

____

Noms des membres de l'équipe :

____

____

____

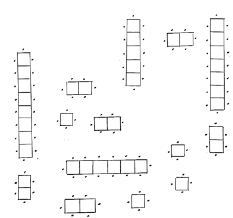
Groupe: __________

Date : ___________

Directives :

- **Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à l'encre noire ou bleue.**
- **Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à l'encre rouge.**
- **Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à l'encre verte.**

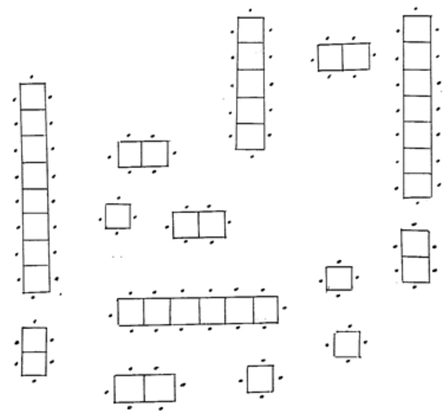
Les personnes et les tables



Page 2. Mise en situation (Travail individuel)

Marcel, le propriétaire d'un restaurant, dispose de tables simples dans son restaurant qu'il place l'une à côté de l'autre pour pouvoir placer ses clients lorsqu'ils arrivent. Il dispose ainsi de différentes tables de toutes sortes de grandeurs : des grandes, des petites, des moyennes… toujours disposées de la même façon.

[4] Département des Mathématiques, Université du Québec à Montréal.
[5] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila.
[6] Instituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso.



Marcel aimerait bien ne pas avoir à compter à chaque fois les clients qui arrivent pour décider autour de quelle table il les place. Marcel a besoin de ton aide. Il aimerait trouver une manière de calculer vite le nombre de clients qu'on peut asseoir autour d'une table, et ce, quelque soit la grandeur de la table et sans compter une à une les personnes.

1. Quel est le nombre de personnes que l'on peut asseoir autour de 3 petites tables ?

2. Si on cherche le nombre de personnes pour 4 petites tables, avez-vous besoin d'un dessin pour les trouver ou voyez-vous une façon rapide de procéder ?

3. Et pour 15 petites tables, pouvez-vous trouver une stratégie pour calculer rapidement le nombre de personnes que l'on peut asseoir sans avoir à les compter une à une et sans avoir à les dessiner ?

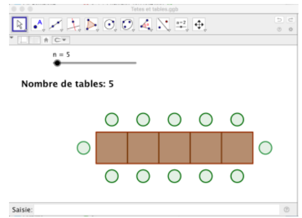
Page 3. Travail en équipe

4. En équipe, discutez des stratégies que vous avez trouvé précédemment pour calculer le nombre de personnes que l'on peut asseoir si on a 15 petites tables. Procédez-vous tous de la même façon ? Trouvez au moins 2 stratégies pour calculer le nombre de personnes pour 15 tables.

5. Une fois que vous avez écrit les différentes stratégies et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, utilisez chacune de ces stratégies pour calculer le nombre de personnes que l'on peut asseoir autour de 21 tables et de 54 tables.

Page 4. Travail en équipe

6. L'application GeoGebra vous donne le nombre de personnes que l'on peut asseoir pour n'importe quelle grandeur de table. Vous pouvez l'utiliser pour vérifier votre travail en 5.



7. Écrivez un message en mots à Marcel qui lui permet de calculer le nombre de personnes que l'on peut asseoir autour d'une table et ce, pour n'importe quelle table.

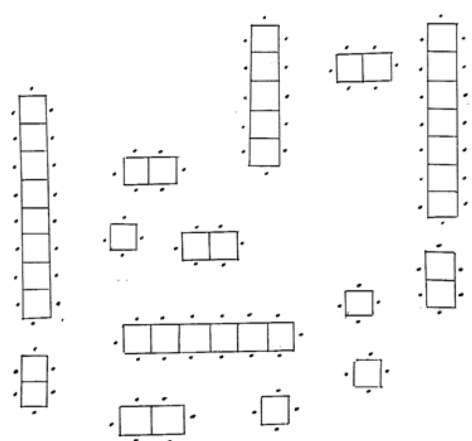
Suite : Discussion en grand groupe (commentaire pour l'enseignant(e))

Discussion de ce qui a été fait dans les premiers stades et recherche d'un consensus basé sur l'argumentation et la validation. Écrire au tableau les différentes stratégies ressorties, commencer si possible par celles qui sont erronées pour que les élèves les valident en grand groupe.

Toutes les productions des élèves sont collectées.

Page 5. Travail individuel – Autoréflexion – Le faire en classe

Marcel, le propriétaire d'un restaurant, dispose de tables simples dans son restaurant qu'il place l'une à côté de l'autre pour pouvoir placer ses clients lorsqu'ils arrivent. Il dispose ainsi de différentes tables de toutes sortes de grandeurs : des grandes, des petites, des moyennes… toujours disposées de la même façon.



Marcel aimerait bien ne pas avoir à compter à chaque fois les clients qui arrivent pour décider autour de quelle table il les place. Marcel a besoin de ton aide. Il aimerait trouver une manière de calculer vite le nombre de clients qu'on peut asseoir autour d'une table, et ce, quelque soit la grandeur de la table et sans compter une à une les personnes.

Remettre la mise en contexte (restaurant). Réponds sans technologie.

1. Calculer le nombre de personnes que l'on peut asseoir autour de 4 petites tables. Explicite la ou les stratégie(s) que tu as utilisée(s).

2. Calculer le nombre de personnes que l'on peut asseoir autour de 15 petites tables. Explicite la ou les stratégie(s) que tu as utilisée(s).

3. Calculer le nombre de personnes que l'on peut asseoir autour de 21 et de 54 petites tables. Explicite la ou les stratégie(s) que tu as utilisée(s).

4. Calculer le nombre de personnes que l'on peut asseoir autour de n'importe que nombre de petites tables. Explicite la ou les stratégie(s) que tu as utilisée(s).

Remarque. Une fois que les élèves ont répondu, l'enseignant(e) ramasse les copies. Ne pas les laisser aux élèves pendant l'institutionnalisation pour qu'ils n'écrivent pas sur leur feuille (on veut voir ce qu'ils sont capables de faire de façon individuelle après avoir vécu l'activité).

Suite - Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignant(e)

L'enseignant effectue une analyse des productions des élèves, mettant l'accent sur le processus d'évolution des représentations spontanées des élèves et leur approche des processus algébriques. Enfin, il fournit aux étudiants le processus algébrique en tant que processus de généralisation basé sur les processus numériques des étudiants et en arrivant à une expression algébrique qui permet le calcul direct.

Ici Samantha (le même jour que l'autoréflexion) fait une synthèse de ce qui est ressorti, elle reprend ce qui a été fait.

Bijoutière « El Dorado »

Page 1. Bijoutière « El Dorado »

Nom de l'élève :

____

Noms des membres de l'équipe :

____

____

____

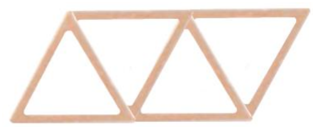
Groupe: ____________

Date : _____________

Directives :

- **Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à l'encre noire ou bleue.**
- **Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à l'encre rouge.**
- **Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à l'encre verte.**

Bijouterie « El Dorado »



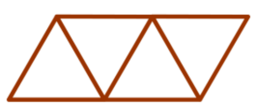
Page 2. Travail individuel

Dans la bijouterie du Mile-end appelée « El Dorado », Mme Saboya fabrique des chaînes en or à mailles de forme triangulaire comme celle-ci :

Elle fait des bracelets de différentes longueurs de chaîne. Mme Saboya achète les tiges d'or par pièce. Elle voudrait trouver le nombre de tiges dont elle a besoin sans être obligé de compter les tiges comme ça, une par une. Vous devez envoyer un message à Mme Saboya dans lequel vous allez lui expliquer comment elle pourrait faire pour trouver combien de tiges elle a besoin selon le nombre de mailles désirés sans être obligé de les compter une par une.

Nous vous montrons les deux premières figures et la 5e.

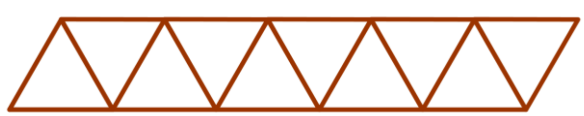
Chaîne 1



Chaîne 2

?

?



Chaîne 5

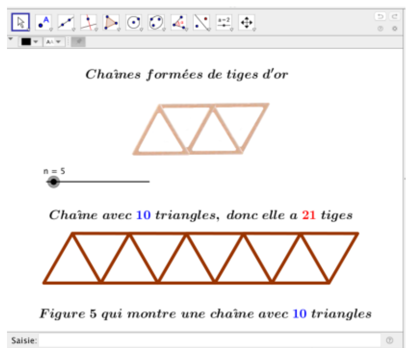
1. Calculer le nombre de tiges pour la 3e chaîne.
2. Avez-vous besoin d'un dessin pour calculer le nombre de tiges pour la 4e chaîne ?
3. Pouvez-vous trouver une stratégie pour calculer le nombre de tiges pour la 5e chaîne, sans compter une à une chaque tige ?

Page 3. Travail en équipe

4. Analyser le travail de vos collègues pour trouver différentes stratégies qui vous permettent de calculer le nombre de tiges de la 6e chaîne. Écrivez chacune des stratégies.

5. Une fois que vous avez vos stratégies, et vous avez décidé qu'elles sont correctes, calculez avec chacune d'elles la 12e chaîne. Quel est votre résultat avec chacune des stratégies que vous avez utilisées ? Est-ce que chacune des stratégies vous a donné le même résultat ?

6. Utilisez l'application GeoGebra pour vérifier si vos stratégies correspondent aux résultats fournis par l'application GeoGebra. Si les résultats ne correspondent pas, recherchez une explication.



7. Une fois que vous avez terminé l'étape précédente, fournissez aux autres collègues une procédure ou une formule qui vous permet de calculer le nombre de tiges de n'importe quelle chaîne.

Page 4. Discussion en grand groupe

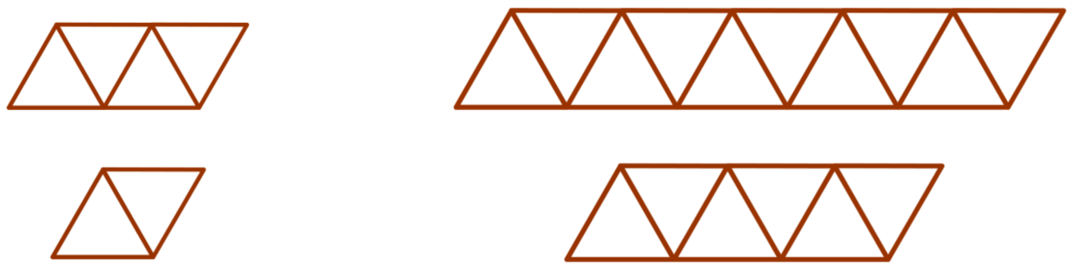
Discussion de ce qui a été fait dans les premiers étapes. Essayez de comprend les procédures de vos compagnons basé sur l'argumentation et la validation.

Page 5. Travail individuel - Autoréflexion

Dans la bijouterie du Mile-end appelée « El Dorado », Mme Saboya fabrique des chaînes en or à mailles de forme triangulaire comme celle-ci :

Elle fait des bracelets de différentes longueurs de chaîne. Mme Saboya achète les tiges d'or par pièce. Elle voudrait trouver le nombre de tiges dont elle a besoin sans être obligé de compter les tiges comme ça, une par une. Vous devez envoyer un message à Mme Saboya dans lequel vous allez lui expliquer comment elle pourrait faire pour trouver combien de tiges elle a besoin selon le nombre de mailles désirées sans être obligé de les compter une par une.

Nous vous montrons les deux premières figures et la 5^{e}.



1. Calculer le nombre de tiges pour la 4^{e} chaîne. Explique.

2. Calculer le nombre de tiges pour la 15^{e} chaîne. Explique.

3. Calculer le nombre de tiges pour la 21^{e} chaîne et pour la 54^{e} chaîne. Explique.

4. Fournissez aux autres collègues une procédure ou une formule qui vous permet de calculer le nombre de tiges de n'importe quelle chaîne.

Page 6. Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignant(e)

L'enseignant(e) effectue une analyse de la production des étudiants, mettant l'accent sur le processus d'évolution des représentations spontanées des élèves et leur approche des processus algébriques. Enfin, il fournit aux étudiants le processus algébrique en tant que processus de généralisation basé sur les processus numériques des étudiants et en arrivant à une expression algébrique qui permet le calcul direct.

Le carré bordé

Page 1. Le carré bordé

Nom de l'élève :

____

Noms des membres de l'équipe :

____

____

____

Groupe: ____________

Date : _____________

<u>Directives</u> :

- **Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à l'encre noire ou bleue.**
- **Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à l'encre rouge.**
- **Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à l'encre verte.**

Le carré bordé

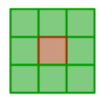


Figure 1

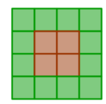


Figure 2

Page 2. Travail individuel

Un fournisseur de plancher en céramique vend des carrés d'une couleur et suggère qu'un motif agréable c'est celui de placer de carrés d'un autre couleur sur la bordure. Pour chaque figure que l'on peut faire avec les carrés (voir exemple plus bas), le fournisseur voudrait les placer dans une case avec le prix. Chaque carré de céramique à l'intérieur est actuellement de 2$, et chaque carré en bordure est de 3$. Comment pouvez-vous aider au fournisseur?

Vous êtes invité à effectuer un travail individuel, puis en équipe et après en grand groupe. Finalement un retour à une réflexion individuelle comme sera indiqué par l'enseignant.

Ensuite, nous vous montrons une série de carrés, et nous sommes intéressés à calculer le nombre de carrés autour du carré central.

Nous vous montrons les deux premières figures et la 5^{e}.

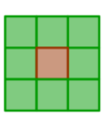


Figure 1

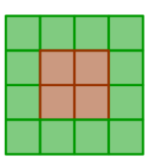


Figure 2

?

?

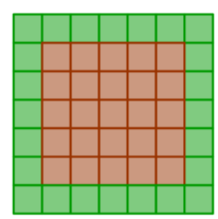


Figure 5

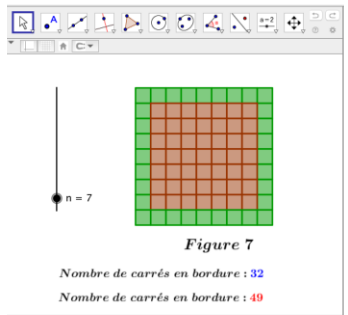
1. Calculer le nombre de carrés autour du carré central de la 3^{e} figure.
2. Avez-vous besoin d'un dessin pour calculer les carrés autour du carré central de la 4^{e} figure ?
3. Pouvez-vous trouver une stratégie pour calculer le nombre de carrés autour du carré central de la 5^{e} figure, sans compter les carrés autour de chacun d'un par un ?

Page 3. Travail en équipe

4) Analyser le travail de vos collègues pour trouver différentes stratégies qui vous permettent de calculer le nombre de carrés du 6e figure. Écrivez chacune des stratégies.

5) Une fois que vous avez vos stratégies, et vous avez décidé qu'elles sont correctes, calculez avec chacune d'elles le 12e figure. Quel est votre résultat avec chacune des stratégies que vous avez utilisées ? Est-ce que chacune des stratégies vous a donné le même résultat ?

6) Utilisez l'application GeoGebra pour vérifier si vos stratégies correspondent aux résultats fournis par l'application. Si les résultats ne correspondent pas, recherchez une explication.



7) Une fois que vous avez terminé l'étape précédente, fournissez aux autres collègues une procédure ou une formule qui vous permet de calculer le nombre de carrés autour de n'importe quelle figure avec la même forme avant travaillé.

Page 4. Discussion en grand groupe

Discussion de ce qui a été fait dans les premiers étapes. Essayez de comprend les procédures de vos compagnons basé sur l'argumentation et la validation.

Page 5. Travail individuel - Autoréflexion

Un nouveau questionnaire est utilisé par chaque élève pour travailler à la maison. Il s'agit de reconstruire les résultats qui permettent de résoudre l'activité.

Page 6. Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignant(e)

L'enseignant(e) effectue une analyse de la production des étudiants, mettant l'accent sur le processus d'évolution des représentations spontanées des élèves et leur approche des processus algébriques. Enfin, il fournit aux étudiants le processus algébrique en tant que processus de généralisation basé sur les processus numériques des étudiants et en arrivant à une expression algébrique qui permet le calcul direct.

Rectangles et les cercles

Page 1. Rectangles et les cercles

Nom de l'élève :

____

Noms des membres de l'équipe :

____

____

____

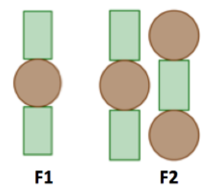
Groupe: __________

Date : __________

Directives :

- **Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à l'encre noire ou bleue.**
- **Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à l'encre rouge.**
- **Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à l'encre verte.**

Les rectangles et les cercles



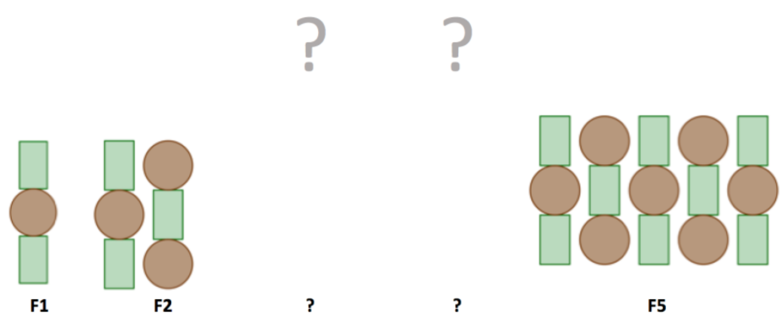
Page 2. Travail individuel

Nous avons une série de rectangles et cercles arrangés comme le montre les figures plus bas…

Tu-est invité à effectuer un travail individuel, puis en équipe et après en grand groupe. Finalement un retour à une réflexion individuelle comme sera indiqué par l'enseignant.

Ensuite, nous vous montrons une série de rectangles et cercles, et nous sommes intéressés à calculer le nombre de rectangles et cercles pour chaque figure.

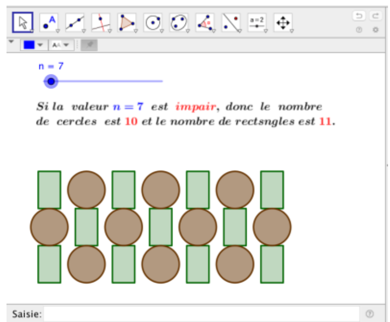
Nous vous montrons les deux premières figures et la 5e.



1. Calculer le nombre de rectangles et de cercles de la 3e figure.
2. As-tu besoin d'un dessin pour calculer les rectangles et les cercles la 4e figure ?
3. Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de rectangles et cercles de la 5e figure, sans compter les rectangles ni les cercles un à un ?

Page 3. Travail en équipe

4. Analyser le travail de tes compagnons pour trouver différentes stratégies qui te permettant de calculer le nombre de rectangles et de cercles de la 6e figure. Écrive chacune des stratégies.
5. Une fois que vous avez vos stratégies, et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, calculez avec chacune d'elles le nombre de rectangles et de cercles pour la 12e figure. Quel est votre résultat avec chacune des stratégies que vous avez utilisées ? Est-ce que chacune des stratégies vous a donné le même résultat ?
6. Maintenant calculez avec vos stratégies le nombre de rectangles et de cercles pour la 13e figure.
7. Utilisez l'application GeoGebra pour vérifier si vos stratégies correspondent aux résultats fournis par l'application GeoGebra. Si les résultats ne correspondent pas, recherchez une explication.



8. Une fois que tu as terminé l'étape précédente, fournis à tes compagnons une procédure ou une formule qui vous permet de calculer le nombre de rectangles ou de cercles pour n'importe quelle figure avec la même forme avant travaillé.

Page 4. Discussion en grand groupe

Discussion de ce qui a été fait dans les premiers étapes. Essaye de comprend les procédures de tes compagnons basé sur l'argumentation et la validation.

Page 5. Travail individuel, autoréflexion

Un nouveau questionnaire est utilisé par chaque élève pour travailler à la maison. Il s'agit de reconstruire les résultats qui permettent de résoudre l'activité.

Page 6. Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignant(e)

L'enseignant(e) effectue une analyse de la production des étudiants, mettant l'accent sur le processus d'évolution des représentations spontanées des élèves et leur approche des processus algébriques. Enfin, il fournit aux étudiants le processus algébrique en tant que processus de généralisation basé sur les processus numériques des étudiants et en arrivant à une expression algébrique qui permet le calcul direct.

Rectangles et les cercles

Page 1. Rectangles et les cercles

Nom de l'élève :

____

Noms des membres de l'équipe :

____

____

____

Groupe: ____________

Date : _____________

Directives :

- **Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à l'encre noire ou bleue.**
- **Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à l'encre rouge.**
- **Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à l'encre verte.**

Chemin dans le Jardin botanique

Page 2. Travail individuel

La Ville de Montréal se prepare pour son spectacle « Jardins de lumière » au Jardin Botanique.

Le directeur responsable du Jardin Botanique a décidé de faire le « Chemin de citrouilles » comme le montre la photo. Il veut mettre de citrouilles tout au long du chemin, de dalles vertes lumineuses pour montrer le chemin pendant la nuit, et de dalles marronnes pour le reste.

Le problème commence quand le directeur veut savoir le prix pour faire ce chemin, et faire un comptage des dalles lumineuses, de dalles marronnes et de citrouilles, pour les acheter.

Tu-est invité à effectuer un travail individuel, puis en équipe et après en grand groupe. Finalement un retour à une réflexion individuelle comme sera indiqué par l'enseignante.

Ensuite, nous te montrons un modèle qui a fait la compagnie de dalles et aussi la personne qui l'a faite a mis de cercles pour montrer où devraient être placés les citrouilles.

Le directeur est intéressé à calculer le nombre de dalles vertes, le nombre de dalles marronnes, le nombre de citrouilles en accord à chaque figure.

Nous te montrons les deux premières figures et la 5e.

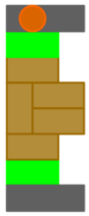


Figure 1

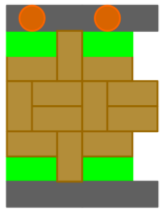


Figure 2

? ?

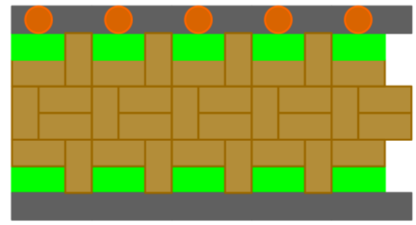
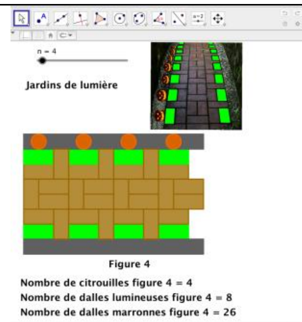


Figure 5

1. Calculer le nombre de citrouilles de la 3e figure.
2. As-tu besoin d'un dessin pour calculer les citrouilles de la 4e figure ?
3. Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de citrouilles de la 5e figure, sans compter les citrouilles une à une ?
4. Calculer le nombre de dalles lumineuses de la 3e figure.
5. As-tu besoin d'un dessin pour calculer les dalles lumineuses de la 4e figure ?
6. Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles lumineuses de la 5e figure, sans compter les dalles une à une ?
7. Calculer le nombre de dalles marronnes de la 3e figure.
8. As-tu besoin d'un dessin pour calculer les dalles marronnes de la 4e figure
9. Peux-tu trouver une stratégie pour calculer le nombre de dalles marronnes de la 5e figure, sans compter les dalles une à une ?

Page 3. Travail en équipe

10. Analyser le travail de tes compagnons pour trouver différentes stratégies qui te permettant de calculer le nombre de citrouilles, de dalles lumineuses et de dalles marronnes de la 6e figure. Écrive chacune des stratégies.
11. Une fois que vous avez vos stratégies, et que vous avez décidé qu'elles sont correctes, calculez avec chacune d'elles le nombre de citrouilles, de dalles lumineuses et de dalles marronnes pour la 12e figure. Quel est votre résultat avec chacune des stratégies que vous avez utilisées ? Est-ce que chacune des stratégies vous a donné le même résultat ?
12. Utilisez l'application GeoGebra pour vérifier si vos stratégies correspondent aux résultats fournis par l'application GeoGebra. Si les résultats ne correspondent pas, recherchez une explication.



13. Une fois que tu as terminé l'étape précédente, fournis à tes compagnons une procédure ou une formule qui vous permet de calculer le nombre de citrouilles, de dalles lumineuses et de dalles marronnes pour n'importe quelle figure en accord à la même forme avant travaillé.

Page 4. Discussion en grand groupe

Discussion de ce qui a été fait dans les premiers étapes. Essaye de comprend les procédures de tes compagnons basé sur l'argumentation et la validation.

Page 5. Travail individuel - Autoréflexion

Un nouveau questionnaire est utilisé par chaque élève pour travailler à la maison. Il s'agit de reconstruire les résultats qui permettent de résoudre l'activité.

Ajouter la question : Si le directeur veut calculer le total de dalles pour chaque figure, peux-tu calculer sans compter le nombre total de dalles pour chaque figure ?

Page 6. Processus d'institutionnalisation mené par l'enseignant(e)

L'enseignant(e) effectue une analyse de la production des étudiants, mettant l'accent sur le processus d'évolution des représentations spontanées des élèves et leur approche des processus algébriques. Enfin, il fournit aux étudiants le processus algébrique en tant que processus de généralisation basé sur les processus numériques des étudiants et en arrivant à une expression algébrique qui permet le calcul direct.

Les nombres triangulaires

Page 1. Les nombres triangulaires

Nom de l'élève :

____

Noms des membres de l'équipe :

____

____

____

Groupe: ____________

Date : _____________

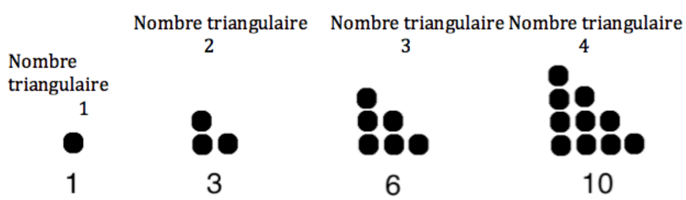
<u>Directives</u> :

- **Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à l'encre noire ou bleue.**
- **Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à l'encre rouge.**
- **Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à l'encre verte.**

Les nombres triangulaires

Page 2. Travail individuel

Il y a très très très longtemps (vers l'an 520 avant JC), un mathématicien du nom de Pythagore fonda une école dans une île dans la Grèce antique. Ses élèves et lui étaient fascinés à la fois par les nombres et par la géométrie. Une de leur découverte consistait à représenter les nombres par des figures géométriques. Par exemple, ils s'aperçurent que certains nombres pouvaient être représentés par des triangles. Ils diront que 1, 3, 6 et 10 sont les quatre premiers nombres triangulaires parce qu'on peut les représenter par des points disposés en triangles comme ci-dessous :



<u>Première activité</u> **(d'abord individuel puis en équipe)**

1. Observe bien ces nombres. Quel est le cinquième nombre triangulaire ? Représente-le. Explique la façon dont tu as procédé.

Page 3.

2. D’après toi comment sont construits ces nombres triangulaires ? Qu’observes-tu ?

3. Quel est le 11ième nombre triangulaire ? Explique comment tu fais pour le trouver.

4. Tu dois écrire un courriel COURT à un ami pour lui décrire comment procéder pour calculer le nombre triangulaire 83. Décris ce que tu lui écrirais. TU N’AS PAS À FAIRE LES CALCULS !

Page 4.

5. Et pour calculer n’importe quel nombre triangulaire, comment ferait-on (on veut encore ici un message COURT).

Page 5. Travail en équipe

<u>Deuxième activité</u> **(en équipe)**
Utilise les mêmes idées que tu as trouvées précédemment, mais cette fois-ci dans un environnement technologique (EXCEL). Voici ce que tu dois trouver :

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombres polygonaux						
2	Position	1	2	3	4	5	
3	Triangulaire	1					
4							
5							

Que fais-tu pour trouver le 6ième, 7ième et 8ième nombres triangulaires ?
Est-il possible de calculer :

le nombre triangulaire 30 : ____________________________

le nombre triangulaire 83 : _____________________________

le nombre triangulaire 120 : ___________________________

<u>Comment as-tu procédé</u> ?

Quelles sont les limitations et les possibilités de cette façon de procéder ?

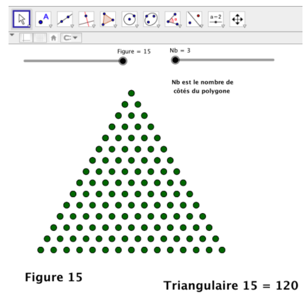
Page

Donne les opérations à faire pour calculer n’importe quel nombre triangulaire.

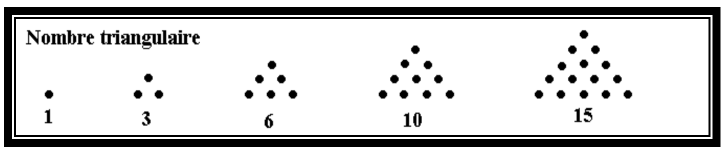
Page 7. Travail en équipe

<u>Troisième activité</u> **(en équipe)**

Utilise l'applet des nombres polygonaux pour cette troisième activité. Tu as juste utiliser les barres de défilement pour visualiser chaque nombre polygonaux désiré et *GeoGebra* va le générer (voir figure).



a) Voici les cinq premiers nombres triangulaires.



Trouve une formule pour calculer la valeur numérique de n'importe quel nombre triangulaire. Tu peux utiliser le logiciel Poly pour t'aider à trouver la formule.

DÉMARCHE (OPÉRATIONS, DESSINS,…)

Écris la règle ou formule que tu as trouvée :

Page 8.

En utilisant ton résultat, calcule les suivantes nombres triangulaires.

Position	Valeur correspondante
Triangulaire 10	
Triangulaire 20	

Avec ta formule, peux-tu calculer le nombre triangulaire 120 ?

Triangulaire 120 = ___________

2 DISTINCIÓN ENTRE EJERCICIO, PROBLEMA Y SITUACIÓN PROBLEMA EN UN MEDIO TECNOLÓGICO Y EJEMPLOS EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS

Actividades capítulo 2: Guía para el profesor

José Luis Soto Munguía[7], Fernando Hitt Espinosa[8], Samantha Quiroz Rivera[9]

La visualización matemática es una habilidad que se puede desarrollar en los alumnos, para mayor precisión, ver capítulo 2: Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos, en donde se discuten los trabajos de investigación de Krutetski 1976, Presmeg, Eisenberg & Dreyfus 1991, Zimmerman & Cunninham 1991, entre otros. Es por ello que es importante proponer actividades en acorde a esta habilidad, como lo ha propuesto el propio Krutetski.

A continuación se presentan algunas actividades que van da acuerdo a lo señalado en el capítulo 2 del libro: *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico*.

Actividad en lápiz y papel

Página 1. Cálculo de la distancia entre los centros de dos círculos particulares

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

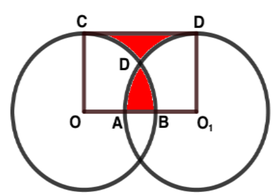
Grupo: ____________

Fecha: ____________

<u>**Instrucciones**</u>:

- **Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Cálculo de la distancia entre O y O'

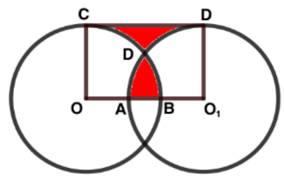


---

[7] Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
[8] Département des Mathématiques, Université du Québec à Montréal.
[9] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila.

Página 2. Situación y reflexión individual

Se considera el diagrama siguiente, en el cual las dos figuras sombreadas tienen la misma área. Se solicita encontrar el valor de la distancia entre el centro del círculo O y el centro del círculo O'.



Página 3. Trabajo individual

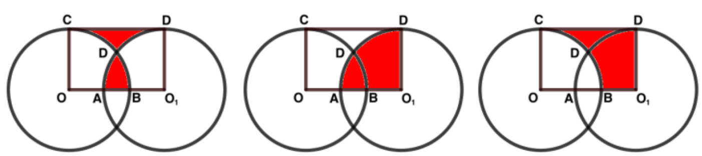
Discute con tus compañeros de equipo las diferentes estrategias utilizadas y verifica que han obtenido el mismo resultado.

Si no han obtenido el mismo resultado, discutir sobre los posibles errores cometidos, hasta llegar a un consenso.

Página 4. Trabajo en gran grupo

Los alumnos presentan sus resultados y los validan ellos mismos, hasta llegar a un consenso del resultado y/o demostración.

El profesor proporciona la respuesta correcta, realizando un proceso visual como el señalado en el capítulo (ver figura más abajo) y proporcionando el proceso numérico asociado al visual.



Área del rectángulo igual a dos veces el área de la cuarta parte del círculo unitario, por lo tanto, área igual $2(\pi/4) = \pi/2$. Dado que el lado del rectángulo mide 1, la distancia solicitada es $\pi/2$.

Actividad en lápiz, papel, regla, tijeras y tecnología

Nuevamente en un proceso de visualización matemática, Polya propuso su problema que tiene varias soluciones. Nosotros solamente hemos mostrado una.

Página 1. Dividir el área de una cruz en tres partes para formar un rectángulo

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

Grupo: ____________

Fecha: ____________

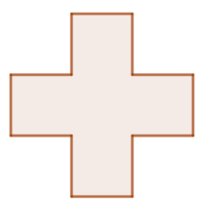
Instrucciones:

- **Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Dividir la cruz para formar un rectángulo

Página 2. Situación y reflexión individual

Exclusivamente con dos cortes se debe cortar la cruz que se presenta a continuación de manera que se obtengan dos cuadrados de área igual que puedan formar un rectángulo al unirse.



Página 3. Trabajo en equipo

Discute con tus compañeros de equipo las diferentes estrategias utilizadas y verifica que han obtenido el mismo resultado.

Si no han obtenido el mismo resultado, discutir sobre los posibles errores cometidos, hasta llegar a un consenso.

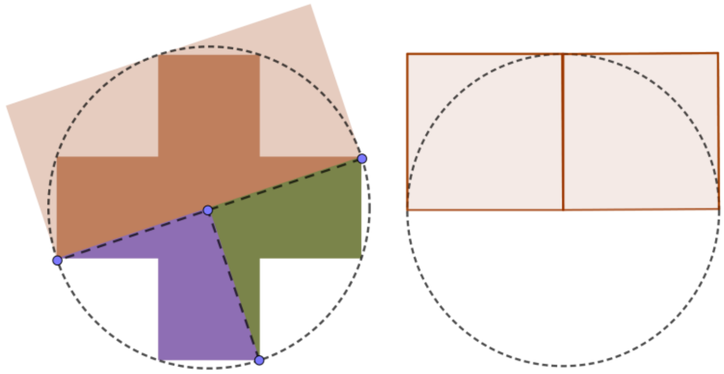
En caso necesario, utiliza el archivo *GeoGebra* que acompaña la actividad, para que les permita simular cortes para visualizar alguna estrategia.

Página 4. Trabajo en gran grupo

Los alumnos presentan sus resultados y los validan ellos mismos, hasta llegar a un consenso del resultado y/o demostración.

En caso necesario, permitirles a los expositores de utilizar el archivo *GeoGebra* que acompaña la actividad, para que les permita simular cortes para visualizar la estrategia sugerida por los equipos.

El profesor proporciona la respuesta correcta, realizando un proceso visual como el señalado en el capítulo (ver figura más abajo) y proporcionando el proceso numérico asociado al visual.



Actividad en lápiz, papel, regla y un trozo cuadrado de papel

<table>
<tr><th colspan="2">Página 1. Doblez de un trozo de papel (parte 1)</th></tr>
<tr>
<td>Nombre del alumno:

____

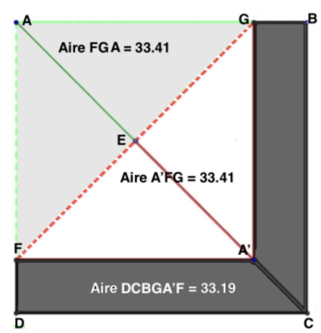
Nombre de los miembros del equipo:

____

____

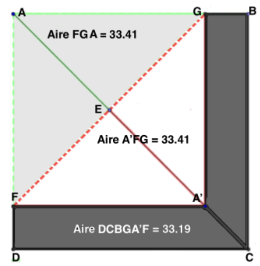
____

Grupo: ____________

Fecha: ____________</td>
<td><u>Instrucciones</u>:
▪ Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.
▪ Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.
▪ En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.
Doblez de un trozo de papel cuadrado

</td>
</tr>
</table>

Página 2. Situación y reflexión individual

Un trozo cuadrado de papel ABCD es blanco por enfrente y obscuro por el reverso, tiene un área de 20 cm^2. La esquina D es doblada sobre el punto A´ que permanece sobre la diagonal AC, de tal modo que el área visible total es ½ de color blanco y ½ de color negro. ¿A qué distancia está A´ de la línea del doblez?



Página 3. Trabajo en equipo

Discute con tus compañeros de equipo las diferentes estrategias utilizadas y verifica que han obtenido el mismo resultado.

Si no han obtenido el mismo resultado, discutir sobre los posibles errores cometidos, hasta llegar a un consenso.

Página 4. Trabajo en gran grupo

Los alumnos presentan sus resultados y los validan ellos mismos, hasta llegar a un consenso del resultado y/o demostración.

El profesor proporciona la respuesta correcta, realizando un proceso visual como el señalado en el capítulo (ver figura más abajo) y proporcionando el proceso numérico asociado al visual.

Sea $x = \overline{DG}$. El área del triángulo ΔFDG (rectángulo isósceles) es un tercio de 400 cm^2. O sea $\frac{base \times altura}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{400}{3}$. Lo cual implica $x = 20\sqrt{\frac{2}{3}} \cong 16.33$. Debemos calcular la diagonal del cuadrado construido con el doblez y dividir entre dos. $\frac{Diagonal}{2} = \frac{\sqrt{x^2+x^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,x}{2} \cong 11.55$. Respuesta 11.55 cm.

Actividad en lápiz, papel, regla, una hoja de papel tamaño carta y tecnología

Página 1. Doblez de una trozo de papel

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

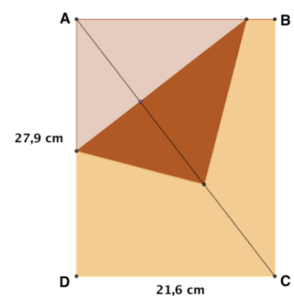
Grupo: ____________

Fecha: ____________

Instrucciones:

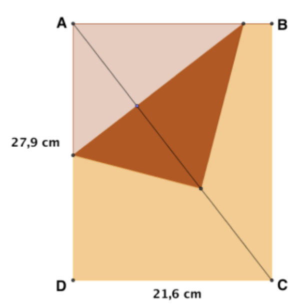
- **Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Doblez de una hoja de papel



Página 2. Situación y reflexión individual

Se toma una hoja de papel y se traza una diagonal. Considerando dos extremos opuestos, se dobla la esquina (digamos A) de la hoja de manera que esa esquina A recorra la diagonal AC (ver Figura) y de que el área de la superficie del triángulo formado al doblar el papel (superficie obscura), sea igual al área del hexágono irregular (superficie más clara) formado una vez realizado el doblez. ¿A qué distancia de la línea del doblez se encuentra el punto A cuando la igualdad se ha alcanzado? ¿Cuál es el área del triángulo que deberá ser igual al área del hexágono irregular?



Página 3. Situación y reflexión individual

a) Es conveniente la construcción de una estrategia para atacar el problema.

b) El uso de una hoja de papel es un buen comienzo para iniciar la modelación de la situación.

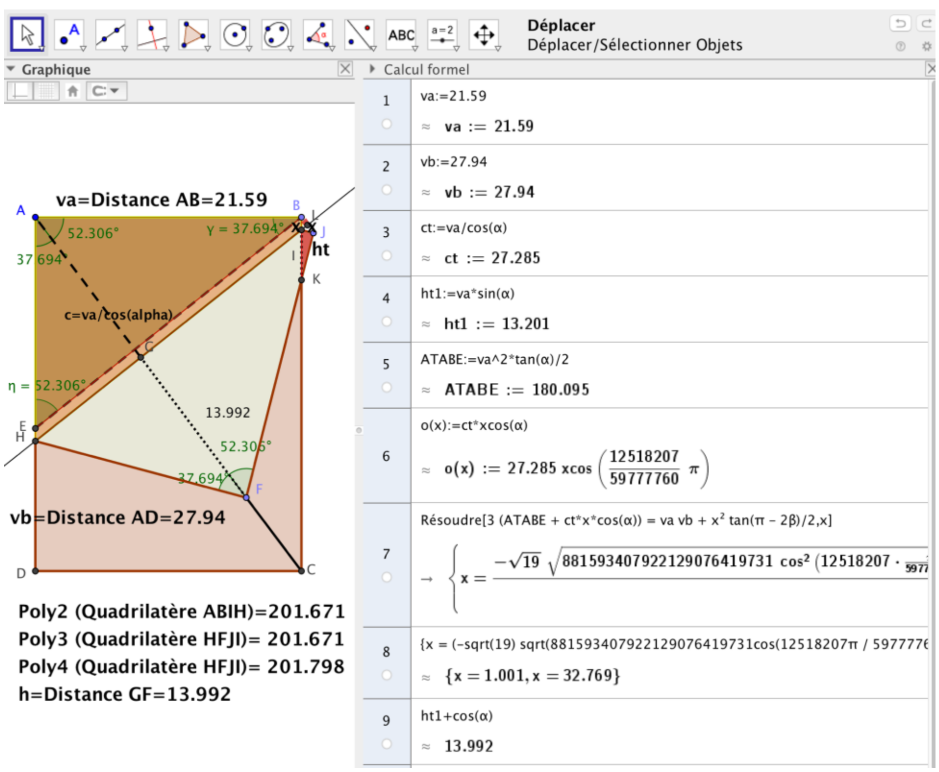
c) Utilice una notación adecuada que le permita modelar la situación.

Página 4. Situación y discusión en equipo
d) ¿Se ha llegado a una estrategia adecuada en la discusión en equipo?
e) ¿Es posible modelar la situación?
f) ¿Sería conveniente el uso de tecnología que pudiera proporcionar más información para la posible solución del problema? (por ejemplo, el uso de GeoGebra)

Página 5. Situación y discusión en equipo y enseguida en gran grupo
a) Si se hubiera llegado a una solución desde un punto de vista visual con tecnología, ¿sería posible encontrar una justificación algebraica?

Una vez llegado a un consenso en el aula, el profesor recoge todo lo realizado por los alumnos y solicita que rehagan la actividad como un proceso de autorreflexión (individual) solicitando al estudiante la reproducción de los resultados encontrados en la discusión en gran grupo.

Posterior a esta etapa, el profesor puede proporcionar una demostración del resultado (consultar archivo correspondiente), tomando en consideración las producciones de los alumnos.



El doblez está a una distancia de 13,992 cm de la punta F de la hoja (ver figura).

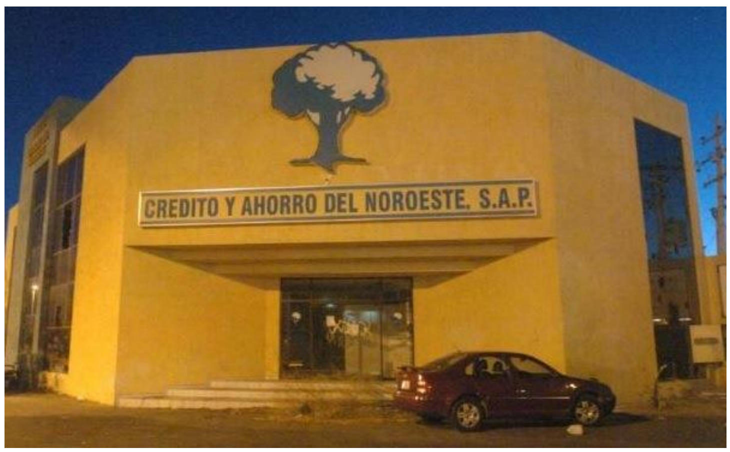
Las pirámides financieras

Material necesario para la secuencia:

1. Una computadora por equipo, con GeoGebra instalado.

Inicio

Actividad 1. Trabajo individual



Los fraudes financieros piramidales, conocidos también como Esquemas Ponzi, deben su nombre a un estafador de ascendencia italiana, radicado en Boston, quien se enriqueció en 1920, con una compañía de inversiones a costa de la ruina de sus inversionistas. Los Esquemas de Ponzi tienen un mecanismo de funcionamiento muy sencillo:

Los primeros inversionistas obtienen atractivas ganancias, gracias a los recursos aportados por nuevos clientes, casi siempre convencidos por estos primeros. Para que el sistema funcione se requiere entonces que exista siempre gente dispuesta a invertir, pero llega un momento en el que ya no hay manera de conseguir quien invierta, entonces la empresa se colapsa.

Aunque el truco parece bastante burdo, año con año surgen en todo el mundo nuevas variantes de los esquemas de Ponzi, estafando a grandes cantidades de ciudadanos incautos. Uno de los casos más impresionantes se presentó en Albania[10] en 1997, el colapso de las empresas financieras fraudulentas, perjudicaron a las dos terceras de la población, provocaron la insurrección de la población y la caída del gobierno en turno.

[10] Una descripción más detallada del caso puede verse en: Christopher Jarvis, C. The Rise and Fall of Albania's Pyramid Schemes. Finance & Development [en línea]. Marzo de 2000, Vol. 37, No. 1. [Fecha de consulta: 18 de octubre de 2018]. Disponible en: http://www.imf.org/external/pubs/ft/fandd/2000/03/pdf/jarvis.pdf.

1. Si estás de acuerdo en que una financiera piramidal colapsará tarde o temprano, explica cuál será la causa principal del colapso:

____

____

____

Desarrollo

Actividad 2. Trabajo en equipo

Veremos aquí cómo funcionan las cadenas de inversión financiera y por qué invariablemente resultan fraudulentas.

Para explicar el funcionamiento de estas pirámides, usaremos el ejemplo hipotético de una empresa que se funda en la Ciudad de Hermosillo para dedicarse a este negocio.

Una persona, de nombre Timoteo Vil, conocido en el bajo mundo como Timo Vil, crea una “empresa de inversión” y la titula Dinero Gratis. La empresa vende bonos de inversión de $5000.00 con la promesa de regresar al mes la inversión con un 100% de ganancia, es decir $10000 en total; la única condición para pagar los $10000 al inversionista, es que éste lleve a la empresa otros cuatro inversionistas, que compren también un bono de $5000.00 cada uno, sujetos a las mismas reglas de inversión.

Supongamos que en la Cd. de Hermosillo existen aproximadamente 100 000 personas con la disposición y los fondos para invertir en la empresa Dinero Gratis. Como puede verse en la Tabla 1, la empresa inicia con Don Timo y cuatro inversionistas que aportan 5 mil pesos cada uno. El mes siguiente estos cuatro inversionistas consiguen otros cuatro cada uno, es decir hay 4^2 nuevos inversionistas. Al final del primer mes, los cuatro primeros han cumplido su trato, por lo cual reciben 10 mil pesos cada uno, es decir $4^1 \times 10$ miles de pesos entre todos, Don Timo en cambio recibe $4^2 \times 5$ miles de pesos de los 16 nuevos inversionistas.

En la Tabla 1 se muestra cómo evoluciona, durante los primeros cuatro meses, la situación financiera de Dinero Gratis.

Mes	Personas involucradas	Ingresos de la empresa	Egresos de la empresa	Ganancias de la Empresa
0	$1 + 4^1 =$	$4^1 \times 5 =$	0	
1	$1 + 4^1 + 4^2 =$	$4^2 \times 5 =$	$4^1 \times 10 =$	
2	$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 =$	$4^3 \times 5 =$	$4^2 \times 10 =$	
3	$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 =$	$4^4 \times 5 =$	$4^3 \times 10 =$	
4	$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 =$	$4^5 \times 5 =$	$4^4 \times 10 =$	

Tabla 1. Los ingresos, egresos y ganancias en miles de pesos

2. Analiza en tu equipo los cálculos indicados en cada columna y expliquen por qué las indicaciones son coherentes con el funcionamiento de la empresa.

En la Tabla 1 puede observarse que los cálculos de cada renglón están relacionados con los cálculos del renglón siguiente. Fijemos la atención particularmente en la segunda columna, para la cual los cálculos pudieran ser más laboriosos, habría por lo menos dos maneras de realizar estos cálculos:

Método 1. Las series de la segunda columna se denominan *series geométricas* y existe una fórmula para calcular esta suma, hasta el $(n+1)-$ésimo término.

3. Investiguen en internet la fórmula

$$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad (1)$$

y úsenla para realizar los cálculos de la columna 2, solicitados.

Método 2. Si

$$S_3 = 1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4$$
$$\text{y } S_4 = 1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5,$$

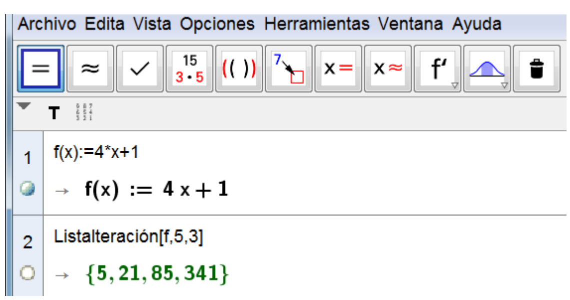
entonces la relación más simple entre S_3 y S_4, puede escribirse como:

$$S_4 = S_3 + 4^5, \qquad (2)$$

aunque también la relación podría establecerse como:

$$S_4 = 1 + 4(1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4) = 1 + 4S_3 \qquad (3)$$

Esta última relación parece más complicada que (2), pero tiene la ventaja de que puede ser automatizada fácilmente en un Sistema de Cálculo Simbólico (CAS por sus siglas en Inglés). En la vista "Cálculo Simbólico" de GeoGebra, por ejemplo, capturamos en dos renglones:



En el primer renglón hemos definido la función f(x):=4x+1, como lo haríamos con cualquier función, excepto porque usamos el símbolo ":=" (que significa sustitución), en lugar del signo "=", pero en el segundo renglón el comando "ListaIteración(<Función>, <Valor inicial>, <Número de iteraciones>)", para capturar el renglón "ListaIteración(f, 5, 3)" lo que indica al CAS que tome el valor inicial $x = 5$, y luego itere los cálculos 3 veces, GeoGebra hará los siguientes cuatro cálculos:

$$x = 5$$
$$f(5) = 4(5) + 1 = 21$$
$$f(21) = 4(21) + 1 = 85$$
$$f(85) = 4(85) + 1 = 341$$

4. Usen el Cálculo Simbólico de GeoGebra para llenar la Tabla 1.
5. ¿Cuál de los dos métodos prefieren usar para hacer los cálculos? Justifiquen su respuesta.

____

____

____

6. Luego usen cualquiera de los dos métodos para continuar con los cálculos extendiendo la Tabla 1 (añadiendo renglones). Respondan en su equipo la pregunta: ¿hasta qué mes habrá que extender la Tabla 1, para explicar el colapso de Dinero Gratis?

____

____

____

7. ¿Cuál es la causa principal del colapso de la empresa?

____

____

____

8. ¿Cuál es el total de personas que invierten en Dinero Fácil?

____

____

____

9. ¿Cuántos de los inversionistas obtienen los $10000 prometidos?

10. ¿Cuántos de los inversionistas pierden su inversión?

11. ¿Cuál es el monto de la ganancia obtenida por Don Timo Vil, antes de darse a la fuga?

12. Supongamos que tu equipo recibe un correo electrónico de alguien que quisiera invertir en una empresa financiera piramidal como la mencionada aquí. Redacten (en media cuartilla) equipo la respuesta que darían al correo electrónico.
13. Expongan ante el resto del grupo la respuesta redactada.

Cierre

Actividad 3. Trabajo grupal

En el problema planteado aquí la solución depende en gran parte de que podamos sumar los términos de una progresión geométrica, usualmente a esta suma se le llama *serie geométrica*.

Mientras que una progresión geométrica, tiene la forma:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n$$

Una serie geométrica tiene la forma:

$$a + ar + ar^2 + \ ar^3 +, \dots, +ar^n$$

Aunque en el problema abordado aquí, $a = 1$, $r = 4$ y n era un número por determinar.

Puesto que esta serie puede escribirse en forma factorizada como:

$$a(1 + r + r^2 + \ r^3 + \ \dots + r^n),$$

donde a es una constante, el problema se reduce prácticamente a calcular $(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n)$

El **Método 1** está basado en que se puede encontrar una expresión algebraica para S, en donde:

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$$

Pero si multiplicamos S por r, tendremos:

$$rS = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}$$

Y restando S de rS, obtenemos:

$$\begin{aligned} rS &= \quad r + r^2 + r^3 +, \ldots, + r^n + r^{n+1} \\ -S &= -1 - r - r^2 - r^3 -, \ldots, -r^n \\ rS - S &= -1 \qquad\qquad\qquad\qquad + r^{n+1} \end{aligned}$$

Luego factorizando S en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$$S(r-1) = -1 + r^{n+1}$$

O bien:

$$S = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Y concluimos finalmente que

$$aS = a(1 + r + r^2 + r^3 +, \ldots, + r^n) = a + ar + ar^2 + ar^3 +, \ldots, + ar^n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

En cambio, en el **Método 2**, se ha introducido una función recursiva para realizar los cálculos con ayuda de GeoGebra. Una función como ésta puede introducirse porque la suma de la serie geométrica hasta el n-ésimo término, puede hacerse depender de la suma hasta el término anterior, es decir:

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n,$$

puede escribirse como:

$$S_n = 1 + r(1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}),$$

y por lo tanto:

$$S_n = 1 + rS_{n-1},$$

lo cual nos permite definir la función recursiva:

$$f(x) := 1 + rx.$$

14. Abre la vista “CAS” de GeoGebra y captura en un renglón la expresión “f(x):=10x +1" y oprime la tecla “enter”, en un segundo renglón captura la expresión “ListaIteración(f, 1, 10)” e igualmente oprime la tecla “enter”. ¿A qué serie geométrica corresponden los valores que GeoGebra está calculando?

3 EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN UN MEDIO SOCIOCULTURAL Y TECNOLÓGICO

Actividades capítulo 3: Guía para el profesor

Samantha Quiroz Rivera[11], Fernando Hitt[12], Álvaro Bustos Rubilar[13] Mireille Saboya[12], Zita Antoun[12]

Introducción

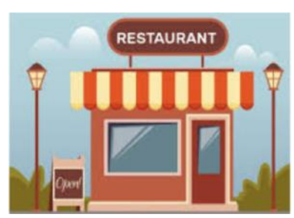
La literatura actual en didáctica de las matemáticas señala la importancia de promover el desarrollo de estrategias en los procesos de generalización en edades tempranas. Se sabe que niños en los primeros años de primaria son capaces de conjeturar y construir estrategias ligadas a la generalización en la resolución de problemas.

En este sentido, se diseñaron una serie de actividades para utilizar en el aula de matemáticas con el fin de promover la generalización como preludio al aprendizaje del álgebra (ver el conjunto completo de actividades que se desarrollaron por el equipo arriba mencionado). A continuación, se muestra una de esas actividades.

El restaurante de Marcelo

<table>
<tr><th colspan="2">Página 1. El restaurante de Marcelo</th></tr>
<tr>
<td>Nombre del alumno:
____

Nombre de los miembros del equipo:
____
____
____

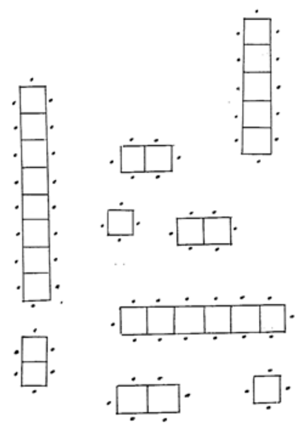
Grupo: ____________
Fecha: ____________</td>
<td><u>Instrucciones</u>:
Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma negra o azul.
Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.
Después de discutir con el grupo, si tú modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.
El restaurante de Marcelo

</td>
</tr>
</table>

[11] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila.
[12] Département des Mathématiques, Université du Québec à Montréal.
[13] Instituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso.

Página 2. Trabajo individual

Página 1 – Situación

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que coloca en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los pondrá. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin tener la necesidad de contar cada vez el número de sillas.

1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas ?

2. Si buscamos el número de personas para colocar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o sabrías aguna manera rápida de hacerlo ?

3. Y para 15 mesas, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápìdamente el número de personas sin necesidad de dibujar

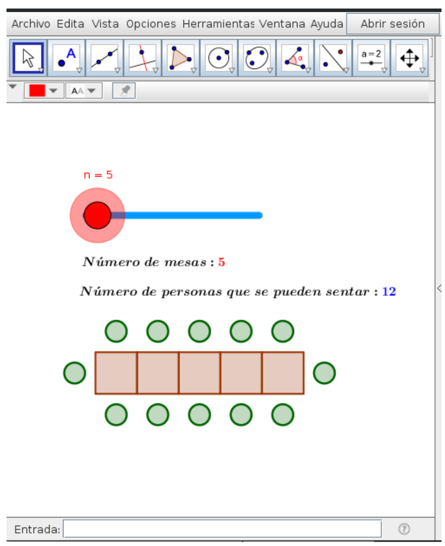
Página 3. Trabajo en equipo

4. En equipo, discute las estrategias que usaste para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿todos usaron la misma estrategia? Encuentra al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.

5. Una vez que escribiste las estrategias y que vieron que son correctas, utiliza alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

Página 4. Trabajo en equipo

6. La aplicación GeoGebra te mostrará el número de personas que se pueden sentar alrededor de las mesas no importa que tan grandes sean. Utilízalo para verificar tus respuestas del problema 5.

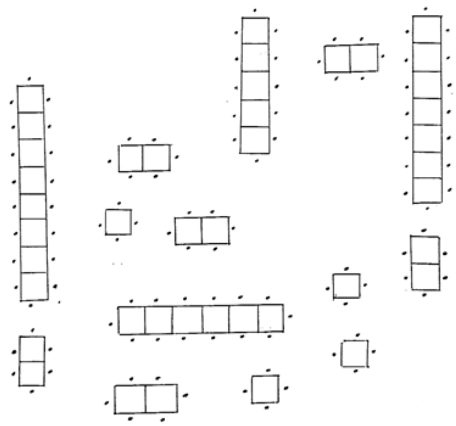


7. Escribe un mensaje escrito a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.

8. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar.

Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que ubica en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber donde los podrá colocar. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin contar las sillas.

1. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 4 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
2. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 15 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
3. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 21 mesas y después de 54 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
4. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora
El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

4 ENTENDIMIENTO DE POSTULADOS BÁSICOS DE LA PERSPECTIVA DE MODELOS Y MODELACIÓN POR PROFESORES EN FORMACIÓN

Actividades capítulo 4: Guía para el profesor

Verónica Vargas-Alejo[14], César Cristóbal-Escalante[15]

Actividad Provocadora de Modelos [APM] “El Hotel”.

La información que se proporciona a los estudiantes para realizar esta actividad es la que muestran las Figuras 1, 2 y 3. No se da más, y no se restringe a los estudiantes en el uso de recursos que consideren útiles para responder lo que se pide. Esta actividad se basa en Aliprantis y Carmona (2003).

Actividad propuesta

¡Al agua patos!

Chetumal, Quintana Roo. ¡Que vengan los bomberos que me estoy quemando! Así, igual como dice esta canción nos encontramos todos los habitantes de esta hermosa ciudad al estar pasando uno de los veranos más cálidos de los últimos años.

Por esta razón es que hoy les hablaré de una excelente opción para divertirse sanamente con la familia en estos días de tanto calor: el Parque Ecológico de Xul-Ha. Este parque se encuentra muy bien ubicado, a un kilómetro de la ciudad, rumbo al pueblo mágico de Bacalar.

El parque cuenta con tirolesas, albercas de distintas profundidades, cada una con toboganes que harán la delicia de aquellos lugares para quienes les gustan las emociones fuertes. También podemos disfrutar del acceso a la laguna de Bacalar tanto para nadar como para divertirse con el uso de balsas y kayak. Rentamos chalecos salvavidas, pero sobretodo tenemos vigilancia extrema en el área de las albercas y la laguna para que usted pueda sentirse seguro de que su familia pasará un día inolvidable sin contratiempos.

Pero eso no es todo, encontraremos además áreas verdes con juegos infantiles, tienda de recuerdos, agencia de turismo y restaurante de riquísima comida propia del Caribe mexicano.

Para las familias que deseen disfrutar de la diversión que ofrece el parque por más de un día, el Parque cuenta con servicio de hotel. Son cuarenta limpias y bonitas habitaciones, todas ellas con aire acondicionado, televisión e internet, las cuales se ponen a disposición de los visitantes.

Por todo lo anterior, les recomiendo ampliamente que visiten el Parque Ecológico de Xul-Ha, se divertirán además de que fomentarán el desarrollo de este sitio turístico que tanto beneficio trae para las comunidades cercanas al lugar.

Y al agua patos!!

Figura 1. Artículo de periódico.

[14] Universidad de Guadalajara.
[15] Universidad de Quintana Roo.

Por favor contesta las siguientes preguntas referentes al artículo periodístico que acabas de leer.

1. **¿Qué atracciones y servicios ofrece el parque ecológico a sus visitantes?**

2. **¿Qué beneficios crees que trae el parque a las comunidades cercanas?**

3. **Escribe tres opciones por las que te gustaría quedarte hospedado en el Parque Ecológico Xul-Ha.**

Figura 2. Preguntas de contexto.

Ayúdanos

Alberto May vive en la ciudad de Chetumal, Municipio de Othon P. Blanco del estado de Quintana Roo. Acaba de heredar un Parque Ecológico que ofrece servicio de hotel.

El señor May se dedica al negocio de la construcción, por lo cual no tiene ninguna experiencia en la administración de Parques ni hoteles. Por esta razón ha decidido cerrar el lugar.

Al enterarse las comunidades cercanas al Parque de esta decisión se presentaron ante el señor May para pedirle que no cerrara el parque, puesto que atrae mucho turismo que representa importantes ingresos para la comunidad, así como un buen número de empleos para las personas que viven en ella. Así le propusieron que si decidía no cerrar el lugar, la comunidad lo asesoraría en los diversos aspectos que conllevan la administración y manejo del Parque. Afortunadamente, el Sr. May aceptó gustoso.

Actualmente, el hotel del Sr. May cuenta con 40 habitaciones. Se sabe que si cobra $1200.00 por habitación por noche, se tendrá cupo lleno (es decir, se ocupará la totalidad de las habitaciones). Sin embargo, también se sabe que por cada $50 que se aumente el precio, una habitación quedará desocupada. Además, el señor May debe pagar $200 pesos por noche, por cada habitación ocupada, por el costo de limpieza y mantenimiento.

El Sr. May quisiera saber qué tarifa debe cobrar por cada habitación para poder obtener la máxima ganancia posible, aún cuando eso signifique tener una o varias habitaciones desocupadas.

Ayuda al Sr. May escribiéndole una carta donde le expliques, con la información que se tiene, cuánto debería cobrar por cada habitación por noche para obtener las mayores ganancias posibles. Explica bien el método que utilizaste para realizar estos cálculos para que el Sr. May pueda calcular la tarifa en el futuro y siempre obtenga las mayores ganancias posibles.

Con tu valiosa ayuda, el Sr. May obtendrá buenas ganancias y sobre todo la comunidad del lugar seguirá contando con sus ingresos y con sus empleos.

Figura 3. Problema.

El uso didáctico de esta actividad en el aula radica en las diferentes formas en que puede ser abordada por los estudiantes. Discutir o reflexionar sobre las distintas formas para obtener las respuestas, incide en el desarrollo de los conocimientos y habilidades de los estudiantes.

Explorar la situación permite a los estudiantes entender la problemática. Hacer suposiciones o considerar casos particulares es algo que deben aprender a realizar los estudiantes.

La exploración numérica con lápiz y papel sensibiliza y permite reconocer la importancia del uso de la computadora y de la utilización de diversos procedimientos. La organización de la información y de los procesos permite reconocer la secuencia de operaciones y la relación entre la información proporcionada. Lo tedioso de los cálculos y la disposición de equipo y conocimiento de software lleva a elaborar procedimientos en la computadora.

La Actividad Provocadora de Modelos puede resolverse utilizando una tabla de datos (Tabla 1). En la fila 12 se observa que cuando el hotel tiene 30 habitaciones ocupadas, la Ganancia es máxima.

E12 fx =C12-D12

	A	B	C	D	E
1	Habitaciones ocupadas	Costo de la habitación	Ingreso	Egreso	Ganancia
2	40	1200	48000	8000	40000
3	39	1250	48750	7800	40950
4	38	1300	49400	7600	41800
5	37	1350	49950	7400	42550
6	36	1400	50400	7200	43200
7	35	1450	50750	7000	43750
8	34	1500	51000	6800	44200
9	33	1550	51150	6600	44550
10	32	1600	51200	6400	44800
11	31	1650	51150	6200	44950
12	30	1700	51000	6000	45000
13	29	1750	50750	5800	44950
38	4	3000	12000	800	11200
39	3	3050	9150	600	8550
40	2	3100	6200	400	5800
41	1	3150	3150	200	2950
42	0	3200	0	0	0

Tabla 1. Procedimiento tabular para resolver la APM “El Hotel”

Un modelo gráfico que se puede construir a partir de los datos de la Tabla 1, es el de la Figura 1. Donde el eje $y$representa la Ganancia y el eje x, la cantidad de habitaciones ocupadas.

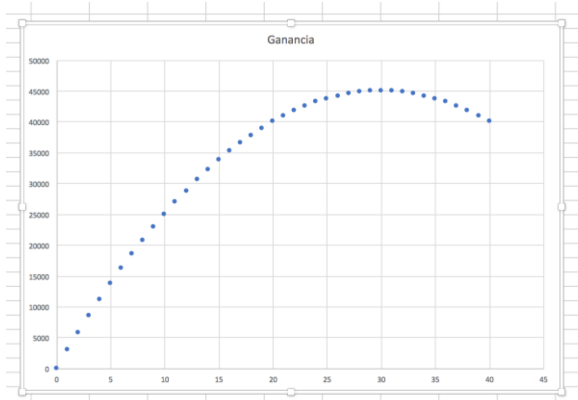


Figura 4. Procedimiento gráfico para resolver la APM "El Hotel".

Aunque podrían también obtenerse las gráficas a partir de los datos de las columnas B, C y D (Tabla 1), correspondientes al costo de la habitación, ingreso y egreso.

Un modelo algebraico para esta situación se construye de la siguiente forma:

Considerando que: $Ganancia = Ingreso - egreso$

Tanto la ganancia como el ingreso y el egreso dependen del número de habitaciones ocupadas o desocupadas.

Si representamos con n el número de habitaciones desocupadas, entonces

$40 - n$ representa el número de habitaciones ocupadas y

$1200 + 50n$ es el precio en que renta cada habitación.

El ingreso consiste en multiplicar el precio de cada habitación por el número de habitaciones ocupadas. Por ello, el ingreso es representado por:

$$I(n) = (1200 + 50n)(40 - n)$$

El egreso es determinado por el pago por mantenimiento y limpieza de las habitaciones ocupadas, esto es $E(n) = 200(40 - n)$.

Por lo tanto, la ganancia es:

$$G(n) = (1200 + 50n)(40 - n) - (200)(40 - n)$$

Al realizar las operaciones y simplificar:

$$G(n) = -50n^2 + 1000n + 40000$$

Finalmente, la función $G(n)$ puede derivarse para obtener la ganancia máxima, la cual corresponde a $n = 10$. Donde n es la cantidad de habitaciones desocupadas.

Al considerar el número de habitaciones (h) ocupadas en lugar de las desocupadas se obtiene a la ganancia como una función que depende de h: $G(h)$.

Algunas preguntas interesantes que se pueden explorar son las siguientes: ¿Cómo es la gráfica de $G(n)$? ¿Cómo es la gráfica de $G(n)$ respecto de $G(h)$? ¿Cuál es el dominio de la función?

Actividad Provocadora de Modelos: La Afore

En las Figuras 5, 6 y 7 se presenta la APM. Esta actividad se describe con mayor detalle en Tec-Escalante y Vargas-Alejo (2015).

EL ECONOMISTA

Lunes 8 de Septiembre de 2014 | 00:04

En México no se ahorra suficiente para la jubilación

Según HSBC, 43% de las personas jubiladas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para este momento.

YURIDIA TORRES / EL ECONOMISTA
SEP 19, 2013 | 17:23
Foto: Shutterstock

Una casa en la playa, otra en las montañas, viajes continuos, tiempo con los hijos y nietos; así sueñan que será su vejez muchas personas y anhelan el día en que llegue el monto de su retiro laboral; recibir esa pensión mensual, que seguramente alcanzará para pagar todos los caprichos que deseen.

La realidad es que no será así. No siempre es así. De acuerdo con el informe de HSBC "El futuro del retiro, la vida después del trabajo", 43% de las personas retiradas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para el momento de su retiro laboral. La razón es que los jubilados tienen menos dinero del que esperaban recibir y entonces sus sueños, viajes, regalos, casas, siguen siendo eso, sueños. El hecho es que los mexicanos ahorran poco para su retiro, afirmó Eduardo Varón, director de Distribución de Banca Premier de HSBC México.

"Es importante utilizar todos los mecanismos que se tienen disponibles para ahorrar; el estudio dice que las personas apuestan mucho a las pensiones de gobierno, a las afores, a los esquemas privados de retiro, pero una de las recomendaciones es que las personas diversifiquen las fuentes de ahorro para su pensión", dijo.

PROPUESTAS

Entre las medidas propuestas para fomentar una seguridad social universal en el país, están el impulso al ahorro voluntario de las personas, con una cuenta en alguna afore.

Recientemente, el Presidente de México propuso que por cada aportación voluntaria de las personas registradas en el Sistema de Ahorro para el Retiro y afiliadas al IMSS, el gobierno federal pondrá una fracción del monto que la persona ahorre.

El retiro de sus sueños

Recomendaciones que se deben tomar en cuenta antes de pensionarse:

NO SE APRESURE. Existe la percepción entre las personas retiradas de haberse apresurado en dejar un empleo pagado. Muchas personas retiradas que ven el trabajo como un medio importante para mantener el cuerpo y la mente activos.

DIVERSIFIQUE. En la actualidad, los jubilados tienen tres diferentes fuentes de ingreso en el retiro, al decidir sabiamente no depositar en un solo lugar la generación de sus ingresos. Separar sus fuentes de ingreso en el retiro y los riesgos asociados significa que no se tienen todos los huevos en una misma canasta.

CONSIDERE A SU FAMILIA. Mientras muchas personas aspiran a viajar mucho durante su retiro, cerca de la mitad de los trabajadores actuales esperan tener responsabilidades financieras con otros, incluso estando retirados. Esto incluye responsabilidades financieras continuas con sus hijos adultos, así como respaldar a padres mayores en un estado delicado.

Figura 5. Artículo de periódico.

Preguntas de comprensión

¿Qué aspiraciones tienes para el momento de tu jubilación?

¿Por qué las personas jubiladas en México no logran alcanzar las metas y aspiraciones que se fijaron para este momento?

¿Qué recomendaciones son importantes seguir antes de jubilarse?

Figura 6. Preguntas de contexto.

Problema 1. Ayuda a Mateo

Mateo un chico Chetumaleño de 19 años, acaba de obtener su primera oportunidad de trabajo como cajero.

En la firma del contrato le dieron una pequeña orientación sobre el pago de su sueldo, el cual es de $1400 mensual. Le explicaron brevemente sobre las deducciones que se le deben de realizar conforme a la ley. Entre ellas la cuota obrera para cesantía y vejez con la cual le descuentan el 1.125% de su salario para aportarla a su fondo de ahorro para el retiro. La encargada de recursos humanos le comenta que este fondo genera un interés el cual se acumula al fondo al final de cada mes, esto dependiendo de la AFORE que elija.

Siendo su primer trabajo, Mateo sale de la firma del contrato con la duda de cómo elegir ello. Solicita información vía correo electrónico a la AFORE XXI Banorte donde tú eres parte del equipo de atención a clientes, por lo que deberás redactar una carta donde le ayudes a aclarar sus dudas a Mateo, explicándole detalladamente tus procedimientos:

1. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
2. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
3. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del cuarto mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
4. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
5. ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
6. ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra?

Cuentas con la siguiente información:

La aportación total a una cuenta de Afore está compuesta por la parte del patrón 5.15%, la del empleado 1.125% y del Gobierno Federal 0.225%, calculado del Salario Base del empleado.

El rendimiento que genera tu fondo de ahorro, se acumula al capital final de cada intervalo de tiempo previsto.

Requisitos para tener derecho a pensión por cesantía (vejez) para la Ley de 1997, Articulo 162 de la Ley del Seguro Social

Tener 65 Años Cumplidos,
Tener como Mínimo 1,250 Semanas de Cotización.
Cumplir con los requisitos anteriores a la Ley del '73, (son los mismo)

Información de AFORES

AFORE	**RENDIMIENTO**	**COMISIÓN %**
Sura	11.45	1.21
Profuturo	11.12	1.27
Banamex	10.85	1.16
MetLife	10.81	1.39
XXI Banorte	10.72	1.1
Principal	10.55	1.36
Azteca	8.9	1.45
Coppel	7.96	1.49
Afirme Bajío	7.61	1.4
Inbursa	5.79	1.17
FUENTE: CONSAR.		

Figura 7. El problema.

De manera semejante a la APM "El Hotel", el uso didáctico de esta actividad en el aula radica en las diferentes formas en que puede ser abordada por los estudiantes. Discutir o reflexionar sobre las diferentes formas para obtener las respuestas, incide en el desarrollo de los conocimientos y habilidades de los estudiantes.

Esta APM conlleva un proceso recursivo. La vía para resolverlo puede ser puramente numérico (sin uso de tablas), numérico usando tablas (Figura 8), numérico con tablas y gráficos (Figura 9) y algebraicos. Los procedimientos en detalle pueden obtenerse en Tec-Escalante y Vargas-Alejo (2015).

El uso de uno de estos métodos depende de los conocimientos y habilidades previos de los estudiantes. La exploración numérica es fundamental para identificar la recursividad en la situación. Quienes ya han tenido experiencias podrían reconocer la naturaleza recursiva en el proceso de cálculo. Las preguntas planteadas tienen la función de llevar a explorar ese aspecto de la actividad, así como las ventajas de seguir los procedimientos de manera organizada por medio de tablas.

Procedimiento numérico. Los estudiantes podrían comenzar a responder las preguntas planteadas en el problema acudiendo a una forma recursiva en la que sólo realicen operaciones numéricas obteniendo los montos ahorrados al final de cada periodo. Esto lo podrían realizar directamente en la calculadora, sin tomar nota de las estructuras matemáticas, sin observar algún patrón, de la siguiente forma:

En el primer pago de Mateo (cero meses transcurridos), sólo le realizan el descuento a ingresar a su fondo de ahorro que es de $91.

Transcurrido el primer periodo, Mateo tendrá la aportación del periodo al fondo más el monto inicial aportado con su 9.62% (0.0962) de rendimiento; es decir:

$91+91+0.0962\ (91)= 182+8.7542= 190.75$

Para el monto del fondo de ahorro a final del segundo periodo véase la Figura 8. La dificultad quizá iniciaría al intentar contestar la última pregunta planteada en el problema. Los estudiantes deberían cuestionarse ¿Es necesario hacer todos los cálculos? ¿No hay alguna otra manera de obtener la cantidad solicitada? ¿Existe alguna fórmula? Esto podría apoyar para que los estudiantes organizaran la información en forma tabular, e incluso utilizar la hoja de cálculo elaborando un procedimiento para hacer la tabla (Figura 8).

Forma numérica recursiva

Aportación inicial

91

Monto al final del primer periodo:

91+91+0.0962 (91)= 182+8.7542= 190.75

Monto al final del segundo periodo:

91+190.75+0.0962 (190.75)=300.10

Monto al final del tercer periodo

91+300.10+0.0962 (300.10)=419.96

¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?

⋮

Monto del fondo al final del doceavo periodo

91+1902.08+ 0.0962 (1902.08)= 2176.06

Representación tabular de los estudiantes

Periodos transcurridos	Rendimiento	Monto del sueldo a fondo	Monto del periodo anterior	Intereses ganados de monto anterior	Monto final del periodo
0	0.0962	91	0.00	0.00	91.00
1	0.0962	91	91.00	8.75	190.75
2	0.0962	91	190.75	18.35	300.10
3	0.0962	91	300.10	28.87	419.97
4	0.0962	91	419.97	40.40	551.38
5	0.0962	91	551.38	53.04	695.42
6	0.0962	91	695.42	66.90	853.32
7	0.0962	91	853.32	82.09	1026.41
8	0.0962	91	1026.41	98.74	1216.15
9	0.0962	91	1216.15	116.99	1424.14
10	0.0962	91	1424.14	137.00	1652.14
11	0.0962	91	1652.14	158.94	1902.08
12	0.0962	91	1902.08	182.98	2176.06
13	0.0962	91	2176.06	209.34	2476.40

Figura 8. Procedimientos recursivos y tabulares para resolver la APM "La Afore".

Procedimiento algebraico. De forma análoga al procedimiento numérico con tablas, pero sin utilizar la hoja de cálculo, se puede elaborar un procedimiento algebraico, que se puede utilizar para responder todas las preguntas. El procedimiento en la hoja de cálculo también puede ser utilizado de esta forma, y se puede usar cuando cambian las condiciones iniciales como el salario mensual y la tasa de interés que paga la Afore.

Si denotamos por M_k el monto en el fondo de Mateo al final del k-ésimo mes, por i la tasa de interés que paga la Afore cada mes, y si M_0 es la aportación mensual al fondo. Se tiene lo siguiente:

Al iniciar el mes 1 se tendrá en el fondo M_0.

Al finalizar el mes 1 se tendrá $M_1= M_0 + M_0+M_0 i = M_0 + M_0(1+i)$

Al finalizar el mes 2 se tendrá $M_2= M_0 + M_1+ M_1 i= M_0 + M_1(1+i)$ sustituyendo M_1 se tiene $M_2= M_0 + [M_0 + M_0(1+i)](1+i)= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2$

Al finalizar el mes 3 se tendrá $M_3= M_0 + M_2+ M_2 i= M_0 + M_2(1+i)$ sustituyendo M_2 se tiene $M_3= M_0 + [M_0 + M_0(1+i) + M_0(1+i)^2](1+i)= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2+ M_0(1+i)^3$

Se puede observar el patrón y conjeturar que el monto en el fondo al terminar el cuarto mes es: $M_4= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2+ M_0(1+i)^3+ M_0(1+i)^4$

Y que al final del k-ésimo mes el monto del fondo será:

$M_k= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2+ \ldots+ M_0(1+i)^{k-1}+ M_0(1+i)^k =$

$= M_0 [1 + (1+i)+ (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots +(1+i)^k]$

En este punto se puede introducir la serie geométrica con razón r:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad \text{que lleva a}$$

$$M_k = M_0\left[\frac{(1+i)^{k+1}-1}{(1+i)-1}\right] = M_0\left[\frac{(1+i)^{k+1}-1}{i}\right]$$

Obteniéndose así una relación funcional útil para responder cualquier pregunta relacionada con la cantidad de dinero que tendrá Mateo al cabo de cualquier cantidad de años.

Comparación de modelos y extensión hacia el análisis del ahorro para otras AFORES. Como respuesta a la pregunta ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra? el alumno podría calcular el monto que tendría Mateo para los mismos periodos que se indican en las preguntas anteriores a éste, pero eligiendo AFORES con diferentes rendimientos. El maestro podría orientar la discusión hacia reflexionar la pregunta ¿Funcionan los modelos construidos para analizar el ahorro utilizando otras AFORES?

Con ello se pretende apoyar la comparación del monto final ahorrado considerando distintas AFORES y propiciar la construcción de modelos gráficos que permita al estudiante refinar sus *ciclos de comprensión* respecto a los conceptos matemáticos: variación y función, al comparar y analizar una familia de problemas. Debido a que el estudiante ya realizó un análisis a lápiz y papel de la situación, esta sección es recomendable abordarla de nuevo con el apoyo de software donde se trabajen hojas de cálculo y graficación (EXCEL, GeoGebra). Con la meta de ahorrar tiempo en los cálculos que ya se analizaron anteriormente, e invertirlo mejor en el análisis de la situación y conceptos matemáticos desde modelos diferentes (Figura 9).

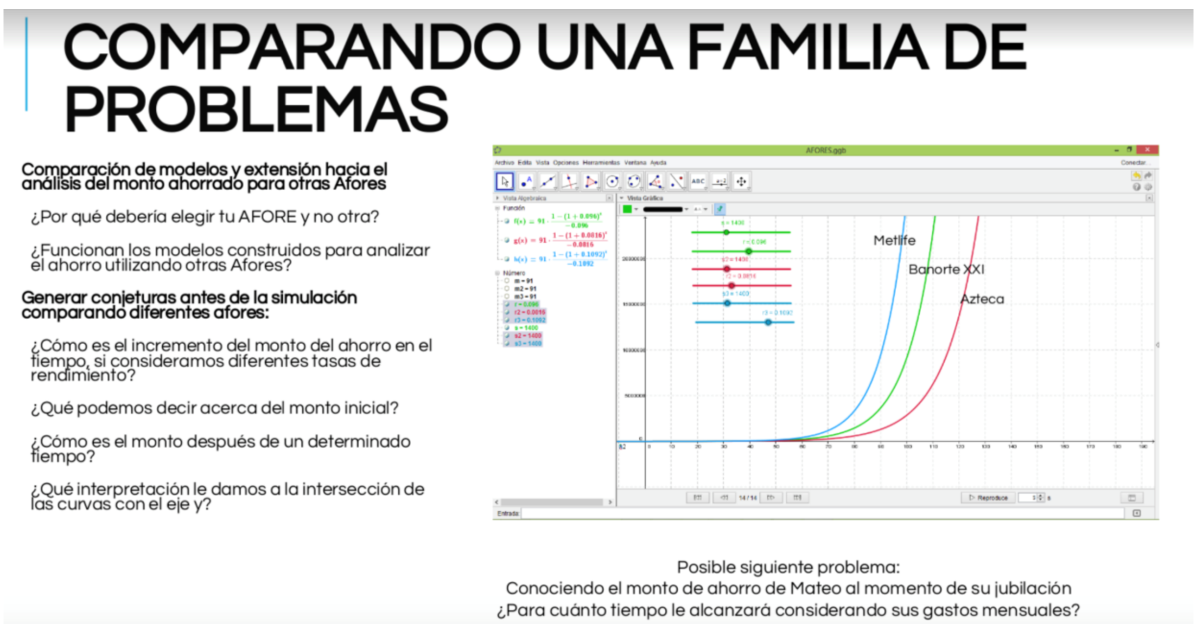


Figura 9. Procedimiento gráfico para resolver la APM “La Afore”.

5 LA INCLUSIÓN DE GEOGEBRA EN EL DISEÑO DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS

Actividades capítulo 5: Guía para el profesor

José Luis Soto Munguía[16]

La construcción de un arco de centro inaccesible

Material necesario para la secuencia:

2. Un juego geométrico por equipo (que incluya las dos escuadras y el transportador).
3. Tiras de cartón rígido, chinchetas o tachuelas y unas tijeras para cortar papel.
4. Una computadora por equipo, con GeoGebra instalado.
5. Cinco archivos construidos en GeoGebra, a saber: Arco 1, Arco 2, Arco 3, Arco 4 y Arco 5.

Inicio

Actividad 1. Trabajo grupal

En diversas actividades humanas se utilizan métodos prácticos para resolver problemas, estos métodos se han ganado un lugar en diferentes oficios, simplemente porque funcionan, aunque el usuario no sepa con precisión a qué se debe su funcionamiento. En esta actividad revisaremos un método ligado a la construcción de arcos de círculo en las edificaciones, y discutiremos los fundamentos matemáticos en los que está basado.

Cuando se trata de un arco semicircular, también conocido como arco de medio punto, puede trazarse localizando el punto medio del travesaño que sostendrá la cimbra (diámetro del arco), y luego colocando un clavo en ese punto (centro del arco). A este clavo se atará una cuerda cuya longitud será igual al radio del arco a construir. Se trata en este caso de la simple aplicación de la definición de circunferencia, como el conjunto de puntos que se encuentra a la misma distancia (radio) de un punto fijo (centro). Todos estos trazos pueden hacerse sin grandes dificultades sobre la cimbra que sostendrá al arco mientras se construye (ver Figura 1).

[16] Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.

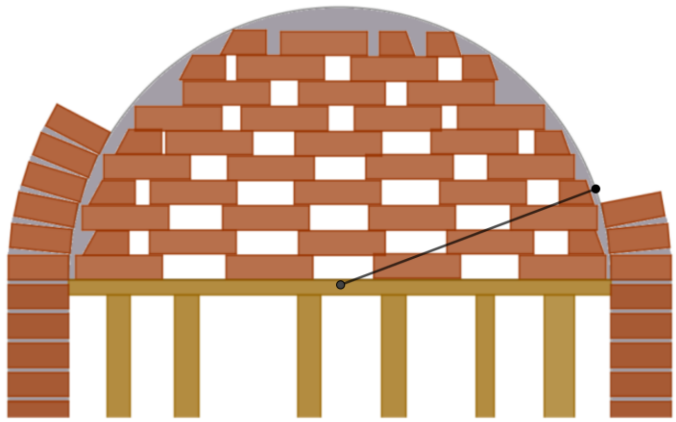


Figura 1

La situación que plantearemos aquí es un poco más complicada que la anterior. Se trata ahora de construir un arco que no llega a ser una semicircunferencia, como el que se muestra en la Figura 2. El problema aquí es que el centro del arco, donde podríamos colocar el clavo para usarlo como centro, ya no es un punto accesible.

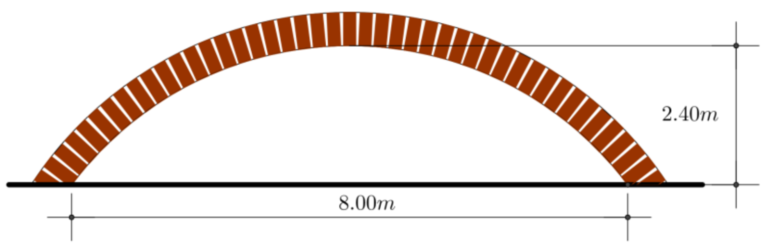


Figura 2

Si se quisiera utilizar la técnica mostrada en la Figura 1, el centro del arco estaría bajo tierra y habría que excavar para localizarlo. La Figura 3 muestra la excavación que tendría qué hacerse para localizar el punto O.

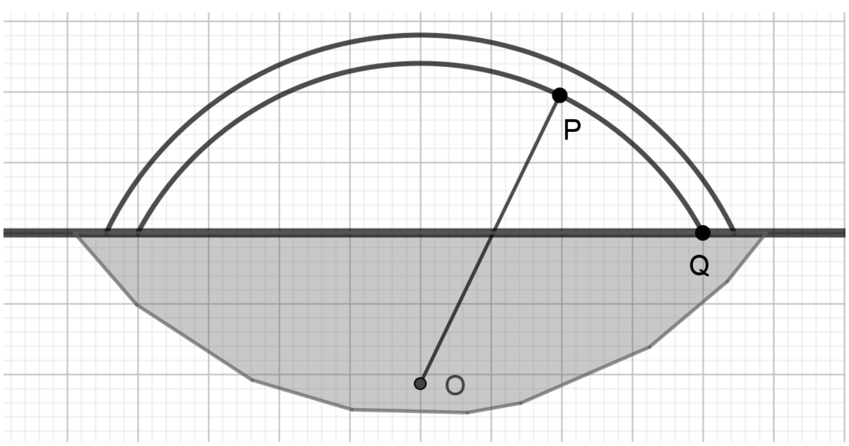


Figura 3

1. Si en la cuadrícula de la Figura 2, los cuadrados representan un metro cuadrado, estima la profundidad a la que se tendría qué excavarse para localizar el punto O y utilizarlo como centro para trazar el arco.
2. Abre el archivo Arco1.ggb, en pantalla se mostrará una construcción como la que aparece en la Figura 2. Arrastra el punto Q hasta que el arco tenga un ancho de 10 m, ¿A qué profundidad se encuentra ahora el punto O?
3. ¿Te parece práctico el método para trazar el arco ilustrado en la Figura 2? Justifica tu respuesta.

Desarrollo

Lectura individual

Un albañil necesita trazar un arco circular como el que se muestra en la Figura 2. Para construir el arco requiere armar la cimbra sobre la que lo montará. Su experiencia le dice que el arco puede ser trazado localizando el centro del arco y auxiliándose luego con una cuerda (tal como se ha construido el arco de la Figura 1), pero las dimensiones del arco le dicen que este centro se localiza muy por debajo del nivel del suelo y que tendría que excavar para encontrarlo.

El Maestro de Obras le recomienda usar el siguiente método para trazarlo: Primero utiliza los dos puntos de la base del arco (A y B) y el punto donde el arco alcanzará la mayor altura (P), para trazar con barrotes de madera el ángulo que se observa en la Figura 4.

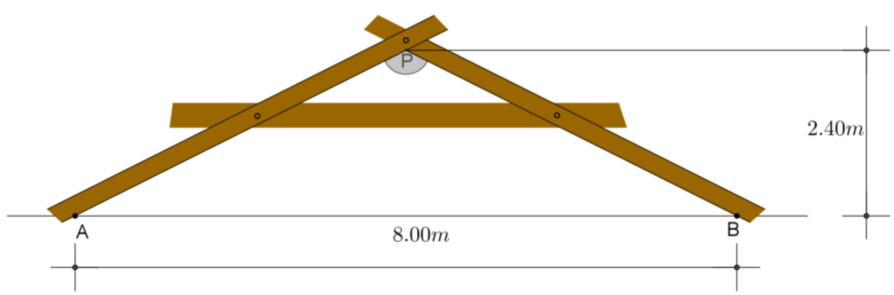


Figura 4

Una vez construido y fijado este ángulo, construye un segundo ángulo de madera copiando el primero, pero modificando la longitud de los maderos, tal como se ilustra en la siguiente Figura 5:

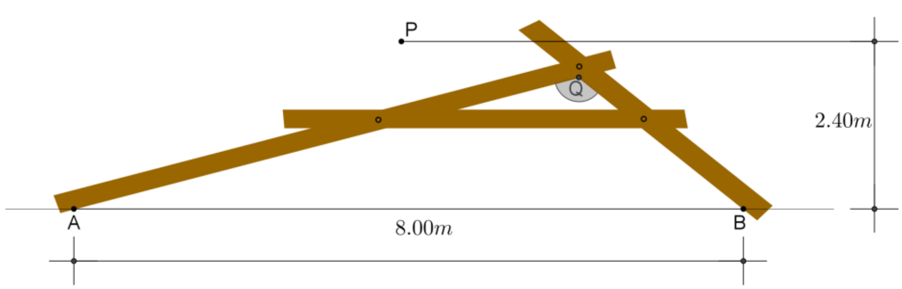


Figura 5

Ahora se tiene otro punto (llamado aquí Q), que también está sobre el arco. La simetría del arco permite manipular este último ángulo para localizar otro punto R, como se ilustra en la Figura 6:

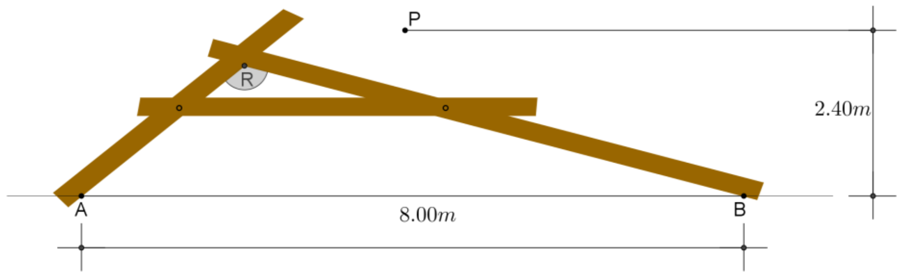


Figura 6

El resto del trazo se haría copiando el ángulo APB tantas veces como se quiera para localizar tantos puntos sobre el arco como se desee. En la Figura 7 se muestran algunos de los puntos que pueden ser localizados.

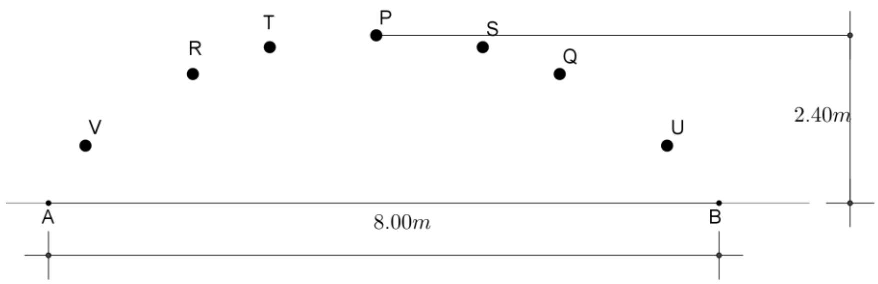


Figura 7

Actividad 2. Trabajo en equipo

Ahora reproduciremos a escala, el método utilizado por el albañil para trazar el arco. En lugar de barrotes usaremos tiras de cartón (incluidas en tu material recortable) y en lugar de los clavos usados para fijar los barrotes, usaremos tachuelas o chinches (el maestro se las proporcionará).

1. La gráfica de la Figura 8 muestra los datos que conoce el albañil. Usa las tiras de cartón y las chinches, para trazar en esta gráfica los puntos H, I, K, L, M y N, de tal modo que estén sobre el arco que se pretende trazar.

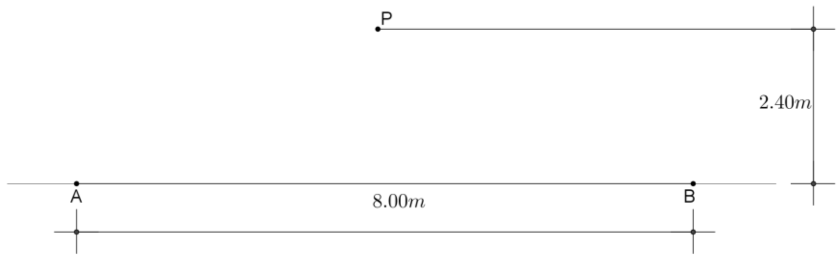


Figura 8

2. Analiza el dispositivo construido con las tiras de cartón y que usaste para trazar los puntos H, I, K, L, M y N. ¿Qué propiedad geométrica del dispositivo construido, consideras la más importante?

Actividad 3. Trabajo en equipo

En esta actividad se tratará de dar respuesta a la pregunta: ¿por qué el dispositivo construido permite trazar puntos que están sobre el mismo arco de circunferencia?

1. En la Figura 9 se muestra un arco de circunferencia con un ángulo inscrito ACB.
   a) Mide con tu transportador el ángulo ACB y anota aquí su medida.
   b) Traza otro punto cualquiera D sobre el arco, luego traza el ángulo ADB y mídelo con el transportador. ¿Cuánto mide el ángulo ADB?
   c) Traza otro punto E sobre el arco y luego traza el ángulo AEB. ¿Puedes predecir cuánto mide el ángulo sin medirlo? Explica de dónde obtuviste tu predicción. Si el equipo tiene dificultades para explicar esta predicción, abre el archivo Arco2.ggb y arrastra el punto C para explorar la construcción.

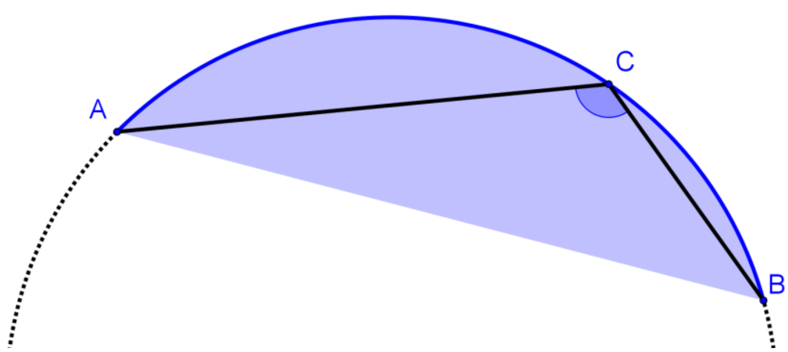


Figura 9

Si ya contamos con un arco como el de la Figura 9, entonces podemos hacer afirmaciones sobre el comportamiento de los ángulos inscritos, pero eso no resuelve el problema planteado al albañil, porque él no cuenta con el arco, por el contrario es justamente lo que quiere trazar.

2. Traza dos puntos A y B sobre una hoja en blanco, luego coloca las escuadras de tal modo que los puntos A y B queden sobre sus lados (ver Figura 10). Marca el punto P

en el que coinciden las esquinas de las escuadras. Desliza las escuadras, sin perder la configuración que tienen y manteniendo A y B sobre los lados de ellas, para localizar otros puntos distintos a P.

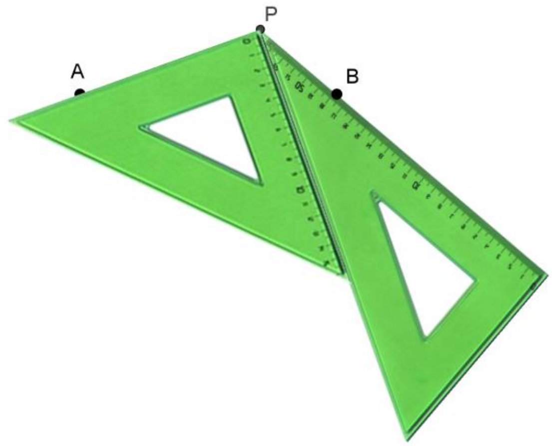


Figura 10

a) Observa que el ángulo APB conservará su medida, ¿cuánto mide?

b) Hagan una predicción en el equipo sobre la curva que irán delineando los puntos trazados. Ofrezcan una explicación sobre la predicción que están haciendo. Si tienen alguna dificultad abran el archivo Arco3.ggb y arrastren el punto Q para deslizar las escuadras. Si lo consideran necesario, activen el "rastro" de P.

Actividad 4. Trabajo grupal

Los equipos llamarán Teorema 1 al resultado geométrico obtenido de la Figura 9 y Teorema 2 al resultado geométrico obtenido de la Figura 10 y pondrán a la discusión del resto del grupo lo siguiente:

a) El enunciado que redactaron para los teoremas 1 y 2.

b) Las diferencias que encuentran ente el Teorema 1 y el Teorema 2.

c) Una carta en la que explicarán al albañil las razones geométricas que justifican el método que está empleando para trazar un arco de centro inaccesible.

Actividad 5. Trabajo individual

Tomando en cuenta la discusión grupal que se ha dado en cada exposición, cada estudiante escribirá su versión de los teoremas 1 y 2.

Cierre

Actividad 6. Trabajo grupal

El profesor explicará a todo el grupo:

a) El enunciado formal de los teoremas 1 y 2 y por qué uno se considera el recíproco del otro.

b) Explicará por qué cada uno de estos teoremas se tienen que justificar por separado. En esta explicación podrá utilizar ejemplos como el siguiente:

Afirmación 1. Si m y n son números enteros pares, entonces el producto mn es un número par.

Afirmación 2. Si el producto mn de dos números enteros es un número par, entonces m y n son números enteros pares.

c) Justificará geométricamente los teoremas 1 y 2, no necesariamente ofreciendo una demostración. En esta justificación puede arrastrar los puntos P o Q en el archivo Arco 4. ggb para justificar el teorema 1 y arrastrar los puntos P, Q, R o S en el archivo Arco 5. ggb. para justificar el Teorema 2.

6 PROCESO DE REPRESENTACIÓN DEL CAMBIO Y LA VARIACIÓN: EXPLORACIONES DIGITALES

Actividades capítulo 6: Guía para el profesor

Sandra Evely Parada Rico[17], Jorge Enrique Fiallo Legal y Nelson Javier Rueda [17]

Para un complemento de actividades, consultar el sitio web:

http://matematicas.uis.edu.co/jfiallo/?q=talleresprecalculo

CAJA SIN TAPA

Actividad 1

A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen.

¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué?

Explica tu procedimiento y tu respuesta.

Actividad 2

Discute con tus compañeros y el profesor la solución del problema y escribe una conclusión al respecto.

Actividad 3

Abre el archivo de GeoGebra "caja sin tapa"

3.1 Anima el punto P ¿Qué representa el punto P en el problema?
3.2 ¿Cuáles magnitudes varían? ¿Cuáles magnitudes no varían? **Explica tu respuesta.**
3.3 ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el volumen de la caja? **¿Por qué?**
3.4 ¿Qué valores puede tomar la altura? **¿Por qué?**
3.5 ¿Qué valores puede tomar la anchura? **¿Por qué?**
3.6 ¿Qué valores puede tomar la profundidad? **¿Por qué?**
3.7 ¿Qué valores puede tomar el volumen? **¿Por qué?**
3.8 ¿Qué relación hay entre la anchura y la altura? ¿son magnitudes interdependientes? ¿por qué? **Expresa la anchura en función de la altura.**
3.9 ¿Qué relación hay entre la profundidad y la altura? ¿son magnitudes interdependientes? ¿por qué? **Expresa la profundidad en función de la altura.**
3.10 Expresa el volumen en función de la altura.
3.11 ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? **¿Por qué?**

---

[17] Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Actividad 4

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y soluciones de la Actividad 1.3

Actividad 5

Abre el archivo de GeoGebra "caja sin tapa"

5.1 En la vista grafica muestra los ejes. En la vista algebraica muestra el punto V y anima el punto P **¿Qué representa el punto V?**

5.2 Marca el rastro del punto V **¿Qué representa el rastro del punto V?**

5.3 Halla el lugar geométrico del punto V cuando varía el punto P (ve al menú y selecciona lugar geométrico, señala el punto V y luego el punto P) **¿Qué representa el lugar geométrico del punto V con respecto al punto P?**

5.4 Escribe en la barra de entrada la fórmula que representa el volumen en función de la altura que hallaste en 3.10. Si no la has hallado utiliza la opción de regresión de dos variables y encuentra la función que mejor se ajusta al problema (asegúrate de que el punto P inicie en (0,0) y toma al menos 50 datos) ¿Por qué es la que mejor se ajusta?

5.5 ¿Coinciden la gráfica que representa el volumen en función de la altura con el lugar geométrico? ¿En qué coinciden? ¿En qué se diferencian?

¿Cuál es máximo volumen? **¿Por qué?**

Actividad 6

Abre el archivo de GeoGebra "caja sin tapa"

6.1 ¿Cuál es la dimensión de la altura que genera el mayor volumen? **¿Por qué?**

6.2 Aumenta a 5 cifras decimales el redondeo de la variable volumen y cambia el incremento del punto P a 0,0001 (has doble click en P, selecciona propiedades, abre la pestaña "algebra" y cambia el incremento a 0,0001).

6.3 Mueve el punto P alrededor del valor de la altura que genera el máximo volumen ¿El valor dado para la altura en 6.1 genera el mayor volumen? ¿Dicho valor es único? **Explica tu respuesta.**

6.4 Registra en la hoja de cálculo 20 valores del punto V cuando te aproximas al valor de la altura que genera el máximo volumen (utiliza las teclas de las flechas a la derecha y a la izquierda del punto P) ¿Qué ocurre con las imágenes de los valores de la altura cuando te aproximas al valor de la altura que genera el máximo volumen? **Explica tu respuesta.**

6.5 Aumenta a 10 cifras decimales el redondeo de la variable volumen ¿Cuál es la dimensión de la altura que genera el mayor volumen? **¿Por qué?**

6.6 ¿Qué ocurre con las imágenes de los valores de la altura cuando nos aproximamos al valor de la altura que genera el máximo volumen? **Escribe una conclusión y explica tu respuesta.**

6.7 Traza la recta tangente por el punto V a la curva que representa el volumen en función de la altura (en la barra de entrada escribes Tangente [V, h], si la función del volumen (h) tiene otro nombre escríbelo en lugar de h). Halla la pendiente de esta recta.

6.8 Registra en la tercera columna de la hoja de cálculo 20 valores del punto V cuando te aproximas al valor de la altura que genera el máximo volumen (utiliza las flechas derecha e izquierda) ¿Qué ocurre con los valores de la pendiente de la recta tangente cuando te aproximas a este valor por la derecha y por la izquierda? **Escribe una conclusión y explica tu respuesta.**

6.9 ¿Cuál es la dimensión de la altura que genera el mayor volumen? **¿Por qué?**

Actividad 7

Discutiendo y comunicando

Discute con tus compañeros y el profesor los conceptos, las conjeturas y soluciones de las actividades anteriores.

7a UTILIZACIÓN DE SENSORES CBR2 PARA EL ESTUDIO DE SITUACIONES FUNCIONALES A NIVEL SECUNDARIA Y UNIVERSITARIO

Actividades (nivel preuniversitario) capítulo 7: Guía para el profesor

Valériane Passaro[18], Ruth Rodríguez Gallegos[19], Mireille Saboya[20], Fabienne Venant[21]

DOCUMENTO PARA LOS PROFESORES

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:

Estudio del desplazamiento de una persona

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD:

Desarrollar la comprensión del concepto de función a través un cuestionamiento sobre la covariación entre dos variables en una situación real.

GRADO ACADÉMICO DONDE SE PUEDE IMPLEMENTAR:

Finales de secundaria (14-17 años)

CONTENIDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS:

Función, covariación, representación gráfica, modelación

DURACIÓN APROXIMADA: 75 minutos

MATERIALES NECESARIOS:

- Para los alumnos: Cada equipo dispone de un CBR2, de un labQuest[22], y de papel con pegamento sobre el que se puede escribir y que se podrá pegar al suelo.
- Para el profesor: Ordenador, proyector, CBR2, labQuest

RECOMENDACIONES PARA EL DOCENTE:

Los alumnos trabajan en equipos de 3 o 4.

---

[18] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canadá – passaro.valeriane@uqam.ca
[19] Tecnológico de Monterrey - México - ruthrdz@itesm.mx
[20] UQAM – Canadá – saboya.mireille@uqam.ca
[21] UQAM – Canadá – venant.fabienne@uqam.ca
[22] El labQuest es una máquina que recupera los dados tomados por el sensor para tratarlos. Aquí, utilizamos el labQuest para representar gráficamente la distancia entre la persona y el sensor en función del tiempo.

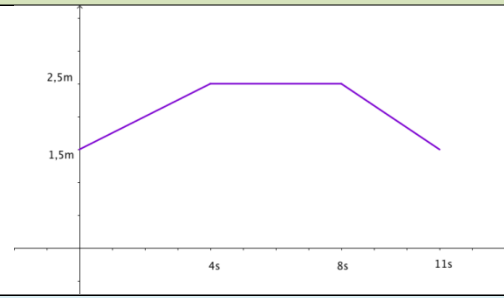
Fase 0. Presentación de la situación a los alumnos

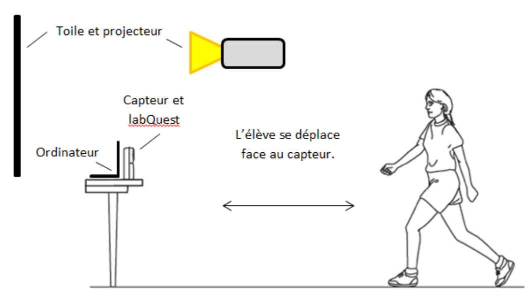
Es a menudo útil de saber cómo varía, a lo largo del tiempo, la distancia entre un objeto y un punto de referencia fijo. Por ejemplo, cuando un radar aéreo percibe la presencia de un avión, los captores que evalúan la distancia entre este avión y la torre de control permiten evitar colisiones. Para comprender como analizar el desplazamiento de un objeto a lo largo del tiempo, **vamos a estudiar el desplazamiento de una persona**.

Descripción de la actividad

Fase I: Exploración de la tecnología y de la situación

Situación: Esta gráfica representa la distancia horizontal entre la persona y el sensor en función del tiempo.



Consigna	Desarrollo
"Tienes que reproducir esta gráfica haciendo ustedes mismos el desplazamiento frente al sensor que está colocado sobre el escritorio".	En gran grupo. El profesor presenta la situación a los alumnos. Pide a unos cuantos alumnos de hacer varios ensayos delante de la clase (solo se utiliza un sensor, la gráfica es proyectada delante de la clase, ver la figura aquí abajo) para que todos vean cómo funciona un sensor. El profesor propone a los alumnos de experimentar y de discutir entre ellos sobre lo que observan. 

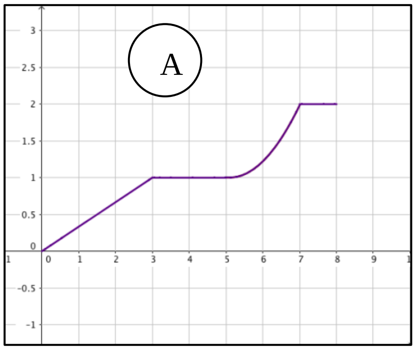
Recomendaciones para el profesor

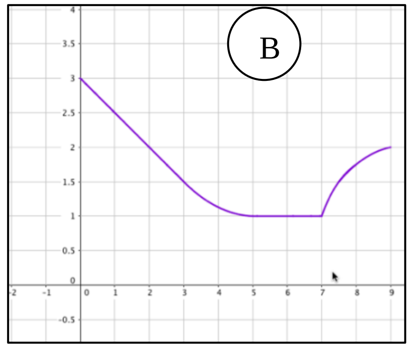
- Dejar que los alumnos se apoderen de la situación y del funcionamiento del sensor sin forzar un análisis, que es precoz en esta fase. Aquí nos referimos a un análisis de la coordinación entre las acciones y el aspecto de la gráfica.
- Proponer a varios alumnos ir delante de la clase para que de un ensayo a otro intenten obtener una gráfica, la más ajustada posible a la que propone el sensor.

Fase II: Interpretación gráfica

Situación: Esta otra gráfica representa la distancia horizontal entre la persona y el sensor en función del tiempo (otro desplazamiento de una persona).

Ejemplos de gráficas que pueden ser propuestas:





Consigna	Desarrollo
"Tienes que escribir un texto para explicar, a una persona que no tiene la gráfica bajo los ojos, la manera en la que tiene que desplazarse frente al sensor para reproducir exactamente esta gráfica".	Equipos de 3 o 4 alumnos. Cada equipo dispone de un CBR2 et de un LabQuest. El profesor proporciona la consigna y **atribuye una gráfica diferente a cada uno de los equipos**. Deja a los alumnos trabajar, asegurándose que el texto escrito sobre la hoja no contenga ninguna representación gráfica.

Recomendaciones para el profesor

- Incitar los alumnos a explicar su razonamiento a los otros miembros del equipo y a entenderse sobre las instrucciones a dar a una persona **que no ve la gráfica**.
- Sugiere a los alumnos de probar su descripción experimentándola con el CBR2.
- Sugiere de preparar la gráfica dividiéndola en diferentes partes y sugiere de analizar la variación de la distancia para cada una de estas partes.

Fase III: Apropiación de una descripción verbal y anticipación de la gráfica

Situación: Aquí se describe un desplazamiento producido por otro equipo….

(cada equipo recibe la descripción de otro equipo, ver el ejemplo dado anteriormente).

Consigna	Desarrollo
A. "Sin el CBR2, tienes que leer el texto y asegurarte de entender la sucesión de las acciones que se tienen que realizar. Un miembro del equipo debe producir este movimiento (los otros deben asegurarse que corresponde bien al texto) para poder volverlo a hacer después con el sensor	Equipos de 3 o 4 alumnos. El profesor proporciona la consigna a los alumnos y distribuye los textos producidos por ellos, asegurándose que cada equipo no reciba su propio texto. Deja a los alumnos trabajar, asegurándose que

delante de toda la clase".	entienden y respetan bien el contenido del texto.
B. "Producir un esbozo de la gráfica asociada al desplazamiento que acabas de trabajar (distancia en función del tiempo) ".	Primero en un trabajo individual y después compartido con los otros miembros del equipo.
Recomendaciones para el profesor	
A. Dejar que los alumnos se apropien del texto e identifiquen, si necesario, lo que falta o los errores. B. Incitar los alumnos a comparar sus gráficas, explicando la manera en la que han pasado de la descripción con palabras a la gráfica.	

Fase IV: Validación/invalidación de las descripciones verbales y de las gráficas anticipadas, y análisis del comportamiento de los incrementos	
Situación: Cada equipo ha recibido una descripción de un desplazamiento, queremos ahora producir la gráfica asociada y ver si corresponde bien a la gráfica inicial.	
Consigna	**Desarrollo**
"Para cada equipo, un alumno viene delante de la clase para reproducir el movimiento descrito tal y como lo practicó. Debemos después comparar la gráfica obtenida a la que fue dada inicialmente al equipo que produjo el texto".	En gran grupo. Un alumno por equipo viene a reproducir el movimiento (puede haber como máximo 3 ensayos). Cuando el equipo está satisfecho de la gráfica obtenida (consideran que el alumno ha efectuado el desplazamiento conforme a lo que describía el texto), el profesor muestra la gráfica inicial. Pide a los alumnos comparar las dos gráficas y de explicar, si hay, las diferencias.
Recomendaciones para el profesor	
• Escoger previamente, en la fase III, dos o tres descripciones por las que el análisis será profundizado. • Plantear preguntas para conducir a los alumnos a localizar e interpretar los puntos característicos. • Plantear preguntas sobre el comportamiento de los incrementos para conducir a los alumnos a: 1) Calificar el desplazamiento asociado a un segmento de recta ascendente o descendente. 2) Calificar el desplazamiento asociado a las curvas abiertas hacia arriba y a las curvas abiertas hacia abajo.	

Análisis a priori

Fase I
En esta fase, los alumnos exploran espontáneamente la tecnología y se apoderan de la situación. Mientras que un alumno se desplaza, los demás le observan y prestan atención al rastreo simultáneo de la gráfica. Esta percepción de la relación de dependencia y de las variaciones simultáneas de las variables tiempo y distancia, favorece el trabajo sobre la covariación que será solicitado en las otras fases de la actividad. Aunque los alumnos establezcan estrategias para ajustar la curva que ellos trazan con el sensor a la que es propuesta por el sensor, el objetivo no es aún el de concientizar y de

formular claramente estas estrategias. Durante esta fase se requiere una coordinación entre los registros *gráfico y experiencia.* Apoyándonos en los estudios de Passaro (2015) y de Carlson (2002), prevemos que los alumnos adopten un enfoque estático (correspondencia) sobre la gráfica, localizando puntos característicos (la ordenada del punto de abscisa 0 por ejemplo). Sin embargo, como la gráfica se traza simultáneamente al desplazamiento, los alumnos podrían empezar a hacer inferencias sobre la velocidad y así recurrir a un enfoque dinámico sobre la gráfica (covariación).

Fase II

En esta fase, los alumnos deben de explicar las estrategias que han surgido en la fase I. La tarea exige que los alumnos coordinen los registros *gráfico* y *verbal* pasando eventualmente por el registro de la *experiencia*. Como el texto tiene que ser suficiente para que una tercera persona efectúe el buen desplazamiento para trazar la gráfica propuesta, los alumnos deben de componer descripciones detalladas, no pueden contentarse dando informaciones estáticas como "Al empezar, colócate a un metro", deben de indicar a la persona como desplazarse. El CBR2 ofrece la posibilidad a los alumnos de validar, de invalidar o de ajustar los elementos de su descripción, particularmente en lo que concierne la variación. Un ejemplo de descripción que podría ser producida por un equipo de alumnos para la gráfica B es: "Al principio, colócate a 3 metros del sensor. Cuando el cronómetro se ponga en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos, después disminuye tu velocidad durante 2 segundos hasta que estés a un metro del sensor. Quédate después inmóvil durante 2 segundos y retrocede rápidamente hasta el punto de salida, pero disminuyendo tu velocidad durante 2 segundos y párate a 2 metros del sensor".

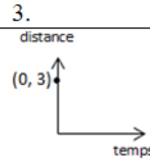
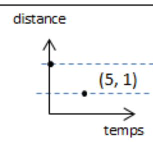
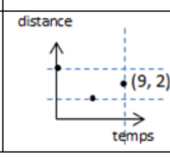
Fase III

Parte A	**Parte B**
En la parte A de esta fase, los alumnos deben visualizar el movimiento a partir de la descripción escrita. Después, el alumno que hace el movimiento debe de transponer esta visualización en la experiencia real (*embodiement*). Esta coordinación entre los registros *verbal* y *experiencia* puede favorecer la anticipación del aspecto de la gráfica asociada.	En la parte B, cada alumno debe trazar un esbozo de la gráfica de la situación. Esta tarea exige una coordinación entre los registros *verbal* y *gráfico*. En el momento de conversar entre los miembros del equipo, la coordinación entre estos dos registros se profundiza cuando los alumnos explicitan las asociaciones que efectúan entre elementos significativos del texto y las variables visuales de la gráfica. Entre los errores posibles, se puede anticipar la confusión entre el "objeto origen" (la trayectoria de la persona) y el "objeto meta" (el trazado de la gráfica que muestra como varía la distancia en función del tiempo, Janvier 1993). Así, un alumno podría trazar un segmento horizontal, cuando la persona se desplaza en línea recta a velocidad constante, el trazado será entonces asociado a la trayectoria de la persona.

Fase IV

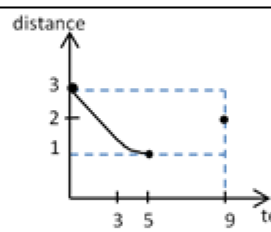
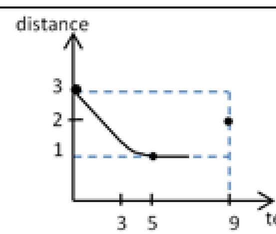
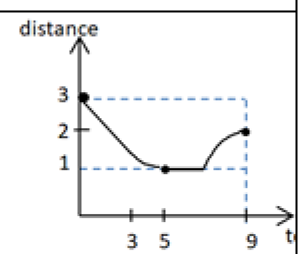
La coordinación entre los tres registros presentes en esta fase (experiencia, descripción verbal y gráfica) va a ser reforzada por la confrontación entre la gráfica inicial y la producida después de haber interpretado el texto. Además, se pone en evidencia la correspondencia entre los elementos de cada uno de estos registros. En primer lugar, los alumnos pueden resaltar los elementos significativos asociados a los puntos característicos (el enfoque correspondencia). Por ejemplo, en el modelo de la descripción presentado anteriormente, el profesor podría resaltar tres extractos y poner en evidencia la asociación entre los elementos significativos de los registros *verbal* y *gráfico* (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Asociación entre los elementos significativos del registro verbal y las variables visuales del registro gráfico para los puntos característicos (enfoque correspondencia)*

Registro verbal	**Descripción asociada a la experiencia**	Al inicio, colócate a 3 metros del sensor	hasta que llegues a 1 metro del sensor	e ir a 2 metros del sensor
	Interpretación de la descripción para la conversión hacia la gráfica	El punto (0, 3) pertenece a la gráfica de la función. La ordenada para el punto de abscisa 0 es 3.	El punto (5,1) pertenece a la gráfica de la función. El mínimo es 1 y la imagen es [1, 3].	El punto (9, 2) pertenece a la gráfica de la función. El dominio es [0, 9].
Registro gráfico	**Gráfica**			

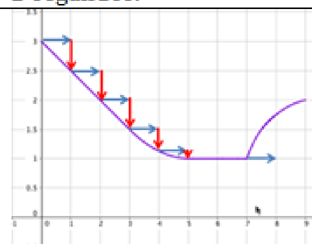
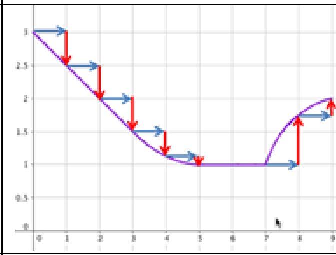
El profesor debe en segundo lugar, conducir a los alumnos a caracterizar el aspecto de la curva entre los puntos y el desplazamiento asociado. Como lo han mostrado Passaro (2015) y Carlson (2002), los alumnos hacen espontáneamente referencia a la velocidad y a la aceleración para describir de forma más precisa el desplazamiento. Por ejemplo, para el trazado curvado ascendiente abierto hacia arriba, un alumno podría decir “retrocede yendo cada vez más rápido” o también “retrocede acelerando”. En la descripción presentada anteriormente, el profesor podría recuperar tres extractos y conducir a los alumnos a interpretarlos para favorecer la conversión hacia la gráfica (ver Tabla 2).

Tabla 2. *Asociación entre los elementos significativos del registro y las variables visuales del registro gráfico para saber cómo se deben unir los puntos (enfoque covariacional) conversión*

Registro verbal	**Descripción asociada a la experiencia**	Cuando el cronómetro se ponga en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos después disminuye tu velocidad durante 2 segundos.	Quédate inmóvil durante 2 segundos.	Retrocede rápidamente al punto inicial, pero disminuyendo tu velocidad durante 2 segundos.
	Interpretación de la descripción para la conversion hacia la gráfica	Sobre [0, 5] la función es decreciente. Sobre [0, 3] la función es lineal, está representada por un segmento de recta oblicuo descendiente. Sobre [3, 5] la función está representada por una curva abierta hacia arriba.	Sobre [5, 7] la función es constante, está representada gráficamente por un segmento horizontal.	Sobre [7, 9] la función es creciente. Está representada por una curva abierta hacia abajo abrupta al principio pero después cada vez menos abrupta.
Registro gráfico	**Gráfica**			

La interpretación sugerida necesita no obstante una experiencia en interpretar gráficamente los conceptos de velocidad y de aceleración. Además, haciendo las experiencias con el desplazamiento, los alumnos pueden observar que es difícil saber cómo efectuar la buena aceleración. El profesor debe aprovechar esta oportunidad para profundizar el análisis de la variación de la distancia ayudándose de los incrementos cuantificados (ver el ejemplo en la Tabla 3).

Tabla 3. *Interpretación de la gráfica mediando los incrementos*

Descripción asociada a la experiencia	Cuando el cronómetro se pone en marcha, avanza hacia el sensor a **velocidad constante** durante 3 segundos, después **disminuye** tu velocidad durante 2 segundos.	**Retrocede rápidamente** al principio, pero después **disminuye** tu velocidad durante 2 segundos.
Análisis de los incrementos sobre la gráfica		
Descripción del comportamiento de los incrementos	**A velocidad constante:** → A cada segundo, la distancia disminuye de 0.5 metros. **La disminución de la velocidad:** → Durante el primer segundo, la distancia disminuye de 0.4 metros y después durante el segundo segundo, la distancia disminuye de 0.1 metros.	**Retrocede rápidamente y después disminuye tu velocidad:** → Durante el primer segundo la distancia aumenta de 0.75 metros cuando la segunda distancia aumenta de 0.25 metros.
Interpretación en el registro experiencia	"Haz un paso delante a cada segundo de la manera siguiente: - hacer 3 pasos de 0.5 m (50 cm) - hacer 1 paso de 0.4 m (40 cm) y después un paso de 0.1 m (10 cm)".	"Haz un paso detrás a cada segundo de la manera siguiente: - hacer 1 paso de 0.75 m (75 cm) - hacer 1 paso de 0.25 m (25 cm)".

7b UTILIZACIÓN DE SENSORES CBR2 PARA EL ESTUDIO DE SITUACIONES FUNCIONALES A NIVEL SECUNDARIA Y UNIVERSITARIO

Actividades (nivel preuniversitario) capítulo 7: Guía para el profesor

Ruth Rodríguez Gallegos[23], Valériane Passaro[24], Mireille Saboya[25], Fabienne Venant[26]

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:
Estudio del cambio de temperatura en agua hirviendo

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD:
Acercar/mostrar a los alumnos al fenómeno de enfriamiento de agua hirviendo, sensibilizarlos al método experimental y hacerles ver su relación con la parte teórica/analítica.

GRADO ACADÉMICO DONDE SE PUEDE IMPLEMENTAR:
Finales de secundaria (14-17 años) y universitario (18-20 años)

CONTENIDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS:
Función, covariación, representación gráfica, modelación, Ecuación Diferencial, representación simbólica

DURACIÓN APROXIMADA: 75 minutos

MATERIALES NECESARIOS:

- Para los alumnos: Cada equipo dispone de un sensor de temperatura, una calculadora con posibilidades gráficas TI-Nspire CX CAS, un vaso.
- Para el profesor: Cafetera con agua hirviendo y una laptop con el emulador de la TI para dar instrucciones.

RECOMENDACIONES PARA EL DOCENTE:
Los alumnos trabajan en equipos de 3.

[23] Tecnológico de Monterrey - México - ruthrdz@itesm.mx
[24] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canadá – passaro.valeriane@uqam.ca
[25] UQAM – Canadá – saboya.mireille@uqam.ca
[26] UQAM – Canadá – venant.fabienne@uqam.ca

Descripción de la actividad

Fase I – Experimentando para conocer mejor el contexto térmico a modelar	
Situación: Conocer el fenómeno a modelar y encontrar una gráfica con ayuda del sensor de temperatura que represente la temperatura del agua en función del tiempo.	
Consigna	**Desarrollo**
Debes de intentar encontrar la gráfica en la calculadora/Interface que permita representar la temperatura vs el tiempo.	En equipo de 3 alumnos. El profesor introduce en clase la necesidad e importancia de estudiar la manera en que cambia la temperatura de los objetos, y precisa que nos interesaremos en conocer el enfriamiento del agua hirviendo, como un fenómeno más donde el cambio está presente y precisar la manera en que la magnitud temperatura varía. Se les invita a los alumnos que, mediante una práctica experimental detallada paso a paso, midan la temperatura en el tiempo con ayuda de un sensor de temperatura.
Recomendaciones para el profesor	
Dejar a los alumnos conocer la situación y cómo funciona la interface (calculadora gráfica TI Nspire CX CAS) y el sensor de temperatura. Hacer emerger los procesos intuitivos y los primeros razonamientos para pensar en el fenómeno. En la etapa posterior se pedirá a los alumnos que precisen, tanto la razón de cambio de la temperatura en el tiempo, así como la función analítica de la temperatura en función del tiempo.	

Fase II – Estableciendo el modelo matemático y su solución	
Situación: Establecer el modelo matemático (ED) que permita representar el cambio de la temperatura respecto al tiempo.	
Consigna	**Desarrollo**
Deberás establecer una ED que permita modelar el cambio de temperatura respecto al tiempo t.	Trabajo en equipos de 3 alumnos. El profesor apoya en guiar a los alumnos en reflexionar cómo cambia la temperatura en el tiempo y la manera de expresarlo matemáticamente. Los alumnos trabajan en escribir la ED y toman en cuanta diversos factores que influyen como la temperatura del medio ambiente y/o temperatura inicial del agua hirviendo.
Recomendaciones para el profesor	
Se sugiere intentar dejar que los alumnos propongan la variación al nuevo modelo de ED que se pretende estudiar. Generalmente en este año universitario, más de la mitad de la población sabe que se debe "ajustar el modelo" pero no sabe cómo justificar tal movimiento. En diálogo grupal se unen argumentos de los alumnos para justificar "en conjunto" la nueva ED.	

<table>
<tr><th colspan="2">Fase III – Resolviendo la ED para conocer la Temperatura en función del tiempo t</th></tr>
<tr><td colspan="2">Situación: Resolución matemática del modelo matemático (la ED) para identificar la solución de la Temperatura en todo tiempo.</td></tr>
<tr><th>Consigna</th><th>Desarrollo</th></tr>
<tr><td>Resuelve el modelo matemático previamente establecido con apoyo de algún método analítico. Encuentra la solución general y particular de la misma.</td><td>Trabajo en equipo de 3 personas. El profesor permite que los alumnos resuelvan la ED establecida previamente haciendo uso de algún método visto en clase.
Si la actividad se desarrolla en las primeras sesiones del curso, podrá utilizar el método analítico de variables separables. En esta parte es muy importante resaltar que los datos de inicio de cada equipo pueden/deben ser diferentes, respecto a la temperatura del medio ambiente y/o la inicial por lo que se espera tener resultados distintos (aunque similares) para cada equipo.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Recomendaciones para el profesor</th></tr>
<tr><td colspan="2">En este momento es una oportunidad de volver a repasar el método analítico de variables separables en un contexto diferente a Crecimiento y Decrecimiento exponencial, además en un contexto diferente y con una ED que varía de la estructura original que ellos conocen. Es importante precisar la diferencia entre variables y parámetros dentro de la ED.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Fase IV – Validar el modelo teórico vs el experimental</th></tr>
<tr><td colspan="2">Situación: Se pide a cada equipo comparar la gráfica de la temperatura obtenida por ellos en la solución particular y el modelo teórico con la gráfica obtenida por el sensor.</td></tr>
<tr><th>Consigna</th><th>Desarrollo</th></tr>
<tr><td>Se te pide comparar la gráfica obtenida desde el modelo teórico (gráfica de la solución particular) con la obtenida por el sensor de temperatura. ¿Qué puedes decir de ambas gráficas? Se te pide comparar el valor de la temperatura en un tiempo t determinado (entre 0 y 15 minutos) haciendo uso del modelo teórico. Observa el valor que reporta el sensor y concluye sobre esta comparación. Se sugiere mejorar para que esta diferencia (en caso de haberla) sea mínima.</td><td>Los alumnos comparan y se espera se observe la similitud pero que a su vez identifiquen las diferencias que permitan avanzar en la comprensión del significado de una solución de una ED. Cada equipo expone su comparación, sugerencias de mejora y sobre todo los nuevos valores con el modelo ajustado.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Recomendaciones para el profesor</th></tr>
<tr><td colspan="2">Se pide a los alumnos comparar el valor de la temperatura en un tiempo preciso. En la práctica se pregunta por t = 15 minutos (900 segundos). En realidad, es un pretexto para que ellos comparen y reflexionen sobre la validez de su modelo. Generalmente existen diferencias importantes entre el</td></tr>
</table>

valor reportado por el modelo teórico y el experimental. Se pregunta entonces a los alumnos a qué puede causar en el fenómeno tal diferencia, sus respuestas suelen ser variadas, desde "errores" desde lo teórico (en realidad se deben recalcular los parámetros; k principalmente) y a veces de manipulación del sensor, de lectura de "valores iniciales". Se espera una síntesis de la institucionalización sobre la coordinación de los registros analítico y gráfico, en el caso del estudio del cambio de temperatura (enfriamiento) en el agua hirviendo.

Análisis a priori

Fase I

Los alumnos han estudiado magnitudes que cambian (crecen o decrecen exponencialmente) a través de un comportamiento de tipo exponencial. Esto permite explicar que los alumnos suelen proponer modelos como $\frac{dT}{dt} = k * T(t)$ o modelos del tipo exponencial $T(t) = Pe^{rt}$ (aprendido desde la preparatoria) ó $T(t) = Ce^{kt}$ visto en las clases previas de este mismo curso (donde k representa una constante de proporcionalidad). Un argumento que suele nacer en algunos alumnos de manera muy intuitiva es el de determinar que en esta ocasión la temperatura no puede descender totalmente hasta cero sino que debe ser hasta la temperatura del medio ambiente, en nuestro caso, la temperatura del salón de clase. Esto es un elemento muy importante que ellos conocen incluso de otras clases como Física ó Termodinámica.

Fase II

Los alumnos suelen proponer modelos como $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$. Algunas posibles variaciones son el que se desee precisar la k como un parámetro negativo $\frac{dT}{dt} = -k * (T(t) - T_M)$ desde la misma ED. En ocasiones solo invierten el orden dentro de las diferencias como $\frac{dT}{dt} = k * (T_M - T(t))$. A lo anterior se le conoce verbalmente como "la forma en que cambia la temperatura en el tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo T = T(t) (agua hirviendo en este caso) y la del medio ambiente T_M". La ED esperada es $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$ con el correspondiente valor inicial de la temperatura $T(t = 0) = T_0$. Es importante precisar que habrá ligeras variaciones del valor de T_M (suele pasar para salones muy amplios) pero sobre todo en T_0 (esto depende de la lectura de los propios alumnos sobre este dato).

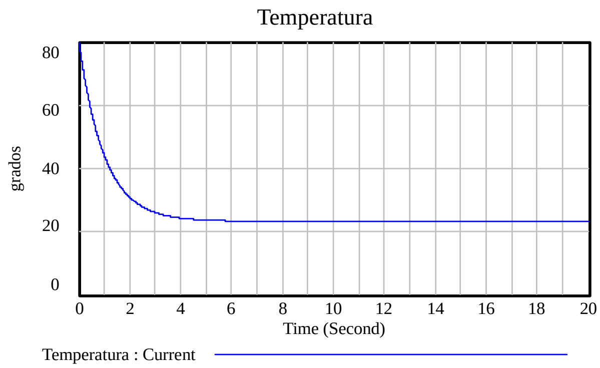
Fase III

Los alumnos resuelven la ED a través del primer método visto en el curso (y el único hasta el momento visto) llamado Variables Separables, el cual consiste en separar la variable dependiente Temperatura T y la variable independiente tiempo t en ambos lados de la ED, lo que conduce a la ecuación siguiente en la que C es una constante:

$$T(t) = T_M + \boldsymbol{C}e^{kt}$$

Posteriormente, en los problemas en contexto como éste, nos interesa más tener la solución particular, es decir, precisar los valores de $\boldsymbol{C}$ y k.

Ejemplo: Si la temperatura inicial es 80 grados centígrados y la de medio ambiente 23 grados centígrados, la solución particular se vería como:



Fase IV

Se pretende comparar los resultados teóricos y los experimentales de un modelo matemático. Si las condiciones lo permiten se podrán sugerir modificaciones al modelo de la solución particular (condiciones iniciales) para que los alumnos puedan disminuir las diferencias entre uno y otro. En ese caso, tendrían que replantear la solución. Se puede compartir una tabla de diferencias entre valores obtenidos por los alumnos:

Equipos	Temperatura calculada a los 900 segundos	Temperatura registrada por los sensores	Diferencia
9 y 10 (A los 600 s)	57.38ºC	62ºC	4.62
1 y 12	47.63ºC	55.2ºC	7.57
13	50ºC	53.8ºC	3.8
6	50.31ºC	53.8ºC	3.49
2 y 8	47.18ºC	53.4ºC	6.22
7	48.89ºC	52.6ºC	3.71
5 y 11	43.48ºC	54.0ºC	10.52
3 y 4	47.73ºC	54.7ºC	6.97

7a UTILISATION DES SENSEURS CBR2 POUR L'ÉTUDE DE SITUATIONS FONCTIONNELLES AU NIVEAU SECONDAIRE ET UNIVERSITAIRE

Activités (niveau secondaire) du chapitre 7: Guide pour l'enseignant

Valériane Passaro[27], Ruth Rodríguez Gallegos[28], Mireille Saboya[29], Fabienne Venant[30]

NOM DE L'ACTIVITÉ:
L'étude du déplacement d'une personne

OBJECTIF DE L'ACTIVITÉ:
Développer la compréhension de la notion de fonction à travers un questionnement sur la covariation de deux grandeurs dans une situation réelle.

NIVEAU:
Fin du secondaire (élèves de 14 à 17 ans)

CONTENU MATHÉMATIQUE ABORDÉ:
Fonction, covariation, représentation graphique, modélisation

DURÉE APPROXIMATIVE: 75 minutes

MATÉRIEL NÉCESSAIRE:
- Pour les élèves: Chaque équipe dispose d'un CBR2, d'un labQuest[31] et de papier collant pour pouvoir faire des marques au sol.
- Pour l'enseignant : Ordinateur, projecteur, toile, CBR2, labQuest

RECOMMANDATIONS POUR L'ENSEIGNANT:
Les élèves travaillent en équipe de 3 ou 4.

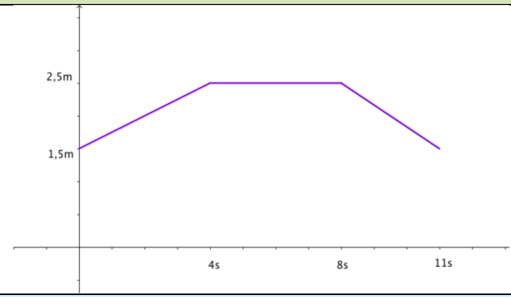
Phase 0: Présentation du contexte aux élèves
Il est souvent utile de savoir comment varie la distance entre un objet et un point de référence fixe au cours du temps. Par exemple, lorsqu'un radar de contrôle aérien capte la présence d'un avion, des capteurs évaluent la distance entre cet avion et la tour de contrôle pour éviter les accidents. Afin de mieux comprendre comment on peut analyser le déplacement d'un objet au cours du temps, nous allons **étudier le déplacement d'une personne**.

[27] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canadá – passaro.valeriane@uqam.ca
[28] Tecnológico de Monterrey - México - ruthrdz@itesm.mx
[29] UQAM – Canadá – saboya.mireille@uqam.ca
[30] UQAM – Canadá – venant.fabienne@uqam.ca
[31] Le labQuest est une machine qui récupère les données prises par le capteur pour les traiter. Ici, nous utilisons le logiciel labQuest pour représenter graphiquement la distance entre la personne et le capteur en fonction du temps.

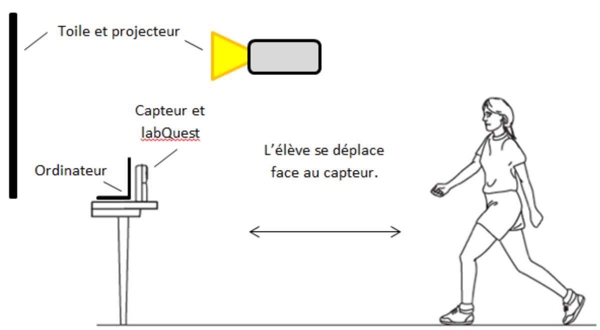
Description de l'activité :

Phase I : Exploration de l'outil et de la situation

Situation : Voici un graphique qui représente la distance horizontale entre la personne et le capteur en fonction du temps.



Consigne	Déroulement
« Vous devez tenter de reproduire ce graphique en effectuant vous-même le déplacement face au capteur placé sur le bureau ».	En grand groupe. L'enseignant présente la situation aux élèves. Il envoie plusieurs élèves faire des essais en avant de la classe (un seul capteur est utilisé, le graphique est projeté en avant de la classe, voir schéma ci-dessous). Il laisse les élèves expérimenter et échanger spontanément.



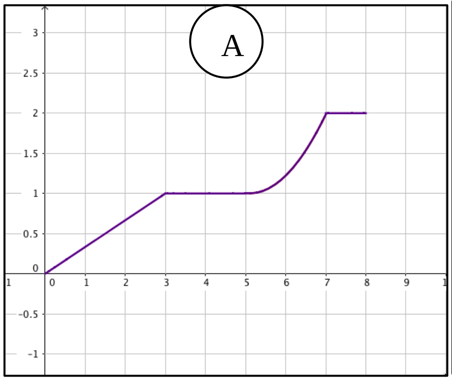
Recommandations à l'enseignant

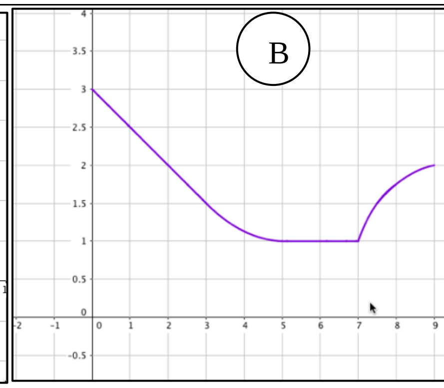
- Laisser les élèves s'approprier la situation et le fonctionnement du capteur sans forcer une analyse précoce de la coordination entre leurs actions et l'allure du graphique.
- Envoyer plusieurs élèves en avant de la classe de manière à ce que d'un essai à l'autre ils tentent d'obtenir un graphique mieux ajusté à celui proposé.

Phase II : Interprétation graphique

Situation : Voici un autre graphique qui représente la distance horizontale entre la personne et le capteur en fonction du temps.

Exemples de graphiques :





Consigne	Déroulement
« Vous devez écrire un texte qui explique à quelqu'un qui n'a pas le graphique sous les yeux comment se déplacer face au capteur pour reproduire exactement ce graphique. »	Équipes de 3 ou 4 élèves. Chaque équipe dispose d'un CBR2 et d'un LabQuest. L'enseignant donne la consigne et **attribue un graphique différent à chacune des équipes**. Il laisse les élèves travailler en s'assurant que le texte est écrit sur une feuille libre sans représentation graphique.

Recommandations à l'enseignant

- Inciter les élèves à expliquer leur raisonnement aux autres membres de leur équipe et à s'entendre sur les instructions à donner à quelqu'un **qui ne voit pas le graphique**.
- Suggérer aux élèves de tester leur description en expérimentant à l'aide du CBR2.
- Suggérer de séparer le graphique en différentes parties et d'analyser la variation de la distance pour chacune de ces parties.

Phase III : Appropriation d'une description verbale et anticipation du graphique

Situation : Voici la description d'un déplacement produite par une autre équipe.

<u>Exemple de description :</u>

« Au départ, place-toi à 3 mètres du capteur. Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur à vitesse constante pendant 3 secondes puis ralentis pendant 2 secondes jusqu'à ce que tu sois à 1 mètre du capteur. Reste immobile pendant 2 secondes puis recule rapidement au départ mais en ralentissant pendant 2 secondes pour te rendre à 2 mètres du capteur. »

Consigne	Déroulement
C. « Vous devez lire le texte et vous assurer de bien saisir la succession d'actions à faire. Un membre de l'équipe doit s'exercer à effectuer ce mouvement (les autres doivent s'assurer qu'il correspond bien au texte)	Équipes de 3 ou 4 élèves. L'enseignant donne la consigne et distribue les textes produits par les élèves en s'assurant que chaque équipe ne reçoit pas son propre texte. Il laisse les élèves travailler en s'assurant qu'ils

pour pouvoir le refaire ensuite devant la classe avec le capteur. »	comprennent et respectent bien le contenu du texte.
D. « Produisez une esquisse du graphique associé au déplacement que vous venez de travailler (distance en fonction du temps). »	Individuel puis partage avec l'équipe.
Recommandations à l'enseignant	
C. Laisser les élèves s'approprier le texte et identifier les manques ou les erreurs s'il y en a. D. Inciter les élèves à comparer leurs graphiques en expliquant comment ils sont passés de la description au graphique.	

Phase IV : Validation/invalidation des descriptions verbales et des graphiques anticipés, et analyse du comportement des accroissements	
Situation : Chaque équipe a reçu une description d'un déplacement, on veut maintenant produire le graphique associé et voir s'il correspond bien au graphique de départ.	
Consigne	**Déroulement**
« Pour chaque équipe, un élève vient en avant reproduire le mouvement décrit tel qu'il l'a pratiqué. Nous devons ensuite comparer le graphique obtenu à celui qui avait été donné initialement à l'équipe qui a produit le texte ».	Grand groupe. Un élève par équipe vient effectuer le mouvement (il peut avoir un maximum de 3 essais). Quand l'équipe est satisfaite du graphique obtenu (ils considèrent que l'élève a effectué le déplacement conformément à ce que le texte décrivait), l'enseignant montre en parallèle le graphique original. Il demande aux élèves de comparer les deux graphiques et d'expliquer les différences s'il y en a.
Recommandations à l'enseignant	
• Choisir au préalable, lors de la phase III, deux ou trois descriptions pour lesquelles l'analyse sera approfondie. • Poser des questions afin d'amener les élèves à repérer et interpréter les points caractéristiques. • Poser des questions sur le comportement des accroissements afin d'amener les élèves à : 3) Qualifier le déplacement associé à un segment de droite ascendant ou descendant. 4) Qualifier le déplacement associé à des courbes ouvertes vers le haut ou vers le bas.	

Analyse a priori

Phase I
Dans cette phase, les élèves explorent spontanément l'outil et s'engagent dans la situation. Pendant qu'un élève se déplace, les autres l'observent et observent le traçage simultané du graphique. Cette perception de la relation de dépendance et des variations simultanées du temps et de la distance favorise le travail sur la covariation qui sera sollicité par la suite. Ainsi, même si les élèves commencent à mettre en place des stratégies pour mieux ajuster la courbe tracée à celle proposée, l'objectif n'est pas encore de conscientiser et formuler clairement ces stratégies. La coordination des registres *graphique* et *expérience* est particulièrement sollicitée durant cette phase. Aux vues des travaux de Passaro (2015) et Carlson (2002), nous nous attendons à ce que les élèves adoptent un regard statique (correspondance) sur le graphique en repérant des points caractéristiques. Toutefois, comme le graphique se trace simultanément au déplacement, les élèves pourraient commencer à faire des inférences sur la vitesse du déplacement et donc adopter un regard dynamique sur le graphique (covariation).

Phase II
Dans cette phase les élèves doivent conscientiser et expliciter les stratégies qui ont émergées à la phase I. La tâche exige des élèves de coordonner les registres *graphique* et *verbal* en passant éventuellement par le registre de l'expérience. Comme le texte doit suffire à ce qu'une tierce personne effectue le bon déplacement permettant de tracer le graphique donné, les élèves doivent composer des descriptions détaillées, ils ne peuvent pas se contenter de donner des informations statiques comme « Place-toi à un mètre au départ » ou « Arrête quand tu arrives à 2 mètres de distance ». Le CBR offre justement la possibilité aux élèves de valider, d'invalider ou d'ajuster les éléments de leur description, particulièrement ceux qui concernent la variation. Voici un exemple de description qui pourrait être produite par une équipe d'élèves pour le graphique B : « Au départ, place-toi à 3 mètres du capteur. Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur à vitesse constante pendant 3 secondes puis ralentis pendant 2 secondes jusqu'à ce que tu sois à 1 mètre du capteur. Reste immobile pendant 2 secondes puis recule rapidement au départ mais en ralentissant pendant 2 secondes pour te rendre à 2 mètres du capteur ».

Phase III	
Partie A	**Partie B**
À la partie A de cette phase, les élèves doivent visualiser le mouvement à partir de la description écrite puis l''élève qui effectue le mouvement doit transposer cette visualisation dans l'expérience réelle (*embodiement*). Cette coordination entre les registres *verbal* et *expérience* peut	À la partie B, chaque élève doit tracer une esquisse du graphique de la situation. Cette tâche exige une coordination entre les registres *verbal* et *graphique*. Lors du partage avec les autres membres de l'équipe, la coordination de ces deux registres est approfondie lorsque les élèves explicitent les associations qu'ils effectuent entre des éléments signifiants du texte et des variables visuelles du graphique. Parmi les erreurs possibles, on peut anticiper la confusion entre l'objet source (la trajectoire de la personne) et l'objet cible (le tracé du

favoriser l'anticipation sur l'allure du graphique associé.	graphique qui montre comment varie la distance en fonction du temps, Janvier 1993). Ainsi un élève pourrait tracer un segment horizontal lorsque la personne se déplace en ligne droite à vitesse constante.

Phase IV

La confrontation mise en jeu dans cette phase va permettre de renforcer la coordination des trois registres en jeu (expérience, description verbale et graphique) à travers la mise en évidence de la correspondance entre les éléments signifiants de chacun de ces registres. D'abord, les éléments signifiants associés aux points caractéristiques peuvent être relevés (regard correspondance). Par exemple, dans l'exemple de description donné précédemment, l'enseignant pourrait relever trois extraits et mettre en évidence l'association entre les éléments signifiants des registres *verbal* et *graphique* (voir tableau 1).

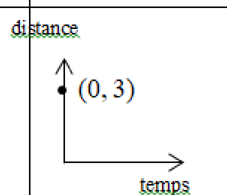
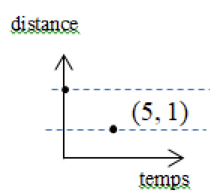
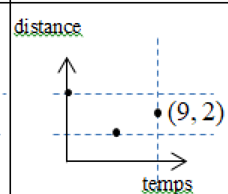
Registre verbal	**Description associée à l'expérience**	Au départ, place-toi à 3 mètres du capteur	jusqu'à ce que tu sois à 1 mètre du capteur	pour te rendre à 2 mètres du capteur
	Interprétation de la description pour la conversion vers le graphique	Le point (0, 3) appartient au graphique de la fonction. L'ordonnée à l'origine est 3.	Le point (5,1) appartient au graphique de la fonction. Le minimum est 1 et l'image est [1, 3].	Le point (9, 2) appartient au graphique de la fonction. Le domaine est [0, 9].
Registre graphique	**Graphique**			

Tableau 1 Association entre les éléments signifiants du registre verbal et les variables visuelles du registre graphique pour les points caractéristiques (regard correspondance)

L'enseignant doit ensuite amener les élèves à aller plus loin afin de caractériser l'allure de la courbe entre ces points et le déplacement associé. Par exemple, si le tracé est une courbe ascendante ouverte vers le haut, on ne pourra pas se contenter de dire à la personne qui se déplace de reculer, il faudra lui dire comment reculer. Comme l'ont montré Passaro (2015) et Carlson (2002), les élèves font spontanément référence à la vitesse et à l'accélération pour décrire plus précisément le déplacement. Par exemple, toujours pour le tracé courbé ascendant ouvert vers le haut, un élève pourrait dire « recule en allant de plus en plus vite » ou même « recule en accélérant ». Cette qualification intuitive du déplacement est un bon point de départ car elle permet d'avoir une idée de l'allure du graphique. Dans la description présentée précédemment, l'enseignant pourrait relever trois extraits et amener les élèves à les interpréter pour la conversion vers le graphique (voir tableau 2).

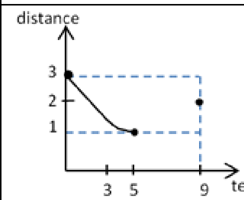
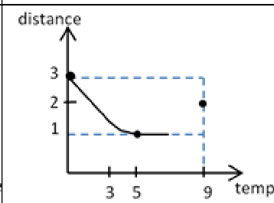
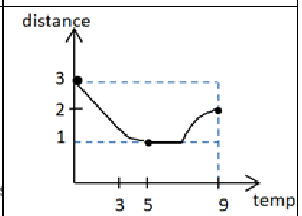
Registre verbal	**Description associée à l'expérience**	Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur à vitesse constante pendant 3 secondes puis ralentis pendant 2 secondes.	Reste immobile pendant 2 secondes.	Recule rapidement au départ mais en ralentissant pendant 2 secondes
	Interprétation de la description pour la conversion vers le graphique	Sur [0, 5] la fonction est décroissante. Sur [0, 3] la fonction est affine, elle est représentée par un segment de droite oblique descendant. Sur [3, 5] la fonction est représentée par une courbe ouverte vers le haut.	Sur [5, 7] la fonction est constante, elle est représentée graphiquement par un segment horizontal.	Sur [7, 9] la fonction est croissante. Elle est représentée par une courbe ouverte vers le bas abrupte au départ puis de moins en moins.
Registre graphique	**Graphique**			

Tableau 2 : Association entre les éléments signifiants du registre verbal et les variables visuelles du registre graphique pour savoir comment relier les points (regard covariation)

L'interprétation suggérée nécessite toutefois une expérience à interpréter graphiquement les concepts de vitesse et d'accélération. De plus, en expérimentant le déplacement, les élèves risquent d'être confrontés à une problématique importante : comment effectuer la bonne accélération. L'enseignant peut saisir l'occasion pour approfondir l'analyse de la variation de la distance à l'aide d'accroissements quantifiés. En effet, lorsqu'on parle intuitivement de la vitesse qui change, on parle en fait du taux de variation qui varie et donc de la variation de la fonction dérivée. Pour amener les élèves vers les concepts mathématiques associés à leur intuition, un travail sur les accroissements est nécessaire. Pour donner un sens à ces concepts dans le registre de l'expérience, on doit se questionner sur le comportement des accroissements de la distance lorsque les accroissements du temps sont constants. L'enseignant pourrait par exemple demander aux élèves de décrire comment augmente la distance à chaque seconde puis proposer d'utiliser le ruban à mesurer en le plaçant à côté de (ou sur) la ligne déjà tracée au sol pour décrire plus précisément le déplacement (voir exemple dans le tableau 3).

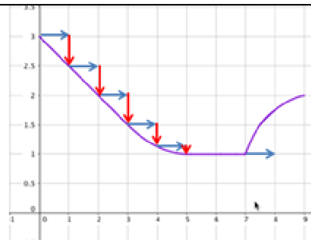
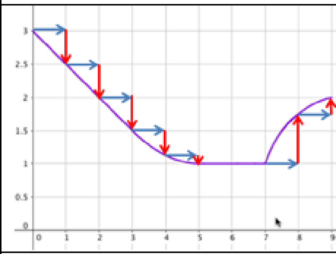
Description associée à l'expérience	Lorsque le chronomètre part, avance vers le capteur **à vitesse constante** pendant 3 secondes puis **ralentis** pendant 2 secondes.	**Recule rapidement** au départ mais en **ralentissant** pendant 2 secondes
Analyse des accroissements sur le graphique		
Description du comportement des accroissements	**À vitesse constante :** → À chaque seconde, la distance diminue de 0,5 mètre. **Ralentis :** → Pendant la première seconde, la distance diminue de 0,4 mètre puis pendant la deuxième seconde de 0,1 mètre.	**Reculer rapidement puis ralentir :** → Pendant la première seconde la distance augmente de 0,75 m alors que pendant la deuxième la distance augmente de 0,25m.
Interprétation dans le registre de l'expérience	« Fais un pas vers l'avant à chaque seconde de la manière suivante : - fais 3 pas de 0,5 m (50 cm) - fais 1 pas de 0,4 m (40 cm) puis un pas de 0,1 m (10 cm). »	« Fais un pas vers l'arrière à chaque seconde de la manière suivante : - fais 1 pas de 0,75 m (75 cm) - fais 1 pas de 0,25 m (25 cm). »

Tableau 3 *Interprétation du graphique à l'aide des accroissements*

7b UTILISATION DES SENSEURS CBR2 POUR L'ÉTUDE DE SITUATIONS FONCTIONNELLES AU NIVEAU SECONDAIRE ET UNIVERSITAIRE

Activités (niveau universitaire) du chapitre 7: Guide pour l'enseignant

Ruth Rodríguez Gallegos[32], Valériane Passaro[33], Mireille Saboya[34], Fabienne Venant[35]

NOM DE L'ACTIVITÉ :
Étude du changement de température dans l'eau bouillante

OBJET DE L'ACTIVITÉ :
Approcher / montrer aux étudiants le phénomène du refroidissement de l'eau bouillante, les sensibiliser à la méthode expérimentale et faire le lien avec la partie théorique (analytique).

DEGRÉ UNIVERSITAIRE LORSQU'IL PEUT ÊTRE MIS EN ŒUVRE :
Collège Troisième/ lycée (14-17 ans) et université (18-20 ans)

CONTENU MATHÉMATIQUE :
Fonction, covariation, représentation graphique, modélisation, équation différentielle, représentation symbolique

DURÉE APPROXIMATIVE : 75 minutes

MATÉRIEL NÉCESSAIRE :

- Pour les étudiants : Chaque équipe dispose d'un capteur de température, d'une calculatrice graphique TI-Nspire CX CAS, d'un verre.
- Pour l'enseignant : une bouilloire électrique et un ordinateur portable avec émulateur informatique.

RECOMMANDATIONS POUR L'ENSEIGNANT :
Les étudiants travaillent en équipes de 3.

[32] Tecnológico de Monterrey - México - ruthrdz@itesm.mx
[33] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canadá – passaro.valeriane@uqam.ca
[34] UQAM – Canadá – saboya.mireille@uqam.ca
[35] UQAM – Canadá – venant.fabienne@uqam.ca

Description de l'activité

Phase I - Expérimenter pour mieux comprendre le contexte thermique à modéliser	
Situation : Appréhension du phénomène à modéliser et affichage d'un graphique représentation la température de l'eau en fonction du temps à l'aide du capteur de température.	
Consigne	**Déroulement**
Vous devez essayer de trouver le graphique dans la calculatrice / interface permettant de représenter la température en fonction du temps.	Par équipe de 3 étudiants. L'enseignant présente à la classe la nécessité et l'importance d'étudier la façon dont la température des objets change, et présente le contexte de l'activité : étudier les variations de température lors du refroidissement d'une eau portée à ébullition. Les étudiants sont invités à mesurer les changements de température à l'aide d'un capteur de température, en suivant une procédure expérimentale détaillée, étape par étape.
Recommandations pour l'enseignant	
Présenter la situation aux étudiants, les informer du fonctionnement de l'interface (calculatrice graphique TI Nspire CX CAS) et du capteur de température. Faire émerger les processus intuitifs et les premiers raisonnements pour réfléchir au phénomène. À un stade ultérieur, les étudiants seront invités à spécifier le rapport et la fonction analytique décrivant la variation de la température en fonction du temps.	

Phase II - Mise en place du modèle mathématique et de sa solution	
Situation : Établissement du modèle mathématique traduit par une équation différentielle (ED) représentant le changement de température en fonction du temps.	
Consigne	**Déroulement**
Vous devez établir une ED qui permet de modéliser le changement de température en fonction du temps t.	Travail en équipe de 3 étudiants. L'enseignant amène les étudiants à réfléchir à la manière dont la température change dans le temps et à la manière de l'exprimer mathématiquement. Les étudiants travaillent à l'établissement de l'ED et prennent en compte divers facteurs tels que la température de l'environnement et / ou la température initiale de l'eau en ébullition.
Recommandations pour l'enseignant	
Il est suggéré d'essayer de laisser les étudiants proposer la variation du nouveau modèle de ED qui doit être étudié. Généralement, au cours de cette année universitaire, plus de la moitié de la population sait qu'elle doit "ajuster le modèle" mais ne sait pas comment justifier un tel changement. Une discussion de groupe permet de réunir les arguments des étudiants pour justifier "ensemble" la nouvelle ED.	

Phase III - Résolution du problème pour connaître la température en fonction du temps t	
Situation : Résolution mathématique du modèle mathématique (ED) pour obtenir la température à tout moment.	
Consigne	**Développement**
Résoudre le modèle mathématique précédemment établi à l'aide d'une méthode analytique. Trouver la solution générale et particulière de celle-ci.	Travail en équipe de 3 étudiants. L'enseignant permet aux étudiants de résoudre l'ED précédemment établi en utilisant une méthode vue en classe. Si l'activité a lieu au cours des premières sessions du cours, il est possible d'utiliser la méthode analytique de séparation des variables. Dans cette phase, il est très important de noter que les données de départ de chaque équipe peuvent / doivent être différentes, en ce qui concerne la température de l'environnement et / ou les données initiales, de sorte que les résultats devraient être différents (bien que similaires) pour chaque équipe.
Recommandations pour l'enseignant	
C'est l'occasion de revenir sur la méthode de résolution analytique par séparation des variables dans un contexte différent de celui de la croissance et décroissance exponentielle, et avec une ED qui diffère de la structure originale connue des étudiants. Il est important de spécifier la différence entre les variables et les paramètres au sein de l'ED.	

Phase IV - Valider le modèle théorique par rapport au modèle expérimental	
Situation : comparaison du graphique obtenu en phase I avec celui donné par la résolution de l'ED en phase III	
Consigne	**Déroulement**
Il vous est demandé de comparer le graphique obtenu à partir du modèle théorique (graphique de la solution particulière) avec celui obtenu par le capteur de température. Que pouvez-vous dire sur les deux graphiques ? Vous êtes invité à comparer la valeur de la température dans un temps donné t (entre 0 et 15 minutes) à l'aide du modèle théorique. Observez la valeur indiquée par le capteur et concluez cette comparaison. Il est suggéré d'ajuster votre modèle pour que cette différence (le cas échéant) soit minimale.	Les étudiants comparent et s'attendent à ce que la similarité soit observée, mais ils identifient à leur tour les différences qui permettent d'avancer dans la compréhension de la signification d'une solution de l'ED. Chaque équipe présente sa comparaison, ses suggestions d'amélioration et surtout les nouvelles valeurs obtenues dans le modèle ajusté.

Recommandations pour l'enseignant

Les étudiants sont invités à comparer la valeur de la température à une heure précise. En pratique, on demande t = 15 minutes (900 secondes). En fait, c'est un prétexte pour les amener à comparer et à réfléchir à la validité de leur modèle. Généralement, il existe des différences importantes entre la valeur donnée par le modèle théorique et celle obtenue de façon expérimentale. On demande ensuite aux étudiants ce qui peut causer une telle différence, leurs réponses sont généralement variées, depuis des "erreurs" de la théorie (en fait, il faut recalculer les paramètres, k principalement) jusqu'à des erreurs dans la manipulation du capteur, ou dans la lecture des "valeurs initiales". La phase d'institutionnalisation devrait permettre une synthèse sur la coordination des registres analytique et graphique, dans le cas de l'étude du changement de température (refroidissement) de l'eau bouillante.

Analyse a priori

Phase I

Les étudiants ont étudié les variations de grandeurs (croissance ou décroissance exponentielle) en raison d'un comportement exponentiel. Cela nous permet d'expliquer pourquoi ils proposent généralement des modèles tels que $\frac{dT}{dt} = k * T(t)$ ou des modèles de type exponentiel, $T(t) = Pe^{rt}$ (appris du lycée) ou $T(t) = Ce^{kt}$ vu dans les classes précédentes de ce même cours (où k représente une constante de proportionnalité). Un argument qui émerge généralement de manière très intuitive chez certains étudiants est de déterminer que cette fois-ci, la température ne peut pas tomber complètement à zéro mais elle doit correspondre à la température de l'environnement, dans notre cas à la température de la salle de classe. C'est un élément très important qu'ils rencontrent même dans d'autres cours comme la physique ou la thermodynamique.

Phase II

Les étudiants proposent généralement des modèles comme $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$. Certaines variantes possibles, comme celles pour lesquelles on spécifie que le paramètre est négatif $\frac{dT}{dt} = -k * (T(t) - T_M)$ au sein de la même ED. Parfois, ils inversent simplement l'ordre dans les différences comme $\frac{dT}{dt} = k * (T_M - T(t))$. Ceci est connu verbalement comme "la façon dont la température change en fonction du temps est proportionnelle à la différence entre la température du corps T = T(t) (eau bouillante dans ce cas) et l'environnement T_M". L'ED attendu est $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$ avec la valeur initiale correspondante de la température $T(t = 0) = T_0$. Il est important de préciser qu'il y aura de légères variations dans la valeur de T_M (Cela arrive généralement pour les très grandes pièces) mais surtout dans T_0 (Cela dépend de la lecture des étudiants eux-mêmes sur ces données).

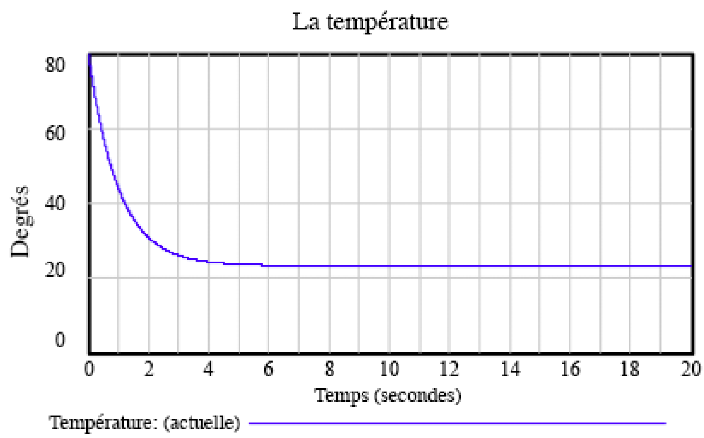
Phase III

Les étudiants résolvent l'ED par la première méthode vue dans le cours (et la seule à ce jour) appelée Variables séparables, qui consiste à séparer la variable dépendante Température T et la variable indépendante t du côté de l'ED, ce qui conduit à l'équation suivante dans laquelle C est une constante :

$$T(t) = T_M + \boldsymbol{C}e^{kt}$$

Plus tard, dans des problèmes comme celui-ci, nous nous intéresserons davantage à la solution particulière, à savoir spécifier les valeurs de $\boldsymbol{C}$ et k.

Exemple : Si la température initiale est de 80 degrés Celsius et celle de l'environnement de 23 degrés Celsius, la solution en question ressemblerait à:



Phase IV

Le but est de comparer les résultats théoriques et expérimentaux d'un modèle mathématique. Si les conditions le permettent, des modifications au modèle de la solution particulière (conditions initiales) peuvent être suggérées afin que les étudiants puissent réduire les différences entre les solutions. Dans ce cas, ils devraient repenser la solution. Vous pouvez partager un tableau des différences entre les valeurs obtenues par les étudiants :

Les équipes	Température calculée à 900 secondes	Température enregistrée par les capteurs	La différence
9 y 10 (A 600 s)	57.38°C	62°C	4.62
1 y 12	47.63°C	55.2°C	7.57
13	50°C	53.8°C	3.8
6	50.31°C	53.8°C	3.49
2 y 8	47.18°C	53.4°C	6.22
7	48.89°C	52.6°C	3.71
5 y 11	43.48°C	54.0°C	10.52
3 y 4	47.73°C	54.7°C	6.97

8 ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCION DERIVADA E INTEGRAL A TRAVES DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: Guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala[36], Lilia López Vera[37], G. Eréndira Núñez Palenius[36]

Actividad 1: Diferencias

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5.
En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial*.

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemática en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene $2383.87 al inicio del mes y $2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?		
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3^0 C y después de 5 horas se encuentra a 24^{0}C. ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?		
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de		

[36] Facultad de Físico Matemáticas, Universidad Michoacana.
[37] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León.

la semana?		

b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

d) En la siguiente tabla en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia uniforme (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	
45, 38, 31, 24, 17	
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	
1, 9, 17, 27, 41	

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto, u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i. Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		

$u_4 - u_1$		

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).

f) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_1$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu? ¿qué puede concluir?

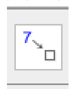
h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

Parte 2 (con CAS): Formulación de Δx *y* Δy

Si una variable *y* depende de una variable *x,* de tal manera que cada valor de *x* determina exactamente un valor de *y*, entonces se dice que ***y* es una función de *x***. Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por gráficas, algebraicamente por fórmulas y/o verbalmente. Una **función** *f* es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por *x*, entonces la salida es denotada por *f(x)* (se lee como *"f* de *x*"). Para una entrada dada *x*, la salida de la función *f* se denomina el valor de *f* en *x*. Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo *y*, y se escribe como *y= f(x).* Esta ecuación expresa *y* como una función de *x*; la variable *x* se llama la ***variable independiente*** de *f*, y la variable *y* se llama la ***variable dependiente*** de *f.*

Las coordenadas cartesianas son un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizado para la representación gráfica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje "x", se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje "y", se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y).

a) Introduzca la expresión $\frac{5x-6x*x+x^2}{x}$ a la hoja de CAS y presione **enter**, ¿qué observa? ¿qué sucede? ¿Para qué puede ser útil la observación anterior?

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando "Sustituye", . Dicho comando se elige presionando el icono .

b) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$. Llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3		
-2		
-1.25		
-0.5		
0		
0.25		
0.89		

Actividades de aprendizaje para entender el concepto de función Derivada y Función integral a través de las razones de diferencias y las acumulaciones

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala[38], Lilia López Vera[39], G. Eréndira Núñez Palenius[38]

Actividad 2: Pendientes

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1. Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

2. Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

3. ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

4. Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

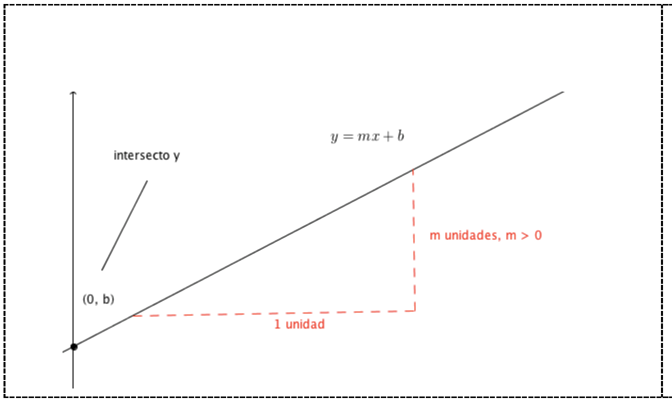
[38] Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.
[39] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

5. ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene:

$$y = m(0) + b = b$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m. La pendiente de una línea no vertical es el número de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se observa en la figura 1 y 2.



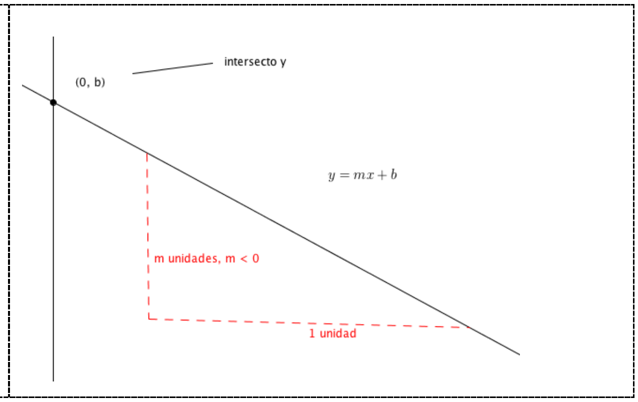


Figura 1. Línea recta con pendiente positiva **Figura 2.** Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación $y = 2x + 3$.

d) Considere los puntos (6, 9) y (0, 11). Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n), donde n es n-ésimo punto. Calcule la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2).

f) Exprese la ecuación de la pendiente para los puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ.

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

Rango	Diferencia de Años	Diferencia de C-14	Pendiente
6 – 14			
6 – 12			
6 – 10			
6 – 8			

b) Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo, calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r).

Rango	7c	7c – 7r
6 – 14		
6 – 12		
6 – 10		
6 – 8		

c) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

e) Para calcular la cantidad de C -14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente de los siguientes rangos utilizaría? (6 – 10, 7 – 10, 8 – 10, 9 – 10) ¿Por qué?

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Vista,** y después **Hoja de Cálculo**. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna “yrs” y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna “C14”.

Dentro de **Menú** , elija **Datos y Estadísticas**  y seleccione "**Análisis de regresión de dos variables**" Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione "**Modelo de Regresión**". Dentro de estas opciones existen varios ajustes disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal (mx +b)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

h) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial…** ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso g?

i) Utilizando la ecuación de mejor ajuste, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

j) Utilice la pendiente del rango 9 – 10 años para calcular la cantidad de C-14 a 9.3 y 9.6 años. Utilizando como rango 9.3 – 9.6 años, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

k) Considere la cantidad de C-14 calculada a 9.5 años del inciso f), k), y j). ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

l) Con sus palabras explique la observación anterior.

m) Exprese por medio de una expresión algebraica lo que acaba de decir.

Parte III (Simbolización): Desarrollo simbólica de la Pendiente

a) En el ☐ introduzca un símbolo que represente los datos.

☐	☐
0	**15.30**
1	**13.56**
2	**12.01**
3	**10.64**
4	**9.43**
5	**8.35**
6	**7.40**
7	**6.56**
8	**5.81**
9	**5.15**
10	**4.56**
11	**4.04**
12	**3.58**
13	**3.17**
14	**2.81**
15	**2.49**
16	**2.21**
17	**1.95**

b) Escriba la operación necesaria para calcular la pendiente entre 6 y 14.

c) ¿Cómo llama o expresa simbólicamente la ecuación anterior?

d) ¿Cómo queda la expresión simbólica anterior cuando se evalúa en 9.5 años?

e) ¿Cómo se expresa lo anterior para cualquier valor?

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala[40], Lilia López Vera[41], G. Eréndira Núñez Palenius[40]

Actividad 3: Pendiente como Función

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Desarrollo Matemático de $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Parte I (Simbológica): Desarrollo Preliminar

a) Una forma convencional de describir una pendiente es $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Observe la forma convencional y la suya de la actividad pasada, ¿Cuál prefiere usar? ¿Por qué?

La pendiente también se puede escribir como $\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, o $\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}$, o $\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}$, o $\frac{y_n-y_m}{x_n-x_m}$, donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son subíndices. Si $y_n=f(x_n)$ y n = *10*, se puede escribir como $y_{10}=f(x_{10})$.

b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10})-f(x_9)}{x_{10}-x_9}$ introduciendo la variable ***n***.

c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15})-f(x_8)}{x_{15}-x_8}$, ¿qué valor le daría a ***n***?

[40] Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.
[41] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1}? Exprese la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n.

Parte II (con lápiz y papel): Introducción de h

a) Compare la ecuación obtenida en el inciso d de la parte I, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

b) Observando la figura 1, ¿qué representa y a qué es igual ***h***?

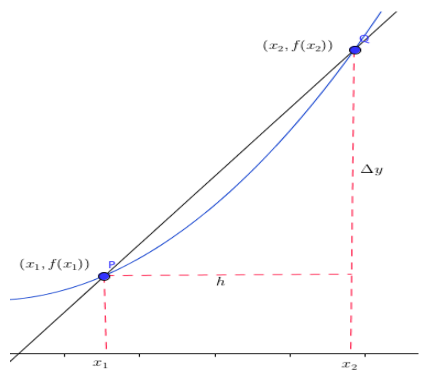


Figura 1. Introducción del concepto ligado al valor ***h***

c) Utilizando ***h***, ¿cómo queda la expresión de la pendiente?

d) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa *f(x₁), f(x₁+Δx) y f(x₁+h)?*

e) Considerando $f(x) = x^2 + 2x$ y Δx o h, ¿cuál es la ecuación de la pendiente del inciso c? (No es necesario reducir algebraicamente)

f) Si el primer punto es (1, 3), exprese la ecuación del inciso anterior con este punto. ¿Qué observa de esta ecuación?

Parte III (con CAS): Variación de h

a) Utilizando la hoja de cálculo, en la primera columna incluya los valores de Δx o h mientras que en la segunda columna va la pendiente. Utilice la ecuación de la pendiente del inciso f de la parte II. Como en cualquier hoja de cálculo, en la parte gris de la columna gris se puede expresar la función de la pendiente en donde Δx o h equivale a la variable "a", ya que es el valor de la columna A. Complete la tabla.

	A	B
◆		
1	0.1	
2	0.01	
3	0.001	
4	0	
5	-0.001	
6	-0.01	
7	-0.1	

b) ¿Qué observa cuando $\Delta \boldsymbol{x}$ o ***h = 0***? ¿A qué se debe ese valor?

c) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando $\Delta \boldsymbol{x}$ o ***h*** se acerca a cero a partir de los números positivos?

d) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números negativos?

e) Observando las respuestas a los incisos c y d, ¿llega a la misma conclusión?

f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente?

g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando $\boldsymbol{\Delta x}$ o $\boldsymbol{h = 0}$?

h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?

i) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o gráfico)? Explique su razonamiento.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala[42], Lilia López Vera[43], G. Eréndira Núñez Palenius[42]

Actividad 4: Límites

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Límite

Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30:

a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo se viajó.

b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, **escriba la operación** para calcular la velocidad promedio.

c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión.

[42] Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.
[43] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

Por otra parte, aun que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

s,t.=−16,t-2.+96t

La posición s es medida en pies con $s = 0$, corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos.

e) Escriba las operaciones para calcular la velocidad promedio y calcule la velocidad promedio entre el intervalo de tiempo, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$, iii) $t = 1$ y $t = 1.5$.

f) Observe los resultados de i, ii, y iii. ¿Qué diferencia observa?

g) Escriba la ecuación para la velocidad promedio de la piedra entre el intervalo *„t-0., t.*.

Al calcular la velocidad promedio, se utilizó la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se verá en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo [1, t]. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

La velocidad instantánea en el punto $\boldsymbol{t = t_0}$, se determina al calcular la velocidad promedio en el intervalo [t_0, t_1]. Cuando t_1 se acerca a t_0, la velocidad promedio típicamente se acerca a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo es muy pequeño. Este número se conoce como un límite, el cual se puede expresar matemáticamente como:

,v-instantanea.= „lim-*t*→,*t*-0..-,*v-promedio*..

i) Sustituya la velocidad promedio del inciso h, de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.

j) Calcule la velocidad instantánea utilizando la expresión anterior.

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Límite

El límite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se refiere a un límite de *dos-lados;* cuándo *f(x)* se acerca a *L* para valores de $x<a$ y para $x>a$. Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de *un lado* denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

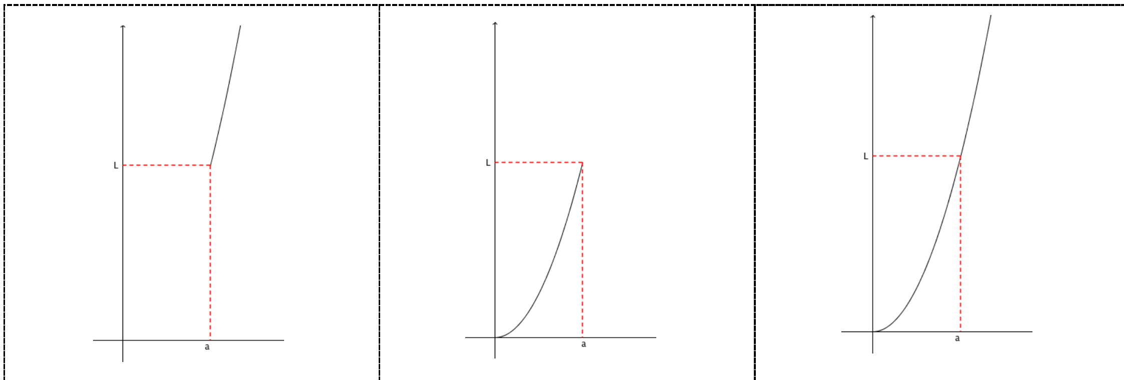
1. **Límite de mano derecha:** Suponga que *f* es definida para todos los valores de *x* cercanos a *a* y $x > a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a *L* para todos valores suficientemente cercanos a *a* con $x > a$, se escribe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ y se dice que el límite de *f(x)* cuando *x* se acerca a *a* por la derecha es igual a *L.*

2. **Límite de mano izquierda:** Suponga que *f* es definida para todos los valores de *x* cercanos a *a* y $x < a$. Si *f(x)* es arbitrariamente cercana a *L* para todos valores suficientemente cercanos a *a* con $x < a$, se escribe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ y se dice que el límite de *f(x)* cuando *x* se acerca a *a* por la izquierda es igual a *L.*

   El l-imite de una función existe cuando el límite por la izquierda es igual que el límite por la derecha es decir $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ siempre y cuando $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

a) Considere las siguientes gráficas y relacione la gráfica con el tipo de límite que se está tomando.

i) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$; ii) $\lim_{x\to a} f(x) = L$; iii) „ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$



b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$. Observe la gráfica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de *x* que no puede tomar? ¿Cuál es y por qué?

c) Compruebe utilizando lo siguiente: Coloque un punto sobre la gráfica de la función y deslice ese punto a lo largo de la gráfica, observe que coordenadas tiene el punto ¿Qué sucede cuándo ***x = 2***?

d) Utilizando un incremento de trazo de 0.01, complete la siguiente tabla.

x	**1.95**	**1.96**	**1.97**	**1.98**	**1.99**	**2**	**2.01**	**2.02**	**2.03**	**2.04**	**2.05**
y											

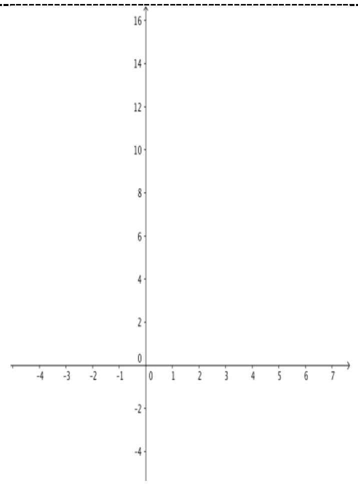
Considere las expresiones: i) $\lim_{x\to a^+} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ ii) $\lim_{x\to a^-} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ iii) $\lim_{x\to a} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

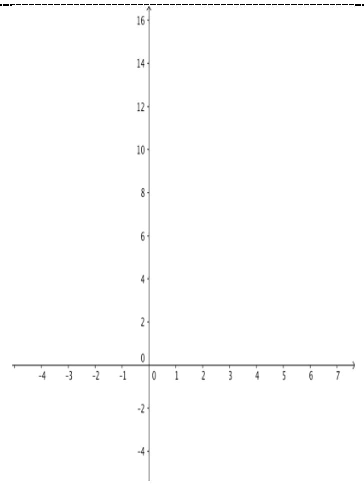
e) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso i?

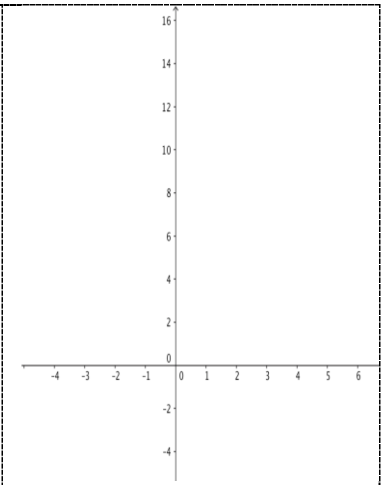
f) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso ii?

g) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso iii?

h) Represente gráficamente los casos i, ii, y iii.


caso i

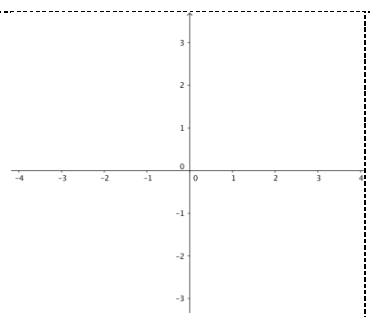

caso ii

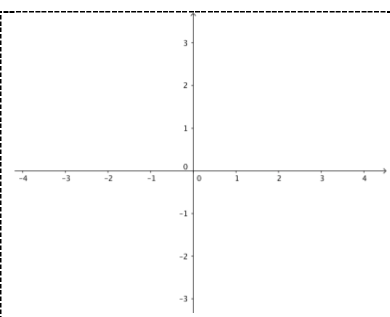

caso iii

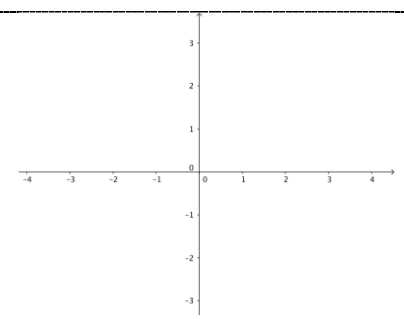
i) Repita el inciso d para la función, $f(x)=\frac{|x|}{x}$. (Para introducir el módulo de valor absoluto, utilice *abs*(x)).

x	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y											

j) Represente gráficamente: i) $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$ iii) $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}$


caso i


caso ii


caso iii

k) Relacione el inciso h y el j; ¿qué observa?

l) Encuentre el valor de $\lim_{x \to a} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$.utilizando las repuestas de los incisos del d al h.

m) Encuentre el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ utilizando las respuestas de los incisos i y j.

n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala[44], Lilia López Vera[45], G. Eréndira Núñez Palenius[44]

Actividad 5: Líneas Secantes y Tangentes

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Línea Secante y Tangente

a) Complete la siguiente tabla. Donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P_1	P_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	**(8, 9)**			
(3, 0.875)	**(6, 2)**			
(3, 0.875)	**(5, 1.125)**			
(3, 0.875)	**(4, 1)**			
(3, 0.875)	**(3.5, 0.984375)**			
(3, 0.875)	**(3.1, 0.908875)**			
(3, 0.875)	**(3.05, 0.892828)**			
(3, 0.875)	**(3.01, 0.878713)**			
(3, 0.875)	**(3.005, 0.876866)**			
(3, 0.875)	**(3.001, 0.875375)**			

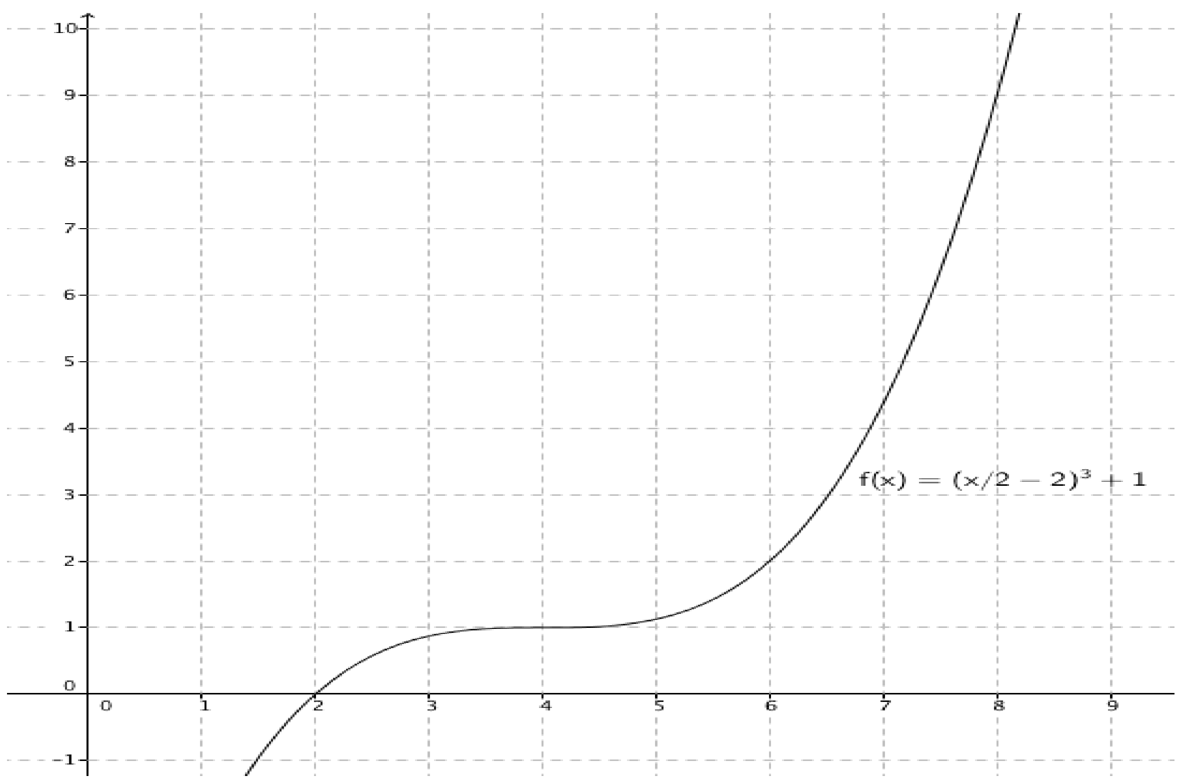
[44] Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.
[45] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

b) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior, en la siguiente gráfica.

c) Complete la siguiente tabla, donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P_1	P_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	**(8, 9)**			
(5, 1.125)	**(8, 9)**			
(6, 2)	**(8, 9)**			
(7, 4.375)	**(8, 9)**			
(7.5, 6.35938)	**(8, 9)**			
(7.9, 8.41488)	**(8, 9)**			
(7.95, 8.70375)	**(8, 9)**			
(7.99, 8.94015)	**(8, 9)**			
(7.995, 8.97004)	**(8, 9)**			
(7.999, 8.994)	**(8, 9)**			

d) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior en la siguiente gráfica.



e) Observe las tablas del inciso a y c, ¿qué observa de las diferencias de x?

f) ¿Qué significa “$x_2 - x_1 \rightarrow 0$”?

g) ¿Cuáles de los siguientes casos, representan que la diferencia de x tiende a cero?

i) 1

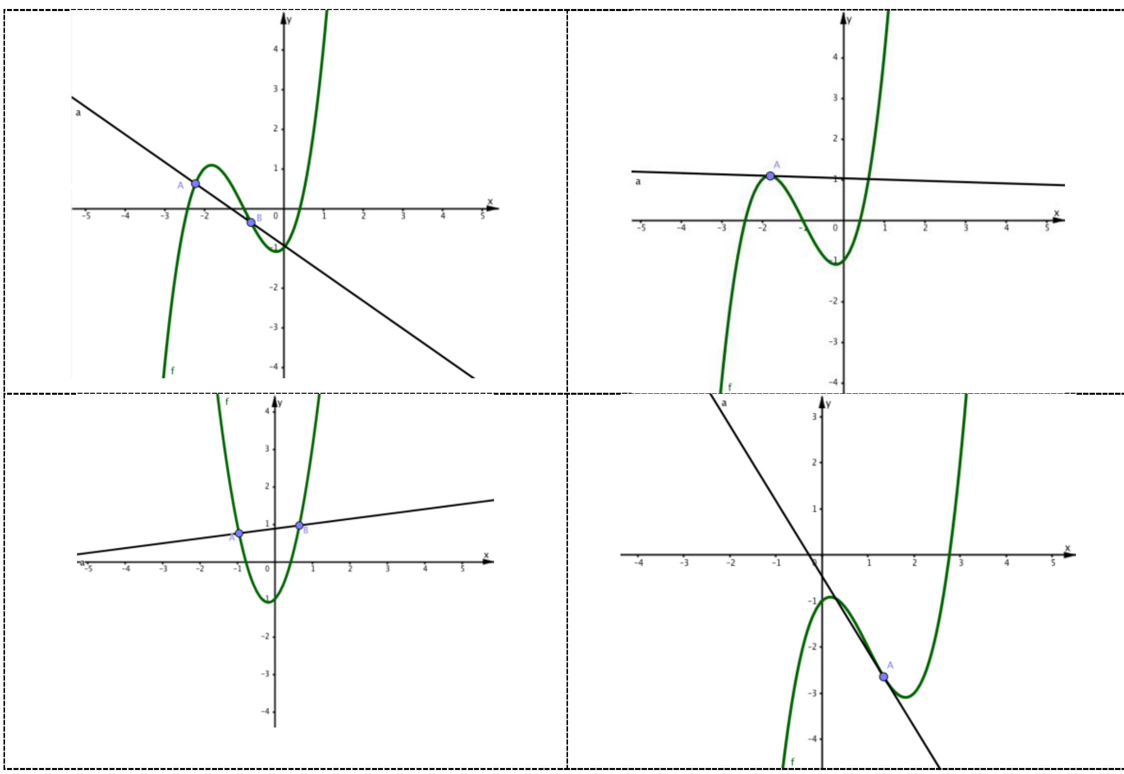
ii) 0.4

iii) $x_2 - x_1 \rightarrow 0$

iv) 0.00001

v) $\frac{1}{10000}$

h) Relacione los siguientes conceptos, con su correspondiente gráfica: línea secante y línea tangente.

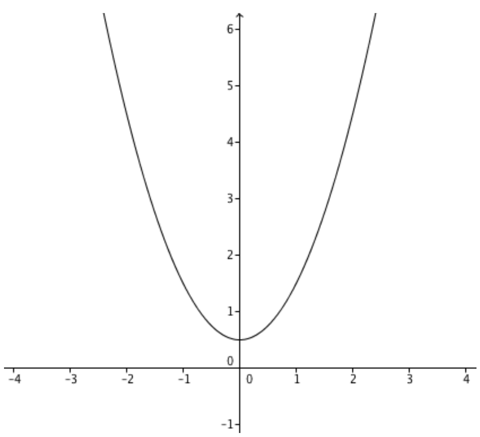


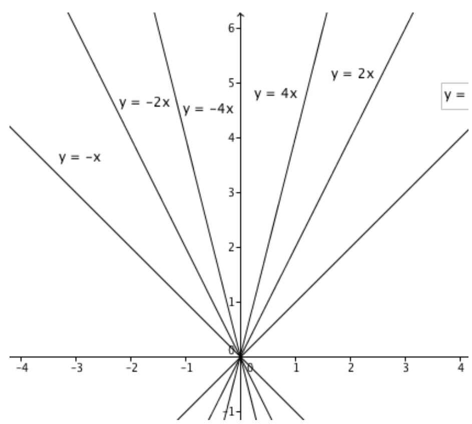
i) Con sus palabras y utilizando como referencia el inciso anterior, explique el concepto de línea secante y línea tangente.

j) ¿Qué entiende por velocidad promedio y velocidad instantánea?

k) Considere la función $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$ y los incisos a y c, ¿cuál es la pendiente de la tangente en x=3 y x=8?

l) Considere la función $y = x^2 + 0.5$. En la siguiente gráfica, trace la línea tangente en x= -2, -1, 1, y 2.





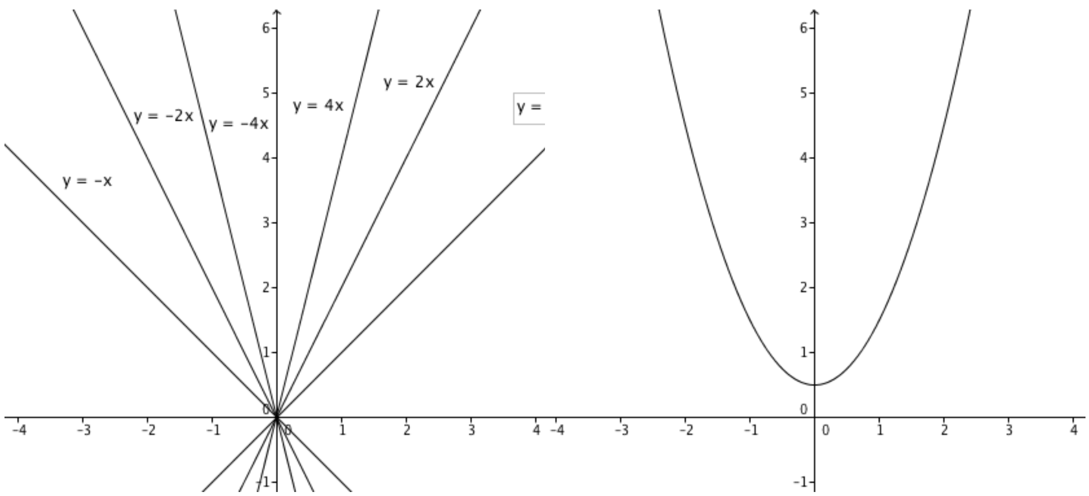
m) Utilizando la gráfica con las líneas rectas (figura de la derecha), aproxime el valor de la pendiente de las tangentes con apoyo de escuadras.

Tangente en (x)	**Pendiente aproximada**
-2	
-1	
1	
2	

n) Calcule las pendientes de las líneas tangentes en los puntos indicados y muestre la operación realizada.

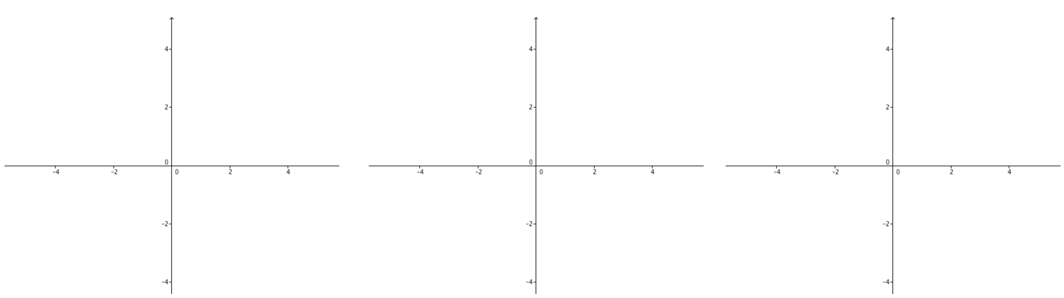
Tangente en (x)	Operación	Pendiente
-2		
-1		
1		
2		

o) Utilizando las pendientes de la tabla anterior, trace la línea tangente en el punto correspondiente, apoyándose en las rectas de referencia.



p) Compare las líneas tangentes trazadas en los incisos "l" y "o", ¿qué observa?

q) Considere las funciones $-x^2$, x^3 y e^x. Trace las curvas correspondientes y las tangentes en los puntos: x = -2, 0, 1, 2 y 3. Complete la tabla indicando la pendiente de la tangente.



x	$-x^2$	x^3	e^x
-2			
0			
1			
2			
3			

r) Elija la mejor frase para completar la declaración:

Las pendientes en una gráfica de cualquier función son: siempre iguales, siempre diferentes, a veces iguales o a veces diferentes.

En geometría euclidiana, una línea es tangente a un círculo si intersecta a dicho círculo solamente en un punto. Esta definición es adecuada para círculos, pero no apropiada para curvas en general. Observando la figura 1a, la línea tangente para el punto A toca la curva en otros puntos.

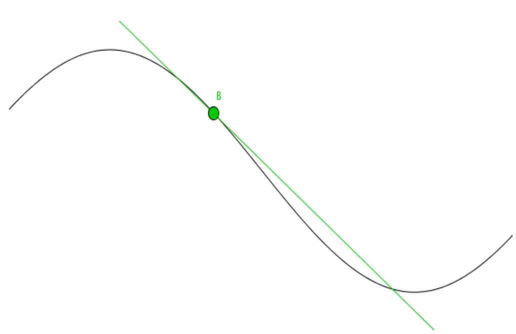


Figura 1a

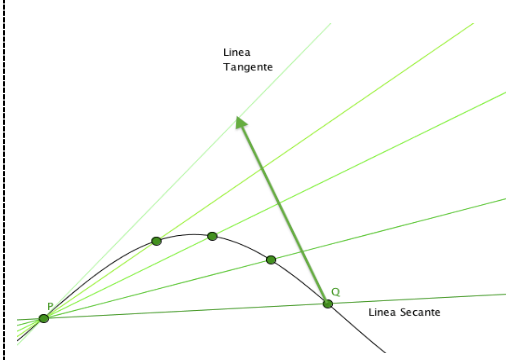


Figura 1b

Observando lo anterior, debemos encontrar otra definición para la aplicación de líneas tangentes para curvas. Para este fin, observe la figura 1b. Nos interesa la línea tangente en la curva en el plano xy. La línea que pasa por P y Q, es una línea secante. Si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la línea secante girará hacia una *posición limitante.* Dicha *posición limitante,* es lo que se llama, línea tangente en el punto p.

Parte II (con CAS): Relación a Límites

En el problema anterior, la pendiente de la línea tangente para el punto (3, 0.875) se calculó gráficamente. Analíticamente la pendiente se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1 - 0.875}{x - 3} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$$

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla.

	A	**B**
◆		$\boldsymbol{\frac{\left(\frac{a}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{a - 3}}$
1	**2.9**	
2	**2.95**	
3	**2.99**	
4	**2.995**	
5	**2.999**	
6	**3**	
7	**3.001**	
8	**3.005**	
9	**3.01**	
10	**3.05**	
11	**3.1**	

b) ¿A qué es igual $\lim_{x\to 3^-} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2+0.125}{x-3}$ y $\lim_{x\to 3^+} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2+0.125}{x-3}$?

c) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x\to 3} \frac{\left(\frac{x}{2}-2\right)^2+0.125}{x-3}$? Explique su razonamiento.

d) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en x = 3, ¿qué observa?

e) ¿Cómo sería la pendiente para la función $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$ en el punto (8, 9)?

f) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla. La columna B contiene la ecuación de la pendiente obtenida del inciso anterior.

	A	B
◆		☐
1	7.9	
2	7.95	
3	7.99	
4	7.995	
5	7.999	
6	8	
7	8.001	
8	8.005	
9	8.01	
10	8.05	
11	8.1	

g) ¿A qué es igual $\lim_{x \to 8^-} m$ y $\lim_{x \to 8^+} m$?

h) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x \to 8} m$? Explique su razonamiento.

i) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en x = 8, ¿qué observa?

j) ¿Qué relación observas entre la pendiente de la tangente en un punto para una función y el límite de la misma en el mismo punto?

k) ¿A qué se debe lo anterior?

Parte III (Simbolización): Ecuación de la Pendiente de la Línea Tangente

La pendiente de una línea secante se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a) Explique en sus palabras, qué es la pendiente de la tangente.

b) Escriba una expresión algebraica que simbolice lo que acaba de decir en el inciso anterior.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala[46], Lilia López Vera[47], G. Eréndira Núñez Palenius[46]

Actividad 6: Función Derivada

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

Parte I (Simbolización): Ecuación Convencional de la pendiente de la Tangente

Una forma convencional de expresar la pendiente de la línea tangente es la siguiente:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{sec}$$

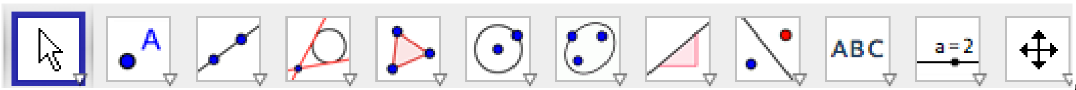
a) Compare la ecuación convencional anterior, con la que usted escribió en la actividad pasada (inciso b de la parte III). ¿Observa diferencias? Si es un sí, ¿cuáles son?

b) Si hay diferencias, ¿es porque faltó considerar algo? En caso afirmativo, ¿qué fue?

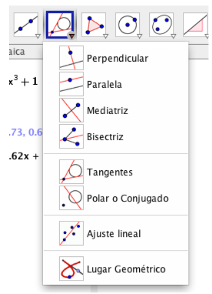
[46] Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.
[47] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

Parte II (con CAS): Función de las Pendientes de la Línea Tangente

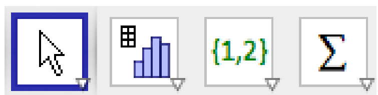
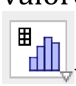
Grafique la función x^3+1, coloque un "punto" sobre la función, Dentro del "menú de grafica"



,



Seleccione "Tangente" y seleccione el punto sobre la función para que aparezca la tangente. Posteriormente mida el valor d ela pendiente. Haga un punto que tenga coordenadas (x,m).

Abra una hoja de cálculo, llene la columna A con los valores de "x" y la columna B con los valores de "m". Dentro de **Menu**  , elija **Datos y Estadísticas**  y seleccione "**Análisis de regresión de dos variables**" Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione "**Modelo de Regresión**".

a) De los pasos anteriores, se obtuvo una ecuación de cuarto orden. Escriba los coeficientes de la ecuación.

x^4:	**x^1:**
x^3:	**x^0:**
x^2:	

b) Observe los valores de los coeficientes, ¿se pueden reducir o eliminar unos? ¿Por qué?

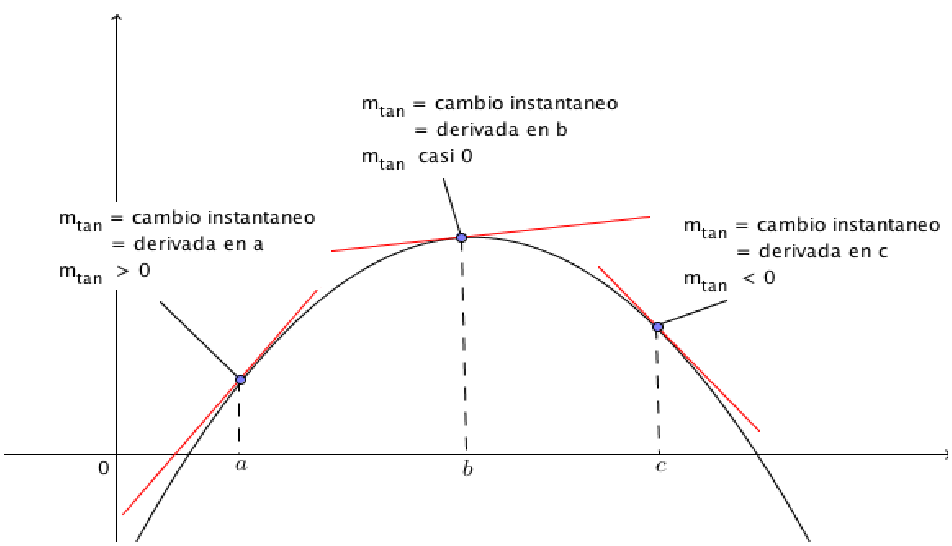
c) Considerando lo anterior, ¿cómo queda la ecuación?

d) Se obtuvo una gráfica de xt contra mt. ¿Qué representa mt?

e) Considerando su respuesta del inciso anterior, ¿qué representa la función obtenida en el inciso a?

Parte III (con lápiz y papel): Concepto de Derivada

En los incisos anteriores, se calculó la pendiente de una línea tangente en un punto fijo de la curva. Si este punto se mueve a través de la curva, la línea tangente también cambia y por lo general, su pendiente cambia (vea figura 1). Por esta razón, la pendiente de la línea tangente para la función *f* también es una función de *x*, llamada la derivada de *f* .



Dejamos que *f ‘* (se lee como *f* prima) denote la función derivada para *f*, lo cual significa que *f ‘(a)* cuando exista, es la pendiente de la línea tangente para la gráfica de *f* en *(a, f(a)).* Utilizando la definición anterior para la pendiente de la línea tangente, tenemos:

$$f'(a) = m_{tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En términos más generales, se puede reemplazar el *a* con *x* para llegar a la definición de la función derivada. La derivada de *f* es la función:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista. Si *f ‘(x)* existe, decimos que *f* es diferenciable en x. Si *f* es diferenciable en cada punto del intervalo abierto *I*, decimos que *f* es diferenciable sobre *I*.

Para encontrar la derivada de la función $f(x) = x^3 + 1$, hacemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x^3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f‘(x) = 3x^2$

a) Relacione la ecuación *f’*(x) obtenida con su función de la parte II, ¿qué observa?

Otras notaciones que se manejan son las siguientes:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Además de $f'(x)$ y $\frac{dy}{dx}$, otras formas comunes de escribir la derivada incluyen:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad D_x f(x), \quad y \quad y'(x)$$

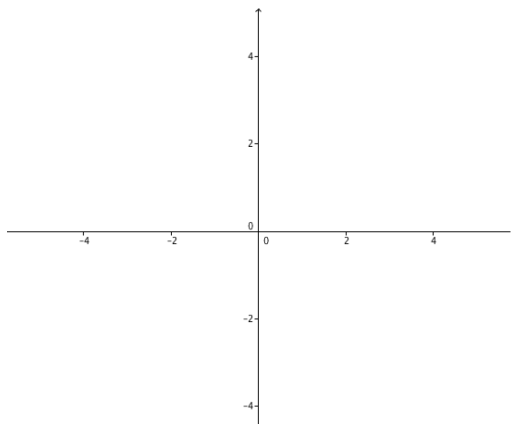
b) ¿Cuál es la derivada de una constante?

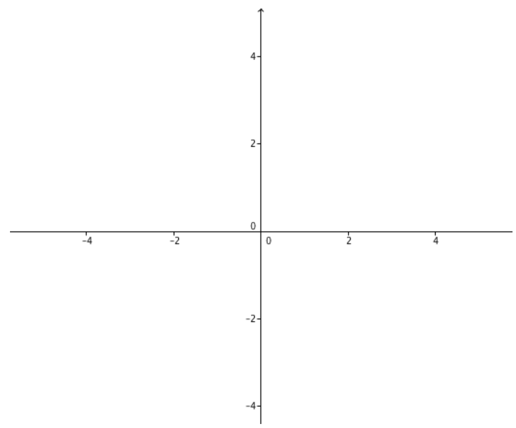
c) Considere la función, *f(x) = 3*. Grafique la función, ¿qué representa?

d) ¿Cuál es la derivada de la función, *f(x) =3* y por qué?

e) Derive las siguientes funciones: x, x^2, x^4 y x^7. Observando las derivadas, ¿cómo puede deducir $\frac{d}{dx}x^n$?

f) Considere la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$. Grafique la función $f(x)$ en el eje de la izquierda y $f'(x)$ en la derecha. Además, escriba la ecuación de $f'(x)$ debajo de la gráfica.





$f(x) = x^3 + x^2 + x$ $f'(x) =$

g) Utilizando la información anterior, calcule la pendiente de la tangente de $f(x)$ en el punto $x = 3$.

h) ¿Qué información utilizó para responder el inciso anterior? ¿Por qué?

i) Supongan que $f(x)$ y $f'(x)$ están dados, ¿qué indica $f'(3)$ con respecto a la función $f(x)$?

j) Si *f(x)* está definida, ¿cómo calcularía la pendiente de la tangente en cualquier punto de x? Explique su procedimiento.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala[48], Lilia López Vera[49], G. Eréndira Núñez Palenius[48]

Actividad 7: Aplicaciones

Líder:
Calculadora:
Hoja de Trabajo:
Número de Equipo: Hora de Inicio: Hora de Terminación:

A. Puntos Críticos y Su Significado

Parte I (con lápiz y papel): Análisis de Funciones: Creciente, Decreciente y Concavidad

Los términos *creciente*, *decreciente* y *constante* son utilizados para describir el comportamiento de una función al moverse de la izquierda a la derecha. Su comportamiento depende de los valores de *f(x)*.

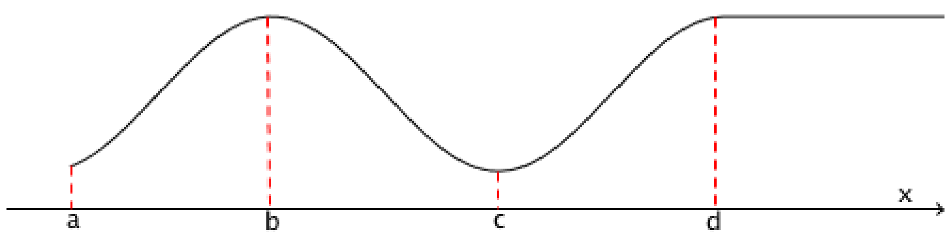


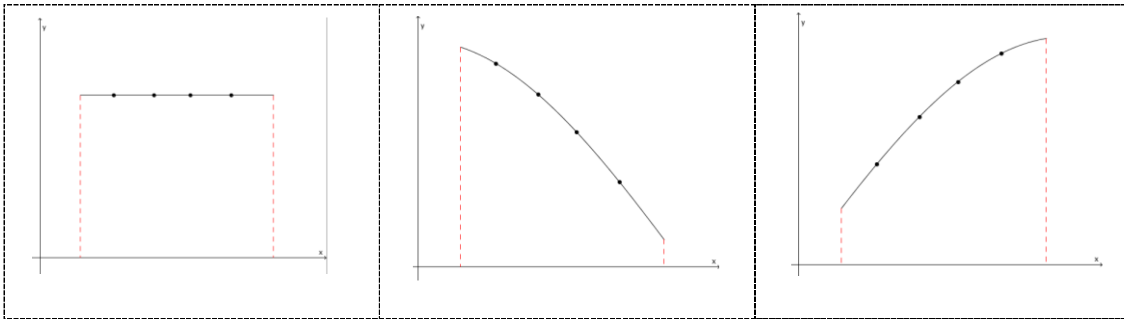
Figura 1.

a) Considere la figura 1, completa la siguiente tabla con los términos *creciente, decreciente* o *constante*.

Intervalos de x	Comportamiento de la función
a – b	
b – c	
c – d	
d – ∞	

[48] Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.
[49] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

b) En cada una de las siguientes figuras se encuentran 4 puntos. Para cada punto trace la tangente.



c) Considere las tangentes del inciso anterior. ¿Qué puede concluir de los valores de las tangentes para una función *creciente, decreciente* y *constante*?

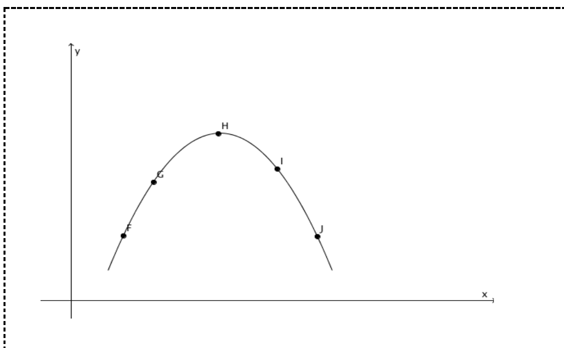


Figura 2.

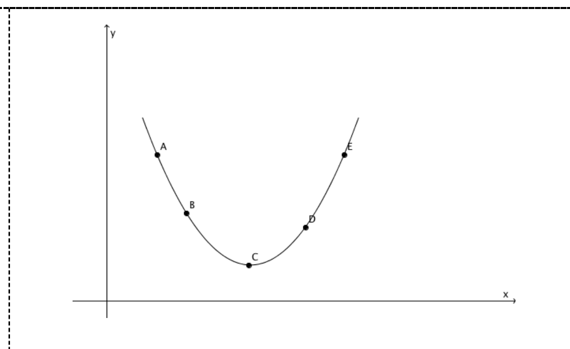


Figura 3.

d) Observe la figura 2, ¿qué representa el punto C (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

e) Observe la figura 3, ¿qué representa el punto H (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

f) Recordando que una derivada representa una tangente y analizando sus respuestas de los incisos d y e, ¿qué es el valor de la derivada en un máximo o mínimo? Este punto se conoce como un punto crítico.

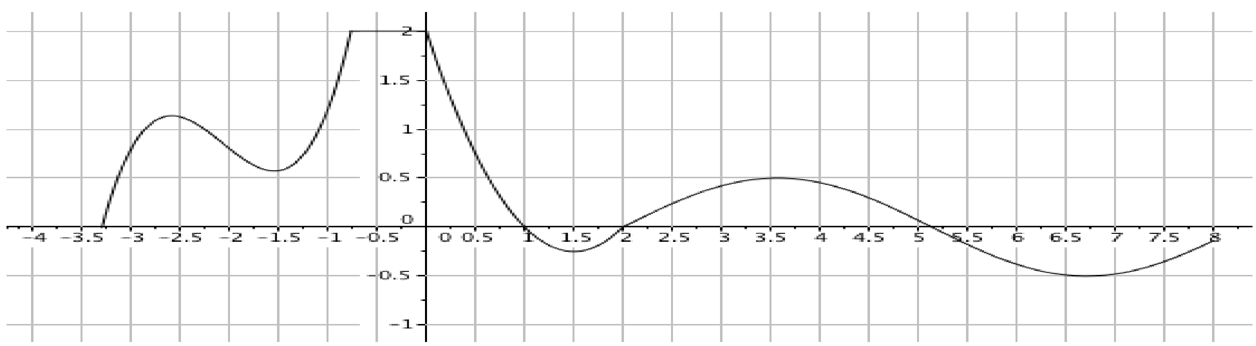


Figura 4.

g) Observando la figura 4, ¿cuáles serían los puntos críticos de la primera derivada? ¿Por qué?

h) Considere la figura 4, completa la siguiente tabla. En la columna “Intervalo”, escriba los intervalos que están separados por los puntos críticos. La columna “Comportamiento” se refiere a si la función es creciente o decreciente y la columna “Valor de f'” se refiere a si la derivada es positiva o negativa.

Intervalo	Comportamiento	Valor de f'

i) ¿Qué relación encuentra entre el comportamiento de la función y el valor de la derivada?

j) Observe la figura 4 y los incisos anteriores, si existe un punto crítico, ¿cómo se puede clasificar como máximo o mínimo con respecto a la primera derivada?

k) Regrese a la figura 4, ¿en qué valores de x existen mínimos? ¿En qué punto se encuentra el mínimo absoluto?

l) De la figura 4, ¿en qué valores de x existen máximos? ¿En qué punto se encuentra el máximo absoluto?

m) ¿Qué entiende como un máximo/mínimo absoluto y un máximo/mínimo relativo? Matemáticamente ¿cómo se expresa su observación?

Aunque el signo de la derivada de f indica en dónde la gráfica de f es creciente o decreciente, no indica la dirección de la *curvatura*. Por ejemplo, la función es creciente en ambos lados del punto en la figura 5, pero en el lado izquierdo tiene una curvatura hacia arriba ("retiene agua") y en el lado derecho tiene una curvatura hacia abajo ("derrama agua"). En intervalos donde la gráfica de f tiene una curvatura hacia arriba se dice que f es *cóncava hacia arriba*, y en intervalos donde la gráfica de f tiene una curvatura hacia abajo se dice que f es *cóncava hacia abajo.* La curvatura también se conoce como la concavidad.

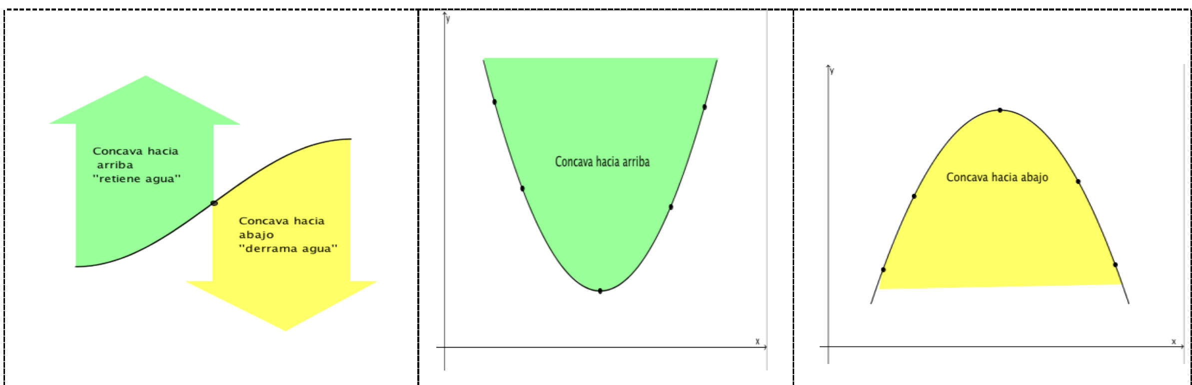


Figura 5.

n) Para las figuras en los puntos indicados, estime y trace la línea tangente correspondiente.

o) Observe su respuesta del inciso n, ¿qué observación tiene con respecto a las pendientes para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (las pendientes aumentan o disminuyen)? ¿A qué conclusiones llega con respecto al valor de la derivada de la función f' para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

p) Si la primera derivada f' es creciente, ¿cómo será la segunda derivada f''?

q) Si f' es decreciente, ¿cómo será f''?

r) ¿Qué relación existe entre el valor de la segunda derivada f'' con respecto a la concavidad de la función f?

Parte II (con CAS): Comprobación Grafica

a) Grafique la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ¿Qué tipo de concavidad observa? ¿Cambia la concavidad en algún intervalo? Compruebe su observación utilizando la segunda derivada de la función.

b) Grafique la función $f(x) = x^3$. ¿Qué observa de la concavidad? ¿Cambia en algún punto? ¿Cuál es la segunda derivada de la función?

c) Considere los incisos a y b, en el punto donde cambia la concavidad, ¿cuánto vale la segunda derivada en dicho punto?

d) Elija dos (2) puntos de la función del inciso b, uno en donde hay concavidad hacia arriba y otro en donde hay concavidad hacia abajo. ¿Qué valores toma la segunda derivada en dichos puntos?

En los incisos anteriores, se observa que hay un punto donde cambia la concavidad, dicho punto se conoce como el *punto de inflexión*.

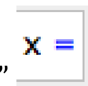
e) Si en un punto de inflexión hay un cambio de concavidad y observando la respuesta del inciso anterior, ¿cuáles serían los intervalos de concavidad?

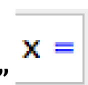
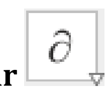
Grafique las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x)$ y $f''(x)$ en la misma pantalla. Utilice como referencia las gráficas para responder los siguientes incisos.

f) ¿Qué relación observa entre la primera derivada y la función? Considere los máximos y mínimos y los intervalos crecientes y decrecientes en su respuesta.

g) ¿Qué relación observa entre la segunda derivada y la función? Considere los máximos y mínimos, concavidad y los intervalos de concavidad.

En los incisos anteriores, se observa la importancia de encontrar los ceros de una ecuación. En el sistema CAS, existe el comando “x=”. Dicho comando encuentra los ceros de la función.

h) Introduzca **x^3+4x^2+x–6,x** y posteriormente oprima el icono “x=” , ¿qué sucede y qué representan esos valores? Compruebe esos valores.

Para los siguientes incisos utilice los comandos **“x=”** , **derivar**  y sustituye **,** etc. pero sin utilizar la gráfica. Además considere que $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$.

i) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos? ¿Cuáles son los intervalos y, los máximos y mínimos?

j) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión? ¿Cuáles con los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión?

k) Compruebe los incisos j y k al graficar la función dentro del sistema CAS. ¿Observa algunas diferencias?

l) Reflexione sobre la actividad y resuma el efecto que tienen las derivadas (primera y segunda) sobre la gráfica de la función.

9 VARIACIÓN LÍNEAL Y MOVIMIENTO: DE LA EXPERIENCIA CORPORIZADA A LOS SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES

Actividades capítulo 9: Guía para el profesor

María Teresa Dávila Araiza[50], Agustín Grijalva Monteverde[51]

INFORMACIÓN GENERAL Y RECOMENDACIONES AL DOCENTE

NOMBRE DE LA SECUENCIA DE ACTIVIDADES: ***Variación lineal y movimiento***.

PROPÓSITO DE LA SECUENCIA: Que los estudiantes comprendan la función lineal como un modelo de la variación lineal entre posición y tiempo (co-variación directamente proporcional), cuando el movimiento es rectilíneo y de velocidad constante. También se pretende que el estudiante aplique lo aprendido al contexto de llenado de recipientes.

GRADO ACADÉMICO DONDE SE PUEDE IMPLEMENTAR: Primer semestre de bachillerato (estudiantes de 15 a 16 años).

CONTENIDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS: proporcionalidad, variación lineal y función lineal, en sus representaciones gráfica, numérica y algebraica.

TOTAL DE ACTIVIDADES Y DURACIÓN APROXIMADA: 8 actividades, para realizarse en un total de 5 sesiones de 50 minutos cada una, aproximadamente.

MATERIALES NECESARIOS: Hojas de trabajo para cada estudiante, una computadora con GeoGebra para cada equipo de estudiantes y proyector. Además, hojas de papel, plumón negro y cinta para construir una recta numérica en el piso del salón.

RECOMENDACIONES PARA EL DOCENTE: Antes de iniciar la Actividad 1:

1) Se construye la recta numérica en el piso del salón, tomando como origen una línea de referencia y como unidad de medida la longitud de un cuadro del piso.
2) Los estudiantes se deben familiarizar con la noción de posición como ubicación en la recta numérica, a cierta cantidad de cuadros detrás (para posición negativa) o delante (para posición positiva) de la línea de referencia. La Figura 1 ilustra la recta numérica y dos estudiantes E1 y E2 ubicados en la posición -2 y 3 respectivamente.

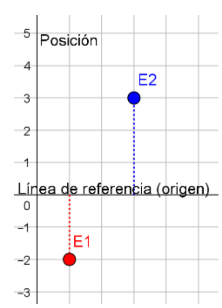


Figura 1. Recta numérica

La Actividad 1 parte de observar el movimiento de dos estudiantes que caminan en línea recta a velocidad constante, pero distinta entre sí. Para ello, el profesor pide la participación de dos estudiantes y, sin que el resto del grupo escuche, les da las instrucciones siguientes:

[50] Universidad de Sonora, México. tere.davila.araiza@gmail.com
[51] Universidad de Sonora, México. gutygri1@gmail.com

- El primer estudiante (E1) avanzará 2 cuadros cada segundo desde el origen.
- El otro estudiante (E2) avanzará 1.5 cuadros cada segundo desde la posición 3.

Los estudiantes voluntarios avanzarán simultáneamente durante 5 segundos, mientras que el profesor cuenta en voz alta cada segundo. Puede ser necesario actuar el movimiento varias veces. Una vez observada la carrera, los estudiantes pueden comenzar a contestar sus hojas de trabajo.

INSTRUCCIONES PARA USAR EL APPLET: El archivo de GeoGebra para realizar las actividades 4 y 5 está disponible en el enlace https://ggbm.at/jsqbfnhg. En el archivo, el estudiante puede cambiar la velocidad y punto de partida de los dos participantes de la carrera para explorar nuevas carreras y encontrar relaciones entre las diferentes representaciones del movimiento que se muestran en GeoGebra.

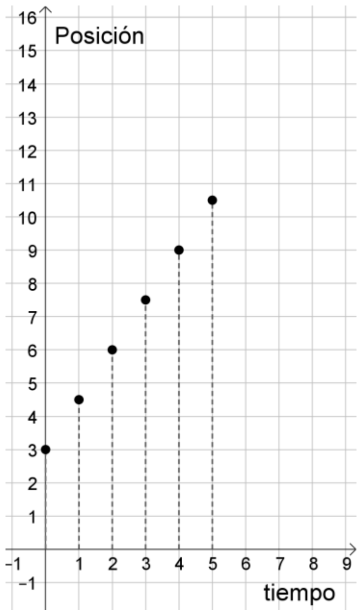
Página 1	**Instrucciones**
Nombre del alumno: ______________________________ Miembros del equipo: ______________________________ ______________________________ ______________________________ Grupo: __________ Fecha: _________	Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo. Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

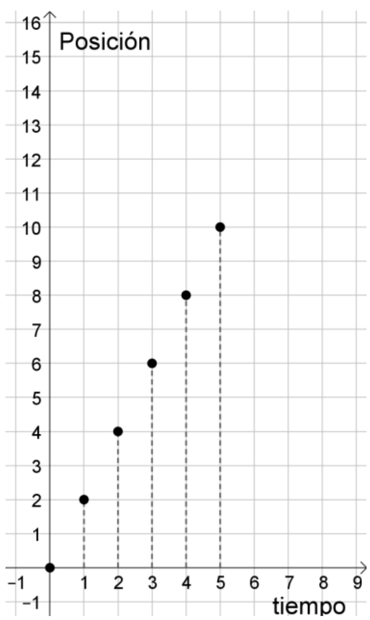
Página 1 | **Actividad 1: *Observa y representa el movimiento*** (Individual, 10 minutos)

1. ¿Cómo avanza cada uno de los participantes en la carrera? Describe detalladamente.
2. Realiza un dibujo o ilustración donde se muestre cómo fue avanzando cada uno de los participantes.
3. ¿En qué posición se ubicó cada uno de los participantes en el segundo 0, 1 y 5?
4. ¿Cuánto avanzó en total cada participante durante los 5 segundos de la carrera?

Página 2 | (Equipo, 10 minutos)

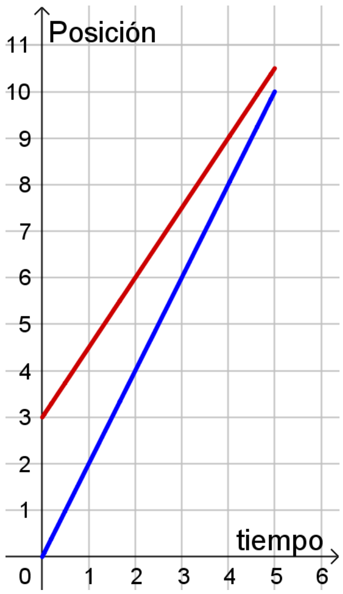
5. Muestra a tus compañeros de equipo la ilustración que hiciste y discutan qué elementos tienen en común sus ilustraciones.
6. Elaboren en equipo una gráfica que muestre cómo es el movimiento de cada uno de los participantes durante la carrera.
7. ¿Te hizo falta considerar algo importante en tu dibujo? Explica.

<table>
<tr><th>Página 3</th><th>Actividad 2. Gráficas de la carrera (Individual, 10 minutos)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Esta gráfica representa el movimiento de un participante de la carrera.

8. ¿Cuántos cuadros avanza este participante cada segundo? Explica cómo lo supiste.
9. ¿Cuál participante caminó de esta manera?
10. ¿Cuántos cuadros avanzó en total este participante durante los 5 segundos de la carrera?
11. Si se triplica el tiempo de la carrera (si durara 15 segundos), ¿cuánto avanzaría en total? Explica tu razonamiento.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Esta gráfica representa el movimiento de un participante de la carrera.

12. ¿Cuántos cuadros recorre este participante cada segundo?
13. ¿Al movimiento de cuál participante corresponde esta gráfica?
14. ¿Cuántos cuadros en total avanzó este participante durante los 5 segundos de la carrera?
15. Si la carrera durara 2.5 segundos, ¿cuántos cuadros avanzaría en total este participante? ¿Y el otro participante? Explica tu respuesta.</td></tr>
</table>

Página 4 (Equipo, 15 minutos)



Comparen sus respuestas y estrategias a las preguntas anteriores.

16. ¿A cuál participante corresponde cada recta?
17. Elaboren una tabla con la información de la posición donde se ubicaría cada participante en los segundos 0,1, 1.5, 5 y 8.75.
18. ¿Encuentras alguna relación entre los valores del tiempo y los valores de la posición, en el caso del participante que inició en la posición 0? Describe esta relación.
19. Escribe una ecuación o fórmula que relacione tiempo y posición y que sirva para saber la posición del participante en un valor específico del tiempo.
20. Repite las preguntas 18 y 19 para el participante que inició en la posición 3.

Página 5 Actividad grupal (15 minutos)

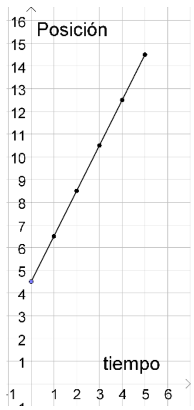
21. ¿Es el tiempo es directamente proporcional a la posición, en el movimiento de cada participante? Explica tu respuesta.
22. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
23. ¿Los incrementos de tiempo son directamente proporcionales a los incrementos de posición, en el movimiento de cada participante?
24. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en cada caso?

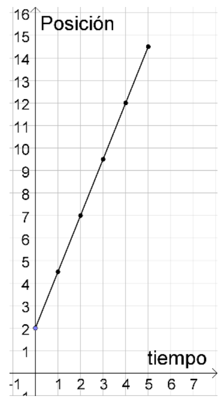
Página 6 **Actividad 3. *Cambios en la carrera*** (Individual, 10 minutos)

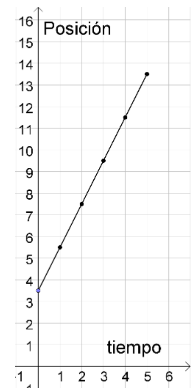
El profesor está planeando cambiar cómo avanza uno de los participantes de la carrera, de manera tal que se obtengan los siguientes datos:

x: Tiempo (segundos)	0	3	5	8
y: Posición		9.5	14.5	22

25. ¿Cuál es la velocidad de este participante? Es decir, ¿cómo avanzará cada segundo? ¿Cuál será su punto de partida? Explica cómo hiciste para saber.
26. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde al movimiento de ese participante? Explica tu razonamiento.







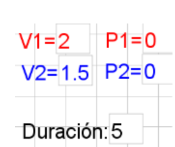
Página 7 (Equipo, 15 minutos)

Comparen sus respuestas obtenidas en las preguntas anteriores.

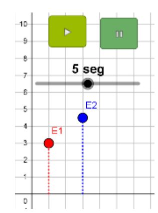
27. Actúen el movimiento como lo describieron en la pregunta 25 para verificar que corresponda a la tabla de datos de arriba.

28. Encuentren una ecuación o fórmula para representar la relación entre tiempo y posición para este caso.

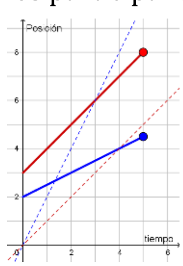
Página 8 **Actividad 4. *Modelando la carrera en GeoGebra*** (Equipo, 32 minutos)



Abran el archivo carrera.ggb o el enlace https://ggbm.at/jsqbfnhg. En él podrán crear diferentes carreras para dos participantes E1 y E2. Pueden cambiar su velocidad (V1 para E1 y V2 para E2), su punto de partida (P1 para E1 y P2 para E2) y la duración de la carrera.

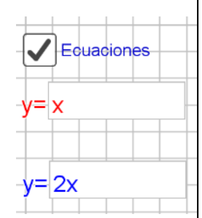


Con los botones verdes pueden iniciar y pausar la carrera y observar cómo avanzan los participantes. Para reiniciar el contador de tiempo hay que deslizarlo hacia la izquierda.



Del lado derecho de la pantalla, pueden observar las gráficas que genera cada participante.

Al activar la casilla "Ecuaciones" podrán escribir las ecuaciones que ustedes creen que modelan el movimiento de los participantes y verificar si son o no correctas.



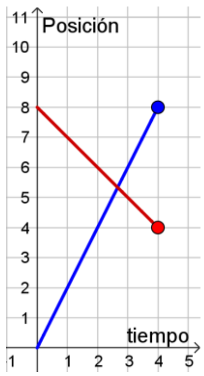
29. Generen en el archivo una carrera de 10 segundos, donde E1 tiene una velocidad de 1 cuadro cada segundo y comienza desde la posición -2, mientras que E2 tiene velocidad de medio cuadro por segundo e inicia en la posición 2. ¿Quién ganó la carrera?

30. ¿Qué significa que las rectas de la derecha se intersequen? ¿En qué segundo sucede?

31. ¿Cuál es la ecuación que representa el movimiento de cada participante? Comprueben con ayuda de GeoGebra que sean correctas.

32. ¿Qué velocidad y qué punto de partida deberían tener los participantes para generar las fórmulas $y = 0.75x - 1$ y $y = 0.25 + 4$?
33. Jueguen a crear otras carreras y encontrar las ecuaciones que representen el movimiento de los participantes.

Página 9	



34. ¿Cómo deberían caminar los participantes de la carrera para obtener estas gráficas? Explica detalladamente y comprueba tu respuesta en GeoGebra o actuando la carrera con uno de tus compañeros.
35. ¿Hay proporcionalidad directa entre tiempo y posición en el movimiento de ambos participantes?
36. ¿Cuáles son las constantes de proporcionalidad en cada caso?
37. ¿Cuáles son las ecuaciones que relacionan tiempo y posición para cada caso?
38. Jueguen a crear otras carreras y encontrar las ecuaciones que representen el movimiento de los participantes.

Página 10	**Actividad 6. *Otro tipo de movimiento*** (Individual, 10 minutos)

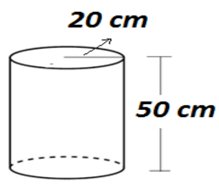
Un estudiante camina de tal manera que se obtienen los siguientes datos:

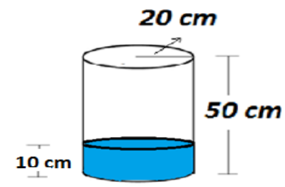
x: Tiempo (segundos)	0	2	5	9
y: Posición	0	4	6	8

39. Describe su movimiento.
40. Describe su velocidad.
41. ¿Los incrementos de posición son directamente proporcionales a los incrementos de tiempo? Explica tu respuesta.
42. Elabora una gráfica cartesiana de este movimiento ¿Qué observas?

Página 11	Actividad 7. ***Recipientes cilíndricos de mismo tamaño*** (Equipo: 30 minutos)

Dos recipientes son llenados con agua con un flujo constante de 4 litros cada minuto. Las dimensiones de los recipientes son las mismas y se señalan en la siguiente figura. Uno de ellos está originalmente vacío y el otro ya tiene agua hasta una altura de 10 cm.

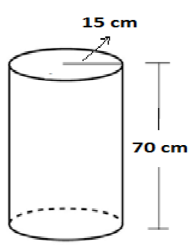


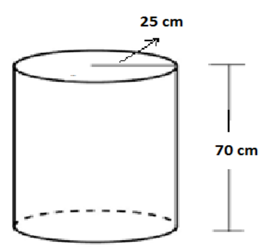


1. Señala las magnitudes variables que están cambiando en cada recipiente, conforme se van llenando.
2. Elabora una tabla para cada recipiente donde se especifique la altura en diferentes tiempos.
3. Determina una expresión o ecuación para calcular la altura del agua a partir del tiempo transcurrido para cada uno de ellos. Considera el tiempo necesario para que cada recipiente se llene y establezca las restricciones para el valor del tiempo en cada caso.
4. Elabora una gráfica de altura contra tiempo en cada caso.
5. ¿Qué tienen en común esta situación y las estudiadas previamente con relación al movimiento de sus compañeros de clase? Explica detalladamente.

Página 12	Actividad 8. ***Recipientes cilíndricos de tamaño diferente*** (Equipo: 30 minutos)

Los dos recipientes que se ilustran a continuación se llenan de agua a flujo constante de 6 litros cada minuto.





1. Determina para cada uno de ellos una fórmula o ecuación para calcular la altura del agua en el recipiente en función del tiempo.
2. Si hicieras una gráfica que se corresponda con cada uno de los casos, ¿qué diferencias tendrían? Responde detalladamente, pero sin hacer las gráficas.
3. Sin elaborar tablas numéricas, determina cómo sería el comportamiento de la altura con relación al tiempo en cada caso.

10 PROBLEMES D'APPRENTISSAGE DU CALCUL DIFFERENTIEL ET APPORT DE LA METHODE DE FERMAT POUR UNE APPROCHE D'ENSEIGNEMENT PLUS INTUITIVE

Activités du chapitre 10 : Guide pour le professeur

Pedro Rogério Da Silveira Castro[52]

Informations sur l'activité et recommandations pour enseignement
NOM DE L'ACTIVITÉ : La Méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive du calcul différentiel. OBJET DE L'ACTIVITÉ : Notre objectif c'est de construire chez les étudiants un concept solide du calcul différentiel, englobant les aspects intuitifs, les aspects historiques, les aspects algébriques et les aspects géométriques. DEGRÉ ACADÉMIQUE SUSCEPTIBLE D'ÊTRE MIS EN ŒUVRE : Cette activité est destinée aux étudiants de la première année universitaire ou collégiale. CONTENU MATHÉMATIQUE ADRESSÉ : Introduction au calcul différentiel, les points extremum des fonctions (maximale et minimale) et introduction au concept de la dérivée. DURÉE APPROXIMATIVE : Pour chaque activité c'est estimé une durée de 50 minutes. MATÉRIAUX NÉCESSAIRES : Papier, crayon, calculatrice et le logiciel GeoGebra. RECOMMANDATIONS POUR L'ENSEIGNANT : D'abord c'est recommandé un travail individuel d'investigation ensuite indiqué la formation d'équipes de trois étudiants pour la continuation de l'investigation et en définitive la discussion globale en grand groupe. Une étape d'autoréflexion (retour individuel à la situation), et finalement l'étape d'institutionnalisation, de parte du professeur, du concept mathématique envisagé (voir méthode ACODESA dans le chapitre 1 du livre). Nous allons proposer 4 activités dans lesquelles le degré de difficultés va augmenter peu à peu. L'objectif c'est de familiariser l'étudiant à la modélisation mathématique et l'utilisation de la méthode de Fermat pour trouver les points extremums d'une fonction mathématique. Pour les deux premières activités, les objectifs sont d'introduire chez les étudiants l'utilisation de la méthode de Fermat pour trouver les points de maximum ou de minimum d'une fonction et de

[52] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canada – pedrorscastro@gmail.com

montrer l'efficacité de la méthode dans la résolution de situations problèmes. Tandis que pour les deux dernières activités, nous allons remplir les objectifs envisagés dans les deux premières activités et aussi contextualiser le concept de la dérivée dans des situations de la vie quotidienne.

De plus, nous croyons que montrer les applications de la dérivée est possible et intéressant. Ceci va contribuer à la conscientisation de l'importance du calcul différentiel et peut impulser les étudiants à aller plus loin dans le sens afin de construire un apprentissage significatif.

Ainsi, les situations problème que nous proposons dans les situations problème 3 et 4 s'appuient sur une conscientisation de l'environnement, car aujourd'hui nous voyons que le gaspillage de matériel pour la fabrication de produits industrialisés prend de plus en plus d'ampleur. Face à ce constat, on peut se poser la question si les formes des emballages qui existent dans nos supermarchés sont convenables pour l'environnement. À l'aide des mathématiques est-il possible de susciter une réflexion sur ces formes dans le but d'améliorer notre contexte environnemental ?

Le format proposé est bien détaillé dans la SP1 (Situation problème 1, et il est suggéré de le suivre sur les autres situations problèmes suivantes, car les étapes pour la construction de l'activité sont les mêmes.

Remarque : Les fichiers *GeoGebra* de toutes les situations problèmes sont disponibles.

A) À la recherche de l'optimisation – situation-problème 1 :

En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaye de répondre la question suivante :

De tous les rectangles ayant 60 cm de périmètre, laquelle a l'aire maximale ?

Remarque pour l'enseignant : Cette première activité semble être très simple et elle l'est en effet. Par contre, notre choix c'est de commencer la modélisation mathématique chez les étudiants de façon solide et pour ce faire nous allons débuter pour les cas plus simples et peu à peu, encourageant graduellement nous allons amener les étudiants aux cas plus complexes où les connaissances mathématiques devront émerger naturellement. De cette manière, nous croyons l'apprentissage mathématique sera plus intéressant et stimulant.

« Une étincelle suffit, si le combustible est beau, le feu apparaitra »

Pedro Castro

Page 1. À la recherche de l'optimisation

Prénom de l'étudiant :

____

Nom des membres de l'équipe :

____

____

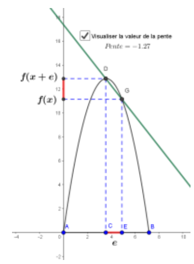
____

Groupe : ______________

Date : ________________

Instructions :

- Pour la première activité individuelle, utilisez un stylo bleu.
- Pour un travail d'équipe, si vous modifiez votre réponse, utilisez un stylo rouge.
- En groupe, si vous modifiez à nouveau votre réponse, utilisez un stylo vert.



Page 2

En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaye de répondre la question suivante :

De tous les rectangles ayant 60 cm de périmètre, laquelle a l'aire maximale ?

Page 3 Réflexion individuelle

Dans cette section, l'étudiant est autorisé à exprimer individuellement ses idées initiales (représentations fonctionnelles spontanées) sur la situation présentée. On s'attend à une première approche de la situation et à un processus de réflexion avant la discussion entre l'équipe. Il est possible que les élèves initient avec une approche de modélisation mathématique.

Il est possible d'ajouter dans cette section des directives ou des suggestions qui soutiennent la formulation des approches des étudiants. Par exemple, l'utilisation des instruments de mesure, l'utilisation du logiciel GeoGebra pour faire les premières investigations, entre autres.

Dans cette étape est attendu que les étudiants comprendre bien la situation proposée et encore qu'ils soient capables de trouver la fonction mathématique qui modélise le problème.

Page 4. Discussion par équipe

En équipes de trois participants, les élèves discuteront des stratégies utilisées et compareront les différentes procédures ainsi que les réponses obtenues. Dans cette section, il est possible que plus d'une idée centrale apparaisse dans l'équipement et qu'il soit important de l'écrire.

Au cours de la discussion, les étudiants pourront utiliser la technologie pour vérifier leurs réponses ou générer des idées qui répondent à leurs questions. Parmi eux, l'utilisation de *GeoGebra* peut être introduite dans cette section.

Dans cette page devrait être soulevé quelques lignes directrices de discussion dans l'équipement pour une plus grande réflexion.

Pour cette première activité, la fonction qui modélise le problème est la fonction quadratique dont les connaissances préalables chez les étudiants pourront apparaître, telles comme la formule pour trouver le sommet de la représentation du polynôme de 2e degré, ce qui est intéressant à valoriser. Par contre, la question posée demande d'utiliser la méthode de Fermat pour répondre la question, donc c'est attendu que les étudiants qui n'ont pas utilisé la méthode enseignée par Fermat reviennent à la situation du début pour confronter leurs résultats et utiliser la méthode enseignée pour répondre la question proposée.

Page 5. Discussion en groupe

Chaque équipe choisit un représentant pour expliquer au groupe les idées discutées au sein de l'équipe. L'enseignant cherche à poser des questions qui motivent une discussion sur les réponses trouvées. Dans cette section, les étudiants peuvent écrire ou enregistrer des idées d'autres équipes et les intégrer à leurs procédures.

Page 6. Autoréflexion

L'autoréflexion est une partie de l'activité à laquelle on répond à la maison (tâche) ou en quelques jours après l'application de l'activité. Son objectif est de permettre à l'étudiant de reproduire les procédures choisies comme il convient par le groupe pour résoudre le problème de recherche. Il est possible de proposer des activités similaires à celles proposées lors de la réflexion individuelle.

Comme suggestion d'activité nous proposerons aux étudiants de généraliser la situation problème :

De tous les rectangles ayant le périmètre fixé ***m***, laquelle a l'aire maximale ?

Remarque : Il est attendu dans cette proposition que les étudiants concluent que de tous les rectangles ayant le périmètre fixé ***m*,** lequel est celui qui a l'aire maximale, c'est bien le carré

B) À la recherche de l'optimisation - Situation problème 2 :

En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaye de répondre à la question suivante :

De tous les rectangles ayant $4m^2$ d'aire, lequel a le périmètre minimal ?

Comme suggestion d'activité nous proposerons aux étudiants de généraliser la situation problème :

De tous les rectangles ayant l'aire fixé $\boldsymbol{A}$, lequel a le périmètre minimal ?

De la même manière à la situation 1, nous cherchons la fonction qui modélise le problème. Par la suite, nous sommes intéresses à trouver le point optimal que répondre la question proposée. Par contre dans cette proposition la fonction qui modélise le problème n'est pas une fonction triviale comme la fonction quadratique présentée dans la situation-problème 1 et pourtant nous provoquerons l'étudiant, car leurs connaissances préalables, telles comme la formule pour trouver le sommet de la courbe liée à la fonction ne rentrent pas dans la solution. Notamment, nous croyons que les situations de provocations comme ceci c'est une manière efficace de stimuler l'apprentissage.

C) À la recherche de l'optimisation - Situation problème 3 :

En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaye de répondre à la question suivante :

Étant donnée une feuille de papier carton en format rectangulaire ayant comme mesures de côtes de 8 dm sur 5 dm, il est demandé de construire une boite avec couvercle en format de prisme droit à base rectangulaire de telle sorte que la capacité (le volume) obtenue soit maximale.

Pour cette activité, nous suggérons que chaque étudiant amène une vraie boite prismatique. Cette activité a comme but de trouver la solution à partir d'une situation plus proche de la quotidienne des étudiants et pourtant nous rentrerons dans des situations reliées à des situations concrètes, dans des situations de modélisation mathématique qui ont le caractère fonctionnel attachée à la vie.

Remarque pour l'enseignant : Dans cette situation c'est possible que les étudiants demandent si les rabats vont couvrir toute la boite ou si la couverture sera au milieu d'un rabat.

Pour élucider cette activité, voir les figures :

Tout d'abord, nous suggérons que chaque étudiant démantèle sa propre boite pour regarder le patron formé clairement. Ensuite vient l'étape de modélisation de la situation et enfin vient l'étape de la résolution de la situation.

D) À la recherche du point optimal - Situation problème 4 :

En utilisant la méthode de Fermat présentée auparavant, essaye de répondre la question suivante :

De toutes les boîtes cylindriques avec un volume de 300 cm^3, lequel est celle qui a l'aire totale minimale ?

De la même manière à des situations proposées auparavant, nous cherchons la fonction qui modélise le problème ensuite nous sommes intéresse le point optimal qui répondre la question proposée. Par contre dans cette proposition la fonction qui modélise le problème n'est pas une fonction triviale encore et les manipulations algébriques un peu plus complexes seraient nécessaires.

Pour cette activité, nous suggérons que chaque étudiant amène une vraie boite cylindrique. Cette activité a comme but relier les mathématiques à partir d'une situation plus proche de la quotidienne des étudiants et pourtant nous rentrerons dans des situations reliées à des situations concrètes, dans des situations de modélisation mathématique qui ont le caractère fonctionnel attachée à la vie de tous les jours.

Le point intéressant dans cette situation est le fait que la plupart des boites cylindriques trouvées dans des supermarchés n'ont pas le format idéal et pourtant ne sont pas convenables pour l'environnement. Par conséquent, il est susceptible de demander si avec l'aide des mathématiques il est possible d'améliorer l'environnement.

Évidemment, il faut souligner que pour une consultation complète sur les formats des emballages, c'est nécessaire de considérer les autres contraintes telles comme le palet impliqué dans la situation, le camion et le dépôt où la boite sera gardée et même le produit qui sera déposé sur la boite. Également il y a encore les autres contraintes reliées à la publicité et à l'ergonomie du produit, par exemple.

Néanmoins, il est passible le questionnement sur le format de certains emballages tels comme des emballages pour du maïs ou les autres grains qui n'ont aucune préoccupation avec l'ergonomie ou à la publicité et quand même nous voyons que le gaspillage de matériel est évident.

Exemple de résolution des situations problèmes proposées

Pour clarifier nous donnons à titre d'exemple la résolution de l'activé 4.

SP 4 : De toutes les boîtes cylindriques avec un volume de 300 cm^3, quelle est celle qui a l'aire totale minimale ?

Étape 1 : Prise de données et modèle mathématique

Soit *r* le rayon de la boite cylindrique et *h* leur hauteur, nous voulons déterminer les valeurs de *r* et *h* de telle façon que l'aire totale soit minimale.

Étape 2 : Trouver les équations

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (Aire latérale + Aire de la base) et

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi r^2 h = 300; \ \ h \ et \ r > 0.$

Alors, $h = \frac{300}{\pi r^2}$ et $A = 2\pi r.\frac{300}{\pi r^2} + 2\pi r^2$. Donc, $A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$

$$A = 2\pi r.\frac{300}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$$

En utilisant la méthode de Fermat pour trouver les extremums d'une fonction viennent :

$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$$

$A(r+e) = \dfrac{600}{r+e} + 2\pi r^2 + 4\pi re + 2\pi e^2$

$Il \ doit \ adégalé \ A(r)$ à $A(r+e)$

$\dfrac{600}{r} + 2\pi r^2 \sim \dfrac{600}{r+e} + 2\pi r^2 + 4\pi re + 2\pi e^2$

En suprimant les termes communs:

$\dfrac{600}{r} \sim \dfrac{600}{r+e} + 2\pi e^2 + 4\pi re$

En divisant tous les termes par e :

$\dfrac{600}{r(r+e)} \sim 4\pi r + 2\pi e$

$Suprimez\ e$:

$\frac{600}{r^2} \sim 4\pi r \to r^3 = \frac{150}{\pi} \cong 3{,}628\ cm$

Comme nous cherchons l'aire minimale, le point qui nous intéresse, est bien $r \cong 3{,}628\ cm$.

En substituant r ≈ 3,628 cm dans la fonction A, nous trouverons la valeur minimale qui est égale à $248{,}08\ cm^2$.

$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{600}{3{,}628} + 2\pi(3{,}628)^2 = 248{,}08\ cm^2$$

La représentation graphique de la situation problème :

Cet exercice nous révèle que le format optimal pour une boite cylindrique sera laquelle dont la hauteur de la boite cylindrique est égale au diamètre de la base. Celui c'est un résultat classique du calcul différentiel qui illustre bien le pouvoir de cette discipline si crucial pour les mathématiques.

11 LA ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES: UNA PROPUESTA PARA SU APRENDIZAJE EN LA ESCUELA SECUNDARIA MEXICANA

Actividades capítulo 11: Guía para el profesor

Ana Guadalupe del Castillo[53], Silvia E. Ibarra Olmos[53]

Información de la secuencia didáctica y recomendaciones al docente	
• **NOMBRE DE LA SECUENCIA**	Los ahorros de Luis
• **PROPÓSITO DE LA SECUENCIA**	Estudio de situaciones modelables con ecuaciones lineales, articulando a lo largo de la secuencia, representaciones gráficas, tabulares, algebraicas y en lenguaje natural, culminando con el análisis de la ecuación lineal con dos variables de la forma $y = mx + b$.
• **GRADO ACADÉMICO DONDE SE PUEDE IMPLEMENTAR**	Primero de secundaria.
• **DURACIÓN APROXIMADA**	De cuatro a cinco sesiones de 50 minutos
• **CONTENIDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS**	Números, operaciones aritméticas, número general, variable, expresión algebraica, expresión lineal, coeficiente, término independiente, ecuación, ecuación lineal, ecuaciones equivalentes, igualdad.
• **MATERIALES NECESARIOS**	Material impreso y en línea, en formato de hojas de trabajo y un conjunto de applets o archivos GeoGebra, disponibles en www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/ecuacionlineal.
• **RECOMENDACIONES PARA EL DOCENTE**	En cuanto a los conocimientos previos de los estudiantes, será necesario que estos conozcan los números, sus operaciones y propiedades; tener nociones sobre el uso de la literal para representar cantidades desconocidas y manejo básico del plano cartesiano. No se requiere haber utilizado GeoGebra con anterioridad, pues los archivos o applets a utilizar sólo requieren manipulaciones o construcciones muy básicas. Se espera que a través del uso de este software y el contexto utilizado, se pueda despertar el interés en los estudiantes, y mostrar a la matemática como una herramienta útil para la modelación y resolución de problemas en un contexto de la vida cotidiana.

[53] Universidad de Sonora. México.

LA ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES: UNA PROPUESTA PARA SU APRENDIZAJE EN LA ESCUELA SECUNDARIA MEXICANA

Actividades capítulo 11: Guía para el profesor

Ana Guadalupe del Castillo[54], Silvia E. Ibarra Olmos[54]

Hojas de trabajo formato en línea

Página 1	LOS AHORROS DE LUIS
Nombre del alumno: ______________________ **Nombre de los miembros del equipo**: _____________________________ _____________________________ _____________________________ _____________________________ **Grupo:** __________ **Fecha:** ____________	Instrucciones: • Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul. • Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja. • En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde. 

[54] Universidad de Sonora. México.

Página 2	ACTIVIDAD DE APERTURA: PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN

Los ahorros de Luis

Al ingresar a la escuela secundaria, Luis ha decidido iniciar un esquema de ahorro, reservando parte de lo que sus papás le dan para sus gastos en la escuela. Él desea comprar una bicicleta para unirse a un grupo de amigos que organizan paseos y otras actividades recreativas.

El papá y la mamá de Luis, para promover una cultura financiera en su hijo y apoyar su iniciativa, le han prometido que cada uno aportará una cantidad igual a la que logre ahorrar. De igual manera, el hermano mayor de Luis se ofreció a cooperar con parte de sus ahorros, estimando que podría aportar una cantidad de 250 pesos, al final.

Hay bicicletas de muy diferentes precios. Para explorar a qué tipo de bicicleta puede aspirar, Luis hizo un ejercicio de cálculo para determinar el monto total que logrará reunir, dependiendo de la cantidad que logre ahorrar inicialmente, planteándose las siguientes preguntas: ¿Si ahora tengo ahorrados 450 pesos, qué cantidad total reuniría? ¿Y si ahorro 655 pesos? ¿Cuánto necesito ahorrar si quiero comprar una bicicleta de 3400 pesos? ¿O la de 5200?

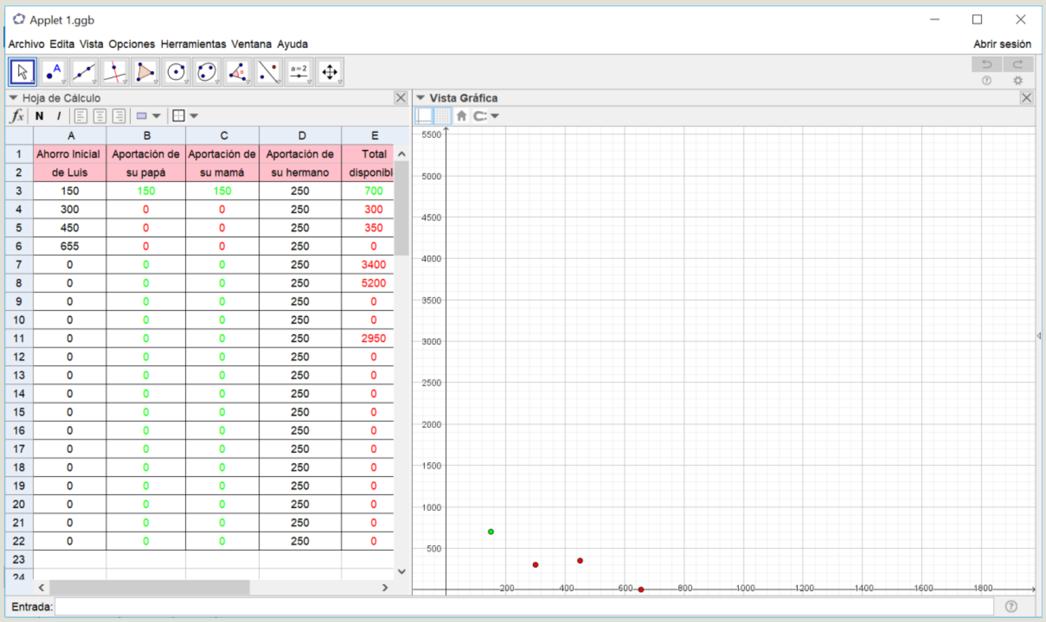
1. Ayuda a Luis a responder sus cuestionamientos y organiza la información en la tabla presentada más abajo. Escribe detalladamente tus procedimientos en el siguiente espacio y, compara y discute tus respuestas con las de tus compañeros.

Ahorro inicial de Luis	Aportación de su papá	Aportación de su mamá	Aportación de su hermano	Total reunido
450				
655				
				3400
				5200

Página 3	**ACTIVIDADES DE DESARROLLO**

Analizando con más detalle la situación

1. Luis desea tener una perspectiva más amplia de la situación y analizar más casos posibles. Descarga y utiliza el Applet 1 para ayudar a Luis en sus propósitos. Modifica el contenido de las celdas de la tabla para que en cada renglón se refleje un caso de la situación planteada.



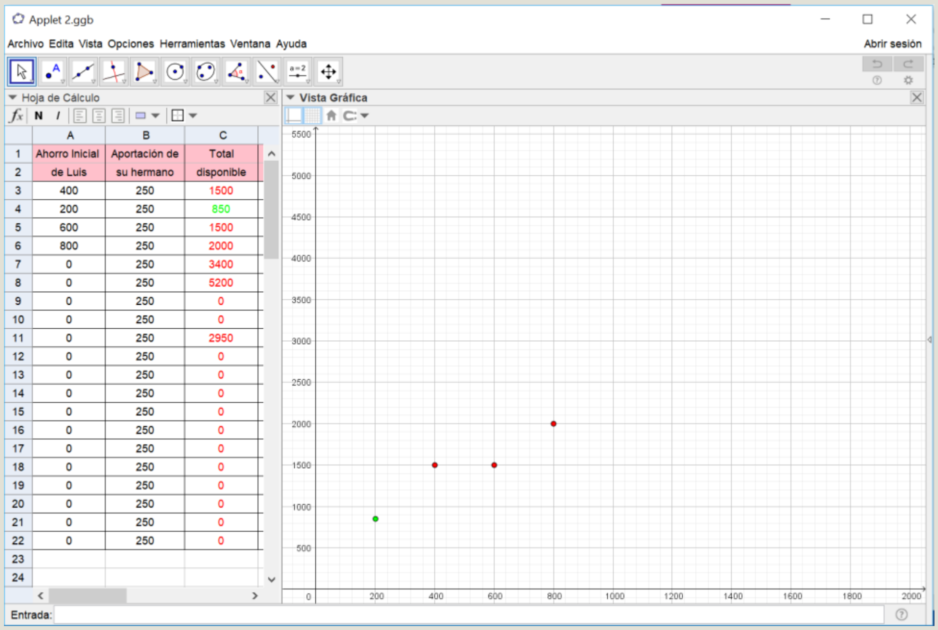
	A	B	C	D	E
1	Ahorro Inicial	Aportación de	Aportación de	Aportación de	Total
2	de Luis	su papá	su mamá	su hermano	disponibl
3	150	150	150	250	700
4	300	0	0	250	300
5	450	0	0	250	350
6	655	0	0	250	0
7	0	0	0	250	3400
8	0	0	0	250	5200
9	0	0	0	250	0
10	0	0	0	250	0
11	0	0	0	250	2950
12	0	0	0	250	0
13	0	0	0	250	0
14	0	0	0	250	0
15	0	0	0	250	0
16	0	0	0	250	0
17	0	0	0	250	0
18	0	0	0	250	0
19	0	0	0	250	0
20	0	0	0	250	0
21	0	0	0	250	0
22	0	0	0	250	0
23					
24					

Imagen de pantalla de Applet 1

a. ¿Qué información adicional proporciona este Applet? Describe con detalle sus elementos de ayuda y la forma en que puede ser útil para analizar diferentes casos.

Página 4	ACTIVIDADES DE DESARROLLO

2. Luis se da cuenta de que puede simplificar el archivo para utilizar tres columnas en lugar de cinco. Descarga y abre el Applet 2, y completa la información de la tabla. ¿Por qué es más conveniente este archivo? Comenta con tus compañeros similitudes y diferencias, así como ventajas y desventajas al comparar los Applets 1 y 2. Escribe tus conclusiones.



	A	B	C
1	Ahorro Inicial	Aportación de	Total
2	de Luis	su hermano	disponible
3	400	250	1500
4	200	250	850
5	600	250	1500
6	800	250	2000
7	0	250	3400
8	0	250	5200
9	0	250	0
10	0	250	0
11	0	250	2950
12	0	250	0
13	0	250	0
14	0	250	0
15	0	250	0
16	0	250	0
17	0	250	0
18	0	250	0
19	0	250	0
20	0	250	0
21	0	250	0
22	0	250	0
23			
24			

Imagen de pantalla de Applet 2

Página 5	**ACTIVIDADES DE DESARROLLO**

3. Para profundizar en la utilidad e interpretación de las gráficas, descarga y abre el Applet 3 (Se recomienda abrir el archivo GeoGebra pues deberás guardar tu trabajo y hacer unas construcciones, posteriormente). En ambas áreas gráficas, observa el punto de color verde y arrastra los demás puntos hasta que cambien su color a verde. Explica a tus compañeros la estrategia seguida, así como la información que brindan las coordenadas de estos puntos. Escribe las ideas centrales en el siguiente espacio. No olvides guardar el Applet 3 con todos los puntos en color verde, pues lo utilizaremos más adelante.

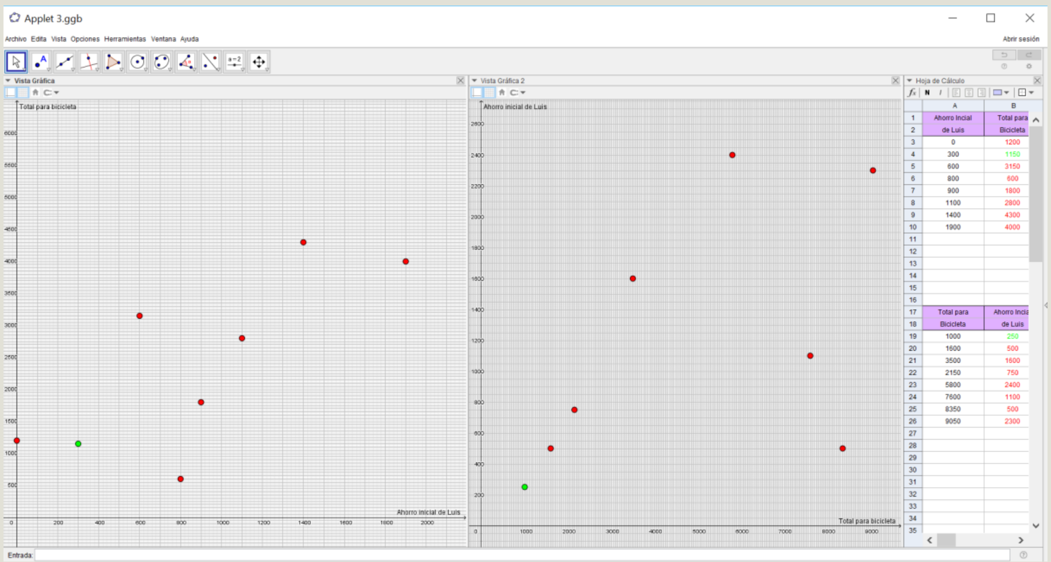


Imagen de pantalla de Applet 3

Página 6	ACTIVIDADES DE DESARROLLO

4. Para analizar y responder a las cuestiones planteadas hasta aquí, ha sido necesario calcular, en un caso, el total reunido para la compra de la bicicleta, a partir de la cantidad que logre ahorrar Luis inicialmente. En el otro caso, por el contrario, ha sido necesario calcular la cantidad que debe ahorrar Luis inicialmente, a partir del total a reunir para comprar una bicicleta de cierto precio.
   a. Describe con tus propias palabras el procedimiento general que debe seguir Luis para calcular el total reunido para la compra de la bicicleta, a partir de la cantidad que logre ahorrar inicialmente.
   b. Igualmente, describe con tus propias palabras el procedimiento general que debe seguir Luis para calcular la cantidad que debe ahorrar inicialmente, para comprar una bicicleta de cierto precio.
5. Si representamos el ahorro inicial de Luis con la letra A, y con la letra T, el total reunido para la compra de la bicicleta escribe una fórmula para calcular T dependiendo del valor de A, y otra fórmula para calcular A dependiendo del valor de T. ¿Qué semejanzas y/o diferencias encuentras entre ambas fórmulas? Comenta con tus compañeros y escribe en el siguiente espacio las principales ideas.

Página 7	ACTIVIDADES DE DESARROLLO

6. Abre de nuevo el Applet 3 que guardaste previamente, y en cada área gráfica, utiliza la herramienta recta para unir dos puntos de color verde. Con ayuda de tu profesor, activa la ecuación asociada a cada recta y compara con las fórmulas que escribiste en el punto anterior. ¿Qué diferencias y/o semejanzas encuentras entre las expresiones señaladas? Discute también con tus compañeros lo que representan todos los puntos de cada recta.

7. Reflexiona junto con tus compañeros y profesor, sobre la utilidad de tener una tabla, una gráfica y/o una ecuación para el análisis y la comprensión de la situación planteada. Escribe tus conclusiones en el siguiente espacio.

Página 8	ACTIVIDADES DE DESARROLLO

8. Modificando las condiciones del problema: ¿Cómo cambiarían los resultados presentados en la tabla, en la gráfica y en la ecuación, si, finalmente, el hermano de Luis no puede cooperar con la compra? ¿O si aportara 300 pesos? ¿O si aportara 500?

   a. Descarga y abre el Applet 4 y explora la situación para distintos valores posibles de la aportación del hermano de Luis. ¿Cómo se afecta la gráfica? ¿Cómo se afecta la ecuación? ¿Y la tabla? Describe ampliamente y comparte tus hallazgos con tus compañeros.

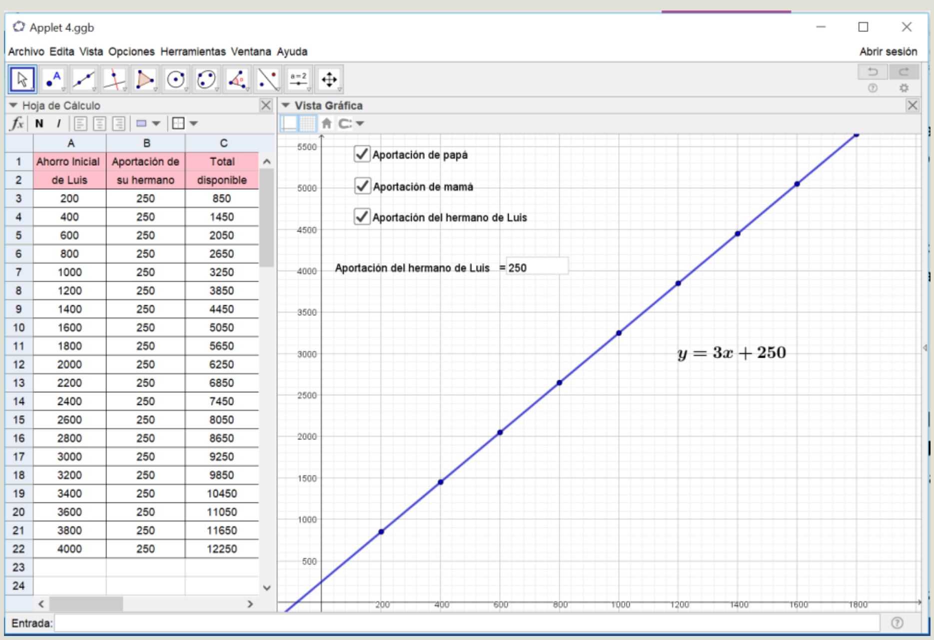


Imagen de pantalla de Applet 4

Página 9	**ACTIVIDADES DE DESARROLLO**
	9. Explora ahora cómo cambian la tabla, la gráfica y la ecuación, si la mamá de Luis no puede cooperar para la compra de la bicicleta. ¿Y cómo cambiarían si, finalmente, tampoco el papá de Luis pudiera cooperar? a. Utiliza nuevamente el Applet 4, para explorar las nuevas situaciones planteadas. ¿Cómo se afecta la gráfica? ¿Cómo se afecta la ecuación? ¿Y la tabla? Describe ampliamente y comparte tus hallazgos con tus compañeros.

Página 10	**ACTIVIDADES DE CIERRE**
	Reflexiones finales Durante el análisis de la situación planteada en esta secuencia, aparecieron tablas de valores, rectas y ecuaciones lineales con dos variables. En esta sección se estudiarán de manera más general, las relaciones existentes entre ellas. 1. Descarga y abre el Applet 5. En él puedes explorar el efecto general en la ecuación y en la tabla, al cambiar el punto de intersección de la recta con el eje y, y/o la inclinación de la recta, mediante el arrastre de los puntos en color rosa y rojo. Presta especial atención, por un lado, a las cosas que cambian y, por el otro, a las que permanecen sin cambio. Escribe abajo tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.

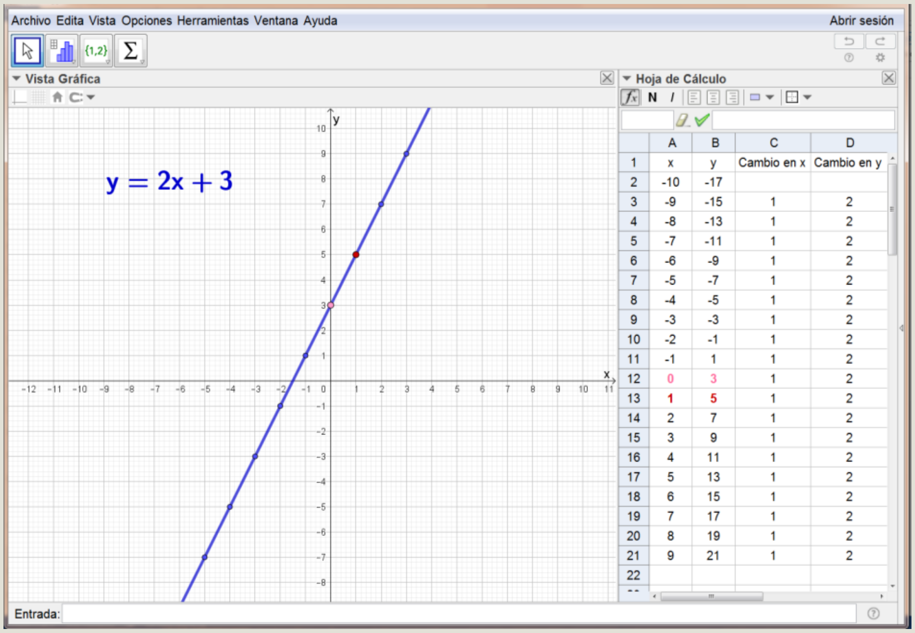


Imagen de pantalla de Applet 5

a. Efecto producido en la ecuación y en la tabla, al cambiar la intersección de la recta con el eje y.

b. Efecto producido en la ecuación y en la tabla, al cambiar la inclinación de la recta.

Página 11 — ACTIVIDADES DE CIERRE

2. Ahora, descarga y abre el Applet 6. Explora el efecto general en la gráfica y en la tabla, al cambiar los valores numéricos de la ecuación. Como en el caso anterior, presta especial atención, por un lado, a las cosas que cambian y, por el otro, a las que permanecen sin cambio. Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.

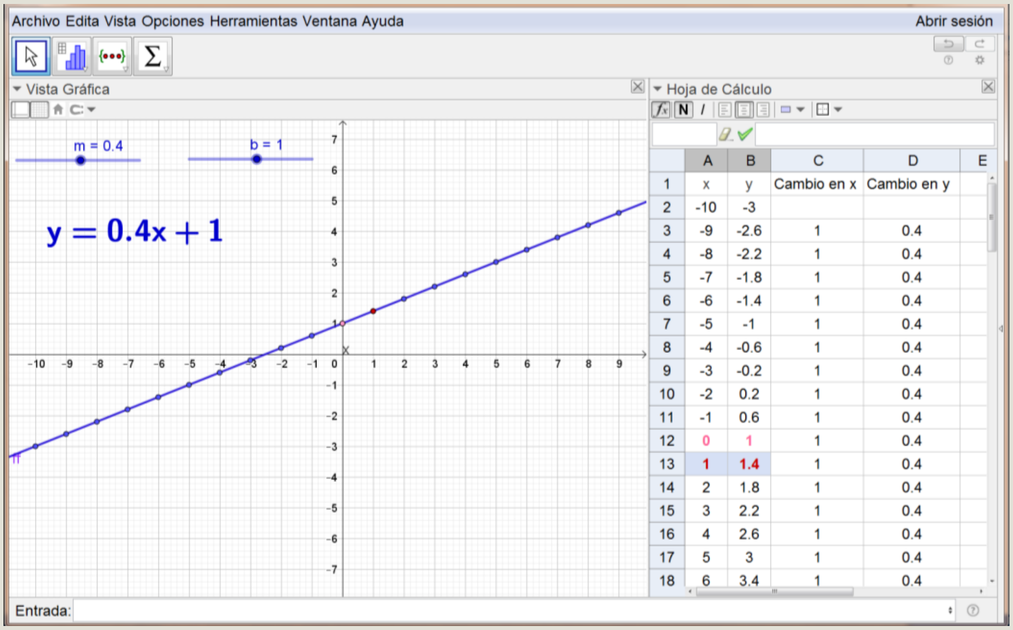


Imagen de pantalla de Applet 6

a. Efecto producido en la gráfica y en la tabla, al cambiar el valor del coeficiente de x.

b. Efecto producido en la gráfica y en la tabla, al cambiar el valor del término independiente.

3. Escribe un resumen con los principales hallazgos realizados en esta sección, sobre las relaciones existentes entre una ecuación lineal con dos variables, su gráfica y una tabla asociada.

LA ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES: UNA PROPUESTA PARA SU APRENDIZAJE EN LA ESCUELA SECUNDARIA MEXICANA

Actividades capítulo 11: Guía para el profesor

Ana Guadalupe del Castillo[55], Silvia E. Ibarra Olmos[55]

Hojas de trabajo formato para impresión

Los ahorros de Luis

Al ingresar a la escuela secundaria, Luis ha decidido iniciar un esquema de ahorro, reservando parte de lo que sus papás le dan para sus gastos en la escuela. Él desea comprar una bicicleta para unirse a un grupo de amigos que organizan paseos y otras actividades recreativas.

El papá y la mamá de Luis, para promover una cultura financiera en su hijo y apoyar su iniciativa, le han prometido que cada uno aportará una cantidad igual a la que logre ahorrar. De igual manera, el hermano mayor de Luis se ofreció a cooperar con parte de sus ahorros, estimando que podría aportar una cantidad de 250 pesos, al final.

Hay bicicletas de muy diferentes precios. Para explorar a qué tipo de bicicleta puede aspirar, Luis hizo un ejercicio de cálculo para determinar el monto total que logrará reunir, dependiendo de la cantidad que logre ahorrar inicialmente, planteándose las siguientes preguntas: ¿Si ahora tengo ahorrados 450 pesos, qué cantidad total reuniría? ¿Y si ahorro 655 pesos? ¿Cuánto necesito ahorrar si quiero comprar una bicicleta de 3400 pesos? ¿O la de 5200?

[55] Universidad de Sonora. México.

1. Ayuda a Luis a responder sus cuestionamientos y organiza la información en la tabla presentada más abajo. Escribe detalladamente tus procedimientos en el siguiente espacio y, compara y discute tus respuestas con las de tus compañeros.

Ahorro inicial de Luis	Aportación de su papá	Aportación de su mamá	Aportación de su hermano	Total reunido
450				
655				
				3400
				5200

Analizando con más detalle la situación

1. Luis desea tener una perspectiva más amplia de la situación y analizar más casos posibles. Descarga y utiliza el Applet 1 para ayudar a Luis en sus propósitos. Modifica el contenido de las celdas de la tabla para que en cada renglón se refleje un caso de la situación planteada.

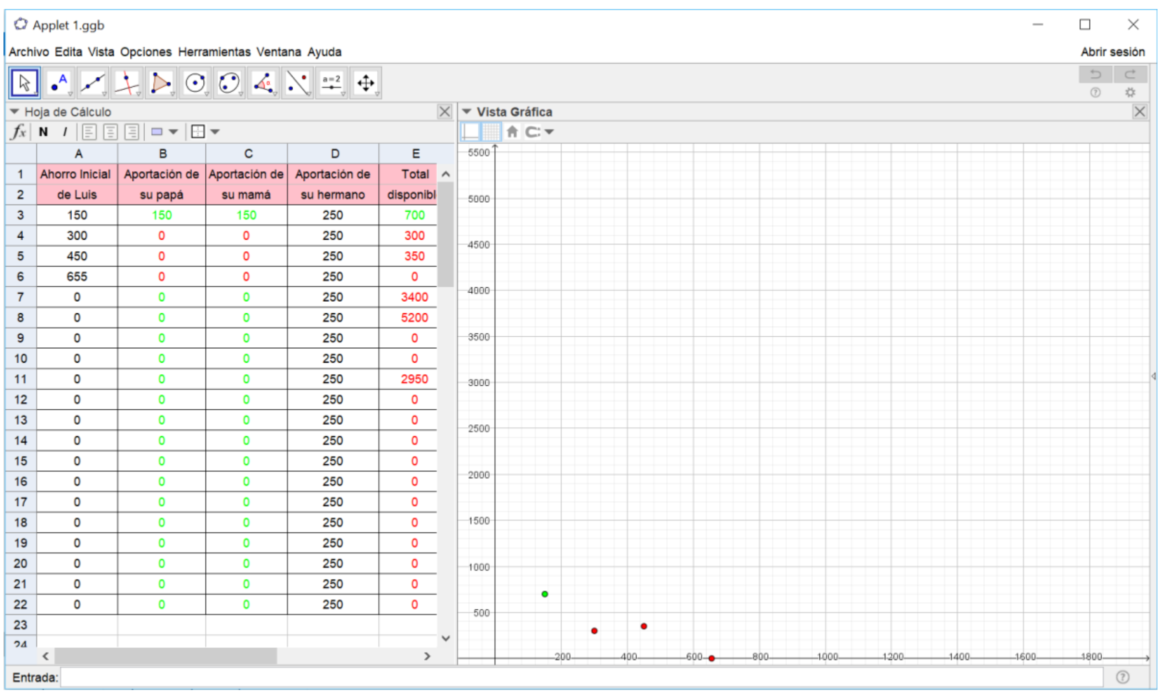


Imagen de pantalla de Applet 1

a. ¿Qué información adicional proporciona este Applet? Describe con detalle sus elementos de ayuda y la forma en que puede ser útil para analizar diferentes casos.

2. Luis se da cuenta de que puede simplificar el archivo para utilizar tres columnas en lugar de cinco. Descarga y abre el Applet 2, y completa la información de la tabla. ¿Por qué es más conveniente este archivo? Comenta con tus compañeros similitudes y diferencias, así como ventajas y desventajas al comparar los Applets 1 y 2. Escribe tus conclusiones.

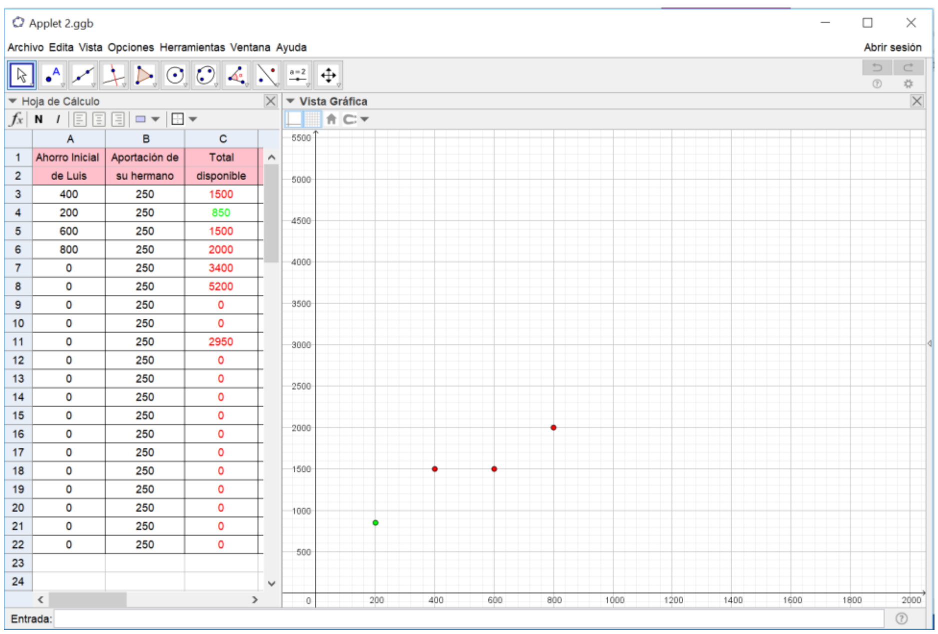


Imagen de pantalla de Applet 2

3. Para profundizar en la utilidad e interpretación de las gráficas, descarga y abre el Applet 3 (se recomienda abrir el archivo GeoGebra para guardar tu trabajo y hacer construcciones básicas, posteriormente). En ambas áreas gráficas, observa el punto de color verde y arrastra los demás puntos hasta que cambien su color a verde. Explica a tus compañeros la estrategia seguida, así como la información que brindan las coordenadas de estos puntos. Escribe las ideas centrales en el siguiente espacio. No olvides guardar el Applet 3 con todos los puntos en color verde, pues lo utilizaremos más adelante.

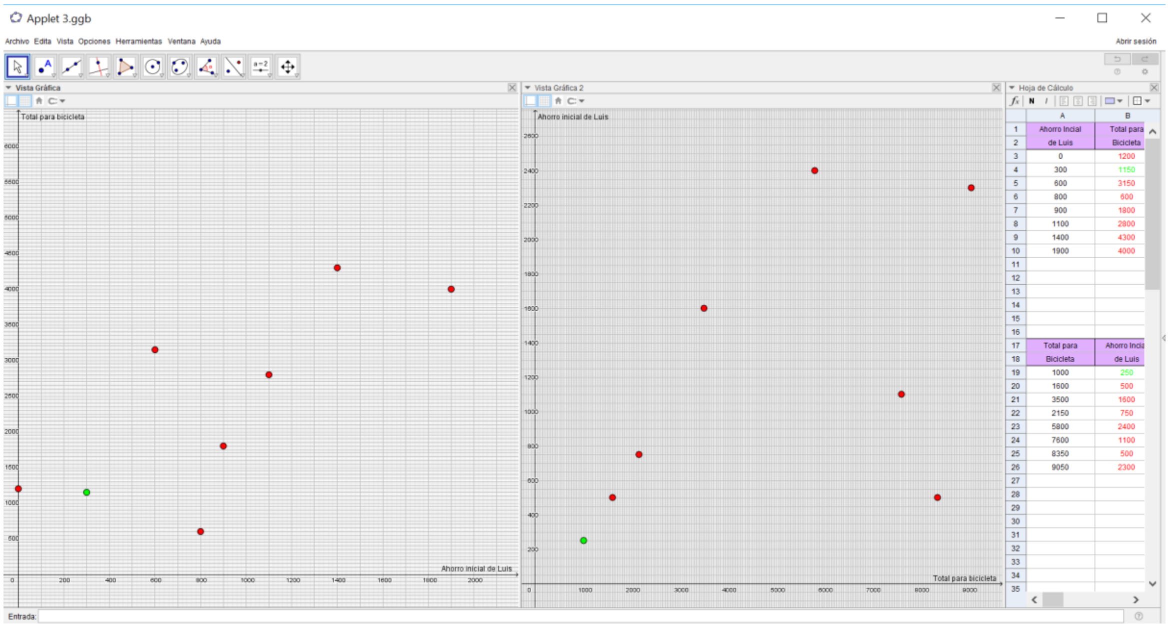


Imagen de pantalla de Applet 3

4. Para analizar y responder a las cuestiones planteadas hasta aquí, ha sido necesario calcular, en un caso, el total reunido para la compra de la bicicleta, a partir de la cantidad que logre ahorrar Luis inicialmente. En el otro caso, por el contrario, ha sido necesario calcular la cantidad que debe ahorrar Luis inicialmente, a partir del total a reunir para comprar una bicicleta de cierto precio.

    a. Describe con tus propias palabras el procedimiento general que debe seguir Luis para calcular el total reunido para la compra de la bicicleta, a partir de la cantidad que logre ahorrar inicialmente.

    b. Igualmente, describe con tus propias palabras el procedimiento general que debe seguir Luis para calcular la cantidad que debe ahorrar inicialmente, para comprar una bicicleta de cierto precio.

5. Si representamos el ahorro inicial de Luis con la letra A, y con la letra T, el total reunido para la compra de la bicicleta escribe una fórmula para calcular T dependiendo del valor de A, y otra fórmula para calcular A dependiendo del valor de T. ¿Qué semejanzas y/o diferencias encuentras entre ambas fórmulas? Comenta con tus compañeros y escribe en el siguiente espacio las principales ideas.

6. Abre de nuevo el Applet 3 que guardaste previamente, y en cada área gráfica, utiliza la herramienta recta para unir dos puntos de color verde. Con ayuda de tu profesor, activa la ecuación asociada a cada recta y compara con las fórmulas que escribiste en el punto anterior. ¿Qué diferencias y/o semejanzas encuentras entre las expresiones señaladas? Discute también con tus compañeros lo que representan todos los puntos de cada recta.

7. Reflexiona junto con tus compañeros y profesor, sobre la utilidad de tener una tabla, una gráfica y/o una ecuación para el análisis y la comprensión de la situación planteada.

8. Modificando las condiciones del problema: ¿Cómo cambiarían los resultados presentados en la tabla, en la gráfica y en la ecuación, si, finalmente, el hermano de Luis no puede cooperar con la compra? ¿O si aportara 300 pesos? ¿O si aportara 500?
    a. Descarga y abre el Applet 4 y explora la situación para distintos valores posibles de la aportación del hermano de Luis. ¿Cómo se afecta la gráfica? ¿Cómo se afecta la ecuación? ¿Y la tabla? Describe ampliamente y comparte tus hallazgos con tus compañeros.

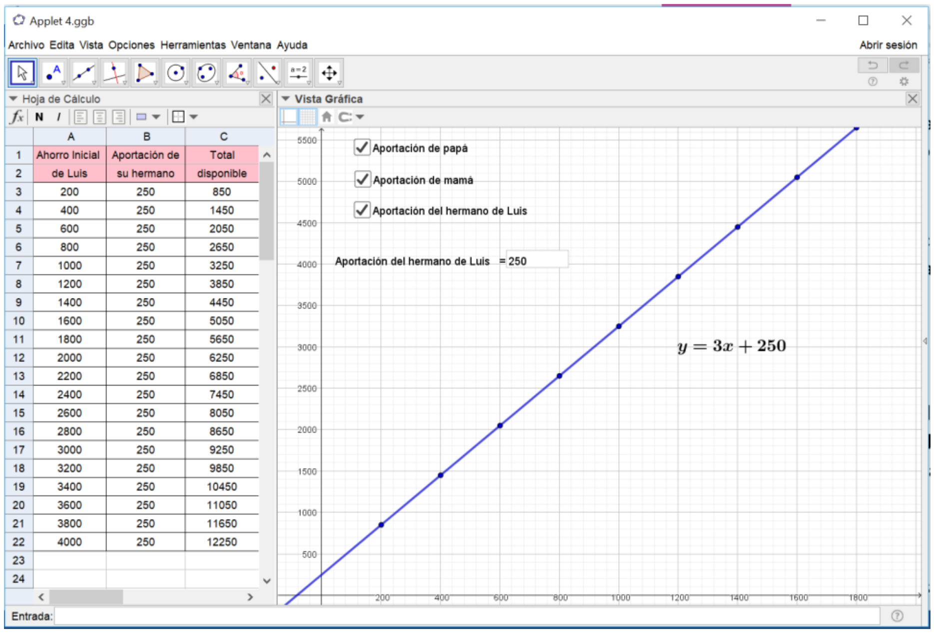


Imagen de pantalla de Applet 4

9. Explora ahora cómo cambian la tabla, la gráfica y la ecuación, si la mamá de Luis no puede cooperar para la compra de la bicicleta. ¿Y cómo cambiarían si, finalmente, tampoco el papá de Luis pudiera cooperar?

    a. Utiliza nuevamente el Applet 4, para explorar las nuevas situaciones planteadas. ¿Cómo se afecta la gráfica? ¿Cómo se afecta la ecuación? ¿Y la tabla? Describe ampliamente y comparte tus hallazgos con tus compañeros.

Reflexiones finales

Durante el análisis de la situación planteada en esta secuencia, aparecieron tablas de valores, rectas y ecuaciones lineales con dos variables. En esta sección se estudiarán de manera más general, las relaciones existentes entre ellas.

1. Descarga y abre el Applet 5. En él puedes explorar el efecto general en la ecuación y en la tabla, al cambiar el punto de intersección de la recta con el eje y, y/o la inclinación de la recta, mediante el arrastre de los puntos en color rosa y rojo. Presta especial atención, por un lado, a las cosas que cambian y, por el otro, a las que permanecen sin cambio. Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.

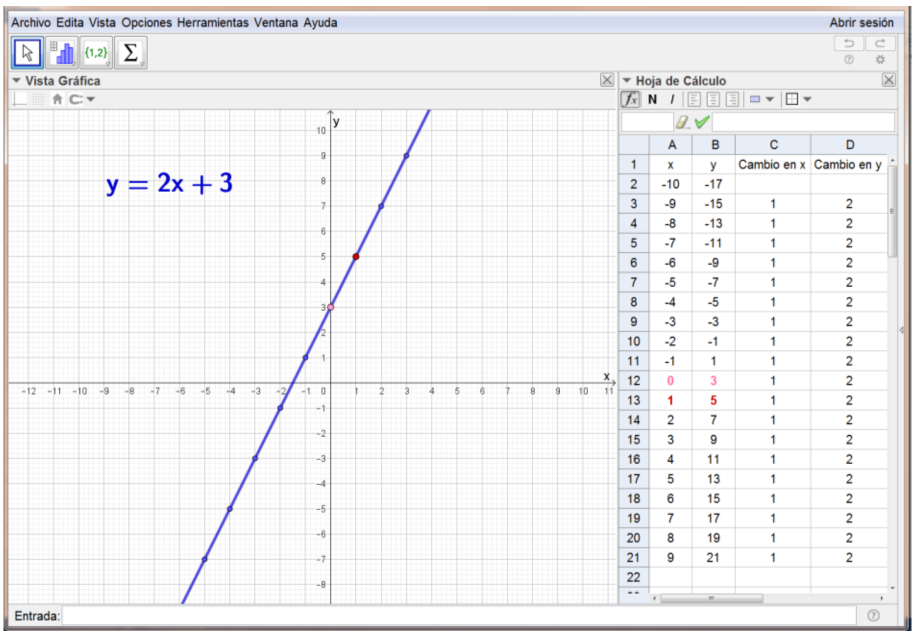


Imagen de pantalla de Applet 5

a. Efecto producido en la ecuación y en la tabla, al cambiar la intersección de la recta con el eje y.

b. Efecto producido en la ecuación y en la tabla, al cambiar la inclinación de la recta.

2. Ahora, descarga y abre el Applet 6. Explora el efecto general en la gráfica y en la tabla, al cambiar los valores numéricos de la ecuación. Como en el caso anterior, presta especial atención, por un lado, a las cosas que cambian y, por el otro, a las que permanecen sin cambio. Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.

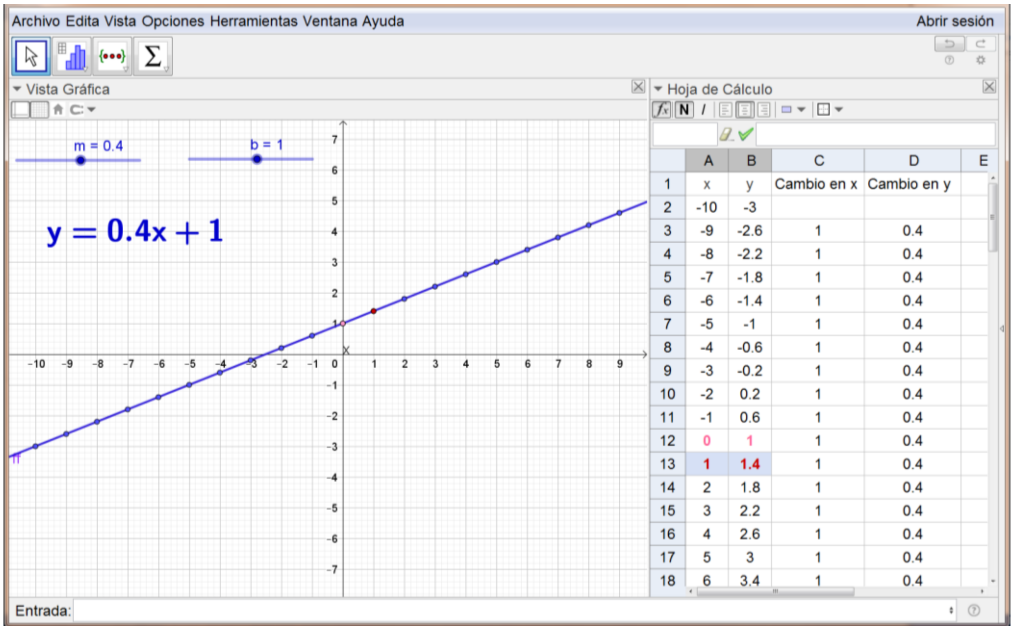


Imagen de pantalla de Applet 6

a. Efecto producido en la gráfica y en la tabla, al cambiar el valor del coeficiente de x.

b. Efecto producido en la gráfica y en la tabla, al cambiar el valor del término independiente.

3. Escribe un resumen con los principales hallazgos realizados en esta sección, sobre las relaciones existentes entre una ecuación lineal con dos variables, su gráfica y una tabla asociada.

12 TECNOLOGÍA Y USOS DE LAS GRÁFICAS: UNA EXPERIENCIA DE MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Actividades capítulo 12: Guía para el profesor

José David Zaldívar Rojas[56]

INFORMACIÓN DE LA ACTIVIDAD Y RECOMENDACIONES AL DOCENTE

- NOMBRE DE LA ACTIVIDAD: Marcos a la Escuela
- PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD: La situación de modelación del movimiento pretende problematizar nociones y significados sobre la variación y comportamientos con tendencia por medio de un uso de las gráficas que se generan a partir de modelar un fenómeno de movimiento de cambio.
- GRADO ACADÉMICO DONDE SE PUEDE IMPLEMENTAR: Secundaria y Medio Superior
- CONTENIDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS: funciones, funciones crecientes y decrecientes, razón de cambio instantánea, gráficas de funciones.
- DURACIÓN APROXIMADA: 60 minutos.
- MATERIALES NECESARIOS: sensor de movimiento, programa de análisis de datos (TI-Nspire, Logger Pro, otro), un espacio dónde caminar y la hoja de trabajo.
- RECOMENDACIONES PARA EL DOCENTE: La implementación de la SMM en el escenario escolar requiere de una organización que permita el desarrollo del uso de la gráfica, por lo que se realiza con base en tres momentos:

✓ **Momento de conjetura**. En este momento de la situación se permite que los estudiantes expresen aquello que consideren necesario para representar y expresar el movimiento. Se espera que ante la Tarea 1 los estudiantes pongan en funcionamiento formas culturales de saber socialmente compartidas para responder y expresar la situación de movimiento propuesta por el profesor.

✓ **Momento de confrontación**. En este momento de la situación se establece un debate científico entre el profesor y los estudiantes al problematizar las producciones de estos últimos. Se cuestiona a los estudiantes sobre elementos variacionales que deben contener sus producciones con la intención de desarrollarlas. Se establece entonces una forma de construir graficas cartesianas usando dispositivos tecnológicos (sensores de movimiento).

✓ **Momento de funcionalidad**. En este momento se ponen en funcionamiento un uso de las gráficas cartesianas para la construcción de argumentos para ajustar la estructura de las gráficas y construir patrones deseables.

El abordaje experimental que se propone, se espera que proporcione la posibilidad entre los

[56] Universidad Autónoma de Coahuila, México.

estudiantes de simular el movimiento de una persona que camina frente al sensor en línea recta bajo diferentes condiciones: alejarse del sensor, acercarse al sensor o quedarse quieto frente al sensor. Más aún, se pueden combinar estas condiciones bajo diferentes variaciones, por ejemplo: acercarse rápido al sensor y alejarse de este, despacio. La tecnología brinda además la oportunidad de repetir el experimento, debido a la retroalimentación instantánea que presenta el software e incluso presenta la posibilidad de analizar otras representaciones, como la tabular.

Página 1	**MARCOS A LA ESCUELA**

Nombre del Alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

Grupo: __________

Fecha: _____/_____/_____

Instrucciones:

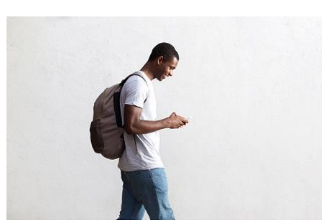
- ✓ Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.
- ✓ Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.

Página 2	**PLANTEAMIENTO DE LA SITUACIÓN DE INVESTIGACIÓN**

Marcos es un estudiante de preparatoria que vive relativamente cerca de su escuela; a solo 800 metros, y además, su casa se ubica en la misma acera que la escuela.

Todos los días Marcos camina hacia la escuela lo cual no le lleva más de 10 minutos. Cierto día salió de su casa muy tranquilo y cuando ya había caminado durante 4 minutos y se encontraba a la mitad del camino, ¡no sintió en la bolsa del pantalón el celular! Asustado, se puso a buscar en su mochila durante dos minutos sin poderse mover del susto, por lo que decidió regresar a su casa caminando a paso veloz sin dejar de buscar en la mochila. Faltando 100 metros para llegar de nueva cuenta a su casa, por fin encontró el celular, por lo que tuvo que correr hacia la escuela con todas sus energías, llegando a la puerta de la misma un minuto antes que le cerrasen la reja.

Desde ese día, Marcos sale con al menos 15 minutos de anticipación y siempre revisando la bolsa del pantalón antes de salir de casa.



Página 3	REFLEXIÓN INDIVIDUAL (Momento de Conjetura)

Una vez que se les ha presentado a los estudiantes la situación de movimiento de Marcos a la Escuela, se les pide a los estudiantes lo siguiente:

Tarea 1. Dibuja el movimiento realizado por Marcos durante su trayecto a la escuela en el día descrito anteriormente.

En este momento de la situación se permite que los estudiantes expresen aquello que consideren necesario para representar y expresar el movimiento. Se espera que ante la Tarea 1 los estudiantes pongan en funcionamiento formas culturales de saber socialmente compartidas para responder y expresar la situación de movimiento propuesta por el profesor. Para la elaboración de sus propuestas se les pide a los estudiantes que realicen sus producciones en hojas de papel de manera individual.

Página 4	DISCUSIÓN EN EQUIPO (Momento de Confrontación)

Posterior a la elaboración de sus producciones, se les pide a los estudiantes que se reúnan en equipo y discutan sus propuestas.

En este momento el profesor puede solicitar a algunos estudiantes que realicen sus dibujos en la pizarra con la intención de discutir las producciones grupalmente. Se espera que estas producciones se basen en el uso de Trayectorias, es decir, de flechas con dirección. Asimismo, el profesor puede pedirle a un(a) estudiante que interprete la producción de un(a) compañero(a) con la intención de analizar la viabilidad y validez de las producciones.

El profesor puede cuestionar los siguientes elementos de las propuestas de los estudiantes:

- ✓ Sobre el significado de las flechas que los estudiantes proponen,
- ✓ Sobre la longitud de las flechas y el significado de otros elementos incluidos en el dibujo,
- ✓ Sobre la rapidez de Marcos en los momentos clave de la historia y en la forma en la cual se expresa dicha rapidez en los dibujos,
- ✓ Sobre la similitud de las producciones,
- ✓ Sobre el tiempo que le lleva a Marcos completar el recorrido y cada etapa de la historia,

Sobre la conveniencia de contar con un sistema que permita hablar de la posición relativa de una partícula y la forma en la cual se podrían expresar elementos variacionales de la situación.

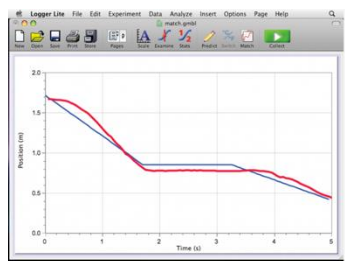
Página 5	DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO (Momento de funcionalidad)

Una vez realizados los cuestionamientos propuestos en la hoja 4 por parte del profesor, este presenta a los estudiantes una manera en la cual es posible representar el movimiento y una herramienta para ello: la gráfica cartesiana.

Para ello, el profesor introduce el uso de un sensor de movimiento y de un programa para la toma de datos.

Tarea 2. Usando el sensor de movimiento y el programa *Logger Lite*, realiza los siguientes movimientos frente al sensor:

- ✓ Camina frente al sensor y aléjate de este,
- ✓ Camina frente al sensor y acércate a este desde una cierta distancia,
- ✓ Mantente quieto(a) frente al sensor a una cierta distancia,
- ✓ Corre frente al sensor, alejándote o acercándote a éste,
- ✓ Realiza combinaciones de movimiento como consideres pertinente. Por ejemplo: corre acercándote y camina alejándote del sensor.
- ✓ Contesta: ¿Cuál es la forma de la gráfica generada en cada caso?, ¿cuáles son las similitudes y diferencias en las formas de las gráficas?



Página 6	DISCUSIÓN EN EQUIPO (Momento de confrontación)

Tarea 3. Realiza, sin ayuda del sensor de movimiento, la gráfica cartesiana que creas que se obtendría del recorrido de Marcos mientras se dirigía a la escuela. Posteriormente, utilizando el software de graficación y el sensor de movimiento, reproduce la escena de Marcos mientras se dirige a la escuela y comprueba tus conjeturas sobre la gráfica cartesiana que propusiste. ¿Se parecen?, ¿cuáles son las diferencias?

13 UNA FORMA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE: OBJETOS PARA APRENDER

Actividades capítulo 13: Guía para el profesor

Ricardo Ulloa Azpeita[57]

Ejemplos de actividades se encuentran en el sitio Web:

http://www.cucei.udg.mx/maestrias/matedu/

[57] Universidad de Guadalajara, México.

14 SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CÁLCULO DEL VOLUMEN POR EL MÉTODO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN: EL CASO DE RECIPIENTES Y SANDÍA

Actividades capítulo 14: Guía para el profesor

Rafael Pantoja Rangel[58], Rosaura Ferreyra Olvera Azpeita[58], Rafael Pantoja González[58]

Contactar directamente al responsable del capítulo: rpantoja@prodigy.net.mx

[58] Universidad de Guadalajara, México.

15 GEOGEBRA COMME OUTIL D'EXPLORATION EN ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Activités du chapitre 15 : Guide pour le professeur

Loïc Geeraerts[59], Denis Tanguay[59]

I. ACTIVITE 1 : LES QUADRILATERES QUI ONT DES ANGLES DROITS (PREMIERE PHASE)

Nom : ____________________ Prénom : ______________________ Date : ________

1. Construisez avec GeoGebra un quadrilatère qui a 3 angles droits. Comme toujours avec GeoGebra, votre quadrilatère doit garder la propriété prescrite (les 3 angles droits) quand il est déformé. Déformez. Que constatez-vous ? ____

2. Construisez avec GeoGebra un quadrilatère qui a 2 angles consécutifs qui sont droits. Déformez. Quel type de quadrilatères obtenez-vous ?

   ____

3. Prouvez vos affirmations précédentes, en vous appuyant sur les énoncés ci-dessous :

   Perpendiculaire-1 : Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

   Parallèle-1 : Si deux droites ont une perpendiculaire en commun, alors elles sont parallèles.

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

[59] Université du Québec à Montréal, Québec, Canada.

4. Les deux autres angles du quadrilatère qui a deux angles droits consécutifs ont quelque chose de particulier. Vérifiez, en déformant avec GeoGebra. Démontrez-le.

____

____

_______________________ ont une propriété particulière. Explorez avec GeoGebra et essayez de découvrir laquelle. Si vous ne trouvez pas, passez au point suivant et revenez-y ensuite.

____

____

____

5. Avec le fichier GeoGebra qui vous est fourni, explorez la figure ci-dessous. Énoncez le résultat qu'elle cache. Démontrer-le.

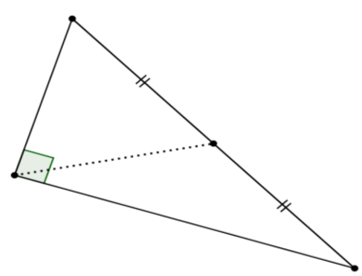


Fig. 1. La figure qui illustre le Théorème des trois segments

____

____

____

GEOGEBRA COMME OUTIL D'EXPLORATION EN ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Loïc Geeraerts[60], Denis Tanguay[60]

II. ACTIVITE 2 : LES QUADRILATERES QUI ONTUNE PAIRE D'ANGLES SUPPLEMENTAIRES (DEUXIEME PHASE)

Nom : ____________________ Prénom : ______________________ Date : ________

1. Construisez avec GeoGebra un quadrilatère non croisé inscrit dans un cercle. Quelles sont ses propriétés ?

2. Prouvez cette propriété des quadrilatères non croisés inscrits :

   – Dans le cas où le centre du cercle est à l'intérieur du quadrilatère. Tracez pour cela les segments ayant pour extrémités chaque sommet et le centre du cercle. Identifiez les angles (par exemple avec de la couleur). Faites intervenir la somme des mesures des angles intérieurs de tout quadrilatère (non croisé).

[60] Université du Québec à Montréal, Québec, Canada.

– Dans le cas où le centre du cercle est à l'extérieur du quadrilatère. Utilisez pour cela le théorème des angles inscrits.

– Énoncez ce théorème dans toute sa généralité en Français sous forme de « Si … alors (forcément) … »

3. Réciproquement, Prouvez que tous les quadrilatères non croisés ayant ses angles opposés supplémentaires sont forcément inscriptibles dans un cercle. Vous pouvez bien sûr utiliser le théorème précédemment démontré.

A.M.I.U.T.E.M

UQÀM