Colección "Matemática Educativa y Tecnología"

# INVESTIGACIONES TEÓRICO PRÁCTICAS SOBRE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLÓGICO


**Editores:**
Quiroz, Samantha
Nuñez, Eréndira
Soto, José Luis
Saboya, Mireille

Editores de la serie

Fernando Hitt Espinosa
José Carlos Cortés Zavala

## Comité Editorial

Primera edición : febrero 2019 (México)

Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico

Quiroz, S., Núñez, E., Saboya, M. y Soto, J. (Eds).

México: Editorial AMIUTEM, 2019

347 p ; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-0-1

Impreso en México / Printed in Mexico

# Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds., 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolinni Bussi & Mariotti, 1999, 2008; Arzarello & Paola, 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros "Matemática Educativa y Tecnología". Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-practico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

## Referencias

Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games : the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Groupe PME, v. 2, 17-24. Seoul: PME.

Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.

Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

# PREFACIO

Esnel Pérez Hernández[1]

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 15) se proponen "iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable", en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 214) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 33) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 166).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 121) enuncian que: al "animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura". Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

[1] Instituto GeoGebra AMIUTEM

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 77) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

"[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas–de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente".

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 85 y 86) asignan el nombre de "modelo tabular" y "modelo gráfico" a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, "puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo" (pág. 106).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a "un modelo" fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en "pesar figuras" para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del geómetra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, Bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Tanguay (Capítulo 15) menciona algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, e d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de trescientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el anexo me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

# CONTENIDO

# 1 LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN UN MEDIO SOCIOCULTURAL Y TECNOLÓGICO

Fernando Hitt[1], Samantha Quiroz Rivera[2]

## Resumen

En este capítulo se proporciona una mirada rápida a algunas teorías del aprendizaje que emergieron en el siglo XX y que algunas de ellas, en un cambio de paradigma, han sido abandonadas para dar inicio a nuevas teorías y aplicaciones a la enseñanza de las matemáticas. Así, mostraremos algunos aspectos de teorías basadas sobre el comportamiento, el constructivismo, el socioconstructivismo y finalmente, sobre un acercamiento sociocultural del aprendizaje de las matemáticas proporcionando definiciones y consideraciones locales de manera a aplicar este marco teórico general de aprendizaje al aprendizaje específico de las matemáticas con ayuda de tecnología.
**Palabras clave** : Teoría de la actividad, Aprendizaje sociocultural, ACODESA, diseño de actividades en ambiente tecnológico.

## Résumé

Dans le présent chapitre, nous souhaitons faire un survol de certaines théories de l'apprentissage apparues au XXe siècle, certaines d'entre elles ayant été abandonnées, dans un changement de paradigme, au profit de nouvelles théories et applications à l'enseignement des mathématiques. En effet, nous nous attarderons sur certains aspects des théories basées sur le behaviorisme, le constructivisme, le socioconstructivisme et, finalement, sur une approche socioculturelle de l'apprentissage des mathématiques. Notre objectif est de proposer des définitions et des considérations ponctuelles afin d'appliquer ce cadre théorique général à l'apprentissage spécifique des mathématiques dans un milieu technologique.
**Mots clés** : Théorie de l'activité, apprentissage socioculturel, ACODESA, design des activités dans un milieu technologique.

## Abstract

In this chapter, we desire to quickly examine some theories of learning that have emerged in the 20th century, and that some of them, in a paradigm shift, have been abandoned in favor of new theories and applications of the learning of mathematics. Indeed, we will show some aspects of theories based on behaviorism, constructivism, socioconstructivism and a socio-cultural approach to learning mathematics. Our goal is to provide local definitions and considerations to apply this general theoretical framework to the specific learning of mathematics in a technological environment.
**Keywords**: Activity theory, sociocultural learning, ACODESA, design activity in a technological environment.

---

[1] Université du Québec à Montréal, Canadá.
[2] Universidad Autónoma de Coahuila, México.

## 1. Introducción

A finales del siglo XIX, Pavlov (1897/1902) escribe sobre el acondicionamiento del comportamiento en animales (perros explícitamente). En esta línea, a principios del siglo XX, Watson (1913) inició una corriente en psicología ligada al aprendizaje analizando el comportamiento, convirtiéndose, en ese entonces, en un paradigma y por ende tratado por muchos psicólogos y educadores posteriormente. Rápidamente comenzó a contar con más adeptos puesto que, bajo este enfoque, se contaba con una teoría que tenía aplicaciones inmediatas a la vida real. Considerando este enfoque, era fácil de predecir el comportamiento de las personas, y así mismo, comprobar y medir esas predicciones. De hecho, la medición consistía en observar la respuesta a cierto estímulo. Con ello, solamente se podía decidir si cierto individuo podía o no realizar cierto comportamiento, y no en los acontecimientos mentales no observables (Ormrod, 2005).

Las limitaciones de este acercamiento teórico, se pusieron en evidencia con el surgimiento de la teoría de Piaget sobre el constructivismo, ya que podía con mayor precisión explicar procesos complejos sobre cómo los individuos construyen conocimiento en la acción. Uno de los aspectos importantes introducidos por Piaget fue la noción de esquema cognitivo, que se modifica a través de un proceso de asimilación, acomodación y equilibración. La asimilación y acomodación están ligadas a la inteligencia de los humanos quienes generan un proceso de adaptación. Los nuevos conocimientos no se añaden de manera directa, sino que el esquema cognitivo sufre un cambio que, para Piaget, está ligado a la equilibración. Otro aspecto importante señalado por Piaget es la noción de abstracción empírica y abstracción reflexiva, la primera ligada a la manipulación de objetos concretos y la segunda sobre la manipulación de objetos en la mente. Esta última noción, por ejemplo, es uno de los pilares de la teoría APOE (Acción, Procesos, Objetos, Esquema) que consideran a la abstracción reflexiva como soporte esencial en su teoría constructivista (ver Assiala et al 1996). Dreyfus, respecto a las dos nociones antes mencionadas de Piaget (in Lermann dictionnary, 2014) señala lo siguiente:

> La abstracción reflexiva ha tenido una influencia enorme. La abstracción empírica es el proceso de un alumno que reconoce las propiedades comunes a los objetos en el entorno. La abstracción reflexiva es un proceso de dos etapas de (i) proyectar propiedades de las acciones de un alumno en un nivel superior donde se vuelven conscientes y (ii)

> reorganizarlas en el nivel superior para que puedan conectarse o integrarse con estructuras ya existentes. (p.6)

Si bien el trabajo de Vigotsky (1932/1995) bajo una teoría social del aprendizaje fue producido casi al mismo tiempo del constructivismo de Piaget, la traducción de sus trabajos fue tardío. Es en épocas más recientes que inicia una influencia más grande en los educadores de nuestro tiempo. Una de sus posibles influencias sobre una construcción social del conocimiento fue el cambio que dieron algunos investigadores pasando del constructivismo al socioconstructivismo. Sin embargo, esta corriente ha sido criticada fuertemente, por un constructivista radical, von Glasersfeld (2004):

> El *constructivismo social* es un movimiento reciente iniciado por personas que afirman que el constructivismo radical ignora el papel de las interacciones sociales en la construcción del conocimiento. Esta declaración, según entiendo, se justifica en parte por el hecho de que hasta ahora ni Piaget, ni el constructivismo más reciente, han propuesto un modelo detallado del funcionamiento de la interacción social en la misma perspectiva del constructivismo. Sin embargo, Piaget y todos los que fueron inspirados por su trabajo siempre han mantenido que la interacción social es muy importante en la construcción del conocimiento. Pero primero, hemos tenido que desarrollar modelos para todas las construcciones elementales que deben ser realizadas por un organismo cognitivo antes de que se pueda comenzar a conocer e interactuar con los demás. Por otra parte, por lo que sé, el "constructivista" social tiende a considerar a la sociedad como dada, y una/un constructivista radical no puede aceptar eso. En mi opinión, la sociedad debe ser analizada como un concepto construido si vamos a explicar y valorar correctamente su papel en la posterior construcción de conceptos (Traducción libre, p. 294).

Tomando en consideración la opinión de von Glasersfeld, no se podría avanzar en el socioconstructivismo si no se realiza una construcción de las nociones elementales que dan soporte a la teoría y con ello tendría que darse una respuesta a cómo se construye el conocimiento de manera individual, construcción de conocimiento colectivo o grupal, y todas las nociones de asimilación, acomodación y equilibración en un trabajo en colaboración. ¿Qué significaría una abstracción reflexiva en este contexto de construcción social del conocimiento?

Como lo hemos señalado, si bien los trabajos de Vigotsky (1932) sobre "Pensamiento y lenguaje", se empezaron a conocer en la 2ª mitad del siglo XX (sobre la construcción social del conocimiento), su acercamiento teórico era menos conocido que el de Piaget. Los Piagetianos no negaban la importancia del trabajo en colaboración para la construcción del conocimiento, simplemente consideraban, y algunos continúan considerando, que es importante avanzar más sobre la construcción individual del conocimiento antes de pasar a la construcción social, que en principio es mucho más compleja de analizar. Así, pasando a la enseñanza, al principio se seguía un modelo de enseñanza magistral, y poco a poco se fue introduciendo la idea de que el niño debería construir su propio conocimiento, dando pie a otro tipo de enseñanza. Sin embargo, como lo ha señalado von Glaserslfeld, sería necesario la reconstrucción de todos los términos ligados al constructivismo y nuevas experimentaciones de trabajo en equipo, que pudieran proporcionar una luz en la reconstrucción de los términos constructivistas bajo un nuevo enfoque de construcción social del conocimiento.

## 2. Construcción de una teoría local de representaciones bajo una teoría global de la actividad

En este capítulo, nos interesa introducir el trabajo de Leontiev (1978) asociado a una teoría de la actividad inmersa en un enfoque sociocultural del aprendizaje. A diferencia del trabajo de Piaget, Leontiev piensa en la acción de los individuos hacia los objetos físicos como una relación dialéctica entre el sujeto y el objeto. Si bien se puede realizar una abstracción empírica, para el sujeto, los objetos ya no son los mismos. Zinchenko (1985) sostiene que la acción está mediada por instrumentos físicos o psicológicos (signos). En esta línea, Rabardel (1995) señala estos procesos como génesis instrumental, ella ligada a procesos de instrumentación e instrumentalización. Regresando a Leontiev, para él la actividad es la esencia del aprendizaje. Los elementos constitutivos de la actividad son: a) la orientación, se parte de determinadas necesidades, motivos y tarea; y b) la ejecución, consiste en realizar acciones y operaciones relacionadas con las necesidades, los motivos y la tarea. En toda actividad humana se debe tener clara la finalidad, así como también las condiciones de realización y de logro. La acción para Leontiev tiene un aspecto intencional (dirigido a una meta), y otro operacional (de cómo se llega a esa meta).

> Bajo este acercamiento, la construcción de signos es primordial, y los trabajos de Voloshinov[1] (1929/1973) vienen a reforzar este acercamiento

[1] Actualmente se le otorga a Batkjim la autoría de este libro. Tal parece que los problemas políticos de Batkjim con el sistema de la Unión de Repúblicas Socialistas de la época, lo llevaron utilizar el seudónimo de Voloshinov para la publicación de su libro. (Selden, 2010).

sociocultural. Según estos autores, la comunicación entre los individuos es absolutamente necesaria para la construcción del signo en un proceso de objetivación: "La realidad del signo está enteramente determinada por la comunicación: después de todo, la existencia del signo no es nada sino la materialización de esta comunicación" (p. 13, traducción libre).

La traducción de los trabajos de la escuela soviética permitió el avance en entender la construcción del conocimiento desde el punto de vista social. En la época actual contamos con el trabajo de Radford (1998, 2003) sobre los procesos de objetivación en un ambiente sociocultural del aprendizaje, en el cual define la noción de Sistemas Semióticos Culturales de Significación (CSSS). Radford (1998) señala:

> El *constructivismo social* es un movimiento reciente iniciado por personas que afirman que el constructivismo radical ignora el papel de las interacciones sociales en la construcción del conocimiento. Esta declaración, según entiendo, se justifica en parte por el hecho de que hasta ahora ni Piaget, ni el constructivismo más reciente, han propuesto un modelo detallado del funcionamiento de la interacción social en la misma perspectiva del constructivismo. Sin embargo, Piaget y todos los que fueron inspirados por su trabajo siempre han mantenido que la interacción social es muy importante en la construcción del conocimiento. Pero primero, hemos tenido que desarrollar modelos para todas las construcciones elementales que deben ser realizadas por un organismo cognitivo antes de que se pueda comenzar a conocer e interactuar con los demás. Por otra parte, por lo que sé, el "constructivista" social tiende a considerar a la sociedad como dada, y una/un constructivista radical no puede aceptar eso. En mi opinión, la sociedad debe ser analizada como un concepto construido si vamos a explicar y valorar correctamente su papel en la posterior construcción de conceptos (Traducción libre, p. 294).

Precisamente bajo un enfoque sobre la importancia en analizar la construcción del signo más que el centrarse únicamente en el signo mismo (de acuerdo a Eco 1998, y Radford 2003), nosotros nos hemos dado a la tarea de iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable.

Una de las primeras nociones que hemos considerado es la de representación funcional-espontánea. Este tipo de representación emerge en la acción que realiza un sujeto frente a una tarea no rutinaria. Nuestra experiencia en investigaciones pasadas nos indica que las representaciones iniciales, siguiendo el modelo de Leontiev sobre la acción que realiza un sujeto frente a una tarea, poseen un carácter funcional y espontáneo, surgen de manera natural y persiguen una meta inicial de aprendizaje. Este tipo de representaciones deben ser incluidas y estudiadas con el fin de comprender el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos centrados en la acción. Además, cobra una importancia mayor el promover su evolución hacia las representaciones institucionales a través de un proceso de objetivación (en el sentido de Eco y de Radford) inmerso en tareas de colaboración y comunicación (en el sentido de Voloshinov) entre los sujetos.

Siguiendo este marco teórico global del aprendizaje en un acercamiento sociocultural, hemos podido proporcionar ideas teóricas locales sobre el concepto de representación funcional-espontánea y la importancia de promover su evolución. Esto nos ha llevado a concebir (Hitt y Quiroz en prensa), la noción de representación grupal.

La idea de representación grupal pretende centrar la atención a la evolución de una representación funcional espontánea cuando ésta se somete a un proceso de discusión, comunicación, argumentación, comparación y validación frente a una tarea que demanda un trabajo en equipo en el aula de matemáticas. El trabajo en equipo posterior a la producción de representaciones funcionales espontáneas se rige por el seguimiento de las etapas de ACODESA (método de enseñanza que se presenta a continuación).

La representación grupal entonces, inicia su construcción social por los equipos de trabajo. Posteriormente el proceso de comunicación y argumentación continua cuando los equipos de trabajo socializan sus respuestas en una discusión en la que participa toda la clase de matemáticas. Finalmente, la representación grupal cobra un equilibrio al llegar a la etapa de autorreflexión de acuerdo a ACODESA.

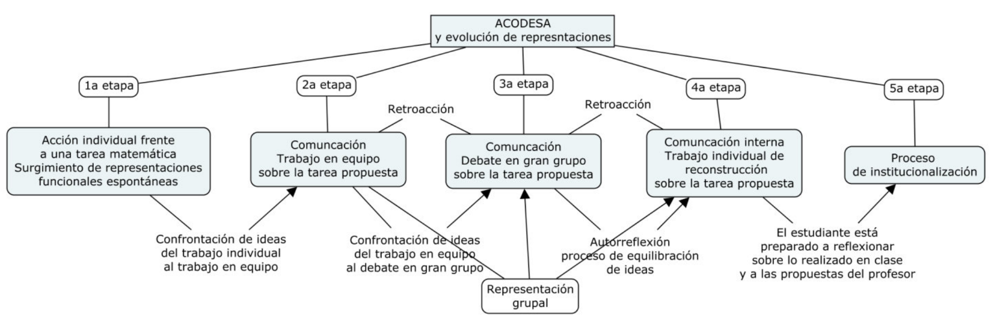



**Figura 1.** De la representación funcional espontánea a la representación grupal e institucional

Así, bajo un proceso de objetivación, y siguiendo el método de enseñanza ACODESA, podemos promover la emergencia de representaciones espontáneas, su transformación a representaciones grupales y finalmente a una representación institucional.

## 3. ACODESA, un método de enseñanza bajo un enfoque de la teoría local de representaciones y una teoría global de la actividad

Los primeros pasos en la construcción del método de enseñanza ACODESA fue proporcionado por dos tesis, una de doctorado de Paéz (2004) y una de maestría de Borbón (2003). Los elementos esenciales del método de enseñanza emergieron en esas dos tesis, en las cuales el uso de tecnología (calculadora con posibilidades de manipulación simbólica y gráfica), nociones primeras sobre la representación, trabajo en colaboración y debate fueron consideradas. La elaboración de tareas eslabonadas formó parte de la experimentación en esas dos tesis.

En la publicación de un capítulo de un libro en el 2007 (Hitt, 2007) nos permitió estructurar un método en etapas que contemplan el Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión (ACODESA). Los aspectos teóricos desarrollados alrededor de ACODESA tenían que ver con aspectos sobre las representaciones, en esa época se contemplaba el trabajo de Duval (1988, 1993, 1995) desde un punto constructivista sobre la construcción de conceptos; la noción de debate científico a la manera de Legrand (2001) era también considerado. Los resultados de las investigaciones de Paéz y Borbón evidenciaban el surgimiento de representaciones funcionales espontáneas en el planteamiento de situaciones a los alumnos (por ejemplo, en la noción del límite de la Figura 2). Este tipo de representaciones no estaban consideradas en la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval, quien las considera como transitorias (2006). Estos resultados llevaron a considerar una teoría más amplia sobre las representaciones y el aprendizaje en colaboración.

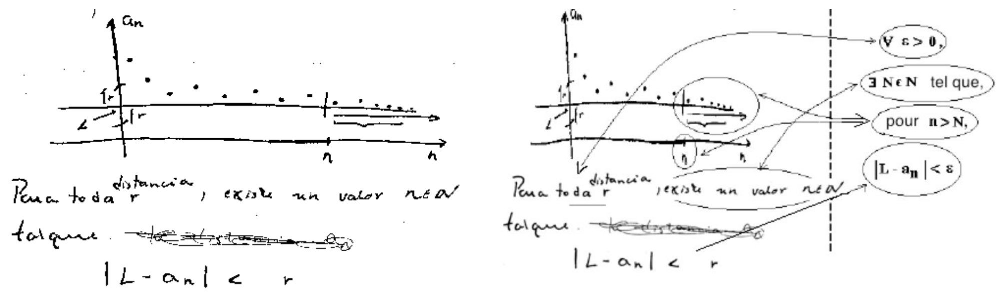



**Figura 2.** Según la definición de registro de Duval (1993), no es posible catalogar esta representación en un registro

Al intentar tomar distancia del trabajo de Duval, nos llevó al análisis de su marco teórico constructivista para la resolución de problemas cerrados. Es cierto que, en las dos tesis antes mencionadas, el problema mayor era la construcción del concepto de infinito actual. Si bien nos enfocábamos en ese entonces en la resolución de problemas, el obstáculo epistemológico (en el sentido de Brousseau, 1997) del infinito, hacía que las actividades tuvieran un carácter más de situación problema que de problema.

Finalmente, como lo hemos expuesto en la primera parte de este capítulo, bajo una teoría sociocultural postvitgoskiana centrada en la teoría de la actividad de Leontiev, considerando la comunicación en el aula como fundamental (Batkjim-Voloshinov) y los procesos de objetivación (Eco y Radford) hemos logrado situar ACODESA. Ello nos ha permitido proporcionar mejores explicaciones de la construcción social del conocimiento que los acercamientos que teníamos en el pasado.

Así, ACODESA se divide en 5 etapas. Retomamos el trabajo de Hitt & Quiroz (2017) en su descripción.

- Etapa 1. Trabajo individual. Producción de representaciones funcionales espontáneas ($R_{F\text{-}E}$) para entender la tarea.

Después del planteamiento de la situación problema, se inicia con un trabajo individual que permite al estudiante representar dicha situación a fin de prepararse para una discusión en la cual sus ideas tengan mayor impacto. En esta etapa las representaciones $R_{F\text{-}E}$ emergen en forma natural.

- Etapa 2. Trabajo en equipo sobre la misma tarea. Procesos de discusión y validación. Refinamiento de las $R_{F\text{-}E}$.

En un segundo momento se organiza a los alumnos en equipos de trabajo. De acuerdo con Voloshinov (1973) y Davydov (1972/1990), en un marco teórico de la actividad no debemos oponer la práctica a la comunicación, sino más bien considerarlas como inseparables. El trabajo en equipo permite la evolución de las $R_{F\text{-}E}$ que emergieron durante la primera etapa en el acercamiento individual. Al mismo tiempo, el proceso de validación se presenta de manera natural en el intercambio de ideas. Distintas herramientas tecnológicas pueden ser incluidas en esta etapa (p.e. Geogebra). La distribución del trabajo en los equipos es importante: uso de tecnología por una persona, uso de materiales por otra, toma de datos y escritura de resúmenes de las acciones realizadas por otra, etc. Es importante trabajar en equipos de tres personas (Prusak, Hershkowits & Schwarz, 2013). El refinamiento y la evolución de las representaciones se realizan de manera natural y equitativa.

- Etapa 3. Discusión (podría provocar un debate científico). Procesos de discusión y validación (refinamiento de representaciones).

Posterior al trabajo en equipo se inicia con el trabajo en una discusión grupal. La discusión en plenaria no es fácil de dirigir, el maestro o la maestra tendrían que promover la comunicación científica en el sentido de Legrand (2001) creando un ambiente de discusión científica, en donde la validación sea un elemento esencial, de manera que se favorezca un aprendizaje equitativo. Cada equipo propone sus resultados y los pone a consideración de toda la clase. Una vez más las $R_{F\text{-}E}$ pasan por otra etapa de refinamiento. Es importante llegar a un acuerdo en el grupo. Sin embargo, también se debe tener en cuenta la fugacidad del consenso; es probable que los estudiantes consideren que han comprendido sin que verdaderamente hayan interiorizado los resultados y nuevas representaciones (Thompson, 2002). La siguiente etapa es insustituible.

- Etapa 4. Regreso a la tarea en forma individual (trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión).

Una cuarta etapa implica que los alumnos regresen a trabajar individualmente. Esta etapa es crucial en la metodología ACODESA ya que todo el trabajo individual y en equipo una vez pasado el consenso se puede olvidar rápidamente. La estabilidad del conocimiento adquirido en las etapas anteriores no podrá alcanzarse si no se pasa por un periodo de reconstrucción (autorreflexión) de lo realizado.

- Etapa 5. Institucionalización del conocimiento. Procesos de institucionalización y uso de representaciones institucionales.

Por último, es en esta etapa donde el maestro resume los resultados de los equipos, muestra la evolución de las representaciones espontáneas que emergieron en las etapas anteriores y discute su eficacia antes de introducir las representaciones institucionales y los procesos correctos.

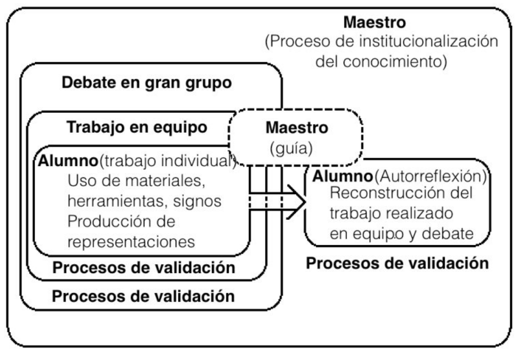



**Figura 3.** Metodología de enseñanza ACODESA (Hitt y González-Martín 2015)

Considerar un acercamiento social del aprendizaje, bajo una teoría global de la actividad que incluye tecnología, nos llevó al trabajo de Engeström (1999) y de Arzarelo (2006). Engeström porque actualiza el triángulo de Leontiev, proporcionando un modelo de la actividad, más adecuado a un aprendizaje en colaboración. Arzarelo porque su marco sociocultural permite incluir los gestos y otro tipo de representaciones incluyendo los relativos al uso de tecnología. El considerar el aula de matemáticas como una micro sociedad, nos permitió asociar ACODESA y el modelo de Engeström (Figura 4).


**Figura 4.** Metodología de enseñanza ACODESA y modelo de Engeström (1999)

En este modelo, hemos podido integrar la tecnología, el trabajo en colaboración y diferentes etapas de ACODESA, y sobre todo, la noción de situación problema.

Precisamente, la reflexión alrededor de lo que se considera situación problema, nos ha llevado a definir una nueva noción que hemos llamado "Situación de Investigación".

## 4. Características de ejercicios, problemas, situaciones problemas, situaciones de investigación

Algunos psicólogos interesados en el desarrollo de la inteligencia propusieron modelos sobre la resolución de problemas. Contamos con el trabajo de Wallas (1926), quien pondría las bases para el estudio de los procesos en la resolución de problemas. La gran influencia de Piaget en psicólogos, matemáticos y educadores, trajo consigo el surgimiento de nuevos modelos en la resolución de problemas matemáticos (p.e. Hadamard como matemático, 1945), modelos para la escuela primaria para la resolución de problemas verbales ligados a la aritmética (Brownell 1942, 1947), modelos para la enseñanza de las matemáticas en la escuela media y universitaria (Polya 1945), entre otros (ver capítulo de Soto *et al*., en este volumen). Estos autores pusieron los cimientos de la didáctica de las matemáticas.

Así, en la primera mitad del siglo XX, se podrían caracterizar las nociones de :

- Ejercicio. Tarea que inmediatamente después de leer el enunciado, evoca en el individuo un algoritmo o procedimiento y se ejecuta automáticamente.
- Problema. Tarea ligada a un enunciado que pone a un individuo frente a un desafío, sin encontrar inmediatamente un procedimiento para resolver lo solicitado.
- Problema tipo "puzzle". Tarea no rutinaria que implica que, frente al desafío, el individuo evoque un "insight" (iluminación o pensamiento lateral en el sentido de De Bono 1970), que permite de inmediato encontrar un procedimiento para solucionarlo.

El surgimiento de la corriente "Matemática moderna", promovido por matemáticos y psicólogos en los 60s resultó un fracaso total. El acercamiento formal con la teoría de conjuntos causó muchos problemas de aprendizaje. Las críticas fueron tan fuertes que hacia finales de los 60s la preocupación era tan grande que se decidió en muchos países sobre la importancia de reflexionar con más cuidado los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, dando pie al surgimiento de la didáctica de las matemáticas como rama científica.

A partir de ese fracaso de la matemática moderna, nacieron varias corrientes como la matemática realista promovida por Freudenthal (1991) dirigida fundamentalmente a la enseñanza, y otras teorías, como veremos enseguida, dirigidas a entender los procesos de aprendizaje.

El avance de la didáctica de las matemáticas hizo posible el adentrarse a los procesos de enseñanza de otras maneras. Pongamos por ejemplo la noción de obstáculo epistemológico de Brousseau (1997). Él consideraba que una vez detectado un obstáculo cognitivo en los alumnos, se podría clasificar como obstáculo epistemológico, si este obstáculo se podía detectar en la historia de las ideas matemáticas. Así, el investigador y/o profesor, podría elaborar una “tarea” que provocara en el alumno una confrontación directa con el obstáculo epistemológico. La tarea tendría que ser lo suficientemente rica, de manera que el alumno, bajo la interacción con la tarea, le permitiera reflexionar sobre el conocimiento matemático que provoca el obstáculo cognitivo y lo condujera a sobrepasar el obstáculo. Bajo este enfoque, el rol del maestro no era el mismo que en el pasado. Se esperaba que el profesor pudiera ser un guía y permitiendo a sus alumnos que avanzaran con sus predicciones, conjeturas y validaciones. No era el enseñante quien debería proporcionar la respuesta a las inquietudes de los alumnos. Bajo este enfoque, la tarea contaba con las siguientes características:

- La tarea debe estar ligada a la detección de un obstáculo epistemológico. Ello implica que el enseñante debe conocer que diferentes concepciones aparecieron en la historia de las ideas matemáticas y que pudieran tener sus alumnos,

- La tarea debe ser fácil de entender, ello no quiere decir que ella sea fácil de resolver,

- La interacción con la tarea debe hacer emerger las ideas intuitivas de los alumnos, y la comunicación con sus pares proporcionará los elementos necesarios para la confrontación con la concepción (conocimiento) que impide el avanzar en la construcción del concepto en cuestión.

Veamos un ejemplo, que implica que los alumnos, al intentar resolver el problema, entran en contradicciones evidentes que los hará regresar a intentar el problema de nuevo y encontrar una solución. El trabajo realizado promoverá el pensamiento de proporcionalidad (ver Figura 5).

Descripción de la actividad: Los alumnos se agrupan de 4 a 6 y cada grupo debe agrandar las piezas del rompecabezas. Al final, se reagrupan las piezas para reconstituir el rompecabezas. La consigna es: el lado del rompecabezas inicial mide 4 cms, construir otro rompecabezas que mida 7 cms de lado.

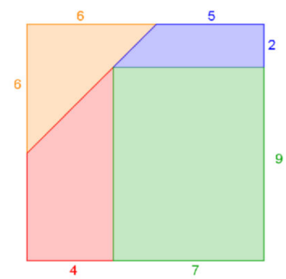



**Figura 5**. El "puzzle" de Brousseau (1997)

Si bien las tareas elaboradas con esas características fueron experimentadas en aulas de clase, la realización de réplicas en condiciones contextuales distintas no llevaba a los mismos resultados. Además, al ser pocas las tareas elaboradas, el enseñante no contaba con herramientas para todo el año académico.

Posterior a Brousseau y la elaboración de tareas para sobrepasar un obstáculo epistemológico, nacieron otras proposiciones como las situaciones de búsqueda en clase ("Situations de Recherche en Classe" en Francés, SRC) de Grenier & Payan (2003). Cuyas características son las siguientes:

- Una SRC se inscribe en una problemática de búsqueda profesional.
- La pregunta inicial es de fácil acceso.
- Estrategias iniciales emergen sin necesidad indispensable de prerrequisitos específicos.
- Diferentes estrategias y desarrollos en la búsqueda de soluciones son plausibles.
- Una vez que se responde una pregunta, conlleva frecuentemente a una nueva pregunta.

A diferencia de Brousseau, los problemas propuestos por Grenier & Payan están mas relacionados a la forma en que los matemáticos trabajan. De cuestiones específicas, los matemáticos construyen nuevas problemáticas que poco a poco llegan a resolver problemas muy complejos.

El problema principal con el acercamiento de Brousseau y de Grenier y Payan es que son pocos los problemas que se han diseñado. Sin embargo, debemos aclarar que, en el caso de la matemática realista, o en el acercamiento de Brousseau o el de Grenier y Payan, el diseño de actividades es el ingrediente principal. Las actividades se desarrollan en ambientes de manipulación de objetos físicos y lápiz y papel.

La dificultad para resolver las tareas ligadas a un obstáculo epistemológico o a situaciones de búsqueda, obligaba al maestro a promover un aprendizaje en colaboración. Estas tareas difieren de la resolución de ejercicios, ya que requieren de un mayor esfuerzo cognitivo.

Por último, podemos considerar la postura de investigadores preocupados por los procesos de modelación matemática. Entre ellos, Lesh y Yoon (2007) plantean características propias de un problema de modelación, a saber:

> - La situación involucra algún tipo de sistema matemático interesante que generalmente existe fuera del mundo de las matemáticas.
>
> - Los aspectos más problemáticos de las tareas generalmente involucran el desarrollo de maneras útiles de pensar (describir, explicar, interpretar) relaciones relevantes, patrones y regularidades de los datos, metas y posibles patrones de resolución que se puedan usar.
>
> - El producto que necesita ser producido no es como un punto, sino que es un artefacto complejo o una herramienta conceptual que necesita ser desarrollado para ser usado en una variedad de situaciones similares estructuradas (p. 166, traducción libre).

Así, poco a poco, un acercamiento conceptual del aprendizaje de las matemáticas, influyó en las técnicas de enseñanza moviéndose de una enseñanza magistral a una enseñanza en un medio de colaboración en la resolución de tareas matemáticas. De una u otra manera, se puede constatar que un nuevo paradigma está naciendo en este siglo, y la preocupación de los investigadores por entender los fenómenos de aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural es cada vez más extenso.

## 5. Diseño de situaciones de investigación en un medio sociocultural del aprendizaje de las matemáticas (ACODESA)

La construcción social del conocimiento en el aula de matemáticas demanda entonces del planteamiento de una serie de problemas que se adecúen a las metodologías que procuran dicha construcción entre pares. A través del surgimiento de la metodología ACODESA, los problemas planteados a los alumnos se han ido refinando tomando en consideración los resultados de las diferentes investigaciones en múltiples niveles educativos.

Como primer referente, se inició el planteamiento y diseño de actividades que no restringían a una sola pregunta sino a una serie de preguntas, tal fue el caso del proyecto de la profesora Kieran de la Université du Quebéc à Montréal. En dicho proyecto se incorporó además el uso de tecnología, específicamente de calculadoras de manipulación simbólica (APTE: http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html). Además de ello, en la experimentación, se utilizó el trabajo en colaboración y se diseñaron entrevistas con parejas de alumnos, utilizando las actividades diseñadas (Hitt & Kieran 2009; Hitt 2010).

Posteriormente en 2015 diseñamos una serie de actividades alrededor de los números poligonales utilizando ACODESA y tecnología (Hitt, Saboya y Cortés 2017a, 2017b) que dio pie para continuar trabajando y refinando ideas sobre las actividades planteadas. En la investigación de Hitt y Quiroz (en prensa) se describe la actividad "El caminante" donde la pregunta desencadena una colaboración y reflexión de ideas entre los alumnos relativos al aprendizaje de la covariación de funciones.

Actualmente en un estudio relativo al paso de la aritmética al álgebra brinda más luz sobre las características que deben poseer las actividades que se planteen cuando e trabaja bajo una metodología de co-construcción del conocimiento. Designamos estas actividades, que son planteadas cuando se utiliza ACODESA, como Situaciones de investigación, con características:

- La actividad a proponer en el aula debe estar compuesta por preguntas eslabonadas que guían el trabajo de los alumnos, incluyendo la tecnología a utilizar.
- La actividad debe estar estructurada de manera a seguir las etapas de ACODESA.

- La actividad debe promover procesos de visualización matemática, conflictos cognitivos, la argumentación, la validación, la predicción y conjetura y la prueba de acuerdo al nivel de estudios de los alumnos.
- La actividad debe, en su primer acercamiento a la tarea, generar un pensamiento diversificado en los alumnos, y de esta manera promover el surgimiento de representaciones funcionales espontáneas.
- La actividades contemplan también la generación de un pensamiento convergente, ello permitirá la evolución de las representaciones funcionales espontáneas hacia las representaciones grupales y finalmente a las representaciones institucionales.

El diseño eslabonado de actividades intenta promover una estructura estructurante en la resolución de problemas y situaciones problemas (*habitus* en el sentido de Bordieu 1980).

## 6. Conclusión

En este capítulo hemos querido proporcionar una idea global de nuestro marco teórico que nos permite construir actividades *ad hoc* para el aula de matemáticas mediante un acercamiento socio-cultural. Como hemos visto al final de este capítulo, el diseño de actividades apegado al marco teórico nos ha obligado al diseño de actividades en papel y lápiz y al diseño de applets que acompañan la actividad.

Consideramos novedoso este acercamiento y en otro capítulo mostraremos actividades específicas con el uso de tecnología que se apegan al marco teórico aquí desarrollado y en acorde al método ACODESA de enseñanza. Consideramos que el diseño de las actividades eslabonadas proporcionará la construcción de una estructura estructurante en el sentido de Bourdieu (1980).

### Referencias

Algèbre en Partenariat avec la Technologie en Éducation. (2017). Grupo de investigación APTE en la Université du Québec à Montréal (UQAM). http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html

Arzarelo, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process. *Relime*, especial issue, 267-299.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*. II (pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris : Éditions de Minuit.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. 1970-1990, In Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. And Warfield, V. (Eds. and Trans.) Dordrecht: Kluwer.

Brownell W-A. (1942). Problem solving. In N.B. Henry (Ed.), *The psychology of Learning* (41st Yearbook of the National Society for the Study of Education. Part 2, pp. 415-443). Chicago : University of Chicago press.

Brownell, W. A. (1947). The place and meaning in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal*, *4*, 256–265.

Davydov, V. V. (1972/1990). Types of generalization in instruction : Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. *Soviet Studies in Mathematics Education*, Vol. 2 ; J. Kilpatrick (ed.), J. Teller (trans.). Reston, VA: NCTM.

De Bono, E. (1970). *Lateral thinking: creativity step by step*. London : Harper & Row.

Dreyfus, T. (2014). Abstraction in mathematics education. In Lerman S. (Ed.), *Enciclopedia in Mathematics Education* (pp. 5-8). Dordrecht: Springer.

Duval, R. (1988). Graphiques et Equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 1*, 235-253. [Traducción en *Antología en Educación Matemática.* In R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), (pp. 125-139). México : DME-Cinvestav, 1992.]

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5,* 37-65. In F. Hitt (Ed., 1998), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Neuchâtel: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61: pp. 103-131.

Eco, U. (1988) [1971], *Le signe, Bruxelles*, Labor.

Engeström, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Y. Engeström, R. Miettinen & R.-L. Punamäki (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). New York, NY: Cambridge University Press.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht : Kluwer.

Grenier, D. et Payan, C. (2003). Situations de recherche en «classe», essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz, 92*.

Hadamard, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris: Gauthier-Villars.

Hitt, F. (2011). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 42, No. 6, p. 723-735.

Hitt, F., and Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a Task-Technique-Theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 121-152.

Hitt, F., and Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*. 73, 153-177.

Hitt, F., Saboya, M. and Cortés C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & Gellert U. (Eds.), *Mathematics and technology. A C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (pp. 57-74). Cham : Springer.

Hitt, F., Saboya, M. and Cortés C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environnement. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

DOI 10.1007/s10649-016-9717-4

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level : An ICMI Study,* 127-135, Dordretch : Kluwer Academic Publishers.

Leontiev, A. (1978). Activity, counciousness, and personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Lesh R., & Yoon C. (2007). What is distinctive in (our views about) models & modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching?. In Blum W., Galbraith P.L., Henn HW. & Niss M. (eds), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 161-170). New ICMI Study Series, vol 10. Boston: Springer.

Ormrod. E. (2004). *Aprendizaje Humano*, Madrid, España: Pearson Prentice Hall.

Pavlov, I-P. (1897/1902). *Lectures on the Work of the Digestive Glands*. London : Charles Griffin.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princetown: Princetown University Press.

Prusak, N., Hershkowits R. & Schwarz B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, 15(3), pp. 266-285.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Radford, L. (1998). On Culture and mind, a post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. Paper presented at the 23rd annual meeting of the semiotic society of America, Victoria College, University of Toronto, October 15–18, 1998. Retrieved from http://www.laurentian.ca/educ/lradford/

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Selden, R. (2010). *Historia de la crítica literaria del siglo XX. Del Formalismo al postescructuralismo*. Madrid, España: Ediciones Akal.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In F. Hitt (ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

Vigostky, L. (1986/1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Traducción de *Thought and Language* (The Massachusetts Institute of Technology). Paidos.

Voloshinov, V. N. (1929/1973). *Marxism and the phylosophy of langage*. Translated by Matejka L. And Titunik I. R. Cambridge, MA: Harvard University Press.

von Glasersfeld, E. (2004). Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. In P. Jonnaert et Masciotra D. (Eds.), *Constructivisme choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-323). Presses de l'Université du Québec.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York : Harcourt, Brace and Company.

Watson, J. B. (1913). Psychology as the behavioist views it. Psychological Review, 20, 158–177.

Wertsch, J. V. (1985). Vygolsky and the social formation of mind. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Zinchenko, V. P. (1985). Vygotsky's ideas about units for the analysis of mind. In J. V. Wertsch (Ed.), Culture, communication, and cognition: Vygotskian perspectives (pp. 94-118). Cambridge University Press.

# 2 DISTINCIÓN ENTRE EJERCICIO, PROBLEMA Y SITUACIÓN PROBLEMA EN UN MEDIO TECNOLÓGICO Y EJEMPLOS EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS

José Luis Soto Munguía[1], Fernando Hitt Espinosa[2], Samantha Quiroz Rivera[3]


## Resumen

Este capítulo presenta un recuento de los principales estudios sobre resolución de problemas durante el siglo XX y lo que va de nuestro siglo. Se analiza en particular la evolución que ha tenido la noción de problema matemático; desde los primeros trabajos (Wallas, 1926), hasta llegar al surgimiento de la noción de *situación problema* (Brousseau, 1997). Se estudia el impacto que ha tenido la tecnología en las nociones de ejercicio, problema y situación problema. El capítulo está ilustrado con ejemplos relacionados con el concepto de variable, covariación entre variables y el de función en ambientes tecnológicos.


**Palabras clave** : Ejercicio, problema, situación problema, resolución de problemas, resolución de situaciones problema, ACODESA.


## Résumé

Ce chapitre présente un compte-rendu des principales études portant sur la résolution de problèmes au cours du XXe siècle et de nos jours. En particulier, nous analyserons l'évolution de la notion de problème mathématique; en partant des premiers travaux (Wallas, 1926) à l'émergence de la notion de *situation problème* (Brousseau, 1997). De plus, nous rapporterons l'impact qu'a eu la technologie sur les notions d'exercice, de problème et de situation problème. Le chapitre est illustré par des exemples liés aux concepts de variable, de covariation entre variables et à celui de fonction dans des environnements technologiques.


**Mots clés** : Exercice, problème, situation-problème, résolution de problèmes, résolution de situations problèmes, ACODESA.


## Abstract

This chapter presents an account of the main studies on problem solving during the twentieth century and so far in our century. In particular, the evolution of the notion of mathematical problem has been analyzed; from the first works (Wallas, 1926), to the emergence of the notion of problem situation (Brousseau, 1997). The impact that technology has had on the notions of exercise, problem and problem situation is analyzed. The chapter is illustrated with examples related to the concept of variable, covariation between variables and that of function in technological environments.


**Keywords** : Exercise, problem, problem in context, problem-solving, problem-situation-solving, ACODESA.

---

[1] Universidad de Sonora, México.
[2] Université du Québec à Montréal, Canadá.
[3] Universidad Autónoma de Coahuila, México.

## 1. Introducción

Los trabajos en psicología a principios del siglo XX, centrados en analizar la inteligencia, promovieron la importancia de estudiar a los individuos frente a la resolución de problemas. En esos tiempos se pensaba que la resolución de problemas de tipo acertijos era característico de los individuos inteligentes. Así, Wallas (1926), fue uno de los primeros en intentar caracterizar las estrategias de los resolutores de problemas. No fue hasta principios de los años 40s que Brownell (1942, 1947) atrajo la atención de psicólogos y educadores señalando la importancia de analizar un cierto tipo de inteligencia relacionada con la resolución de problemas aritméticos. Aproximadamente en la misma época, Hadamard (1945) proporcionaba sus reflexiones sobre la resolución de problemas de los matemáticos, proporcionando un gran énfasis a la etapa de incubación (etapa señalada por Wallas), como etapa característica del pensamiento matemático. Hadamard ejemplifica sus reflexiones con los trabajos del matemático Poincaré.

El ambiente parecía propicio para impulsar a otros niveles de enseñanza un método que estuviera ligado a la resolución de problemas. Es en la misma época que surge el 1er libro "How to solve it" de Polya (1945) en el que propone seguir un modelo propio a la resolución de problemas. Son menos conocidos otro libros de Polya (p.e. 1965 Mathematical discovery) sobre el descubrimiento matemático. El final de la 2ª guerra mundial y el lanzamiento del Sputnik por los rusos (1957), propiciaron una carrera por el espacio y por la transformación de la enseñanza de las matemáticas. Se pensaba que la unificación de ideas de psicólogos, matemáticos y educadores proporcionaría un buen momento para desarrollar nuevos currículos. Así surgió la corriente llamada "Matemática moderna" (década de los 60) que constituyó un fracaso desde el punto de vista educativo, pero que impulsó la emergencia de lo que ahora se conoce como didáctica de las matemáticas.

A partir del fracaso de la Matemática moderna, y nacimiento de la didáctica de las matemáticas, varias corrientes surgieron en torno a la resolución de problemas (Mason 1982) y resolución de problemas en contexto (Freudenthal 1991; Treffers 1991) dando pie a la matemática realista. La línea de Mason fue seguida por Schoenfeld (1985) proporcionándole más fuerza a la corriente conocida como "problem solving". Entre la matemática realista y las actividades de Brousseau (1997) para atacar los obstáculos epistemológicos a los que se deben enfrentar los alumnos, surgió la noción de situación problema. Una característica de estas situaciones es que la tarea sea fácil de entender, y la matemática emerge a medida que los alumnos interaccionan con ella.

Considerando el gran impulso tecnológico de la década de los 90, en donde la representación gráfica fue eficaz proporcionando en pantalla de las computadoras representaciones múltiples de conceptos matemáticos, se promovieron nuevos currículos, como por ejemplo el "Three-fold representation model" (Schwartz, Dreyfus & Brukheimer, 1990), promoviendo una nueva enseñanza de la matemática y en particular del cálculo con un acercamiento, numérico, algebraico y gráfico (Demana & Waits, 1988). En este siglo ha cambiado la manera de tratar la resolución de ejercicios, problemas y situaciones problemas en ambientes tecnológicos. Nuestro propósito en este libro es proporcionar ejemplos a diferentes niveles educativos de ejercicios, problemas y situaciones problema en relación al concepto de variable, covariación entre variables y el de función en ambientes tecnológicos.

## 2. Visualización matemática

Los estudios de Krutetskii (1976) dieron pie al estudio de las habilidades matemáticas en la escuela primaria y permitieron clasificar a los niños, por su mayor o menor desarrollo de las habilidades visuales, mostradas durante el proceso de resolución de problemas. Al enfocarse en saber cómo razonan los estudiantes, Krutetskii dio un mayor impulso al estudio de los procesos mentales. Veamos el siguiente ejemplo utilizado en su estudio.

Encontrar $OO_1$, si el radio $r = 1$ y las dos figuras iluminadas son equivalentes

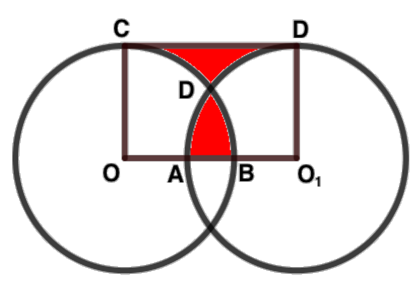



**Figura 1**. Problema de Krutetskii

La respuesta de un alumno al mirar el problema fue: “El rectángulo es equivalente al semicírculo, $OO_1 =$ 🚔$/2$” (p. 309). Krutetskii comenta: “El examinado pareció haber ‘visto’ el resultado de inmediato”. Siguiendo el discurso de Krutetskii, podemos reconstruir un probable proceso utilizando representaciones como sigue (ver Figura 2).

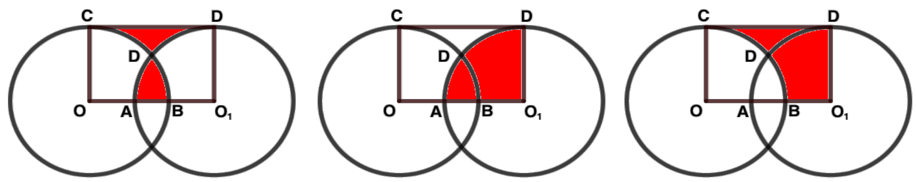
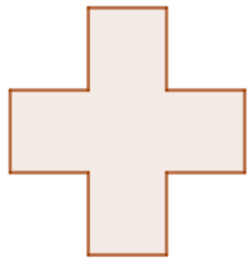



**Figura 2**. Interpretación a la explicación de Krutetskii según el proceso del alumno

La visualización matemática desde este punto de vista fue estudiada por Presmeg (1986) proporcionando mayor información sobre este tipo de habilidades matemáticas. Con el paso del tiempo, investigadores como Janvier (1987) o Duval (1988, 1993, 1995) promovieron el reverso de la medalla, centrándose en representaciones semióticas sobre papel. Es en esa época que vemos nacer una definición de la visualización matemática ligada no solamente a habilidades mentales sino también a la producción de representaciones sobre papel, pantalla de computadora, etc. Así, para Zimmermann & Cunningham (1991): “La visualización matemática es el proceso de formar imágenes (mentalmente, o a lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y usar tales imágenes de manera efectiva para el descubrimiento matemático y la comprensión”. Veamos de cerca esta definición con el problema de Polya que ha sido utilizado recientemente por Carlson & Bloom (2005, p. 71) en su estudio para analizar habilidades matemáticas de matemáticos, ellas utilizaron el siguiente enunciado:

**El problema de Polya**

Cada lado de la figura de abajo es de igual longitud. Uno puede cortar esta figura a lo largo de una línea recta en dos partes y luego cortar una de las partes a lo largo de una línea recta en dos partes. Las tres partes resultantes pueden reunirse para formar dos cuadrados con un lado común, esto es, un rectángulo cuya longitud es el doble que su anchura. Encuentre los dos cortes necesarios.



La solución del problema exige un proceso de visualización matemática, porque los cortes solicitados no son fáciles de determinar y para muchos estudiantes la tecnología podría resultar útil (Figura 3).

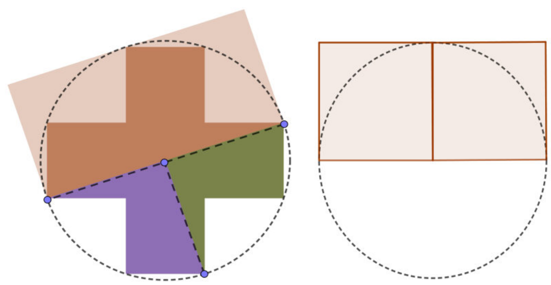


**Figura 3.** Construcción del rectángulo solicitado (derecha) al tomar la base como diámetro para realizar el primer corte

Precisamente, este problema de Polya necesita del uso de representaciones externas para que los alumnos puedan visualizar cómo realizar los cortes para obtener el rectángulo formado por dos cuadrados.

El surgimiento de los softwares de geometría dinámica (DGA por sus siglas en inglés), llevaron de inmediato a estudiar el posible impacto de esta herramienta sobre la resolución de problemas. El ejemplo que presentamos aquí, ha sido propuesto por Gravina (1996) a estudiantes que se estaban formando como profesores en la Universidad Federal de Río Grande del Sur, en Brasil; el problema está planteado en los siguientes términos:

Sean ABC un triángulo rectángulo y P un punto móvil en la hipotenusa BC. Si I está en AB y J en AC y son tales que PI es perpendicular a AB y PJ es perpendicular a AC, ¿existe una situación en la que IJ tiene un valor mínimo?

Los estudiantes han modelado el problema con el software Cabri-Géomètre y han conjeturado que IJ toma un valor mínimo cuando IPJA es un cuadrado; esta primera conjetura ha sido rápidamente refutada, después de hacer algunas exploraciones como las que se muestran en la Figura 4.

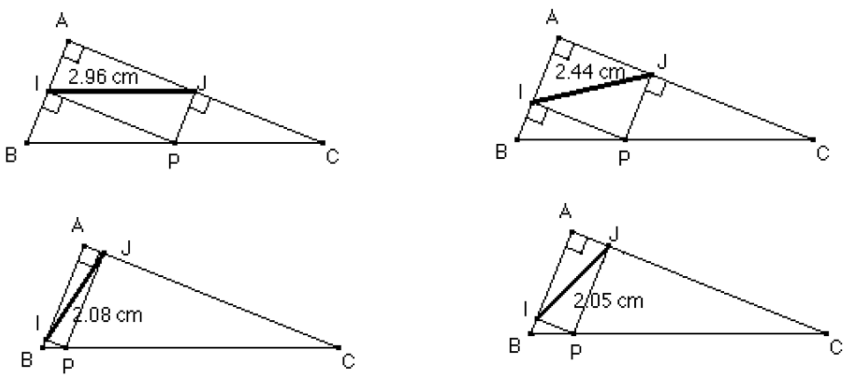



**Figura 4.** Algunos casos encontrados por los estudiantes al explorar el problema con Cabri-Géomètre

Y entonces se plantea de manera natural la pregunta: ¿cuál es la particularidad del rectángulo AIPJ que garantiza el valor mínimo para IJ? La misma exploración de la construcción y la visualización han llevado a los estudiantes a la conclusión de que el rectángulo AIPJ debe ser tal que su diagonal AP tiene que ser perpendicular a la hipotenusa BC. Gravina (1996) concluye que Cabri ha resultado una herramienta poderosa durante el proceso de resolución de éste y otros problemas geométricos.

## 3. Resolución de problemas en contexto (matemática realista)

La necesidad de usar tecnología ha llevado a la confección de problemas, en cuya resolución la tecnología pueda jugar un papel importante. Tal es el caso del siguiente, propuesto por Carlson & Bloom (2005) a un grupo de matemáticos en activo y posteriormente utilizado por Kuzniak, Parzysz & Vivier (2013) en un curso de formación de profesores.

> **El problema de la hoja doblada de papel.** Una hoja cuadrada de papel ABCD es blanca por enfrente y negra por el reverso y tiene un área de 3 $in^2$. La esquina A es doblada sobre el punto A´ que permanece sobre la diagonal AC, de tal modo que el área visible total es ½ de color blanco y ½ de color negro. ¿A qué distancia está A´ de la línea del doblez?

En el estudio de Kuzniak, Parzysz & Vivier (2013) los alumnos-profesores hacen uso de GeoGebra, pero al solicitar a nuestros estudiantes que se están formando como profesores de secundaria en la Universidad de Quebec en Montreal, lo abordaron sin utilizar tecnología. En un solo caso alguien sugirió verificar con tecnología el resultado algebraico. Ello nos hizo pensar en un problema más complejo. Es así que hemos transformado ese problema en el doblado de la esquina de una hoja de papel tamaño carta sobre su diagonal solicitando lo mismo, es decir:

> **Transformación del enunciado con una hoja de papel (21.59 x 27.94 cm$^2$):** Se toman los vértices A, B, C y D de una hoja de papel bicolor, digamos blanco de un lado y café del otro. Se dobla la esquina A de la hoja de manera que la esquina A recorra la diagonal AC (ver Figura 5) y de manera que el área de la superficie café, sea igual al área de la superficie color blanco (color crema en la Figura 5). ¿A qué distancia de la línea del doblez se encuentra el punto A cuando la igualdad se ha alcanzado?

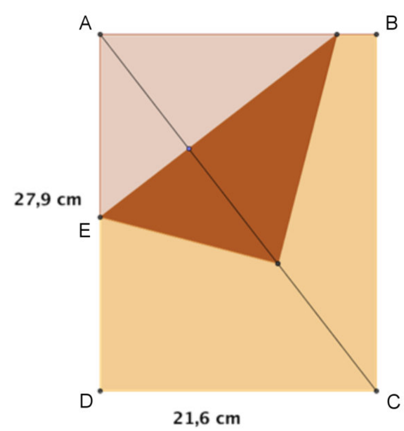



**Figura 5.** Doblar la esquina hasta que el área de la figura de color café sea igual a la de color crema

Si se aborda el problema sin tecnología, la experiencia nos ha indicado que los estudiantes no van a poder resolverlo, aún y cuando tengan herramientas algebraicas para hacerlo. Esto se debe a que su doblez general no alcanza a intersecar el lado CB. Una estrategia sería el cálculo del área del triángulo (ΔAEB) y percatarse que deben sobrepasar el punto B, pero en los estudios informales que hemos realizado en el aula, no logran resolverlo. Desde nuestro punto de vista, es necesario el paso a la tecnología para poder comprender mejor el problema y percatarse de hechos que a simple vista no son fáciles de detectar y no permiten un cambio de estrategia.

El tratamiento en GeoGebra nos puede ayudar a predecir y mejorar nuestro acercamiento, realizando el siguiente descubrimiento: el doblez debe sobrepasar el punto B, y el área que debemos calcular ya no es la de un triángulo, sino la de un cuadrilátero. Además, ello permite visualizar las áreas que se deben calcular, que servirán para encontrar una relación entre esas áreas (ecuación), ya que la suma de esas áreas *no es igual al área total de la hoja*, pues hay que añadir el área de un pequeño triángulo (color rojo en la Figura 6) que hace su aparición una vez que el doblez sobrepasa el punto B ($va \cdot vb + \acute{A}rea\ del\ \Delta IJK$), ver Figura 6.

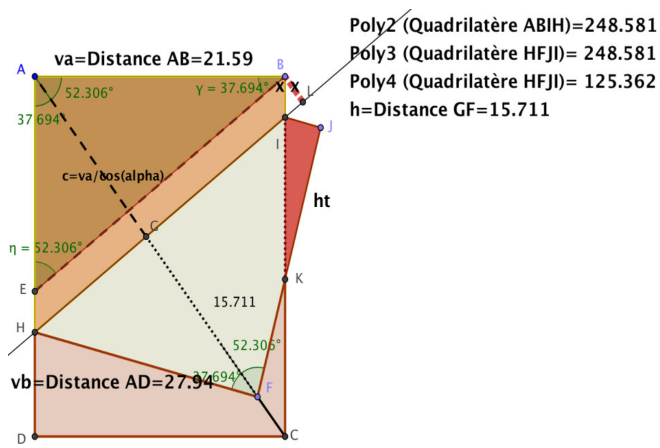



**Figura 6.** GeoGebra permite visualizar el problema

Una vez analizada la situación desde este punto de vista, se requiere ejecutar los cálculos algebraicos, que pueden hacerse a lápiz y papel o bien utilizar el Cálculo Simbólico (CAS) de GeoGebra para encontrar la solución (ver Figura 7).

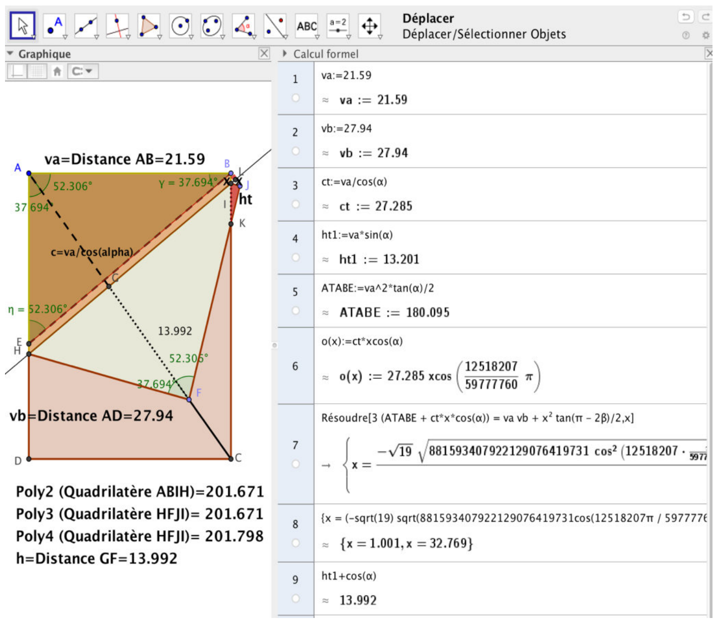



**Figura 7.** GeoGebra CAS y la resolución del problema con la ayuda de tecnología

Hay que tener cuidado con GeoGebra CAS ya que es muy frágil en esta tarea. También es posible utilizar calculadora que pueda manipular símbolos.

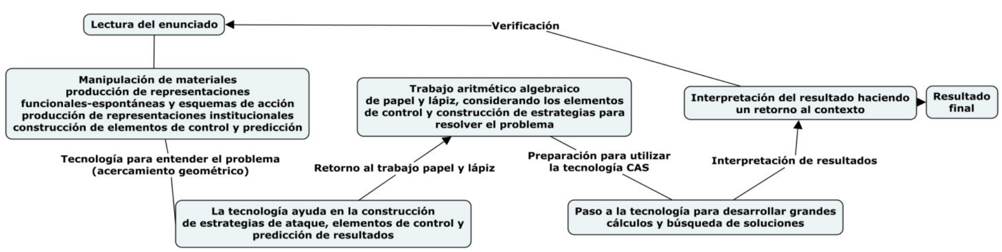



**Figura 8.** Etapas en la resolución de situaciones problemas con tecnología

**Censos en México.** Esta situación problema ha sido planteada por Rodríguez (2010) a un grupo de profesores, a partir de los datos que se muestran en la Figura 9. La situación fue planteada a profesores de secundaria (estudiantes de 12-15 años) con el propósito de estudiar los argumentos deductivos que puedan dar los profesores sobre justificar un resultado geométrico.

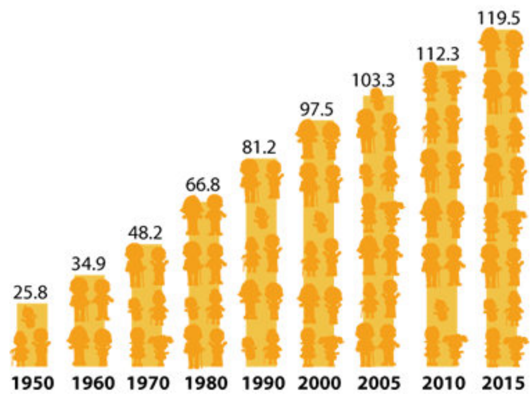



**Figura 9.** Versión actualizada de la Tabla publicada en el sitio web de INEGI (s/f)

Después de algunos cuestionamientos planteados con el propósito de que el profesor analice la información contenida en la gráfica de la Figura 9, se solicita estimar el número de habitantes que vivían en México en el año 1995 (dato no contenido en la Figura 9). Para resolver este problema, se propone la representación esquemática mostrada en la Figura 10:

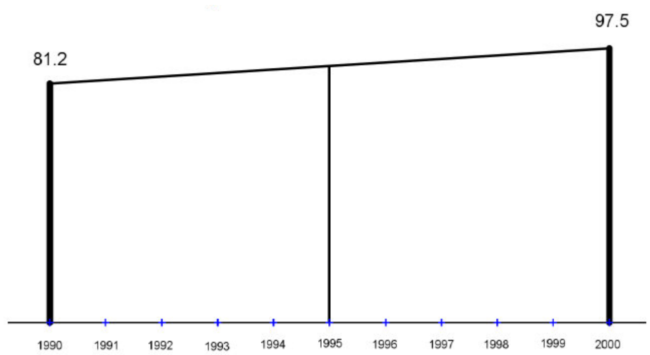



**Figura 10.** Representación esquemática de la situación problema

Algunos profesores han intuido que pueden obtener la solución calculando la media aritmética entre 81.2 y 97.5. Pero la parte principal de la actividad se refiere a estudiar la relación general que existe entre la medida del segmento MP y las medidas de los segmentos AD y BC (Ver Figura 11).

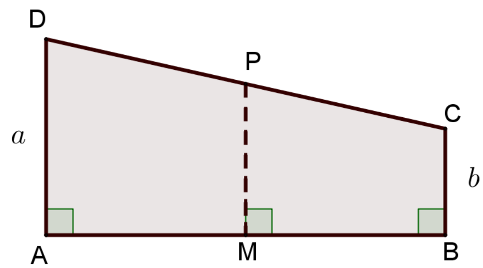



**Figura 11.** Representación geométrica de la situación problema

Se llega así al problema siguiente: dado un trapecio como el de la Figura 11, con M como punto medio de AB, expresar la medida de PM en términos de a y b. En esta actividad se han repartido a los profesores trapecios trazados en cartulina, como los de la Figura 11, pero con diferentes medidas para AD y BC. Midiendo los lados AD, MP y BC con una regla, han podido conjeturar la relación que existe entre ellos, pero no han podido justificar esta relación. Después se les ha propuesto recortar las figuras sobre el segmento PM y luego formar con las dos piezas obtenidas, un rectángulo como el mostrado en la Figura 12. Con algunas dificultades, han logrado identificar que el nuevo polígono de la Figura 12 es un rectángulo en el que $PM = \frac{(a+b)}{2}$.

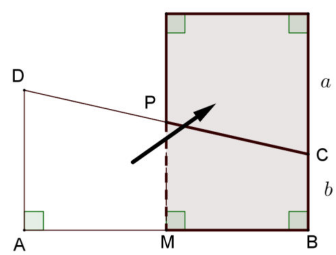
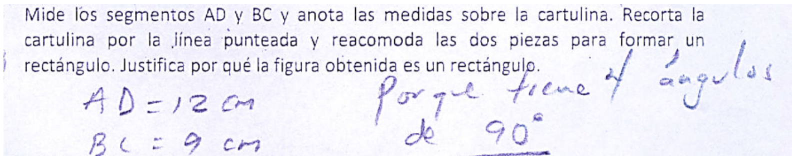



**Figura 12.** Descomposición y recomposición de la representación geométrica

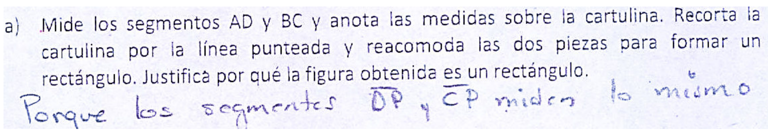
Sin embargo, cuando se les ha pedido una argumentación deductiva para explicar por qué la nueva figura geométrica es un rectángulo, ninguno de los 24 profesores participantes ha podido formularla. Las dos respuestas siguientes (Figuras 13ª y 13b) ilustran el hecho de que los profesores se mantienen dentro de lo que Kuzniak (2011) ha llamado el paradigma de la Geometría empírica, a pesar de que la situación ha sido modelada y explorada con Cabri.


Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

AD = 12 cm
BC = 9 cm

Porque tiene 4 ángulos de 90°

**Figura 13ª.** Una justificación ofrecida por los profesores


a) Mide los segmentos AD y BC y anota las medidas sobre la cartulina. Recorta la cartulina por la línea punteada y reacomoda las dos piezas para formar un rectángulo. Justifica por qué la figura obtenida es un rectángulo.

Porque los segmentos $\overline{DP}$ y $\overline{CP}$ miden lo mismo

**Figura 13b.** Otra justificación ofrecida por los profesores

**El Índice de Masa Corporal**

También como punto de partida de una actividad didáctica, Rodríguez (2012) ha propuesto a profesores en servicio, la situación problemática siguiente:

Después de justificar la necesidad de estudiar el Índice de Masa Corporal se propone la fórmula que define este índice para un individuo:

$$\mathrm{IMC} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}^2}$$

Donde P es el peso de un individuo dado en kilogramos y E es su estatura medida en metros, se proporciona también la Tabla 1, que permite clasificar a cada persona en cuatro tipos de pesos:

| IMC (índice de masa corporal) | La persona se clasifica como: |
|---|---|
| <18.5 | Peso insuficiente |
| 18.5 – 24.9 | Normal |
| 25-29.9 | Con sobrepeso |
| >30 | Obesa |

**Tabla 1.** Los rangos del IMC para categorizar los pesos

En esta situación problemática, el modelo matemático es proporcionado a los profesores y lo que se pretende es utilizar algunas herramientas matemáticas que permiten profundizar en la interpretación y aplicación del modelo matemático.

Después de explorar la relación $\mathrm{IMC} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{E}^2}$ asignando valores numéricos para algunas de las tres variables, se pasa a interpretar gráficamente las relaciones $\mathrm{P} = 18.5\mathrm{E}^2$, $\mathrm{P} = 25\mathrm{E}^2$ y $\mathrm{P} = 30\mathrm{E}^2$, que corresponden a los valores críticos en la tabla proporcionada. Algunos profesores han tenido dificultades para graficar estas funciones a lápiz y papel, debidas principalmente a un mal manejo de las escalas sobre los ejes cartesianos, como puede verse en la respuesta mostrada en la Figura 14.

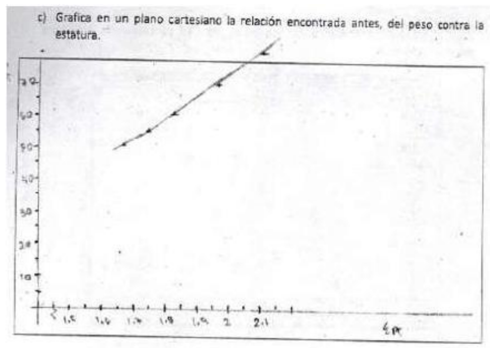



**Figura 14.** La gráfica elaborada por uno de los profesores que ha tenido problemas con la escala

GeoGebra ha resultado un buen apoyo para los profesores, tanto en lo que se refiere a la graficación de estas funciones, como a los significados de la gráfica para la situación planteada y ha permitido dar respuesta a la pregunta final sobre la situación:

> "Un médico registra en la gráfica de la figura, el Índice de Masa Corporal de un adolescente, en cuatro consultas consecutivas. En esta gráfica A1 corresponde a la primera consulta y A4 a la última. ¿Qué tipo de recomendaciones consideras que debe hacer el médico a partir de la gráfica?"

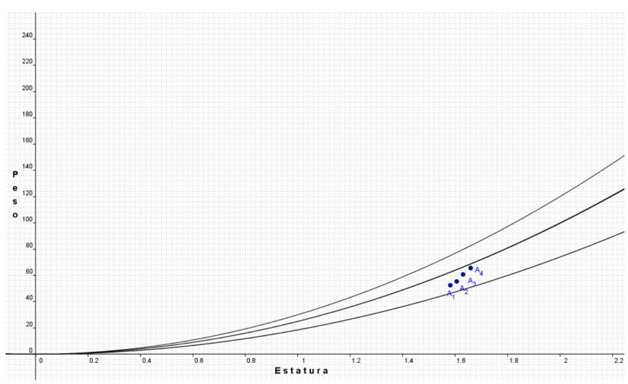



**Figura 15.** Gráfica presentada a los profesores en GeoGebra, en la que cada punto $A_i$ representa una consulta

Los profesores dieron en general buenas respuestas a esta pregunta, aunque algunos parecieron no captar con claridad la tendencia del paciente hacia el sobrepeso, como puede verse en la respuesta siguiente:

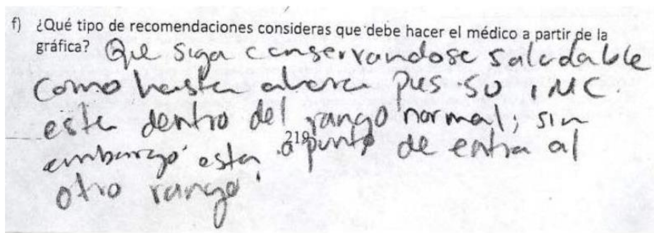



**Figura 16**. Interpretación de la gráfica ofrecida por uno de los profesores

Es interesante observar que, durante un taller ofrecido a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sonora, uno de los participantes ha formulado la siguiente pregunta: "¿Qué tan acertado será el criterio que establece que mi peso es normal si peso tantos kilogramos como centímetros excede mi estatura al metro?"; el estudiante hace alusión a un criterio empírico muy popular en México para estimar el posible sobrepeso de una persona. A sugerencia del instructor, los estudiantes emprendieron la búsqueda de la una relación algebraica entre el peso y la estatura de una persona, que pudiera modelar este criterio empírico. Sin muchas dificultades establecieron que el criterio podría expresarse algebraicamente como $E = 100(P - 1)$ y lo graficaron sobre la gráfica de la Figura 15, como puede verse en la Figura 17.

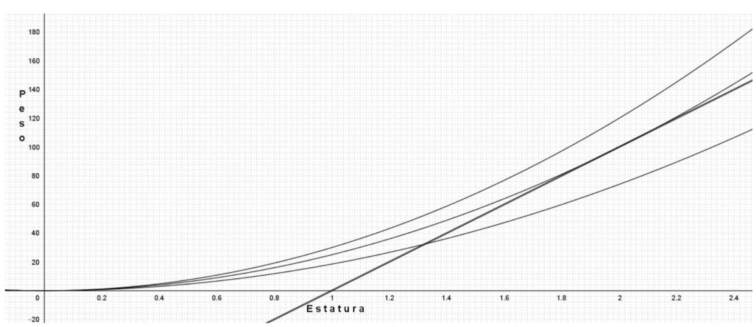



**Figura 17.** Comparación de un criterio empírico para estimar el sobrepeso contra la clasificación elaborada con base en el IMC

La respuesta ha generado una discusión interesante sobre el rango de validez del criterio empírico analizado y su comparación con el peso normal establecido a partir del índice de masa corporal. La pregunta refleja el grado de interés que la situación despertó en los estudiantes y sugiere la conveniencia de incluir esta pregunta en el diseño de la situación.

**Las pirámides financieras.**

La situación siguiente titulada "Las pirámides financieras" se propuso a un grupo de 23 profesores de matemáticas de la Universidad Tecnológica de Hermosillo, en México, durante el verano de 2015. Las empresas financieras piramidales, conocidas también como Esquemas Ponzi, están condenados a colapsar con grandes pérdidas para los inversionistas. La situación planteada aquí es una versión simplificada de una pirámide financiera y los profesores deberán analizar la situación y explicar por qué estas empresas son inevitablemente fraudulentas. La situación es la siguiente:

Una persona, de nombre Timoteo Vil, conocido en el bajo mundo como Timo Vil, crea una "empresa de inversión" y la titula Dinero Gratis. La empresa vende bonos de inversión de \$5000.00 con la promesa de regresar al mes la inversión con un 100% de ganancia, es decir \$10000 en total; la única condición para pagar los \$10000 al inversionista, es que éste lleve a la empresa otros cuatro inversionistas, que adquieran también un bono de \$5000.00 cada uno, sujetos a las mismas reglas de inversión.

Supongamos que en la Cd. De Hermosillo existen aproximadamente 100000 personas con la disposición y los fondos para invertir en la empresa Dinero Gratis. La empresa inicia con Don Timo (aunque éste no invierte dinero) y cuatro inversionistas que aportan 5 mil pesos cada uno. El mes siguiente estos cuatro inversionistas consiguen otros cuatro cada uno, es decir hay $4^2$ nuevos inversionistas. Al final del primer mes, los cuatro primeros han cumplido su trato, por lo cual reciben 10 mil pesos cada uno, es decir $4^1 \times 10$ miles de pesos entre todos, Don Timo en cambio recibe $4^2 \times 5$ miles de pesos de los 16 nuevos inversionistas.

A los profesores se les proporcionó la Tabla 2 en donde se muestra la evolución financiera de la empresa durante los primeros meses y su trabajo consiste en hacer los cálculos que faltan

| Personas involucradas | Ingresos de la empresa | Egresos de la empresa | Ganancias de la Empresa |
|---|---|---|---|
| $1 + 4^1 =$ | $4^1 \times 5 =$ | 0 | |
| $1 + 4^1 + 4^2 =$ | $4^2 \times 5 =$ | $4^1 \times 10 =$ | |
| $1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 =$ | $4^3 \times 5 =$ | $4^2 \times 10 =$ | |
| $1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 =$ | $4^4 \times 5 =$ | $4^3 \times 10 =$ | |
| $1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 =$ | $4^5 \times 5 =$ | $4^4 \times 10 =$ | |

**Tabla 2.** Los ingresos, egresos y ganancias en miles de pesos

Tal como se esperaba, los cálculos han resultado muy laboriosos aun utilizando calculadora. Después de los primeros intentos, se han puesto a discusión las regularidades que se observan en cada columna y la manera como está relacionado cada renglón con el siguiente, en cada una de las tres columnas.

En el caso de la primera columna, por ejemplo, algunos profesores recordaban que había una fórmula para calcular una suma geométrica y que pudieron reconstruir como

$$R_n = 1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \cdots + 4^n = \frac{4^{n+1}-1}{3},$$

la cual les permitía hacer los cálculos renglón por renglón. Sin embargo, el instructor insistió en aprovechar la relación $R_n = 1 + 4R_{n-1}$, que permite construir la función recursiva $f(x) = 4x + 1$ y con la ayuda de GeoGebra proporcionar de golpe todos los cálculos de la columna (ver Figura 18).

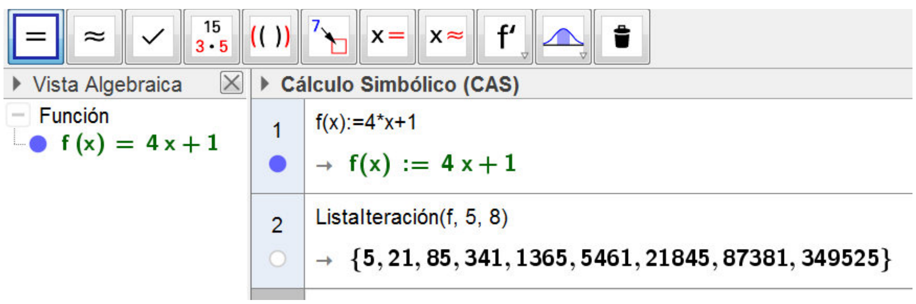



**Figura 18.** El cálculo de listas de valores de la función recursiva $f(x)$

La situación planteada generó entre los profesores una enriquecedora discusión sobre la relación entre las herramientas matemáticas y la potencia del software utilizado. Con respecto a las conclusiones generales sobre la situación, para algunos profesores ha resultado difícil presentar una explicación precisa sobre la naturaleza fraudulenta de las "empresas de inversión" que funcionan bajo el esquema de Ponzi y en algunos momentos la discusión derivó hacia los aspectos éticos y legales de tales empresas.

## 4. Discusión

En este capítulo, hemos querido mostrar la importancia de distinguir entre ejercicios, problemas cerrados, problemas abiertos y situaciones problema. Además de esta distinción, hemos considerado la variable tecnológica. Estas diferencias nos parecen útiles al profesor de matemáticas que quiera experimentarlas en el aula. Así, si consideramos un acercamiento de la enseñanza de las matemáticas siguiendo una corriente sociocultural del aprendizaje (ver 1ª parte de este libro), podemos proponer la siguiente clasificación:

- **Definición de ejercicio**. La lectura del enunciado implica el recuerdo inmediato de una técnica, fórmula o actividad rutinaria sin reflexión.
- **Definición de problema**. La lectura del enunciado no implica un recuerdo directo con un contenido específico. Es necesario buscar nuevas representaciones y asociaciones que nos permita la búsqueda de un camino a seguir. Un desafío se presenta y la articulación entre representaciones-funcionales e institucionales es necesario para llegar a construir la solución. El trabajo en equipo es deseable (p.e. utilizando ACODESA) para que más alumnos lleguen a resolver el problema.

Existen en la literatura una gran clasificación de problemas: Problema cerrado; Problema Abierto; Problemas según la RME (matemática realista), en donde el contexto es importante; Situaciones problema para sobrepasar un obstáculo epistemológico (como el “Puzzle” utilizado por Brousseau 1987); Problemas de búsqueda (Grenier & Payan 2003), problemas diseñados para promover la actividad matemática como lo hacen los matemáticos (pe. El Poymino); Situación problema como el definido en Quebec por el ministerio de educación. En nuestro caso, estamos interesados en la resolución de problemas en un contexto tecnológico:

- **Definición de situación problema en contexto papel-lápiz y tecnología**. La lectura del enunciado y la manipulación de materiales propicia la formación de representaciones espontáneas y esquemas de acción, la tecnología sirve a los estudiantes a mejor entender la situación sin que ella proporcione la respuesta, el ir y venir a la situación, trabajo en papel y lápiz y construcción de nuevas representaciones espontáneas, grupales y articulación con las representaciones institucionales permitirá encontrar un camino que lleve a un equipo de estudiantes trabajando en colaboración a la solución solicitada. En algunos casos se puede proporcionar un applet para que sirva como elemento de control y verificador en forma numérica de cálculos algebraicos (Hitt, Saboya, Cortés 2017).

## Referencias

Brownell W-A. (1942). Problem solving. In N.B. Henry (Ed.), *The psychology of Learning* (41st Yearbook of the National Society for the Study of Education. Part 2, pp. 415-443). Chicago: University of Chicago press.

Brownell, W. A. (1947). The place and meaning in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal*, *4*, 256–265.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. 1970-1990, In Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. And Warfield, V. (Eds. and Trans.) Dordrecht: Kluwer.

Carlson, M. & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: an emergent multidimensional problem solving framework. *Educational Studies in Mathematics,* 58, 45-75.

Demana, F. & Waits, B. (1988). Pitfals in Graphical Computers, or Why a Single Graph isn't Enough. *College Mathematics Journal* 19(March), pp. 177-183.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht : Kluwer.

INEGI (s/f). Consultado el 5 de julio de 2018 en http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/habitantes.aspx?tema=P

Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situations de recherche en "classe", essai de caractérisation et proposition de modélisation. Cahiers du Séminaire National de DDM, ARDM, Paris.

Hadamard, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris: Gauthier-Villars.

Krutetskii, V.A (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A. & Rauscher, Alain J. (2011). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environmental. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 13: 201-226.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princetown: Princetown University Press.

Polya, G. (1965). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (vol. II). New York: John Wiley and Sons.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Rodríguez, M-A. (2012). *Actividades didácticas dirigidas a profesores de matemáticas de secundaria diseñadas con la metodología ACODESA*, Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Sonora, Hermosillo, México.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schwartz, B., Dreyfus, T. & Brukheimer, M. (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers Education*, *14*(3), 249-262.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School* (pp. 21–57). Utrecht: CD-ß Press.

Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Harcourt, Brace and Company.

# 3 EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN UN MEDIO SOCIOCULTURAL Y TECNOLÓGICO

Samantha Quiroz[1], Álvaro Bustos[2], Fernando Hitt[3]

## Resumen

En este capítulo, se discutirán los procesos de génesis instrumental en la resolución de situaciones de investigación relativas a el pensamiento aritmético-algebraico. Se requería trabajar en un ambiente de aprendizaje en colaboración siguiendo los lineamientos del método de enseñanza Acodesa. Además, las situaciones se desarrollan con el uso de tabletas como artefacto tecnológico. Se presentan los resultados obtenidos de la aplicación de una de las actividades a un grupo de sexto grado de primaria de México. Entre los resultados, se constató que pese a las dificultades que implica el uso de tecnología en la clase de matemáticas, los estudiantes se apropiaron poco a poco del artefacto tecnológico, convirtiéndolo en una herramienta en el proceso de resolución.
**Palabras clave :** Génesis instrumental, modelación matemática, tecnología, ambiente sociocultural de aprendizaje, situación de investigación, ACODESA.

## Résumé

Dans ce chapitre seront discutés les processus de la genèse instrumentale dans la résolution de situations de recherche liées à la pensée arithmético-algébrique. Un travail dans un environnement d'apprentissage collaboratif est nécessaire en suivant les directives de la méthode d'enseignement ACODESA. En outre, ces situations ont été conçues en utilisant des tablettes en tant qu'artefact technologique. Nous présenterons les résultats obtenus lors de l'expérimentation d'une des activités auprès d'un groupe d'élèves mexicains de sixième année primaire. Il a été constaté que malgré les difficultés reliées à l'utilisation de la technologie en classe, les élèves se sont appropriés peu à peu l'artefact technologique, le transformant en un outil pendant la résolution.
**Mots-clés** : genèse instrumentale, modélisation mathématique, technologie, environnement socioculturel d'apprentissage, situation de recherche, ACODESA.

## Abstract

In this chapter, the processes of instrumental genesis will be addressed in the resolution of research situations related to the promotion of processes of arithmetic-algebraic. It was necessary to work in a collaborative learning environment following the guidelines of the ACODESA teaching method. In addition, these situations were designed to be developed with the use of tablets as a technological artifact. The results obtained during the application of one of the activities to a group of Mexican sixth grade pupils are presented. Among the results observed, it was found that despite the difficulties related to the use of technology in the mathematics class, the pupils, in the process of resolving the activity, little by little transformed the technological artifact into a tool.
**Keywords** : instrumental genesis, mathematical modeling, technology, sociocultural learning environment, research situation, ACODESA.

[1] Universidad Autónoma de Coahuila, México.
[2] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
[3] Université du Québec à Montréal, Canadá.

## 1. Introducción

En las últimas tres décadas el aumento por innovar en las practicas pedagógicas en el aula de matemáticas ha ido en aumento, especialmente las relacionadas con la incorporación de herramientas digitales como medios para facilitar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes. Distintos enfoques se han puesto en práctica en el aula, los cuales han mostrado las ventajas y desventajas del uso de tecnología y como facilitar su uso (p.e. Bairral, Arzarello, y Assis, 2017). En esta investigación reportamos cómo la enseñanza de la matemática desde un enfoque sociocultural y tecnológico, y el trabajo colaborativo entre estudiantes puede resultar ventajoso cuando se utiliza un artefacto como soporte en la resolución de tareas contextualizadas en situaciones de investigación.

Un error común en el que han caído gran cantidad de científicos y gobiernos es considerar que la inserción de la tecnología en el aula es una tarea fácil, es decir, creer que el uso de un artefacto de tecnología digital en el aula no presenta dificultades para su implementación tanto con alumnos como con docentes. Un ejemplo de lo anterior es la implementación del programa Enciclomedia en 2005 en México. Este programa buscaba ser una herramienta de apoyo a los docentes de educación primaria mediante la digitalización de los libros de texto con hipervínculos que permitían el desplazamiento de la información de forma activa. En este programa se dotó a las escuelas de una computadora, impresora, proyector, pizarrones blancos, electrónicos y/o interactivos. Su principal crítica, es la gran cantidad de presupuesto destinado al equipamiento y soporte técnico y el poco impulso de estrategias dirigidas al acompañamiento y capacitación de docentes y alumnos para el manejo de estos recursos (Ángeles, 2014).

Otro ejemplo lo tenemos con el Ministerio de Educación de Quebec (1996):

> Dado que la tecnología influye sobre las matemáticas y su utilización, es necesario que el alumno domine las herramientas electrónicas modernas, … La tecnología no garantiza el éxito de los alumnos en matemáticas, ya que las calculadoras y la computadora, así como el procesador de texto para un escritor, no son más que herramientas. Sin embargo, ellas permiten al alumno adquirir y comprender los nuevos conceptos más rápidamente. (p. 6).

Estas concepciones de autoridades educativas y de algunos científicos, trajo consigo que los didactas de las matemáticas abordaran la problemática de la incorporación de tecnología en el aula desde el punto de vista de su aprendizaje, profundizando sobre los problemas de enfrentarse a un artefacto para apropiárselo y convertirlo en una herramienta en el aprendizaje de las matemáticas. Artigue (2002) afronta la problemática enfatizando los problemas causados por el mal uso de la tecnología en el aula de matemáticas en las décadas de los 80 y 90, además, menciona (pp. 8-9) cuatro puntos para ilustrar que la integración de tecnología en el aula está lejos de convertirse en una tarea fácil de llevar a cabo:

- La pobre legitimidad educativa de las tecnologías informáticas que se oponen a su legitimidad social y científica.
- La subestimación de las cuestiones vinculadas a la informatización de los conocimientos matemáticos.
- La oposición dominante entre los aspectos técnicos y conceptuales de la actividad matemática.
- La subestimación de la complejidad de los procesos de instrumentación.

Con respecto al primer punto, surge la pregunta de por qué en la sociedad la gente se obliga a utilizar las herramientas tecnológicas como celulares, cámaras fotográficas, tabletas, etc., mientras que existe una gran resistencia de su uso en el aula de matemáticas. El segundo lo podemos ejemplificar con las restricciones que impone un artefacto en la Figura 1. Para realizar una representación gráfica de una función por partes en esta calculadora, se requiere conocer un lenguaje que dista mucho de la notación matemática.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad -2 \le x \le 0 \\ x & si \quad 0 < x \le 4 \end{cases}$$

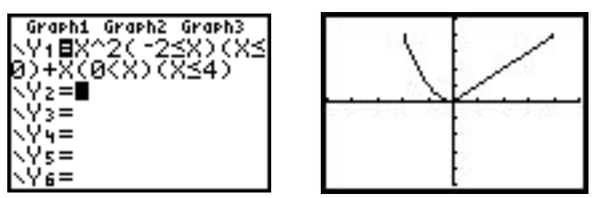



**Figura 1**. Notación corriente en el aula de una función definida por partes y su trasformación en un medio tecnológico (calculadora)

El tercer punto es ilustrado con los resultados del trabajo de Guin y Trouche (1999, p. 197):

> Vamos a referirnos a un ejemplo significativo, concerniente a la siguiente pregunta [planteada] a 100 estudiantes de 18 años: $\lim_{x\to\infty}(\ln x + 10 \operatorname{sen} x)$.

> Todas las respuestas fueron correctas en la modalidad sin calculadora (en un grupo de 50 estudiantes). Por otro lado, frente al gráfico más bien perturbador producido por la calculadora, los estudiantes no pudieron aceptar la inconsistencia [aparente] de los resultados mostrados por la máquina: en este caso solo el 10% de las respuestas fueron correctas (en otro grupo de 50 estudiantes).

Con respecto al cuarto punto señalado por Artigue, podemos mencionar el trabajo de Tall (2000) sobre el uso de Derive en el aprendizaje del cálculo:

El mismo fenómeno ocurrió cuando a los estudiantes se les pidió que explicaran el significado del $\lim_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Aquí, tanto el grupo Derive como uno de los grupos de papel y lápiz participaron en una discusión sobre el significado de la notación. Todo el grupo No-Derive dio una explicación teórica satisfactoria del concepto, pero no hubo alguien del grupo Derive que pudiera proporcionar una explicación teórica (p. 199).

Los diferentes autores mencionados no tienen una postura antagónica frente al uso de tecnología en el aula, más bien ilustran la complejidad de su utilización. El no tomar en cuenta las dificultades que pueden surgir al tratar de usar tecnología puede repercutir en una carga adicional para el profesor y en el aprendizaje de los estudiantes.

## 2. Génesis instrumental en clases de matemática

El trabajo de Rabardel (1995) sobre la génesis instrumental, pone en relieve la teoría de Vygotski (1986/1995) sobre la construcción del conocimiento en un medio sociocultural, donde la herramienta está en el corazón mismo del desarrollo del conocimiento. Rabardel (Idem, p. 4) plantea la distinción entre herramienta y artefacto, para él, la herramienta es una entidad mixta que es sujeto y artefacto, la cual está compuesta por:

- Un artefacto material o simbólico producido por el utilizador o por otros,
- uno o varios esquemas de utilización asociados, resultantes de una construcción propia o de la apropiación de esquemas sociales prexistentes. (p. 4).

Así, para Rabardel, por medio de un artefacto material o simbólico, como calculadoras, computadoras, tabletas, etc., se tiene la posibilidad de que los individuos produzcan esquemas de utilización en la práctica. Estos esquemas se construyen en un proceso que Rabardel ha llamado génesis instrumental. La génesis instrumental tiene dos dimensiones; instrumentalización e instrumentación.

- La instrumentalización son los procesos que el sujeto o individuo dirige hacia el artefacto cuando inicia su interacción, para transformar el artefacto, su estructura, su funcionamiento.
- La instrumentación son los procesos relativos al sujeto, a sus esquemas que evolucionan de acuerdo con el avance del uso del artefacto.

Posterior al trabajo de Rabardel (1995), emergieron las investigaciones de Guin & Trouche (1999, 2002) quienes retomaron las ideas de Rabardel y las aplicaron en el campo de la didáctica de las matemáticas. Estos autores analizaron el potencial y las limitaciones en la transformación de un artefacto en una herramienta matemática para los estudiantes, lo cual evidenció que el proceso de génesis instrumental es diferente y complejo para cada alumno. En esta línea, Guin & Trouche (1999, p. 224-225) formulan sugerencias de cómo organizar la enseñanza para convertir las calculadoras simbólicas en herramientas matemáticas eficientes, algunas de las cuales son:

- Introducir solo un número limitado de nuevos comandos en cada actividad, teniendo cuidado de no oscurecer el trabajo matemático por dificultades de manipulación y limitar el uso de estrategias de evasión.
- Dedicar suficiente tiempo aprendiendo a verificar varios representantes (imágenes y números), enfatizando su diferenciación y coordinación y el lenguaje relativo a ellos.
- Preguntas alternativas en los dos entornos con el objetivo de evitar la dependencia excesiva de la máquina y, por lo tanto, mejorar en lugar de reducir el trabajo matemático.
- Llamar la atención sobre la construcción de conexiones con el currículo nacional de matemáticas dentro de la fase de institucionalización para sugerir conexiones apropiadas en redes de ideas.

Las sugerencias de Guin & Trouche (1999) están dadas en un contexto del uso de calculadoras como artefacto tecnológico. Aun así, extrapolamos estas sugerencias para ser tomadas como lineamientos a seguir en el diseño e implementación de tareas donde la tecnología a utilizar en el aula serán tabletas.

## 3. Enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural del aprendizaje

En el siglo pasado, era usual seguir un acercamiento constructivista ligado al trabajo en colaboración. Esto proporcionaba lo que algunos llamaron acercamiento socioconstructivista, sin embargo, como ha sido mencionado en uno de los primeros capítulos de este libro, von Glasersfeld (2004) nos previene al señalar que la unión entre constructivismo y trabajo en colaboración no cuenta con sustentos teóricos.

Un esfuerzo por la comprensión de los procesos construcción social del aprendizaje en matemáticas, lo realiza Hitt (2007) cuando propone un método de enseñanza denominado Acodesa (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico, Auto-reflexión)

Este método permite organizar la actividad en cinco etapas:

- *Etapa 1. Trabajo individual*. Los estudiantes trabajan de manera individual en un ambiente de lápiz y papel.
- *Etapa 2. Trabajo en equipo*. Trabajan en equipos conformados idealmente por tres integrantes (Prusak et al., 2013) sobre la misma tarea.
- *Etapa 3. Discusión en gran grupo*. Los estudiantes discuten en plenario las propuestas generadas en la etapa anterior. El profesor debe fomentar los procesos de comunicación y la búsqueda de un consenso.
- *Etapa 4. Autorreflexión*. Cada alumno reconstruye de manera individual, lo hecho durante las fases anteriores. El estudiante tiene la oportunidad de reflexionar en torno a su respuesta.
- *Etapa 5. Institucionalización*. El docente presenta la solución institucional del problema. Muestra la evolución de las representaciones funcionales espontáneas surgidas en las etapas previas y resume e incorpora los aportes de los estudiantes que ayudaron en el proceso de obtención de una solución.

Ahora bien, el trabajo con esta metodología requiere del planteamiento inicial de una situación con ciertas características específicas, entre ellas la comunicación entre pares donde el profesor sea una guía. Además, dichas situaciones deben buscar que en la clase de matemáticas se dejen de lado la imposición de representaciones oficiales, y se promueva la construcción social de las mismas (Hitt y Quiroz, 2017).

Para lo anterior, los autores proponen la implementación de las denominadas Situaciones de investigación (SI), que se definen como el conjunto de tareas eslabonadas para la resolución de actividades en un medio de aprendizaje sociocultural y tecnológico. Las SI son diseñadas siguiendo un método de enseñanza que promueva la colaboración, así como el trabajo individual como lo es la Metodología Acodesa.

La implementación de SI promueven el surgimiento de dos tipos de representaciones que anteceden a las representaciones institucionales. Primeramente, el trabajo inicial e individual de los alumnos para dar respuesta al problema que se plantea, permite la emergencia de Representaciones Funcionales-Espontáneas (RFE). Estas representaciones surgen espontáneamente en cara a una actividad no ordinaria, y con un motivo específico: dar respuesta a dicha actividad. En el trabajo de Hitt y Quiroz (en prensa) se muestra que en las primeras cuatro etapas de Acodesa, las RFE de los alumnos evolucionan a través de una historia colectiva en el aula, llegando a formar Representaciones Grupales (RG).

El estudio de RFE y la implementación de SI, ha sido de antemano en investigaciones como la de Hitt, Saboya & Cortés (2017a) relacionada con los números poligonales. La experimentación se realizó en una escuela secundaria, y en esta ocasión, en una de las etapas de Acodesa se introdujo el trabajo con una computadora como tecnología de apoyo. La idea era que hubiera mayor comunicación entre los miembros del equipo para así evitar que cada estudiante se dedicara a trabajar de manera individual con la computadora.

Si bien la SI permitió reflexiones importantes relacionadas con la formación de RFE, el uso de la computadora mostró algunas dificultades en su implementación. Se constató que el dueño de la computadora no permitía que los otros alumnos utilizasen libremente la computadora. Esta actitud contrasta cuando se trabaja en equipo con calculadora; pareciera que la calculadora es más fácil de "prestar a los otros miembros del equipo" durante el trabajo en colaboración (Hitt & Kieran, 2011), ver actividades grupo APTE (2017).

Así, ya sea por medio de un acercamiento socioconstructivista o sociocultural, ahora disponemos de algunos elementos a considerar para la implementación de tecnología en la clase de matemáticas. Por ejemplo, Hoyles (1988) en su libro *Girls and Computers* menciona que en una clase donde se forman equipos mixtos de niñas y niños, los niños tienen la tendencia de apoderarse rápidamente del teclado, dejando a las niñas de lado. Grundy y Grundy (1996) señalan en el libro *Women and Computers*, que esto no solamente sucede a nivel del aula, sino en la vida diaria dentro de nuestra sociedad (p. 19).

La presente investigación busca continuar con el estudio de la implementación de SI donde se busque el surgimiento de RFE y RG. Más aun, se continua con el estudio de los procesos de generalización, esta vez mediante la selección de una muestra conformada por alumnos de sexto grado de escuela primaria. Esta nueva experimentación (en proceso) consideró el problema que representa el trabajar en equipo, de acuerdo con Prusak, Hershkowitz y Schwarz (2013), bajo un ambiente sociocultural desde el punto de vista de la teoría de la actividad de Leontiev (1978) y utilizando el método de enseñanza de Acodesa (Hitt, 2007). El diseño de la SI incorporó el uso de una tecnología de apoyo en una de las etapas de la metodología Acodesa. En el presente capítulo se presentan los resultados de la implementación de la primera de seis SI que se diseñaron y aplicaron.

Entonces, se persiguió como objetivos analizar:

- Los procesos de generalización, variable y covariación entre variables, en la transición primaria-secundaria.
- La comunicación entre los miembros de los equipos para la formación de RFE y RG.
- El uso de las tabletas como herramienta tecnológica y sus dificultades.

## 4. Método

Siguiendo un paradigma fenomenológico, se presenta una investigación con un enfoque cualitativo, debido a que se analizaron las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas recopiladas de las observaciones hechas por uno de los investigadores. El grupo participante en el estudio estaba compuesto por doce estudiantes de sexto año de primaria de una escuela pública en México. La escuela está inserta en un polígono de pobreza y los alumnos provienen de familias de un nivel socioeconómico bajo, por lo que representan una población en situación de vulnerabilidad.

Las técnicas para la recolección de información fueron la observación y el análisis de documentos. Los instrumentos que se desprendieron para tal objetivo fueron las hojas de trabajo de los estudiantes, guía de observación al momento de la implementación, notas de campo del investigador, todo ello apoyado en videograbaciones de las sesiones.

Considerando las dificultades ya reportadas en anteriores investigaciones, se decidió utilizar tabletas como herramientas tecnológicas. Se había registrado que el uso de computadores inducía a una práctica donde un solo estudiante (generalmente el dueño de la computadora) monopolizaba el uso del dispositivo y no permitía la manipulación a los demás miembros del equipo (Cortés, Hitt y Saboya, 2014). Consideramos que la tableta, como la calculadora en el pasado, se puede manipular más fácilmente por pantalla táctil favoreciendo así su uso por todos los miembros de cada equipo. Como herramienta tecnológica, además de la tableta, se utilizó el software gratuito de matemáticas dinámicas GeoGebra, el cual es compatible con la tableta.

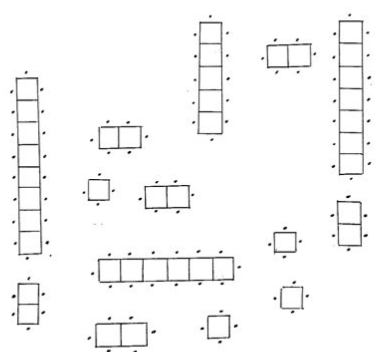
Fueron seis las situaciones de investigación que se diseñaron:

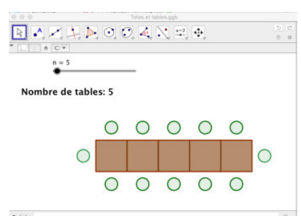
- El restaurante de Marcelo
- Joyería “El Dorado”
- Las ventanas
- El camino de las calaveritas
- Rectángulos y círculos
- Números poligonales

Para la elaboración de las situaciones de investigación se siguieron los lineamientos propuestos por Hitt, Saboya y Cortés (2017b) en el diseño de actividades con tecnología para utilizar el método de enseñanza de Acodesa (Hitt, 2007). Cada actividad constaba de una hoja de trabajo y un applet, este último con la finalidad de facilitar una ayuda para las conjeturas y el cálculo con lápiz y papel realizado por los estudiantes. Por razones de espacio, en este capítulo solo presentamos el análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de la primera actividad, titulada *El restaurante de Marcelo*.

## 5. Diseño de la Situación de investigación

El diseño de la Situación de aprendizaje siguió las diferentes etapas de la metodología Acodesa. Así, en la Tabla 1 se presenta cada etapa, la actividad y la descripción de la misma.

| Etapa de Acodesa | Actividad propuesta |
|---|---|
| Trabajo individual | Se plantea primeramente la situación:<br>Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que coloca en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:<br>Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que coloca en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:<br><br>A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los pondrá. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin tener la necesidad de contar cada vez el número de sillas.<br>A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los pondrá. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de |

| | |
|---|---|
| | mesas sin tener la necesidad de contar cada vez el número de sillas.<br>Posteriormente se plantean 3 preguntas para resolverse de manera individual:<br>1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas?<br>2. Si buscamos el número de personas para colocar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o sabrías alguna manera rápida de hacerlo?<br>3. Y para 15 mesas, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de personas sin necesidad de dibujar? |
| Trabajo en equipo | En un segundo momento, se responden en equipo las siguientes actividades:<br>4. En equipo, discute las estrategias que usaste para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas ¿todos usaron la misma estrategia? Encuentra al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.<br>5. Una vez que escribiste las estrategias y que vieron que son correctas, utiliza alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.<br><br>Una vez que dieron respuesta en equipo a las preguntas, se introduce el uso de la aplicación Geogebra para verificar las respuestas dadas:<br>6. La aplicación GeoGebra te mostrará el número de personas que se pueden sentar alrededor de las mesas no importa que tan grandes sean. Utilízalo para verificar tus respuestas del problema 5.<br><br>7. Escribe un mensaje escrito a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa, sin importar que tan grande sea.<br>8. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar. |
| Discusión en gran | En esta sección son discutidas de manera grupal las respuestas a |

| | |
|---|---|
| grupo | las preguntas planteadas que crearon cada uno de los equipos de trabajo. Tiene como fin el socializar estrategias y argumentar su efectividad en la resolución de la situación planteada. |
| Autorreflexión | Se permite a los alumnos realizar de manera individual y como tarea en casa, las siguientes actividades:<br>1) Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 4 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.<br>2) Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 15 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.<br>3) Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 21 mesas y después de 54 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.<br>4) Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste. |
| Institucionalización | En esta etapa, posterior a que los alumnos entregaron su actividad de tarea, el docente institucionaliza las ideas revisitadas en la clase anterior. |

**Tabla 1.** Etapas ACODESA de la actividad

## 6. Análisis de Resultados

Los resultados se presentan en dos grandes secciones. En ambas se muestra el proceso de resolución de un equipo de trabajo conformado por cuatro alumnos del grupo de sexto grado. En la primera sección se mostrarán los resultados a la luz de la metodología Acodesa y la formación de RFE y RG. En la segunda sección se analizarán los procesos de génesis instrumental que se desencadenaron con el uso de la tablet como tecnología de apoyo.

Para motivos del análisis llamaremos $A_1$, $A_2$, y $A_3$ a los miembros del equipo. Presentamos sus características específicas de acuerdo a una entrevista con el docente de grupo:

A1. Es un alumno líder del salón. Tiene el primer lugar y se reconoce con buena habilidad para resolver problemas en la asignatura de matemáticas.

A2. Es un alumno tímido. Tiene el segundo lugar del salón y le gusta estudiar la asignatura de matemáticas.

A3. Es muy callada, no dialoga con sus compañeros. No le gusta la asignatura de matemáticas y no tiene buenos promedios en ella.

## 6.1 Etapa 1. Trabajo individual. Formación de RFE

En un primer momento los alumnos dieron respuesta a la pregunta "Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas, en 4 y en 15? $A_2$ y $A_3$ resolvieron esta pregunta mediante el procedimiento de dibujar las mesas y contar el número de sillas. En la Figura 2 se muestra la exlpicación que brinda $A_2$ para la resolución.

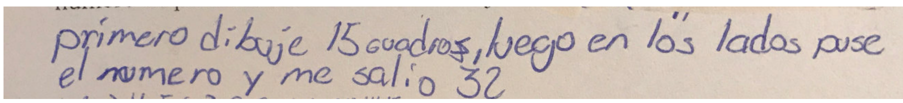



**Figura 2.** Respuesta de $A_2$ para la manera en que resolvió la pregunta sobre el número de sillas en 15 mesas

Por su parte, $A_1$ encontró una estrategia rápidamente que le permitió conocer el número. Así él explica de manera escrita lo siguiente:

> *$A_1$: "Multiplicar 15 x 2 para que te de las sillas de los lados y le sumas las de las orillas. R= 32 treinta y dos."*

De esta manera, es posible observar la formación de RFE en las hojas de trabajo de $A_2$ y $A_3$ como las siguientes:

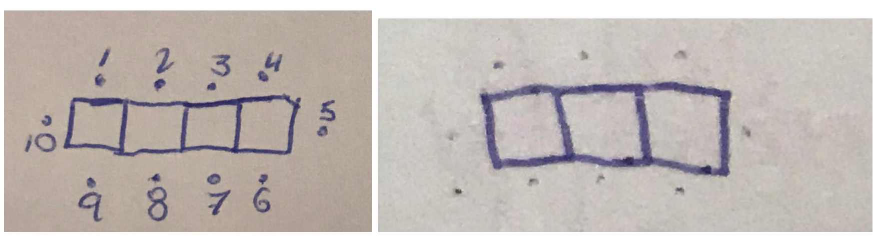



**Figura 3.** RFE de $A_2$ y $A_3$

En las representaciones es posible observar como $A_2$ utiliza puntos y números para contar las sillas, mientras que $A_3$ solo coloca puntos. Estas RFE también fueron utilizadas cuando les preguntaron por el número de sillas que cabían en 15 mesas, formando 15 cuadrados alineados y contando alrededor.

Por su parte, la RFE de $A_1$ fue expresada de forma verbal. En la Figura 4 se muestra la estrategia que utilizó el alumno:

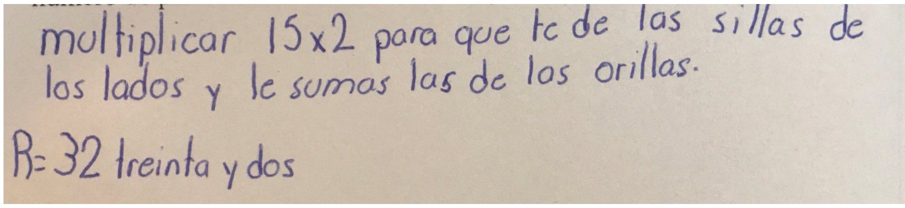



**Figura 4**. RFE de A1

Como es posible observarse, A1 crea una estrategia donde multiplica el número de mesas por dos para contar las sillas laterales, posteriormente adiciona dos sillas mas que se refieen a los extremos de las mesas. Esta estrategia la utiliza para contestar las 3 preguntas iniciales obteniendo una respuesta correcta en todas ellas.

## 6.2 Etapa 2. Trabajo en equipo

En un segundo momento de la clase, los tres alumnos se reunen en equipo y discuten el punto 4 de la actividad que les pide encontrar al menos dos estrategias para hacer el cálculo de 15 sillas. El obejtivo es que se compartan los diferentes procedimientos utilizados por los miembros del equipo. Los alumnos escriben en la hoja de trabajo lo siguiente:

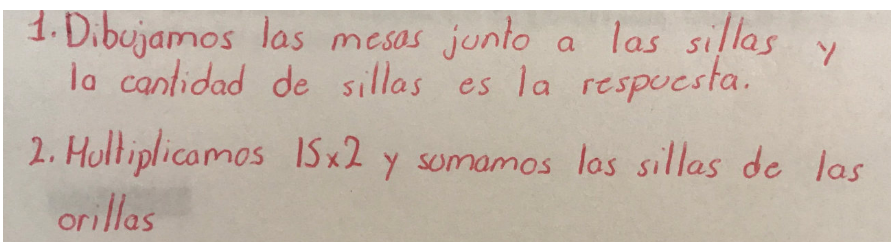



**Figura 5.** Socialización de estrategias del equipo

Durante la discusión A2 y A3 se asombran de la estrategia utilizada por A1 y refieren que es "mejor" para dar respuesta a las preguntas. Especialmente A2 se muestra entusiasmado con la idea, mientras que A3 conversa poco. La docente pasa por el equipo y pregunta por la estrategia que elijen en el equipo y todos explican la estrategia de A1.

En la actividad siguiente, se pide a los alumnos que realicen el cálculo para 56 y 72 mesas. El equipo utiliza la estrategia de A1 para ambos casos.

Rápidamente conocen la respuesta correcta. En este punto la docente entrega la tableta con el objetivo de que los alumnos comprueben sus respuestas.

Al inicio, $A_1$ y $A_2$ manipulan la tableta mientras que $A_3$ solo observa. Los tres alumnos se muestran muy interesados, sin embargo puede observarse ciertas problemáticas con el manejo de la herramienta tecnológica. Estas problemáticas se abordarán en la sección siguiente.

Para finalizar esta actividad, los alumnos escriben un mensaje a Marcelo donde se le explique cómo hacer para contar el número de sillas sin importar lo grande de la mesa. El mensaje lo escriben de la siguiente manera:

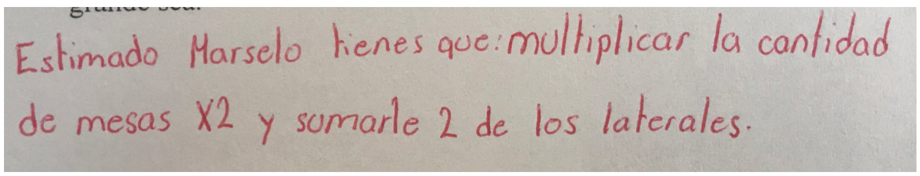



**Figura 6.** Mensaje que se envía a Marcelo

Es interesante que en este último mensaje, es posible apreciar un cambio en la manera de expresar la estrategia que realizó $A_1$ en el primer momento. Primeramente, ya no utiliza un número para referirse al número de mesas, es decir, primeramente $A_1$ hablaba de "15 x 2", ahora, el equipo habla de "La cantidad de mesas x 2". En segundo lugar, $A_1$ hablaba de "le sumas la orillas", mientras que ahora el equipo refiere a "sumarle 2 de los laterales". Este cambio en los términos permite ver una evolución de las ideas iniciales a la luz de una reflexión en el equipo de trabajo. Sin bien $A_2$ y $A_3$ cambian por completo de RFE, $A_1$ también afina esto, lo cual es un avance en sus procesos de pensamiento.

Por último, se pide a los alumnos escribir el mismo mensaje pero mas simplificado, indicando las operaciones que Marcelo necesita realizar. Para ello, el equipo crea la siguientes representaciones:

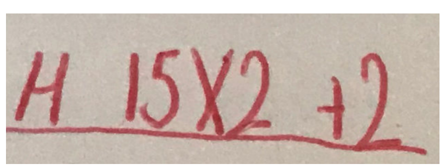



**Figura 7.** Mensaje simplificado estructurado por el equipo

Son tres las representaciones de los alumnos para la creación del mensaje simplificado. En la primera colocan una letra M que representa mesas, luego escriben un número específico de mesas multiplicado por dos y luego sumado dos. En el diálogo con la docente, se les hace las siguientes preguntas:

> *D- "¿Y si son 30 mesas?"*
> *$A_1$- "Pues 30 por dos mas dos"*
> *D- "¿Y si son 150 mesas?"*
> *$A_2$- "Pues 150 por dos mas dos"*
> *D- "¿Y si no sabemos la cantidad de mesas?"*

A través de esta pregunta los niños inician a argumentar cómo podrían representar una cantidad de mesas que no saben. $A_1$ menciona que se puede colocar un signo de interrogación. Por su parte, $A_3$ menciona que podría ser una línea donde se escriba cualquier número. En la Figura 8 se observan estas representaciones.

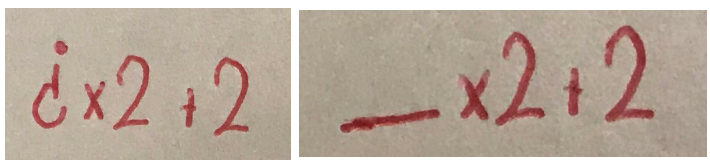



**Figura 8.** Mensaje simplificado reestructurado por el equipo

Es interesante observar que en equipo, los alumnos establecen una representación donde no es necesario explicitar todo con palabras, sino mas bien se dan cuenta que los símbolos matemáticos pueden ser útiles para dar a conocer un mensaje. Por otro lado, se aprecia que los alumnos generalizan un procedimiento, si bien no utilizan una variable conocida como lo es una literal, ellos usan símbolos como el "¿" y la "_" para representar "cualquier número de mesas".

## 6.3 Etapa 3. Discusión en gran grupo

En la etapa número tres los alumnos comunican su estrategia y mensaje al grupo de alumnos. Así mismo otros equipos escriben sus mensajes simplificados en el pizarrón. Las representaciones que surgen y se comparten son las siguientes:

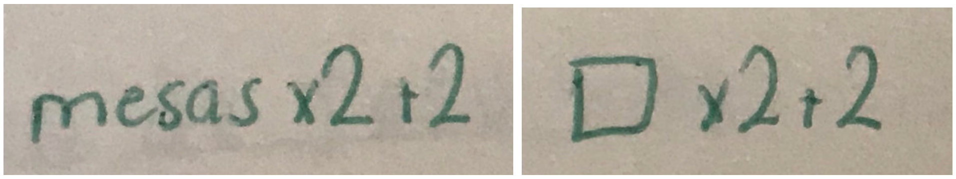



**Figura 9.** Mensaje simplificado de los otros equipos de trabajo

En la discusión se aprecia que los alumnos se muestran entusiasmados al ver que, si bien todos los equipos llegaron a un mensaje similar, para representar "cualquier cantidad de mesas" los símbolos que utilizan son diferentes. El equipo 2 lo representa con la palabra "mesas" mientras que el equipo 3 lo hace mediante un cuadrado. Los equipos registran en sus hojas de trabajo las diferentes respuestas de los compañeros junto a las suyas, y discuten sus diferencias y similitudes.

### 6.4 Etapa 4. Autoreflexión

En esta etapa se pide a los los alumnos que realicen en casa una serie de actividades muy similares a las vistas en el salón. Primeramente se pregunta por el número de personas que se pueden sentar alrededor de cuatro mesas. En los documentos entregados se observa que los tres alumnos obtienen de manera correcta esta respuesta. Además, ninguno de ellos vuelve a sus representaciones iniciales sino que utilizan el procedimiento que se desarrolló el día anterior. En la Figura 10 se muestra la respuesta de A2.

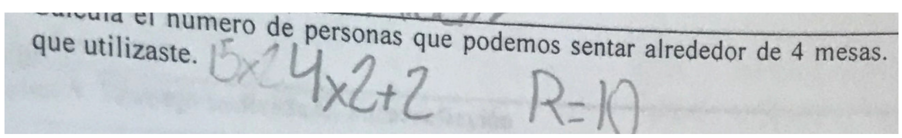
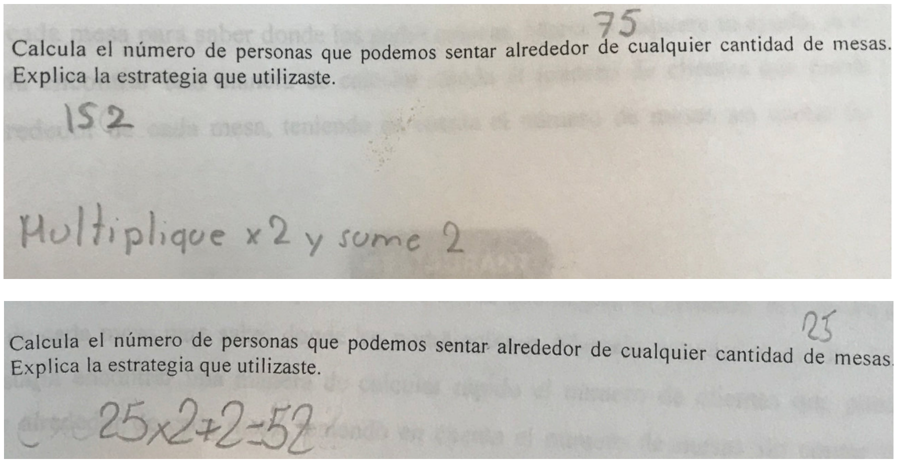



**Figura 10.** Respuesta de A2 en la primera parte de la Autoreflexión

En un segundo momento, se pide a los alumnos la cantidad de personas que se pueden sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. En esta ocasión las respuestas obtenidas son de dos tipos. El alumno A1 y A2 proponen las siguientes respuestas:


75
Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas.
Explica la estrategia que utilizaste.
152
Multiplique x2 y sume 2

25
Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas.
Explica la estrategia que utilizaste.
25x2+2=52

**Figura 11.** Respuesta de A1 y A2 en la segunda parte de la Autoreflexión

Estas dos respuestas muestran que los alumnos tiene necesidad de colocar un número ante el cuestionamiento de "cualquier cantidad". Ninguno de los dos realiza lo discutido en el día anterior y no colocan un símbolo que represente una variable. Por otro lado, A3 responde lo siguiente:

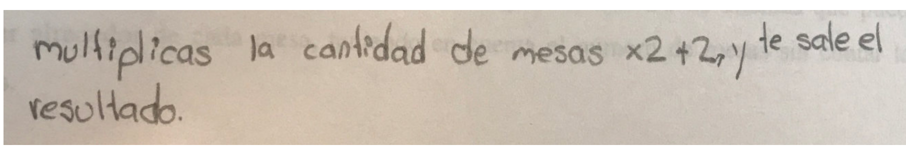

multiplicas la cantidad de mesas x2+2, y te sale el resultado.

**Figura 12.** Respuesta de A3 en la segunda parte de la Autoreflexión

En este caso, la alumna 3, si bien no expresa su respuesta sintéticamente, describe cual es el proceso para la resolución y coloca en ella el hecho de que se pueden utilizar "cualquier cantidad de mesas" y se obtendrá el resultado. Se destaca el hecho de que la alumna 3 tenía un comportamiento tímido en el transcurso de la actividad, sin embargo es posible apreciar que el diálogo y la escucha de las ideas de los otros compañeros provocan una interiorización de las ideas de la clase.

Se destaca las diferencias que existieron desde las primeras RFE de los alumnos hasta las últimas producidas en la discusión en gran grupo. La evolución de las representaciones muestra indicios para indicar que los alumnos desarrollan ideas relacionadas con la generalización y la definición de variables. De acuerdo con Radford (2003) y Warren (2006) se desarrolla la primera etapa del proceso de variación y generalización que es la generalización de variables discretas, donde dados una serie de elementos se predicen las características del elemento n. Es necesario recordar que estas ideas no son propias del currículo de educación primaria sino del de nivel secundaria, sin embargo la investigación muestra cómo es posible su estudio desde este nivel educativo.

Se reconoce que es la primera sesión de las seis programadas, por lo que el acercamiento de los alumnos al concepto de variable aún es inicial. Sin embargo, el cambio den representaciones permite analizar los alcances que se tiene a través de un método de enseñanza socioconstructivista.

Respecto a la formación de representaciones, la evolución de las primeras RFE dio pie, después de un trabajo de discusión en equipo y en gran grupo, y después de una manipulación de la herramienta tecnológica elegida, a la formación de Representaciones Grupales, siguiendo el enfoque de Hitt y Quiroz (en prensa). Estas representaciones se construyen y transforman a través de un proceso de objetivación y comunicación en la construcción del concepto, es decir, en el trabajo individual, de equipo y grupal, así como en la autoreflexión.

## 7. Procesos de génesis instrumental

El uso de la Tablet como herramienta tecnológica en la Etapa 2 de la metodología, permitió que los alumnos corroboraran sus respuestas que habían obtenido por medio de la estrategia discutida en el salón de clases. Primeramente se destaca la inmediata aceptación hacia el uso de la Tablet por parte del equipo de trabajo. Si bien se observó que en un principio A3 estuvo mas tímida para su utilización, con el paso de los minutos se pudo observar también a ella manipulando la aplicación.

Al solo contar con una Tablet para los 3 equipos de trabajo, se repartió su tiempo en cada uno de los equipos con el fin de que todos alcanzaran a manipularla. De esta manera se constató que los alumnos se mostraban emocionados y contentos cuando tocaba el turno de trabajar con ella, en ocasiones impacientes por que llegara a manos de su equipo. Esto tiene relación con una actitud positiva que se genera al implementar un instrumento tecnológico en el aula de matemáticas que ya ha sido reportado anteriormente (Sánchez y Ursini, 2010).

En el momento de de la manipulación de la Tablet, algunas de las interacciones fueron las siguientes:

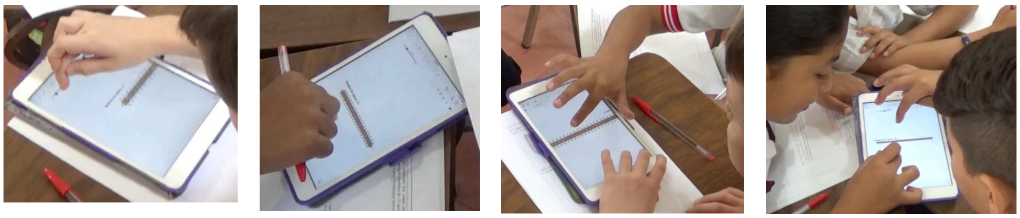


**Figura 14.** Interacciones con la tablet

- Los alumnos utilizaban el deslizador para poder visualizar diferentes mesas con la finalidad de verificar conjeturas.
- Los alumnos utilizaban dos dedos para realizar un zoom y así poder ver la figura completa ("manipulation screens" en el sentido de Bairral et al. 2017). En realidad, la figura completa solamente era un apoyo visual, lo importante era proporcionar al alumno un apoyo numérico para verificar su conjetura.
- La tableta permitía que al menos dos alumnos pudieran realizar transformaciones, permitiendo la comunicación (en el sentido de Voloshinov 1973 y Radford 2003) y el trabajo en equipo, en acuerdo al método de enseñanza Acodesa.

Una dificultad que pudo observarse consistió en el tamaño de la tableta utilizada. El modelo de la tableta era pequeño, lo cual provocó que resultara difícil su manipulación por parte de los alumnos, sobre todo cuando por error, tocaban el menú para guardar o cambiar de archivo. El menú se desplegaba y abarcaba la mitad de la pantalla lo que hacía que no se pudiera observar bien el applet. Cuando los alumnos no conocían como como quitar este menú, utilizaban solo media pantalla para su manipulación.

A pesar de este problema con la manipulación, se pudo observar que la tecnología jugó el papel que se le había asignado, como soporte numérico a las conjeturas de los alumnos.

## 8. Conclusión

La presente investigación mostró los resultados de la implementación de uno de los seis diseños de Situaciones de Investigación que buscan promover los procesos de generalización, variables y covariación de variables en un grupo de sexto grado de escuela primaria. Se analizó el trabajo de uno de los equipos de trabajo con el objetivo de reconocer la formación de Representaciones Funcionales-Espontáneas así como su evolución a Representaciones Grupales a través de Acodesa, una metodología sociocultural.

Los resultados mostraron cómo los alumnos del equipo seleccionado lograron discutir ideas sobre distintos procedimientos para resolver la tarea planteada, llegando a una representación sintética que deja ver el inicio de procesos de generalización de variables discretas. La situación diseñada tenía como propósito analizar la forma en que varía la cantidad de sillas alrededor de un conjunto de mesas respecto al número de mesas que se coloquen. Los alumnos identificaron tres formas diferentes de representar el término "cualquier cantidad de mesas", utilizando un signo de interrogación "¿", un guión bajo "_" y un recuadro.

El trabajo con la metodología Acodesa provocó un proceso de comunicación y co-construcción del conocimiento matemático estudiado, llevando a los alumnos a la discusión de ideas fundamentales para su aprendizaje. Durante las etapas de Acodesa se insertó una herramienta tecnológica que consistió en una tableta con una aplicación Geogebra donde los alumnos verificaron sus resultados.

En todas las actividades diseñadas para esta experimentación, los programas (applets realizados con GeoGebra) estaban limitados en el sentido de proporcionar una imagen visual y una respuesta numérica. Ello con la finalidad de que el applet sirviera simplemente como soporte para sus conjeturas y cálculos con lápiz y papel.

Los alumnos se fueron apropiando de la tecnología en el sentido de lo que Rabardel llama la génesis instrumental. Para algunos niños era novedoso el manipular la tableta apareciendo para ella/él un artefacto, que poco a poco, se fue apropiando a medida que trabajaba en las siguientes actividades.

El uso del zoom utilizando dos dedos implica lo que Rabardel nombra como esquema de utilización. Si las mesas se "salían de la pantalla", ellos realizaban un zoom para poder ver completa la figura. El uso de la tableta en el aula, permitió el trabajo en equipo dada la facilidad de manipulación, comparado con la rigidez de los laboratorios de cómputo; que incluso no se hubiera podido realizar en la escuela primaria.

En algunos casos, intentaban contar uno a uno. La dificultad para realizar dicha tarea fue importante para promover el análisis de su estrategia y validarla para proporcionar una generalización. La tableta, siendo tan pequeña, hizo pensar de inmediato en cambiar a otro tipo de tabletas mayor tamaño, ya que para las otras actividades era mejor contar con una pantalla más grande.

La investigación respecto al uso de la tableta como herramienta tecnológica y el análisis de la evolución de RFE y RG continúa con el análisis de los resultados que provienen de las otras cinco Situaciones de Investigación implementadas.

## Referencias

APTE (2017). Grupo de investigación en la Université du Québec à Montréal (UQAM). http://www.math.uqam.ca/APTE/Taches.html

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of GDM* (pp. 7-17). Potsdam. Recuperado de http://webdoc.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000/artigue_2000.pdf.

Bairral, M., Arzarello, F., & Assis A. (2017). Domains of Manipulation in Touchscreen Devices and Some Didactic, Cognitive, and Epistemological Implications for Improving Geometric Thinking. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, U. Gellert (Eds.), *Mathematics and technology. A C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (pp. 113-142). Cham: Springer.

Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situation de recherche en classe: essai de caractérisation et proposition de modélisation. Les cahiers du laboratoire Leibniz, 92.

Guin, D., & Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227. doi:10.1023/A:1009892720043

Guin, D., & Trouche, L. (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

Grundy, F., & Grundy J. (1996). *Women and computers*. Exeter: Intellect Books.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin, & L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65–88). Paris: Hermès.

Hitt, F., & Kieran, C. (2009). Constructing Knowledge Via a Peer Interaction in a CAS Environment with Tasks Designed from a Task-Technique-Theory Perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 121-152. doi:10.1007/s10758-009-9151-0

Hitt, F. y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación, 73*(2), pp. 151-175.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés C. (2017a). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & U. Gellert (Eds.), *Mathematics and technology. A C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (pp. 57-74). Cham: Springer.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, C. (2017b). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, 94(1), 97-116. doi:10.1007/s10649-016-9717-4

Hoyles, C. (1988). *Girls and computers*. Londres: University of London.

Radford, L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger and V. Cifarelli (eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.

Leontiev, A. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Ministerio de Educación de Quebec. (1996). *Programmes d'études. Mathématique 536 enseignement secondaire*. Gouvernement du Québec.

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 266–285. doi:10.1080/14794802.2013.836379

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document

Sánchez J. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), pp. 303-318.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 196-218. doi:10.1007/BF03217085

Vygotsky, L. (1986/1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Traducción de *Thought and Language* (The Massachusetts Institute of Technology). Barcelona: Paidos.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the phylosophy of langage*. Translated by Matejka L. And Titunik I. R. Cambridge, MA: Harvard University Press.

von Glasersfeld, E. (2004). Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. En P. Jonnaert & D. Masciotra (Eds.), *Constructivisme choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-323). Quebec: Presses de l'Université du Québec.

# 4 ENTENDIMIENTO DE POSTULADOS BÁSICOS DE LA PERSPECTIVA DE MODELOS Y MODELACIÓN POR PROFESORES EN FORMACIÓN

Verónica Vargas-Alejo[1], César Cristóbal-Escalante[2]

**Resumen.**

Se muestran resultados de la evolución en la comprensión del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas desarrollada por profesores de nivel medio, sustentada en la perspectiva de modelos y modelación. Los profesores estudiaron los principios conceptuales de la PMM y replicaron una actividad provocadora de modelos, analizando los caminos para responder las demandas. La aplicaron en aula y discutieron el significado de aprender matemáticas y cómo desarrollar conocimiento matemático desde la PMM. Se observan cambios en sus concepciones iniciales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a partir de las propuestas didácticas elaboradas.
**Palabras Clave :** Profesores, modelación, práctica docente, actividad provocadora de modelos, aprendizaje de las matemáticas.

**Résumé**.

Nous présentons les résultats de l'évolution de la compréhension du processus d'enseignement apprentissage des mathématiques par des enseignants de niveau préuniversitaire, sous la *perspective de modèles et de la modélisation* (PMM). Les enseignants ont étudié les principes conceptuels de la PMM, ont mené une activité qui implique l'émergence de modèles en analysant les chemins possibles. Ils ont appliqué cette activité en classe et ils ont discuté de ce que signifie apprendre les mathématiques et de la manière de soutenir le développement des connaissances en mathématiques à partir de la PMM. Nous avons pu observer des changements dans les conceptions initiales des enseignants sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.
**Mots-clés** : Enseignants, modélisation, pratique pédagogique, activité de modélisation, apprentissage des mathématiques.

**Abstract.**

This chapter describes the results of the trajectory of mathematics middle level teachers' understanding of the teaching and learning process of mathematics that underpins the Model and Modeling Perspective. Teachers made readings on the conceptual principles of the PMM, and carried out a provocative activity of models, considering the ways to respond to the demands of the activity. Teachers implemented it in the classroom and discussed what it means to learn mathematics from this perspective, and how to support the development of mathematical knowledge. Teachers modified and expanded their traditional perception of the teaching of mathematics.
**Keywords**: Teachers, Modeling, teaching practice, model eliciting activity, learning mathematics.

---

[1] Universidad de Guadalajara, México.

[2] Universidad de Quintana Roo, México.

## 1. Introducción

Nos encontramos en una era de transformación de las sociedades y sus prácticas, derivada del impacto tecnológico y la comunicación. Se considera a la educación como pilar para el desarrollo de las naciones y, por lo tanto, se insiste en revisarla, renovarla y reorientarla hacia la formación de los individuos más que hacia una educación enciclopédica. El fin es garantizar que los ciudadanos adquieran conocimientos y habilidades para afrontar de manera creativa las problemáticas vigentes y los retos del futuro. ¿Cuál es el papel de la escuela? ¿Tiene algún papel el docente de matemáticas?

De acuerdo con el National Council of Teachers of Mathematics (2000) el docente de matemáticas puede aportar a la formación de los ciudadanos de esta nueva Era; puede ayudar a los estudiantes a desarrollar conocimiento matemático, que vaya más allá de un conocimiento memorístico y algorítmico, útil para resolver ejercicios que se presentan sólo en el aula. Para lograrlo, los maestros deben tener conocimiento sobre formas alternativas de enseñanza y aprendizaje. Ello implica que reflexionen sobre la naturaleza de las matemáticas, así como sobre lo que significa aprender matemáticas; para qué, por qué y cómo aprenderlas (Lesh y Doerr, 2003). El papel del docente es central en el aprendizaje de las matemáticas, aun cuando éste sea resultado de más de una variable y haya factores que puedan obstaculizar su práctica docente como el tiempo, la infraestructura y organización de las escuelas y los horarios.

Perspectivas teóricas como Modelos y Modelación (Doerr y Lesh, 2003, Doerr, 2016) mencionan que se requiere que el profesor experimente situaciones en el aula que le permitan construir, modificar, extender y refinar sus ideas sobre qué es la matemática, cómo se aprende, cómo se pueden diseñar o seleccionar actividades, cómo se pueden implementar en clase y qué o cómo se evalúa. No es suficiente observar, revisar, o leer sobre las características que un buen docente debe poseer. En este capítulo de libro se describe una experiencia de formación de profesores sustentada en la PMM, la cual implicó una reflexión contínua sobre la práctica docente por un grupo de profesores mexicanos. Se muestra el desarrollo de su entendimiento del proceso de aprendizaje de las matemáticas que sustenta la PMM. Se finaliza con la descripción del avance en comprensión logrado por una profesora del grupo. La línea de investigación es la formación de profesores.

## 2. Aspectos teóricos y conceptuales

Phillips (2016) y Shulman (1987) señalan que, los profesores deben desarrollar conocimiento sobre el contenido de la disciplina y la didáctica del contenido a enseñar entre otros aspectos. Esto implica pensar que los profesores deben reflexionar sobre qué significa aprender matemáticas, cómo se puede aprender, pero sobre todo, deben reflexionar sobre su propia práctica docente. La reflexión en este sentido es un elemento primordial para el desarrollo profesional (Piñeiro y Flores, 2018). De acuerdo con Doerr y Lesh (2003) una caraterística distintiva de la excelencia en la enseñanza se refleja no sólo en sus acciones, sino en la riqueza y diversidad de las formas en las cuales el maestro ve, interpreta y reflexiona sobre su propia práctica, ya que las interpretaciones de una situación son las que influyen en lo que decide hacer el docente, cuándo y por qué. Al igual que los estudiantes, el aprendizaje de los profesores se relaciona y depende de la interpretación que hace de sus propias actividades.

En este apartado se incluye una revisión de la Perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh y Doerr, 2003), en particular, el significado de aprender y cómo se puede aprender matemáticas. Se describen algunas consideraciones que la PMM señala importantes para apoyar la comprensión de estos significados por los profesores y, por lo tanto, la modificación, extensión y refinamiento de su práctica docente.

La perspectiva de Modelos y Modelación [PMM] caracteriza lo que significa aprender como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que se modifican de manera constante mientras el estudiante interacciona con sus compañeros al realizar una actividad o resolver una situación problemática. Los modelos, de acuerdo con Lesh y Doerr (2003), son:

> sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente (p. 10).

La concepción de modelo en esta perspectiva no se refiere sólo a una fórmula matemática sino al significado de ella y de sus elementos en un contexto o situación, esto es, se refiere al conjunto de conceptos, procesos, relaciones entre conceptos y procesos, representaciones de todo tipo que los estudiantes construyan y/o utilizan para entender, para describir, para explicar, para predecir, para comunicar sus concepciones sobre una situación que deben atender, controlar o enfrentar. Los modelos, por lo tanto, pueden ser construidos de manera personal con base en las experiencias previas; es decir, los modelos incluyen aspectos asociados con las creencias del individuo, sus valores, actitudes e identidad; se pueden compartir, manipular, modificar y reutilizar; pero, pueden ser únicos.

Aprender matemáticas es visto como un proceso de desarrollo de modelos matemáticos, esto es, construir un sistema conceptual basado en las características estructurales de la situación; implica realizar actividades como cuantificar sobre características del sistema, dimensionar el espacio, ubicar eventos en marcos de referencia, organizar y analizar datos, realizar cálculos numéricos, identificar relaciones matemáticas, resolver ecuaciones o aplicar procedimientos (Lesh y Doerr, 2003). Matematizar es desarrollar modelos matemáticos. El aprendizaje de contenido matemático ocurre a través del proceso de desarrollo de un modelo adecuado y productivo que pueda ser usado y reutilizado en un rango de contextos (Doerr, 2016, p. 198).

El proceso de desarrollo de modelos, o bien el proceso de modelación es iterativo debido al refinamiento constante de los modelos para que posibiliten describir o predecir cada vez mejor la situación. En este sentido resolver una situación problemática implica la construcción de modelos, los cuales pueden describir a su vez nuevos aspectos de la situación. La descripción de una situación son respuestas a preguntas que se plantea el modelador. Ellas pueden a su vez conducir a nuevas preguntas y a nuevas respuestas. De acuerdo con Teague, Levy y Fowler (2016), se considera que la modelación:

> inicia típicamente en el mundo "contextual", el individuo que modela toma decisiones, respecto a cuáles características de la situación son esenciales y cuáles podrían ser ignoradas o simplificadas inicialmente con el objetivo de construir una representación significativa, o bien manejable. Las representaciones pueden ser tan variadas como la matemática misma y dependen del nivel de matemáticas del estudiante. El modelo matemático resultante puede entonces describir características del contexto original, que guía al modelador para refinar el modelo o predecir aspectos adicionales del contexto (p. 254).

En la PMM el proceso de aprendizaje puede representarse como una espiral creciente en el espacio porque implica desarrollar una serie de ciclos de entendimiento asociados a modelos que se refinan para describir una situación o conjunto de situaciones. Los primeros ciclos de modelación pueden ser aproximaciones burdas, dispersas, poco o nada estructuradas, las cuales evolucionan hacia formas más integradas en la medida en que el estudiante interacciona con la situación, y analiza, discute y comunica sus ideas con sus compañeros y con el profesor. Por lo tanto, el tipo de actividades o situaciones y las prácticas de las comunidades en las cuales se realizan son importantes para lograr el desarrollo de conocimiento. El conocimiento, no se considera inerte, sino parecido a un organismo vivo, a un sistema complejo, dinámico, que está en continua adaptación, se autorregula, y cuya existencia es parcialmente el resultado de construcciones humanas (Lesh y Yoon, 2004).

La producción de conocimiento y modos de razonamiento matemático dependen de los contextos culturales y sociales en los que son desarrollados (Lesh, Lester y Hjalmarson, 2003). El uso de la tecnología posibilita a los estudiantes la construcción y externalización de distintas representaciones de una situación (Lesh y Doerr, 2003); Las herramientas tecnológicas permiten realizar exploraciones, visualizar relaciones, establecer y verificar conjeturas, así como analizar y describir fenómenos de cambio y variación en su entorno.

La PMM propone que los estudiantes resuelvan situaciones cercanas a la vida cotidiana en equipo y en grupo en el salón de clases para propiciar el desarrollo de conocimiento a través de la comunicación de ideas y argumentación. Sugiere que se promueva el surgimiento de una diversidad de modelos, la selección, comunicación y conservación de los mismos. Entre las situaciones que promueve (Lesh, 2010), están las actividades provocadoras de modelos (MEA, Model Eliciting Activities, por sus siglas en inglés). Estas situaciones permiten que los estudiantes realicen procesos de matematización como los mencionados en este apartado. Además,

> permiten que los profesores puedan ver cómo se desarrollan los conceptos y estrategias de los estudiantes, qué concepciones pueden emergen en los procesos de modelación; y cómo las representaciones de los estudiantes son más o menos útiles al describir, explicar, o realizar predicciones sobre la situación problema. Este tipo de actividades de modelación hace mucho más visible al maestro el desarrollo del pensamiento de los estudiantes que las tareas tradicionales de resolución de problemas (Doerr, 2016, p. 197).

Una sola actividad provocadora de modelos rara vez es suficiente para desarrollar un modelo generalizable que se pueda utilizar en un rango de contextos. La PMM sugiere que se diseñen secuencias de actividades, las cuales se relacionen estructuralmente (Ärlebäck, Doerr, and O'Neil 2013). El proceso de solución de estas situaciones debe requerir de algo más que procesar la información al construir un modelo invariante y único, debe fomentar la transformación del modelo, su ampliación o refinamiento.

Las actividades provocadoras de modelos (MEA) deben cumplir ciertas características o principios –principio de construcción de modelos, el principio de la realidad, principio de la autoevaluación, principio de documentación del modelo, principio de la reutilización del modelo, principio de la generalización del modelo–, los cuales pueden revisarse en detalle en Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post (2000) o en Doerr (2016). El proceso que permite diseñar las secuencias de actividades de desarrollo de modelos, puede consultarse en Lesh, Doerr, Cramer, Post, y Zawojewski (2002).

Doerr y Lesh (2003) señalan que para mejorar el desempeño profesional de los profesores no basta indicarle lo que debe hacer y cómo comportarse en el aula, es necesario que, en su formación, los futuros docentes desarrollen formas eficaces para analizar e interpretar sus experiencias sobre las matemáticas y la pedagogía, que reflexionen y analicen las formas en que los estudiantes aprenden e interpretan las matemáticas. La PMM considera que la formación de los profesores debe propiciar que desarrollen sus habilidades para crear y refinar de manera continua sus formas de interpretar y de conducir situaciones de enseñanza, de aprendizaje y de resolución de problemas, de manera que les proporcionen elementos para conocer los procesos que siguen los estudiantes para aprender ideas matemáticas sobre conceptos y procesos matemáticos, para identificar los conocimientos de los estudiantes, y para evaluar la efectividad de actividades en el aula. Esto es enfocar en un primer plano las reflexiones sobre sus experiencias.

Considerando que los fundamentos teóricos que describen el proceso de aprendizaje de los estudiantes son básicos para entender el proceso de aprendizaje de los profesores, la PMM propone que la formación de profesores debe considerar experiencias basadas en el diseño multiestratos (Schorr y Lesh, 2003). En estas experiencias los investigadores e instructores observan a los futuros docentes y construyen, revisan y refinan sus modelos o sistemas conceptuales sobre los procesos de aprendizaje que siguen los profesores y estudiantes, cuando los profesores construyen, revisan y refinan sus modelos sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes al realizar actividades en el aula. De esta forma los investigadores, los profesores y los estudiantes desarrollan conocimientos.

En la PMM son fundamentales las concepciones de sistema, modelos o sistema conceptual para describir el proceso de aprender matemáticas. Se concibe el proceso de aprendizaje como un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales, que parte de sistemas conceptuales poco estructurados a más estructurados y organizados al describir o analizar situaciones, por ello al realizar las actividades provocadoras de modelos los aspectos importantes a enfatizar son los procesos que se siguen para desarrollar esos sistemas conceptuales, no los resultados en sí (Lesh y Doerr, 2003).

Los elementos que se describen en este apartado son utilizados en la discusión y análisis de resultados de esta investigación. Se tomaron las recomendaciones de la PMM para el diseño del proceso de formación docente, la investigación fue de múltiples estratos y en cada estrato se usó la concepción de aprendizaje. En particular, en cada apartado de este capítulo de libro se describe qué elementos de la PMM fueron considerados.

## 3. Metodología

La metodología de la investigación fue de tipo cualitativa y de múltiples estratos (Schorr y Lesh, 2003), porque interesaba propiciar y analizar el cambio en la forma de concebir la práctica docente por los profesores de matemáticas al utilizar en el aula problemas o actividades. Los profesores participantes en esta investigación siempre estuvieron acompañados por un investigador quien construyó, revisó y refinó modelos para describir el comportamiento de los docentes; y estos a su vez tuvieron que construir, revisar y refinar modelos de sus estudiantes para describir situaciones. El investigador dio seguimiento al trabajo de los profesores con sus estudiantes. Se pretendía conocer, de manera específica, cómo se modificaba el conocimiento de los docentes sobre las matemáticas y su aprendizaje, y cómo esto podía influir en su práctica. Las evidencias analizadas fueron reportes de los profesores y notas de bitácora del investigador.

La población participante en este estudio fueron seis profesores mexicanos que se encontraban estudiando un posgrado en educación matemática. Tres tenían experiencia como profesores de clases particulares e individuales y los otros tres como docentes del nivel superior. La única forma de enseñanza de las matemáticas que los seis profesores estaban acostumbrados a utilizar era la tradicional, caracterizada porque en cada clase el profesor explica, pregunta si hay dudas, propone a sus estudiantes realizar ejercicios de manera individual y evalúa los resultados obtenidos; el estudiante escucha, realiza los ejercicios solicitados, preferentemente en silencio porque el trabajo en equipo es considerado pérdida de tiempo o copia de resultados. Los procedimientos tabulares y gráficos no son válidos, sólo los algebraicos; y la tecnología se usa sólo para agilizar procedimientos que los estudiantes deben saber ejecutar previamente en lápiz y papel.

El proceso de transformación docente en el cual participaron los seis profesores tomó cuatro sesiones, en ellas se propició que revisaran la PMM de manera simultánea al análisis de la resolución del problema; estudiaran los distintos modelos que emergieron al resolver el problema y al experimentar con éste en el aula; y, finalmente, reflexionaran sobre los resultados obtenidos. Dos de los seis profesores participaron en un proceso adicional (Fase 3, Figura 1) que implicó, además de lo señalado, el diseño de actividades para la elaboración de una propuesta didáctica que tomó elementos de la PMM.

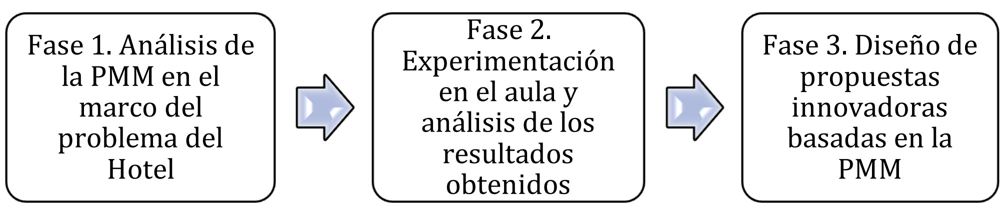



**Figura 1**. Fases del proceso de transformación docente. Las dos primeras se realizaron en cuatro sesiones

Una de las Actividades provocadoras de modelos utilizada fue la del Hotel, adaptada de Carmona (2015) y de solución única (Apéndice A). Los conceptos centrales a esta actividad son conceptos de ingreso, egreso, ganancia, relaciones lineales y cuadráticas, ecuación cuadrática, tasa de cambio y máximo. El problema puede resolverse mediante diferentes modelos: aritméticos tabulares, gráficos y algebraicos (Aliprantis y Carmona, 2003).

Un modelo tabular que puede ser construido (Tabla 1) se basa en relacionar la Ganancia ($G$) con la cantidad de habitaciones ocupadas ($h$). La Tabla 1 muestra el acomodo tabular que usualmente es llevado a cabo como modelo para resolver el problema, tanto en hoja electrónica como en lápiz y papel.

Se utilizan relaciones recursivas en columnas como la $A$ (Tabla 1, Tabla 2) para señalar la cantidad de habitaciones ocupadas y el costo por habitación (Columna B, Tabla 2). Se relacionan de manera horizontal los datos para obtener el ingreso (Columna C, Tabla 2), egreso (Columna D, Tabla 2) y ganancia (Columna E, Tabla 2). Es importante mencionar que, con frecuencia, pueden surgir procedimientos similares que no se organizan de manera tabular.

Un modelo gráfico que se puede construir a partir de los datos de la Tabla 1, es el de la Figura 2. Representa $G(h)$, donde $G$ es la Ganancia y $h$ es la cantidad de habitaciones ocupadas. Aunque podrían también obtenerse las gráficas a partir de los datos de las columnas B, C y D (Tabla 1), correspondientes al costo de la habitación, ingreso y egreso. Con frecuencia la gráfica que se dibuja es continua.

E12 *fx* =C12-D12

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Habitaciones ocupadas** | **Costo de la habitación** | **Ingreso** | **Egreso** | **Ganancia** |
| 2 | 40 | 1200 | 48000 | 8000 | 40000 |
| 3 | 39 | 1250 | 48750 | 7800 | 40950 |
| 4 | 38 | 1300 | 49400 | 7600 | 41800 |
| 5 | 37 | 1350 | 49950 | 7400 | 42550 |
| 6 | 36 | 1400 | 50400 | 7200 | 43200 |
| 7 | 35 | 1450 | 50750 | 7000 | 43750 |
| 8 | 34 | 1500 | 51000 | 6800 | 44200 |
| 9 | 33 | 1550 | 51150 | 6600 | 44550 |
| 10 | 32 | 1600 | 51200 | 6400 | 44800 |
| 11 | 31 | 1650 | 51150 | 6200 | 44950 |
| 12 | 30 | 1700 | 51000 | 6000 | 45000 |
| 13 | 29 | 1750 | 50750 | 5800 | 44950 |
| 38 | 4 | 3000 | 12000 | 800 | 11200 |
| 39 | 3 | 3050 | 9150 | 600 | 8550 |
| 40 | 2 | 3100 | 6200 | 400 | 5800 |
| 41 | 1 | 3150 | 3150 | 200 | 2950 |
| 42 | 0 | 3200 | 0 | 0 | 0 |

**Tabla 1.** Modelo tabular G(h), para resolver el problema del Hotel

B1 | Costo de la habitación

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Habitaciones ocupadas | Costo de la habitación | Ingreso | Egreso | Ganancia |
| 2 | 40 | 1200 | =A2*B2 | =A2*200 | =C2-D2 |
| 3 | =A2-1 | =B2+50 | =A3*B3 | =A3*200 | =C3-D3 |
| 4 | =A3-1 | =B3+50 | =A4*B4 | =A4*200 | =C4-D4 |
| 5 | =A4-1 | =B4+50 | =A5*B5 | =A5*200 | =C5-D5 |
| 6 | =A5-1 | =B5+50 | =A6*B6 | =A6*200 | =C6-D6 |
| 7 | =A6-1 | =B6+50 | =A7*B7 | =A7*200 | =C7-D7 |
| 8 | =A7-1 | =B7+50 | =A8*B8 | =A8*200 | =C8-D8 |
| 9 | =A8-1 | =B8+50 | =A9*B9 | =A9*200 | =C9-D9 |
| 10 | =A9-1 | =B9+50 | =A10*B10 | =A10*200 | =C10-D10 |
| 11 | =A10-1 | =B10+50 | =A11*B11 | =A11*200 | =C11-D11 |
| 12 | =A11-1 | =B11+50 | =A12*B12 | =A12*200 | =C12-D12 |
| 13 | =A12-1 | =B12+50 | =A13*B13 | =A13*200 | =C13-D13 |
| 38 | =A37-1 | =B37+50 | =A38*B38 | =A38*200 | =C38-D38 |
| 39 | =A38-1 | =B38+50 | =A39*B39 | =A39*200 | =C39-D39 |
| 40 | =A39-1 | =B39+50 | =A40*B40 | =A40*200 | =C40-D40 |
| 41 | =A40-1 | =B40+50 | =A41*B41 | =A41*200 | =C41-D41 |
| 42 | =A41-1 | =B41+50 | =A42*B42 | =A42*200 | =C42-D42 |

**Tabla 2.** Modelo tabular G(h). Se muestran las fórmulas utilizadas para generar los datos de la Tabla 1

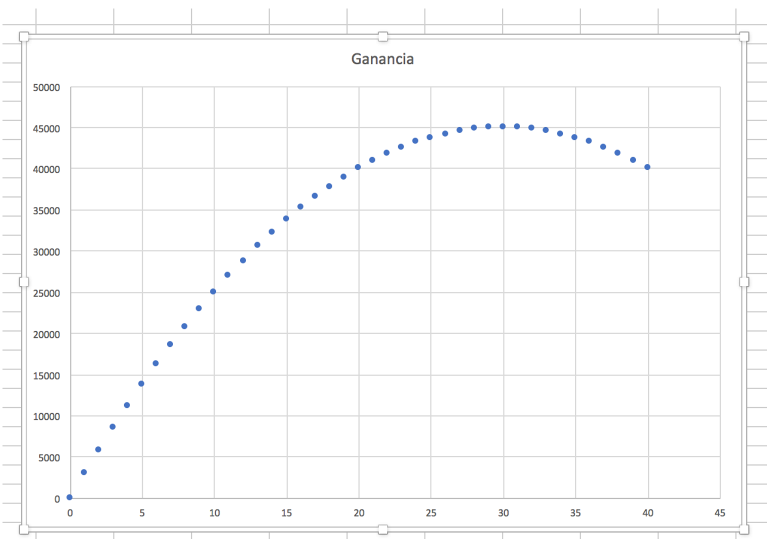



**Figura 2**. Modelo gráfico asociado a los datos de la Tabla 1

Un modelo algebraico que podría construirse es el siguiente.

$$G(n) = (1200 + 50n)(40 - n) - (200)(40 - n)$$

Se puede obtener a partir de la identificación de las siguientes relaciones:

$40 - n$: cantidad de habitaciones ocupadas del hotel ($n = 0, \dots, 40$)

$1200 + 50n$ : precio por habitación

$(1200 + 50n)(40 - n)$: ingreso

$200(40 - n)$: egreso

$Ganancia = Ingreso - egreso$

El modelo puede simplificarse de la siguiente manera:

$G(n) = -50n^2 + 1000n + 40000$

Finalmente, la función $G(n)$ puede derivarse para obtener la ganancia máxima, la cual corresponde a $n = 10$. Donde $n$ es la cantidad de habitaciones desocupadas.

Algunas preguntas interesantes que se pueden explorar son las siguientes: ¿Cómo es la gráfica de $G(n)$? ¿Cómo es la gráfica de $G(n)$ respecto de $G(h)$? ¿Cuál es el dominio de la función?

## 4. Resultados y discusión

### 4.1 Entendimiento del proceso de aprendizaje de las matemáticas que sustenta la PMM por el grupo de profesores

Los tres modelos (tabular, gráfico y algebraico) fueron construidos por el grupo de los seis profesores cuando resolvieron el problema (cada equipo construyó un modelo distinto). En la discusión grupal, los profesores validaron la construcción de los mismos; detectaron que estaban relacionados con la estructura del problema y permitían tener distintos sistemas de referencia para describir, interpretar y predecir la situación. Por otra parte, posibilitaban construir un sistema conceptual (Lesh y Doerr, 2003) alrededor del concepto de función cuadrática, cuyos elementos eran los conceptos de ingreso, egreso, ganancia, variación, tasa de cambio, relaciones lineales y cuadráticas, ecuación y función cuadrática y máximo.

Los profesores identificaron que a partir del modelo aritmético tabular se podría propiciar la construcción del modelo algebraico, en caso de que éste no emergiera, y se podría apoyar el análisis de la relación de las distintas representaciones. Hicieron la observación de que cuando se utiliza la tecnología, el modelo aritmético tabular puede servir para simular una familia de problemas, donde las condiciones iniciales (número de habitaciones ocupadas, costo, mantenimiento) pueden ser distintas (cedas A2, B2 y D2, Tabla 3); y que cualquier modificación de las condiciones iniciales que se hiciera en la tabla construida en la hoja electrónica (Tabla 1) posibilitaba observar cómo la gráfica (que se adecuaba a los cambios en la tabla) seguía siendo siempre una parábola. La función $G(n) = -50n^2 + 1000n + 40000$, además, podía ser la base para la construcción de una función más compleja donde se pudiera agregar otro tipo de ingreso o egreso del hotel. Es decir, detectaron que el modelo era generalizable para otros problemas y podría ser reutilizado en otros contextos (Doerr, 2016).

D2 $fx$ =A2*150

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Habitaciones ocupadas** | **Costo de la habitación** | **Ingreso** | **Egreso** | **Ganancia** |
| 2 | 60 | 1000 | 60000 | 9000 | 51000 |
| 3 | 59 | 1050 | 61950 | 11800 | 50150 |
| 4 | 58 | 1100 | 63800 | 11600 | 52200 |
| 5 | 57 | 1150 | 65550 | 11400 | 54150 |
| 24 | 38 | 2100 | 79800 | 7600 | 72200 |
| 25 | 37 | 2150 | 79550 | 7400 | 72150 |
| 26 | 36 | 2200 | 79200 | 7200 | 72000 |
| 27 | 35 | 2250 | 78750 | 7000 | 71750 |
| 28 | 34 | 2300 | 78200 | 6800 | 71400 |
| 29 | 33 | 2350 | 77550 | 6600 | 70950 |
| 56 | 6 | 3700 | 22200 | 1200 | 21000 |
| 57 | 5 | 3750 | 18750 | 1000 | 17750 |
| 58 | 4 | 3800 | 15200 | 800 | 14400 |
| 59 | 3 | 3850 | 11550 | 600 | 10950 |
| 60 | 2 | 3900 | 7800 | 400 | 7400 |
| 61 | 1 | 3950 | 3950 | 200 | 3750 |
| 62 | 0 | 4000 | 0 | 0 | 0 |

**Tabla 3.** Modelo tabular construido para el problema del Hotel, pero con condiciones iniciales distintas

Los profesores señalaron que actividades como éstas se debían resolver en el aula por los estudiantes ya que permitían relacionar varios conceptos y comprenderlos al utilizar distintas representaciones. Esto manifestaba un cambio en su forma de pensar acerca del proceso tradicional de enseñar matemáticas ¿Cómo influyó esta nueva forma de pensar de los docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que promovieron en su aula?

En el reporte escrito por los seis docentes, respecto a los resultados obtenidos al implementar la actividad en el aula, se observaron transformaciones en su forma de pensar. Por ejemplo, los profesores mencionaron que era importante:

- la construcción de modelos tabulares y gráficos como parte del conocimiento matemático
- la integración de la tecnología como una herramienta para generar distintas representaciones
- la comunicación a través del trabajo en binas o equipo para resolver problemas y las discusiones grupales como medio de aprendizaje.

Sin embargo, aunque la experiencia en el aula les permitió reflexionar sobre su forma de pensar tradicional de aprender matemáticas y cómo apoyar este aprendizaje, siguieron manifestando inquietudes como las siguientes. ¿Cómo lograr que los estudiantes, dado que eran de nivel superior, descubrieran o construyeran la función cuadrática en su forma algebraica? ¿Cómo dedicar menos tiempo a la implementación de la actividad? ¿cómo lograr que se comprendieran los conocimientos matemáticos inmersos sin necesitar tanta ayuda del docente? Fue interesante para el investigador escuchar estas preguntas, dado que los profesores tenían la experiencia de haber dedicado casi dos horas para construir ellos mismos modelos asociados al problema del Hotel, discutir y analizar la riqueza de los mismos, en términos de la estructura del problema y las matemáticas involucradas. Faltaba valorar el proceso de construcción de modelos como el producto del proceso de modelación (Lesh y Doerr, 2003); por lo tanto, se requería profundizar más en el significado de aprender matemáticas y matematizar.

## 4.2 Entendimiento del proceso de aprendizaje de las matemáticas que sustenta la PMM por una profesora

Dos profesores se interesaron en la perspectiva de Modelos y Modelación y su aporte a la docencia. Continuaron profundizando en ella, y lograron diseñar y proponer actividades para estudiantes de nivel superior. Diseñaron actividades influenciados por las características de las actividades provocadoras de modelos y aunque éstas no cumplieron con los seis principios que las caracterizan (Lesh, Hoover, Hole, Kelly, y Post 2000), el diseño, desarrollo, implementación y evaluación posibilitaron a los docentes profundizar en la PMM y sus conceptos centrales.

Las actividades fueron construidas para estudiantes que estaban cursando la asignatura Matemáticas Generales de primer semestre de licenciatura; cuyo programa estaba centrado en la Resolución de problemas y modelación como vía para el aprendizaje de las matemáticas. Los profesores eligieron situaciones cercanas al entorno de los estudiantes y a la carrera elegida. El objetivo era motivar el estudio y relación de conceptos matemáticos entre sí, como progresiones aritméticas, progresiones geométricas, función exponencial, variación y logaritmos. Un ejemplo de una de las actividades diseñadas es la actividad de la Afore. La actividad incluyó un artículo de periódico (hoja 1, Apéndice B), preguntas sobre el contexto del artículo (hoja 2, Apéndice B) y el problema (hoja 3), el cual se puede leer en la Figura 3.

La profesora identificó que era necesario analizar, previo a la implementación en el aula, los distintos modelos que podrían surgir para resolverla. Le interesó conocer el potencial de la actividad en términos de los modelos que pudieran emerger relacionados con el aprendizaje que deseaba propiciar. Esto fue importante para planear el análisis de los mismos, cuando fuera implementada la actividad, y para apoyar la comprensión por los estudiantes de los conceptos matemáticos subyacentes. Así lo manifestó la profesora.

Los modelos que identificó para resolver el problema de la Afore fueron: numérico recursivo (Figura 4), numérico tabular (patrones y generalización), algebraico y gráfico. Estos modelos se pueden revisar en detalle en Tec-Escalante y Vargas-Alejo (2015). Cada uno de los modelos permitía analizar la situación. Mientras que la integración del conjunto de modelos posibilitaba profundizar, además, en el concepto de función exponencial.

La profesora propuso que el análisis del modelo tabular podría servir para ayudar a los estudiantes a identificar patrones, generalizar y construir un modelo algebraico (Tec-Escalante y Vargas-Alejo, 2015). Mientras que el modelo gráfico podría utilizarse para que los estudiantes identificaran que la familia de situaciones (Afores) correspondía a modelos similares en estructura, de tipo exponencial (Figura 5). Es decir, sugirió que los docentes apoyaran a los estudiantes a utilizar los modelos, en particular, geométricos para describir problemas de estructura similar.

***Problema 1. Ayuda a Mateo***

Mateo un chico Chetumaleño de 19 años, acaba de obtener su primera oportunidad de trabajo como cajero.

En la firma del contrato le dieron una pequeña orientación sobre el pago de su sueldo, el cual es de $1400 mensual. Le explicaron brevemente sobre las deducciones que se le deben de realizar conforme a la ley. Entre ellas la cuota obrera para cesantía y vejez con la cual le descuentan el 1.125% de su salario para aportarla a su fondo de ahorro para el retiro. La encargada de recursos humanos le comenta que este fondo genera un interés el cual se acumula al fondo al final de cada mes, esto dependiendo de la AFORE que elija.

Siendo su primer trabajo, Mateo sale de la firma del contrato con la duda de cómo elegir ello. Solicita información vía correo electrónico a la AFORE XXI Banorte donde tú eres parte del equipo de atención a clientes, por lo que deberás redactar una carta donde le ayudes a aclarar sus dudas a Mateo, explicándole detalladamente tus procedimientos:

1. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
2. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
3. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del cuarto mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
4. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
5. ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
6. ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra?

Cuentas con la siguiente información:

La aportación total a una cuenta de Afore está compuesta por la parte del patrón 5.15%, la del empleado 1.125% y del Gobierno Federal 0.225%, calculado del Salario Base del empleado.

El rendimiento que genera tu fondo de ahorro, se acumula al capital final de cada intervalo de tiempo previsto.

**Requisitos para tener derecho a pensión por cesantía (vejez) para la Ley de 1997, Articulo 162 de la Ley del Seguro Social**

Tener 65 Años Cumplidos,
Tener como Mínimo 1,250 Semanas de Cotización.
Cumplir con los requisitos anteriores a la Ley del '73, (son los mismo)

**Información de AFORES**

| ***AFORE*** | **RENDIMIENTO** | **COMISION %** |
|---|---|---|
| *Sura* | 11.45 | 1.21 |
| *Profuturo* | 11.12 | 1.27 |
| *Banamex* | 10.85 | 1.16 |
| *MetLife* | 10.81 | 1.39 |
| *XXI Banorte* | 10.72 | 1.1 |
| *Principal* | 10.55 | 1.36 |
| *Azteca* | 8.9 | 1.45 |
| *Coppel* | 7.96 | 1.49 |
| *Afirme Bajío* | 7.61 | 1.4 |
| *Inbursa* | 5.79 | 1.17 |
| *FUENTE: CONSAR.* | | |

**Figura 3.** Problema de la Afore (Tec-Escalante y Vargas-Alejo, 2015)

**Forma numérica recursiva**

Aportación inicial

91

Monto al final del primer periodo:

91+91+0.0962 (91)= 182+8.7542= 190.75

Monto al final del segundo periodo:

91+190.75+0.0962 (190.75)=300.10

Monto al final del tercer periodo

91+300.10+0.0962 (300.10)=419.96

¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?

⋮

Monto del fondo al final del doceavo periodo

91+1902.08+ 0.0962 (1902.08)= 2176.06

**Representación tabular de los estudiantes**

| Periodos transcurridos | Rendimiento | Monto del sueldo a fondo | Monto del periodo anterior | Intereses ganados de monto anterior | Monto final del periodo |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0962 | 91 | 0.00 | 0.00 | 91.00 |
| 1 | 0.0962 | 91 | 91.00 | 8.75 | 190.75 |
| 2 | 0.0962 | 91 | 190.75 | 18.35 | 300.10 |
| 3 | 0.0962 | 91 | 300.10 | 28.87 | 419.97 |
| 4 | 0.0962 | 91 | 419.97 | 40.40 | 551.38 |
| 5 | 0.0962 | 91 | 551.38 | 53.04 | 695.42 |
| 6 | 0.0962 | 91 | 695.42 | 66.90 | 853.32 |
| 7 | 0.0962 | 91 | 853.32 | 82.09 | 1026.41 |
| 8 | 0.0962 | 91 | 1026.41 | 98.74 | 1216.15 |
| 9 | 0.0962 | 91 | 1216.15 | 116.99 | 1424.14 |
| 10 | 0.0962 | 91 | 1424.14 | 137.00 | 1652.14 |
| 11 | 0.0962 | 91 | 1652.14 | 158.94 | 1902.08 |
| 12 | 0.0962 | 91 | 1902.08 | 182.98 | 2176.06 |
| 13 | 0.0962 | 91 | 2176.06 | 209.34 | 2476.40 |

**Figura 4.** Modelos Numérico recursivo y tabular para resolver el problema de la Afore (Tec-Escalante, 2015)

En su planeación retomó varios elementos de la PMM, no sólo el tipo de actividades, sino también los ambientes colaborativos de enseñanza y aprendizaje donde la comunicación de modelos fuera esencial para la construcción, modificación, extensión y refinamiento de conocimiento y habilidades. Un aspecto sobresaliente fue cómo caracterizó el uso de la tecnología, pues mencionó que “la tecnología permite que los estudiantes puedan trabajar casos particulares, los cuales pueden ser la base para apoyar la observación de patrones y el desarrollo de procesos de generalización” (Tec-Escalante y Vargas-Alejo, 2015, p. 118). Es decir, más allá de considerar que la tecnología servía para ejecutar operaciones de manera rápida y construir diversas representaciones, servía para identificar patrones y generalizar procesos. Identificó que los modelos podrían reutilizarse en otros contextos.

La profesora reconoció que aprender matemáticas se relacionaba con el aprendizaje de conocimiento, habilidades y hábitos en los estudiantes, quienes debían aprender a transferir su conocimiento a situaciones más allá de las escolares y a evaluar su propio conocimiento. Consideró que las actividades eran esenciales para la construcción, modificación, ampliación y refinamiento de significados, siempre y cuando el alumno pudiera utilizar sus propios conocimientos, procedimientos y hábitos para realizarlas. Es decir, identificó que el proceso de construcción de modelos era más importante que los resultados. Más detalles sobre el análisis del problema y las ideas de la profesora sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje pueden revisarse en Tec-Escalante y Vargas-Alejo (2015).

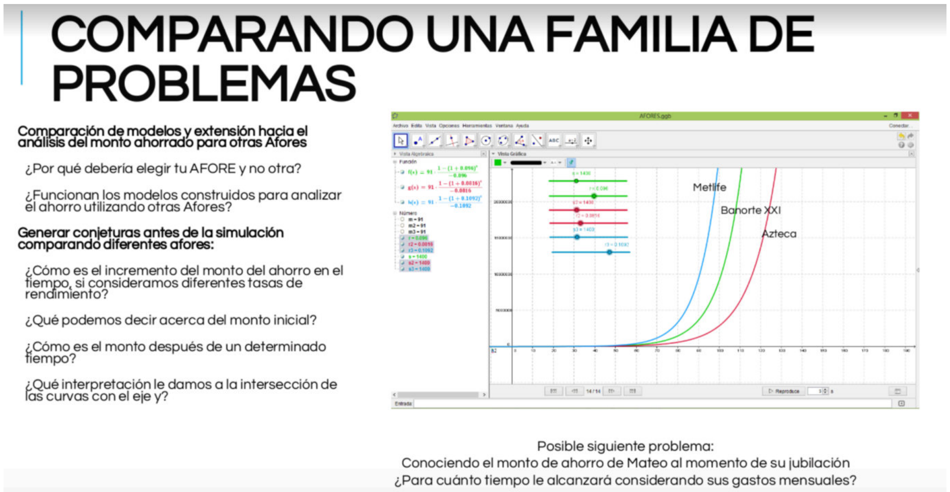



**Figura 5.** Modelos gráficos para comparar las distintas Afores (Tec-Escalante, 2015)

## 5. Conclusiones

Con respecto al objetivo inicialmente planteado en este capítulo de libro, la experiencia de resolver el problema del Hotel, previo a la preparación de la implementación de la actividad en el aula, fue de ayuda para los profesores para entender qué significa aprender matemáticas y cómo apoyar el desarrollo de conocimiento matemático en los estudiantes desde la PMM y con el uso de tecnología. Esto porque observaron el proceso como estudiantes, analizaron sus propios modelos, el papel del docente y la tecnología en el aula.

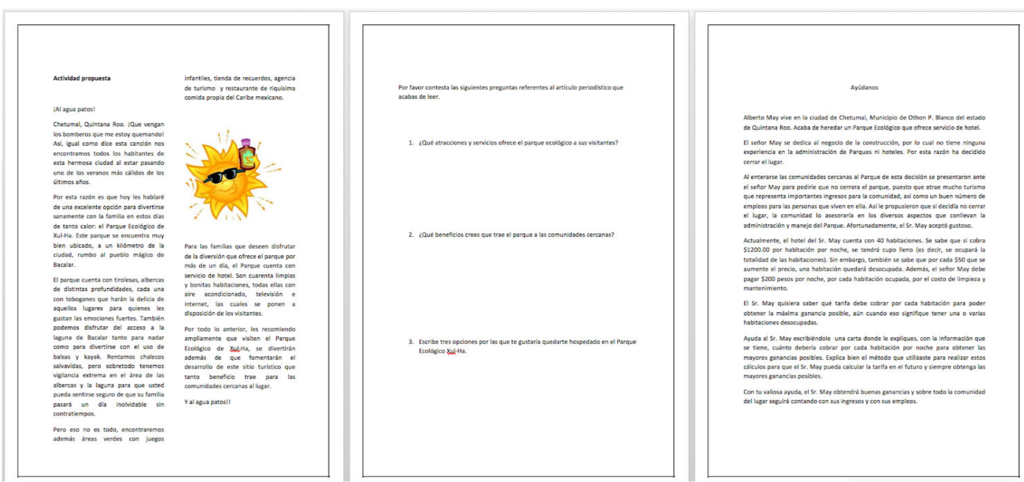
Los seis profesores manifestaron que en la medida que leyeron, implementaron y discutieron los resultados obtenidos habían entendido mejor las aportaciones de la perspectiva de modelos y modelación, valoraron la comunicación y la discusión grupal para apoyar la modificación, extensión y refinamiento de ideas y, por lo tanto, de conocimiento matemático.

Derivado de los resultados descritos en párrafos anteriores, se emite la siguiente recomendación: los procesos de formación docente deben implicar un diseño multiestratos (Schorr y Lesh, 2003). Identificamos, como lo mencionan Doerr y Lesh (2003), que cuando los profesores se acompañan por investigadores y tienen la oportunidad de discutir en forma colectiva sus experiencias pueden apropiarse de conocimiento, habilidades y, por lo tanto, formas distintas de trabajar en el aula apoyadas o no de herramientas tecnológicas. Los profesores que diseñaron su propia actividad provocadora de modelos refinaron de mejor manera su conocimiento, que el resto de los profesores.

Coincidimos con la PMM (Doerr y Lesh, 2003, p. 125) en lo siguiente: "de manera similar a los niños [estudiantes], un aspecto central en el conocimiento de los maestros es que la enseñanza de las matemáticas es mucho más que ver e interpretar tareas de enseñanza, tiene que ver con interpretar lo que ellos mismos hacen". No es suficiente leer y reflexionar sobre lo que significa aprender matemáticas y cómo apoyar el desarrollo de conocimiento matemático para transformar la práctica docente. Los docentes, deben organizarse en redes académicas y ser acompañados por grupos de investigadores durante los procesos de experimentación de situaciones o problemas que les implique pensar e integrar experiencias pasadas, anticipar acciones y consecuencias y, por lo tanto, alcanzar subsecuentes interpretaciones. Deben elaborar o seleccionar alternativas de enseñanza según el contexto y el nivel educativo de sus estudiantes para contribuir al aprendizaje.

## **Apéndices** (ver Actividades electrónicas)

Apéndice A. El problema del Hotel (Adaptado de Carmona, 2015)



**Actividad propuesta**

¡Al agua patos!

Chetumal, Quintana Roo. ¡Que vengan los bomberos que me estoy quemando! Así, igual como dice esta canción nos encontramos todos los habitantes de esta hermosa ciudad al estar pasando uno de los veranos más cálidos de los últimos años.

Por esta razón es que hoy les hablaré de una excelente opción para divertirse sanamente con la familia en estos días de tanto calor: el Parque Ecológico de Xul-Ha. Este parque se encuentra muy bien ubicado, a un kilómetro de la ciudad, rumbo al pueblo mágico de Bacalar.

El parque cuenta con tirolesas, albercas de distintas profundidades, cada una con toboganes que harán la delicia de aquellos lugares para quienes les gustan las emociones fuertes. También podemos disfrutar del acceso a la laguna de Bacalar tanto para nadar como para divertirse con el uso de balsas y kayak. Rentamos chalecos salvavidas, pero sobretodo tenemos vigilancia extrema en el área de las albercas y la laguna para que usted pueda sentirse seguro de que su familia pasará un día inolvidable sin contratiempos.

Pero eso no es todo, encontraremos además áreas verdes con juegos infantiles, tienda de recuerdos, agencia de turismo y restaurante de riquísima comida propia del Caribe mexicano.

Para las familias que deseen disfrutar de la diversión que ofrece el parque por más de un día, el Parque cuenta con servicio de hotel. Son cuarenta limpias y bonitas habitaciones, todas ellas con aire acondicionado, televisión e internet, las cuales se ponen a disposición de los visitantes.

Por todo lo anterior, les recomiendo ampliamente que visiten el Parque Ecológico de Xul-Ha, se divertirán además de que fomentarán el desarrollo de este sitio turístico que tanto beneficio trae para las comunidades cercanas al lugar.

Y al agua patos!!

Por favor contesta las siguientes preguntas referentes al artículo periodístico que acabas de leer.

1. ¿Qué atracciones y servicios ofrece el parque ecológico a sus visitantes?

2. ¿Qué beneficios crees que trae el parque a las comunidades cercanas?

3. Escribe tres opciones por las que te gustaría quedarte hospedado en el Parque Ecológico Xul-Ha.

Ayúdanos

Alberto May vive en la ciudad de Chetumal, Municipio de Othon P. Blanco del estado de Quintana Roo. Acaba de heredar un Parque Ecológico que ofrece servicio de hotel.

El señor May se dedica al negocio de la construcción, por lo cual no tiene ninguna experiencia en la administración de Parques ni hoteles. Por esta razón ha decidido cerrar el lugar.

Al enterarse las comunidades cercanas al Parque de esta decisión se presentaron ante el señor May para pedirle que no cerrara el parque, puesto que atrae mucho turismo que representa importantes ingresos para la comunidad, así como un buen número de empleos para las personas que viven en ella. Así le propusieron que si decidía no cerrar el lugar, la comunidad lo asesoraría en los diversos aspectos que conllevan la administración y manejo del Parque. Afortunadamente, el Sr. May aceptó gustoso.

Actualmente, el hotel del Sr. May cuenta con 40 habitaciones. Se sabe que si cobra $1200.00 por habitación por noche, se tendrá cupo lleno (es decir, se ocupará la totalidad de las habitaciones). Sin embargo, también se sabe que por cada $50 que se aumente el precio, una habitación quedará desocupada. Además, el señor May debe pagar $200 pesos por noche, por cada habitación ocupada, por el costo de limpieza y mantenimiento.

El Sr. May quisiera saber qué tarifa debe cobrar por cada habitación para poder obtener la máxima ganancia posible, aún cuando eso signifique tener una o varias habitaciones desocupadas.

Ayuda al Sr. May escribiéndole una carta donde le expliques, con la información que se tiene, cuánto debería cobrar por cada habitación por noche para obtener las mayores ganancias posibles. Explica bien el método que utilizaste para realizar estos cálculos para que el Sr. May pueda calcular la tarifa en el futuro y siempre obtenga las mayores ganancias posibles.

Con tu valiosa ayuda, el Sr. May obtendrá buenas ganancias y sobre todo la comunidad del lugar seguirá contando con sus ingresos y con sus empleos.

# Apéndice B: El problema de la Afore (Tec-Escalante y Vargas-Alejo, 2015; Torres, 2013)

**EL ECONOMISTA**

Lunes 8 de Septiembre de 2014 | 00:04

## En México no se ahorra suficiente para la jubilación

Según HSBC, 43% de las personas jubiladas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para este momento.

YURIDIA TORRES / EL ECONOMISTA

SEP 19, 2013 | 17:23

Foto: Shutterstock

Una casa en la playa, otra en las montañas, viajes continuos, tiempo con los hijos y nietos; así sueñan que será su vejez muchas personas y anhelan el día en que llegue el monto de su retiro laboral; recibir esa pensión mensual, que seguramente alcanzará para pagar todos los caprichos que deseen.

La realidad es que no será así. No siempre es así. De acuerdo con el informe de HSBC "El futuro del retiro, la vida después del trabajo", 43% de las personas retiradas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para el momento de su retiro laboral. La razón es que los jubilados tienen menos dinero del que esperaban recibir y entonces sus sueños, viajes, regalos, casas, siguen siendo eso, sueños. El hecho es que los mexicanos ahorran poco para su retiro, afirmó Eduardo Varón, director de Distribución de Banca Premier de HSBC México.

*"Es importante utilizar todos los mecanismos que se tienen disponibles para ahorrar; el estudio dice que las personas apuestan mucho a las pensiones de gobierno, a las afores, a los esquemas privados de retiro, pero una de las recomendaciones es que las personas diversifiquen las fuentes de ahorro para su pensión", dijo.*

**PROPUESTAS**

Entre las medidas propuestas para fomentar una seguridad social universal en el país, están el impulso al ahorro voluntario de las personas, con una cuenta en alguna afore.

Recientemente, el Presidente de México propuso que por cada aportación voluntaria de las personas registradas en el Sistema de Ahorro para el Retiro y afiliadas al IMSS, el gobierno federal pondrá una fracción del monto que la persona ahorre.

### El retiro de sus sueños

Recomendaciones que se deben tomar en cuenta antes de pensionarse:

**NO SE APRESURE.** Existe la percepción entre las personas retiradas de haberse apresurado en dejar un empleo pagado. Muchas personas retiradas que ven el trabajo como un medio importante para mantener el cuerpo y la mente activos.

**DIVERSIFIQUE.** En la actualidad, los jubilados tienen tres diferentes fuentes de ingreso en el retiro, al decidir sabiamente no depositar en un solo lugar la generación de sus ingresos. Separar sus fuentes de ingreso en el retiro y los riesgos asociados significa que no se tienen todos los huevos en una misma canasta.

**CONSIDERE A SU FAMILIA.** Mientras muchas personas aspiran a viajar mucho durante su retiro, cerca de la mitad de los trabajadores actuales esperan tener responsabilidades financieras con otros, incluso estando retirados. Esto incluye responsabilidades financieras continuas con sus hijos adultos, así como respaldar a padres mayores en un estado delicado.

## Preguntas de comprensión

¿Qué aspiraciones tienes para el momento de tu jubilación?

¿Por qué las personas jubiladas en México no logran alcanzar las metas y aspiraciones que se fijaron para este momento?

¿Qué recomendaciones son importantes seguir antes de jubilarse?

## Referencias


Aliprantis, C. D. & Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: A models and modeling perspective. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 255-264). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., & O'Neil, A. (2013). A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336.

Carmona, G. (2015). El problema del Hotel (Actividad provocadora de modelos). Recuperado de: https://plus.google.com/u/0/communities/109854270757370860580.

Doerr, H. M. & Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds). (2003). *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Doerr, H. M. (2016). Designing Sequences of Model Development Tasks. En C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra. En E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics Classrooms That Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Yoon, C. (2004). Evolving Communities of Mind –In Which Development Involves Several Interacting and Simultaneously Developing Strands. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 205-226.

Lesh, R., Lester, F. K. & Hjalmarson, M. (2003). A models and modeling perspective on metacognitive functioning everaday situations where problema solvers develop mathematical constructs. En R. Lesh & H.M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A models and modelling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 383–404). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., & Zawojewski, J. (2002). Model Development Sequences. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (págs. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought revealing activities for students and teacher. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh

(Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-650). Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Phillips, E. D. (2016). Introduction: supporting Teachers' learning about mathematical modeling. En C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 249-252). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Piñeiro J. L. & Flores, P. (2018). Reflexión sobre un problema profesional en el contexto de formación de profesores. A reflection on a professional problem in the context of teacher education. *Educación Matemática, 30*(1) 237-251.

Schorr, R. Y. & Lesh, R. (2003) A modeling approach for providen a teacher development. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (págs. 141-157). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Simon, M & Tzur R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptualLearning: An elaboration of Hipotetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning 6*(2), pp. 91-104. Recuperado de https://docs.google.com/document/d/1_01aE80Y7DwMsVQqho1tcUERdO-YP78v47FcU2wuvNI/edit

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Teague, D., Levy, R., & Fowler, K. (2016). The Gaimme report: mathematical modeling in the K-16 curriculum. En C. R. Hirsch & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 253-262). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Tec-Escalante, D. & Vargas-Alejo, V. (2015). Modelación de una situación que implica el uso de la función exponencial. En P. R. Scott & A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 16: Modelación* (pp. 117-128). República Dominicana.

Tec-Escalante, D (2015). Análisis de una situación que implica el uso de la función exponencial. Recuperado de https://plus.google.com/u/0/communities/100320204402382732939

Torres, Y. (2013). En México no se ahorra lo suficiente para la jubilación. *El Economista*. Disponible en http://eleconomista.com.mx/finanzas-personales/2013/09/18/usted-apuesta-retiro-laboral-comodo. 18 de septiembre de 2014.

# 5 LA INCLUSIÓN DE GEOGEBRA EN EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS

José Luis Soto Munguía[1]

**Resumen**
En el presente trabajo se describe una metodología para el diseño de secuencias didácticas en matemáticas y su aplicación se ilustra con tres ejemplos. Las secuencias responden a la estructura didáctica propuesta por Díaz-Barriga (2013) que contempla tres fases: la apertura, el desarrollo y el cierre. En todos los casos inician con el planteamiento de una situación problema con las características planteadas por Hitt y Cortés (2009). El software GeoGebra se usa para simular la situación en la apertura, para modelarla en el desarrollo y para apoyar la institucionalización en el cierre.
**Palabras clave:** Métodos de diseño, Secuencia didáctica, GeoGebra,

**Résumé**
Dans le présent travail, nous décrivons une méthodologie pour la conception de séquences didactiques en mathématiques. L'application de cette méthodologie sera illustrée par trois exemples. Les séquences suivent la structure didactique proposée par Díaz-Barriga (2013) qui comprend trois phases: ouverture, développement et fermeture. Dans tous les cas, on débute par une situation problème présentant les caractéristiques proposées par Hitt et Cortés (2009). Le logiciel GeoGebra est utilisé pour simuler la situation dans l'ouverture, pour la modéliser pendant le développement et pour soutenir l'institutionnalisation dans la clôture.
**Mots-clés**: Méthodes de conception, séquence didactique, GeoGebra.

**Abstract**
In the present work a methodology for the design of didactic sequences in mathematics is described and its application is illustrated with three examples. The sequences respond to the didactic structure proposed by Díaz-Barriga (2013) that includes three phases: openness, development and closure. In all cases they start with the posing of a problemic situation with the characteristics proposed by Hitt and Cortés (2009). The GeoGebra software is used to simulate the situation in the opening, to model it in the development and to support the institutionalization in the closing.
**Keywords**: Design methods, didactic sequence, GeoGebra.

[1] Universidad de Sonora, México.

## 1. Introducción

Hay dos temas tan antiguos en educación matemática, que quizás se remiten al origen mismo de la escuela como institución social:

- El primero de ellos tiene que ver con el papel que jugarán los estudiantes y el profesor en un curso de matemáticas.
- El otro se refiere a las características de las matemáticas que deben llegar al aula.

Sin embargo, la conjunción de estos temas en un programa de investigación que pueda alimentar el quehacer práctico de los profesores, es un tópico nuevo, que ha venido tomando una importancia creciente.

Sobre el primer tema, (Puig, 1955) decía a mediados del siglo pasado que:

> El niño no es un depósito a llenar de conocimientos, sino un potencial deseoso de convertirse en actividad. Encaucemos esta actividad en un sentido educativo. Los procesos de transmisión de conocimientos no deben divorciarse de los procesos de adquisición o descubrimiento. Solo hay auténtica asimilación de un conocimiento cuando hay una acción que motive su génesis" (p. 132)

Podemos estar de acuerdo con Puig y con las nuevas tendencias curriculares, en lo que se refiere a privilegiar la actividad de los estudiantes durante el proceso de enseñanza, pero esto no resuelve el problema sobre las formas específicas que deberá tomar esta actividad en el salón de clase.

Sobre el segundo punto, hay algunas corrientes emergentes que están impulsando la necesidad de que la matemática se vincule a la realidad en el aula misma y abandone sus propósitos exclusivamente propedéuticos. Ya Whitehead (1968), en un ensayo crítico publicado a principios del siglo XX, proponía:

> Ahora el efecto que queremos producir sobre nuestros estudiantes, es generar una capacidad para aplicar ideas al universo concreto. De esta manera, los ejemplos que escogemos forman la columna vertebral de nuestra enseñanza. El estudio del álgebra debería iniciar con un estudio sistemático de las aplicaciones prácticas de las ideas matemáticas de cantidad en algunos temas importantes (pp. 513-514).

El acuerdo con que la matemática escolar debe estar relacionada con el mundo real es un buen avance en la dirección que nos interesa, pero a partir de ello se abren una gama de interrogantes más específicas que tendremos que responder: ¿cómo seleccionar situaciones o problemas interesantes para los estudiantes?, ¿con qué propósitos usaríamos una situación problema en el salón de clase?, ¿se trata de resolver problemas en el aula, o de modelar situaciones?, por plantear solamente tres.

Al respecto de la última pregunta, Henry Pollack (2012) considera que deben modelarse situaciones:

> Entonces, lo que realmente importa en educación matemática es aprender y practicar el proceso de modelación matemática. El campo de aplicación particular, ya sea relacionado con la vida cotidiana o con ser un buen ciudadano o con la comprensión de algún fragmento de la ciencia, es menos importante que la experiencia con este proceso de pensamiento (p. ix).

El diseño de secuencias didácticas, entendidas como una serie ordenada de actividades orientadas a los estudiantes, pero conducidas por el profesor, puede conjuntar estos dos temas, pero tendrá que incluir por lo menos otros dos:

- La necesidad de contar con una metodología para el diseño, lo suficientemente precisa para que pueda orientar al profesor durante la elaboración de las secuencias y lo suficientemente flexible para que el profesor pueda aplicarla al contexto de su escuela y del nivel de escolaridad en el que enseña.
- La inclusión de materiales de apoyo para el desarrollo de la secuencia, ya sean materiales manipulables o tecnología digital. La metodología mencionada en el punto anterior deberá contemplar algunas orientaciones para identificar el papel que deben jugar estos materiales a lo largo del proceso de diseño.

Desde la última reforma educativa aprobada en México en el año 2011, se ha insistido en la importancia de que los profesores diseñen actividades didácticas. Lo cierto es que, por razones muy diversas, los avances en esta dirección son mínimos en educación básica (4-15 años) y prácticamente nulos en el bachillerato (16-18 años). En nuestro país tenemos ahora un sistema educativo formalmente concebido “bajo el enfoque por competencias”, pero en los hechos las prácticas educativas siguen siendo esencialmente las mismas que antes de la reforma; es decir, los profesores siguen planeando sus clases privilegiando los tópicos matemáticos a enseñar y lo que será expuesto a los estudiantes, en otras palabras su quehacer docente se planifica como si la reforma no existiera. Nuestro grupo de trabajo del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, se ha dedicado, durante los últimos años, a diseñar secuencias didácticas para los cursos de matemáticas de diferentes niveles educativos. Expondremos aquí los elementos metodológicos que nos han servido de base y las experiencias que nos han dejado estos esfuerzos. La estructura didáctica de las secuencias, ha sido tomada de Díaz-Barriga (2013), quien las describe como:

> De esta manera la secuencia de aprendizaje responde fundamentalmente a una serie de principios que se derivan de una estructura didáctica (actividades de apertura, desarrollo y cierre) y a una visión que emana de la nueva didáctica: generar procesos centrados en el aprendizaje, trabajar por situaciones reales... (p. 18).

En todos los casos el diseño tiene como punto de partida, lo que Hitt (2009) llama una *situación problema*, y que caracteriza como:

> La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado (p. 6).

La dificultad principal que enfrentamos para iniciar el diseño de una secuencia, es la selección de esta *situación problema*, esto es así porque necesitamos situaciones como las descritas por Hitt, pero que además respondan a los contenidos curriculares de la escuela. Para seleccionar estas situaciones, hemos recurrido a la literatura especializada, como la compilación publicada por Teacher College University of Columbia (2012), aunque también hemos extraído situaciones de diversas publicaciones no especializadas, como revistas, sitios web, tesis de licenciatura y además hemos propuesto situaciones a partir de problemas de la vida real planteados por estudiantes y profesores de nuestra institución.

Describimos a continuación cada una de las tres etapas que integran una secuencia, los propósitos en cada una de estas etapas y las ilustramos con tres secuencias diseñadas a las que llamaremos simplemente Ejemplos A, B y C. La extensión de cada secuencia está relacionada con la naturaleza de la situación planteada al principio, de tal modo que algunas secuencias requieren de una mayor cantidad de actividades didácticas debido a la problemática más general que plantean.

## 2. La etapa de apertura

En este primer momento lo más importante es plantear una situación problema, en la que se explica la importancia que tiene abordarla y el contexto de la situación. Las actividades aquí están centradas en la comprensión de la situación. Cuando lo hemos considerado necesario hemos usado GeoGebra para construir una simulación de la situación, con el propósito de apoyar la comprensión observando y manipulando la construcción. En estas simulaciones la exploración tiene un carácter cualitativo porque no se pretende que los estudiantes puedan establecer relaciones entre las cantidades que aparecen en el modelo, sino solamente que la situación se entienda mejor.

Ejemplificamos con la secuencia siguiente, titulada "Cuidado con el autobús", que llamaremos Ejemplo A y cuyo planteamiento ha sido tomado y adaptado de una publicación de Mathematics Assessment Resource Service (2015) con los permisos correspondientes y consiste esencialmente en lo siguiente: Cuando un camión o autobús da la vuelta en una esquina, el conductor debe maniobrar el volante de tal manera que logre desplazarlo hacia afuera, para que las ruedas traseras no invadan el carril por el cual circulan las bicicletas. Se pretende aquí cuantificar qué tanto invade el autobús la ciclovía.

Se proporciona en este momento, el archivo que se ilustra en la Figura 1, en donde el estudiante puede rotar el autobús arrastrando simplemente uno de los puntos de la construcción (punto Q), hacer variar el deslizador $w$ para modificar la distancia entre los ejes del mismo y hacer variar el deslizador $r$ para cambiar el radio del borde exterior de la ciclovía; como puede verse el estudio de la situación es hasta ahora casi exclusivamente cualitativo. Se espera que esta interacción con la construcción permita entenderla mejor y clarificar los problemas que se plantearán a partir de ella. Consecuentemente, las actividades propuestas a los estudiantes se refieren al comportamiento de la distancia invadida por el autobús al rotar, con lo que sucede con esta distancia si se aumenta la distancia $w$ entre los ejes y por tanto el tamaño del autobús y lo que sucede con esta misma distancia cuando el radio $r$ de la esquina aumenta o disminuye. Se espera que las respuestas de los estudiantes tengan un carácter conjetural que puedan ser contrastadas con las conclusiones a las que lleguen en la siguiente etapa.

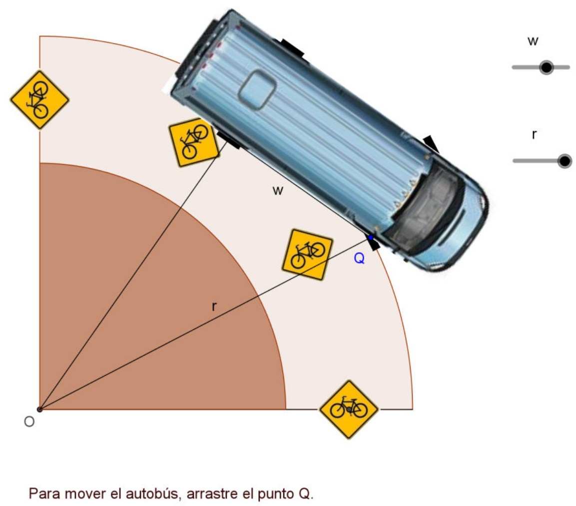



**Figura 1.** Construcción del autobús

En un segundo caso al que nos referiremos como Ejemplo B (Del Castillo et al, 2014, pp. 78-86), la situación de inicio ha sido tomada y adaptada de (Carmona, 2009) y plantea la necesidad de analizar la relación que existe entre las formas geométricas que tienen las secciones transversales de los canales con el volumen de agua que pueden transportar. En esta fase de apertura se muestran algunas de las formas geométricas más comunes de las secciones (Figura 2), aunque a lo largo de toda la secuencia solo se aborda el caso particular en el que el área de la sección es de 72 m$^2$.

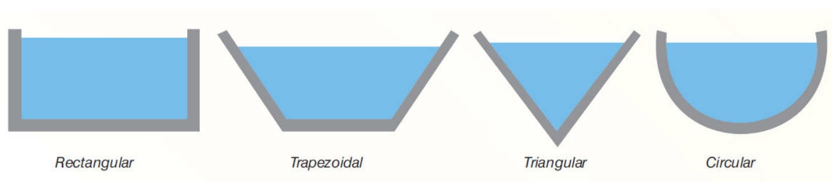



**Figura 2.** Formas geométricas más comunes

Con el propósito de clarificar lo que significa un corte transversal, se proporciona al estudiante una versión tridimensional del canal rectangular construida en GeoGebra, cuyas dimensiones pueden hacerse variar sin que se altere la capacidad de transporte del canal (ver Figura 3).

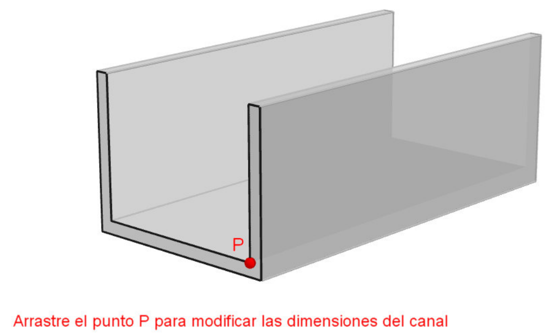



**Figura 3.** Versión tridimensional del canal rectangular

En virtud de que el tema puede resultar poco conocido para los estudiantes, se definen algunos conceptos relacionados con la construcción de canales hidráulicos, tal es el caso del *área húmeda*, *perímetro húmedo* y *radio hidráulico*, porque se requerirán en el desarrollo de la secuencia. Luego se pide expresar estos conceptos algebraicamente para cada uno de los canales distintos con el propósito de constatar que la situación se ha comprendido, pero también para verificar que se cuenta con algunas herramientas matemáticas necesarias, la Figura 4 ilustra uno de estos casos:

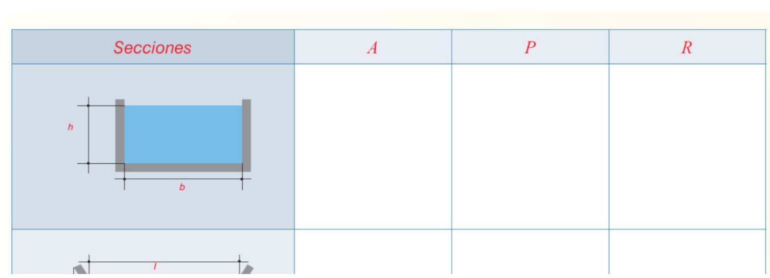



**Figura 4.** En la tabla, A representa el área húmeda (área del rectángulo azul), P representa el perímetro húmedo (perímetro del rectángulo azul después de restarle la base $b$ del rectángulo) y R representa el radio hidráulico, definido como $R = A/P$

En el Ejemplo C (Del Castillo et al, 2014, pp. 116-121) , titulado "La construcción de un arco de centro inaccesible", se plantea la construcción de un arco como el de la Figura 5, cuyo centro es inaccesible y por lo tanto no puede trazarse usando una cuerda atada a un punto fijo.

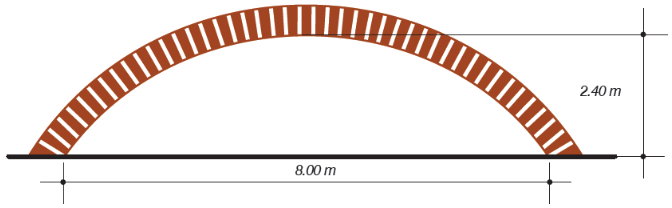



**Figura 5.** Construcción de un arco

Se proporciona al estudiante la construcción en GeoGebra mostrada en la Figura 6, en la que puede arrastrar el punto P para trazar el arco y arrastrar Q para tenderlo, pero el punto O siempre se ubicará por abajo del nivel del suelo y necesitaría hacer una excavación para localizarlo.

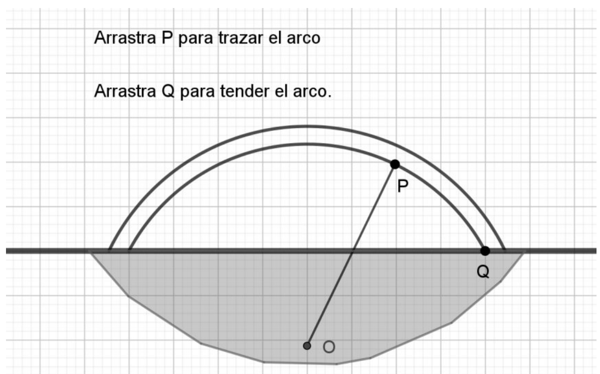



**Figura 6.** Construcción en la que se arrastra el punto P para trazar el arco

## 3. La etapa de desarrollo

Díaz-Barriga (2013, p. 22) afirma que "Las actividades de desarrollo tienen la finalidad de que el estudiante interaccione con una nueva información.", pero nosotros en matemáticas hemos interpretado que el nuevo conocimiento se generará a partir de los procesos de resolución de la situación planteada al principio. Se intentará entonces que las actividades se orienten hacia dicha resolución. La secuencia en este momento se torna compleja porque la resolución exige más allá de las herramientas matemáticas disponibles, de habilidades y heurísticas que generen ideas sobre las estrategias de resolución que tendrán que emplearse. El papel que juega aquí la tecnología cambia radicalmente, se trata ahora de explorar archivos construidos que muestren las relaciones internas de la situación planteada, lo que nosotros hemos llamado su *modelo dinámico*, cuya exploración y observación pueda sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo. Cuando la situación lo ha requerido, se ha incluido el uso de materiales manipulables para utilizarse en exploraciones previas al uso de tecnología, tal como lo recomienda Hitt y González-Martín (2015, p. 202).

En el desarrollo del Ejemplo A, se propone una construcción que puede ser manipulada por el estudiante en la que las cantidades y sus relaciones están a la vista, como puede verse en la Figura 7.

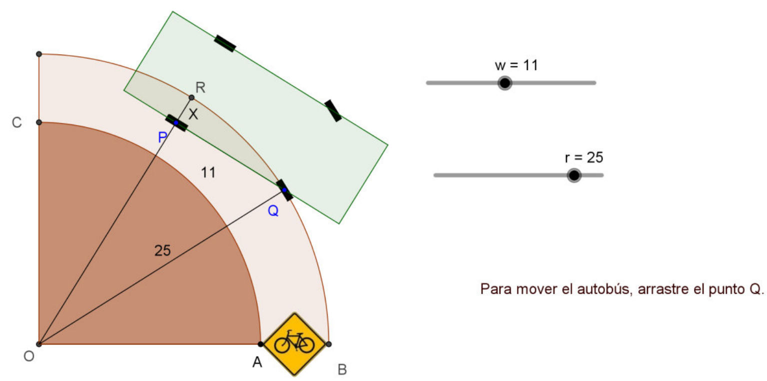



**Figura 7.** Construcción de autobús

En un primer acercamiento la manipulación se reduce a mover el punto Q, dejando fijas las variables *r* y *s*, con valores como los mostrados en la Figura 7. Durante la rotación está claro que todas las variables de interés permanecen fijas y solamente está cambiando el ángulo de rotación del autobús y las características del triángulo OPQ permiten plantear, aplicando el Teorema de Pitágoras, la ecuación $x^2 - 50x + 121 = 0$, una de cuyas soluciones resuelve este caso particular. La variación de *r* y *s* permiten plantear una diversidad de casos que conducen a otras ecuaciones cuadráticas. El resto de las actividades en el desarrollo están dedicadas a resolver una variante del problema principal, a saber, el problema de calcular la distancia que tiene que separarse la llanta delantera de la ciclovía para que la llanta trasera no invada la ciclovía.

En el desarrollo del Ejemplo B, se propone como tarea la búsqueda del óptimo en cada uno de los tres primeros tipos de canales, cuando el área húmeda es de 72 m², en cada caso se trata de obtener las dimensiones que debe tener el canal para que su perímetro húmedo sea mínimo. La búsqueda se hace a través de la manipulación de un archivo como el mostrado en la Figura 8, que ilustra el caso del canal rectangular.

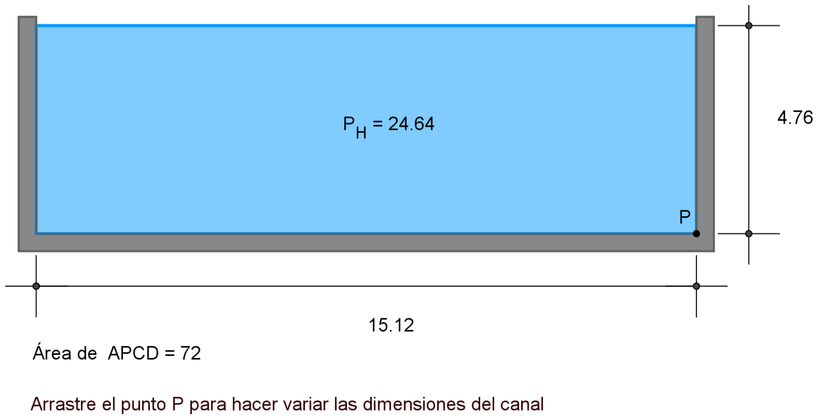



**Figura 8.** Caso del canal rectangular

La búsqueda del perímetro húmedo óptimo está basada en la exploración numérica de las dimensiones, se pospone hasta el cierre una discusión sobre las razones por las cuales el canal que optimiza el perímetro húmedo tiene dimensiones que están en la razón 2:1.

En el caso del Ejemplo C, el desarrollo es muy distinto a los otros dos: primero se da una explicación del método empírico que usan los trabajadores de la construcción para trazar el arco y que consiste esencialmente en usar barrotes de madera para construir un ángulo apropiado (Figura 9), con otros barrotes, este ángulo puede ser reproducido para localizar otros puntos que estarán sobre el mismo arco (Figura 10), hasta obtener los puntos necesarios para armar la cimbra, sobre la que descansará el arco.

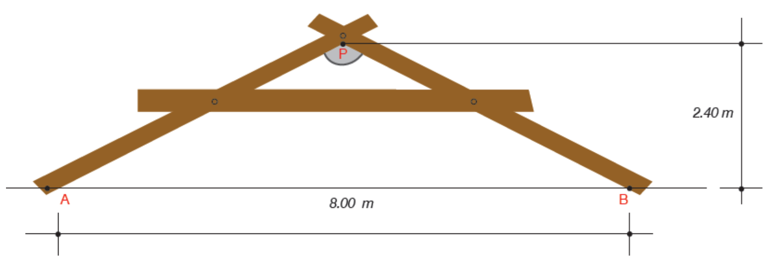



**Figura 9.** Construcción para trazar el arco

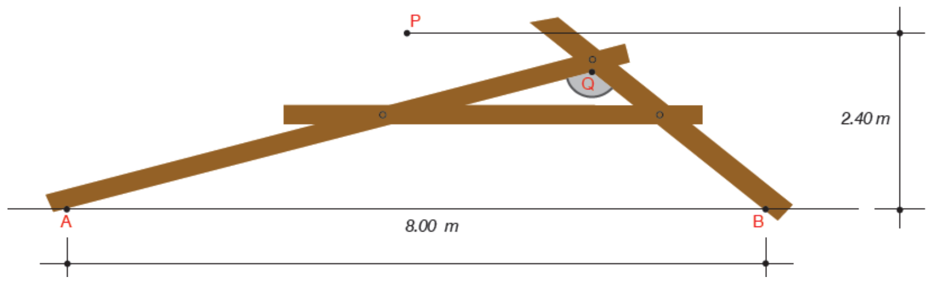



**Figura 10.** Construcción para trazar el arco 2

Una vez explicado el método, los estudiantes tendrán que aplicarlo para trazar un arco a escala utilizando tiras de cartón en lugar de barrotes de madera y fijando el ángulo entre las tiras con chinchetas. Los archivos de GeoGebra se usan aquí para apoyar la formulación de los resultados matemáticos que respaldan el método.

## 4. La etapa de cierre

Al respecto de esta parte final de la secuencia, Díaz-Barriga (2013, p. 23) afirma que "Las actividades de cierre se realizan con la finalidad de lograr una integración del conjunto de tareas realizadas, permiten realizar una síntesis del proceso y del aprendizaje desarrollado.", pero de nueva cuenta, frente a la naturaleza de las actividades propuestas en matemáticas tenemos que ser más específicos. Al iniciar esta etapa, la situación planteada ya ha sido resuelta y hablar de integración para nosotros significa:

- Reunir y formalizar los conceptos matemáticos que han emergido durante la resolución.
- Profundizar en los conceptos utilizados, aunque esta profundización se limita con frecuencia a la introducción de representaciones sobre el mismo concepto que no se han usado en la secuencia.
- En algunos casos, planteamos también en el *cierre*, la justificación de resultados que han sido utilizados como teoremas "de hecho", aunque la justificación propuesta no alcance el nivel de una demostración formal.

En el ejemplo A, una vez resuelta la ecuación $x^2 - 50x + 121 = 0$ y analizadas las soluciones, la secuencia se cierra con la resolución y el análisis del caso general $x^2 - 2rx + w^2 = 0$. Este análisis no se reduce a los tratamientos algebraicos, el estudiante dispondrá también de una construcción como la mostrada en la Figura 11, en donde las soluciones son estudiadas como raíces de la función $f(x) = x^2 - 2rx + w^2$ cuyos parámetros $r$ y $w$ pueden hacerse variar en pantalla como deslizadores de GeoGebra.

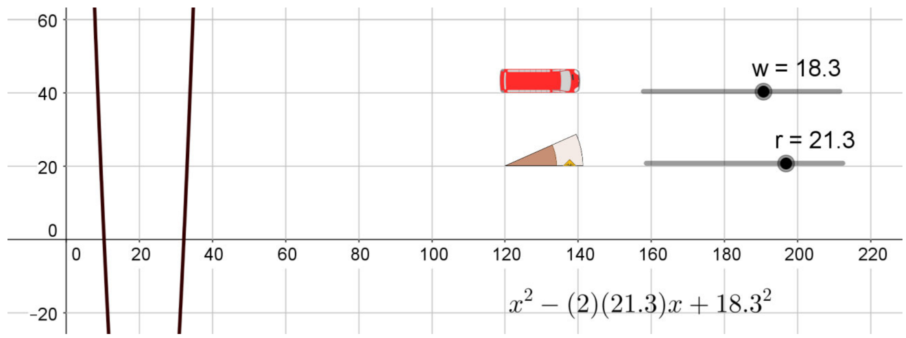



**Figura 11.** Soluciones como raíces de la función

Y finalmente se analizan las condiciones bajo las cuales la ecuación $x^2 - 2rx + w^2 = 0$ no tendría soluciones y lo que significaría en el modelo geométrico esta ausencia de soluciones.

En el ejemplo B, una vez que se han encontrado las dimensiones de los canales que tienen menor perímetro húmedo en cada uno de los primeros tres casos (ver Figura 2), se comparan estos casos óptimos entre sí. Se propone como actividad integradora la comparación de los tres óptimos con el canal semicircular, para llegar a la conclusión que este último es el óptimo de los óptimos calculados. Durante el desarrollo de la actividad cada uno de los óptimos se ha encontrado de manera empírica, explorando las construcciones numéricamente, pero no hay una búsqueda de argumentos matemáticos que respalden esos resultados; por esta razón se incluye en esta parte final una discusión sobre el fundamento matemático que está detrás de estos resultados. En el segundo semestre del Bachillerato, los estudiantes no han entrado todavía en contacto con el Cálculo Diferencial y por lo tanto estas herramientas no pueden usarse aquí; por esta razón se ha tomado el resultado geométrico "Entre todos los polígonos de *n* lados y con la misma área, el regular es el de menor perímetro" como un *teorema de hecho*. A partir de este resultado y explorando y analizando la construcción siguiente (Figura 12), se trata por ejemplo de concluir que entre todos los canales de área húmeda igual a 72 m², el de menor perímetro húmedo es que guarda la relación 2:1 entre la base y la altura.

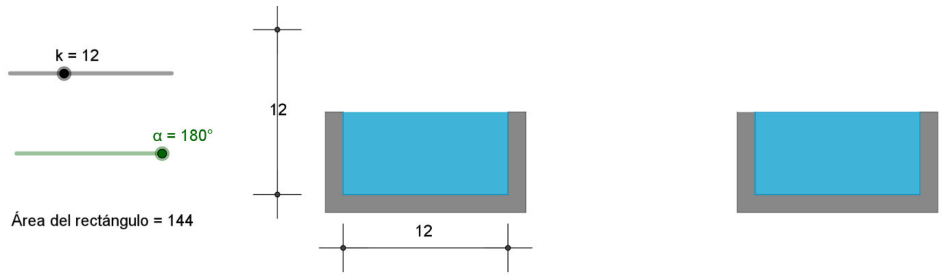



**Figura 12.** Construcción de canales

La manipulación está orientada a buscar el rectángulo de menor perímetro entre todos los que tienen un área de 144 m$^2$ y luego partirlo en dos canales, cada uno con área húmeda igual a 72 m$^2$ y perímetro húmedo igual a 24 m. Lo mismo se hace con los canales de sección trapezoidal y triangular.

El cierre del ejemplo C, está dedicado a buscar una justificación geométrica del método de trazado analizado, para apoyar esta actividad se proporciona la construcción geométrica mostrada en la Figura 13.

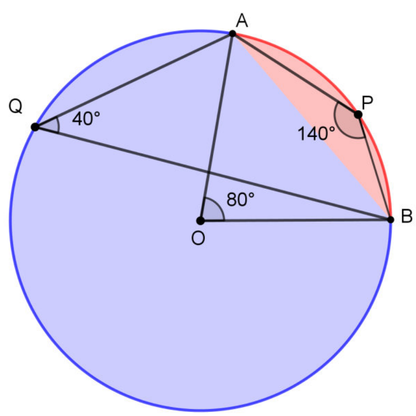



**Figura 13.** Construcción geométrica

En esta construcción el estudiante puede arrastrar el punto C sobre el arco de circunferencia y observar que el ángulo correspondiente a este vértice permanece fijo. Se solicita al estudiante enunciar el resultado geométrico observado. Luego se le proporciona la construcción mostrada en la Figura 14, en la que el segmento AB permanece siempre fijo, pero el punto C puede moverse usando el deslizador conservando la medida del ángulo ACB fijo e igual siempre a 60°.

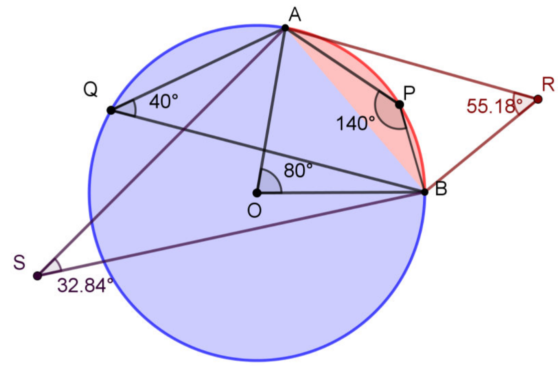



**Figura 14.** Construcción geométrica 2

La actividad finaliza con la tarea de enunciar y justificar este último resultado geométrico encontrado, la comparación de los dos teoremas enunciados y la idea general acerca de cuándo dos teoremas son recíprocos. Esta secuencia completa se muestra como Anexo a este capítulo y ahí se muestran las especificaciones sobre la gestión en el aula que tendrá que promover el profesor, así como los materiales necesarios para ponerla en práctica.

## 5. Conclusiones

Si queremos transformar el aula de matemáticas en un espacio de trabajo atractivo, en donde todos podamos aprender matemáticas con gusto, tenemos que repensar nuestra práctica docente. En nuestro país el aula sigue siendo predominantemente un lugar para desarrollar lo que Díaz-Barriga (2013a) llama una *clase frontal*. La iniciativa de modificar nuestras propias formas de enseñar matemáticas nos han conducido de manera natural al diseño de actividades didácticas primero, y luego a darles forma como secuencia de actividades. Pero la necesidad de influir en la modificación de la práctica de otros profesores, nos ha llevado a plantearnos la necesidad de contar con elementos metodológicos específicos que permitan diseñar a los docentes sus propias secuencias. El trabajo que hemos resumido aquí es apenas una pequeña contribución a las transformaciones a las que aspiramos; la idea de involucrar a los profesores en el diseño y la puesta en práctica de estas secuencias ha enfrentado por lo menos tres dificultades: a) la resistencia de los profesores a replantear la enseñanza de la matemática y al uso de tecnología, b) el interés de las instituciones para modificar la enseñanza no ha sido el esperado y c) la propia resistencia de los estudiantes acostumbrados a una clase de matemáticas completamente distinta. Por lo pronto hemos escrito con la metodología descrita, el conjunto de libros de texto (6) de matemáticas de la institución de bachillerato más importante en nuestra región, pero el uso de estos libros de texto está apenas en su etapa de evaluación. Nuestros estudiantes de posgrado han mostrado cada vez más interés por elaborar tesis relacionadas con la investigación de temas relacionadas con los aspectos metodológicos del diseño. Tenemos particular interés en poner a disposición de los profesores los elementos metodológicos expuestos aquí, en esta dirección hemos ofrecido en diciembre de 2016 un curso a profesores de nivel medio y superior de una institución privada de la localidad, un curso de 40 horas de duración en donde se han analizado algunas de las secuencias diseñadas, se ha discutido la metodología de diseño y se ha planteado como tarea a realizarse en pequeños equipos el diseño de una secuencia didáctica poniendo en práctica la metodología. Los resultados del curso han sido alentadores en el sentido de que los profesores han podido seleccionar algunas situaciones problema interesantes y han logrado concluir el diseño de una secuencia didáctica, aunque el curso no ha sido suficiente para que los profesores experimentaran sus secuencias con sus estudiantes.

## Referencias

Carmona, E., (2009). *Hidráulica de los canales abiertos. Compendio*. Tesis de licenciatura no publicada. ESIA- IPN. http://tesis.ipn.mx/jspui/bitstream/123456789/5481/3/tesis.pdf. Consultado en 10/04/2017.

Del Castillo, A-G, Soto, J-L, Vargas, J-R, Urrea, M-A, Armenta, M, Villalva M-C, Ávila, R, Silvestre, E y Quiñones M-A (2014). *Matemáticas II*. Hermosillo: Colegio de Bachilleres de Sonora.

Díaz-Barriga, Á. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *17*(3), 11-33. https://recyt.fecyt.es/index.php/profesorado/article/view/41685/23758 Consultado 04/01/2017.

Díaz-Barriga, Á. (2013a). TIC en el trabajo del aula. Impacto en la planeación didáctica *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, vol. IV, núm. 10, junio-septiembre, 2013, pp. 3-21. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=299128588003. Consultado 22/02/2017

Hitt, F. & Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. Artículo por invitación, *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *10*(1), 1-30. http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977. Consultado 15/01/2017.

Hitt, F. & González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educ Stud Math* 88:201–219

Mathematics Assessment Resource Service (2015). Solving Quadratic Equations. University of Nottingham, http://map.mathshell.org/download.php?fileid=1736. Consultado 12/02/2016.

Puig, P. (1955): Decálogo de la Didáctica Matemática Media. *Gaceta Matemática*. 1ª serie Tomo VII, números 5 y 6. Instituto Jorge Juan de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española. Madrid. 130-135.

Pollack, H. (2012). Introduction. In Gould, H., Murray, D.& Sanfratello, A. (Eds). *Mathematical Modeling Handbook*. Bedford, MA: Comap. http://www.comap.com/modelingHB/Modeling_HB_Sample.pdf. Consultado 08/02/2017.

Whitehead, A. (1968). Mathematics and liberal Education. *The Mathematics Teacher*, Vol. 61, No. 5, pp. 509-516

# 6 PROCESO DE REPRESENTACIÓN DEL CAMBIO Y LA VARIACIÓN: EXPLORACIONES DIGITALES

Sandra Evely Parada Rico[1], Jorge Enrique Fiallo Leal[1], Nelson Javier Rueda Rueda

**Resumen**

Presentamos resultados de un proyecto de desarrollo curricular, que afronta la problemática de la deserción universitaria. Por ello, se diseña, implementa y evalúa un curso-laboratorio de precálculo, para el desarrollo del pensamiento variacional a través del desarrollo de procesos matemáticos: comunicación, representación, demostración y elaboración comparación y ejecución de procedimientos. Presentamos resultados específicos del proceso de representación, analizando las habilidades cognitivas en la resolución de problemas de fenómenos de variación y cambio con el uso de un software matemático interactivo. Se plantean algunos comportamientos asociados a la habilidad de *reconocimiento de representaciones* que pueden potenciarse en el curso laboratorio.

**Palabras clave** : Procesos matemáticos, representación, pensamiento variacional, cambio, variación

**Résumé**

Nous présentons les résultats d'un projet portant sur le développement de programmes d'études qui visent à résoudre le problème du décrochage universitaire. Un cours-atelier en pré-calcul a été conçu, mis en œuvre et évalué afin de développer la pensée variationnelle à travers le développement de processus mathématiques: la communication, la représentation, la démonstration et la comparaison et exécution de procédures. Nous présentons les résultats du processus de représentation en analysant les capacités cognitives pour la résolution de problèmes de phénomènes variationnels et de changement à l'aide d'un logiciel mathématique interactif. Nous proposons certains comportements associés à la capacité de *reconnaître des représentations* qui peuvent être améliorées par le cours-atelier.

**Mots-clés** : Processus mathématiques, représentation, pensée variationnelle, changement, variation

**Abstract**

We present results of a curricular development project, tending development to confront the problematic of the university desertion. A precalculus course-labarotario was designed, implemented and evaluated, which aims at the development of variational thinking through the development of mathematical processes: communication, representation, demonstration and elaboration of comparison and execution of procedures. We present results, analyzing the cognitive abilities of this process in solving problems of variation and change phenomena with the use of interactive mathematical software. We propose behaviors associated with the ability to recognize representations that can be enhanced by the laboratory course.

**Keywords**: Mathematical processes, representation, variational thought, change, variation

---

[1] Universidad Industrial de Santander, Colombia.

## 1. Introducción

El curso de cálculo diferencial en gran cantidad de establecimientos de educación superior se ha caracterizado por ser el que mayor dificultad les causa a los estudiantes de nuevo ingreso, siendo este un fenómeno mundial, tal y como lo expresan Dávila, Flores, García y Valencia (2008); esto debido, entre otras causas, a que ellos no cuentan con pre-saberes lo suficientemente sólidos que les permita comprender los conceptos fundamentales que le son presentados en este curso.

Respecto a lo anterior Hitt (2005) menciona que el cálculo está compuesto por una cantidad de subtemas que están conectados de tal manera que el déficit en el manejo de alguno de ellos no permite un desarrollo profundo de los conceptos asociados a fenómenos de variación y acumulación, mismos que actualmente estudiamos en los cursos de cálculo diferencial y cálculo integral.

En muchas universidades se ha planteado la realización de un curso de pre-cálculo enfocado en el repaso de conceptos (conjuntos, álgebra, ecuaciones, inecuaciones, trigonometría, geometría analítica, entre otros), procedimientos y algoritmos que se creen necesarios para este curso. Sin embargo, el curso laboratorio de pre-cálculo que se ha venido desarrollando en la Universidad Industrial de Santander (UIS) desde hace más de cuatro años tiene características diferenciadas de otros cursos tradicionales. Éste ha tenido como propósito desarrollar en los estudiantes habilidades para comprender fenómenos de variación y resolver problemas en los que éstos se estudien (Fiallo y Parada, 2014). En particular el curso apunta al desarrollo del pensamiento variacional a través del desarrollo de los procesos matemáticos, entre ellos la representación.

Algunos autores como Duval (1995), Font (2000) y Kaput (1991) mencionan que los procesos de representación son de gran relevancia para tratar aspectos cuantitativos del mundo que nos rodea, así lo considera Moreno (2014) quien afirma que "*representar un movimiento como un fenómeno de la geometría, fue una de las claves que abrió el código genético del cálculo*" (p. 92). Por tanto, un estudio en el que se analicen habilidades específicas de la representación de fenómenos de variación y acumulación podría contribuir con una mejor comprensión de estos objetos de estudio. Dicho fenómeno inspira la investigación que se reportada en este documento.

La investigación de la que aquí se reportan algunos resultados fue desarrollada en el marco de un proyecto de desarrollo curricular de la UIS, tendiente a afrontar la problemática de la deserción universitaria; según se reporta en documentos internos de la Universidad y que algunos autores como Botello (2013) han referido, uno de los principales factores de la mencionada problemática es el fracaso académico de los estudiantes de nuevo ingreso en los cursos de matemáticas.

En la UIS en el primer semestre de 2013 se puso en marcha el primer curso laboratorio de pre-cálculo, del cual a la fecha se han realizado diez versiones. Este ha estado dirigido a estudiantes de nuevo ingreso de las carreras de Ingeniería y Ciencias, los cuales fueron seleccionados para realizar el curso por su bajo puntaje en el área de Matemáticas de las Pruebas del Estado para el acceso a la universidad (Pruebas Saber 11). A diferencia de un curso tradicional de pre-cálculo, donde predomina el carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos y su objetivo principal apunta al repaso de los preconceptos necesarios para el curso de Cálculo Diferencial, o de los conceptos vistos en la secundaria; en este curso, se incluyen representaciones generadas por GeoGebra y se enfatiza en el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de un enfoque de resolución de problemas y lo que el estudiante comprende y puede hacer con el uso del software (Fiallo y Parada, 2014).

Básicamente, el curso está basado en tres criterios:

- Problematizar mediante situaciones contextualizadas los objetos matemáticos de estudio del cálculo;
- Explorar fenómenos de variación con el apoyo de las tecnologías digitales
- Comunicar estrategias e interpretaciones asociadas a los fenómenos de variación.

Así mismo, todas las sesiones de trabajo se desarrollan mediante las siguientes fases:

- Información y exploración libre: Planteamiento de un problema que el estudiante explora con sus presaberes, de manera intuitiva y buscando una aproximación a la solución.

- Socialización de resultados: Discusión en grupo de las estrategias utilizadas para la solución del problema planteado, aclaración de dudas y válidación de resultados.
- Exploración dirigida: Exploración de un archivo de Geogebra y orientación guiada por preguntas para que el estudiante vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados percibidos en las diferentes representaciones que le ofrece el software.
- Explicación: Debate, discusión y reflexión de las ideas expuestas de manera que se llegue al objetivo de la actividad que es la construcción del conocimiento; en esta fase el papel del docente es la promoción del debate y la participación de los estudiantes.
- Tarea retadora: Planteamiento de una situación contextualizada donde el estudiante tiene que aplicar lo aprendido pero no de manera mecánica.

Así, fue nuestro interés de observar el impacto cognitivo que se ha logrado en los estudiantes de nuevo ingreso a la UIS, mediante el curso laboratorio de pre-cálculo, para lo cual se quiso caracterizar las habilidades cognitivas asociadas a procesos de representación de fenómenos de variación que pueden potenciarse mediante la resolución de problemas mediados por tecnologías digitales.

## 2. Aspectos teóricos y conceptuales

En la investigación que aquí se reporta, se asumió la definición de habilidades desde la perspectiva de la Psicología y la Psicopedagogía en la que Cañedo y Cáceres (2008) mencionan que las habilidades son un "sistema de acciones y operaciones dominado por el sujeto que responde a un objetivo. Es la capacidad adquirida por el hombre, de utilizar creadoramente sus conocimientos y hábitos tanto en el proceso de actividad teórica como práctica" (p.21).

Con el fin de ser aún más precisos en la caracterización de las habilidades que se pueden potenciar mediante la resolución de problemas mediados por software matemático interactivo, es necesario hablar no solo de habilidades sino de habilidades cognitivas. Asumiendo entonces que una habilidad cognitiva, consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama del conocimiento institucionalizado. De la misma forma consideramos habilidad cognitiva las acciones que un individuo puede desarrollar para interactuar con un objeto que él mismo puede identificar como objeto de estudio.

## 3. Pensamiento variacional

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) se apropia de las consideraciones de Vasco (2006), quien plantea que el objeto del pensamiento variacional es "la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad" (p. 139).

En ese sentido, el desarrollo del pensamiento variacional incluso necesita partir de una ruptura con el pensamiento algebraico preponderante en la formación escolar y requiere de la formación de conceptos apropiados, el desarrollo de algunas habilidades y la formación de actitudes para que los estudiantes alcancen el éxito en la resolución de problemas que involucren la variación.

Ahora bien, parece importante precisar los procesos matemáticos que están inmersos dentro de ese gran proceso de resolución de problemas con los cuales los estudiantes puedan razonar, comunicar; modelar (que algunos autores o textos prefieren llamar representar); y, elaborar, comparar y ejercitar procedimientos. Consideramos entonces, que existe la necesidad de engranar todos estos procesos para lograr caracterizarlos como habilidades inherentes al pensamiento variacional, inmersas en el uso de un ambiente de matemática interactiva.

## 4. Proceso de representación de la variación

Fiallo y Parada (2018) exponen que el diseño curricular del curso que aquí mencionamos pretende aportar al desarrollo de procesos matemáticos de los estudiantes, particularmente a resolver problemas, comunicar, representar, proponer, comparar y ejercitar procedimientos, y razonar y demostrar. Además, afirman que el desarrollo de los procesos matemáticos se posibilita a través de las actividades planteadas en cada una de las sesiones del curso, en las que se reflexiona matemáticamente sobre procesos finitos e infinitos de variación y aproximación que más tarde incidirán en la re-construcción lógica de los objetos de estudio del Cálculo.

Los objetos matemáticos tienen una naturaleza semiótica y, por lo tanto, solo se puede entrar en contacto con ellos mediante alguna de sus representaciones (Moreno, 2014). De hecho, como lo señalan Aleksandrov y sus colegas (1994), el factor fundamental para el desarrollo del Cálculo Diferencial e Integral fue el descubrimiento de la estrecha relación entre los viejos problemas de la geometría y los nuevos problemas de la mecánica. Relación descubierta mediante la representación gráfica en el plano cartesiano de una función.

En el caso de la cognición matemática, las funciones de mediación las desempeñan básicamente los sistemas de representación aritméticos, geométricos, algebraicos, métricos, gráficos, analíticos, gestuales, etc. Sin dichos sistemas no hay acceso posible a los objetos matemáticos. Aún más, no solo no hay acceso, sino que dichos objetos no tienen una existencia previa, independiente de sus representaciones (Moreno, 2014). Vale la pena insistir en un rasgo que distingue las representaciones estáticas de las dinámicas que podemos producir mediante GeoGebra: las representaciones dinámicas se *filman*, se exploran mediante el movimiento lo cual permite a los estudiantes un nuevo nivel de interpretación y, por lo tanto, se abre la puerta a posibles y nuevas estrategias de exploración y justificación de un problema matemático.

Como hemos mencionado ya, en un curso de Cálculo Diferencial se aspira a que los estudiantes comprendan la función como una fórmula algebraica, que a cada valor de las magnitudes literales que aparecen en ella, haga corresponder un único valor de la magnitud expresada por la fórmula; que una gráfica determina en sí misma una función, independientemente de si la función dada viene expresada por una fórmula; que una tabla que asigna a cada magnitud independiente un único valor también es una función; que la gráfica de una función es el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = f(x)$ o que la gráfica de la función que se obtiene dinámicamente puede ser el rastro o lugar geométrico de un punto que representa la relación entre dos variables interdependientes, cuando la magnitud independiente varía en un dominio determinado. Es decir, la gráfica de un punto que se mueve dejando un rastro, una huella controlada por una condición impuesta a lo que denominamos variable independiente.

La modelación y la simulación de un problema de variación y cambio en un medio digital permite visualizar los variantes e invariantes del problema, permite ver qué variables y relaciones entre variables son importantes, ver atributos (lineal, periódico, simétrico, continuo, uniforme), ver el comportamiento tendencial de las gráficas (crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos), realizar aproximaciones a los infinitesimales y al infinito; facilita la conexión entre las representaciones gráficas bidimensionales y tridimensionales, algebraicas, numéricas y geométricas, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, geométricos y analíticos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son éstos respecto a las condiciones iniciales del problema.

Las habilidades requeridas en torno a las representaciones consisten en reconocer, interpretar, construir, transformar (tratamiento y conversión) y coordinar representaciones de los objetos matemáticos (Rueda, 2016).

Veamos cómo se promueven algunas de estas habilidades en la siguiente sesión del problema que venimos trabajando. En esta sesión se busca que los estudiantes comprendan que la gráfica de la función es el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = 4x^3 - 20x^2 + 24x$.

**Actividad 5**

Abre el archivo de GeoGebra "caja sin tapa".

5.1 En la Vista Gráfica haz visibles los ejes. En la Vista Algebraica muestra el punto V y anima el punto P. **¿Qué representa el punto V?**

5.2 Marca el rastro del punto V. **¿Qué representa el rastro del punto V?**

5.3 Halla el lugar geométrico del punto V cuando varía el punto P (ve al menú y selecciona *lugar geométrico*, señala el punto V y luego el punto P). **¿Qué representa el lugar geométrico del punto V con respecto al punto P?**

5.4 Escribe en la barra de entrada la fórmula que representa el volumen en función de la altura. Si no la has hallado, utiliza la opción de regresión de dos variables y encuentra la función que mejor se ajusta al problema (asegúrate de que el punto P inicie en (0,0) y toma al menos 50 datos). ¿**Por qué es la que mejor se ajusta?**

5.5 ¿Coinciden la gráfica que representa el volumen en función de la altura con el lugar geométrico? ¿En qué coinciden? ¿En qué se diferencian?

5.6 ¿Cuál es el máximo volumen? **¿Por qué?**

En el desarrollo de la actividad, los estudiantes van a interactuar con diferentes representaciones que ayudan a resolver el problema y a conectar diferentes conceptos y representaciones como se puede ver en la Figura.

Al animar el punto P los estudiantes ven, *a través de la filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura, ve el crecimiento y decrecimiento, pudiendo identificar el máximo como el punto más alto. Al mostrar el rastro del punto V, se observa la huella que deja la variación del volumen en función de la altura, lo que ayuda a que los estudiantes la identifiquen como la gráfica de la función, relacionándola con la función cúbica encontrada.

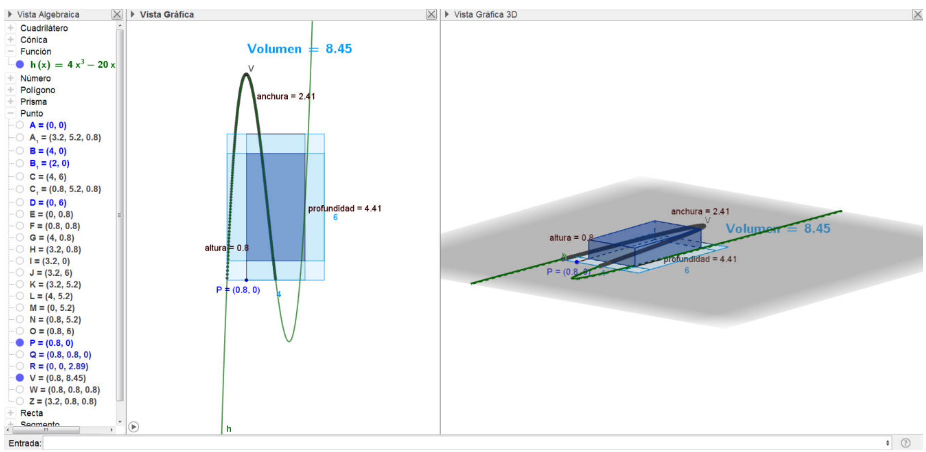



**Figura 1.** Vista de representaciones de la solución del problema

En experiencias realizadas en el curso-laboratorio, hemos visto que la mayoría de estudiantes asocian esta gráfica a una parábola, debido a que no usan los conocimientos de las propiedades geométricas de la parábola, ni conectan lo realizado en las sesiones anteriores. Los estudiantes con habilidades geométricas más desarrolladas pueden percibir que no existe simetría en la gráfica visualizada. Por otro lado, la idea de solicitar el lugar geométrico del punto V con respecto al punto P, busca que los estudiantes comprendan que la gráfica de la función es el lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = 4x^3 - 20x^2 + 24x$. Usar el *software* como mediador cognitivo para visualizar las matemáticas ayuda a promover las habilidades para elaborar, comparar y ejercitar procedimientos para analizar el cambio. Dice Steen (1998):

> La representación visual es una de las áreas de crecimiento más acelerado en la investigación matemática y científica. El primer paso en el análisis de datos es la presentación visual de los datos para encontrar patrones ocultos. Gráficas de varios tipos ofrecen una representación visual de relaciones y funciones; se usan ampliamente en las ciencias y la industria para mostrar el comportamiento de una variable. En la actualidad las gráficas de computadora automatizan estos procesos y nos permiten explorar también las proyecciones de formas en el espacio de dimensiones superiores. Al aprender a representar los patrones matemáticos se incorpora el don de la vista como un aliado invaluable de la educación matemática (p.13).

Al solicitar a los estudiantes que ingresen la ecuación, se espera que ellos comprendan que las dos representaciones modelan la variación del volumen en función de la altura, además de caer en la cuenta que la gráfica no es una parábola. Igualmente deben ver las similitudes y diferencias en cuanto al dominio y rango de la gráfica que modela el problema y la gráfica de la función cúbica; esto le permite comprender la necesidad de restringir el dominio en las funciones que modelan problemas de la vida real.

En el caso de que los estudiantes no hayan encontrado la ecuación de la función, el *software* se convierte en una herramienta útil, pues solo se requiere de la capacidad de análisis del estudiante para escoger el modelo de regresión que más se ajusta a los datos seleccionados. En este caso entra en juego la idea de función como una tabla, en la cual se puede identificar un patrón algebraico que corresponde a la ecuación $y = 4x^3 - 20x^2 + 24x$ y se ve la conexión entre la representación geométrica, numérica y algebraica del mismo objeto matemático. En un enfoque tradicional de la enseñanza del Cálculo, el problema de analizar los datos de una tabla para determinar una ecuación no es usual ni conocido por los estudiantes y profesores, lo que nos obliga a llamar de nuevo la atención sobre la necesidad de repensar el estudio de la variación.

Finalmente, en la actividad se vuelve a preguntar por el máximo volumen para que los estudiantes usen (o vayan adquiriendo) habilidades geométricas y analíticas para justificar la solución encontrada de manera empírica o algebraica. Aquí puede usar el hecho de que la función crece antes del punto máximo y luego decrece, tal como lo pudo observar, o relacionar el máximo con el punto más alto de la gráfica de la función en el intervalo correspondiente, tal como ha sucedido en el curso-laboratorio.

## 5. Aspectos metodológicos de la investigación

La investigación que aquí se reporta es de corte fenomenológico y de tipo experimental. El procedimiento metodológico responde a cinco fases que inician con la caracterización del curso de pre-cálculo en el cual se encuentra inmersa esta investigación y finaliza con la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación.

### 5.1 Fase 1. Caracterización del curso de pre-cálculo.

En el curso laboratorio diseñado, el trabajo en el aula está basado en un proceso de resolución de problemas, se diseñaron catorce situaciones contextualizadas que son presentadas a los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo. Las actividades tienen un enfoque en el que las representaciones digitales mediadas por GeoGebra se convierten en el medio para potencializar el desarrollo del pensamiento matemático-variacional.

### 5.2 Fase 2: Actividades del curso usadas en el estudio

En esta fase se analizaron las actividades del curso de pre-cálculo, centrándonos en los procesos de representación que se pueden ver involucrados en la solución de las situaciones contextualizadas presentadas allí. A continuación, presentamos la descripción de una de las actividades desarrolladas en la versión del curso que han sido tomadas como fuente de datos para la investigación que aquí se reporta. La actividad se denomina "Transformación de Funciones", ésta inicia con la presentación al estudiante de la representación en el registro algebraico de una función específica y se le pide que haga la representación en el registro gráfico para dicha función (Figura 1).

**TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES**

**Actividad 1**

**1.1** En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$.
**Explica** tu procedimiento.

**1.2** **Discute** con tus compañeros y el profesor tu trabajo.

**Figura 1.** Planteamiento de la Actividad 6 del curso

Una vez realizada la actividad a lápiz y papel se le presenta al estudiante una representación digital en GeoGebra (Figura 2) donde es posible modificar las unidades significantes de la representación gráfica de la función que se presenta allí, de manera que esa variación en la unidad significante pueda relacionarse con la variación de las unidades simbólicas correspondientes en la representación algebraica. Esta actividad está enfocada a la tarea de conversión entre las representaciones en el registro algebraico y en el registro gráfico para el objeto función.

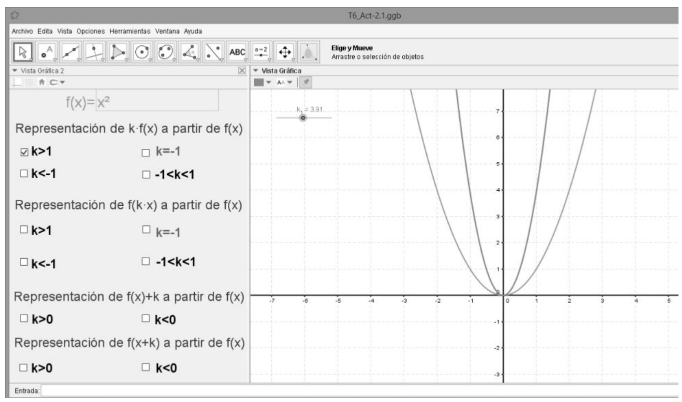



**Figura 2.** Representación digital con la que se realiza la Actividad 5 del curso

## 5.3 Fase 3. Trabajo de campo

Esta fase consta de la recolección y sistematización de datos teniendo en cuenta que se video grabaron cada una de las sesiones del curso, centrando la atención en algunos estudiantes, de los cuales se recogieron sus producciones escritas, se captaron sus expresiones orales y gestuales de manera que pudiésemos darnos cuenta de sus procesos de representación.

A partir del análisis de de las actividades del curso se decidió seleccionar tres de ellas. La investigación aquí reportada fue llevada a cabo con un grupo de 30 estudiantes de ciencias e ingenierías admitidos en la universidad, dirigido por uno de los investigadores, quienes realizaron el curso de pre-cálculo en el primer semestre de 2015.

Una vez seleccionado el grupo en el cual se llevó a cabo la recolección de los datos, se escogieron dos parejas de estudiantes. Aquí reportamos las evidencias recuperadas de una de ellas. La pareja seleccionada es la de Ximena y Jessica, ellas presentaban dificultad para abordar las situaciones planteadas en las actividades del curso, el desarrollo de cada uno de los ítems era un poco lento y la fluidez para expresar sus respuestas era poca. Sus producciones escritas eran cortas y concisas, la riqueza de los datos de este caso de estudio se encuentran en los diálogos que establecían las estudiantes, entre ellas y/o con el investigador, dado que las dudas que una de las estudiantes expresaba trataban de ser contestadas por la otra. La toma de datos de esta investigación se realizó mediante dos instrumentos: i) Video-grabaciones de las sesiones de las 15 sesiones del curso laboratorio de pre-cálculo; ii) Producciones escritas de los estudiantes.

### 5.4 Fase 4. Análisis de datos

En esta etapa se caracterizan habilidades cognitivas asociadas con fenómenos de variación en el contexto de resolución de problemas que ofrece el curso laboratorio de pre-cálculo. Para ello se realiza un proceso de triangulación y se utilizan las habilidades del proceso de representación (descritas en el apartado anterior) como las categorías de análisis.

### 5.5 Fase 5. Caracterización de habilidades cognitivas

En la investigación se tomaron las cinco habilidades cognitivas seleccionadas a priori como categorías de análisis reportadas en dos casos de estudio. Presentaremos los resultados relacionados con la habilidad para reconocer representaciones de los objetos matemáticos.

## 6. Habilidad para reconocer representaciones de la variación

En este apartado se presentan resultados del análisis de los datos, mismos que fueron descritos en el apartado las video-grabaciones realizadas, las producciones escritas tomadas de cada uno de los talleres realizados y las hojas de procesos que utilizaron los estudiantes en la evaluación escrita que presentan al finalizar el curso. En algunos de los apartados hemos tomado, a modo de comparación, algunas hojas de procesos de estudiantes que presentaron la prueba diagnóstica previa a la realización del curso y que han sido reportadas por Barajas (2015) en una investigación previa del mismo contexto de estudio.

Retomando la sección 2, consideramos que el reconocimiento como habilidad en términos de Mandler (1980) está asociado con las acciones que le permiten al individuo la determinación de la ocurrencia de un hecho, lo cual puede llevarse a cabo mediante dos tipos de acciones: i) La valoración por familiaridad; y ii) La identificación como resultado de la recuperación.

Mediante las situaciones planteadas dentro del curso se pretende aportar experticia suficiente para acercarse a diferentes representaciones (en cualquier registro) de los objetos matemáticos, específicamente del Cálculo diferencial. Iniciamos recuperando una instrucción del taller de transformación de funciones, la primera actividad del taller propone:

*En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función* $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$

Aunque la actividad propuesta apunta a identificar estrategias de solución dentro de las cuales puede estar el realizar una transformación de la representación inicial dada, el reconocimiento de la función cuadrática está implícito en el desarrollo de la actividad y puede ser detonante para que la actividad de transformación de la representación se lleve a cabo de manera adecuada o no. A continuación se presenta un diálogo entre las estudiantes Ximena y Jessica cuando realizaban una tabla de valores a fin de poder obtener la representación gráfica de la función, de acuerdo a la indicación recibida:

- *Ximena: La gráfica nos va a salir grande. Pilas! porque ahí empezamos a dividir [Se está refiriendo a los valores obtenidos que muestra la tabla, en la que se puede ver que los valores de "y" se expresan de forma fraccionaria]*
- *Jessica: A ver en esta tabla cuanto nos da.*
- *Ximena: Hagámosla hasta aquí [Se refiere a la asignación de una cantidad de valores enteros (como se puede ver en la Figura 3) para los cuales se realizará la tabla de valores]*
- *Jessica: No, pero es que estoy viendo en qué sentido va.*
- *Ximena: Pues tiende a infinito [Se refiere al comportamiento de la función, dado que los valores que han obtenido para la variable "y" van haciéndose mayores a medida que realizan el reemplazo]*
- *Jessica: Pues sí, ¿pero la forma?*
- *Ximena: Línea recta no da. Va así, o sea va subiendo. Pero no; línea recta si es; pero, entonces muy, muy diagonal, ¿si me entiendes?*

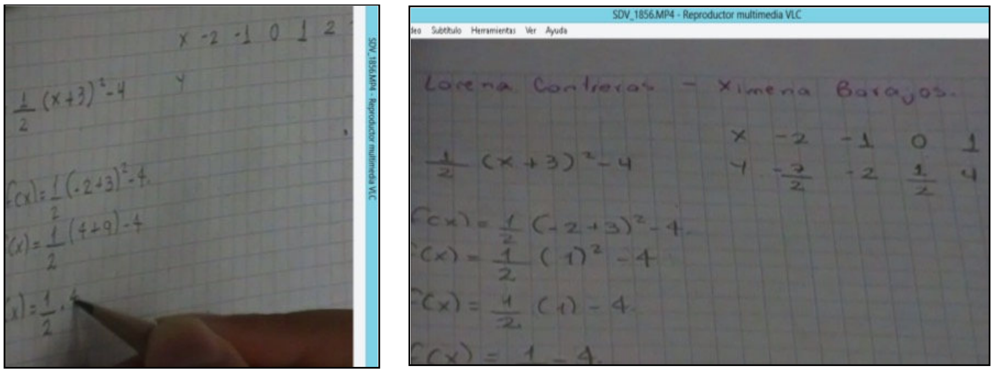



**Figura 3**. Construcción de la tabla de valores para la función dada

De acuerdo con lo expresado por Ximena, podemos aseverar que ella no relaciona la representación gráfica con la representación algebraica presentada, es decir, no se reconoce dicha expresión algebraica como representante de la función cuadrática. Sin embargo, dicho reconocimiento si se dio cuando las estudiantes ubicaron los puntos hallados en el plano cartesiano, como lo evidenciamos en la discusión que se presenta a continuación.

- *Ximena: No, pero eso es…*
- *Jessica: Una línea.*
- *Ximena: Si.*
- *Jessica: Prácticamente, pero es que…*
- *Ximena: Es como una parábola, semi parábola.*
- *Jessica: ¿Por qué no hacemos los puntos más abajo a ver que nos da?*
- *Ximena: Si.*
- *Jessica: ¿La hacemos hasta qué? ¿hasta menos ocho? ¿o nos daría muy abajo?*
- *Ximena: Si.*
- *Jessica: Hasta menos seis. [Luego de obtener más valores y de graficarlos en el plano cartesiano siguen conjeturando]*
- *Ximena: Eso es una parábola.*
- *Jessica: Por eso, aquí estamos [Jessica señala dos puntos de los colocados sobre el plano cartesiano]. Y esto va así [Jessica con su mano hace una indicación de la forma que tiene la parábola]. Por eso es que le agregué más valores.*

Podemos inferir a partir del diálogo sostenido por las dos estudiantes que no existe una recuperación de información que les permita reconocer la representación algebraica como una representación del objeto función cuadrática. Por su parte, al realizar la representación tabular no se presenta ninguna conjetura respecto a las variaciones obtenidas; tan solo, cuando se realiza la representación en el plano cartesiano existe una evidencia de un reconocimiento de la representación gráfica como representación del objeto función cuadrática. Incluso, dicho reconocimiento no es inmediato sino resultado de un proceso de puntaje con más valores de los tomados inicialmente como se puede observar en la Figura.

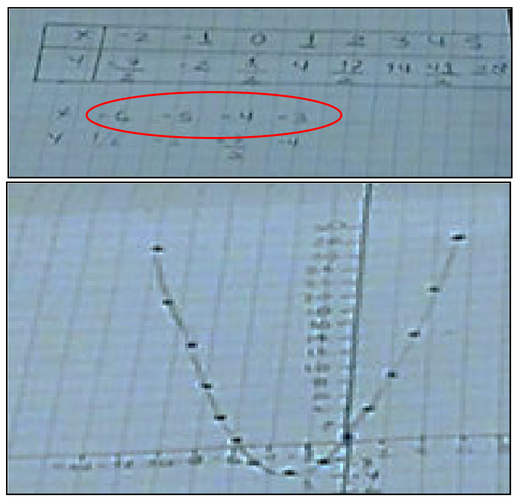


**Figura 5**. Construcción de la representación gráfica adicionando valores a la tabla inicial

Una segunda actividad en la que se exige de los estudiantes el reconocimiento de un objeto matemático se muestra en la Figura.

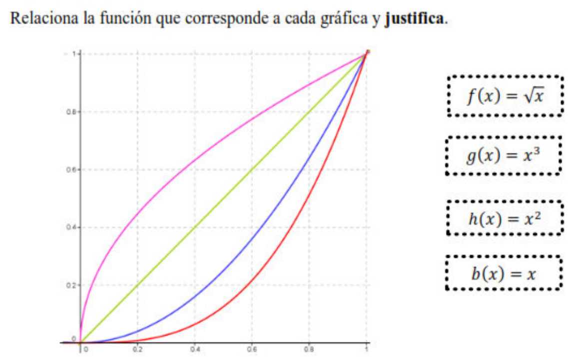



**Figura 6.** Actividad de reconocimiento

En esta actividad lo que se propone explícitamente es concerniente a la habilidad de reconocimiento, relacionando representaciones algebraicas y las representaciones gráficas de cuatro funciones diferentes. Recuperamos a continuación el diálogo entre Ximena y Jessica en el desarrollo de esta actividad:

- *Ximena: pues la única que es línea, línea es ésta [señala la gráfica que se presenta en la Figura 57 con color verde]*
- *Jessica: O sea que esa es ¿Cuál?, ¿equis?*
- *Ximena: Si tiene que ser esa.*
- *Jessica: ¿Y de las otras?*
- *Ximena: Pues de lo que hicimos ahorita la de raíz va así hacia abajo [señala con las manos la concavidad de la función $f(x) = \sqrt{x}$]*
- *Jessica: Y la del cuadrado tiene que ser una cosa así [con sus manos realiza la forma de una parábola]*
- *Ximena: O sea que si es de este lado va hacia arriba, pero aquí hay dos que van hacia arriba [se refiere de nuevo a la concavidad de la función y las funciones representadas con color azul y rojo en la Figura 57*
- *Jessica: bueno ya hay dos, ahora es mirar las otras a ver cuál es cuál.*

Se puede inferir a partir del diálogo que existe un cierto nivel de reconocimiento por asociación de las representaciones gráficas presentadas con las representaciones gráficas, como se expuso en la anterior actividad de reconocimiento, existe un factor que facilita la tarea pedida: el hecho de que las representaciones algebraicas sean las usuales: “$f(x) = x^2$” o “$f(x) = x^3$”. Además, para poder determinar cuáles son las representaciones algebraicas de las últimas funciones mencionadas las estudiantes deben recurrir a otros métodos, es decir, la actividad de reconocimiento necesita de una acción auxiliar, pues la generación de candidatos no fue suficiente para poder realizar la manera de forma completa.

La actividad matemática mostrada anteriormente nos permite ver un comportamiento particular en términos de la habilidad de reconocimiento. Dicha habilidad se pone de manifiesto cuando la tarea de reconocimiento pasa por discriminar entre las representaciones gráficas de una función cuadrática o cúbica y la representación gráfica de otras funciones; lo que nos permite considerar que el reconocimiento por asociación es una tarea más sencilla de realizar, pues el hecho de la generación de candidatos ya está dado.

Duval hace hincapié en estos aspectos al mencionar que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas de reconocimiento cualitativo, como el presentado en la segunda situación, se ven limitados al no poder usar la práctica habitual de trazado y lectura de los valores numéricos en las gráficas cartesianas. Además, este tipo de representaciones no sirven de nada para el estudiante cuando no son capaces de reconocer "*las características visuales de las curvas notables en matemáticas*" (Duval, 2006, p.151).

Como se ha podido observar tanto de la justificación en el texto de Ximena y Jessica, existe un cierto nivel de reconocimiento que les permite a los estudiantes discriminar entre las funciones "$f(x) = x$" y "$f(x) = x^2$" o "$f(x) = x^3$" a partir del reconocimiento de una característica visual de la representación gráfica, el tipo de trazo que corresponde a cada una de ellas (línea recta o curva). Sin embargo, cuando se trata de discriminar entre las dos últimas funciones mencionadas existe mayor dificultad y los estudiantes recurren a procedimientos como la asignación de valores específicos a la variable para poder determinar cuál representación gráfica corresponde a cada una de las funciones. Este tipo de oposición visual es de índole similar al mencionado por Duval cuando se trata de discriminar entre representaciones gráficas de funciones lineales: "[…] *ciertas oposiciones visuales son más difíciles de reconocer que otras: por ejemplo, la oposición entre* $a > 1$ *o* $a < 1$, *la cual a menudo se confunde visualmente con otro contraste, es más difícil que la oposición* $a > 0$ *o* $a < 0$" (2006, p. 152).

Existen otros comportamientos que dan cuenta del reconocimiento como lo son aquellas actividades en que el estudiante debe determinar para una situación específica, cuáles son las magnitudes que se encuentran involucradas en dicha situación y de ellas establecer cuáles varían y cuáles permanecen constantes. Tareas de este tipo pueden encontrarse en la Actividad del taller deniminada Máximo Rectángulo, donde se presenta la representación digital mostrada en la Figura.

A partir de dicha representación digital los estudiantes deben contestar a los siguientes interrogantes:

- ¿Qué magnitudes varían? ¿Qué magnitudes no varían?
- ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo?
- ¿Qué valores puede tomar la base?
- ¿Qué valores puede tomar la altura?
- ¿Qué valores puede tomar el área?

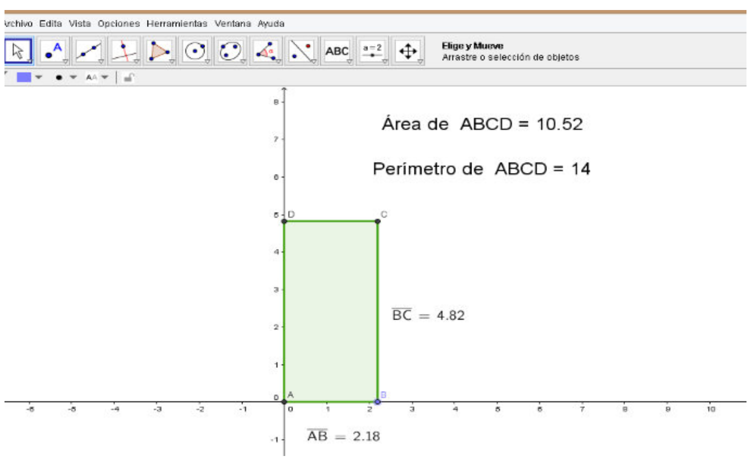



**Figura 7.** Representación digital presentada en la Actividad 11

Contestar a esos interrogantes exige de los estudiantes el reconocimiento de las magnitudes que allí intervienen y como mencionamos anteriormente, determinar las magnitudes que cambian. Podemos observar en la Figur la respuesta obtenida de los dos casos de estudio para el primer interrogante:

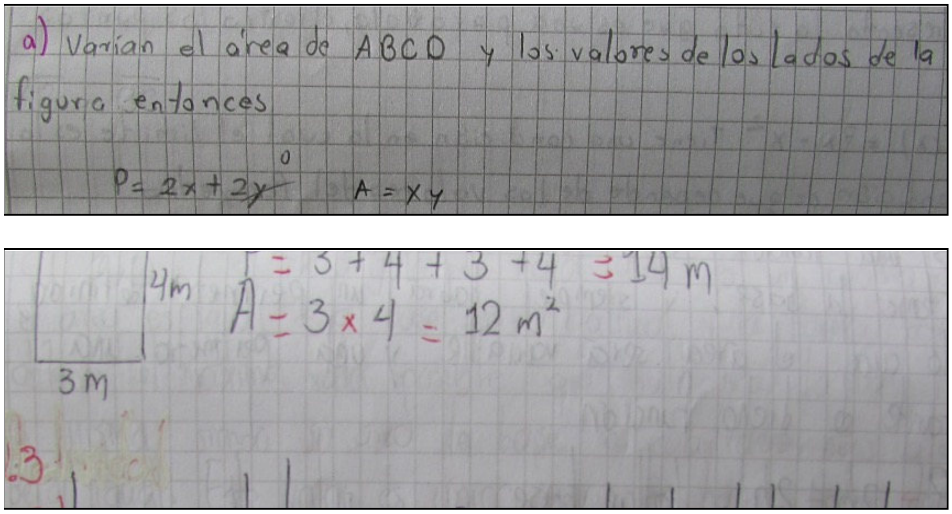



**Figura 8**. Reconocimiento de las magnitudes variables y constantes

De las respuestas planteadas por los dos casos de estudio inferimos que existe reconocimiento de las magnitudes que se hallan involucradas en la situación, lo cual por supuesto puede estar influenciado por el hecho de que la representación mostrada a los estudiantes sea una representación dinámica digital. Observemos a continuación las repuestas planteadas a los demás interrogantes:

Jessica y Ximena expresan que el área del rectángulo depende del valor de los segmentos $\overline{AB}$ *y* $\overline{BC}$, en concordancia con lo expresado en la respuesta al primer inciso, además de esto expresan la relación que se establece entre el área que están determinando y los valores de los segmentos (Figura).

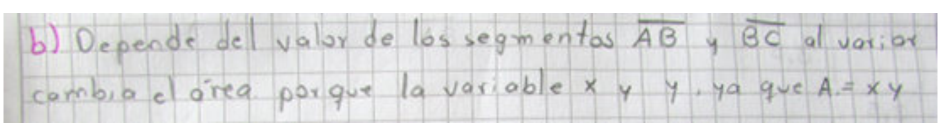



**Figura 9**. Magnitudes de las que depende el área

El hecho de que haya reconocimiento de las magnitudes que intervienen en la situación planteada y que puedan considerar cuales de ellas son variables y cuales constantes es un hecho sumamente valioso no solo en términos del reconocimiento sino, como lo mencionan Mesa y Villa (2011), como parte del proceso de modelación viendo este como una herramienta didáctica y como el puente entre las matemáticas y el mundo real, ya que este proceso requiere: "*La* *determinación de los tipos de magnitud involucrados en la situación y el papel de los mismos al interior del modelo*” (p.16).

Además de esa determinación, los mismos autores mencionan que dentro de ese mismo proceso también se hace importante “*la observación y cuantificación de las relaciones entre las magnitudes involucradas en la situación*” (Ídem, p.16); al respecto observamos en la Figura las repuestas presentadas por Jessica y Ximena para los siguientes literales de la actividad, los cuales nos dan cuenta de que no solamente se reconocen las magnitudes involucradas, sino que se determinan los valores que estas mismas magnitudes pueden tomar.

Es de notar también en este caso, que, a diferencia de lo sucedido en la actividad de Transformación de funciones al obtener la expresión algebraica que representa el área en función de uno de los lados del rectángulo, se le asocia de manera inmediata una representación gráfica mediante las palabras “vértice” y “parábola” tal y como se pueden ver en la Figura.

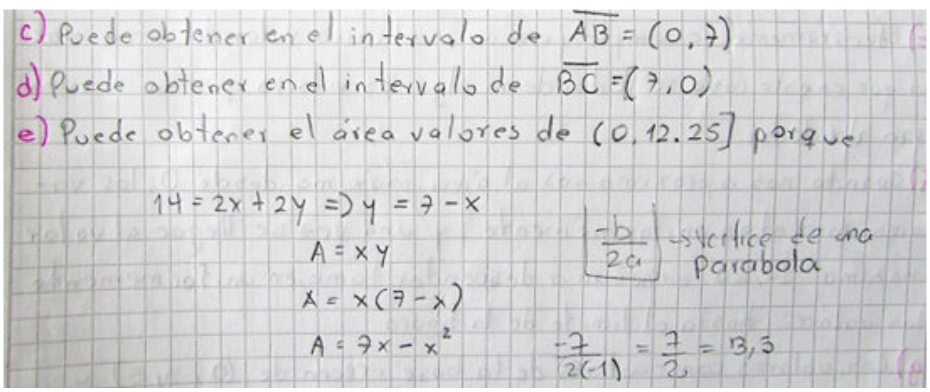



**Figura 10**. Respuestas a los interrogantes

Esto último es un indicativo de que la habilidad de reconocimiento se ha empezado a potenciar en estas estudiantes, pues aun cuando la actividad no lo requiere, ellas ya han hecho el proceso de asociación con la representación gráfica que más adelante trabajarán dentro de la actividad.

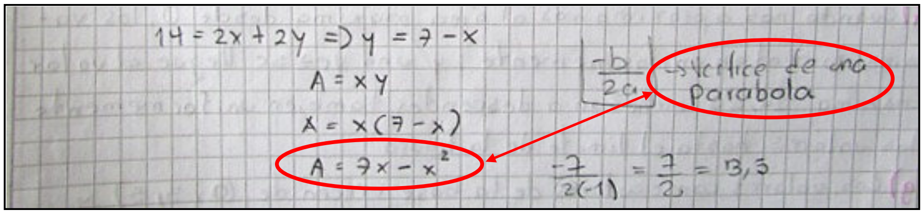



**Figura 11**. Asociación de la representación algebraica con la palabra parábola

Este tipo de acciones que hemos descrito en los últimos párrafos, en las acciones realizadas por Jessica y Ximena, son consideradas por Carlson, Jacobs, Coe, Larson y Hsu (2003) como acciones mentales que pueden dar cuenta del nivel en términos del razonamiento covariacional que estos estudiantes han alcanzado.

## 7. Conclusiones

Recordemos que para dar respuesta al objetivo de caracterizar habilidades cognitivas asociadas a los procesos de representación de fenómenos de variación, hemos considerado a lo largo del documento las actividades que se realizan en un curso laboratorio de pre-cálculo dirigido a estudiantes de primer ingreso a las carreras de Ingenierías y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander.

Las conclusiones de esta investigación las presentamos en relación a las habilidades que hemos encontrado desde el punto de vista teórico y que hemos corroborado a partir de los datos. En este documento presentamos los resultados referentes a la habilidad para reconocer representaciones.

Resaltamos que para cada uno de los descriptores que se enuncian a continuación son tenidos en cuenta cada uno de los cinco registros de representación que se han mencionado a lo largo del presente documento: Simbólico motriz, lenguaje natural, algebraico, tabular y gráfico. Así mismo, cuando hacemos referencia a una situación estamos hablando de situaciones de cambio y variación como las trabajadas en el curso laboratorio de pre-cálculo, ya sea que dicha situación se desarrolle dentro del contexto matemático o fuera de él.

Las observaciones de las video grabaciones, así como las producciones escritas de los estudiantes caso de estudio nos han permitido identificar al reconocimiento como una de las habilidades que pueden potenciarse mediante el curso laboratorio de pre-cálculo; dicha habilidad se puede observar en los siguientes comportamientos:

- Determinar las magnitudes que están involucradas en una situación específica.
- Determinar las magnitudes que varían y aquellas que permanecen constantes.
- Determinar los valores que puede tomar una magnitud en una situación determinada.
- Determinar las magnitudes que son independientes y aquellas que son dependientes de otras.
- Determinar cuándo dos magnitudes covarían.
- Asociar dos o más representaciones de un objeto matemático ya sea que éstas se encuentren en un mismo registro de representación o en registros diferentes.
- Seleccionar de una lista de candidatos la representación correspondiente a un objeto matemático previamente dado mediante una representación en el mismo o en diferente registro.
- Determinar las partes constitutivas de la representación de un objeto matemático específico para cada uno de los registros de representación.

De los descriptores mencionados podemos señalar que aquéllos que mejor son dominados por los estudiantes casos de estudio son los relacionados con la determinación de las magnitudes que se ven involucradas en situaciones de variación, lo cual se ve aún más facilitado por el uso de representaciones digitales dinámicas, lo que permite que la visualización de dichas magnitudes se realice de una manera más correcta. Independientemente de si la situación se presenta mediante dichas representaciones o si se utilizan representaciones en registros diferentes al gráfico, este tipo de acciones son frecuentemente realizados con éxito por los estudiantes.

La asociación de dos representaciones ya sea de manera libre o mediante la presentación de candidatos se dificulta en un principio debido a que, en la educación básica y media, como ya se ha mencionado en los capítulos precedentes, se privilegian ciertos registros de representación; una vez que los estudiantes trabajan con la multiplicidad de registros de representación dichos trabajos de asociación se hacen más viables y surgen de manera espontánea.

La determinación de las unidades significantes o partes constitutivas de una representación pasan por el mismo problema mencionado para los anteriores descriptores de esta habilidad. Incluso para los registros de representación privilegiados en la enseñanza tradicional: el algebraico y el gráfico, el reconocimiento de las partes constitutivas de objetos matemáticos, como por ejemplo las funciones, es bastante débil.

Desde las actividades del curso laboratorio de pre-cálculo el reconocimiento como habilidad está siendo constantemente trabajado, pues generalmente los talleres inician con cuestionamientos al estudiante de manera que pueda reconocer qué magnitudes se encuentran relacionadas en una situación específica. Además, el manejo de funciones se convierte en algo habitual para los estudiantes, dado que es ese el mejor modelo para describir las situaciones de cambio que se trabajan en cada uno de los talleres.

## Referencias

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, M., & otros. (1994). La matemática: su contenido, métodos y significado. Madrid: Alianza.

Barajas, C. (2015). *Dificultades del pensamiento variacional: una mirada al proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. Trabajo de grado de Maestría en Ciencias Especialidad Matemática Educativa. México: CICATA-IPN.

Botello, C. (2013) *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. Trabajo de grado de Maestría en Educación Matemática. Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Cañedo, C. y Caceres, M. (2008) *Fundamentos teóricos para la implementación de la didáctica en el proceso enseñanza-aprendizaje*. Cienfuegos: Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez. Recuperado de: http://www.eumed.net/libros-gratis/2008b/395/index.htm#indice

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento cova- riacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *EMA,* 8 (2), 121-156.

Dávila, G., Flores, R., García, M. y Valencia, M. (2008). *Fundamentos del cálculo*. Sonora: Editorial Garabatos.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Registres Sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 9, no 1, p. 143-168.

Fiallo, J. y Parada, S.E. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, 2014, no 20, p. 56-71.

Fiallo, J., & Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación.* Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Font, V. et al. (2000) Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, vol. 14, p. 1-35.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En *Radical constructivism in mathematics education*. Springer Netherlands, p. 53-74.

Mandler, G. (1980). Recognizing: The judgment of previous occurrence. *Psychological review*, vol. 87, no 3, p. 252.

Mesa, Y. y Villa, J. (2011). Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, vol. 1, no 21.

Moreno, L. (2014). *Educación Matemática: del signo al pixel.* Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Rueda, N. (2016). Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación. Tesis de maestría en Educación Matenática. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Steen, L. (1998). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* México: Limusa

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En: C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pp. 134-148). Bogotá: UPN.

# 7 UTILIZACIÓN DE SENSORES PARA EL ESTUDIO DE SITUACIONES FUNCIONALES A NIVEL SECUNDARIO Y UNIVERSITARIO

Valériane Passaro[1], Ruth Rodríguez Gallegos[2], Mireille Saboya[1], Fabienne Venant[1]


## Resumen

Con el objetivo de favorecer la comprensión de las funciones y sus derivadas varios autores sugieren un trabajo sobre la covariación. Este trabajo supone el estudio sobre las variaciones de dos variables en un proceso de modelación de situaciones reales. Proponemos dos situaciones: la primera, un sensor de movimiento para los alumnos de finales de secundaria y en la segunda un sensor de voltaje destinada a alumnos universitarios. El análisis permite percibir el aporte de la tecnología y la importancia del diseño de preguntas para desarrollar un razonamiento covariacional, una coordinación entre registros de representación y suscitar un interés por el proceso de modelación.

**Palabras clave**: modelación matemática, registros de representación, sensores, covariación, función.


## Résumé

Dans le but de favoriser la compréhension des fonctions et de leurs dérivées, plusieurs chercheurs proposent un travail sur la covariation. Ce travail consiste à étudier les variations de deux variables dans un processus de modélisation de situations réelles. Nous proposons deux situations: la première s'appuie sur un capteur de mouvement pour des étudiants à la fin du secondaire et la deuxième utilise un capteur de tension éléctrique destiné à des étudiants universitaires. L'analyse a permis de percevoir l'apport de la technologie et l'importance de concevoir des questions qui guident le développement d'un raisonnement covariationnel, la coordination entre registres de représentation et suscitent un intérêt pour le processus de modélisation.

**Mots-clés** : modélisation mathématique, registres de représentation, capteurs, covariation, fonction.


## Abstract

With the aim of promoting understanding of functions and their derivatives, several authors suggest working on covariation. This work involves the study of the variations of two variables in the process of modeling real situations. We propose two situations: the first one, senior high school students use a motion sensor, and in the second, university students use a voltage. A detailed analysis of these situations allows us to perceive the contribution of technology and the importance of designing questions that guide students to develop covariational reasoning, to coordinate records of representation, and to awaken their interest in the modeling process.

**Keywords**: Mathematical Modelling, representation registers, sensors, covariation, function.

---

[1] Université du Québec à Montréal, Canadá.
[2] Tecnológico de Monterrey, México.

## 1. Introducción

El aprendizaje de las funciones empieza en secundaria y prosigue en la universidad con el estudio del cálculo diferencial. Para favorecer la comprensión de los conceptos de función y derivada, un trabajo sobre la covariación parece necesario (Gray, Loud y Sokoloswski 2009; Oehrtman, Carlson y Thompson 2008; Passaro 2015). En este capítulo, proponemos un estudio de las funciones mediando la modelación de situaciones reales, en las que nos interesamos en las variaciones de dos variables. Esta modelación se puede realizar utilizando la tecnología, por ejemplo, los sensores (Carlson 2002). En efecto, la utilización de sensores permite a los alumnos experimentar diferentes fenómenos físicos, como el desplazamiento de un objeto, la variación del voltaje y/o la variación de la temperatura. Una de las ventajas de la utilización de la tecnología, es que ésta, es una herramienta que se emplea en ciertas etapas del proceso de modelación. Sin embargo, el reto reside en la utilización óptima de esta herramienta para favorecer los aprendizajes de los alumnos. Además, para adquirir el concepto de función, Duval (1993) señala la importancia de permitir que los alumnos desarrollen su habilidad a coordinar diferentes registros de representación.

En este capítulo proponemos dos actividades, una a nivel secundaria y otra a nivel universitario que utilizan sensores. El diseño de estas actividades toma en cuenta diferentes fases en las que los alumnos entran en un proceso de modelación, favoreciendo la coordinación de varios registros de representación y el desarrollo de una acción controlada sobre la actividad matemática (Saboya, 2010)[1]. Las actividades han sido concebidas teniendo en cuenta nuestras observaciones en clases de secundaria y en la formación de ingenieros. A nivel secundario (alumnos de 15-16 años), pudimos observar a una profesora con 20 años de experiencia docente en una escuela de la región de Montreal, utilizando el sensor Calculator-Based Ranger 2 (CBR2) para trabajar las funciones con sus alumnos. El CBR2 permite estudiar el movimiento de una persona (estudio de la distancia recorrida por una persona a partir del sensor en función del tiempo) a través la gráfica correspondiente. La profesora pidió como tarea a los alumnos, reproducir gráficas propuestas por el sensor y otras dibujadas por ella. Pudimos observar que los alumnos hicieron de forma espontánea, una interpretación de las gráficas leyendo los puntos característicos como por ejemplo los diferentes puntos que determinan los segmentos de recta y también interpretaron la gráfica bajo el concepto de velocidad de forma intuitiva. Sin embargo, no se

[1] Los conceptos de “registros de representación” y de “control” serán detallados en la sección I.

percibe de parte de los alumnos, una reflexión sobre lo que pasa entre dos puntos, es decir, sobre la covariación del fenómeno. Estas observaciones permiten constatar que el razonamiento covariacional no es ni intuitivo ni natural y que exige una forma de mirar el fenómeno, que se tiene que desarrollar de manera explícita e intencionada.

A nivel universitario, en la formación de ingenieros en México, Rodríguez (2015) propone a sus alumnos de trabajar con un sensor, que mide el voltaje en un capacitor en un circuito RC (Resistencia-Capacitor). La actividad (ver detalle en Rodríguez y Quiroz 2015, 2016) es relativa a la modelación de la forma en que se carga un capacitor C en un circuito eléctrico RC. Hemos podido observar que el sensor ayuda a los alumnos a conocer mejor el fenómeno eléctrico a modelar y a dar un significado a la noción matemática que deben de aprender (en este caso, ecuaciones diferenciales, ED en adelante). Generalmente los alumnos de la clase no conocen bien el fenómeno eléctrico, por lo que la idea de realizar la construcción en la clase de ED de un circuito eléctrico y «*ver*» en la calculadora, gracias al sensor de voltaje, la manera en que el capacitor se carga en el tiempo, es parte de la tarea. Se puede observar que los estudiantes utilizan las ED sin poner un énfasis especial en la covariación de las variables en juego (la variación del voltaje o carga en el capacitor), prevaleciendo aspectos más técnicos sobre los métodos de solución, el funcionamiento del sensor y/o la construcción misma del circuito. El interés está más en conocer el fenómeno a modelar, así como sus representaciones algebraicas o analíticas. La actividad presentada aquí concierne el estudio del enfriamiento del agua hirviendo, actividad que utiliza un protocolo que tiene como objetivo hacer emerger el razonamiento covariacional, favorecer la coordinación entre diferentes registros de representación y desarrollar una acción controlada de parte de los alumnos, mediando un sensor de temperatura.

## 2. Sustento teórico de las actividades

En este texto, nos interesamos en el concepto de función a través la modelación de fenómenos reales bajo la covariación entre dos variables. Apostamos que la utilización de la tecnología, y en particular el uso de sensores, permite favorecer la comprensión de este concepto.

### 2.1 Elementos teóricos ligados al concepto de función

Muchos investigadores se han interesado al aprendizaje y a la enseñanza del concepto de función. Enfrentados a las dificultades recurrentes de los alumnos, en particular para interpretar gráficas, algunos autores han intentado comprender el concepto de función más allá de las definiciones y de las representaciones matemáticas, principalmente simbólicas que se le relacionan habitualmente. En consecuencia, diferentes aspectos de la función fueron relevados, que pueden ser asociados a los contextos en los que la función cobra sentido. Para Confrey y Smith (1995), existen dos enfoques distintos y complementarios sobre la función. Un enfoque por *correspondencia* y otro por *covariación*. Éste último focaliza sobre los cambios entre dos variables puestas en relación. El enfoque *covariationnal* sobre la función, permite destacar la variación de la variable dependiente cuando la variable independiente varía. En cambio, el enfoque *correspondencia* focaliza sobre la relación entre los valores de las dos variables que se corresponden, lo que permite en general, establecer una fórmula de correspondencia entre las dos variables. Por ejemplo, si la función $g$ pone en relación dos variables representadas por las letras $x$ e $y$ obteniendo la relación $y = g(x)$, se puede tratar $g$ por la covariación o por la correspondencia (ver figura 1).

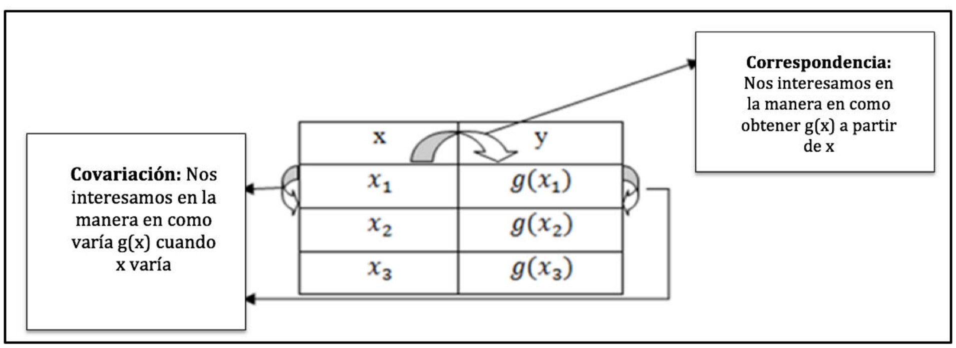



**Figura 1.** Enfoque covariación versus enfoque correspondencia

Para desarrollar la comprensión del concepto de función, es importante proponer a los alumnos tareas que les permitan trabajar estos dos enfoques sobre la función, enfoques que son complementarios. Para Passaro (2015), un contexto privilegiado para el trabajo sobre la covariación es la modelación de situaciones reales. En este contexto, los alumnos tienen que simular el fenómeno en estudio de manera a visualizar las variaciones de las variables observadas. Las preguntas que se pueden hacer a los alumnos tienen que solicitar un análisis de los incrementos de las dos variables y desembocar sobre la descripción del comportamiento de la variación de la variable dependiente. La comprensión del concepto de función requiere, además, un trabajo sobre los diferentes registros de representación. Para Duval (1993), coordinar diferentes registros de representación durante el aprendizaje de un concepto matemático, permite utilizar más fácilmente los conocimientos adquiridos y por lo tanto favorecer un control sobre el sentido del concepto. Desde este punto de vista, la coordinación de diferentes registros de representación habitualmente asociados al concepto de función (gráfica, tabla de valores, verbal, figural, simbólico) puede favorecer el que los alumnos profundizen su comprensión de este concepto.

Según Duval, para efectuar la conversión de un registro a otro, se necesita discriminar unidades significativas relacionadas a cada uno de los registros considerados y establecer una correspondencia entre estas unidades significativas. Por ejemplo, la modelación gráfica de una situación descrita con palabras, conlleva identificar unidades significativas en el registro verbal que puedan ser asociadas a variables visuales (unidades significativas específicas a la gráfica) en el registro gráfico. En el contexto particular de modelación de situaciones reales, consideramos que la experiencia, o dicho de otra manera, la simulación de la situación real, constituye en sí un registro de representación como lo afirman Janvier y Pelletier (2003). Como lo precisa Rodriguez (2015), la simulación constituye un registro pseudo-concreto qui interviene en el proceso de modelación.

## 2.2 Algunos aportes de la tecnología

Para Tall (2006) y Carlson (2002), proponer a los alumnos simulaciones de fenómenos reales permite la creación de imágenes mentales y de mejorar la comprensión del fenómeno, además de desarollar una intuición sobre la relación entre las variables estudiadas. La utilización del CBR2 permite precisamente esta *cognición incarnada* (o *embodiement*). En efecto, los alumnos se convierten ellos mismos en un elemento del sistema a modelar. Pueden hacer varios ensayos, modificar algunos parámetros y volver a empezar. De esta misma manera, Radford (2011) utiliza un CBR para que los alumnos (de 15-16 años) interpreten el movimiento. El sensor permite una gran objetivación del saber a través la coordinación de dimensiones corporales, instrumentales y simbólicas del movimiento.

En general, en una perspectiva más amplia (en contexto de enseñanza que reposa sobre la modelación matemática), se ha destacado que el uso de tecnología puede ser fundamental para permitir al alumno estar confrontado a diversas representaciones del mismo objeto matemático. En el caso planteado en Rodríguez (2015), el sensor permite el conocer mejor el fenómeno en sus diversas versiones : modelo gráfico y numérico principalmente. Esto coincide de manera importante con los trabajos realizados por los didactas de la Física como Quezada-Espinoza y Zavala (2014) así como Rhen y al. (2013) en un contexto más internacional. Sin embargo, resultados como Zavala y Velarde (2009) aseguran que es sumamente importante la manipulación por el alumno del fenómeno, es decir, la construcción misma del circuito eléctrico y/o otra experiencia que aportan mayor significado que el uso de simuladores o applets.

Además, apostamos que la utilización de sensores permite desarollar una acción controlada de parte de los alumnos (Saboya, 2010), elemento central en las matemáticas. El control se puede ubicar a lo largo de la resolución de una situación. Al inicio de la resolución, el control permite una anticipación, los alumnos proponen una condición de validación del resultado antes de conocerlo. El control permite movilizar los conocimientos necesarios. Se traduce por un tiempo de detención frente a la situación a resolver, un pensamiento crítico, una evaluación de las estrategias posibles, una búsqueda de sentido. Al final de la resolución, el control garantiza un trabajo retrospectivo, una verificación del resultado para superar las dudas y adquirir una certitud sobre lo que ha sido realizado. Si es necesario, el control permite regresar sobre la tarea y/o sobre la pregunta y contribuye a evaluar el método utilizado y/o la elección del método utilizado. Ejercer una acción controlada se traduce también por la percepción de los errores y a través una sensibilidad a la contradicción. Al principio o a lo largo del proceso de resolución, el control se manifiesta por decisiones sobre la dirección a emprender, por evaluaciones periódicas a lo largo de la resolución, por una reinversión de estrategias utilizadas anteriormente.

Las actividades presentadas en las secciones II y III sugieren un trabajo de modelación de situacions reales, en las que ponemos el énfasis sobre la covariación entre dos variables. La tecnología apoya el proceso de modelación, ésta permite a los alumnos manipular (Actividad 2, sección III) o participar físicamente a la simulación del fenómeno estudiado (Actividad 1, sección II). El uso de la tecnología está pensado con el objetivo de favorecer la coordinación de diferentes registros de representación y de requirir una acción controlada de parte de los alumnos. Nuestro análisis *a priori* pone de manifiesto el potencial de estas actividades (contexto, cuestonamiento y tecnología utilizada) para favorecer un trabajo de covariación y desarollar la coordinación de registros de representaciones, así como favorecer una acción controlada de parte de los alumnos.

## 3. Actividad 1 : el desplazamiento de una persona

La actividad está destinada a alumnos de fin de secundaria (14-17 años), se prevee una duración de 75 minutos. Los alumnos trabajan en equipos de 3 o 4. Cada equipo dispone de un CBR2, de un labQuest[1], y de papel con pegamento sobre el que se puede escribir y que se podrá pegar al suelo. Después de haber introducido el contexto, la actividad se realiza en 4 fases.

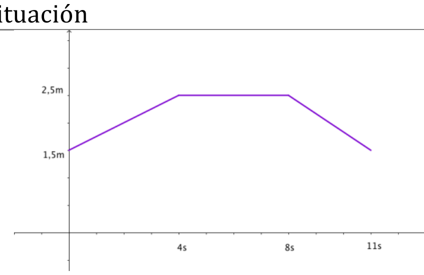
### 3.1 Puesta en práctica

Es a menudo útil de saber como varía, a lo largo del tiempo, la distancia entre un objeto y un punto de referencia fijo. Por ejemplo, cuando un radar aéreo percibe la presencia de un avión, los captores que evalúan la distancia entre este avión y la torre de control permiten evitar colisiones. Para comprender como analizar el desplazamiento de un objeto a lo largo del tiempo, vamos a estudiar el desplazamiento de una persona.

### 3.2 Descripción y análisis a priori de la actividad

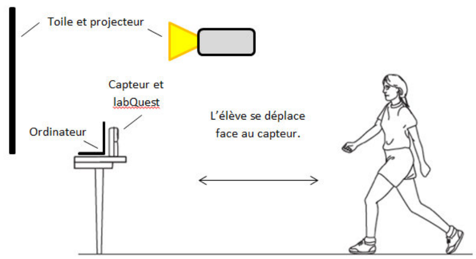
Fase I: Exploración de la tecnología y de la situación

*Situación*: Esta gráfica representa la distancia horizontal entre la persona y el sensor en función del tiempo.




| Consigna | Desarrollo |
|---|---|
| "Tienes que reproducir | En gran grupo. |

[1] El labQuest es una máquina que recupera los dados tomados por el sensor para tratarlos. Aquí, utilizamos el labQuest para representar gráficamente la distancia entre la persona y el sensor en función del tiempo.

<table>
<tr><td>esta gráfica haciendo ustedes mismos el desplazamiento frente al sensor que está colocado sobre el escritorio”.</td><td>El profesor presenta la situación a los alumnos.<br>Pide a unos cuantos alumnos de hacer varios ensayos delante de la clase (solo se utiliza un sensor, la gráfica es proyectada delante de la clase, ver la figura aquí abajo) para que todos vean cómo funciona un sensor.<br>El profesor propone a los alumnos de experimentar y de discutir entre ellos sobre lo que observan.<br>


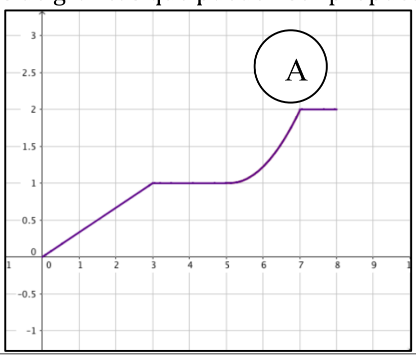
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recomendaciones para el profesor</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Dejar que los alumnos se apoderen de la situación y del funcionamiento del sensor sin forzar un análisis, que es precoz en esta fase. Aquí nos referimos a un análisis de la coordinación entre las acciones y el aspecto de la gráfica.<br>• Proponer a varios alumnos ir delante de la clase para que de un ensayo a otro intenten obtener una gráfica, la más ajustada posible a la que propone el sensor.</td></tr>
</table>

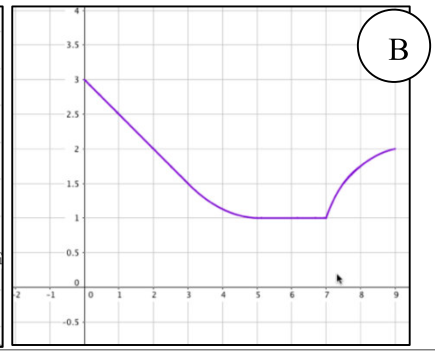
**Tabla 1.** Fase I de la actividad

En esta fase, los alumnos exploran espontáneamente la tecnología y se apoderan de la situación. Mientras que un alumno se desplaza, los demás le observan y prestan atención al rastreo simultaneo de la gráfica. Esta percepción de la relación de dependencia y de las variaciones simultáneas de las variables tiempo y distancia, favorece el trabajo sobre la covariación que será solicitado en las otras fases de la actividad. Aunque los alumnos establezcan estrategias para ajustar la curva que ellos trazan con el sensor a la que es propuesta por el sensor, el objetivo no es aún el de concientizar y de formular claramente estas estrategias. Durante esta fase se requiere una coordinación entre los registros *gráfico y experiencia.* Apoyándonos en los estudios de Passaro (2015) y de Carlson (2002), prevemos que los alumnos adopten un enfoque estático (correspondencia) sobre la gráfica, localizando puntos característicos (la ordenada del punto de abscisa 0 por ejemplo). Sin embargo, como la gráfica se traza simultáneamente al desplazamiento, los alumnos podrían empezar a hacer inferencias sobre la velocidad y así recurrir a un enfoque dinámico sobre la gráfica (covariación).

| |
|---|
| Fase II: Interpretación gráfica |
| Situación: Esta <u>otra</u> gráfica representa la distancia horizontal entre la |

persona y el sensor en función del tiempo (otro desplazamiento de una persona).
Ejemplos de gráficas que pueden ser propuestas:




| Consigna | Desarrollo |
|---|---|
| "Tienes que escribir un texto para explicar, a una persona que no tiene la gráfica bajo los ojos, la manera en la que tiene que desplazarse frente al sensor para reproducir exactamente esta gráfica". | Equipos de 3 o 4 alumnos.<br>Cada equipo dispone de un CBR2 et de un LabQuest.<br>El profesor proporciona la consigna y atribuye una gráfica diferente a cada uno de los equipos.<br>Deja a los alumnos trabajar, asegurándose que el texto escrito sobre la hoja no contenga ninguna representación gráfica. |

Recomendaciones para el profesor

- Incitar los alumnos a explicar su razonamiento a los otros miembros del equipo y a entenderse sobre las instrucciones a dar a una persona que no ve la gráfica.
- Sugiere a los alumnos de probar su descripción experimentándola con el CBR2.
- Sugiere de preparar la gráfica dividiéndola en diferentes partes y sugiere de analizar la variación de la distancia para cada una de estas partes.

**Tabla 2.** Fase II de la actividad

En esta fase, los alumnos deben de explicar las estrategias que han surgido en la fase I. La tarea exige que los alumnos coordinen los registros *gráfico* y *verbal* pasando eventualmente por el registro de la *experiencia*. Como el texto tiene que ser suficiente para que una tercera persona efectúe el buen desplazamiento para trazar la gráfica propuesta, los alumnos deben de componer descripciones detalladas, no pueden contentarse dando informaciones estáticas como "Al empezar, colócate a un metro", deben de indicar a la persona como desplazarse. El CBR ofrece la posibilidad a los alumnos de validar, de invalidar o de ajustar los elementos de su descripción, particularmente en lo que concierne la variación. Un ejemplo de descripción que podría ser producida por un equipo de alumnos para la gráfica B es: "Al principio, colócate a 3 metros del sensor. Cuando el cronómetro se ponga en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos, después disminuye tu velocidad durante 2 segundos hasta que estés a un metro del sensor. Quédate después inmóvil durante 2 segundos y retrocede rápidamente hasta el punto de salida, pero disminuyendo tu velocidad durante 2 segundos y párate a 2 metros del sensor".

| Fase III: Apropiación de una descripción verbal y anticipación de la gráfica | |
|---|---|
| *Situación*: Aquí se describe un desplazamiento producido por otro equipo :….<br>(cada equipo recibe la descripción de otro equipo, ver el ejemplo dado anteriormente). | |
| Consigna | Desarrollo |
| A. "Sin el CBR2, tienes que leer el texto y asegurarte de entender la sucesión de las acciones que se tienen que realizar. Un miembro del equipo debe producir este movimiento (los otros deben asegurarse que corresponde bien al texto) para poder volverlo a hacer después con el sensor delante de toda la clase". | Equipos de 3 o 4 alumnos.<br>El profesor proporciona la consigna a los alumnos y distribuye los textos producidos por ellos, asegurándose que cada equipo no reciba su propio texto.<br>Deja a los alumnos trabajar, asegurándose que entienden y respetan bien el contenido del texto. |
| B. "Producir un esbozo de la gráfica asociada al desplazamiento que acabas de trabajar (distancia en función del tiempo) ". | Primero en un trabajo individual y después compartido con los otros miembros del equipo. |
| Recomendaciones para el profesor | |
| A. Dejar que los alumnos se apropien del texto e identifiquen, si necesario, lo que falta o los errores.<br>B. Incitar los alumnos a comparar sus gráficas, explicando la manera en la que han pasado de la descripción con palabras a la gráfica. | |

**Tabla 3.** Fase III de la actividad

En la parte A de esta fase, los alumnos deben visualizar el movimiento a partir de la descripción escrita. Después, el alumno que hace el movimiento debe de transponer esta visualización en la experiencia real (*embodiement*). Esta coordinación entre los registros *verbal* y *experiencia* puede favorecer la anticipación del aspecto de la gráfica asociada. En la parte B, cada alumno debe trazar un esbozo de la gráfica de la situación. Esta tarea exige una coordinación entre los registros *verbal* y *gráfico*. En el momento de conversar entre los miembros del equipo, la coordinación entre estos dos registros se profundiza cuando los alumnos explicitan las asociaciones que efectúan entre elementos significativos del texto y las variables visuales de la gráfica. Entre los errores posibles, se puede anticipar la confusión entre el "objeto origen" (la trayectora de la persona) y el "objeto meta" (el trazado de la gráfica que muestra como varía la distancia en función del tiempo, Janvier 1993). Asi, un alumno podría trazar un segmento horizontal, cuando la persona se desplaza en línea recta a velocidad constante, el trazado será entonces asociado a la trayectora de la persona.

| Fase IV: Validación/invalidación de las descripciones verbales y de las gráficas anticipadas, y análisis del comportamiento de los incrementos | |
|---|---|
| Situación: Cada equipo ha recibido una descripción de un desplazamiento, queremos ahora producir la gráfica asociada y ver si corresponde bien a la gráfica inicial. | |
| Consigna | Desarrollo |
| "Para cada equipo, un alumno viene delante de la clase para reproducir el movimiento descrito tal y como lo practicó. Debemos después comparar la gráfica obtenida a la que fue dada inicialmente al equipo que produjo el texto". | En gran grupo.<br>Un alumno por equipo viene a reproducir el movimiento (puede haber como máximo 3 ensayos). Cuando el equipo está satisfecho de la gráfica obtenida (consideran que el alumno ha efectuado el desplazamiento conforme a lo que describía el texto), el profesor muestra la gráfica inicial. Pide a los alumnos comparar las dos gráficas y de explicar, si hay, las diferencias. |
| Recomendaciones para el profesor | |
| • Escoger previamente, en la fase III, dos o tres descripciones por las que el análisis será profundizado.<br>• Plantear preguntas para conducir a los alumnos a localizar e interpretar los puntos característicos.<br>• Plantear preguntas sobre el comportamiento de los incrementos para conducir a los alumnos a:<br>1) Calificar el desplazamiento asociado a un segmento de recta ascendente o descendente.<br>2) Calificar el desplazamiento asociado a las curvas abiertas hacia arriba y a las curvas abiertas hacia abajo. | |

**Tabla 4.** Fase IV de la actividad

La coordinación entre los tres registros presentes en esta fase (experiencia, descripción verbal y gráfica) va a ser reforzada por la confrontación entre la gráfica inicial y la producida después de haber interpretado el texto. Además, se pone en evidencia la correspondencia entre los elementos de cada uno de estos registros. En primer lugar, los alumnos pueden relevar los elementos significativos asociados a los puntos característicos (el enfoque correspondencia). Por ejemplo, en el modelo de la descripción presentado anteriormente, el profesor podría relevar tres extractos y poner en evidencia la asociación entre los elementos significativos de los registros *verbal* y *gráfico* (ver Tabla 1).

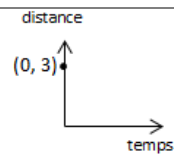
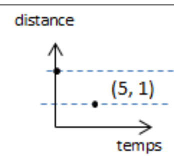
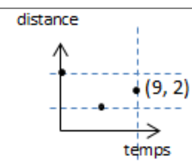
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Registro verbal | Descripción asociada a la experiencia | Al inicio, colócate a 3 metros del sensor | hasta que llegues a 1 metro del sensor | e ir a 2 metros del sensor |
| | Interpretación de la descripción para la conversión hacia la gráfica | El punto (0, 3) pertenece a la gráfica de la función. La ordenada para el punto de abscisa 0 es 3. | El punto (5,1) pertenece a la gráfica de la función. El mínimo es 1 y la imagen es [1, 3]. | El punto (9, 2) pertenece a la gráfica de la función. El dominio es [0, 9]. |
| Registro gráfico | Gráfica |   |   |   |

**Tabla 5.** Asociación entre los elementos significativos del registro verbal y las variables visuales del registro gráfico para los puntos característicos (enfoque correspondencia)

El profesor debe en segundo lugar, conducir a los alumnos a caracterizar el aspecto de la curva entre los puntos y el desplazamiento asociado. Como lo han mostrado Passaro (2015) y Carlson (2002), los alumnos hacen espontáneamente referencia a la velocidad y a la aceleración para describir de forma más precisa el desplazamiento. Por ejemplo, para el trazado curvado ascendiente abierto hacia arriba, un alumno podría decir “retrocede yendo cada vez más rápido” o también “retrocede acelerando”. En la descripción presentada anteriormente, el profesor podría recuperar tres extractos y conducir a los alumnos a interpretarlos para favorecer la conversión hacia la gráfica (ver Tabla 2).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Registro verbal | Descripción asociada a la experiencia | Cuando el cronómetro se ponga en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos después disminuye tu velocidad durante 2 | Quédate inmóvil durante 2 segundos. | Retrocede rápidamente al punto inicial, pero disminuyendo tu velocidad durante 2 segundos. |

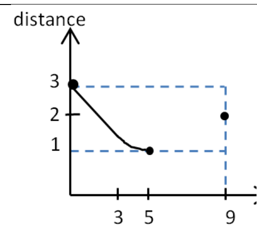
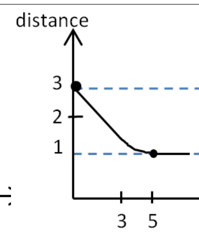
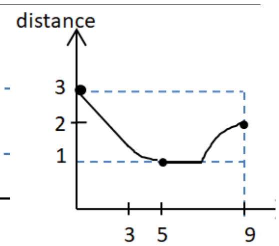
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | segundos. | | |
| | Interpretación de la descripción para la conversion hacia la gráfica | Sobre [0, 5] la función es decreciente. Sobre [0, 3] la función es lineal, está representada por un segmento de recta oblicuo descendiente. Sobre [3, 5] la función está representada por una curva abierta hacia arriba. | Sobre [5, 7] la función es constante, está representada gráficamente por un segmento horizontal. | Sobre [7, 9] la función es creciente. Está representada por una curva abierta hacia abajo abrupta al principio pero después cada vez menos abrupta. |
| Registro gráfico | Gráfica |   |   |   |

**Tabla 6.** Asociación entre los elementos significativos del registro y las variables visuales del registro gráfico para saber cómo se deben unir los puntos (enfoque covariacional) conversión

La interpretación sugerida necesita no obstante una experiencia en interpretar gráficamente los conceptos de velocidad y de aceleración. Ademas, haciendo las experiencias con el desplazamiento, los alumnos van a observar que es difícil saber como efectuar la buena aceleración. El profesor puede aprovechar esta oportunidad para aprofundizar el análisis de la variación de la distancia ayudándose de los incrementos quantificados (ver el ejemplo en la Tabla 3).

| | | |
|---|---|---|
| Descripción asociada a la experiencia | Cuando el cronómetro se pone en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos, después disminuye tu velocidad durante 2 segundos. | Retrocede rápidamente al principio, pero después disminuye tu velocidad durante 2 segundos. |

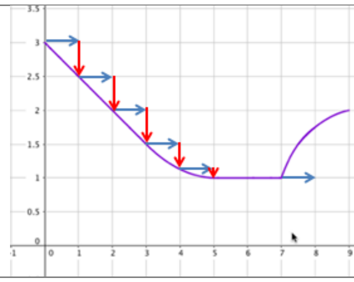
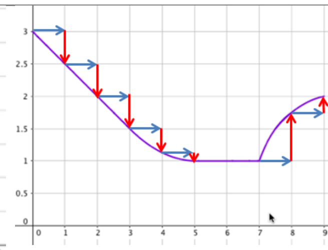
| | | |
|---|---|---|
| Análisis de los incrementos sobre la gráfica |  |  |
| Descripción del comportamiento de los incrementos | A velocidad constante:<br>→ A cada segundo, la distancia disminuye de 0.5 metros.<br>La disminución de la velocidad:<br>→ Durante el primer segundo, la distancia disminuye de 0.4 metros y después durante el segundo segundo, la distancia disminuye de 0.1 metros. | Retrocede rápidamente y después disminuye tu velocidad:<br>→ Durante el primer segundo la distancia aumenta de 0.75 metros cuando la segunda distancia aumenta de 0.25 metros. |
| Interpretación en el registro experiencia | "Haz un paso delante a cada segundo de la manera siguiente:<br>- hacer 3 pasos de 0.5 m (50 cm)<br>- hacer 1 paso de 0.4 m (40 cm) y después un paso de 0.1 m (10 cm)". | "Haz un paso detrás a cada segundo de la manera siguiente:<br>- hacer 1 paso de 0.75 m (75 cm)<br>- hacer 1 paso de 0.25 m (25 cm)". |

**Tabla 7.** Interpretación de la gráfica mediando los incrementos

## 4. Actividad 2: enfriamiento de agua que hierve

Esta actividad está dirigida a estudiantes de segundo año universitario, tiene una duración de 80 minutos. Los alumnos se organizan en equipos de 3 y cada uno tiene un sensor de temperatura, una calculadora graficadora TI-Nspire CX CAS, un vaso y el maestro les proporciona el agua hirviendo en los primeros 10 minutos de la clase. Al inicio de la sesión el profesor explica la actividad del día y sobre todo pone a calentar el agua para proporcionarla. El sensor de temperatura es el dispositivo que permite capturar los datos con la finalidad de trabajar con ellos. Nosotros usamos la interface de la calculadora para ver gráficamente los datos de temperatura en función del tiempo.

## 4.1 Puesta en práctica

Cuando observamos el enfriamiento de un cuerpo, debemos tomar en cuenta la temperatura del medio y la diferencia respecto a la temperatura del medio ambiente. La velocidad de enfriamiento depende efectivamente de esta diferencia de temperatura.

## 4.2 Descripción y análisis a priori de la actividad

La idea de esta experiencia es acercar/mostrar a los alumnos al fenómeno de enfriamiento de agua hirviendo, sensibilizarlos al método experimental y hacerles ver su relación con la parte teórica/analítica.

| Fase I – Experimentando para conocer mejor el contexto térmico a modelar | |
|---|---|
| Situación: Conocer el fenómeno a modelar y encontrar una gráfica con ayuda del sensor de temperatura que represente la temperatura del agua en función del tiempo. | |
| Consigna | Desarrollo |
| Debes de intentar encontrar la gráfica en la calculadora/Interface que permita representar la temperatura vs el tiempo. | En equipo de 3 alumnos.<br>El profesor introduce en clase la necesidad e importancia de estudiar la manera en que cambia la temperatura de los objetos, y precisa que nos interesaremos en conocer el enfriamiento del agua hirviendo, como un fenómeno más donde el cambio está presente y precisar la manera en que la magnitud temperatura varía.<br>Se les invita a los alumnos que, mediante una práctica experimental detallada paso a paso, midan la temperatura en el tiempo con ayuda de un sensor de temperatura. |
| Recomendaciones para el profesor | |
| Dejar a los alumnos conocer la situación y cómo funciona la interface (calculadora gráfica TI Nspire CX CAS) y el sensor de temperatura.<br>Hacer emerger los procesos intuitivos y los primeros razonamientos para pensar en el fenómeno. En la etapa posterior se pedirá a los alumnos que precisen, tanto la razón de cambio de la temperatura en el tiempo, así como la función analítica de la temperatura en función del tiempo. | |

**Tabla 8.** Fase I de la actividad 2

Anterior a esta clase, los alumnos han estudiado magnitudes que cambian (crecen o decrecen exponencialmente) a través de un comportamiento de tipo exponencial. Esto permite explicar que los alumnos suelen proponer modelos como $\frac{dT}{dt} = k * T(t)$ o modelos del tipo exponencial $T(t) = Pe^{rt}$ (aprendido desde la preparatoria) ó $T(t) = Ce^{kt}$ visto en las clases previas de este mismo curso (donde k representa una constante de proporcionalidad).

Un argumento que suele nacer en algunos alumnos de manera muy intuitiva, es el de determinar que en esta ocasión la temperatura no puede descender totalmente hasta cero sino que debe ser hasta la temperatura del medio ambiente, en nuestro caso, la temperatura del salón de clase. Esto es un elemento muy importante que ellos conocen incluso de otras clases como Física ó Termodinámica. Es importante decir que es un aspecto que ellos han estudiado incluso desde la preparatoria. Algunas preguntas que consideramos que el aspecto covariacional puede enriquecer el proceso, es justamente el cuestionar a los alumnos sobre la relación entre la temperatura del agua hirviendo y la temperatura del medio ambiente. Algo interesante es que se pide hacer el experimento por 900 segundos (15 minutos). Si se hace en menos tiempo la gráfica puede parecer lineal (una recta) lo cual puede causar una confusión en los alumnos sobre si el fenómeno cambia o no de manera constante.

| Fase II – Estableciendo el modelo matemático y su solución | |
|---|---|
| Situación: Establecer el modelo matemático (ED) que permita representar el cambio de la temperatura respecto al tiempo. | |
| Consigna | Desarrollo |
| Deberás establecer una ED que permita modelar el cambio de temperatura respecto al tiempo t. | Trabajo en equipos de 3 alumnos. El profesor apoya en guiar a los alumnos en reflexionar cómo cambia la temperatura en el tiempo y la manera de expresarlo matemáticamente. Los alumnos trabajan en escribir la ED y toman en cuanta diversos factores que influyen como la temperatura del medio ambiente y/o temperatura inicial del agua hirviendo. |
| Recomendaciones para el profesor | |
| Se sugiere intentar dejar que los alumnos propongan la variación al nuevo modelo de ED que se pretende estudiar. Generalmente en este año universitario, más de la mitad de la población sabe que se debe “ajustar el modelo” pero no sabe cómo justificar tal movimiento. En diálogo grupal se unen argumentos de los alumnos para justificar “en conjunto” la nueva ED. | |

**Tabla 9.** Fase II de la actividad 2

Los alumnos en equipo realizan propuestas para establecer una ED, se da un espacio para que ellos la planteen. Una de las sugerencias más importantes que hacen es sobre la gráfica obtenida y precisan que ésta debe descender hasta la temperatura del medio ambiente (de aquí en adelante la nombraremos $T_M$, un valor constante conocido gracias al sensor), siendo ésta una asíntota horizontal para la temperatura (no debe ser cero como en los ejemplos previos de decrecimiento exponencial). En caso necesario, el profesor interviene durante este proceso. Se cierra la actividad con una discusión grupal, confrontando varios modelos y sobre todo, se puede concluir con el planteamiento de la ED esperada.

Los alumnos suelen proponer modelos como $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$. Algunas posibles variaciones serán el que se desee precisar la k como un parámetro negativo $\frac{dT}{dt} = -k * (T(t) - T_M)$ desde la misma ED. En ocasiones solo invierten el orden dentro de las diferencias como $\frac{dT}{dt} = k * (T_M - T(t))$. A lo anterior se le conoce verbalmente como "la forma en que cambia la temperatura en el tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo T = T(t) (agua hirviendo en este caso) y la del medio ambiente $T_M$". La ED esperada es $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$ con el correspondiente valor inicial de la temperatura $T(t = 0) = T_0$. Es importante precisar que habrá ligeras variaciones del valor de $T_M$ (suele pasar para salones muy amplios) pero sobre todo en $T_0$ (esto depende de la lectura de los propios alumnos sobre este dato). Estas diferencias permitirán en la fase III tener una riqueza de soluciones al fenómeno, a pesar de que la estructura es la misma para los equipos.

| Fase III – Resolviendo la ED para conocer la Temperatura en función del tiempo t | |
|---|---|
| Situación: Resolución matemática del modelo matemático (la ED) para identificar la solución de la Temperatura en todo tiempo. | |
| Consigna | Desarrollo |
| Resuelve el modelo matemático previamente establecido con apoyo de algún método analítico. Encuentra la solución general y particular de la misma. | Trabajo en equipo de 3 personas. El profesor permite que los alumnos resuelvan la ED establecida previamente haciendo uso de algún método visto en clase.<br>Si la actividad se desarrolla en las primeras sesiones del curso, podrá utilizar el método analítico de variables separables. En esta parte es muy importante resaltar que los datos de inicio de cada equipo pueden/deben ser diferentes, respecto a la temperatura del medio ambiente y/o la inicial por lo que se espera tener resultados distintos (aunque similiares) para cada equipo. |
| Recomendaciones para el profesor | |

| |
|---|
| En este momento es una oportunidad de volver a repasar el método analítico de variables separables en un contexto diferente a Crecimiento y Decrecimiento exponencial, además en un contexto diferente y con una ED que varía de la estructura original que ellos conocen. Es importante precisar la diferencia entre variables y parámetros dentro de la ED. |

**Tabla 9.** Fase III de la actividad 2

Posteriormente pasan a resolver la ED a través del primer método visto en el curso (y el único hasta el momento visto) llamado Variables Separables, el cual consiste en separar la variable dependiente Temperatura T y la variable independiente tiempo t en ambos lados de la ED, lo que conduce a la ecuación siguiente en la que C es una constante :

$$T(t) = T_M + \boldsymbol{C}e^{kt}$$

Posteriormente, en los problemas en contexto como éste, nos interesa más tener la solución particular, es decir, precisar los valores de ***C*** y k.

Ejemplo: Si la temperatura inicial es 80 grados centígrados y la de medio ambiente 23 grados centígrados, la solución particular se vería como:

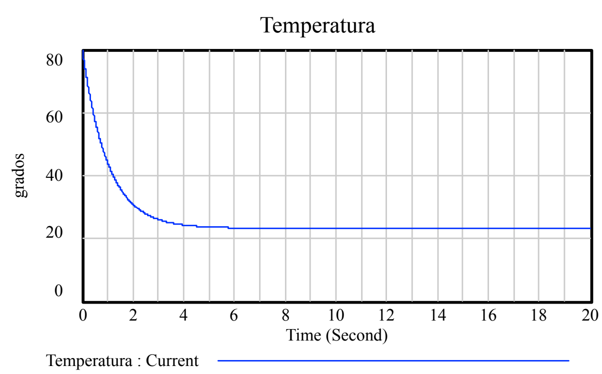



**Figura 2.** Gráfica de temperatura

Se precisa la condición inicial del fenómeno, se encuentra la solución general y particular de la misma. Se pide graficar la solución T(t). En el caso de los equipos, ellos conocen el valor de la temperatura inicial (y encontrar **C**) y pueden conocer gracias al sensor un valor futuro (cualquier otro) el valor de k. Para precisar dos parámetros, dos datos adicionales son suficientes. Esta es la riqueza de esta situación, ya no solo es un modelo final, la respuesta “correcta”, puede haber una riqueza de soluciones por cada equipo.

| Fase IV – Validar el modelo teórico vs el experimental | |
|---|---|
| Situación: Se pide a cada equipo comparar la gráfica de la temperatura obtenida por ellos en la solución particular y el modelo teórico con la gráfica obtenida por el sensor. | |
| Consigna | Desarrollo |
| Se te pide comparar la gráfica obtenida desde el modelo teórico (gráfica de la solución particular) con la obtenida por el sensor de temperatura. ¿Qué puedes decir de ambas gráficas? Se te pide comparar el valor de la temperatura en un tiempo t determinado (entre 0 y 15 minutos) haciendo uso del modelo teórico. Observa el valor que reporta el sensor y concluye sobre esta comparación. Se sugiere mejorar para que esta diferencia (en caso de haberla) sea mínima. | Los alumnos comparan y se espera se observe la similitud pero que a su vez identifiquen las diferencias que permitan avanzar en la comprensión del significado de una solución de una ED. Cada equipo expone su comparación, sugerencias de mejora y sobre todo los nuevos valores con el modelo ajustado. |
| Recomendaciones para el profesor | |
| Se pide a los alumnos comparar el valor de la temperatura en un tiempo preciso. En la práctica se pregunta por t = 15 minutos (900 segundos). En realidad, es un pretexto para que ellos comparen y reflexionen sobre la validez de su modelo. Generalmente existen diferencias importantes entre el valor reportado por el modelo teórico y el experimental. Se pregunta entonces a los alumnos a qué puede causar en el fenómeno tal diferencia, sus respuestas suelen ser variadas, desde "errores" desde lo teórico (en realidad se deben recalcular los parámetros; k principalmente) y a veces de manipulación del sensor, de lectura de "valores iniciales". Se espera una síntesis de la institucionalización sobre la coordinación de los registros analítico y gráfico, en el caso del estudio del cambio de temperatura (enfriamiento) en el agua hirviendo. | |

**Tabla 10.** Fase IV de la actividad 2

Se pretende comparar los resultados teóricos y los experimentales de un modelo matemático. Si las condiciones lo permiten se podrán sugerir modificaciones al modelo de la solución particular (condiciones iniciales) para que los alumnos puedan disminuir las diferencias entre uno y otro. En ese caso, tendrían que replantear la solución. Se puede compartir una tabla de diferencias entre valores obtenidos por los alumnos

| Equipos | Temperatura calculada a los 900 segundos | Temperatura registrada por los sensores | Diferencia |
|---|---|---|---|
| 9 y 10 (A los 600 s) | 57.38°C | 62°C | 4.62 |
| 1 y 12 | 47.63°C | 55.2°C | 7.57 |
| 13 | 50°C | 53.8°C | 3.8 |
| 6 | 51.31°C | 53.8°C | 3.49 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 y 8 | 47.18°C | 53.4°C | 6.22 |
| 7 | 48.89°C | 52.6°C | 3.71 |
| 5 y 11 | 43.48°C | 54.0°C | 10.52 |
| 3 y 4 | 47.73°C | 54.7°C | 6.97 |

**Figura 3.** Datos de 13 equipos sobre la confrontación valor del sensor vs teórico (obtenido por ellos).

Algunas razones que dan los alumnos sobre esta diferencia son: “no colocamos todos los decimales”, “la temperatura del medio ambiente está cambiando”, “se necesitan más datos experimentales”, “problemas con el sensor, lectura posterior”.

Lo anterior permite discutir sobre la importancia del proceso experimental y posibles errores en manejo del material (sensor, tiempo de toma de datos); condiciones iniciales, otras consideraciones. Los alumnos suelen tomar el segundo valor muy cerca de t=0; surge de algunos equipos el tomarlo lejos del origen para capturar mejor la naturaleza del fenómeno. Una parte no explorada y que es conviene hacerlo, es la parte del error del punto de vista de lo aleatorio, propio del equipo. Consideramos que esta etapa última de confrontación y de validación del modelo es nueva e interesante. Permite una reflexión entre el modelo matemático obtenido por los cálculos y el propuesto por el sensor. Sin duda alguna el papel del sensor es valiosa en este nivel ya que permite al alumno un control sobre su trabajo analítico.

## 5. Conclusión

En las dos actividades propuestas, el trabajo sobre la covariación y sobre la coordinación de registros de representaciones en juego está beneficiado por la utilización de los sensores. En efecto, la herramienta tecnológica permite a los alumnos de apropiarse rápidamente el fenómeno estudiado tomando en cuenta ciertas etapas del proceso de modelación. La coordinación de los registros *experiencia*, *verbal* y *gráfico* es solicitado a través de las tareas forzando el ir y venir constantes entre los diferentes registros (Duval, 1993). El sensor realiza las actividades mecánicas (tomar medidas, reportarlas sobre un gráfico) permitiendo a los alumnos concentrarse enteramente sobre la formación de una imagen mental de la situación. Gracias al cuestionamiento sugerido, los alumnos son llevados a analizar las conversiones entre los registros a través de la distinción de los elementos significativos en cada uno de los registros. Estos elementos significativos están a la vez asociados a una mirada por la correspondencia sobre la función y una mirada por la covariación. El uso de la herramienta tecnológica beneficia al proceso de modelación dando más acceso a los elementos significativos de los registros en juego. En la segunda actividad, el sensor permite a los alumnos revisitar los conocimientos adquiridos teóricamente y de poner a prueba un modelo matemático conocido. Ellos son entonces llamados a coordinar los registros *experiencia*, *verbal* y *simbólico.* El sensor permite tener un medio de control sobre la situación real a modelar, de tener un referente para confrontar sus cálculos simbólicos, reflexionar sobre el proceso mismo de experimentación, de modelación en general (Quezada-Espinoza y Zavala 2014; Rhen y al. 2013; Rodriguez 2015).

Por otro lado, el diseño de las actividades toma en cuenta el desarrollo de una acción controlada por los alumnos (Saboya, 2010). Así, nosotros anticipamos que el uso del sensor pueda permitir una validación de los procesos por los alumnos, un reajuste a lo largo de las actividades de lo obtenido en diferentes momentos y la verificación de una posible anticipación. A título de ejemplo, en la primera actividad, cuando se describe en palabras el fenómeno (fase II), la experimentación permite a los alumnos de validar los elementos de su descripción. En las dos actividades, los alumnos son llevados a confrontar diversos resultados que permite alimentar una justificación, una argumentación, forzando así una anticipación y una validación de esta anticipación.

Finalmente, podemos afirmar que las dos actividades presentes en este capítulo tienen el potencial de desarrollar el razonamiento covariacional y, en consecuencia, la comprensión del concepto de función (Passaro, 2015). Sin embargo, la utilización de esos dos sensores (movimiento y temperatura) conduce a interpretar las gráficas para las cuales el tiempo es siempre la variable independiente. Será importante de proponer a los alumnos una variedad de otras situaciones, con o sin tecnología, que permitan enriquecer el estudio de la covariación en contextos más amplios. Una ampliación posible del trabajo presentado aquí será el de experimentar las dos actividades en clases, con la finalidad de tener un mejor entendimiento del potencial real de las actividades y favorecer el aprendizaje de la noción de función en un contexto de modelación.

## Referencias


Carlson, M. (2002). Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In *Representations and mathematics visualization*. Cinvestav-IPN, Mexico: North American Chapter of IGPME.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66-86.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Gray, S. S., Loud, B. J. y Sokolowski, C. P. (2009). Calculus Students' Use and Interpretation of Variables: Algebraic vs. Arithmetic Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(2), 59-72.

Janvier, C. (1993). Les graphiques cartésiens: des traductions aux chroniques. In *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation*. Université de Caen: C.E.R.S.E.

Janvier, B. y Pelletier, F. (2003). Didactique de la variable et des fonctions-MAT3225. Université du Québec à Montréal.

Oehrtman, M., Carlson, M. y Thompson, P. W. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' function Understanding. In *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (Mathematical Association of America, p. 27-42). Washington, DC: M.P. Carlson & C. Rasmussen.

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans* (Thèse de doctorat). Université de Montréal.

Quezada-Espinoza, M. y Zavala, G. (2014). El uso de calculadoras con sensores en el aprendizaje de circuitos eléctricos. Latin American Journal of Physics Education, 8(4), 1–10.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: La théorie de l'objectivation. *Éléments*, *1*, 1-27.

Rehn, D. A., Moore, E. B., Podolefsky, N. S. y Finkelstein, N. D. (2013). Tools for high-tech tool use: A framework and heuristics for using interactive simulations. *Journal of teaching and learning with technology*, *2*(1), 31-55. Corregir

Rodríguez, R. (2015). A Differential Equations Course for Engineers through Modelling and Technology. In G. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education, Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 545-555). New York: Springer.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2015). Developing Modeling Competencies through the use of technology. In G. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds), *Mathematical Modelling in Education, Research and Practice. Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 443-452). New York: Springer.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2016). El rol de la experimentación en la modelación matemática. *Educación Matemática*. ISSN: 1666-5825 http://www.revista-educacion-matematica.com

Saboya, M. (2010). Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.

Tall, D. (2006). A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof. (Une théorie du développement mathématique par l'embodiment, le symbolisme et la preuve). *Annales de didactique et de sciences cognitives*. V. 11. p. 195-215.

Zavala, G., y Velarde, J. J. (2009). Estudio del aprendizaje en un curso de física universitaria usando simulaciones computacionales en la estrategia educativa. In *Congreso Nacional de Investigación Educativa* (pp. 1–13). Veracruz, Ver.

# 8 ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

José Carlos Cortés[1], Lilia López Vera[2], G. Eréndira Núñez Palenius[1]

## Resumen

En el presente capítulo se proponen actividades de aprendizaje usando Geogebra, para cursos de cálculo diferencial e integral de bachillerato. La base Teórica es promover el uso de registros semióticos de Representación numérico, gráfico y algebraico, para el entendimiento de las razones de diferencias y las acumulaciones. Las actividades se trabajan aplicando la metodología ACODESA. Los elementos usados en Geogebra son: la visualización gráfica, la hoja de cálculo numérico y el CAS; utilizando el potencial del ajuste de puntos con funciones. Éstas presentan acercamientos numéricos mediante diferencias y sumas, para realizar transferencias entre representaciones.
**Palabras clave** : Diferencias, acumulación, Geogebra, derivada, integral, noesis, semiosis.

## Résumé

Dans ce chapitre, nous proposons des activités d'apprentissage utilisant Geogebra, pour les cours de calcul différentiel et intégral à niveau préuniversitaire. Le fondement théorique est de favoriser l'utilisation des registres de représentation numérique, graphique et algébrique, afin de mieux comprendre d'où proviennent les différences et les accumulations. Les activités suivent la méthode ACODESA. Les éléments utilisés dans Geogebra sont: l'affichage graphique, le tableur numérique et GeoGebra CAS, et s'appuient sur le potentiel d'ajustement de points avec des fonctions. Ces activités présentent des approches numériques au moyen de différences et d'ajouts et permettent des transferts entre représentations.
**Mots-clés**: Différences, accumulation, Geogebra, dérivée, intégrale, noèsis, sémiosis.

## Abstract

In this chapter, we propose learning activities using Geogebra, to be developed in a pre-university course of calculus (differential and integral). The theoretical basis is to promote the use of numerical, graphical and algebraic representation registers, in order to understand the reasons for differences and accumulations. The activities are worked by applying the ACODESA method. The elements used in Geogebra are: the graphic display window, the digital spreadsheet and GeoGebra CAS; use of setting points with functions. These aim at presenting numerical approaches by means of differences and sums, carry out transfers between representations..
**Keywords** : Differences, accumulation, Geogebra, derivative, integral, noesis, semiosis.

[1] Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México.
[2] Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

## 1. Introducción

El curso de Cálculo diferencial e integral que se imparte en los diferentes bachilleratos, se centra en la utilización de algoritmos que propician solamente el desarrollo de habilidades mecánicas (por habilidades mecánicas entenderemos la secuencia de pasos algebraicos necesaria para llegar al resultado deseado), es decir, existe una tendencia a privilegiar el aspecto algebraico y se da poca importancia a la adquisición de los conceptos fundamentales del curso, tales como entender qué es una derivada o qué es una integral. Este esquema de enseñanza ha producido, entre otras cosas, una tendencia al uso de algoritmos por parte de los estudiantes.

Aun, cuando en el programa del curso de Cálculo diferencial e integral se menciona que, "Dada la importancia que tienen las definiciones y conceptos es conveniente que se introduzcan a un nivel intuitivo". En la práctica solamente se parte de estas ideas para llegar a la manipulación algebraica, es decir, que la enseñanza del Cálculo parte de una concepción estructural del mismo; lo anterior según menciona Duval (1993), en su artículo Semiosis y Noesis "los aprendizajes de base en matemáticas no pueden solamente ser la automatización de ciertas técnicas operatorias (cálculo), sino que debe también ser la coordinación de los diferentes registros de representación que son ahí utilizados".

Las investigaciones educativas realizadas, ponen de manifiesto la dificultad de aprehensión por parte del estudiante de los conceptos y resaltan la importancia que tiene la articulación de los diferentes registros de representación del concepto, para lograr una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos. Por ejemplo: Hitt (1992) considera que "un conocimiento asociado a un concepto es estable en un alumno, si él puede reconocer este concepto en sus diferentes representaciones".

Es importante señalar que algunas de las causas de la ausencia de utilización de diferentes registros de representación, por los estudiantes, en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, se pueden deber a:

- La complejidad en su utilización: Al respecto, Eisenber y Dreyfus (1966) mencionan que "siempre que es posible, los estudiantes parecen escoger una estructura simbólica para procesar información matemática más que visual", lo cual nos lleva a pensar que el uso de diferentes registros de representación puede ser un problema de aprendizaje.

- Pérdida de tiempo para usarlos: Por lo que es importante subrayar que con el advenimiento de las nuevas tecnologías, tales como super-calculadoras y computadoras, se puede tener acceso a diferentes registros de representación con un gasto reducido de tiempo
- Los profesores no consideran que se trata de un proceso significativo por el cual deben transitar los estudiantes, además de no encontrarles el valor didáctico en su incorporación, dando como resultado que no sean parte esencial de su trabajo en el aula. Esta causa la podemos considerar como un problema de enseñanza.
- En los libros de texto que son normalmente utilizados, se resalta solamente, la utilización de técnicas de manipulación algebraicas.

Resumiendo, la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en el bachillerato está basada sólo en la manipulación algebraica, esta tendencia de enseñanza, oculta al estudiante información muy importante para el entendimiento conceptual de la Derivada y la Integral. En este capítulo se expone un acercamiento numérico y gráfico para propiciar el entendimiento de los conceptos de derivada e integral y que vienen a ser un complemento de lo expuesto por Cortés (Cortés, 2012).

## 2. Marco Teórico

A la fecha, se ha publicado una gran cantidad de investigaciones educativas sobre el diseño de propuestas metodológicas desde diversos paradigmas para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el Nivel Medio Superior y Superior. Se han señalado los conflictos que enfrenta la enseñanza formal del Cálculo, considerando que privilegia a una algoritmia desprovista de significados para su aplicación en otras disciplinas o profesiones.

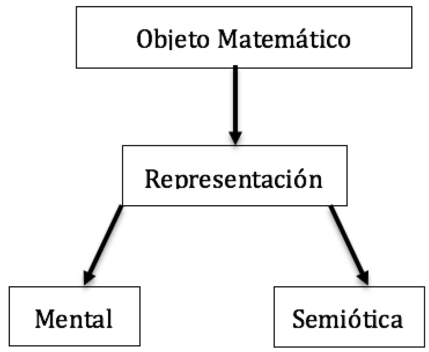
Otras publicaciones, presentan resultados obtenidos tanto en innovaciones que responden a las demandas institucionales de aplicar el conocimiento a Problemas Reales (Modelo Educativo por Competencias), como en las innovaciones que responden a la Reforma del Cálculo definida en los Estados Unidos desde 1986, con el propósito de presentar al Cálculo "más esbelto y lleno de vida". También se han publicado resultados de prácticas y estrategias didácticas, con o sin la implementación de recursos tecnológicos e innovaciones, para la enseñanza del Cálculo en diferentes ambientes y escenarios educativos, para promover la asignación de Significados a la Derivada y la Integral.

En relación a las dificultades en el aprendizaje del Cálculo Integral, Muñoz (2000), afirmó que existe un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico. Considera que se realiza un énfasis excesivo en el cálculo de antiderivadas e integrales indefinidas, descuidando a la conceptualización de la integral definida. En esa misma dirección, se ha identificado que los problemas que deben resolver los estudiantes en los que se aplica la integral, son muy estereotipados, reduciendo su actividad de aprendizaje a la mecanización de técnicas de integración, con una excesiva orientación algebraica, en descuido de lo geométrico y del significado del proceso de integración (Artigue, 2002).

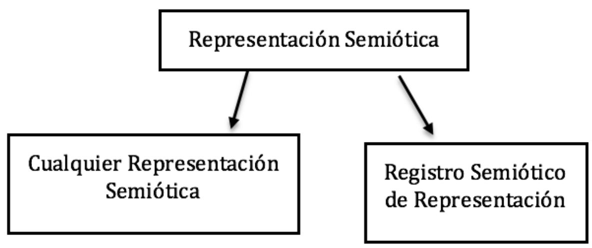
Las ideas teóricas en las que se basan las actividades que aquí se proponen, es explicada a través de la teoría de Registros semióticos de representación realizada por Duval (1988, 2003, 2005). Cortés (2002) menciona que "Para las matemáticas las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten trasformar ideas intangibles en imágenes u objetos reales, que pueden ser apreciados por nuestros sentidos (vista, tacto, etc.)". Además, Duval (1993) expone que "los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o a una experiencia intuitiva inmediata y es necesario entonces proporcionar representaciones". Con base en esto, Ferrara, Pratt, & Robutti (2006) citan que:

Es importante construir un entendimiento de las funciones a través de representaciones múltiples y problemas contextuales antes de poner énfasis en las definiciones estáticas. Una aportación de la tecnología es el ofrecer el acceso a varios tipos de representación de función. Esta aportación ha sido importante en la investigación PME a lo largo de las tres décadas pasadas.

Las representaciones se pueden considerar en dos sentidos, por un lado las representaciones mentales y por otro a las representaciones semióticas. Es necesario resaltar la relación del sujeto con las representaciones mentales y con las representaciones semióticas; Dupuis (1997) dice que "Las representaciones semióticas (RS) son conscientes (notorias para el sujeto) y externas (directamente visibles y observables) y las representaciones mentales son conscientes e internas".




Cualquier representación que utilice símbolos, signos, trazos geométricos, imágenes o simplemente trazos libres es una RS, por lo cual Duval (Ídem) define un tipo especial de RS que él llama Registro Semiótico de Representación (RSR).




Hay dos aspectos importantes a tratar en los registros de representación semiótica:

- El *Tratamiento* que es la transformación y manipulación en el mismo registro.
- La *Conversión* que es la transformación de un registro a otro.

A cada uno de estos aspectos se le deben asociar tareas cognitivas que permitan al estudiante desarrollar habilidades para determinar en cuál de los registros conviene trabajar con la información dada.

Las actividades diseñadas pretenden desarrollar habilidades como la visualización y la manipulación, en el registro numérico y el registro gráfico (el Tratamiento) así como el promover la transformación a entre los registros numérico y gráfico (la Conversión).

Duval (1993), hace una diferenciación de la aprehensión de los RSR y la aprehensión conceptual del objeto matemático, denominando semiosis a la primera y noesis a la segunda. Además, afirma que hay necesidad de utilizar en el aprendizaje, los diferentes RSR de un objeto matemático ya que considera que todo RSR es cognitivamente parcial en referencia a lo que ella representa y que de un RSR a otro existen diferentes aspectos de contenido que son representados. También, alerta sobre la posibilidad de confundir los objetos matemáticos con alguna de sus representaciones y menciona que una de las posibilidades que existen para no hacerlo, es usar múltiples sistemas de RSR.

Es de relevante importancia mencionar que "La coordinación de varios RSR es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos" Duval (1993). Es decir, que para lograr la aprehensión del objeto matemático (noesis) debemos, entre otras cosas, lograr primero la aprehensión de los diferentes RSR (semiosis).

De las investigaciones sobre el aprendizaje mediado con el uso de tecnología en la enseñanza del Cálculo, se ha señalado que no es suficiente enfocar el significado geométrico del concepto de Derivada e Integral de una función y que es necesario tener acercamientos numéricos a dichos conceptos. Por otra parte, Gordon y Gordon (2007), plantearon la idea de ajustes de funciones con datos numéricos y de un recurso computacional discreto para favorecer el descubrimiento del Teorema Fundamental del Cálculo por parte de los estudiantes, con el apoyo de recursos tecnológicos.

Sabemos, con base en diversos estudios, que el concepto de derivada e integral se enseña con métodos predominantemente algebraicos, estos reportes mencionan también que, al usar solamente el proceso algebraico, se oculta información relevante para el aprendizaje del dichos conceptos. Por ejemplo, Hughes (1990) ha observado que muchos estudiantes pueden calcular algebraicamente las derivadas de diversas funciones, pero no son capaces de determinar, en una gráfica, el signo de la derivada. Hughes (ídem) hace notar que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Por su parte, Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede "iluminar" la conexión funcional de los valores contenidos en ellas y la presentación algebraica.

Propuestas como la de Duval (1988, 1993 y 1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002), Pluvinage (2005), Cortés et al (2005) mencionan la importancia de que los contenidos matemáticos se traten desde un aspecto gráfico y numérico, ya que al ser representaciones de objetos matemáticos, cada uno de ellos, presenta distinta información y permite diferentes actividades cognitivas (por ejemplo, en las tablas numéricas se puede visualizar más claramente los incrementos de las variables). Cuando se usa un solo tipo de representación, se corre el riesgo de confundir al objeto con la representación, por lo que se propone el uso de múltiples representaciones (Duval, 1988).

Por otro lado, diversos investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio, por ejemplo Scher (1993) menciona que "la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes" y la noción de acumulación para el caso de la integral.

Tomando como base estas dos ideas:

- No solo usar el aspecto algebraico.
- Introducir el concepto de Derivada a través del uso de razón de cambio y el de Integral a través de acumulaciones.

Se coincide con Thompson y Silverman (2007), quienes realizaron investigación de índole cognitiva, considerando algunas dificultades sobre la concepción de *función* como *proceso;* plantearon que para comprender la definición formal de la derivada y la integral, los estudiantes deben conceptualizar primero la función de razón de cambio y la función de acumulación, como una conceptualización auxiliar; y afirmaron que "la mayor fuente de problemas cognitivos para la comprensión matemática de estas, se da porque es raro que dicha idea se enseñe en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, o si se enseña, es raro que se tenga intención de que se aprenda". Otro aspecto importante a considerar, es la nula información que se da a los estudiantes entre lo que es la derivada (derivada puntual) y lo que es la función derivada (derivada global), así mismo pasa con la integral.

## 3. Exposición de la Propuesta

En este trabajo se pretende abordar conceptos de Calculo Diferencial e Integral a través de un acercamiento numérico y gráfico. Se pone énfasis en explicar las diferencias y razones de cambio para la derivada y las acumulaciones para la integral.

### 3.1 Cálculo de la función Razón de Cambio

Partiendo del análisis de la definición de Derivada que es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Que también se puede escribir como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m_{sec}$$

Podemos escribir también que: $m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} (m_{sec})$; se puede observar que en la definición intervienen nomenclaturas y aspectos diferentes tales como: Diferencias, Pendiente de secante, pendiente de tangente, Limite, razones de cambio. En la figura 1 se da un bosquejo de aspectos que están presentes en la definición de Derivada.

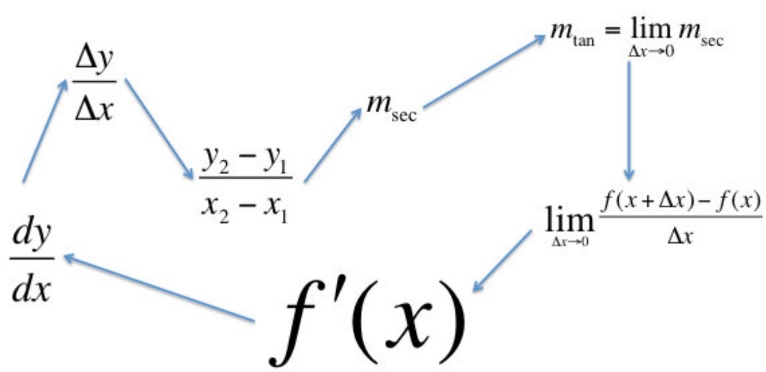



**Figura 1.** Diferentes representaciones de la derivada

Es en este sentido que las actividades para Derivada que se diseñaron fueron:

- Diferencias
- Pendientes

- Pendiente como función
- Límites
- Líneas secantes y tangentes
- Función derivada

El contenido de las actividades en términos generales es:

- Introducción de nomenclatura y contenido conceptual de cada término empleado.
- Introducción conceptual a la agrupación de la terminología.
- Introducción y aplicación del concepto de derivada.

Lo anterior se realiza a través de discusiones con integrantes del equipo, la clase y el profesor. Es importante destacar lo fundamental que resulta la mediación del profesor y la mediación con Geogebra como apoyo para la construcción de conocimientos. Aprovechando la versatilidad de Geogebra, se presenta la oportunidad de manipular las diferentes representaciones y además, observar el mismo fenómeno en diferentes perspectivas, con el fin de lograr la matematización.

Las actividades se diseñaron, pensando en que se realice trabajo individual y trabajo en colaboración, que se use el CAS, la representación gráfica y las tablas Geogebra como un medio de apoyo y de visualización.

Los objetivos de cada actividad son los siguientes:

- Diferencias
    - Entender el concepto de una diferencia matemática
    - Formulación y aplicación de “$\Delta x$” y “$\Delta y$”
- Pendientes
    - Formulación del concepto de la pendiente
    - Derivación de la ecuación de una línea recta
    - Formulación y aplicación de $\Delta x / \Delta y$
- Pendiente Como Función
    - Desarrollo de la expresión

- Formulación de la variable $h$

- Límites
    - Comparación entre un cambio promedio y un cambio instantáneo
    - Entender el concepto de límite matemático
    - Comprobación gráfica y analítica del límite
- Líneas Secantes y Tangentes
    - Definir el concepto de una línea tangente y secante
    - Entender la relación que existe entre las líneas tangentes y secantes
    - Definir la diferencia entre un cambio promedio y un cambio instantáneo
- Función Derivada
    - Introducir el concepto fundamental de la derivada
    - Formulación de la función derivada
- Aplicación de la Derivada
    - Entender el concepto de máximo, mínimo y punto de inflexión
    - Formulación matemática del máximo, mínimo y punto de inflexión
    - Entender cómo las derivadas influyen la forma de la gráfica de una función.

Las actividades propuestas juegan el rol del método activo (incluyen actividades de descubrimiento guiado por discusiones de reinvención). Guían al alumno en la construcción de conceptos bajo la estrategia de abajo hacia arriba. Se empieza con bloques fundamentales como sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, a través del descubrimiento y conceptualización de otros fenómenos se llega al significado de la derivada. A continuación se muestra la *Parte II (con CAS): Aplicación*, de la actividad *2. Pendientes*, cuya estructura conceptual es:

- Regla de tres y su relación con la pendiente
- Introducción de la ecuación lineal, $y = mx + b$
- La ecuación lineal a partir de dos puntos

- Manejo de datos y estadísticas, regresión lineal y exponencial, y gráfica de datos dentro usando Geogebra

---

**Parte II (con CAS): Aplicación**

La datación por radiocarbono, es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

| Antigüedad del Material (miles de años) | Cantidad de C-14 |
|---|---|
| 0 | 15.30 |
| 1 | 13.56 |
| 2 | 12.01 |
| 3 | 10.64 |
| 4 | 9.43 |
| 5 | 8.35 |
| 6 | 7.40 |
| 7 | 6.56 |
| 8 | 5.81 |
| 9 | 5.15 |
| 10 | 4.56 |
| 11 | 4.04 |
| 12 | 3.58 |
| 13 | 3.17 |
| 14 | 2.81 |
| 15 | 2.49 |
| 16 | 2.21 |
| 17 | 1.95 |

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

| Rango | Diferencia de Años | Diferencia de C-14 | Pendiente |
|---|---|---|---|
| 6 – 14 | | | |
| 6 – 12 | | | |
| 6 – 10 | | | |
| 6 – 8 | | | |

b) Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo, calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r).

| Rango | 7c | 7c – 7r |
|---|---|---|
| 6 – 14 | | |
| 6 – 12 | | |
| 6 – 10 | | |
| 6 – 8 | | |

c) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes mejor el valor de 7c?

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

e) Para calcular la cantidad de C -14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente del los siguientes rangos utilizaría? (6 – 10, 7 – 10, 8 – 10, 9 – 10) ¿Por qué?

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años

Dentro del sistema CAS, se pueden graficar datos. Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione vista, y después Hoja de Cálculo. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna "yrs" y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna "C14". Seleccione las dos columnas y en el menú de hoja de cálculo seleccione análisis de regresión. Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione Modelo de regresión. Dentro de estas opciones existen varios ajuste disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando Lineal (mx +b). ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando exponencial. ¿Cuál se ajusta mejor?

h) Utilizando la ecuación de mejor ajuste, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

i) Utilice la pendiente del rango 9 – 10 años para calcular la cantidad de C-14 a 9.3 y 9.6 años. Utilizando como rango 9.3 – 9.6 años, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años

j) Considere la cantidad de C-14 calculada a 9.5 años del inciso f), k), y j). ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

k) Con sus palabras explique la observación anterior.

l) Exprese por medio de una expresión algebraica lo que acaba de decir.

### 3.2 Cálculo de la Función Acumulación

Para el caso de la integral, considerando el Teorema Fundamental del Cálculo que consiste (intuitivamente) en la afirmación de que la derivación e integración de una función son operaciones inversas. Esto significa que toda función acotada e integrable (siendo continua o discontinua en un número finito de puntos) verifica que la derivada de su integral es igual a ella misma. Partiendo de esta idea y relacionando con las actividades sobre derivación, podemos pensar que cualquier función que queramos integrar, en realidad es el resultado de haberle sacado sus diferencias a otra función. Es decir, a la función razón de cambio ahora le empezamos a sumar y se construye la función que llamaremos Función Acumulación. Por ejemplo, si $A(x)$ es la función Acumulación y $f(x)$ la función inicial $f(x)$ o función razón de cambio, entonces la función $A(x)$ se construye de la siguiente manera. Iniciamos dando un valor inicial o condición inicial, por ejemplo $A(n-1)=3$, posteriormente se realiza $A(n)=A(n-1)+f(n),\ \ A(n+1)=A(n)+f(n+1)\ldots\ n\in(-\infty,\infty)$.

Un ejemplo, dando $f(x)=3x^2+x-4$ construimos su tabla de valores y sacamos la primera diferencia.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -4 | 0 | 10 | 26 | 48 | 76 | 110 | 150 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $RC(x)$ | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 |

Al renglón de las diferencias en este caso $RC$ le agregamos uno nuevo que le llamaremos $x$ y damos un valor inicial a $x$ (condición inicial), en este caso $x=0$ incrementamos en 1 la $x$. Con ello podemos construir la Función Razón de Cambio, tal y como se muestra en la tabla siguiente:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $RC(x)$ | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 |

En este caso, la Función Razón de Cambio $RC(x)\ =\ 6x+4$.

Ahora vamos a hacer el caso contrario si tenemos la función $RC(x)$ vamos a construir la función acumulación $A(x)$:

Tomamos una condición inicial, por ejemplo que cuando $x=0$, $A(x)=0$ entonces realizamos:

$A(x+1)=A(x)+RC(x+1)=0+4=4$

$A(x+2)=A(x+1)+RC(x+2)=4+10=14$

$A(x+3)=A(x+2)+RC(x+3)=14+16=30$

$A(x+4)=A(x+3)+RC(x+4)=30+22=52$

$etc.$

Función Acumulación $A(x)$:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\downarrow$ | $\nearrow\downarrow$ | $\nearrow\downarrow$ | $\nearrow\downarrow$ | $\nearrow$ | | |
| $A(x)$ | 0 | 4 | 14 | 30 | 52 | 70 | 104 |
| $RC(x)$ | 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 |

Por lo tanto nuestra función Acumulación $A(x)$ es:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ | 0 | 4 | 14 | 30 | 52 | 70 | 104 |

Obteniendo la expresión algebraica de $A(x)$, a través de plantear y resolver un sistema de ecuaciones obtenemos que $A(x) = 3x^2 + x$. Cuando el Incremento de $x$ es muy pequeño ($\Delta x \to 0$) nos estaremos acercando a la función integral. A continuación se presentan dos casos de funciones de acumulación haciendo un acercamiento numérico y grafico. El primer ejemplo es el de la función a $f(x) = 3$ y el segundo el de una función no polinomial de la forma a $f(x) = \sqrt{x+1}$.

### *3.2.1 Ejemplo I: Acumulaciones de una Función Polinomial*

Partiendo de una función constante, sea la función $f(x) = 3$ cuando el incremento es $x = 1$.

La función $f(x) = 3$, se puede ver en la figura 1.

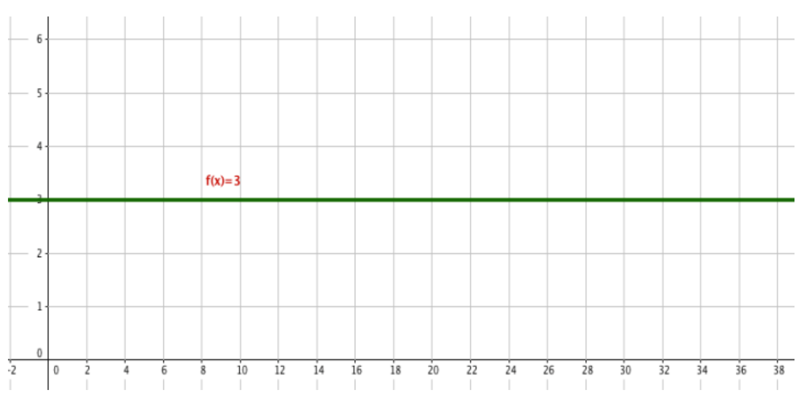



**Figura 1.** Gráfica de la función $f(x) = 3$

• 1ª acumulación.

Para calcular la primera acumulación o para obtener una aproximación de la primera integral de la función $f(x) = 3$ cuya función llamaremos $B(x)$, necesitamos dar un valor inicial por ejemplo $B(0) = -5$, y sumando la función $f(x)$, obtenemos la primera acumulación del siguiente modo:

Cuando $x$ vale 0 (valor inicial), $B(0) = -5$, después incrementando en una unidad a $x$, $x = 1$, $B(0)$ se incrementa en *3* unidades (porque $f(x) = 3$)) obteniéndose que $B(1) = -5 + 3 = -2$. Incrementando a $x$ en 1 unidad, $x = 2$, $B(1)$ se incrementa en *3* unidades, $B(2) = B(1) + 3 = -2 + 3 = 1$y así sucesivamente. En la tabla 1 se ven los resultados para $x$ desde 0 a 10.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B(x) | -5 | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 |
| f(x) | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | |

**Tabla 1.** Tabla de valores de $B(x)$ y $f(x)$.

Tomando 2 puntos para calcular la expresión algebraica de la función $B(x)$, se encuentra que la función representa a la recta $B(x) = 3x - 5$. El proceso que se realizó para obtener la primera acumulación, se puede representar gráficamente como sigue:

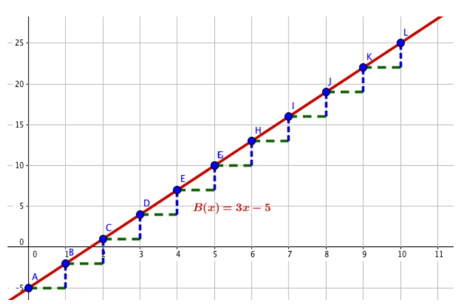



**Figura 2.** Tratamiento de la Primer Acumulación

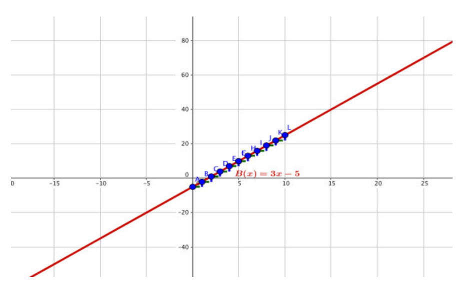



**Figura 3**. Comportamiento de la función lineal $B(x)$

• 2ª acumulación

Tomando los valores obtenidos de $B(x)$, construyamos la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$. Para esto, se necesita dar un valor inicial $C(0) = -3$. Se procede a elaborar la Tabla 2 del modo siguiente.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C(x) | -3 | -8 | -10 | -9 | -5 | 2 | 12 | 25 | 41 | 60 | 82 |
| B(x) | -5 | -2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | |

**Tabla 2.** Tabla de valores de $C(x)$ y $B(x)$.

Con la condición inicial y la suma de la función de la $B(x)$, se ha construido una función de segundo grado, de la forma $C(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tomando tres puntos para calcular la expresión algebraica y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtiene que los parámetros son $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_1 = \frac{13}{2}$, $a_0 = -3$,, por lo expresión algebraica de la función es $C(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{2}x - 3$. El proceso para obtener la segunda acumulación, se puede observar en la gráfica siguiente:

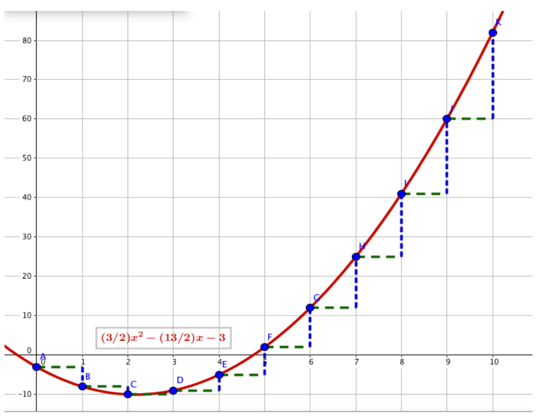



**Figura 4.** Esta gráfica muestra solo parte de la función $C(x)$

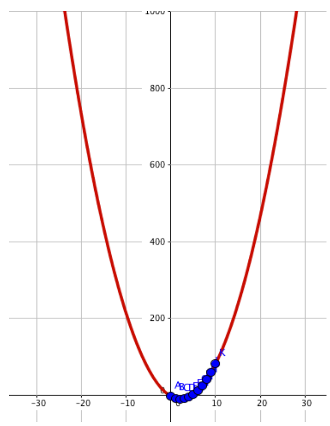


**Figura 5.** Gráfica para otros valores de $x$

- 3ª acumulación

Tomando los valores obtenidos de $C(x)$, construyamos la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$. Primeramente se da un valor inicial $D(0) = -1$ y se elabora la tabla 3 de acumulaciones:

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D(x) | -1 | -4 | -12 | -22 | -31 | -36 | -34 | -22 | 3 | 44 | 104 |
| C(x) | | -3 | -8 | -10 | -9 | -5 | 2 | 12 | 25 | 41 | 60 |

**Tabla 3.** Tabla de valores de $D(x)$ y $C(x)$.

Con la ayuda de la función cuadrática de la forma $C(x)$, se construye la nueva función $D(x)$, que en este caso es de tercer grado y es de la forma $D(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, para encontrar los valores de los coeficientes se toman 4 puntos y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se encuentra que valen $a_3 = \frac{1}{2}; a_2 = -4; a_1 = \frac{1}{2}; a_0 = -1$, por lo que la expresión algebraica de la función es: $D(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1$. En la siguiente gráfica se observa el procedimiento usado para obtener la tercera acumulación, partiendo de la segunda acumulación.

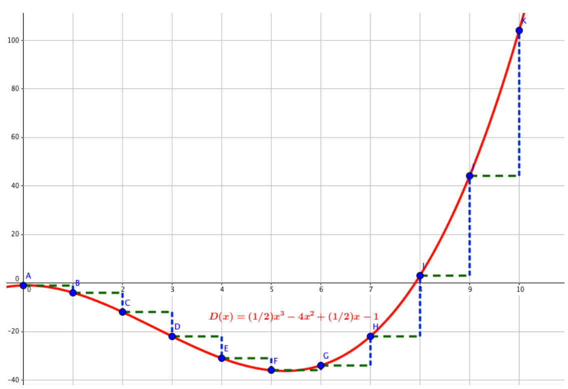



**Figura 6.** Se muestra el intervalo $[\mathbf{0}, \mathbf{10}]$ cuando $x = 1$

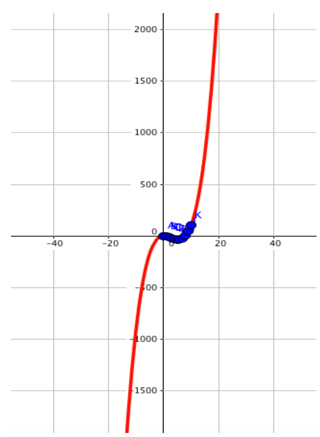


**Figura 7.** Gráfica de la curva $D(x)$

En la siguiente tabla, se hace una comparación de las acumulaciones obtenidas para la función polinomial y sus respectivas integrales.

| | $\boldsymbol{f(x) = 3}$ | |
|---|---|---|
| 1ª acumulación | $3x - 5$ | $\int 3dx = 3x + c_1$ |
| 2ª acumulación | $\frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x - 3$ | $\int (3x + c_1)dx = \frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2$ |

| | | |
|---|---|---|
| 3ª acumulación | $\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ | $\int \left(\frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2\right)dx = \frac{1}{2}x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2x + c_3$ |

**Tabla 4.** Comparación de las funciones

- **Observaciones:**
  - Se puede observar que en efecto, la 1ª, 2ª y 3ª acumulación se aproximan a la 1ª, 2ª y 3ª integral de $f(x) = 3$, respectivamente.
  - En cada acumulación, los coeficientes del coeficiente mayor, son los mismos que de los coeficientes del coeficiente de las integrales respectivas. Es decir, en la 1ª acumulación, el valor del coeficiente del término de primer grado es 3 para los 2.
  - En la tabla se observa, que el término constante de cada función acumulación es la condición inicial de que partimos.

### *3.2.2 Ejemplo II: Acumulaciones de una Función No Polinomial*

Se obtienen las sumas en una Función no polinomial por ejemplo $f(x) = \sqrt{x+1}$ cuando el incremento de $x$ es $x = 1$. Partiendo de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ cuando el incremento es $x = 1$. En la figura de abajo se puede apreciar la tabla 5 de valores de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1.41 | 1.73 | 2 | 2.23 | 2.44 | 2.64 | 2.82 | 3 | 3.16 | 3.31 |

**Tabla 5.** Valores de la función $f(x)$.

La función $f(x) = \sqrt{x+1}$, se puede ver graficada para algunos puntos en la figura 8.

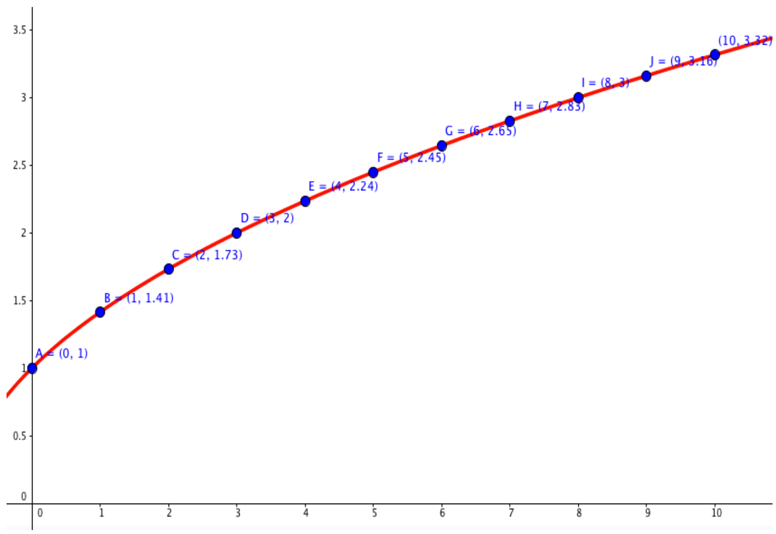



**Figura 8.** Gráfica de la función $f(x)$

## Construcción de la 1ª, 2ª y 3ª acumulación

- 1ª acumulación

Para calcular la función de la primera acumulación que se llamará $B(x)$ y que es una aproximación de la primera integral de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$. Primero se da un valor inicial por ejemplo $B(0) = 0.5$ y sumando los valores de la función $f(x)$ se obtienen los valores de la primera acumulación de la siguiente manera:

Cuando $x$ vale 0 (valor inicial), $B(0) = 0.5$ (es el valor inicial), después incrementado en una unidad las $x$, $x = 1$, por lo que $B(0)$ se incrementa en el valor de $f(0)$, el siguiente punto $B(1)$ es igual a $B(1) = B(0) + f(0)$. Incrementando a $x$ en una unidad, $x = 2$, por lo que $B(2) = B(1) + f(1)$ y así sucesivamente como se muestra en la tabla 6.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B(x) | 0.5 | 1.5 | 2.91 | 4.64 | 6.64 | 8.87 | 11.31 | 13.95 | 16.77 | 19.77 | 22.93 |
| f(x) | 1 | 1.41 | 1.73 | 2 | 2.23 | 2.44 | 2.64 | 2.82 | 3 | 3.16 | |

**Tabla 6.** Valores de la funciones $B(x)$ y $f(x)$

En la siguiente figura se pueden ver graficados algunos puntos de la 1ª acumulación, así como el comportamiento general de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$; también se ha graficado la 1ª integral de la función que es: $R(x) = \int \sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}$

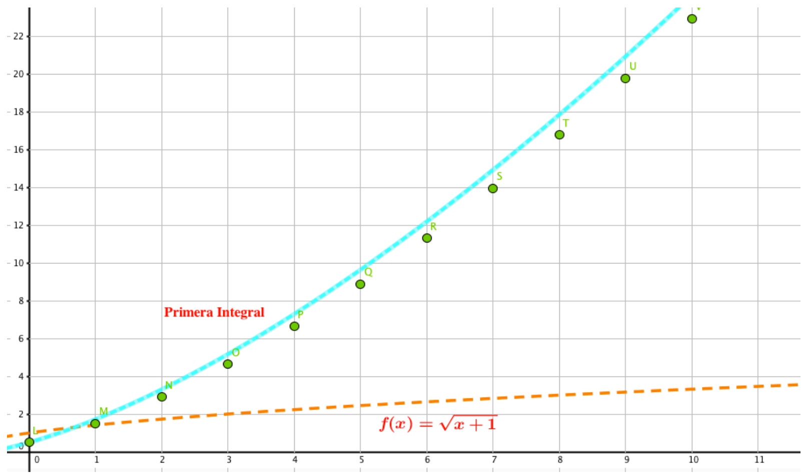



**Figura 9.** Gráfica de la función $f(x)$, $B(x)$ y $R(x)$

- 2ª acumulación

Para obtener la segunda acumulación o en este caso, una aproximación de la segunda integral de $f(x)$, utilizando la función acumulación $B(x)$, se forma la segunda acumulación, que llamaremos $C(x)$, de la siguiente manera:

Se da un valor inicial arbitrario, por ejemplo $C(0) = 1$. Se incrementa en una unidad a la $x$, llegando a $x = 1$, para obtener $C(1)$ se realiza $C(1) = C(0) + B(0)$. Para $x = 2$, incrementamos $C(1)$ en $B(1)$ unidades: $C(2) = C(1) + B(1)$. Y así sucesivamente, como se puede apreciar en la tabla 7.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C(x) | 1 | 1.5 | 3 | 5.91 | 10.55 | 17.19 | 26.06 | 37.37 | 51.32 | 68.09 | 87.86 |
| B(x) | 0.5 | 1.5 | 2.91 | 4.64 | 6.64 | 8.87 | 11.31 | 13.95 | 16.77 | 19.77 | |

**Tabla 7.** Valores de la funciones $C(x)$ y $B(x)$.

En la figura siguiente, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la segunda acumulación y de cómo se aproximan a la 2ª integral de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$, que es $R(x)$ la cual algebraicamente se expresa como: $M(x) = \int R(x)dx = \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}x + \frac{11}{15}$.

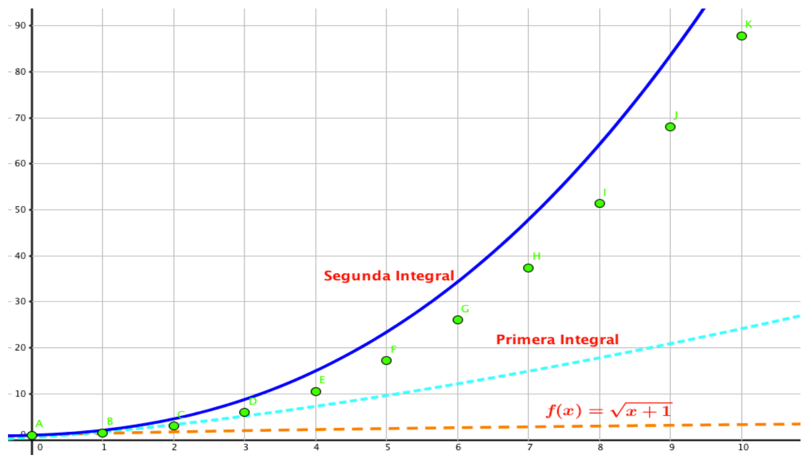



**Figura 10.** Gráfica de la función $f(x), R(x), C(x)$ y $M(x)$

- 3ª acumulación

Para obtener la tercera acumulación o en este caso, una aproximación de la tercera integral de $f(x)$, utilizando la función acumulación $C(x)$, se forma la tercera acumulación, que llamaremos $D(x)$, primeramente dar un valor inicial arbitrario por ejemplo $D(0) = 1.5$, realizamos las sumas$D(1) = D(0) + C(0) = 1.5 + 1 = 2.5$; $D(2) = D(1) + C(1) = 2.5 + 1.5 = 4$ y así sucesivamente como se puede apreciar en la Tabla 8.

| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D(x) | 1.5 | 2.5 | 4 | 7 | 12.91 | 23.46 | 40.65 | 66.71 | 104.08 | 155.4 | 223.49 |
| C(x) | 1 | 1.5 | 3 | 5.91 | 10.55 | 17.19 | 26.06 | 37.37 | 51.32 | 68.09 | |

**Tabla 8.** Valores de la funciones $C(x)$ y $D(x)$

En la figura siguiente, se puede apreciar el comportamiento de algunos de los puntos de la función resultante de la 3ª acumulación $D(x)$ y cómo se aproximan a la 3ª integral, la cual algebraicamente se expresa como:

$$P(x) = \int M(x)dx = \frac{8}{105}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{15}x + \frac{299}{210}$$

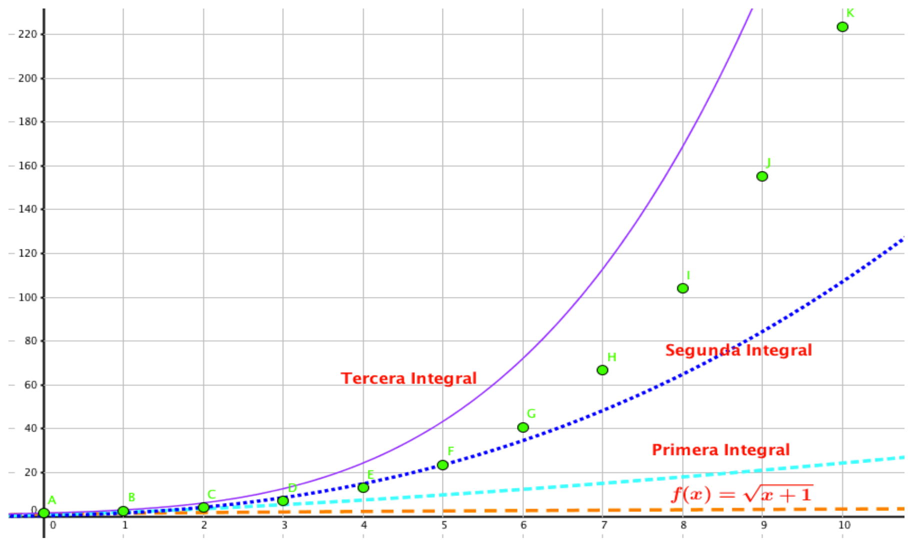



**Figura 11.** Gráfica de la función $f(x), R(x), M(x), D(x)$ y $P(x)$

Posteriormente se puede utilizar una herramienta como Geogebra para encontrar la expresión algebraica asociada a las funciones $B(x), C(x)$ y $D(x)$ a través del ajuste de curvas. Se puede observar, que este método da una buena aproximación a la integral. Ahora bien, repitiendo los pasos anteriores pero con $\Delta x$ más pequeños, por ejemplo $\Delta x = 0.1$, lo que se obtiene es una mejor aproximación a las correspondientes funciones integrales.

### 3.3 Descripción del procesamiento cognitivo que se espera en los estudiantes

Con esta propuesta se espera que los estudiantes realicen, de forma iterada los cinco pasos del procesamiento cognitivo que se describen a continuación:

- En un primer paso, realizaron el *tratamiento aritmético* (con acciones cognitivas de forma interna al Registro Numérico) para identificar significados de las acumulaciones con la orientación del profesor.
- En un segundo paso, realizaron la *conversión entre el registro numérico y el registro geométrico* a través del potencial que ofrece el ajuste de datos con funciones en Geogebra.
- En tercer paso, realizaron un *tratamiento figural* (con acciones cognitivas hacia el interior del Registro Geométrico) para identificar el comportamiento gráfico de la función de ajuste en Geogebra
- Como un cuarto paso, se identifica *la conversión entre el registro geométrico y el registro algebraico* que brinda el Geogebra.
- En el quinto paso, realizaron un *tratamiento algebraico*, (interno al Registro Algebraico), para identificar la relación existente entre la función real y la función que corresponde a la integral de la misma.

Para obtener la segunda y tercer integral de la función, se realizaron de forma iterada los cinco pasos descritos. De esta forma, se propició la actividad de coordinación de registros semióticos para la aprehensión del concepto de la integral de la función.

## 4. Conclusiones

La investigación educativa presente, permitió observar que el proceso de acumulación y los procesos de acumulación-ajuste, son una buena manera de aproximar a la integral. Si en un curso introductorio de cálculo integral, se les explicara este método para aproximarse numéricamente a la integral, se promovería el conocimiento de lo que realmente es “la integral”.

Aunque es algo tedioso estar haciendo tablas y en este caso, encontrar una función “explícita” de la función acumulación, como en el caso de la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, se puede ver que el hacer esto nos da un acercamiento numérico que pueda permitir al estudiante entender ideas básicas de conceptos del cálculo integral.

El presente acercamiento numérico, se constituye en una alternativa que toma en cuenta aspectos cognitivos que permitan la conceptualización y apropiación de la integral como función de acumulación, a fin de propiciar la construcción del significado de la definición formal de la integral como el límite de sumas de Riemann.

## Referencias


Artigue, M. (2002). Analysis. En Tall, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking (167-198). Nueva York: Kluwer Academic Publishers.

Cortés, C. (2012). Construyendo funciones derivadas. Revista UNION. Marzo de 2012, Número 29, páginas 23-34 ISSN: 1815-0640. España.

Duval R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. Anales de Didactique et de Sciences Cognitives 1(1988) 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En Antología en Educación Matemática (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5(1993) 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Investigaciones en Matemática Educativa II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. Myriam Vega Restrepo (1ª ed.). Colombia. Artes Gráficas Univalle

Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. Mexico, 41-76.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. En Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10, 5-53.Eisenber y Dreyfus (1966). On visual versus analytical thinking in mathematics. PME-10 congress (1966). London pp. 153-158)

Gordon, S. P. & Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of calculus. Mathematics Teacher 100 (9), 597-604.

Hitt. F. (1992). Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. Memorias del IV Simposio sobre Investigación en Matemática Educativa 1992.

Muñoz, O. G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 3(2), 131- 170.

Thompson, P. W. & Silverman, J. (2007). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp.117-131). Washington D.C.: Mathematical Association of America

# 9 VARIACIÓN LINEAL Y MOVIMIENTO: DE LA EXPERIENCIA CORPORIZADA A LOS SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES

María Teresa Dávila Araiza[1], Agustín Grijalva Monteverde[1]


## Resumen

En este trabajo discutiremos y analizaremos un diseño didáctico para el estudio de la variación lineal y de la noción de función lineal como modelo de ésta. El diseño consiste en actividades que parten de situaciones problema relacionadas con experiencias corporizadas de variación (movimiento y llenado de recipientes), buscando promover en el estudiante la emergencia de significados no necesariamente institucionales, los cuales entren a un proceso de refinamiento e institucionalización al confrontarse en el salón de clase como entorno socio-cultural. El diseño de las actividades, así como un análisis a priori de éstas, está guiado por los criterios de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.


**Palabras clave**: Variación lineal, función lineal, idoneidad didáctica.


## Résumé

Dans cet article, nous discuterons et analyserons un design didactique portant sur l'étude de la variation linéaire ainsi que sur l'étude de la notion de fonction linéaire en tant que modèle. Le design comprend des activités basées sur des situations problématiques liées à des expériences de variation incarnées (mouvement et remplissage de récipients), et qui visent à favoriser chez l'élève l'émergence de significations pas nécessairement institutionnelles. Ces significations vont rentrer dans un processus de raffinement et d'institutionnalisation lorsqu'elles seront soumises en salle de classe comme environnement socioculturel. La conception des activités et leur analyse a priori sont guidées par les critères de pertinence didactique de l'Approche Ontosémiotique de la Connaissance et de l'Instruction Mathématique.


**Mots-clés** : variation linéaire, fonction linéaire, pertinence didactique.


## Abstract

In this chapter, we will discuss and analyze a didactic design to teach linear variation and linear function as model of linear variation. We propose several activities around problem situations related to embodied experiences of variation (motion and filling of containers), in order to promote in students the emergency of no necessarily institutional meanings, which gradually will be refine and institutionalized in the classroom as sociocultural environment. As a guide for both the designing of the didactic activities and for a priori analysis of these, we rely on the criteria of didactic suitability of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction.


**Keywords**: Linear variation, linear function, didactic suitability.

---

[1] Universidad de Sonora, México.

## 1. Introducción

Una problemática que permea a la educación matemática a lo largo de todos los niveles educativos es que el tratamiento dado a los objetos matemáticos está fuertemente desligado de los contextos propios de aplicación de estos objetos. Sin importar si el enfoque de estudio es de carácter formal, intuitivo o algorítmico, en los programas de estudio, los textos y la práctica docente, los objetos matemáticos se presentan aislados de los problemas que les dan origen y de las situaciones en las que pueden ser empleados.

En el caso de la función lineal en el nivel educativo medio superior -el cual nos ocupa en este trabajo- podemos observar que su tratamiento se centra, en el mejor de los casos, en cubrir el estudio de las representaciones semióticas de carácter analítico, geométrico y numérico, poniendo énfasis en el tipo de expresión analítica que la distingue, las características de su gráfica en un sistema cartesiano y la elaboración de tablas numéricas. Es posible que también se haga un análisis de las unidades significativas (Duval, 2017) de cada representación y se promueva la coordinación entre ellas, en el sentido de Duval (2006). Sin embargo, este tratamiento de la función lineal no toma en cuenta aspectos como: las representaciones semióticas personales de los estudiantes (que son parte esencial de sus significados personales), los contextos extramatemáticos y la noción de variación lineal.

Por un lado, las representaciones semióticas empleadas en la enseñanza de la función lineal son solamente las representaciones institucionales (tablas, gráficas cartesianas y expresiones analíticas, promovidas por el profesor, el currículo, los libros de texto o la comunidad matemática). Difícilmente se toma en cuenta que los estudiantes pueden elaborar diferentes representaciones semióticas que no necesariamente coinciden con las institucionales (como se muestra en la Figura 1), pero que pueden ayudar a desarrollar sus significados personales en un primer momento.

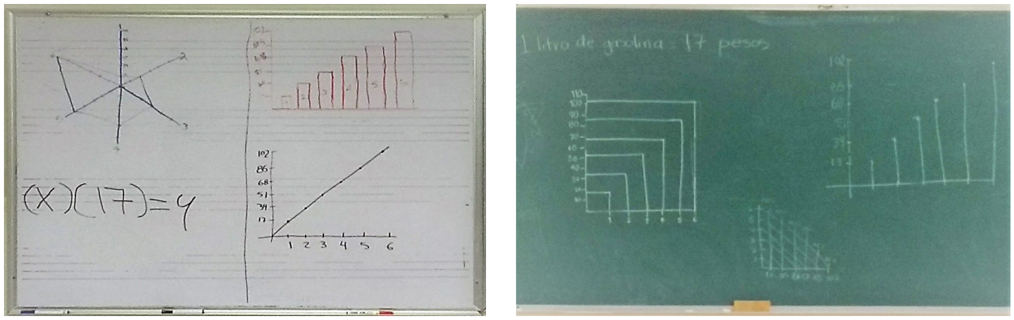



**Figura 1.** Gráficas producidas por estudiantes mexicanos de segundo semestre del nivel medio superior (15-16 años) para representar la relación entre el costo de la gasolina y la cantidad de litros adquiridos

Por otro lado, en el estudio de la función lineal está ausente la noción de variación lineal, como objeto que "cobra vida" por sí mismo y cuyo estudio da origen a la función lineal como modelo de la variación en diversos contextos extramatemáticos.

Al respecto de esta problemática, en este trabajo ponemos énfasis en el estudio de dos tipos de fenómenos de variación lineal, que son el movimiento y el llenado de recipientes, para plantear situaciones problema de cuya resolución se promueve la emergencia de la función lineal como modelo de la variación lineal, tomando como materia prima los significados personales de los estudiantes.

La situación problema que diseñamos como punto de partida, retoma dos aportes de la investigación en didáctica de las matemáticas. El primero, es una hipótesis central de las investigaciones realizadas a la luz del enfoque denominado *cognición corporizada*, la cual sostiene que la experiencia y actividad sensorio motoras de los estudiantes juegan un papel esencial en su actividad cognitiva, particularmente en la actividad matemática, y constituyen un sustrato para las ideas matemáticas abstractas (Lakoff & Núñez, 2000; Nemirovsky & Ferrara, 2009; Wilson, 2002; Hitt & González-Martín, 2016; Sriraman & Wu, 2014). El segundo, considera la posibilidad de que las producciones no institucionales de los estudiantes, realizadas al abordar un problema matemático, faciliten la comprensión y apropiación de las representaciones institucionales, como lo explora el trabajo de Hitt y González Martín (2015) con respecto a la covariación y la representación gráfica de la función.

Cristalizamos las ideas anteriores en un diseño didáctico que se propone involucrar a los estudiantes en un proceso de estudio de la variación lineal, partiendo de la experiencia corporizada de observar el movimiento de dos estudiantes que caminan a velocidades distintas entre sí, pero constantes. Se promueve una etapa inicial que tiene como objetivo que el estudiante tome consciencia de los elementos involucrados en el fenómeno de variación observado, a través de la producción autónoma de representaciones verbales, icónicas y numéricas de la experiencia observada, tomando como materia prima sus recursos personales (representaciones, nociones, procedimientos, etc.) no necesariamente institucionales.

Posteriormente, se plantean situaciones que promueven la emergencia de lenguajes y procedimientos más refinados en torno a la proporcionalidad y la variación lineal. Se continúa con una situación de institucionalización en un medio digital diseñado con GeoGebra, en la cual se promueve la articulación de representaciones semióticas y la emergencia de nuevas situaciones problema y propiedades de la función lineal en el contexto del movimiento. Se incluye también una actividad de variación no lineal, como un medio para reafirmar las características de la variación lineal y el uso institucionalizado de las diferentes representaciones semióticas. Por último, se incluyen dos actividades de llenado de recipientes cilíndricos con el propósito de estudiar la variación lineal en un contexto diferente al de movimiento.

## 2. Sustento teórico del diseño didáctico

El diseño de las actividades didácticas sobre movimiento corporizado y llenado de recipientes, se fundamenta básicamente en los criterios de idoneidad didáctica, donde se contempla la elaboración de configuraciones y trayectorias de objetos matemáticos desde perspectivas epistémicas, cognitivas, mediacionales, ecológicas, afectivas e interaccionales, dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, EOS (Font, Breda & Seckel, 2017; Godino, Bencomo, Font, & Wilhelmi, 2006).

En el EOS se parte de concebir a la matemática conformada por tres componentes: es una actividad de resolución de problemas, es un cuerpo de conocimientos organizado y estructuralmente sistematizado, socialmente construido, y es un lenguaje.

Estos tres componentes se reflejan siempre en la actividad matemática y, en dependencia de las concepciones de cada individuo o grupo, el énfasis se coloca en uno u otro. Para el diseño de las actividades didácticas aquí mostradas, se toman en cuenta las tres componentes de manera equilibrada, partiendo de la solución de situaciones problema con las que se promueve la emergencia de nuevos conocimientos para los estudiantes, la generación de un lenguaje técnico propio de la variación y las funciones lineales y la discusión de elementos sistematizados, por medio de procesos de institucionalización.

El EOS es un enfoque de carácter antropológico pragmático, cuya base es la consideración de las llamadas prácticas matemáticas, a las que nos referimos, siguiendo a Godino y Batanero (1994, p.8) como "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución o generalizarla a otros contextos y problemas".

Cuando se realiza alguna actividad matemática, ya sea de resolución de problemas, de comunicación o de generalización, algunas prácticas son útiles para el logro de los objetivos planteados y otras no. Cuando nos son útiles para el logro de los objetivos, decimos que las prácticas tienen sentido o que son prácticas significativas.

Por otra parte, algunas prácticas son significativas en casos particulares o específicos y otras se pueden usar con frecuencia. A estas últimas las llamaremos prácticas prototípicas.

En la resolución de problemas nos interesa observar, más que las prácticas aisladas o específicas, los sistemas de prácticas que entran en juego en la actividad matemática. Con una perspectiva pragmática, en el EOS se asume que el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas matemáticas significativas prototípicas asociado a la resolución de un tipo de situaciones problema. En términos coloquiales, diremos que el significado de un objeto matemático es todo aquello que podemos hacer y decir del objeto.

Cuando los sistemas de prácticas son propios de un individuo, se habla de *significados personales* y si son compartidas en un grupo o comunidad, se dice que son *significados institucionales*, propios de ese grupo o comunidad (Godino & Batanero, 1998).

Es común que, en algunos marcos teóricos, cuando se habla de objetos matemáticos, se haga referencia a los conceptos y, quizá a los algoritmos y teoremas empleados en la resolución de problemas. En el caso del EOS se reconocen estos objetos matemáticos, pero, partiendo de la noción de práctica matemática y de sistemas de prácticas, se plantea que por objeto matemático debe considerarse a una gama más amplia de preceptos y nociones.

La actividad matemática se inicia con la resolución de alguna situación problema, la cual se reconoce como un objeto matemático en sí mismo. Considerando entonces los emergentes de la resolución de situaciones problema se considera que los *objetos matemáticos primarios* son los siguientes: *situaciones problema*, *lenguaje*, *procedimientos*, *proposiciones* o *propiedades*, *argumentos* y *conceptos* (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002).

Cuando nos enfrentamos a una situación problema determinada, en el proceso de solución emergen nuevas situaciones problema, nuevos lenguajes, nuevos procedimientos, nuevas propiedades, nuevos argumentos y nuevos conceptos y a tales emergentes los denominamos objetos matemáticos primarios. Si los emergentes de los sistemas de prácticas significativas prototípicas son construcciones particulares de un individuo, decimos que se trata de *objetos personales* y si son compartidos en el seno de una comunidad, decimos que son *objetos institucionales*.

Con esta concepción, planteamos que el propósito general de la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes, al resolver situaciones problema determinadas, transiten de las significaciones personales hacia las significaciones institucionales que se pretendan, a partir de las que se tomen como referencia. Para tal efecto, en el diseño de actividades didácticas deben tomarse en cuenta situaciones que hagan emerger objetos y significaciones personales y, a partir de tales significaciones, avanzar hacia las *significaciones institucionales pretendidas* en la comunidad en las cuales estamos insertos.

El logro de este objetivo de la enseñanza de las matemáticas hace necesario tomar en cuenta el entramado de objetos matemáticos primarios de la actividad matemática y la organización sistemática en configuraciones y trayectorias que tomen en cuenta las dimensiones epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica. La organización de las actividades didácticas se realiza, con base en el EOS, considerando la idoneidad didáctica, la cual se concibe, siguiendo a Godino (2013), como la congruente articulación sistémica de los siguientes seis componentes:

- *Idoneidad epistémica*, grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*, grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad interaccional*. Grado en el que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar *conflictos semióticos* (discrepancia de significados entre sujetos) potenciales y la posibilidad de resolverlos durante la puesta en escena de las actividades didácticas.
- *Idoneidad mediacional*, grado en el cual se adecúan los recursos existentes, tanto materiales como los de disposición de tiempo.
- *Idoneidad afectiva*, grado de interés y motivación del alumno con las situaciones problema planteadas y las tareas asignadas en el proceso de enseñanza.
- *Idoneidad ecológica*, grado en que el proceso de estudio se corresponde con el entorno, tanto curricular del curso específico, como del uso de los conocimientos matemáticos en otras asignaturas, sean de matemáticas o no, en situaciones extraescolares y otras.

En el diseño de las actividades didácticas aquí presentadas se tomaron en cuenta estas idoneidades, considerando un conjunto de indicadores para cada una de ellas (Godino, 2013). Como ejemplo de la forma en la cual se usaron las idoneidades, se ilustra a continuación, por medio de tablas, la forma en la cual se organizaron las actividades desde el punto de vista de la idoneidad epistémica. La Tabla 1 se refiere a los indicadores o descriptores usados (adaptada de Grijalva & Ibarra, 2017) y las tablas siguientes a las actividades proyectadas, que en su conjunto constituyen la trayectoria epistémica del diseño.

| Componente | Indicadores | | | |
|---|---|---|---|---|
| Situaciones problema | Contextualización | Ejercitación | Aplicación | Problematización |
| Lenguajes | Verbal | Gráfico | Tabular | Expresión analítica |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Reglas: definiciones proposiciones procedimientos | Claros | Correctos | Adaptación al nivel educativo | Enunciados fundamentales al nivel educativo | Generar o negociar definiciones, proposiciones y procedimientos |
| Argumentos | Explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas al nivel educativo | Promoción de situaciones para argumentar | | | |
| Relaciones | Entre los objetos matemáticos | Identificación de significados de los objetos intervinientes | Articulación de significados de los objetos intervinientes | | |

**Tabla 1.** Componentes e indicadores de idoneidad epistémica

| | | | |
|---|---|---|---|
| Situaciones problema | Movimiento de dos estudiantes, uno a una velocidad y el otro más rápido, pero constantes ambas. Un estudiante parte del origen y otro de una posición más avanzada. | Análisis de gráficas cartesianas, unas discretas y otras continuas, de los movimientos de los estudiantes. | Partiendo de información del movimiento de un estudiante en una tabla de valores numéricos, reconocer la gráfica que lo representa. Articular registros numérico, gráfico y analítico. |
| Procedimientos | -Descripción del movimiento, elaboración de representación verbal, gráfica y numérica.<br>-Determinar valores de la | -Reconocimiento de patrones de comportamiento a partir de gráficas cartesianas, determinando posición, tiempo y velocidad. | -Análisis de movimiento a partir de datos numéricos en una tabla, determinando posición y tiempo en el recorrido.<br>-Determinar la |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | posición en otros instantes de tiempo, a partir del patrón de comportamiento y discusión en equipos.<br>-Determinar el cambio en la posición en un intervalo de tiempo. | -Reconocimiento de una correspondencia entre valores de tiempo y posición en la gráfica.<br>-Determinar valores de la posición en instantes de tiempo no observados, usando la propiedad de proporcionalidad en el patrón de comportamiento. | posición en instantes de tiempo no observados, a partir del patrón de comportamiento y la propiedad de proporcionalidad en los incrementos de posición y tiempo. Comparación de gráficas y representación analítica. |
| Conceptos | -Variable independiente y variable dependiente.<br>-Covariación.<br>-Proporcionalidad.<br>-Función lineal.<br>-Representación numérica y gráfica del movimiento. | -Incremento de posición y de tiempo.<br>-Variable independiente y variable dependiente.<br>-Proporcionalidad.<br>-Covariación.<br>-Función lineal.<br>-Representación numérica, gráfica y analítica del movimiento. | -Variación.<br>-Variable independiente y variable dependiente.<br>-Proporcionalidad.<br>-Covariación.<br>-Función lineal.<br>-Representación numérica, gráfica y analítica del movimiento. |
| Lenguaje | -Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Tabla de valores.<br>-Gráficas cartesianas y no cartesianas que representan la covariación de la posición y el tiempo. | -Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Tabla de valores.<br>-Gráficas cartesianas continuas y discretas.<br>-Expresión analítica. | -Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Tabla de valores.<br>-Gráficas.<br>-Expresión analítica. |
| Propiedades | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad.<br>-Razón de cambio. | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad.<br>-Razón de cambio. | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad.<br>-Razón de cambio |
| Argumentos | -Descripción del movimiento observado.<br>-Establecimiento de | -Descripción del movimiento observado.<br>-Establecimiento de comportamientos para | -Comportamiento de movimiento a partir de una tabla de datos.<br>-Uso de representaciones |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | comportamientos para determinar valores y predecir otros.<br>-Procesos de razonamiento inductivo y de generalización.<br>-Uso de representaciones numéricas y gráficas de variaciones lineales. | determinar valores y predecir otros.<br>-Procesos de razonamiento inductivo y de generalización.<br>-Uso de representaciones numéricas, gráficas y analíticas de variaciones lineales. | numéricas, gráficas y analíticas de variaciones lineales.<br>- Verificación empírica del patrón de movimiento obtenido de los datos de la tabla, actuando el movimiento en el piso del salón. |

**Tabla 2.** Clasificación de cada componente según la propuesta de las actividades 1, 2 y 3

| Situaciones problema | Articulación de representaciones semióticas usando GeoGebra. | Análisis de gráficas incluyendo velocidad negativa. |
|---|---|---|
| Procedimientos | -Manipulación de GeoGebra para simular movimiento de dos estudiantes.<br>-Elaboración de gráficas cartesianas modificando velocidad y punto de partida de los participantes.<br>-Obtención de expresiones analíticas.<br>-Comparación o contrastación de gráficas y expresiones analíticas. | -Análisis de información gráfica y reconocimiento de patrones de proporcionalidad y linealidad en caso de constante de proporcionalidad negativa. |
| Conceptos | -Variable independiente y variable dependiente.<br>-Proporcionalidad.<br>Constante de proporcionalidad y pendiente de una recta.<br>-Covariación.<br>-Función lineal.<br>-Representación gráfica y analítica del movimiento. | -Variable independiente y variable dependiente.<br>-Velocidad negativa<br>-Proporcionalidad.<br>-Constante de proporcionalidad y pendiente de una recta.<br>-Covariación.<br>-Función lineal. |
| Lenguaje | -Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Representación icónica-dinámica del movimiento de los participantes.<br>-Gráfica cartesiana.<br>-Expresión analítica. | -Representación numérica, gráfica y analítica del movimiento.<br>-Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Gráficas.<br>-Expresiones analíticas. |

| | | |
|---|---|---|
| Propiedades | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad.<br>-Referentes a las unidades significativas de las representaciones icónica, gráfica y analítica: punto de partida-ordenada al origen-término independiente, velocidad-pendiente-coeficiente de $x$, etc. | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad.<br>-Referentes a las unidades significativas de las representaciones icónica, gráfica y analítica.<br>-Relación entre el signo de la velocidad, la monotonía de la gráfica y el signo del coeficiente de $x$. |
| Argumentos | -Descripción del movimiento simulado en GeoGebra.<br>-Establecimiento de comportamientos para elaboración de gráficas y expresiones analíticas.<br>-Contrastación de cambios en los registros gráfico y analítico. | -Linealidad a partir de razones de cambio, independientemente del signo (positivo o negativo).<br>-Uso de representaciones gráficas de variaciones lineales. |

**Tabla 3.** Clasificación de cada componente según la propuesta de las actividades 4 y 5

| | | | |
|---|---|---|---|
| Situaciones problema | Análisis de tabla numérica en una situación de variación no lineal. | Llenado de recipientes cilíndricos de mismas dimensiones, uno vacío y otro ya con agua. | Comparación de rapidez de crecimiento de altura en recipientes cilíndricos de diferente tamaño. |
| Procedimientos | -Análisis de datos para determinar patrón de comportamiento.<br>-Descripción de movimiento y velocidad del mismo.<br>-Cálculo de incrementos y búsqueda de proporcionalidad entre estos. | -Reconocimiento de magnitudes variables y patrones a partir de datos de crecimiento de altura.<br>-Determinación de expresión analítica.<br>-Elaboración de gráficas y tablas numéricas. | -Reconocimiento de patrones en el llenado de recipiente.<br>-Obtención de expresión analítica y elaboración de gráficas y tablas numéricas. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Conceptos | -Variable independiente y variable dependiente.<br>-Covariación.<br>-Proporcionalidad.<br>-Función lineal.<br>-Movimiento no lineal. | -Variable independiente y variable dependiente.<br>-Proporcionalidad.<br>-Covariación.<br>-Función lineal.<br>-Función compuesta.<br>-Representación numérica, gráfica y analítica del movimiento. | -Variable independiente y variable dependiente.<br>-Proporcionalidad.<br>-Covariación.<br>-Función lineal.<br>-Función compuesta<br>-Representación numérica, gráfica y analítica del movimiento. |
| Lenguaje | -Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Tabla de valores.<br>-Linealidad y no linealidad. | -Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Tabla de valores.<br>-Gráficas.<br>-Expresión analítica. | -Lenguaje natural y terminología matemática.<br>-Tabla de valores.<br>-Gráficas-Expresión analítica. |
| Propiedades | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad y no linealidad. | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad. | -Proporcionalidad.<br>-Linealidad. |
| Argumentos | -Descripción del movimiento.<br>-Establecimiento de comportamientos para determinar linealidad o ausencia de la misma.<br>-Razón de cambio no constante. | -Descripción del comportamiento de llenado.<br>-Uso de representaciones numéricas y gráficas de variaciones lineales. | -Descripción del comportamiento de llenado.<br>-Uso de representaciones numéricas y gráficas de variaciones lineales.<br>-Procesos de razonamiento inductivo y de generalización. |

**Tabla 4.** Clasificación de cada componente según la propuesta de las actividades 6, 7 y 8

## 3. Las actividades didácticas

El diseño didáctico que proponemos en este trabajo consiste de ocho actividades que corresponden a las situaciones problema de las Tablas 2, 3 y 4. Las actividades están materializadas en hojas de trabajo para los estudiantes, con preguntas y tareas específicas. Incluimos, además, indicaciones generales para que el profesor desarrolle las actividades, contemplando momentos de trabajo individual, en equipo y de discusión grupal.

Los requerimientos materiales para llevar a cabo las actividades son los siguientes. Cada uno de los estudiantes debe contar con las hojas de trabajo impresas. Para desarrollar las actividades 4 y 5 se requiere de una computadora para cada estudiante y un proyector para discutir grupalmente las respuestas y conclusiones derivadas de la actividad. La Actividad 1 está diseñada para realizarse en un lugar con piso cuadriculado. Es necesario que antes de iniciar la Actividad 1 se construya en el piso del salón una recta numérica, donde la longitud del lado de un cuadro del piso se tome como unidad de medida de la distancia. De esta manera, se facilita en los estudiantes el control del movimiento que ejecutarán, pues resulta más sencillo caminar con una velocidad de 2 cuadros por segundo que de 2 metros por segundo. Se recomienda marcar en el piso una línea que servirá como origen o punto de referencia para determinar la posición. También, es esencial discutir con los estudiantes que cada línea del piso corresponde a un valor de la posición, y que la posición puede ser negativa o positiva, dependiendo si se está delante o detrás de la línea de referencia.

### 3.1 Actividad 1. "Observa y representa el movimiento"

Indicaciones para el profesor (IP de ahora en adelante). Una vez construida la recta numérica:

- Invitar a dos estudiantes a participar en la actividad.
- Sin que el resto del grupo escuche, dar a los dos estudiantes las instrucciones siguientes:
    - El primer estudiante (E1) avanzará 2 cuadros cada segundo desde el origen.

- El otro estudiante (E2) avanzará 1.5 cuadros cada segundo desde la posición 3.

• Pedir al grupo que observen el movimiento que realizarán los dos estudiantes.

• Los estudiantes voluntarios avanzarán simultáneamente durante 5 segundos, mientras que el profesor cuenta en voz alta cada segundo transcurrido.

• Después de observar la carrera, los estudiantes vuelven a su lugar para contestar la Actividad 1 en sus hojas de trabajo de manera individual (Tabla 5) durante un tiempo estimado de 10 minutos.

La Actividad 1 parte de la observación del movimiento de los dos estudiantes que caminan a velocidad constante, pero distinta entre sí. En esta actividad, el estudiante tiene la tarea de describir el movimiento observado en diferentes formas de lenguaje (verbal, icónico y numérico).

1. ¿Cómo avanza cada uno de los participantes en la carrera? Describe detalladamente.
2. Realiza un dibujo o ilustración donde se muestre cómo fue avanzando cada uno de los participantes.
3. ¿En qué posición se ubicó cada uno de los participantes en el segundo 0, 1 y 5?
4. ¿Cuánto avanzó en total cada participante durante los 5 segundos de la carrera?

**Tabla 5.** Preguntas y tareas de las hojas de trabajo individual de la Actividad 1

IP: (Trabajo en equipo, tiempo estimado: 10 minutos) Se sugiere organizar a los estudiantes en equipos de 3 o 4 miembros para discutir y contestar las siguientes cuestiones de sus hojas de trabajo (Tabla 6).

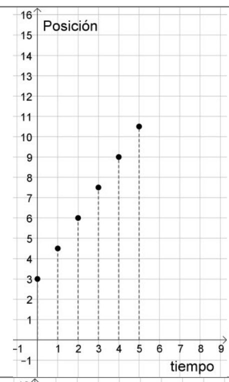
5. Muestra a tus compañeros de equipo la ilustración que hiciste y discutan qué elementos tienen en común sus ilustraciones.
6. Elaboren en equipo una gráfica que muestre cómo es el movimiento de cada uno de los participantes durante la carrera.
7. ¿Te hizo falta considerar algo importante en tu dibujo? Explica.

**Tabla 6.** Preguntas y tareas de las hojas de trabajo en equipo de la Actividad 1

**IP**: (Discusión grupal, tiempo estimado: 15 minutos) Además de discutir las respuestas a las cuestiones planteadas para llegar a un consenso, se recomienda que algunos equipos reproduzcan en el pizarrón la gráfica o dibujo que representa la carrera. El profesor debe resaltar que en la variedad de gráficas expuestas hay datos que son comunes y discutir cuáles de esos datos son relevantes para describir el movimiento (posición, velocidad, distancia, tiempo, origen, etc.). El profesor puede sugerir, como una manera organizada de capturar datos, elaborar una tabla numérica con los datos del tiempo y la posición.

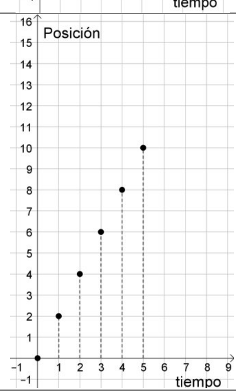
### 3.2 Actividad 2. "Gráficas de la carrera" (estudio gráfico-cartesiano del movimiento)

**IP**: (Trabajo individual de 10 minutos; trabajo en equipo 15 minutos) El profesor entregará las siguientes hojas de trabajo (**Tabla 7**) indicando que en ellas se muestran otras maneras de representar gráficamente el movimiento. Los estudiantes abordan de manera individual las preguntas 8 a 15 de la Actividad 2, en equipo las preguntas 16 a 20 y de manera grupal las restantes.




Esta gráfica representa el movimiento de un participante de la carrera.

8. ¿Cuántos cuadros avanza este participante cada segundo? Explica cómo lo supiste.
9. ¿Cuál participante caminó de esta manera?
10. ¿Cuántos cuadros avanzó en total este participante durante los 5 segundos de la carrera?
11. Si se triplica el tiempo de la carrera (si durara 15 segundos), ¿cuánto avanzaría en total? Explica tu razonamiento.




Esta gráfica representa el movimiento de un participante de la carrera.

12. ¿Cuántos cuadros recorre este participante cada segundo?
13. ¿Al movimiento de cuál participante corresponde esta gráfica?
14. ¿Cuántos cuadros en total avanzó este participante durante los 5 segundos de la carrera?
15. Si la carrera durara 2.5 segundos, ¿cuántos cuadros avanzaría en total este participante? ¿Y el otro participante? Explica tu respuesta.

Comparen sus respuestas y estrategias a las preguntas anteriores.

16. ¿A cuál participante corresponde cada recta?
17. Elaboren una tabla con la información de la posición donde se ubicaría cada participante en los segundos 0,1, 1.5, 5 y 8.75.
18. ¿Encuentras alguna relación entre los valores


del tiempo y los valores de la posición, en el caso del participante que inició en la posición 0? Describe esta relación.

19. Escribe una ecuación o fórmula que relacione tiempo y posición y que sirva para saber la posición del participante en un valor específico del tiempo.
20. Repite las preguntas 18 y 19 para el participante que inició en la posición 3.

21. ¿Es el tiempo es directamente proporcional a la posición, en el movimiento de cada participantes? Explica tu respuesta.
22. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
23. ¿Los incrementos de tiempo son directamente proporcionales a los incrementos de posición, en el movimiento de cada participante?
24. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en cada caso?

**Tabla 7.** Hojas de trabajo de la Actividad 2

IP: En la discusión grupal (tiempo estimado: 15 minutos): se promueve la emergencia de lenguajes para representar los incrementos tanto tabular como gráficamente, para denotar las magnitudes variables, se resalta la noción de proporcionalidad entre incrementos de posición y de tiempo, en el movimiento de ambos participantes, se resalta que no hay proporcionalidad entre posición y tiempo en el caso del participante que no inicia desde el origen. Se comprueba la expresión analítica probando con algunos datos, se plantea conjetura que la velocidad es la constante de proporcionalidad entre los incrementos de posición y tiempo.

### 3.3 Actividad 3. "Cambios en la carrera" (articulación de las representaciones gráfica y tabular).

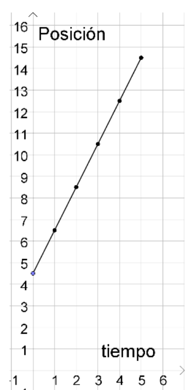
IP: (Trabajo individual de 10 minutos; trabajo en equipo de 15 minutos) Entregar a los estudiantes las hojas de trabajo para la Actividad 3 (Tabla 8). Se espera que los estudiantes puedan retomar los procedimientos y propiedades desarrollados en el trabajo en equipo y resaltados en la discusión grupal de la Actividad 2. Las preguntas 25 y 26 se deben abordar de manera individual, la parte restante de la Actividad 3 se realiza en equipo.

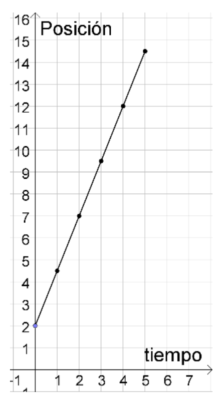
El profesor está planeando cambiar cómo avanza uno de los participantes de la carrera, de manera tal que se obtengan los siguientes datos:

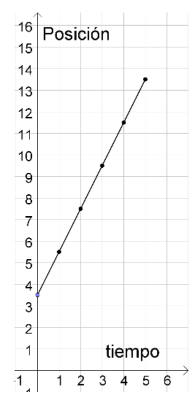
| $x$: Tiempo (segundos) | 0 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $y$: Posición | | 9.5 | 14.5 | 22 |

25. ¿Cuál es la velocidad de este participante? Es decir, ¿cómo avanzará cada segundo? ¿Cuál será su punto de partida? Explica cómo hiciste para saber.

26. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde al movimiento de ese participante? Explica tu razonamiento.




Comparen sus respuestas obtenidas en las preguntas anteriores.

27. Actúen el movimiento como lo describieron en la pregunta 25 para verificar que corresponda a la tabla de datos de arriba.

28. Encuentren una ecuación o fórmula para representar la relación entre tiempo y posición para este caso.

**Tabla 8.** Hojas de trabajo de la Actividad 3

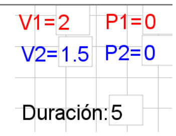
**IP:** (Discusión grupal, 15 minutos). Se discuten las respuestas a las cuestiones de la Tabla 8 y se comprueban empíricamente actuando la carrera. Nuevamente, se resaltan los procedimientos, propiedades, lenguajes y argumentos útiles para caracterizar la variación lineal, tanto gráfica como numéricamente en la tabla y de forma analítica.

### 3.4 Actividad 4. "Modelando la carrera en GeoGebra" (articulación de las representaciones icónica, cartesiana y algebraica en GeoGebra)

**IP:** (Trabajo en equipo, tiempo estimado de 32 minutos) Antes de abrir el archivo de GeoGebra, el profesor explica a los estudiantes que en el archivo encontrarán diferentes representaciones de la carrera: una simulación, gráficas cartesianas y expresiones analíticas. El profesor les pedirá que lean las instrucciones en sus hojas de trabajo (Tabla 9) para que sepan cómo cambiar los datos de la carrera (valores de la velocidad, punto de partida y duración). Posteriormente se realiza una discusión grupal para llegar a consensos y discutir hallazgos importantes.

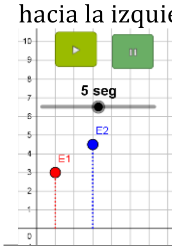
---

Abran el archivo carrera.ggb.o entren al enlace: https://ggbm.at/jsqbfnhg. En él podrán crear diferentes carreras para dos participantes E1 y E2. Pueden cambiar su velocidad (V1 para E1 y V2 para E2), también su punto de partida (P1 para E1 y P2 para E2) y duración de la carrera.

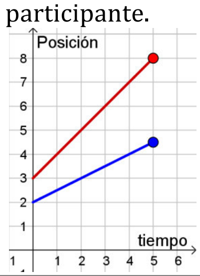



---

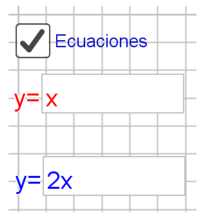
Con los botones verdes pueden iniciar y pausar la carrera y observar cómo avanzan los participantes. Para reiniciar el contador de tiempo hay que deslizarlo hacia la izquierda.

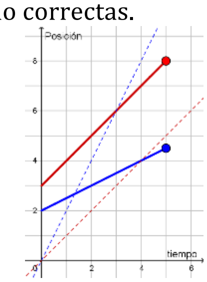



Del lado derecho de la pantalla, pueden observar las gráficas que genera cada participante.




Al activar la casilla "Ecuaciones" podrán escribir las ecuaciones que ustedes creen que modelan el movimiento de los participantes y verificar si son o no correctas.



---

29. Generen en el archivo una carrera de 10 segundos, donde E1 tiene una velocidad de 1 cuadro cada segundo y comienza desde la posición -2, mientras que E2 tiene velocidad de medio cuadro por segundo e inicia en la posición 2. ¿Quién ganó la carrera?
30. ¿Qué significa que las rectas de la derecha se intersequen? ¿En qué segundo sucede?
31. ¿Cuál es la ecuación que representa el movimiento de cada participante? Comprueben con ayuda de GeoGebra que sean correctas.
32. ¿Qué velocidad y qué punto de partida deberían tener los participantes para generar las fórmulas y=0.75x-1 y y=0.25+4?
33. Jueguen a crear otras carreras y encontrar las ecuaciones que representen el movimiento de los participantes.

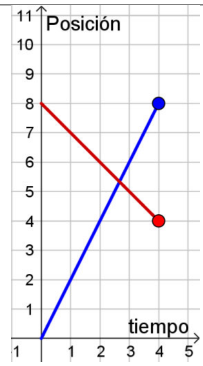
**Tabla 9.** Hojas de trabajo para la Actividad 4

**IP:** Las siguientes dos situaciones problema son complementarias a la situación planteada en la Actividad 4 y se pueden promover para favorecer el refinamiento y mecanización de distintos componentes del significado de variación lineal con la mediación del applet de GeoGebra:

- Dadas las gráficas por el profesor, que el estudiante determine para cada participante los datos siguientes: si representa una variación lineal, la constante de proporcionalidad entre los incrementos de la posición y el tiempo, la velocidad, el punto de partida y la expresión analítica. Puede comprobar su respuesta en GeoGebra.
- Dada la expresión analítica para el movimiento de cada participante, que el estudiante determine: si representa una variación lineal, la constante de proporcionalidad entre los incrementos de posición y de tiempo, la velocidad, el punto de partida y las gráficas.

### 3.5 Actividad 5. “La gráfica va hacia abajo” (Velocidad negativa)

**IP**: (Trabajo en equipo durante 18 minutos) Entregar al estudiante las hojas de trabajo en equipo para que descifren un nuevo tipo de movimiento, que corresponde a una variación lineal, pero tiene la particularidad de que la velocidad es negativa (Tabla 10). Posteriormente se realiza una discusión grupal para resaltar hallazgos importantes sobre los cambios que surgen en las diferentes representaciones y para resaltar que las propiedades que se encontraron en las actividades anteriores se conservan, aunque la velocidad sea negativa.




34. ¿Cómo deberían caminar los participantes de la carrera para obtener estas gráficas? Explica detalladamente y comprueba tu respuesta en GeoGebra o actuando la carrera con uno de tus compañeros.
35. ¿Hay proporcionalidad directa entre tiempo y posición en el movimiento de ambos participantes?
36. ¿Cuáles son las constantes de proporcionalidad en cada caso?
37. ¿Cuáles son las ecuaciones que relacionan tiempo y posición para cada caso?
38. Jueguen a crear otras carreras y encontrar las ecuaciones que representen el movimiento de los participantes.

**Tabla 10.** Hoja de trabajo en equipo de la Actividad 5

## 3.6 Actividad 6. "Otro tipo de movimiento" (variación no lineal)

**IP**: (Trabajo individual, tiempo estimado de 10 minutos) Entregar a los estudiantes las hojas de trabajo (Tabla 11) para que descifren un nuevo tipo de movimiento que ya no corresponde a una variación lineal. Posteriormente, se recomienda realizar una discusión grupal, resaltando las propiedades que caracterizan una variación lineal. Se puede pedir a un estudiante que intente caminar de la manera planteada en la tabla.

Un estudiante camina de tal manera que se obtienen los siguientes datos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$: Tiempo (segundos) | 0 | 2 | 5 | 9 |
| $y$: Posición | 0 | 4 | 6 | 8 |

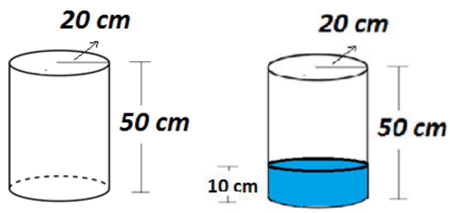
39. Describe su movimiento.
40. Describe su velocidad.
41. ¿Los incrementos de posición son directamente proporcionales a los incrementos de tiempo? Explica por qué.
42. Elabora una gráfica cartesiana de este movimiento ¿Qué observas?

**Tabla 11.** Hoja de trabajo individual de la Actividad 6

### 3.7 Actividad 7. "Recipientes cilíndricos de mismo tamaño" (Nuevo contexto: de llenado de recipientes)

**IP**: (Trabajo en equipo, tiempo estimado de 30 minutos) El profesor planteará la siguiente actividad para que los estudiantes la aborden en equipo. Es posible que se requiera realizar discusiones grupales para llegar a consensos sobre la interpretación de las preguntas, los valores de la altura del líquido y las representaciones que producen los estudiantes.

Dos recipientes son llenados con agua con un flujo constante de 4 litros cada minuto. Las dimensiones de los recipientes son las mismas y se señalan en la siguiente figura. Uno de ellos está originalmente vacío y el otro ya tiene agua hasta una altura de 10 cm.



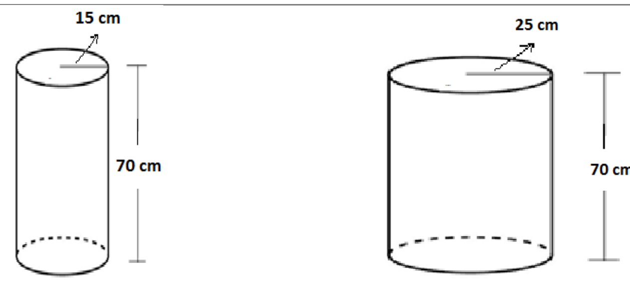

1. Señala las magnitudes variables que están cambiando en cada recipiente, conforme se van llenando.
2. Elabora una tabla para cada recipiente donde se especifique la altura en diferentes tiempos.
3. Determina una expresión o ecuación para calcular la altura del agua a partir del tiempo transcurrido para cada uno de ellos. Considera el tiempo necesario para que cada recipiente se llene y establezca las restricciones para el valor del tiempo en cada caso.
4. Elabora una gráfica de altura contra tiempo en cada caso.
5. ¿Qué tienen en común esta situación y las estudiadas previamente con relación al movimiento de sus compañeros de clase? Explica detalladamente.

**Tabla 13.** Hoja de trabajo individual de la Actividad 7

### 3.8 Actividad 8. "Recipientes cilíndricos de tamaño diferente"

**IP**: (Trabajo en equipo, tiempo estimado de 30 minutos). Se recomienda realizar una discusión grupal donde se discutan las similitudes entre los problemas de movimiento y los problemas de llenado de recipientes.

Los dos recipientes que se ilustran a continuación se llenan de agua a flujo constante de




6 litros por cada minuto.

1. Determina para cada uno de ellos una fórmula o ecuación para calcular la altura del agua en el recipiente en función del tiempo.
2. Si hicieras una gráfica que se corresponda con cada uno de los casos, ¿qué diferencias tendrían? Responde detalladamente, pero sin hacer las gráficas.
3. Sin elaborar tablas numéricas, determina cómo sería el comportamiento de la altura con relación al tiempo en cada caso.

**Tabla 14.** Hoja de trabajo individual de la Actividad 8

## 4. Conclusiones

El principal objetivo, socialmente hablando, de la actividad de investigación en didáctica de las matemáticas, es incidir positivamente en el medio educativo, lo cual se puede traducir en múltiples y variadas acciones, como la modificación de los currículos escolares, diseño y ejecución de programas de formación y actualización de profesores de matemáticas, el diseño de software educativo, escritura de libros de texto y otros.

En el caso del diseño de actividades didácticas para los estudiantes, como es el caso del presente trabajo, si bien están pensadas para los estudiantes, son también una muestra del tipo de actividades que pueden emplear los profesores. Este hecho es particularmente relevante porque en los tiempos actuales, al menos en México, los planes de estudio y el modelo educativo mismo del sistema educativo, están sufriendo transformaciones que conllevan el imperativo de que los profesores modifiquen sus prácticas docentes, sin dotarlos de los recursos didácticos adecuados para ello.

En ese sentido, este trabajo, aunque no ha sido puesto en práctica experimentalmente como tal, está diseñado con el fin de contribuir a que los profesores tengan ejemplos concretos para adecuar su actividad docente cotidiana, atendiendo a consideraciones de tipo epistémico, cognitivo, mediacional, interaccional, afectivo y ecológico.

La inclusión de estos aspectos o categorías para el diseño y el trabajo en el aula se realizó con fundamentos teóricos surgidos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos -las idoneidades didácticas- pero debe resaltarse que se trata de consideraciones cotidianas de los profesores que aquí encuentran una forma de abordarlos. Nos referimos al hecho de que los profesores se cuestionan qué enseñar y en qué orden, cómo deben ser las situaciones que se estudian en el aula para que sean atractivas para los estudiantes y estén cerca de lo que ellos pueden hacer, cómo incrementar la participación y el involucramiento de todos en las actividades propuestas, cuáles son las aplicaciones y usos de los objetos matemáticos estudiados, por señalar algunos de los aspectos que se pretenden establecer con las idoneidades didácticas especificadas en el trabajo.

La propuesta pone por delante el estudio de la variación lineal como objeto central, con actividades que incluyen el uso de los recursos tecnológicos digitales y promueve el dinamismo en el aula, por medio de etapas para el trabajo individual, en pequeños grupos de discusión y momentos de debate generalizado, con la conducción del docente.

Por último, es pertinente señalar que, aunque en estas actividades la variación lineal se estudia con el propósito de hacer emerger a la función lineal, pequeñas modificaciones o agregados dan pie al estudio temas íntimamente relacionados en el currículo, como son el caso de las ecuaciones lineales y de los sistemas de ecuaciones lineales, lo cual permite ampliar el panorama de posibilidades en el diseño de actividades didácticas.

## Referencias

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Duval, R. (2017). Mathematical Activity and the Transformations of Semiotic Representations. En R. Duval (Ed.) *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations* (pp. 21-43). doi: 10.1007/978-3-319-56910-9_2

Font, V., Breda, A. & Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando éstos se aplican a distintos contextos. *RBECT. Revista Brasileira de Ensino de Ciencia e Tecnologia*, *10* (2), 1-23.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*, 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority área of research in mathematics education. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Grijalva, A. & Ibarra, S. (2017). Una experiencia de diseño de actividades de enseñanza con base en los criterios de idoneidad didáctica. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.) *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Hitt F., & González-Martín A.S. (2016). Generalization, Covariation, Functions, and Calculus. En Á. Gutiérrez Á., G.C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-38). doi: 10.1007/978-94-6300-561-6_1

Hitt, F. & González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 201-219. doi: 10.1007/s10649-014-9578-7

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. United States of America: Basic Books.

Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics*, *70*, 159-174. doi: 10.1007/s10649-008-9150-4

Sriraman, B. & Wu, K. (2014). Embodied Cognition. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 207-209). doi: 10.1007/978-94-007-4978-8

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Pshychonomic Bulletin & Review, 9*(4), 625-636.

# 10 PROBLEMES D'APPRENTISSAGE DU CALCUL DIFFERENTIEL ET APPORT DE LA METHODE DE FERMAT POUR UNE APPROCHE D'ENSEIGNEMENT PLUS INTUITIVE

Pedro Rogério Da Silveira Castro[1]

**Résumé**

Ce chapitre s'intéresse à l'utilisation des connaissances mathématiques dans la vie quotidienne. Dans ce sens, nous proposons aux étudiants des situations problèmes intéressantes qui les amènent à réfléchir et à découvrir des signifiés en mathématiques. Nous avons ciblé l'apprentissage du calcul différentiel en nous appuyant sur le processus historique de sa construction, dans un contexte de résolution de problèmes et dans un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto réflexion. Nous discuterons autour du processus de modélisation mathématique et de l'usage de la technologie. Notre objectif est de solidifier la compréhension du concept de calcul différentiel en englobant les aspects intuitifs, algébriques et géométriques.

**Mots clés** : Apprentissage collaboratif et significatif, modélisation mathématique, calcul différentiel, Méthode de Fermat, enseignement intuitif, usage de technologie.

**Resumen**

El presente capítulo versa sobre la utilidad en la vida cotidiana del conocimiento matemático. En este sentido, ofreceremos a los estudiantes situaciones interesantes que los lleven a la reflexión y al descubrimiento del significado en matemáticas. Nos centraremos en el aprendizaje del cálculo diferencial basado en el proceso histórico de su construcción, en un contexto de resolución de problemas en un entorno de aprendizaje colaborativo, debate científico y auto reflexión. La estrategia discutida será a través del modelado matemático y el uso de tecnología. Se pretende construir un concepto sólido de cálculo diferencial, que abarque aspectos intuitivos, algebraicos y geométricos.

**Palabras clave** : aprendizaje en colaboración y significativo, modelado matemático, cálculo diferencial, Método de Fermat, enseñanza intuitiva, uso de tecnología.

**Abstract**

In this chapter we study how mathematical knowledge is useful to everyday life. We will offer students interesting situations that lead them to reflection and the discovery of the signified in mathematics. We will target the learning of differential calculus by relying on the historical process of the construction and on the other we will promote the learning of differential calculus in a context of problem solving through a collaborative learning environment, scientific debate and self-reflection, The strategy discussed is mathematical modeling and the use of technology. Our goal is to promote a solid concept of differential calculus, encompassing intuitive aspects, algebraic and geometric.

**Keywords** : Collaborative and meaningful learning, mathematical modeling, differential calculus, Fermat method, intuitive teaching, use of technology.

---

[1] Université du Québec à Montréal, Canadá.

## 1. Introduction

### 1.1 Les problèmes d'apprentissage du calcul différentiel

En ce qui concerne la nature des causes des difficultés d'apprentissage du calcul différentiel, plusieurs auteurs ont des points de vue différents. Ainsi, Tall (1993), dans son article « Students'Difficulties in Calculus » souligne les principales difficultés révélées par la littérature. Notamment, il cite les difficultés liées aux concepts d'infini et de limite des fonctions, des difficultés autour des manipulations algébriques, de la présence de différentes représentations (algébrique, numérique, graphique, etc.), le formalisme de ces nouvelles représentations, de la préférence et de la prédominance (de la part des étudiants et même des enseignants) pour une approche plus attachée aux méthodes et procédures. Néanmoins, est-ce que prioriser les méthodes et techniques du calcul va rendre l'apprentissage efficace de ce dernier, surtout dans le sens d'une appréhension conceptuelle solide?

Tall (idem.) affirme qu'il existe des difficultés liées à la mathématisation de problèmes et que ces difficultés sont strictement liées à la modélisation mathématique dont la notion de variable et le concept de fonction en sont les pierres angulaires.

En plus, Tall (idem.) expose que c'est dans l'apprentissage du calcul différentiel que l'étudiant est confronté pour la première fois au concept de limite des fonctions, moment où les calculs ne sont pas réalisés par des arithmétiques simples ou même par des manipulations algébriques modestes. Ainsi, les concepts de fonctions, de continuité, de tangente et de limite (surtout la limite reliée aux processus d'infini) ne peuvent être négligés quand on s'intéresse aux difficultés d'apprentissage.

Par exemple, l'apprentissage du concept de limite crée plusieurs difficultés chez l'apprenant comme :

- La difficulté à comprendre si la limite peut effectivement être atteinte ou pas ;
- La confusion sur le passage du fini à l'infini, dans la compréhension de "Ce qui se passe à l'infini". Etc.

Tall (idem.) souligne que l'occasion pour surmonter ces difficultés peut permettre de construire chez les étudiants une nouvelle connaissance bien cohérente et structurée. Pour cela, il faut réconcilier les anciennes connaissances avec la nouvelle.

Étant donné que l'histoire des mathématiques est une source importante pour comprendre le développement du calcul différentiel, nous avons décidé d'amorcer l'historique par le travail de Fermat. Nous savons que des idées intuitives et des développements importants ont été apportés avant Fermat, mais nous avons décidé de commencer avec Fermat.

### 1.2 La période de Fermat

Le XVII$^e$ siècle a été une période de grand développement des sciences mathématiques, particulièrement du calcul différentiel qui a gagné beaucoup de puissance grâce aux travaux des mathématiciens de cette période. Selon Boyer, dans le livre *História da matemática* (p.229-252), les principaux personnages de cette époque ont été René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1665).

Notamment, d'après Boyer (idem), le mathématicien le plus connu et le plus important du XVII$^e$ siècle a été Descartes, surtout pour l'invention de la géométrie analytique à travers l'arithmétisation de la géométrie et de l'algèbre géométrique.

René Descartes a fait, peut-être la plus importante contribution aux mathématiques depuis le temps des Grecs, avec l'invention de la géométrie analytique. Cette invention a permis, a posteriori, une avancée pour le calcul différentiel et intégral. Le travail de Descartes nous a montré que lignes, superficies et formes géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques et, que de telles équations peuvent également être représentées géométriquement. Cette découverte a été très importante, car cela a permis de faire l'analyse de formes géométriques en s'appuyant sur des équations algébriques. Bardi (2008, p.24).

Toutefois, en ce qui a trait au calcul différentiel, c'est la contribution de Pierre de Fermat qui a été cruciale, comme on peut voir dans la citation de Laplace : « Fermat, le vrai inventeur du calcul différentiel » (Laplace, cité par Boyer, p.229, notre traduction).

En effet, selon l'historien Jason Socrates Bardi, la contribution de Fermat au calcul a été reconnue par quelques-uns de ses pairs, ceux qui étaient en faveur de ces découvertes ont proclamé, M. Fermat, l'inventeur du calcul différentiel de l'époque.

Fermat est né en Beaumont-de-Lomagne, une petite ville au sud de Toulouse en France. Il a étudié le droit en Toulouse. Il a commencé sa carrière comme avocat et a posteriori comme conseiller juridique. Cependant, même s'il était un homme très occupé et aussi très érudit, il semble qu'il a eu du temps pour se dédier à la littérature classique et aux sciences, et plus particulièrement aux sciences mathématiques. C'est ainsi que Fermat a dédié la même ferveur au droit qu'aux mathématiques. En 1629, il a commencé à faire d'importantes découvertes en mathématiques. En particulier, pendant cette année, il a consacré son temps à la « restauration » d'œuvres mathématiques de l'antiquité qui étaient considérées comme perdues. Fermat, par exemple, a reconstruit l'œuvre *Les lieux plats* d'Apolonio, basée sur des allusions qui sont contenues dans la *Collection mathématique* de Papus. Ce travail l'a amené à la découverte en 1636, du principe fondamental de la géométrie analytique : *« Toujours dans une équation dont il y a deux quantités inconnues, on a un lieu que décrit une courbe ou une droite »* Boyer (1996, p.238).

Fermat a écrit un court travail intitulé « *Ad locus planos et solidos isagoge* » (Introduction aux lieux plats et solides). Dans cet ouvrage, Fermat utilise la notation de François Viète (1540-1603), pour décrire le cas le plus simple d'une équation linéaire : *« D in A aequeteur B in E »* (dans le symbolisme d'aujourd'hui, Dx = By). Le graphique est une droite qui passe par l'origine. Comme Descartes, Fermat n'utilisait pas les abscisses négatives, ainsi cette équation représente une demi-droite dont l'extrémité est à l'origine du système des axes de coordonnées. Boyer (1996, p.238).

Par la suite, Fermat a montré que $xy = k^2$ représente une hyperbole et qu'une équation de la forme $xy + a^2 = bx + cy$ peut être réduite à une autre équation de la forme $xy = k^2$par une translation des axes. Finalement, il a montré que $a^2 \pm x^2 = by$ est une parabole, que $x^2 + y^2 + 2ax + 2by = c^2$ est un cercle, et que $a^2 - x^2 = ky^2$ est une hyperbole.

D'après Boyer (idem), pour les représentations graphiques des courbes citées ci-haut, Fermat a utilisé un système basé seulement par une demi-droite positive. La correspondance biunivoque entre l'ensemble de nombres réels positifs (les seuls qu'il utilisait) et la demi-droite était sous-entendue.

Étant donné que Fermat ne publiait pas systématiquement ses travaux, la géométrie analytique est beaucoup plus associée aux travaux de Descartes.

Selon Boyer (idem.), c'est vraiment dommage que Fermat ait refusé de publier ses résultats, car les explications et même les symbolismes utilisés par ce dernier étaient beaucoup plus systématiques et même plus didactiques que ceux de Descartes. La ouvre de Fermat circulait sur la forme de manuscrits jusqu'à publication de «*Varia opera mathematica* » que finalement a montré leurs découvertes mathématiques si importantes. Comme Descartes, Fermat a perçu l'existence de la géométrie analytique à deux dimensions et à plusieurs dimensions. Par contre, il a fallu attendre le XVIII$^{e}$ siècle pour que la géométrie analytique de plus d'une dimension soit finalement formalisée.

Toutefois, Fermat et Descartes échangeaient fréquemment des correspondances par l'intermédiaire de Marsenne et de Roberval. En fait Marsenne et Roberval ces deux personnages ont été de grande importance, car ils étaient les responsables pour la divulgation et la communication scientifique à l'époque (Boyer, idem, p.236).

### 1.3 La méthode de Fermat : trouver les maximums et les minimums.

D'après Boyer, (1996), depuis 1629, Fermat a fait progresser les mathématiques, il a permis le développement de la géométrie analytique et a découvert le calcul différentiel. On peut se pencher sur deux importants travaux, celui portant sur la méthode permettant de trouver les points extrêmes d'une fonction (maximums et minimums) et la méthode qui précède celle des points extrêmes, l'invention des tangentes à une courbe.

Il est bien connu, en effet, que Fermat était depuis quelque temps en possession de la méthode pour trouver les points extrêmes d'une fonction. Par exemple, dans une lettre à Roberval datée du 22 septembre 1636, Fermat dit avoir donné sa méthode à Jean d'Espagnet (1564-1637) il y a environ sept ans, donc il la connaissait depuis 1629, (*Œuvres*, II, p.71-74, cité par Henrico Giusti dans son article *« Les méthodes de maxima et minima de Fermat »)*.

Pour trouver les points extrêmes d'une courbe, Fermat a utilisé des lieux mathématiques. Si on utilise la notation symbolique d'aujourd'hui, ce sont des équations de la forme: $y = x^n$ qui sont appelées aujourd'hui des « paraboles de Fermat » si $n$ est positif ou « hyperboles de Fermat » si $n$ est négatif. En effet, pour des courbes polynomiales de la forme $y = f(x)$, Fermat a créé une méthode assez ingénieuse pour trouver les points dont la fonction assume le point maximum ou minimum. Sa méthode consistait à comparer la valeur de la fonction à un point *f(x)* et la valeur de la fonction à un point voisin, *f(x+e)*. De façon générale, ces valeurs peuvent être distinctes, mais dans le voisinage d'un extrême (soit maximum ou minimum d'une fonction), ces valeurs peuvent être très proches. Pourtant, Fermat a suggéré d'égaler *f(x)* à *f(x+e)*. Notamment, il faut noter que Fermat considère que ces points existent et par conséquent c'est possible de les trouver en utilisant sa méthode. Essentiellement, ceci était l'idée de Fermat pour trouver ces points extrêmes comme on peut le voir dans l'extrait du document *Œuvres de Fermat* rédigé par Fermat qui date de 1636 et qui a été traduit par M. Paul Tannery en 1894 (voir figure 1).

Jaques Bair, dans son article *Les infiniment petits : prémisses de la notation de dérivée,* souligne qu'en fait, Fermat présente plusieurs méthodes pour résoudre des problèmes de ce genre et qu'illustre sa méthode par des exemples. Nous analyserons ici celle qui se trouve dans la publication « Euvres de Fermat », au début du chapitre intitulé « Méthode pour la recherche du maximum et du minimum » aux pages 121 à 155.

La méthode de Fermat est basée fondamentalement sur le concept du mot *adégalité*, qui est symbolisé par le signe **~**. Selon Jacques Bair (idem), adégalité c'est la traduction du mot en latin *« adeaqualitas »* dont l'équivalent en langue anglaise est *approximate equality.* Dans le dictionnaire Larousse (2018), *aproximate* a été traduit par le mot *approximatif, qui est le résultat d'une approximation, qui est faite par approximation. Somme, soustraction approximative*. Nous pouvons voir cette signification dans l'extrait (voir figure 1) où Fermat écrit *« On adégagalera, pour parler comme Diophante… ».* Ici, nous notons clairement l'érudition de Fermat qui fait appel aux personnages de l'antiquité.

En somme, cette méthode pour trouver le maximum ou le minimum d'une courbe, dans son essence, consiste à percevoir que ces valeurs *f(x)* et *f(x+e)* ne sont pas égales, mais sont presque égales et que plus petit soit *e,* plus proche sera la pseudo-égalité de la vraie égalité. C'est pour ça que prématurément Fermat suggère la division par *e* et à la suite il néglige ce terme *e*, en considérant que sa valeur est égale à zéro. Les résultats de cette dernière équation lui ont donné les abscisses des points de maximum ou de minimum du polynôme.

**MÉTHODE**

POUR LA

**RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.**

Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit $a$ une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en $a$, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a + e$ à l'inconnue primitive $a$, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront $a$ et $e$ à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de $e$ ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par $e$, ou par une puissance de $e$ d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres $e$ disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore $e$ ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de $a$, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

FERMAT. — III. 16

Pierre de Fermat

**Figure 1.** Original d'Euvres de Fermat qui date de 1636

Cependant, il est important de souligner qu'à cette époque-là, Fermat ne possédait pas la connaissance de la limite d'une fonction, ni même la connaissance du concept de fonction comme on les connait de nos jours. En effet, la notation fonctionnelle désormais classique *f(x)* n'a été introduite qu'au XVIII siècle par Leonard Euler (1707-1783, par exemple, dans son œuvre, *Introductio in Analysin Infinitorum),* En outre, d'après Hitt (1994), si Bernoulli en 1718 a donné une définition de fonction, Euler a mis le concept de fonction au centre des mathématiques, concept qui est devenu la *colonne vertébrale* des mathématiques.

Deux siècles plus tard, les représentations graphiques ont évoluées grâce aux contributions de Descartes et de Fermat.

### 1.4 La démonstration de la méthode de Fermat pour trouver les extrêmes d'une fonction.

Pour mieux comprendre sa méthode, Fermat présente l'exemple suivant :

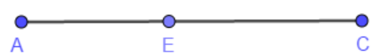
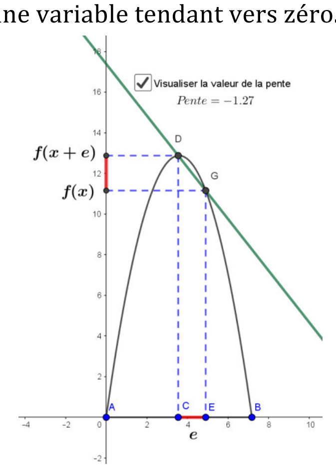
| Exemple de Fermat | Interprétation géométrique de Fermat |
|---|---|
| Soit à partager la droite AC, en E, en sorte que AE X EC soit maximum.<br><br><br>Posons AC = b; soit a un des segments, l'autre sera b – a, et le produit dont on doit trouver le maximum : $\mathbf{ba - a^2}$. Soit maintenant $\mathbf{a + e}$ le premier segment de b, le second sera $\mathbf{b - a - e}$, et le produit des segments : $\mathbf{ba - a^2 + be - 2ae - e^2}$ :<br><br>Il droit être adégalé au précédent : $\mathbf{ba - a^2}$;<br><br>Supprimant les termes communs $\mathbf{be \sim\ 2ae + e}$ ;<br><br>Divisant tous les termes par $\mathbf{e}$: $\mathbf{b \sim\ 2a + e}$;<br><br>Supprimez e : $\mathbf{b = \ 2a}$.<br><br>Pour résoudre le problème, il faut donc prendre la moitié de b.<br><br>Il est impossible de donner une méthode plus générale.<br><br>Extrait du texte original de Fermat qui a été traduit par MM. Paul Tannery en 1894. | Si l'on reprend ce qui précède, nous voyons bien que la méthode engendrée par Fermat est bien ingénieuse, surtout à cause de l'interprétation géométrique qu'elle propose, car cela nous permet de regarder ce qui se passe aux points extremums d'une fonction.<br>Une remarque intéressante est que cette méthode permet de comprendre comment au XVIII$^{e}$ siècle, bien avant la notion de fonction, on pouvait appréhender les notions de « minimum et de maximum » des fonctions. Notamment, il faut souligner qu'à cette époque-là, il manquait aussi d'autres connaissances mathématiques ainsi que la définition de fonction, la limite d'une fonction, la notion de dérivée, de calcul infinitésimal ou différentiel, ou encore pour la résolution, la connaissance plus récente de l'analyse non-standard de Robinson.<br>Dans l'optique de Fermat, nous pouvons constater que dans son raisonnement, le symbole e semble désigner une variable tendant vers zéro.<br><br> |

**Table 1.** La démonstration de la méthode de Fermat

Si l'on reprend ce qui précède, nous voyons bien que la méthode proposée par Fermat est bien ingénieuse, surtout par l'interprétation géométrique qu'elle sous-tend, cela permet de regarder ce qui se passe aux points extremums d'une fonction. Une remarque intéressante est que cette méthode permet de comprendre comment au XVIII$^e$ siècle, bien avant la notion de fonction, de limite d'une fonction, de dérivée, de calcul infinitésimal ou différentiel, ou encore plus récent l'analyse non-standard de Robinson (formalisation des infiniment petits), on pouvait appréhender les notions de « minimum et de maximum » des fonctions.

Par contre, il faut souligner qu'avec les connaissances mathématiques actuelles, nous croyons que Fermat propose une méthode intuitive pour développer la notion de tangente horizontale pour la recherche d'un maximum et d'un minimum d'une fonction continue, même si elle n'est pas être formalisé dans l'analyse standard.

D'après Fermat lui-même,

*Il est impossible de donner une méthode plus générale, il ne se trompe jamais, et peut s'étendre à nombre des questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité des figures terminés par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous avons le loisir.*

Toutefois, le XVIII$^e$ siècle est notamment marqué par des idées nouvelles, dont la caractéristique commune sera l'abandon, plus ou moins important, de la rigueur grecque. Par contre, ces nouvelles méthodes ne sont pas une renonciation des découvertes déjà connues des anciens, mais plutôt une coexistence entre elles est suggérée, qui peut conduire à des résultats féconds. En effet, ces deux démarches parallèles et concurrentes : l'heuristique et la démonstrative, vont coexister jusqu'à la fin du XVIII$^e$ siècle en attendant de nouveaux critères de validation ou de légitimation, c'est-à-dire jusqu'à la création de la conceptualisation rigoureuse du calcul infinitésimal proprement dit. Ce qui est révélé par la Commission inter-IREM « Épistémologie et Histoire des Mathématiques » dans le livre Aux origines du calcul infinitésimal (p.79 à 82).

Fermat expose sa nouvelle méthode non seulement pour trouver le maximum et le minimum d'une courbe, mais il a, de plus, appliqué cette méthode à la recherche de certaines tangentes. Par ailleurs, il a indiqué, des généralisations d'applications possibles de sa méthode, comme pour les points d'inflexion des courbes, les centres de gravité, les asymptotes, etc., ce qui est révèle par la Commission inter-IREM, dans le livre Aux origines du calcul infinitésimal (p.120 à 123).

De nos jours, il est connu que si une fonction $f$ dérivable en un extremum, soit maximum ou minimum, alors la dérivée à ce point est nulle ($f'(p) = 0$).

### 1.5 Les conditions nécessaires et les conditions suffisantes pour avoir des points de maximum et de minimum locaux

Soit $f$ une fonction et $p$ un point *intérieur* du $D_f$ ($p$ intérieur du $D_f \leftrightarrow$, existe un intervalle ouvert $I$, avec $I \subset D_f$ *et* $p \in I$). Supposons que $f$ est dérivable en $p$. Une condition nécessaire, mais pas suffisante, pour que $p$ soit le point maximum ou minimum local est que $f'(p) = 0$.

Théorème : Soit $f$ une fonction dérivable en $p$, où $p$ est un point intérieur du $D_f$. Une condition nécessaire pour que $p$ soit le point de maximum ou de minimum local est que $f'(p) = 0$.

Notons que la démonstration de ce théorème est omise dans ce document (vous pouvez consulter à cet effet Hamilton Luiz Guidorizzi (1997), « *Un cours de Calcul* » volume1 de la page 284 à 285).

Par contre, Jacques Bair (p.4) nous inquiète en soulignant que les représentations algorithmes présentées par Fermat en quatre étapes, comme nous avons vu ci-haut, soulèvent deux questionnements, à savoir :

Que représente ***e*** ? Est-il un nombre par lequel on peut diviser les deux membres d'une *adégalité* (l'étape 3 de la méthode) ou est-il zéro comme Fermat l'a admis en fin du raisonnement à l'étape 4 de sa méthode?

Ces questionnements sont pertinents, car on sait bien que si on admet ce petit ***e*** comme zéro la division impliquée dans l'étape 4 de la méthode de Fermat amène à une impossibilité en mathématiques. Par contre, dans l'optique de Fermat, nous pouvons constater que dans son raisonnement, le symbole ***e*** semble désigner une variable tendant vers zéro. De surcroit le raisonnement de Fermat peut être considéré comme un prélude du concept de dérivée.

En contrepartie, si nous regardons avec un peu plus d'attention, c'est-à-dire si on tient compte des propriétés mathématiques de la dérivée, nous voyons que le raisonnement de Fermat peut être considéré comme un essaie préliminaire, une entrée au concept de dérivée. Affirmer qu'il a inventé le concept de dérivée est un peu fort, car on ne trouve pas dans les travaux de Fermat de point sur la considération que la dérivée *f'(x)* existe indépendamment de l'équation *f'(x)=0,* c'est un point fondamental. Giusti, dans son article *Les méthodes de maxime et minima de Fermat*, présente à cet effet :

> La dérivée c'est une opération qui prend une fonction *f* et qui la transforme en une deuxième fonction *f'*. C'est seulement après avoir compris le caractère fonctionnel de la dérivée qu'il est possible de donner les règles de calcul de cette dernière, comme : calculer la somme de la dérivée revient à calculer la somme des dérivées; idem avec le calcul de la dérivée du produit ou bien de la racine. En effet, la méthode de Fermat ne permet pas de démontrer les règles du calcul différentiel qu'on connait. Si nous prenons, par exemple le cas d'une fonction *f* qui peut être écrite comme deux fonctions *f = g+h*, la dérivée s'écrira *f'=g'+h'*, mais l'équation *f'=0* ne s'exprime pas en deux équations *g'=0* et *h'=0.*

En effet, la critique exposée précédemment par Jacques Bair est exactement la controverse critique de George Barkeley (1685-1753) à l'analyse newtonienne avec la méthode des *fluxions*, ce qui ressemble aux infiniments petits de Fermat.

Nous savons bien que l'une des caractéristiques du calcul différentiel, concerne le développement de l'étude des fonctions. Le calcul différentiel permet d'étudier le taux de variation d'une fonction, soit de comprendre les différentes manières lesquelles une fonction croit ou décroit dans un intervalle ou autour d'un point d'inflexion. Conséquemment, cette analyse proposée par Fermat va promouvoir l'idée fondamentale du calcul différentiel, qui est l'idée qu'une courbe, localement, peut être bien approchée par une droite, dont les caractéristiques de proportionnalité, constituent des composants facilitateurs à la compréhension et à l'analyse de la dérivée. Dans ce sens, le calcul différentiel est un outil utile, car l'étude des variations et la nécessité d'approximations locales sont présentes dans plusieurs phénomènes de presque tous les domaines de la science.

Ainsi, amener les étudiants à une compréhension préalable plus générale du concept de dérivée en respectant le processus historique de sa construction peut être intéressant, car cette construction se base sur les idées originales de ses créateurs qui n'ont pas utilisé la limite d'une fonction.

De plus, nous croyons que montrer les applications de la dérivée est possible et intéressant. Ceci va contribuer à la conscientisation de l'importance du calcul différentiel et peut impulser les étudiants à aller plus loin dans le sens afin de construire un apprentissage significatif.

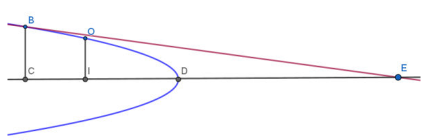
L'aspect le plus complexe de notre proposition est de surmonter le paradigme de laisser les applications du calcul différentiel à la fin, après avoir bien retenu les techniques de dérivation. Pour cela, il faut surmonter les obstacles épistémologiques qui viennent avec l'étude de la limite d'une fonction, ce qui est, nous pensons, plus compliqué.

En effet, le calcul différentiel est passé par plusieurs reformulations tout le long de l'histoire des mathématiques avant d'être bien formalisé (du point de vue du formalisme que l'analyse mathématique exige, comme cité auparavant, Boyer, p.229-357).

Il est important d'avoir quelques connaissances préalables parce que premièrement, nous croyons que pour comprendre la dérivée, il est nécessaire de bien comprendre le concept de taux de variation ainsi que son influence sur la croissance ou la décroissance d'une fonction. Plus généralement, comprendre les différentes façons qu'une fonction a de croitre ou de décroitre dans un intervalle. Deuxièmement, il est clair que le passage d'un intervalle à un unique point, entraine la notion de limite qui pose un obstacle épistémologique fondamental pour le développement du calcul différentiel : la dérivée d'une fonction en un point.

## 1.6 La méthode de l'invention des tangentes

Par la suite, après que Fermat ait créé sa méthode pour trouver les maximums et minimums d'une fonction, il présente une deuxième découverte : La méthode de l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques. Voyons la démonstration donnée par Fermat à ce sujet.

| Exemple de Fermat | Interprétation géométrique de Fermat |
|---|---|
| Soit donnée, par exemple, la parabole BDN, de sommet D et diamètre DC.   | Nous voyons ici que Fermat a créé ici aussi une méthode ingénieuse pour tracer des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques, car si on suit les étapes de sa démarche, il n'y a pas d'erreurs géométriques, ce qui |

| | |
|---|---|
| Soit maintenant donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.<br>Si l'on prendre sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura :<br>$\frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{DI}} > \frac{\mathbf{BC^2}}{\mathbf{OI^2}}$ , puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais<br>$\frac{\mathbf{BC^2}}{\mathbf{OI^2}} = \frac{\mathbf{CE^2}}{\mathbf{OI^2}}$ , à cause de similitude des triangles. Donc, $\frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{DI}} > \frac{\mathbf{CE^2}}{\mathbf{IE^2}}$<br>Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD.<br>Soit donc CD = d, donné. Posons CE = a ;<br>On aura :<br>$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d-e}} > \frac{\mathbf{a^2}}{\mathbf{a^2+e^2-2ae}}$$<br>Faisons le produit des moyens et des extrêmes :<br>$$\mathbf{da^2+de^2-2ae > 2a^2-a^2e}$$<br>Adégalons donc, d'après la méthode précédente ; on aura, en retranchant les termes communs :<br>$$\mathbf{de^2-2dae \sim -a^2e},$$<br>ou, ce qui revient au même :<br>$$\mathbf{de^2+a^2e \sim 2dae}.$$<br>Divisez tous les termes par e :<br>$$\mathbf{de+a^2 \sim 2da}.$$<br>Supprimez de, il reste alors :<br>$$\mathbf{a^2 = 2da, donc\ a = 2d}.$$<br>Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme la vérité.<br>Il est impossible de donner une méthode plus générale.<br>Extrait du texte original de Fermat qui a été traduit par MM. Paul Tannery en 1894. | est bien. Il faut se souvenir qu'il s'est appuyé pour progresser, sur l'intuition géométrique ce qui était commun à l'époque, car il leur manquait des outils mathématiques tels comme que la définition de fonction, de dérivée, comme on l'a déjà précisé auparavant.<br>En effet, il a regardé ce qui passait dans son imagination à propos du tracé d'une courbe continue. Pour ce faire, il a supposé, par hypothèse, l'existence d'une tangente à la courbe en un point donné sur cette dernière (point B). Par la suite, il a décrit le comportement d'un autre point O sur la courbe, en imaginant, le point O glisser le long de la courbe vers le point B, jusqu'à que O coïncide avec B, la corde BO ainsi obtenue, à sa position limite, est devenue la tangente BE qu'il cherchait.<br><br>Donc, nous croyons que ces procédures de Fermat amènent, de façon intuitive et imaginative aux préludes du calcul différentiel.<br><br>Nous croyons que nous pouvons reconstruire cette connaissance avec nos étudiants, car en développant l'imagination de nos apprenants, nous pouvons promouvoir une construction solide de ce que représente la tangente à une courbe.<br><br>Nous pouvons de façon dynamique montrer aux étudiants le comportement de la tangente à une courbe pour l'apprentissage du concept de tangente à une courbe. |

**Table 2.** La méthode de l'invention des tangentes

## 2. Proposition d'enseignement de la dérivée

Le but de notre proposition est de construire le concept de dérivée. Pour ce faire, nous allons cibler l'apprentissage du calcul différentiel dans un contexte de résolution de situations problèmes (SP) à travers un environnement d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion (méthodologie ACODESA, Hitt 2007; Hitt, Saboya & Cortés 2017).

Nous allons nous appuyer sur la modélisation mathématique, car nous croyons que celle-ci peut promouvoir un apprentissage beaucoup plus significatif du calcul différentiel. L'objectif est de construire chez les étudiants un concept solide avec une bonne vue d'ensemble, englobant les aspects intuitifs, algébriques et géométriques. D'après Hitt (2016) le processus de modélisation mathématique est fondamental dans l'apprentissage des mathématiques. Il nous permet d'interpréter et de réfléchir, en termes mathématiques, un phénomène économique, etc.

Nous croyons que les idées intuitives de Fermat amènent une réflexion qui peut être suivi dans l'enseignement des mathématiques.

En nous appuyant sur Fermat et sur son approche intuitive, on pourrait discuter dans la classe de :

- La notion d'approximation avec l'utilisation des infiniment petits,
- La notion intuitive de tangente horizontale pour essayer de trouver le maximum ou le minimum,
- L'implémentation de processus algébriques « informels » pour aboutir à un résultat numérique de la valeur de maximum ou de minimum d'une fonction.

L'idée centrale de notre proposition est basée sur le fait qu'étant donné une fonction polynomiale *f(x)*, si on cherche une valeur approximative du taux de variation de la fonction en un point choisi, cette valeur indique la pente de la droite tangente au graphique de *f(x)* au point considéré et cela est, en effet, le taux de variation de cette droite que coïncide avec la valeur de la variation de la fonction au point considéré.

Ainsi, la SP que nous proposons s'appuie sur une conscientisation de l'environnement, car aujourd'hui nous voyons que le gaspillage de matériel pour la fabrication de produits industrialisés prend de plus en plus d'ampleur. Face à ce constat, on peut se poser la question si les formes des emballages qui existent dans nos supermarchés sont convenables pour l'environnement. À l'aide des mathématiques est-il possible de susciter une réflexion sur ces formes avant d'améliorer notre contexte environnemental ?

## 2.1 Proposition de diverses situations problèmes

Nous allons proposer aux étudiants une séquence de deux SP. Dire pourquoi : on souhaite un volume maximal mais l'aire la plus petite possible à cause de l'environnement. Ce serait bien d'avoir une mise en situation plus élaborée dans laquelle les étudiants sont plongés dans une situation de la vie réelle avec les contraintes à respecter.

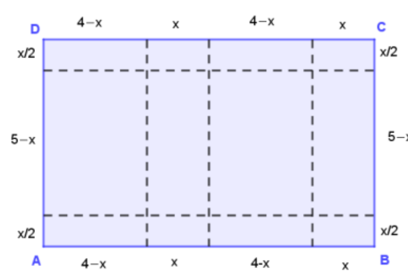
SP 1 : Une petite boite avec un couvercle de volume maximal

Nous pensons proposer aux étudiants d'amener une boite de format parallélépipédique en papier carton. Cette boite sera le point de départ pour la construction d'un modèle mathématique. Nous avons préféré cette option à celle de leur demander de créer un patron au hasard ou encore de leur fournir un patron de boite. Nous croyons que de cette manière nous serons plus proches de la réalité, c'est-à-dire de la vraie situation trouvée dans la vie.

Pour ce faire nous proposons la situation problème suivante :

Étant donnée une feuille de papier carton en format rectangulaire ayant comme mesures de côtes de 8 dm sur 5 dm, il est demandé de construire une boite avec couvercle en format de prisme droit à base rectangulaire de telle sorte que la capacité (le volume) obtenue soit maximale.

Étape 1 : Prise de données et modèle mathématique

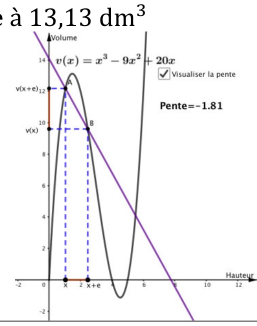



$$AB = DC = 8dm \; et \; AD = BC = 5dm$$

Or, les dimensions du prisme sont : $5 - x\,; 4 - x \; et \; x$

Étape 2 : Trouver les équations

Le volume maximal est $v(x) = (5 - x)(4 - x)x,\ x > 0$

| Méthode d'aujourd'hui | Méthode de Fermat |
| --- | --- |
| $\mathbf{v(x) = x(4 - x)(5 - x)}$<br>Donc le volume v est une fonction de x :<br>$\mathbf{v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x}$,<br>$\mathbf{x > 0 \quad v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x}$<br>$\mathbf{Dv = \left\{x \in \frac{R}{0} < x \leq 4\right\}}$ et $\mathbf{Im\ (v) = \{y \in R/y \leq y_M\}}$<br>$\mathbf{y_M}$ **= la valeur maximale de la fonction** $\mathbf{v(x)}$.<br>**On calcule** $\mathbf{v'(x)}$ **et on l'égale à zéro**:<br>$\mathbf{v'(x) = 3x^2 - 18x + 20}$<br>$\mathbf{v'(x) = 0 \leftrightarrow 3x^2 - 18x + 20 = 0}$<br>$\mathbf{3x^2 - 18x + 20 = 0}$<br>$\mathbf{x_1 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 4,53\ (Minimum)}$<br>ou $\mathbf{x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1,47 (Maximum)}$<br>Le candidat au point de maximum est obtenu en égalant à zéro la dérivée prime et la valeur acquise est distinguée en le remplaçant sur la deuxième dérivée et en observant la valeur obtenue. Une autre façon de le faire est tout simplement d'observer le graphique de la fonction v(x).<br>Le point maximal sur le graphique de v(x) est confirmé pour la négativité du signe de la dérivée seconde dans un intervalle du domaine de v(x).<br>Comme $\mathbf{v''(x) \leq 0}$ sur l'intervalle considéré, nous concluons alors que ce point est maximal. Alors, la valeur maximale de la fonction est 13,13 $\mathbf{dm^3}$.<br>Nous pouvons également construire avec Geogebra les graphiques des fonctions v(x), v'(x) et v''(x) pour visualiser le comportement de cette fonction pour mieux comprendre les résultats suivants :<br>Point maximal : $\mathbf{f'(x) = 0\ et\ f''(x) < 0}$ | $v(x) = x(4 - x)(5 - x)$<br>$v(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$<br>$v(x + e) = x^3 - 9x^2 + 20x + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 18xe - 9e^2 + 20e$<br>Il doit adégalé $v(x)$ à $v(x + e)$<br>$x^3 - 9x^2 + 20x \sim x^3 - 9x^2 + 20x + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 18xe - 9e^2 + 20e$<br>En suprimant les termes communs:<br>$0 \sim 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 18xe - 9e^2 + 20e$<br>En divisant tous les termes par e<br>$0 \sim 3x^2 + 3xe + e^2 - 18x - 9e + 20$<br>Suprimez e:<br>$0 = 3x^2 - 18x + 20$<br>$x_1 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 4{,}53$ (Minimum)<br>ou $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1{,}47$ (Maximum)<br>Comme nous cherchons le volume maximal, le point qui nous intéresse est bien :<br>$x_1 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{3} \approx 1{,}47$ (Maximum)<br>En substituant $x_1 \approx 1{,}47$ dans la fonction v(x), nous trouverons la valeur maximale de v(x) qui est égale à 13,13 $dm^3$<br><br> |

Les difficultés chez les élèves pourront être mitigés en utilisant la méthode d'enseignement ACODESA (voir la tâche au complet).

SP 2 : De toutes les boîtes cylindriques avec un volume de 300 $cm^3$, quelle est celle qui a l'aire totale minimale?

Étape 1: Prise de données et modèle mathématique

Soit $r$ le rayon de la boite cylindrique et $h$ leur hauteur, nous voulons déterminer les valeurs de $r$ et $h$ de telle façon que l'aire totale soit minimale.

Étape 2 : Trouver les équations

Soit $r$ le rayon de la boîte et $h$ sa hauteur. On doit déterminer les valeurs de $r$ et $h$ pour que l'aire totale $A$ soit minimale ainsi :

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ (Aire latérale + Aire de la base) et

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi r^2 h = 300; \; h \; et \; r > 0.$

Alors, $h = \frac{300}{\pi r^2}$ et $A = 2\pi r.\frac{300}{\pi r^2} + 2\pi r^2$. Donc, $A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$

| Méthode d'aujourd'hui | Méthode de Fermat |
|---|---|
| $\mathbf{A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2}$ | $A = 2\pi r.\frac{300}{\pi r^2} + 2\pi r^2$ |
| $\mathbf{DA} = \{\mathbf{r \in R^*}\}$ et $\mathbf{Im\ (A)} = \{\mathbf{y \in R/y \leq y_M}\}$<br>$\mathbf{y_M}$ **= la valeur maximale de la fonction** $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. | $A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$ |
| En calculant A'(r) et en égalant à zéro :<br>$\mathbf{A'(r) = \frac{-600}{r^2} + 4\pi r}$<br>$\mathbf{A'(r) = 0}$ : | $A(r+e) = \frac{600}{r+e} + 2\pi r^2 + 4\pi re + 2\pi e^2$ |
| $\mathbf{4\pi r = \frac{600}{r^2} \to r^3 = \frac{150}{\pi}}$<br>$\mathbf{r = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \to r \cong 3,62}$ | Il doit adégalé A(r) à A(r + e)<br>$\frac{600}{r} + 2\pi r^2 \sim \frac{600}{r+e} + 2\pi r^2 + 4\pi re + 2\pi e^2$ |
| Finalement en calculant A''(r) :<br>$\mathbf{A''(r) = -600.(-2).r^{-3} + 4\pi = \frac{1200}{r^3} + 4\pi > 0}$ | En suprimant les termes communs: |
| Donc, $\mathbf{A''(r) > 0}$ dans le point critique, pourtant tel point est un point de minimum.<br>Alors on conclut : | $\frac{600}{r} \sim \frac{600}{r+e} + 2\pi e^2 + 4\pi re$ |

r =3,628 cm et $\mathbf{h = \frac{300}{\pi r^2} \rightarrow h = 2\sqrt[3]{\frac{150}{\pi}}} \cong$ $\mathbf{7,256\ cm}$

Le candidat au point de minimum est obtenu en égalant à zéro la dérivée prime et la valeur acquise est distinguée en le remplaçant sur la deuxième dérivée et en observant la valeur obtenue. Une autre façon de le faire est tout simplement d'observer le graphique de la fonction A(r)

Le point minimal sur le graphique de A(r) est confirmé par la positivité du signe de la dérivée seconde à l'intervalle du domaine de A(x).

Comme $\mathbf{A''(x) > 0}$ sur l'intervalle considéré, nous concluons alors que ce point est minimal. Alors, la valeur maximale de la fonction est $\mathbf{248,08\ cm^2}$.

Nous pouvons également construire avec Geogebra les graphiques des fonctions A(x), A'(x) et A''(x) pour visualiser le comportement de ces fonctions pour mieux comprendre les résultats suivants :

Point maximal : $\mathbf{f'(x) = 0\ et\ f''(x) < 0}$

Point minimal : $\mathbf{f'(x) = 0\ et\ f''(x) > 0}$

En divisant tous les termes par e :

$$\frac{600}{r(r+e)} \sim 4\pi r + 2\pi e$$

Suprimez e:

$$\frac{600}{r^2} \sim 4\pi r \rightarrow r^3 = \frac{150}{\pi} \cong 3,628\text{ cm}$$

Comme nous cherchons l'aire minimale, le point qui nous intéresse, est bien $r \cong 3,628$ cm

En substituant $r \approx 7,256$ cm dans la fonction A, nous trouverons la valeur minimale qui est égale à 248,08 $cm^2$

$$A(r) = \frac{600}{r} + 2\pi r^2$$

$$A(r) = \frac{600}{3,628} + 2\pi(3,628)^2$$

$$= 248,08\text{ cm}^2$$

Les difficultés chez les élèves pourront être mitigées en utilisant la méthode d'enseignement ACODESA (voir la tâche au complet).

## 3. Conclusion

Nous croyons que la modélisation mathématique va promouvoir une compréhension efficace du concept de calcul différentiel. De plus, elle va réveiller chez les apprenants, l'intérêt pour ce domaine si important des mathématiques, car les étudiants vont comprendre les raisons, le chemin qui les mène vers la résolution de la situation réelle proposée.

Nous avons directement suivi la méthode de Fermat pour ses idées intuitives et sa potentialité vers la modélisation mathématique pour le calcul des maximum et minimum des fonctions. La méthode serve à une construction conceptuelle riche chez les étudiants, même si dès un point de vue de l'infini actuel, la méthode est critiquée pour son manque de formalité. Mais pour mieux apprécier la méthode, il faut se placer à une approche des infiniment petits et l'approche visuelle indispensable.

*« Une étincelle suffit, si le combustible est beau, le feu apparaitra »*

Pedro Castro

Remerciement :

J'aimerais remercier le professeur Fernando Hitt pour son esprit de collaboration et pour sa grande générosité intellectuelle ce qui fait toujours grandir les sciences.

## Bibliographie

Bardi, J-S. (2008). A guerra do cálculo. Éditeur Record (pp.266-269). Rio de Janeiro, Brésil.

Boyer, C-B. (1996). História da matemática. Éditeur Edgard Blücher. (p.229-252). São Paulo, Brésil.

Commission inter-IREM. (2004). Aux origines du calcul infinitésimal. *Épistémologie et Histoire des Mathématiques* (p.79 à 82). Paris, France.

Bell, E-T (1961). Les grands mathématiciens. Éditeur Payot. (pp.76 et pp.102-113). Paris, France.

Edwards, H. (2007). Les mathématiciens – De l'antiquité au XXI siècle. Éditeur Belin-pour la science *Bibliothèque scientifique* (p.51). Paris, France.

Guidorizzi, H-L.Un cours de Calcul. Editéur Livros Técnicos e cientificos. Volume1 (pp.284-285). São Paulo, Brésil.

Giusti, H. (2009). Les méthodes des maxima et minima de Fermat. *Euvres, II, p.71-74.* Tome XVIII, n° S2. (pp.59-85).

www.cedran.org http://afst.cedram.org/item?id=AFST_2009_6_18_S2_59_0

Hitt, F. (1994). Teachers' Difficulties with the Construction of Continuous and Discontinuous Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 16*(4), 10-20.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt, F., Saboya, M. and Cortés C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & Gellert U. (Eds.), *Mathematics and technology. A C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (pp. 57-74). Cham : Springer.

Tannery, P. (1894). Ouvres de Fermat. *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum*. Ministère de l'instruction publique (pp. 121-155). Paris, France.

Tall, D. (1993). Students'Difficulties in Calculus. *Procedeedings of Working Group 3 on Students'Difficulties in Calculus,* ICME-7 (pp.13-28). Québec, Canada.

# 11 LA ECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES: UNA PROPUESTA PARA SU APRENDIZAJE EN LA ESCUELA SECUNDARIA MEXICANA

Ana Guadalupe del Castillo[1], Silvia E. Ibarra Olmos[1]

**Resumen**

En el estudio de la ecuación lineal con dos variables, algunas dificultades enfrentadas por los estudiantes son: las interpretaciones que dan al signo igual; las concepciones sobre lo que es una ecuación lineal; las aproximaciones al estudio del álgebra escolar basadas en la modelación; los diferentes usos a las literales en expresiones algebraicas. En este contexto, se elaboró una secuencia para el aprendizaje de dicho tema, basada en los criterios de idoneidad y en las nociones de práctica, objeto y significados sistémicos establecidos en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Las actividades incorporan el uso de GeoGebra, aprovechando su potencialidad para el manejo de representaciones múltiples dinámicamente vinculadas.

**Palabras clave:** ecuación lineal, pensamiento algebraico.

**Résumé**

Dans l'étude des équations linéaires à deux variables, les étudiants sont confrontés à certaines difficultés : les interprétations données au signe égal; les conceptions autour de ce que signifie une équation linéaire; les approximations dans l'étude de l'algèbre scolaire basées sur la modélisation; les différentes utilisations données aux nombres littéraux dans les expressions algébriques. Dans ce contexte, une séquence d'apprentissage sur les équations linéaires à deux variables a été élaborée, sur la base des critères de pertinence, ainsi que sur les notions de pratique, d'objet et de signification systémique définies dans l'approche Ontosemiótico de la Connaissance et de l'Instruction Mathématiques. Les activités conçues s'appuient sur l'utilisation du GeoGebra, exploitant ainsi son potentiel pour la gestion de représentations multiples liées de manière dynamique.

**Mots-clés** : équation linéaire, pensée algébrique.

**Abstract**

In the study of the linear equation with two variables some different causes of the difficulties faced by students are; the interpretations that students give to the equal sign; the conceptions they have about what is a linear equation; the approaches to the study of school algebra based on modeling; the different uses that are given to literals in algebraic expressions. In this context, was elaborated a sequence for the learning of this subject, based on the criteria of suitability, as well as on the notions of practice, object and systemic meanings established within the Ontosemiótico Approach of the Mathematical Knowledge and Instruction. The designed activities incorporate the use of GeoGebra software; taking advantage of its potential for the handling of dynamically linked multiple representations.

**Keywords**: linear equation, algebraic thinking.

[1] Universidad de Sonora, México.

## 1. Introducción

¿Qué significa aprender álgebra? ¿Por qué es importante aprender álgebra? ¿Qué contenidos algebraicos son los que se deben enseñar en la escuela? ¿En qué consiste el pensamiento algebraico? ¿Cómo se podrá desarrollar el pensamiento algebraico en los aprendices? ¿Cuál es la mejor etapa para realizar el pasaje de la aritmética al álgebra? ¿Cómo debe realizarse esta transición? ¿Cuál es la relación entre álgebra y pensamiento algebraico? En las últimas cuatro décadas muchos esfuerzos de investigación en Matemática Educativa se han dedicado a tratar de dar respuestas a ésas y otras interrogantes relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, sin que hasta el momento se tengan respuestas definitivas sobre alguna de ellas.

A pesar de eso, se ha generado una gran cantidad de conocimiento sobre la temática, de tal forma que hoy en día es posible atreverse a plantear propuestas de enseñanza sobre diversos temas algebraicos, fundamentadas en algunos de esos resultados de investigación, pues como señaló Schoenfeld (2000):

> Research in mathematics education has two main purposes, one pure and one applied:
>
> - Pure (Basic Science): To understand the nature of mathematical thinking, teaching, and learning;
> - Applied (Engineering): To use such under-standings to improve mathematics instruction. (p. 641).

En tal sentido, con la intención de internarse en lo que Schoenfeld llama el “frente aplicado”, en este capítulo se expondrá una propuesta diseñada para el aprendizaje de la ecuación lineal con dos variables, dirigida a estudiantes de secundaria mexicanos (12-15 años). Este tema fue seleccionado porque se considera que, dentro de los contenidos algebraicos que el currículo matemático señala para ese nivel educativo, es uno de los que requiere un mayor nivel de maduración cognitiva del estudiante, debido a que para su comprensión es necesaria la manifestación de la puesta en uso, tanto a nivel discursivo como operativo, de elementos algebraicos como igualdad, variable, incógnita, relación funcional, número, modelo lineal, por citar algunos.

Se agregan, a lo anteriormente señalado, las habilidades del pensamiento algebraico que se requiere poner en juego para lograr un significado rico de la noción en cuestión, además de la posibilidad de incorporar a sus diferentes representaciones en las actividades de los estudiantes, éstas últimas susceptibles de potenciarse con el uso de un software de geometría dinámica.

Por lo anteriormente expuesto, se puede considerar a la ecuación lineal con dos variables como una construcción matemática de alta complejidad, cuyo aprendizaje representa un verdadero reto para los estudiantes, y en consecuencia su enseñanza, un verdadero reto para los profesores.

## 2. Antecedentes

En los párrafos inmediatos anteriores se expresaron algunos argumentos relativos a la complejidad del tema seleccionado para la elaboración de la secuencia de aprendizaje, con el propósito de mostrar la importancia de su estudio. En esta sección se continuará con esta línea de exposición, desarrollando en primer término algunos resultados de investigaciones que tuvieron como punto central conocer las dificultades escolares asociadas al aprendizaje del álgebra y de la ecuación lineal con dos variables; posteriormente se hará una descripción sobre lo que el currículo matemático en México propone sobre ella, cerrando la sección con la relación de actividades que constituyen la secuencia propuesta.

## 3. Dificultades asociadas con el aprendizaje de la ecuación lineal con dos variables. Una breve mirada hacia algunos resultados de investigación

Durante un buen tiempo las investigaciones realizadas en el campo de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra estuvieron situadas en estudiar la transición entre la aritmética y el álgebra, concibiendo este tránsito como el puente que permitiría al estudiante acceder a ideas matemáticas de mayor complejidad. En este sentido, Butto y Rojano (2010), señalan que:

Sin embargo, los resultados de la investigación en didáctica del álgebra registran que la mayoría de las dificultades que enfrentan los estudiantes al iniciarse en el estudio del álgebra se deben a que, por mucho tiempo, ésta ha sido vista como una mera extensión del cálculo numérico al cálculo literal.(p.56)

Es decir, la postura tradicional, que por mucho tiempo lideró en el aula, consistente en un acercamiento a reglas y manipulación de símbolos, una especie de sintaxis algebraica, generó una serie de problemas, como los señalados por Butto et al (2010), a partir de una revisión a la literatura en el área:

> … los estudiantes suelen usar métodos aritméticos en lugar de métodos algebraicos para resolver problemas de enunciado y tienen dificultades para comprender y manejar conceptos propios del álgebra (incógnita, número general y variable), así como para comprender que las operaciones en álgebra pueden no llevar a un resultado numérico y que, a la larga, pueden quedar como operaciones suspendidas. (p. 56)

En el caso particular de la ecuación lineal con dos variables, Panizza, Sadovsky y Cessa (1999), en un artículo que podría considerarse como clásico en este tema, concluyen:

> … que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los alumnos como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Cuando aparece en el contexto de los sistemas de ecuaciones lineales…adaptan bien la concepción de la literal como incógnita a la resolución de sistemas con solución única: antes se trataba de develar la $x$ ahora habrá que develar la $x$ y la $y$. La noción de incógnita, en cambio, no resultaría eficaz para interpretar el rol de las letras en una ecuación con dos variables, objeto éste que debería ser comprendido si los sistemas lineales fueran concebidos como un conjunto de condiciones independientes que deben cumplirse simultáneamente. (p.459)

A lo anterior agregan:

> …cualquiera haya sido el trabajo realizado alrededor de "ecuación de la recta", ésta no parece suficiente para que los alumnos puedan establecer una relación entre los puntos de la recta y las soluciones de la ecuación correspondiente. (p.459)

En las conclusiones de su artículo plantean una serie de cuestionamientos que desprenden de la identificación de los puntos de apoyo y de bloqueo de los estudiantes participantes en su estudio para el manejo de la ecuación lineal con dos variables. Mencionan:

> ¿Es necesaria la noción de incógnita para arribar a la noción de variable?
>
> Los conceptos de incógnita y de variable, ¿podrían nutrirse uno al otro si se construyeran simultáneamente? ¿Habría un campo de problemas que los abarcara de manera fructífera? (p.460)

Rematando estas ideas así:

> Avanzar en el conocimiento de la relación que existe entre el aprendizaje de la noción de incógnita y el de la noción de variable parece ineludible

> para desentrañar la compleja y desafiante relación entre la aritmética y el álgebra. (p.460)

La relación entre aritmética y álgebra, presente como ya se señaló anteriormente en mucho del trabajo de investigación efectuado en el área, tomó otra vertiente cuando ya no se habló exclusivamente de aritmética, álgebra, geometría, etc., sino que aparecieron expresiones como pensamiento aritmético, pensamiento algebraico, pensamiento geométrico, etc., llevando a la necesidad de caracterizar a unos y a otros. Para el caso del álgebra, los investigadores empezaron a ocuparse de establecer conexiones y diferencias entre álgebra y pensamiento algebraico, más aún, llegando a asegurar que las literales nunca han sido una condición necesaria y suficiente para pensar algebraicamente. En esta dirección, Radford (2010) señala:

> Traditionally, letters and signs for operations (like $+, x, etc.$) have been considered the algebraic signs of school algebra. Alphanumeric symbolism has indeed been regarded as the semiotic system for algebra par excellence. (p.2)
>
> … I do not think that algebra and algebraic thinking can be reduced to the use of letters. As John Mason pointed out some years ago, ''the manipulation of symbols is only a small part of what algebra is really about'' (1990, 5). Letters, indeed, have never been either a necessary or a sufficient condition for thinking algebraically. (p.2, 3)

Concluyendo que:

> But before I go further, let me reassure you that my idea is not to challenge the power of symbolic algebra. Rather, I am trying to convince you that it is worthwhile to entertain the idea that there are many semiotic ways (other than, and along with, the symbolic one) in which to express the algebraic idea of unknown, variable, parameter, etc. I deem this point important for mathematics education for the following reason. Ontogenetically speaking, there is room for a large conceptual zone where students can start thinking algebraically, even if they are not yet resorting (or at least not to a great extent) to alphanumeric signs. This zone, which we may term the zone of emergence of algebraic thinking, has remained largely ignored, asa result of our obsession with recognizing the algebraic in the symbolic only. (p.3).

Los argumentos anteriores se pueden traducir como un viraje a lo que se consideraba un núcleo estable en los estudios sobre las dificultades para aprender y enseñar álgebra y el problema de cómo desarrollar el pensamiento algebraico en los estudiantes. Esta ruta ha tomado tal impulso, que ha evolucionado hasta proponer la posibilidad del desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas, aspecto que no será profundizado en este documento.

## 4. La ecuación lineal con dos variables en el currículo matemático del sistema escolar mexicano

Es importante sin embargo, señalar cómo en el caso de secundaria mexicana, los planteamientos curriculares oficiales (Secretaría de Educación Pública, 2017), contemplan que:

> A la utilización de las herramientas aritméticas se suma, en la secundaria, la de las herramientas algebraicas, por un lado, para generalizar y expresar simbólicamente las propiedades de los números y sus operaciones; y por otro, para representar situaciones y resolver problemas que requieren de la comprensión de conceptos y dominio de técnicas y métodos propios del álgebra. En este nivel escolar, se busca que los estudiantes aprendan álgebra a través del uso flexible de sus elementos fundamentales, a saber, números generales, incógnitas y variables en expresiones algebraicas, ecuaciones y situaciones de variación; en estas últimas, tanto en su expresión simbólica como en su representación por medio de tablas y gráficas cartesianas. En términos generales, se concibe a la aritmética y al álgebra como herramientas para modelar situaciones problemáticas —matemáticas y extra matemáticas—, y para resolver problemas en los que hay que reconocer variables, simbolizarlas y manipularlas. (p.304)

Varias observaciones pueden hacerse a lo expresado en el párrafo inmediato anterior; de entrada es visible cómo los contenidos a estudiar están enmarcados en una postura centrada en las nociones algebraicas que se consideran fundamentales: números generales, incógnitas y variables en expresiones algebraicas, ecuaciones y situaciones de variación, todas ellas en diferentes representaciones. Se puntualiza también su uso en la modelación y solución de problemas.

La centralización mencionada corre el riesgo de concretarse, tal y como ya sucedió en el pasado y quizá siga sucediendo, en una aritmética generalizada. Esto es, que los alumnos aprendan a simbolizar y manipular variables, operarlas inclusive extrapolando lo que saben hacer con los números, pero sin lograr generar un significado rico sobre la variación, más aún, sobre la covariación, elemento indispensable para el estudio de la ecuación lineal con dos variables.

Desde esta perspectiva, se hace necesario poner más énfasis en que el alumno aprenda a trabajar con situaciones problemáticas que requieran la modelación de fenómenos de variación, en donde, a la vez que se incorporan las nociones algebraicas que señala el currículo para este nivel educativo, se promueva el desarrollo de habilidades propias del pensamiento algebraico.

El sistema escolar mexicano está organizado por niveles: básico, bachillerato y nivel superior, siendo obligatorios tanto el nivel básico como el bachillerato. Por su parte, el nivel básico integra a preescolar (3 a 6 años), primaria (6 a 12 años) y secundaria (12 a 15 años).

El programa de estudios en el nivel básico está organizado en tres ejes temáticos: Número, álgebra y variación; Forma, espacio y medida; Análisis de datos, los cuales en conjunto integran un total de 12 temas que serán abordados a lo largo de los 12 años que dura este nivel. Para el tema de interés, esto es, la ecuación lineal en dos variables, la Secretaría de Educación Pública (2017) formula su proceso de estudio en la escuela secundaria, distribuyéndolo en algunos temas que se abordarán en determinados momentos de los tres años escolares que constituyen la escuela secundaria en México. Todos estos temas están incluidos en el eje denominado Número, álgebra y variación. En la tabla siguiente se concentra esta información:

| Eje curricular: Número, álgebra y variación (secundaria) | | |
|---|---|---|
| Año escolar | Temas a tratar | Aprendizajes esperados |
| Primero | Funciones | Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación. |
| Segundo | Funciones | Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos. |
| Tercero | Funciones | Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos. |
| | Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes | Diferencia las expresiones algebraicas de las funciones y de las ecuaciones. |

**Tabla 1.** Distribución de temas y aprendizajes esperados donde se espera sea abordado el tema ecuación lineal con dos variables. Elaboración propia

## 5. Consideraciones teóricas

La secuencia didáctica que se ha estructurado tiene como soporte algunas nociones teóricas tomadas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), (Godino, Batanero y Font, 2008). Las nociones teóricas de las que se hace uso son práctica, objeto, significado, así como los indicadores de idoneidad didáctica.

Uno de los puntos de partida del EOS es la relativa a la triple concepción de la matemática: como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje, y finalmente, como un cuerpo de conocimientos que ha sido socialmente construido y sistematizado. Esta terna de elementos está presente en la actividad matemática que desarrolla cualquier individuo o conglomerado de individuos. Godino et al (2008) presentan la noción de práctica matemática como toda acción realizada con la intención de resolver situaciones problema (s-p), comunicar los resultados derivados de este proceso de solución, identificando además en la actividad matemática la presencia de los llamados objetos matemáticos primarios: las propias s-p, los lenguajes utilizados, los procedimientos seguidos en el abordaje y resolución de las s-p, las propiedades que se atribuyen a los objetos matemáticos, los conceptos establecidos y los argumentos manejados para justificar cualquier acción realizada.

Por otro lado, en los procesos de estudio interesan los sistemas de prácticas que resulten ser útiles para alcanzar los objetivos planteados, esto es las llamadas prácticas significativas, que no se presenten aisladamente, sino de forma frecuente, lo cual les concede el carácter de prácticas prototípicas. Esta acotación es útil, porque en el EOS interesa entonces el estudio de las prácticas significativas prototípicas, dado que constituyen lo que se denomina el significado de un objeto matemático.

Se puntualiza esta noción estableciendo que el significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas significativas prototípicas, tanto operativas (lo que se hace), como discursivas (lo que se dice), asociadas a la resolución de determinado tipo de situaciones problemas. Si los sistemas de prácticas son generados por un individuo hablaremos de significado personal, en tanto que al ser generados por una comunidad, estaremos tratando con el significado institucional.

Se mencionó también que para el diseño de las actividades se hizo uso de los criterios de idoneidad didáctica, la cual es concebida “como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

El uso de cada uno de los elementos teóricos aquí explicitados, será evidenciado al describir las características de las actividades, en la sección siguiente.

## 6. Las actividades propuestas y sus características

La secuencia de aprendizaje está dirigida a estudiantes del primer grado de secundaria y se corresponde con las directrices curriculares del modelo educativo vigente en México. En cuanto a los conocimientos previos de los estudiantes, será necesario que estos conozcan los números, sus operaciones y propiedades; tener nociones sobre el uso de la literal para representar cantidades desconocidas y manejo básico del plano cartesiano. No se requiere haber utilizado GeoGebra con anterioridad, pues los archivos o applets a utilizar sólo requieren manipulaciones o construcciones muy básicas. Se espera que a través del uso de este software y el contexto utilizado, se pueda despertar el interés en los estudiantes, y mostrar a la matemática como una herramienta útil para la modelación y resolución de problemas en un contexto de la vida cotidiana.

Las actividades inician con el planteamiento de una situación problema en un contexto de la vida diaria, en el que se resaltan valores de armonía familiar, convivencia entre amigos, deporte y cultura financiera. El análisis y resolución de la situación planteada desencadena una serie de situaciones particulares que conllevan actividad matemática, como por ejemplo, elaboración de tablas numéricas para organizar información, análisis gráfico, la búsqueda de un modelo algebraico, descripciones en lenguaje natural de procedimientos, comparación de ecuaciones equivalentes, que culmina con el análisis de la ecuación lineal con dos variables de la forma $y = mx + b$. De esta manera, se articulan, a lo largo de la secuencia, representaciones gráficas, tabulares, algebraicas y en lenguaje natural. Los procedimientos incluyen las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación y división; operaciones inversas; comparación de representaciones tabulares; interpretación de representaciones gráficas; análisis de los componentes de una ecuación lineal de dos variables, manipulación de applets GeoGebra, entre otros. Asimismo, entre los conceptos que intervienen y/o emergen de las prácticas que deben realizar los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia, se pueden identificar los siguientes: número, operaciones aritméticas, número general, variable, expresión algebraica, expresión lineal, coeficiente, término independiente, ecuación, ecuación lineal, ecuaciones equivalentes, igualdad, entre otros. Estos conceptos tienen ciertas propiedades que juegan un papel importante para su apropiado manejo en el desarrollo de la actividad. También se concede especial importancia a la justificación de los procedimientos, la validación de los resultados y las conclusiones obtenidas en cada actividad.

La secuencia también contempla momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. Las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para negociar los significados construidos, y para que se promuevan los momentos de argumentación.

En cuanto a la estructura de la secuencia de aprendizaje, se contempla una actividad de apertura, nueve actividades de desarrollo y tres actividades de cierre, acorde a la propuesta presentada por Díaz-Barriga (2013).

### 6.1 Duración de las actividades

Para el desarrollo de la secuencia de actividades se tienen consideradas de cuatro a cinco sesiones de 50 minutos, distribuidas de la siguiente manera:

- Una sesión para la actividad de apertura. Dependiendo de las características del grupo, el profesor puede solicitar que esta se lleve a cabo individualmente extra-clase, para dedicar media sesión para la discusión de la misma en equipos y/o grupal, y dedicar más tiempo a las actividades de desarrollo.
- Dos o tres sesiones para las actividades de desarrollo. También dependiendo de las características de los grupos, se recomienda dejar como trabajo extra-clase, algunos momentos de actividad individual.

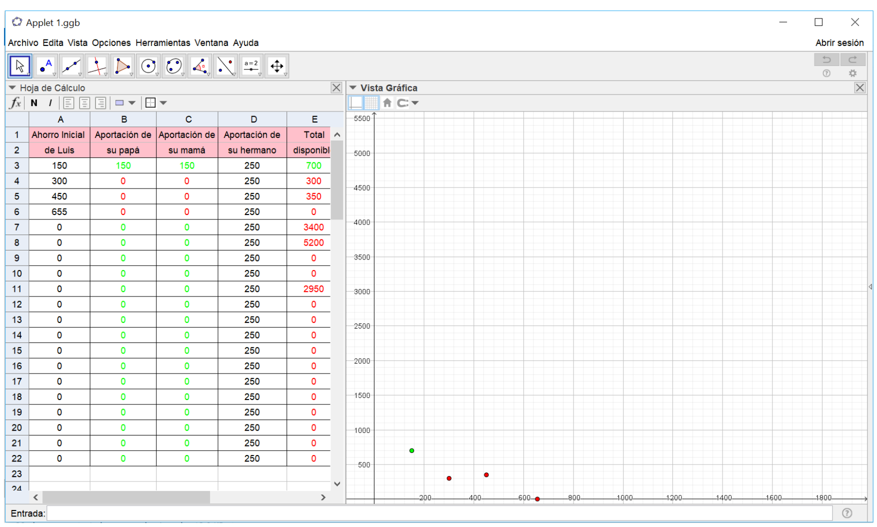
- Una sesión para las actividades de cierre. Puede considerarse que la última actividad de esta sección puede dejarse como trabajo extra-clase, para la reflexión individual.

## 6.2 Materiales de las actividades

Para el desarrollo de las actividades se cuenta con material impreso y en línea, en formato de hojas de trabajo y un conjunto de applets o archivos GeoGebra, disponibles en www.mat.uson.mx/proyectoalgebra/ecuacionlineal.

Enseguida se da una breve descripción de los applets o archivos GeoGebra.

El primer applet que sirve de apoyo a la actividad, referido como Applet 1, tiene el propósito de lograr que el estudiante organice la información en formato de tabla e interprete una representación gráfica. Mediante un código de color, tanto en la tabla como en la gráfica, el applet retroalimenta el trabajo del estudiante para ayudarle a identificar si ha hecho un cálculo erróneo. La información se presenta en cinco columnas, pero se discutirá la pertinencia de disminuir el número de las mismas.




| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Ahorro Inicial | Aportación de | Aportación de | Aportación de | Total |
| 2 | de Luis | su papá | su mamá | su hermano | disponibl |
| 3 | 150 | 150 | 150 | 250 | 700 |
| 4 | 300 | 0 | 0 | 250 | 300 |
| 5 | 450 | 0 | 0 | 250 | 350 |
| 6 | 655 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 250 | 3400 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 250 | 5200 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 250 | 2950 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 13 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 250 | 0 |
| 23 | | | | | |

**Figura 1.** Imagen de pantalla correspondiente al Applet 1

El segundo applet, referido como Applet 2, es similar al anterior, pero se han eliminado las columnas que resultan redundantes, de acuerdo a la situación propuesta. La idea de este applet es provocar la emergencia de la expresión algebraica $3A + 250$.

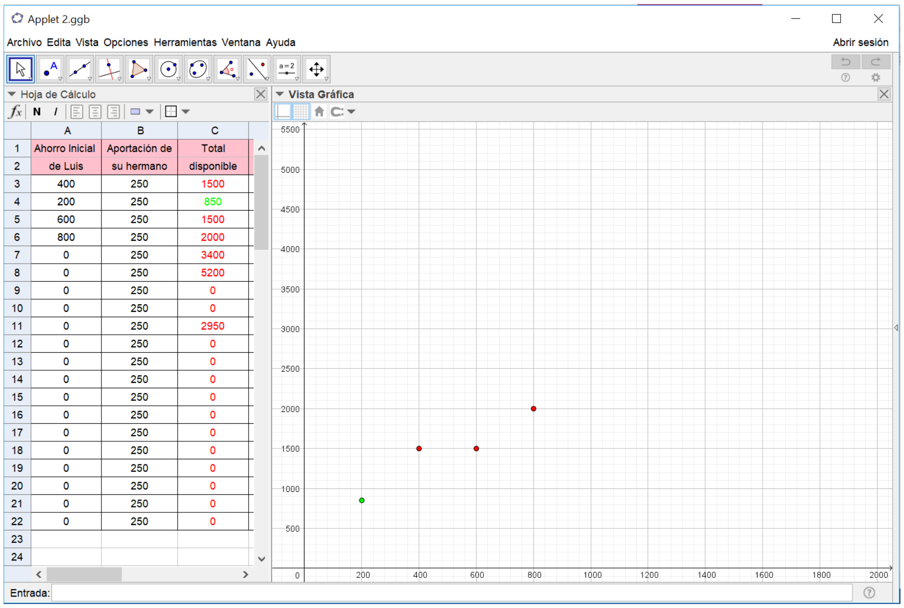



**Figura 2.** Imagen de pantalla correspondiente al Applet 2

En el tercer applet, referido como Applet 3, la manipulación se efectúa sobre la representación gráfica para que los estudiantes identifiquen el patrón que siguen los puntos. Se pretende que lleguen a la construcción de la recta $y = 3x + 150$.

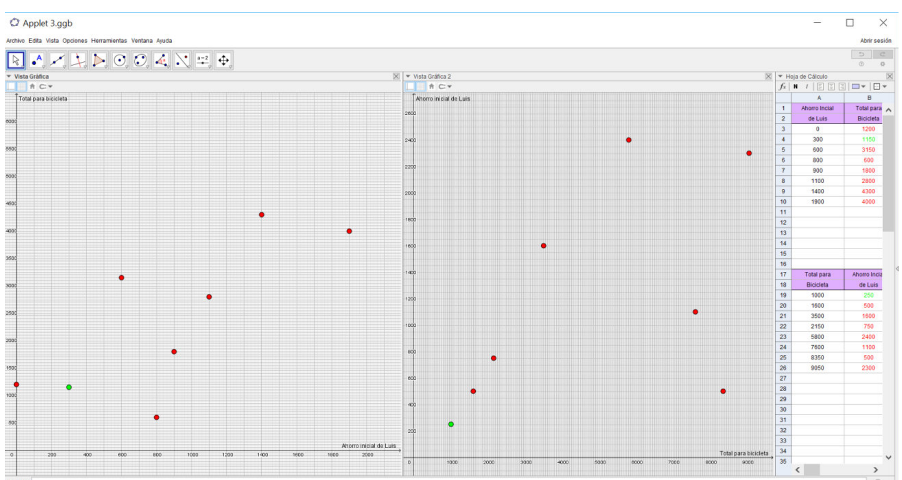


**Figura 3.** Imagen de pantalla correspondiente al Applet 3

En el Applet 4, mediante el análisis de posibles variantes del problema, se discuten las relaciones entre la gráfica, la tabla y ecuaciones lineales de dos variables del tipo $y = mx + b$ considerando en un primer momento, valores positivos de los parámetros, ligados al contexto original del problema, como un primer acercamiento que posibilitará posteriormente dar paso a la institucionalización, donde se discuten valores más generales.

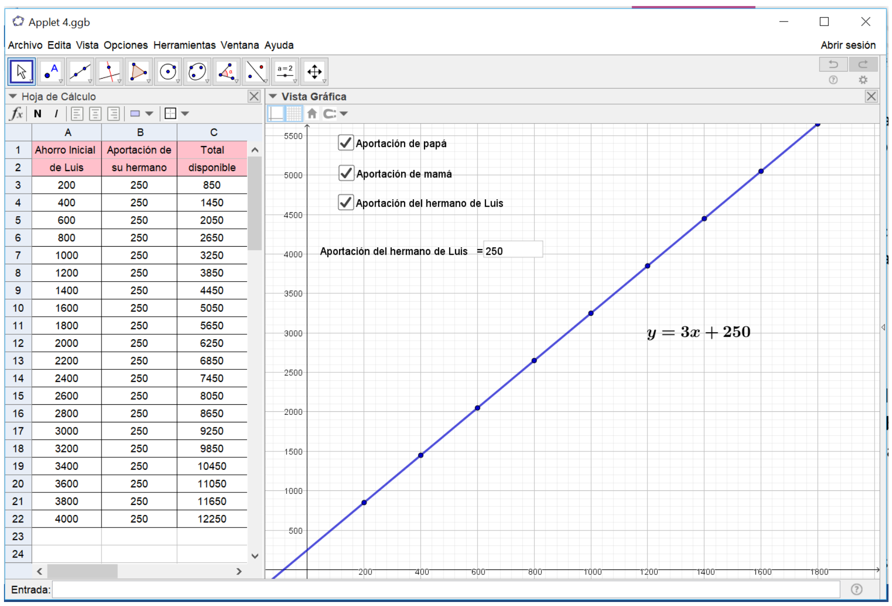



**Figura 4.** Imagen de pantalla correspondiente al Applet 4

En el Applet 5, durante las actividades de cierre, para ampliar e institucionalizar los significados construidos en torno a las ecuaciones lineales de dos variables, se propone la manipulación gráfica de la recta para explorar los cambios correspondientes en la expresión algebraica y en la tabla asociada.

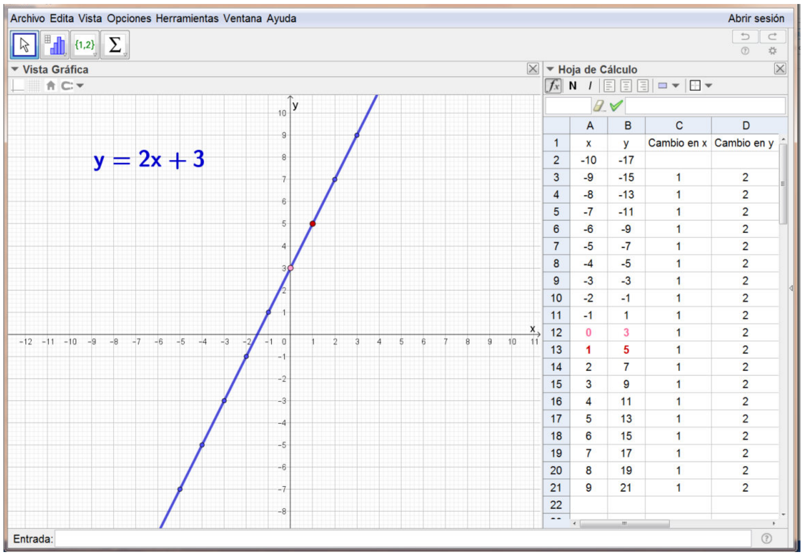



**Figura 5.** Imagen de pantalla correspondiente al Applet 5

En el Applet 6, se propone la manipulación de los valores numéricos de la expresión algebraica, y se exploran los cambios correspondientes en la gráfica y la tabla asociada.

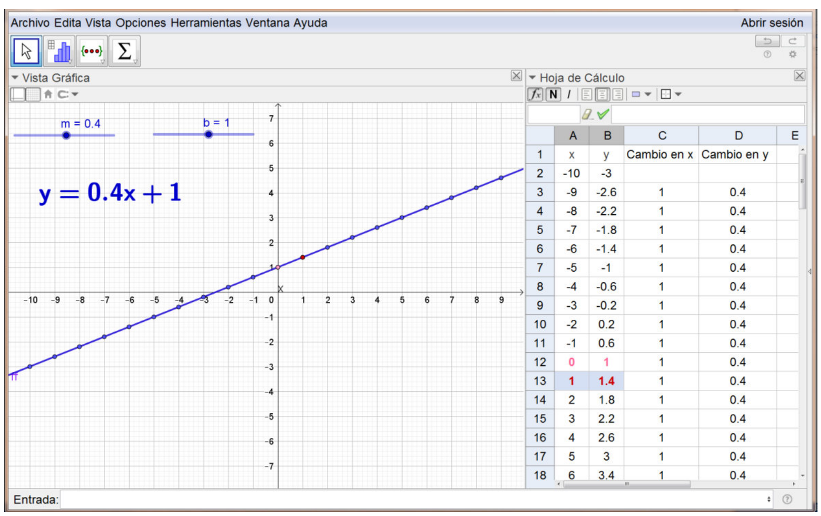



**Figura 6.** Imagen de pantalla correspondiente al Applet 6

### 6.3 Las actividades

Actividad de apertura.

Al ingresar a la escuela secundaria, Luis ha decidido iniciar un esquema de ahorro, reservando parte de lo que sus papás le dan para sus gastos en la escuela. Él desea comprar una bicicleta para unirse a un grupo de amigos que organizan paseos y otras actividades recreativas.

El papá y la mamá de Luis, para promover una cultura financiera en su hijo y apoyar su iniciativa, le han prometido que cada uno aportará una cantidad igual a la que logre ahorrar. De igual manera, el hermano mayor de Luis se ofreció a cooperar con parte de sus ahorros, estimando que podría aportar una cantidad de 250 pesos, al final.

Hay bicicletas de muy diferentes precios. Para explorar a qué tipo de bicicleta puede aspirar, Luis hizo un ejercicio de cálculo para determinar el monto total que logrará reunir, dependiendo de la cantidad que logre ahorrar inicialmente, planteándose las siguientes preguntas: ¿Si ahora tengo ahorrados 450 pesos, qué cantidad total reuniría? ¿Y si ahorro 655 pesos? ¿Cuánto necesito ahorrar si quiero comprar una bicicleta de 3400 pesos? ¿O la de 5200?

1. Ayuda a Luis a responder sus cuestionamientos y organiza la información en la tabla presentada más abajo. Escribe detalladamente tus procedimientos en el siguiente espacio y, compara y discute tus respuestas con las de tus compañeros.

| Ahorro inicial de Luis | Aportación de su papá | Aportación de su mamá | Aportación de su hermano | Total reunido |
|---|---|---|---|---|
| 450 | | | | |
| 655 | | | | |
| | | | | 3400 |
| | | | | 5200 |

Actividades de desarrollo

1. Luis desea tener una perspectiva más amplia de la situación y analizar más casos posibles. Descarga y utiliza el Applet 1 para ayudar a Luis en

sus propósitos. Modifica el contenido de las celdas de la tabla para que en cada renglón se refleje un caso de la situación planteada.

a. ¿Qué información adicional proporciona este Applet? Describe con detalle sus elementos de ayuda y la forma en que puede ser útil para analizar diferentes casos.

2. Luis se da cuenta de que puede simplificar el archivo para utilizar tres columnas en lugar de cinco. Descarga y abre el Applet 2, y completa la información de la tabla. ¿Por qué es más conveniente este archivo? Comenta con tus compañeros similitudes y diferencias, así como ventajas y desventajas al comparar los Applets 1 y 2. Escribe tus conclusiones.

3. Para profundizar en la utilidad e interpretación de las gráficas, descarga y abre el Applet 3 (se recomienda utilizar el archivo GeoGebra pues será necesario guardar tu trabajo y hacer una construcción sencilla). En ambas áreas gráficas, observa el punto de color verde y arrastra los demás puntos hasta que cambien su color a verde. Explica a tus compañeros la estrategia seguida, así como la información que brindan las coordenadas de estos puntos. Escribe las ideas centrales en el siguiente espacio. No olvides guardar el Applet 3 con todos los puntos en color verde, pues lo utilizaremos más adelante.

4. Para analizar y responder a las cuestiones planteadas hasta aquí, ha sido necesario calcular, en un caso, el total reunido para la compra de la bicicleta, a partir de la cantidad que logre ahorrar Luis inicialmente. En el otro caso, por el contrario, ha sido necesario calcular la cantidad que debe ahorrar Luis inicialmente, a partir del total a reunir para comprar una bicicleta de cierto precio.

   a. Describe con tus propias palabras el procedimiento general que debe seguir Luis para calcular el total reunido para la compra de la bicicleta, a partir de la cantidad que logre ahorrar inicialmente.

   b. Igualmente, describe con tus propias palabras el procedimiento general que debe seguir Luis para calcular la cantidad que debe ahorrar inicialmente, para comprar una bicicleta de cierto precio.

5. Si representamos el ahorro inicial de Luis con la letra $A$, y con la letra $T$, el total reunido para la compra de la bicicleta, escribe una fórmula para calcular $T$ dependiendo del valor de $A$, y otra fórmula para calcular $A$

dependiendo del valor de $T$. ¿Qué semejanzas y/o diferencias encuentras entre ambas fórmulas? Comenta con tus compañeros y escribe en el siguiente espacio las principales ideas.

6. Abre de nuevo el Applet 3 que guardaste previamente, y en cada área gráfica, utiliza la herramienta recta para unir dos puntos de color verde. Con ayuda de tu profesor, activa la ecuación asociada a cada recta y compara con las fórmulas que escribiste en el punto anterior. ¿Qué diferencias y/o semejanzas encuentras entre las expresiones señaladas? Discute también con tus compañeros lo que representan todos los puntos de cada recta.
7. Reflexiona junto con tus compañeros y profesor, sobre la utilidad de tener una tabla, una gráfica y/o una ecuación para el análisis y la comprensión de la situación planteada.
8. Modificando las condiciones del problema: ¿Cómo cambiarían los resultados presentados en la tabla, en la gráfica y en la ecuación, si, finalmente, el hermano de Luis no puede cooperar con la compra? ¿O si aportara 300 pesos? ¿O si aportara 500?
    a. Descarga y abre el Applet 4 y explora la situación para distintos valores posibles de la aportación del hermano de Luis. ¿Cómo se afecta la gráfica? ¿Cómo se afecta la ecuación? ¿Y la tabla? Describe ampliamente y comparte tus hallazgos con tus compañeros.
9. Explora ahora cómo cambian la tabla, la gráfica y la ecuación, si la mamá de Luis no puede cooperar para la compra de la bicicleta. ¿Y cómo cambiarían si, finalmente, tampoco el papá de Luis pudiera cooperar?
    a. Utiliza nuevamente el Applet 4, para explorar las nuevas situaciones planteadas. ¿Cómo se afecta la gráfica? ¿Cómo se afecta la ecuación? ¿Y la tabla? Describe ampliamente y comparte tus hallazgos con tus compañeros.

Actividades de cierre

Durante el análisis de la situación planteada en esta secuencia, aparecieron tablas de valores, rectas y ecuaciones lineales con dos variables. En esta sección se estudiarán de manera más general, las relaciones existentes entre ellas.

1. Descarga y abre el Applet 5. En él puedes explorar el efecto general en la ecuación y en la tabla, al cambiar el punto de intersección de la recta con el eje y, y/o la inclinación de la recta, mediante el arrastre de los puntos en color rosa y rojo. Presta especial atención, por un lado, a las cosas que cambian y, por el otro, a las que permanecen sin cambio. Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.
   a. Efecto producido en la ecuación y en la tabla, al cambiar la intersección de la recta con el eje $y$.
   b. Efecto producido en la ecuación y en la tabla, al cambiar la inclinación de la recta.
2. Ahora, descarga y abre el Applet 6. Explora el efecto general en la gráfica y en la tabla, al cambiar los valores numéricos de la ecuación. Como en el caso anterior, presta especial atención, por un lado, a las cosas que cambian y, por el otro, a las que permanecen sin cambio. Escribe tus conclusiones y compáralas con las de tus compañeros.
   a. Efecto producido en la gráfica y en la tabla, al cambiar el valor del coeficiente de $x$.
   b. Efecto producido en la gráfica y en la tabla, al cambiar el valor del término independiente.
3. Escribe un resumen con los principales hallazgos realizados en esta sección, sobre las relaciones existentes entre una ecuación lineal con dos variables, su gráfica y una tabla asociada.

## 7. Consideraciones finales

Aunque estas actividades aún no han sido llevadas al escenario escolar, un análisis a priori nos revela que se apega a ciertos indicadores de idoneidad didáctica propuestos por el marco teórico utilizado. Por ejemplo, con respecto a la faceta ecológica, se puede mencionar que las actividades van acordes a lo establecido para el tema de interés en los planes y programas institucionales vigentes para la educación secundaria. Con respecto a la faceta mediacional, el uso de software GeoGebra, material impreso y material en línea, favorecen el desarrollo de las actividades, e igualmente se satisfacen los lineamientos planteados por el nuevo modelo educativo vigente. Con relación a la faceta interaccional, la secuencia incluye momentos de trabajo individual, en equipo y grupal con intervención del profesor, consistente también con el nuevo modelo educativo ya mencionado. Durante los momentos de interacción, se deberá tener especial cuidado en promover la negociación de significados, así como detectar y aclarar la presencia de posibles construcciones no acordes a la pauta institucional.

## Referencias

Butto, C., Rojano, M. (2010). Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno logo. *Educación Matemática*. Vol.22, Número3. México.

Díaz-Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Recuperado el 20 de marzo de 2018, de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En C.L. Oliveira (Ed.) Acta Scientiae. Revista de Ensino de ciencias e Matemática (10)2, 7-27. Brasil.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Panizza, M., Sadovsky, P., Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias*. 17(3), 453-461.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective.*Research in Mathematics Education*. Vol. 12, No. 1.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. Disponible: https://gse.berkeley.edu/sites/default/files/users/alan-h.-schoenfeld/Schoenfeld_2000%20Purposes%20Method%20Research.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2017). Aprendizajes clave para la educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica. Matemáticas. Disponible en:http://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/index-Descargas.html

# 12 TECNOLOGÍA Y USOS DE LAS GRÁFICAS: UNA EXPERIENCIA DE MODELACIÓN DEL MOVIMIENTO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

José David Zaldívar Rojas[1]


## Resumen

En el presente artículo se describe un ejemplo de una situación de modelación del movimiento (SMM) desarrollada en un ambiente tecnológico que incluye la construcción de gráficas por medio de sensores de movimiento con estudiantes de nivel Secundaria en México, como una manera de integrar la tecnología a la clase de matemáticas. Se evidencía la potencialidad de las herramientas tecnológicas que se plantean como plausibles para acceder al desarrollo del pensamiento funcional y variacional, pero además, resaltar la emergencia de usos de las gráficas alternativos a los que se presentan comúnmente en la clase de matemáticas, y que proveen de una ventana a la resignificación del conocimiento matemático.

**Palabras clave:** Modelación, uso de las gráficas, tecnología educativa, bachillerato.


## Résumé

Dans cet article, nous décrivons un exemple de situation de modélisation du mouvement (SMM) développée dans un environnement technologique qui inclue la construction de graphiques à l'aide de capteurs de mouvement avec des étudiants de niveau secondaire au Mexique, afin d'intégrer la technologie aux cours de mathématiques. L'intention de cet exemple est de montrer le potentiel des outils technologiques présentés comme plausibles pour accéder au développement de la pensée fonctionnelle et variationnelle, mais également de mettre en évidence l'émergence d'utilisations graphiques alternatives qui sont couramment présentées dans la classe des mathématiques, et qui ouvrent une fenêtre sur la resignification des connaissances mathématiques.

**Mot clés :** Modélisation, utilisation de graphiques, technologie, post secondaire.


## Abstract

In this article, we describe an example of a motion-modeling situation (MMS) developed in a technological environment including the construction of motion sensor graphics with secondary students in Mexico to integrate technology into the mathematics classroom. The intention of the example is to show the potential of the technological tools presented as plausible to access the development of functional and variational thinking, but also to highlight the emergence of alternative graphic uses that are commonly presented in the classroom. mathematics, and which open a window to the resignification of mathematical knowledge.

**Keywords:** Modelling, use of graphics, educational, technology, high school

[1] Universidad Autónoma de Coahuila, México.

## 1. Introducción

En la actualidad, se viven procesos de reestructuración en materia educativa a nivel nacional en la búsqueda de una educación de calidad, los cuales incluyen: la creación de materiales, reformas curriculares, así como también aspectos de actualización docente, entre otras. Este tipo de reflexiones hace necesario promover políticas que permitan entender no solo lo que se enseña en las escuelas y atender las necesidades, sino también el análisis de los recursos materiales y tecnológicos con los que cuenta un docente.

Dado que la reflexión sobre una educación de calidad es la base fundamental de cualquier reforma, la educación matemática por su parte debería ir también acorde a los ritmos de dichos cambios, adecuándose a las necesidades y a los nuevos medios empleados. Lo anterior implica entonces contar con una educación matemática más versátil y actual, centrada en problemas sociales y en la vida de las personas que aprenden; que genere más preguntas y sea más transversal a otras disciplinas, donde importe más la generación de ideas y un conocimiento viable, abierta a la experimentación y también al empleo de nuevas tecnologías que dialoguen con las precedentes (Alsina, Burgués, Fortuny, Giménez & Torra, 2013).

Así, la búsqueda de maneras más adecuadas y pertinentes de enseñar matemáticas y por el interés en el trabajo de los estudiantes y en sus procesos de construcción de conocimiento, es que se presenta un ejemplo de lo que como grupo de investigación hemos realizado. En este ejemplo se conjuga, por un lado, una categoría de modelación desde una perspectiva de construcción social, y por el otro, el uso de tecnología dentro del salón de clases de matemáticas, considerando un análisis de los usos de las gráficas que los estudiantes desarrollan en el enfrentamiento a una situación de movimiento.

Con estas tendencias en mente, la principal preocupación en este artículo es mostrar las potencialidades y reflexiones que se desprenden cuando se conjugan materiales innovadores y tecnologías que ofrecen alternativas interesantes para resignificar el conocimiento matemático; lo cual nos hace cuestionar a la matemática que actualmente se encuentra en el currículo escolar. Esto quiere decir, brindar evidencia de cómo la modelación es potencializada por las posibilidades de la tecnología como las calculadoras graficadoras, además de que es posible la emergencia de ambientes de aprendizaje de tipo laboratorio, donde se promueve la observación, la experimentación, la generación de conjeturas y la verificación de las mismas, la búsqueda de patrones y el desarrollo del pensamiento matemático y la argumentación.

Por otro lado, es innegable el rol que juega la comprensión de las gráficas cartesianas en los desarrollos científicos y tecnológicos que actualmente se presentan dentro de nuestra sociedad. Lo anterior debido principalmente a la cantidad de información y datos que es posible comunicar y compartir con ayuda de ellas, así como las oportunidades que ofrecen para trabajar con una gran cantidad de variables y visualizar patrones. De hecho, Bowen y Roth (1998) afirman que la construcción e interpretación de gráficas son de central importancia en la realización de cualquier disciplina científica.

En la siguiente sección, se presentan los elementos teóricos, principalmente lo correspondiente a la categoría Modelación-Graficación entendida como la práctica de modelar situaciones a través de un uso de las gráficas cartesianas en escenarios de aprendizaje tecnológicos. Con la discusión de este marco epistemológico, se cierra la sección con una revisión, no exhaustiva, de cómo estos ambientes de aprendizaje tecnológicos pueden enriquecer a la categoría de modelación propuesta.

## 2. Marco conceptual

De manera general, la Modelación Matemática y las Aplicaciones devinieron en tópicos centrales dentro de las investigaciones en Matemática Educativa en los últimos años. La principal razón a esta particular atención a dichos temas posiblemente se deba a investigaciones que exhibieron el nulo diálogo que existe entre la escuela y el entorno del estudiante, así como la poca transferencia de lo aprendido en la escuela a la vida cotidiana de los estudiantes. Como ejemplos de lo anterior, Carraher, Carraher & Shliemann (1991) y Arrieta & Díaz (2015), presentan casos de prácticas cotidianas de los estudiantes (como la compra-venta) donde es posible apreciar que dichas prácticas parecen no tener eco y aprovecharse en la escuela; siendo este último, un espacio que procura más la algoritmia, pero que poco o nada tienen que ver con la lógica interna que las situaciones cotidianas poseen. Se considera de esta forma que asumir una mirada "formal" y "generalizable" de los conceptos matemáticos implica necesariamente su transferencia a otros escenarios no escolares, siendo el estudiante el único responsable de dicha transferencia.

Por lo anterior, en diversas investigaciones y propuestas dentro de la disciplina se pone especial interés en los procesos de modelación matemática, puesto que permiten el diálogo entre dos escenarios: el "mundo extra-matemático" y las "matemáticas" (Niss, Blum & Galbraith, 2007) (ver Figura 1), con la intención de construir un *modelo matemático*, explícito o implícito.

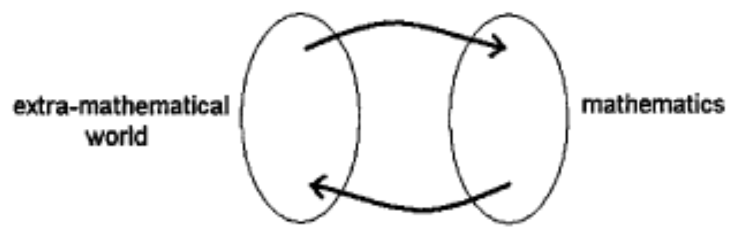



**Figura 1.** Matemáticas y el resto del mundo: Modelación Matemática (Tomado de Niss, et al, 2007, p.3)

Así, se puede apreciar en diversas investigaciones que este proceso de Modelación Matemática se caracteriza a partir de ciertos momentos que permiten conceptualizar a dicho proceso como un *ciclo* iterativo. Se inicia con la conceptualización de alguna Situación-Problema. Posteriormente, a través de simplificar, estructurar, precisar los datos y relaciones, así como establecer suposiciones de entrada en el dominio extra-matemático, se traduce la situación al lenguaje matemático, es decir, se matematiza. En esta *matematización* se utilizan métodos, teoremas y relaciones matemáticas conocidas, se resuelven las ecuaciones y se dan datos como resultados matemáticos. Estos resultados son traducidos posteriormente al mundo extra-matemático con la finalidad de interpretar resultados, validar el modelo y evaluarlo con base en la matemática y la plausibilidad de los datos para dar solución al problema real. Este ciclo se repite con la intención de validarlo (Niss, et al., 2007; Biembengut & Hein, 1997).

Ahora bien, diversas aproximaciones tratan de nutrir al proceso de modelación estableciendo elementos cada vez más específicos dentro del ciclo, además de que postulan a las *tareas de modelación* como un tipo especial de tareas donde se construyen modelos. Por ejemplo, Blum & Borromeo (2009) acuñan un ciclo con los siguientes elementos (ver figura 2):

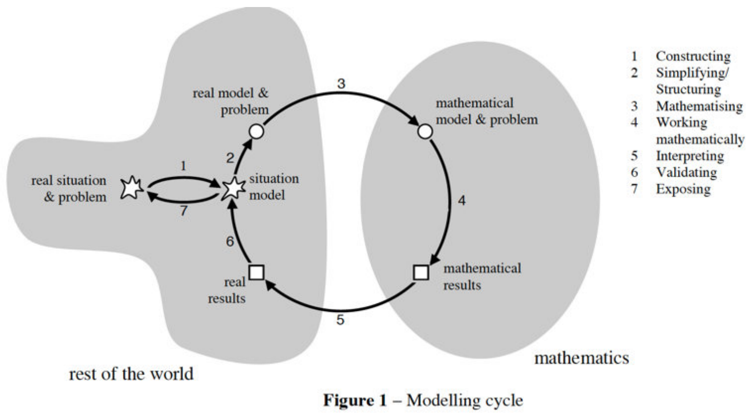



**Figura 2.** Ciclo de modelación de 7-pasos (tomado de Blum & Borromeo, 2009; p. 46)

El ciclo anterior, aunque más complejo que el mostrado en la figura 1, pone especial atención a los procesos cognitivos construidos por los estudiantes cuando se enfrentan a tareas de modelación, permitiendo así, establecer rutas de modelación que describen el proceso de modelación de manera individual haciendo referencia a las diversas etapas encontradas en el ciclo. Ambos ciclos, son ejemplos de que en de la literatura especializada la principal preocupación se encuentra en el "mundo real" o la "situación real", que enfatiza una dimensión interdisciplinaria de la modelación y propone una visión menos centrada en la matemática misma (Villarreal, Esteley & Mina, 2010).

Por otro lado y con respecto al contexto educativo, la modelación matemática se considera principalmente con dos orientaciones con relación al aprendizaje de las matemáticas: aprender matemáticas para desarrollar competencias en la aplicación de las mismas con propósitos extra-matemáticos; y la modelación como un medio para aprender matemáticas (Niss, et al., 2007; Bosch, García, Gascón, & Ruiz-Higueras, 2006). En ambos casos, se resaltan las virtudes de la competencia de modelación con respecto al aprendizaje puesto que (Blum & Borromeo, 2009; Biembengut & Hein, 2004):

- Ayuda a los estudiantes a comprender mejor el mundo que los rodea
- Contribuye a desarrollar varias competencias matemáticas deseables además de que aporta hacia la conformación de actitudes apropiadas hacia las matemáticas
- Permite a los estudiantes tener una visión sobre las matemáticas mucho más adecuada

- Apoya al aprendizaje al aportar elementos de motivación y de formación de conceptos.

No obstante a este tipo de ventajas, también se reconoce que aunque la modelación matemática se considera en planes curriculares de muchos países como una manera eficaz de enseñar y aprender matemáticas, aún existe una brecha importante entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas escolares. Niss et al., (2007) afirman que es muy complejo encontrar actividades de modelación genuinas dentro del salón de clases de matemáticas. Blum & Borromeo (2009) mencionan que incluso la modelación matemática es compleja para los estudiantes debido a las demandas cognitivas que requieren ponerse en funcionamiento en las tareas de modelación, así como competencias diversas como lectura y comunicación, diseño y aplicación de estrategias de resolución de problemas o incluso las de corte matemático, como calcular y razonar, entre otras.

El interés, con estas últimas reflexiones, es dejar ver que la modelación como proceso puede contener elementos cada vez más específicos con la intención de analizar cuidadosamente el ciclo por los cuales atraviesa un estudiante ante tareas de modelación, así como las ventajas y dificultades que emergen cuando la modelación se implementa en el aula de matemáticas. También el de resaltar aspectos de corte epistemológico que permiten delinear una postura sobre Modelación que se asume en la presente investigación y que contrasta con las anteriormente establecidas.

Con respecto a la postura de modelación matemática que se ha mencionado hasta el momento, pareciera que la modelación matemática atiende principalmente una consigna de corte didáctico y además centrada en lo cognitivo, dando énfasis a las representaciones convencionales de corte matemático e institucionalizadas escolarmente. Si se centra la atención en la modelación como una categoría de "aplicación de la matemática" bajo una mirada cognitiva, las problemáticas que surgen tienen la necesidad de explicar las maneras de actuar o las posibilidades de actuación de un sujeto ante tareas de modelación, dando entonces lugar a la necesidad de hacer explícitas las técnicas de enseñanza o destrezas específicas de modelación (Bosch, et al, 2006). Pero ante esta postura no se podría reconocer en la modelación una naturaleza funcional[1] del conocimiento matemático que se genera, esto es, no se

[1] Se usa el adjetivo funcional para hacer referencia a un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que transforma su realidad. Es un conocimiento opuesto a un conocimiento

reconoce a la modelación como *una construcción misma de conocimiento que un individuo realiza ante situaciones específicas*, sino sólo como una aplicación de la matemática (Suárez y Cordero, 2010). A continuación describimos brevemente la postura de modelación que se adopta en el proyecto y el marco de referencia teórico que sustenta tal posicionamiento.

## 2.1 La Teoría Socioepistemológica, la Modelación y la categoría de Modelación-Graficación

Actualmente se podría expresar de manera general que la Matemática Educativa, como disciplina científica, se encarga de estudiar y caracterizar los procesos de transmisión y adquisición de los contenidos matemáticos que se presentan en situación escolar. De forma que la disciplina tiene como fin, explicar aquellos fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje de las matemática, y no únicamente de buscar "mejores formas de enseñar" una cierta noción (Cantoral, 2013), sino problematizar el modelo epistemológico del conocimiento matemático (Bosch et al., 2006). Asimismo, la didáctica pretende afectar benéficamente al sistema didáctico de manera que se puedan establecer las condiciones para un funcionamiento estable del mismo, asegurando entre los alumnos que la construcción de conocimiento matemático adquiera un valor de uso.

La Teoría Socioepistemológica (TS) por su parte, se incluye como una teoría de la Matemática Educativa y dentro de la investigación contemporánea de corte sociocultural, las cuales intentan replantear el proceso de enseñanza y aprendizaje en términos opuestos a las corrientes educativas que abogan por posturas más individualistas y pedagogías centradas únicamente en el estudiante (Radford, 2014). La TS plantea los fenómenos de producción, adquisición y difusión del conocimiento matemático desde una postura sistémica y múltiple de *construcción social,* donde se conjuga el papel de la cultura, de la historia y de la sociedad en el aprendizaje, cuyo fin último es el rediseño del discurso Matemático Escolar (dME). Para ello, la TS elige una postura metodológica: *descentra la mirada en los objetos y problematiza al saber,* planteando la incorporación a la investigación de la epistemología del conocimiento, de su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados

---

utilitario (Cordero & Flores, 2007). De manera que en el nivel funcional del conocimiento matemático el énfasis recae en el *valor del uso del mismo* (Cantoral, 2013).

y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza (Cantoral, 2013). La TS asume que el conocimiento matemático se significa de manera compartida, mediante el uso culturalmente situado y que, además, atiende a circunstancias socioculturales y escenarios particulares, por lo que la teoría postula que antes de hablar de un entramado de conceptos, definiciones matemáticas y entes abstractos, se debe poner atención a las *prácticas sociales* (PS) que permiten, acompañan y norman la emergencia de dichos conceptos matemáticos (Buendía & Montiel, 2011; Cantoral, Reyes-Gasperini & Montiel, 2014).

De esta manera, en la TS se apuesta por un nivel funcional del Conocimiento Matemático, puesto que entiende toda relación didáctica como una *construcción del conocimiento en la organización del grupo humano, normado por lo institucional y lo cultural* (Cordero, 2006), lo cual implica el reconocimiento de que el contexto sociocultural influye en el tipo de *usos del conocimiento* que el grupo humano realice ante situaciones específicas, admitiendo que el conocimiento matemático se resignifica.

Ahora bien, el posicionamiento epistemológico con respecto al conocimiento matemático y su construcción desde la TS replantea la mirada sobre la modelación como una mera representación limitada a la "matematización" de situaciones extra-matemáticas o como una aplicación de la matemática. Se considera a la modelación como una actividad humana normada por lo institucional, es decir, se asume como una práctica que articula usos del conocimiento matemático de manera que estos se resignifiquen (evolucionen) ante situaciones específicas. El significado de los objetos matemáticos deviene entonces del uso situado que se dé al objeto y a sus procesos asociados a través de la prática de Modelación (Cantoral et al, 2015).

Dentro de la presente investigación, se hace referencia a una categoría de Modelación que se desprende de la anterior postura sobre dicha práctica: la Modelación-Graficación (M-G). Esta categoría representa un eje para desarrollar acciones didácticas a través del diseño de situaciones de modelación del movimiento (SMM) con ayuda de artefactos tecnológicos como calculadoras graficadoras y sensores de movimiento (Suárez y Cordero, 2010; Suárez, 2014). De manera que la M-G permite el estudio de la variación[1] en una situación de movimiento a través de un uso de gráficas cartesianas. Pero la variación es entendida tomando en consideración el *para qué se usa la gráfica cartesiana*

[1] En el presente trabajo se entiende por variación como la cuantificación del cambio. Por lo tanto, el estudio de la variación en una situación específica implica conocer qué es lo que cambia, cuánto cambia y cómo cambia (Cantoral, Sánchez y Molina, 2005 citados en Caballero, 2012, p. 10).

(elemento de funcionamiento) y el *cómo se usa dicha gráfica en términos de sus cualidades o características* (elemento de forma). Las SMM son escenarios propicios para el estudio de la variación de situaciones de cambio permitiendo que la forma en la cual se usa la gráfica cartesiana se desarrolle para llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir patrones deseables (Suárez & Cordero, 2010). A dicho proceso de desarrollo del uso de la gráfica se le conoce dentro de la TS como *resignificación* del uso de la gráfica (Ver figura 3).

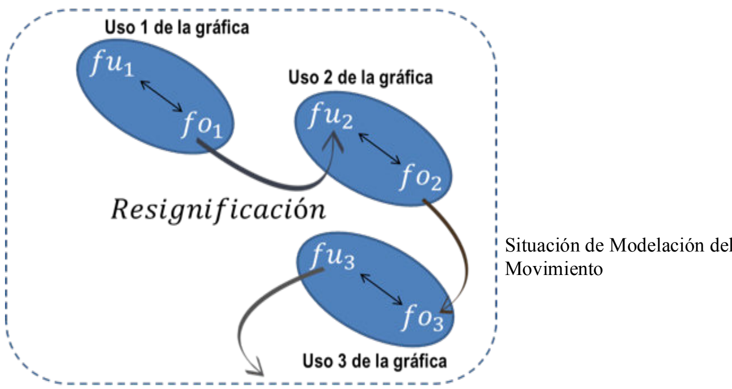



**Figura 3.** La resignificación del uso de la gráfica

## 3. Planteamiento del problema

El desarrollo del punto de vista anterior con respecto al uso de las gráficas y a la modelación desde la perspectiva teórica asumida, permite dar sentido a diferentes actividades innovadoras de intervención dentro del sistema didáctico, con la intención de transformar y problematizar la mirada unidireccional que se podría atribuir al estudio de las gráficas cartesianas en la matemática escolar: ecuación algebraica – tabla de valores – gráfica cartesiana. Esta mirada unidireccional de la gráfica cartesiana es la que se considera problemática y genera además una percepción de la gráfica como una mera representación del concepto de función.

Se pretende además impulsar la incorporación de la tecnología en la búsqueda de otras formas de trabajar matemáticamente con los estudiantes de formas más efectivas – asumiendo el adjetivo “efectivas” a una intención de ayudar a los estudiantes a que se comprometan con el desarrollo y comprensión de diferentes procedimientos matemáticos, estructuras y relaciones *a través de* la tecnología (Hoyles, Noss & Kent, 2004).

Por otro lado, la integración de la tecnología dentro de la investigación en la disciplina ha arrojado interesantes evidencias sobre la transformación de los ambientes de aprendizaje donde la matemática puede ser vivenciada como una ciencia experimental, escenarios donde se admiten conjeturas, la búsqueda de patrones y se promueva la argumentación y el desarrollo del pensamiento matemático (Suárez & Cordero, 2010; Villarreal, 2012). La tecnología escolar incluso puede propiciar nuevas hipótesis para trabajar con nociones matemáticas y con ello problematizar aquello que se enseña en la matemática escolar.

De esta manera, en la presente investigación se plantea como objetivo general caracterizar los usos de las gráficas que se generan cuando a estudiantes de nivel medio superior se les enfrenta a una situación de modelación del movimiento dentro de un escenario tecnológico. Se pretende propiciar una reflexión sobre la pertinencia de explorar usos de las gráficas que aparentemente podrían considerarse como concepciones erróneas (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990), pero que, dentro de la postura teórica asumida, resultan necesarios para el desarrollo de la noción de gráfica cartesiana.

## 4. Método

Para la conformación del escenario experimental con tecnología mencionado, se plantea una Situación de Modelación del Movimiento que se denominó "Marcos a la escuela". De manera general, la SMM mencionada se presenta en un escenario experimental tipo *taller,* donde se propiciaba entre los estudiantes participantes problematizar nociones y significados sobre la variación, el cambio y comportamientos con tendencia, por medio de un uso de las gráficas que se generan a partir de modelar un fenómeno de movimiento. Cabe mencionar que la SMM que a continuación se presenta se basó en Torres (2004):

> Marcos a la escuela.
>
> *Marcos es un estudiante de preparatoria que vive relativamente cerca de su escuela; a sólo 800 metros y además, su casa se ubica en la misma acera que la escuela.*

*Todos los días Marcos camina hacia la escuela lo cual no le lleva más de 10 minutos. Cierto día salió de su casa muy tranquilo y cuando ya había caminado durante 4 minutos y se encontraba a la mitad del camino, ¡no sintió en la bolsa del pantalón el celular! Asustado, se puso a buscar en su mochila durante dos minutos sin poderse mover del susto, por lo que decidió regresar a su casa caminando a paso veloz sin dejar de buscar en la mochila. Faltando 100 metros para llegar de nueva cuenta a su casa, por fin encontró el celular, por lo que tuvo que correr hacia la escuela con todas sus energías, llegando a la puerta de la misma un minuto antes que le cerrasen la reja.*

*Desde ese día, Marcos sale con al menos 15 minutos de anticipación y siempre revisando la bolsa del pantalón antes de salir de casa.*

Tarea 1. Dibuja el movimiento realizado por Marcos durante su trayecto a la escuela en el día descrito anteriormente.

Tarea 2. Utilizando el software de graficación y el sensor de movimiento, reproduce la escena de Marcos mientras se dirige a la escuela[1].

La implementación de la SMM en el escenario escolar requiere de una organización que permita el desarrollo del uso de la gráfica, por lo que se realiza con base en tres momentos:

- Momento de conjetura. En este momento de la situación se permite que los estudiantes expresen aquello que consideren necesario para representar y expresar el movimiento. Se espera que ante la Tarea 1 los estudiantes pongan en funcionamiento formas culturales de saber socialmente compartidas para responder y expresar la situación de movimiento propuesta por el profesor.
- Momento de confrontación. En este momento de la situación se establece un debate científico entre el profesor y los estudiantes al problematizar las producciones de estos últimos. Se cuestiona a los estudiantes sobre elementos variacionales que deben contener sus producciones con la intención de desarrollarlas. Se establece entonces una forma de construir graficas cartesianas usando dispositivos tecnológicos (sensores de movimiento).

[1] La Tarea 2 se presenta una vez que se ha realizado con los estudiantes una confrontación de sus producciones realizadas producto de la Tarea 1. Cabe mencionar que antes de realizar la Tarea 2, a los estudiantes se les presenta la forma en la cual funciona el sensor de movimiento y se realizan algunos simulaciones frente al sensor con la intención de generar un grafismo diferente al convencionalmente utilizado (ecuación-tabla-gráfica).

- Momento de funcionalidad. En este momento se ponen en funcionamiento un uso de las gráficas para la construcción de argumentos para ajustar la estructura de la gráficas y construir patrones deseables.

El tipo de instrumental tecnológico que se empleó durante la implementación de la SMM "Marcos a la escuela" consistió en el uso de un sensor de movimiento (CBR-2) y el software libre *Logger Lite*® (ver figura 4). El sensor de movimiento se conecta a un equipo de cómputo donde se ejecuta el programa antes mencionado. Cabe mencionar que el sensor de movimiento funge como punto de referencia para construir las gráficas de posición contra tiempo de una partícula que se mueve delante de este, de manera que las explicaciones con respecto a las gráficas obtenidas ponen en un papel protagónico al sensor.

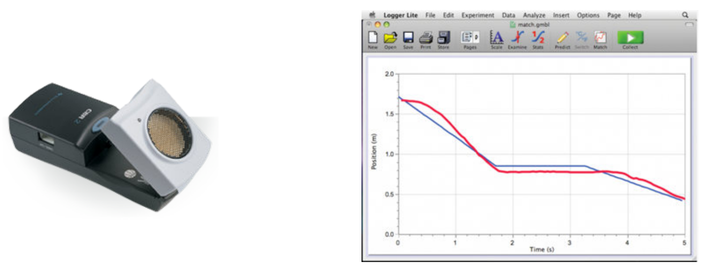



**Figura 4.** Sensor de movimiento (CBR-2) y ambiente del software *Logger Lite*

Este abordaje experimental proporciona la posibilidad entre los estudiantes de simular el movimiento de una persona que camina frente al sensor en línea recta bajo diferentes condiciones: alejarse del sensor, acercarse al sensor o quedarse quieto frente al sensor. Más aún, se pueden combinar estas condiciones bajo diferentes variaciones, por ejemplo: acercarse rápido al sensor y alejarse de este, despacio. La tecnología brinda además la oportunidad de repetir el experimento, debido a la retroalimentación instantánea que presenta el software e incluso presenta la posibilidad de analizar otras representaciones, como la tabular.

La población de estudio donde se implementó la SMM "Marcos a la Escuela" estuvo conformado por un grupo de 20 estudiantes de nivel medio superior de un colegio privado en la Ciudad de Saltillo, Coahuila, México, con una edad promedio de 16 años. La sesión de implementación tuvo una duración de aproximadamente hora y media. El responsable de la implementación fue el investigador titular del presente reporte y con la intención de recabar información, se videograbó completamente la sesión con una cámara que se mantuvo fija en todo momento.

Es importante aclarar que la investigación es de tipo cualitativa basada en el estudio exhaustivo de *casos* y en suma de ejemplos (Stake, 1999), con la intención de crear categorías a partir del análisis del video. Se analiza la información recabada por medio de una revisión intensiva de las transcripciones realizadas del video y de las producciones escritas de los estudiantes recabadas durante la implementación. El análisis de las producciones es de tipo interpretativo, con la finalidad de hacer afirmaciones como clases.

# 5. Resultados

A continuación se detallan los usos de las gráficas puestos en funcionamiento por parte de los estudiantes participantes en la implementación de la SMM.

*Momento de conjetura: la orientación y el uso de trayectorias*

Al inicio de la sesión se planteó a los estudiantes la situación de movimiento "Marcos a la escuela", y se les solicitó contestar de manera individual la tarea 1. Después de unos minutos, se pidió a cinco estudiantes que pasaran a la pizarra a realizar el dibujo del movimiento realizado por Marcos, con la intención de discutir las producciones por medio de un debate científico grupal. A continuación se muestran las producciones realizadas en la pizarra (ver figuras 5a, 5b, 5c, 5d, 5e).

Una vez realizados los dibujos, el investigador solicitó a diferentes estudiantes que describieran las producciones realizadas por sus compañeros. Por ejemplo, el siguiente extracto es parte de la interacción entre el investigador y un estudiante mientras describe la figura 5d[1].

[1]. Investigador: *¿pudieras leer el dibujo que realizó Camila y explicarnos lo que ves?*
[2]. Investigador: *O sea, si te presentara ese dibujo* [haciendo referencia a la imagen 5d] *y te dijera: explica una situación con ese dibujo, tratando que se parezca lo más a este… ¿qué dirías?*

---

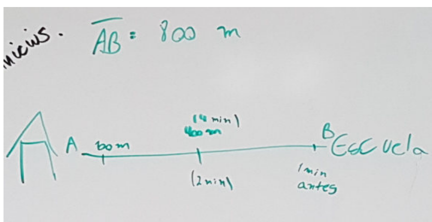
[1] En las transcripciones que se presentan en el manuscrito, se utilizan las siglas E1, E2, …, etc., para hacer referencia a estudiantes diferentes que intervienen en los diálogos.

[3]. E1: *En total son 800… que de la casa a un punto del camino son 4 minutos y que estuvo dos minutos parada (acá)* [haciendo referencia a la marca en 400 metros] *y luego se regresó, y en total hizo como 6 minutos.*

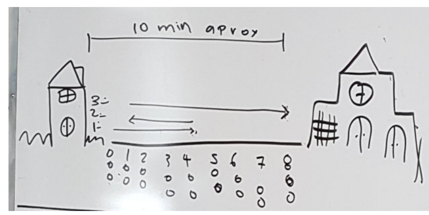
[4]. Investigador: *¿y esta flecha?* [el profesor hace referencia a la primera flecha que apunta de derecha a izquierda]

[5]. E1: *Pues, es la dirección a la que tiene que ir…* […]

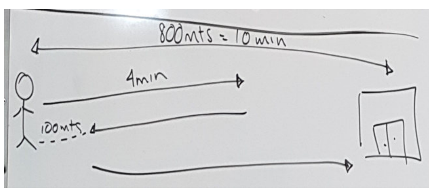
**Extracto 1.** Explicaciones sobre las producciones



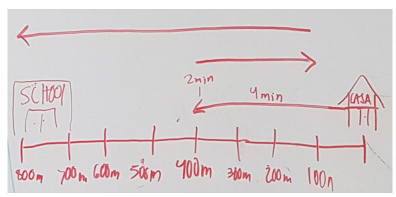

5a



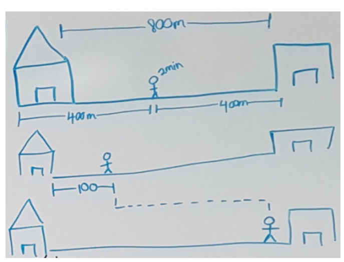

5b




5c




5d




5e

**Figuras 5a, 5b, 5c, 5d, 5e.** Producciones de los estudiantes ante la Tarea 1

A partir de la explicación anterior de E1, se puede notar cómo una de las primeras maneras en las cuales se puede hacer referencia a los elementos descritos en la situación es por medio del uso de flechas con dirección. De hecho, en las producciones mostradas en la figura 5, un elemento invariante en todas éstas es el empleo de flechas que indican dirección en la cual se mueve Marcos.

Además, parece necesario la inclusión de elementos requeridos para contar una historia como son: la casa, la escuela y el personaje de la historia. Aunado a lo anterior, las producciones exhiben que se torna necesario describir cada momento de la situación por medio de una "flecha", como si el número de flechas indicara además momentos clave dentro de la historia de Marcos: cuando va a la escuela, cuando cae en cuenta de que le falta el celular, cuando busca en la mochila, cuando comienza a regresar, cuando lo encuentra y cuando regresa a su camino original. Como se puede observar en el extracto, es en estos momentos en los cuales E1 segmenta su análisis/explicación de la situación, a manera de una *segmentación temporal* de eventos que deben ser plasmados en el papel como una secuencia lineal, un paso a la vez (ver por ejemplo: Nemirovsky, Tierney & Tracy, 1998; Sherin, 2000).

En el siguiente extracto, se puede apreciar nuevamente la necesidad de por parte de los estudiantes de un recurso constructivo como la segmentación temporal de la situación, por medio de la identificación de momentos claves en la secuencia de eventos (ver extracto 2).

[6]. Investigador: *Vamos a revisar el de otro compañero. ¿podrías leer el de E2, por favor?* [el investigador le pide a E3 que interprete el dibujo realizado por E2, quien realizó el dibujo 5a]

[7]. E3: *Es como… una distancia … porque dividió en 000, 100, 200… y aproximadamente son 10 minutos para los 800 metros… y que primero se fue a la mitad… más o menos… de la recta, pero no dice cuánto tiempo… la segunda se regresó, pero no sé si se paró o no… y en la última se volvió a regresar a la escuela y ya…*

**Extracto 2.** Explicaciones sobre las producciones

En síntesis, en este momento de conjetura aparecen diversas convenciones sociales para referirse al movimiento que contienen una carga cultural asociadas al sentido común de los estudiantes. Principalmente se presenta un patrón de ajuste basado en flechas con dirección que hacen referencia a la orientación de aquello que se mueve, confiriendo propiedades a las características observables de las flechas. A este patrón de ajuste se ha convenido en denominarlo como Trayectoria y tiene una función de *orientar el movimiento*. No obstante a que se podría esperar que ante una situación de movimiento los estudiantes hicieran referencia a una gráfica cartesiana, esto no ocurre así. El uso de trayectorias si bien no representa una gráfica cartesiana *per se*, el posicionamiento teórico asumido en la investigación, permite considerar a las trayectorias como una entidad funcional que posibilita y antecede la emergencia de lo cartesiano. Este posicionamiento se contrapone a posturas donde las trayectorias se consideran como concepciones erróneas o representación icónicas de estudiantes cuando se trabaja con gráficas cartesianas y el tema de función.

## 5.1 Momento de Confrontación: los aspectos variacionales del movimiento

En el momento anterior se puede notar cómo se le atribuyen a la dirección de las flechas aspectos esenciales de los momentos clave de la historia de Marcos. Más adelante en la discusión, el investigador lanza una pregunta que es determinante en las explicaciones posteriores de los estudiantes y que permite un desarrollo en el uso de la trayectoria para orientar. Para ello, se hace referencia a la rapidez con la cual se mueve el personaje de la historia (ver extracto 3):

[8]. Investigador: *¿puedes decir en dónde fue más rápido?* [refiriéndose a Marcos]

[9]. E3: *Mmmm…no, porque no tengo el tiempo… y no me dice si está corriendo o no.*

[10]. […]

[11]. Investigador: *Fíjense que en sus dibujos hay cosas generales que comparten… hay flechas… que van o que regresan, hay tiempo pero indicado con números… dos minutos, y hay también distancias: 100, 200… etcétera.*

[12]. Investigador: *Sin embargo, en sus dibujos no es claro cómo manifiesto que una partícula, en este caso, Marcos; se movió más rápido… y si le paso el dibujo a otro compañero y pido que lo explique… ¿qué creen que diga?*

[13]. E4: Mmmm… *pues la más larga* [refiriéndose a las rectas] *será la más rápida… o sea, eso es lo que quizás pudiera pensar…*

**Extracto 3.** La rapidez se hace explícita

Como se puede apreciar en la línea 9, E3 hace referencia a un elemento que anteriormente no se había mencionado: el tiempo. De hecho, en casi todas las producciones se realizan marcas con el tiempo, es decir, se agregan los minutos (ver por ejemplo figura 5d), pero parecería que el tiempo aparece implícito en las flechas y sus características (ver línea 13, extracto 2). En la línea 9 se hace mención de que la rapidez no puede ser expresada únicamente por las flechas, si no se cuenta con más información: “no me dice si está corriendo”, afirma E3 (ver línea 9). Al respecto, Sherin (2000) afirma que ante situaciones constructivas, como la desplegada en la situación de Marcos, los estudiantes tienden a añadir recursos constructivos y a asignar propiedades a las características de los segmentos de línea, tales como su longitud y orientación. Este hecho también se ha reportado en Zaldívar (2015).

Hasta este momento de la situación de movimiento propuesta, se tiene que aunque no existe presencia explícita de una gráfica cartesiana, si existe un patrón de ajuste funcional que posibilitaría el desarrollo hacía representaciones cartesianas del movimiento. En ese sentido, la trayectoria tiene una función de orientar el movimiento (Fu-1), pero a través de cualidades y formas asociadas a flechas con dirección (Fo-1). Cabe aclarar que la trayectoria se entiende como un emergente funcional que los estudiantes utilizan para referirse a lo observable, sin embargo, no indica explícitamente la forma en cómo se mueve aquello que se mueve (la rapidez).

Posterior a los cuestionamientos anteriores, el investigador encargado del taller propone a los estudiantes una herramienta tecnológica que permite simular el movimiento a través de gráficas cartesianas. Es en este momento de la situación donde se incorpora el sensor de movimiento como una alternativa para que el uso de la trayectoria se desarrolle a otro tipo de formas que permitan el análisis de la variación en la situación.

*Momento de funcionalidad: la construcción de un punto de referencia*

Un primer elemento que se discute en la presentación de la tecnología con los estudiantes es sobre el sensor de movimiento, que actúa desde este instante como un marco de referencia desde el cual se analiza el comportamiento de aquello que se mueve con respecto a él. El interés es que el sensor de movimiento reúna dos tipos de orígenes: el fenomenológico propio del movimiento y otro cartesiano, propio de la gráfica generada por el software (Miranda, Radford & Guzmán, 2013). Es decir, "alejarse del sensor" o "acercarse al sensor" implicará una cualidad específica en la gráfica cartesiana: creciente o decreciente, respectivamente; además de caracterizar la rapidez con la inclinación de la gráfica producida.

En esta etapa, el encargado del taller permite a los estudiantes experimentar con el sensor a través de realizar simulaciones frente a este. Entre las discusiones que se generaron, los estudiantes cuestionan las gráficas obtenidas y el marco de referencia, como la que se muestra en la figura 6 y que se acompaña por el diálogo entre el investigador y uno de los estudiantes (ver extracto 4):


**Figura 6.** Discusión sobre la gráfica obtenida por el movimiento de un estudiante

[14]. E8: *¿pero por qué bajó?...* [se refiere a la parte decreciente de la gráfica]

[15]. Investigador: *Pregunta de E8… ¿por qué bajó la gráfica?*

[16]. E9: *porque te acercas…*

[17]. Investigador: *¿qué pasa cuando alguien se acerca al sensor?, ¿qué pasa con la distancia cuando alguien se acerca y se mueve hacia al sensor…?*

[18]. E9: *La distancia disminuye… la distancia se va acortando…*

**Extracto 4.** El sensor actúa como punto de referencia

Como se puede observar en el extracto anterior, E8 lanza un cuestionamiento interesante que lleva a la discusión de las variables involucradas en el fenómeno y cómo estas se establecen en términos de un marco de referencia que permitiría analizar el comportamiento. Posterior a esta pregunta, el investigador encargado del taller pide a los estudiantes que realicen frente al sensor la escena de Marcos, generándose el siguiente diálogo (ver extracto 5):

[19]. Investigador: *¿cómo creen que sea la gráfica del recorrido de Marcos?...*

[20]. E11: *Para arriba… baja y luego… sube de nuevo.*

[21]. E12. *¿dónde está el sensor… en la escuela…?*

[22]. Investigador: *En la casa…*

[23]. E13: *Primero sube…*

[24]. Investigador: *¿pero cómo va a subir…muy inclinado, poco inclinado?...*

[25]. E12: *Más o menos…*

[26]. Investigador: *¿hasta dónde va a llegar?*

[27]. E12: *Hasta la mitad…*

[28]. Investigador: *¿cuánto tiempo…?*

[29]. E13: *En 4 minutos…* […]

[30]. Investigador: *¿a los 4 minutos, dónde estaba Marcos?*

[31]. E14: *A la mitad…*

[32]. Investigador: *¿Poco inclinada, muy inclinada…?* [haciendo referencia a la rapidez de Marcos en ese momento de la situación de movimiento]

[33]. E16: *Más o menos, porque salió relajado…*

[34]. Investigador: *¿Después qué pasó?*

[35]. E15: *Se quedó ahí…*

[36]. Investigador: *¿Cómo represento algo que no se mueve?*

[37]. E15: *Una línea recta… dos minutos… hasta el 6…*

[38]. Investigador: *¿después?*

[39]. E15: *Se regresó… y después se regresó hasta 100 metros de su casa…*

[40]. Investigador: *¿Y qué pasó después?*

[41]. E16: *Se regresó rápido… a la escuela… corrió 700 metros…*

[42]. Investigador: *¿Y eso cómo lo puedo indicar con la gráfica?*

[43]. E16: *Sube… la gráfica sube… muy inclinado porque corrió…*

**Extracto 5.** Descripción previa de la gráfica de Marcos a la escuela

La gráfica que generan posteriormente los estudiantes con respecto a los comentarios anteriores se muestra en la Figura 7:

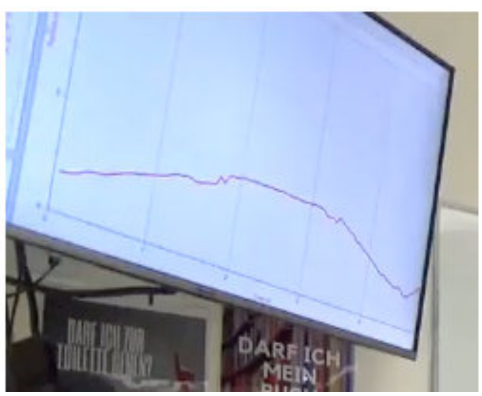



**Figura 7.** La gráfica de Marcos a la escuela

## 6. Discusión y comentarios finales

Los casos y ejemplos anteriores permiten vislumbrar un desarrollo en el uso de la gráfica asociada al movimiento entre los estudiantes. Lo que se intenta potencializar es cómo la gráfica cartesiana por sí misma es un conocimiento que se resignifica conforme se discuten elementos como la rapidez, el cambio y un marco de referencia. Es decir, sin dichos elementos, la gráfica cartesiana no desplegaría toda su potencia en el estudio de las funciones. De ahí que sea importante estudios donde se ponga en evidencia qué usos de la gráfica se presentan entre los estudiantes.

El diseño experimental que se conformó en la investigación proporciona un caso de cómo el uso de la gráfica cartesiana es posible hacer que se desarrolle usando tecnología, partiendo de las formas culturales de saber de los estudiantes. En ese sentido, el uso de la trayectoria para orientar el movimiento fue crucial para entender e indicar la dirección del movimiento de Marcos, sin embargo, es un patrón de ajuste que no hace evidente aspectos variacionales incluidos en la situación. Con ello, se quiere dejar ver que en la construcción de la gráfica cartesiana se requiere resignificar la orientación y los patrones de ajuste como son las trayectorias. Para ello, es necesario que la variable tiempo se "desprenda" de la variable posición, lo cual, se logra problematizando la variación y estableciendo un marco de referencia (origen) del sistema, que son elementos clave en la resignificación del uso de la trayectoria. La evidencia que se mostró es una aproximación inicial hacia la consecución de tal objetivo, dado el reducido tiempo que se trabajó con los estudiantes dentro del taller, además de que los estudiantes era la primera ocasión que trabajaban con sensores.

La figura 8 sintetiza la experiencia con los estudiantes de bachillerato con respecto a la SMM.

La necesidad del análisis de la estructura del sistema usando gráficas cartesianas se produce en la medida que haya una necesidad de analizar la variación. Este último elemento es el que el uso de la trayectoria no hace explícito, al centrarse únicamente en las propiedades figurales de las flechas. No obstante, la orientación es parte de la actividad humana relativa al movimiento, por lo que es necesario repensar su función en la construcción de ideas cartesianas relativas a las gráficas de las funciones.

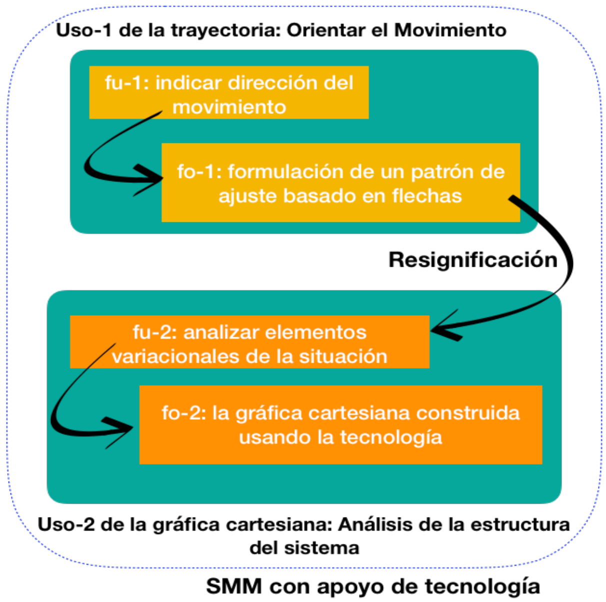



**Figura 8.** Funcionamientos y formas en la SMM

A través de la tecnología utilizada fue posible centrar la atención en la construcción e interpretación de gráficas cartesianas que representan un movimiento, con la intención de entender las relaciones entre distancia y rapidez a través de las gráficas. De manera que la herramienta digital empleada contribuye a la exploración gráfica de ideas matemáticas. Otros trabajos se han dirigido también hacia esta dirección empleando recursos digitales, calculadoras graficadoras o sensores de movimiento con la intención de explorar ideas matemáticas de manera complementarias a las herramientas tradicionales usadas en las aulas de matemáticas (ver por ejemplo: Sánchez & Moreno (2013); Arzarello, Pezzi & Robutti (2007); Urban-Woldron (2015); Miranda, Radford & Guzmán (2013), Nemirovsky *et al*, 1998, entre otros). Sin embargo, a diferencia de esos últimos trabajos mencionados, la propuesta presentada en esta investigación atiende aquello que antecede a la construcción de gráficas cartesianas, como son las trayectorias; con la intención de dejar de considerar a estas últimas como concepciones erróneas relacionada al tema de función, sino como un elemento necesario que se requiere resignificar.

Por último, es importante hacer mención la necesidad de más investigaciones que permitan una matemática funcional en el sistema didáctico. Sin embargo, también esto último precisa de escenarios escolares *ad hoc* a los avances actuales y cada vez más cercanos a escenarios de modelación donde se tensen elementos como el uso del conocimiento matemático y el empleo de tecnología que permita recrear espacios experimentales de la matemática.

## Referencias

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J., Giménez, J. & Torra, M. (2013). *Enseñar Matemáticas.* Barcelona: GRAÓ Educación.

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), p. 19-48.

Arzarello, F., Pezzi, G. & Robutti, O. (2007). Modelling body motion: an approach to functions using measuring instruments. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 129-136). New York: Springer.

Biembengut, M. & Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza aprendizaje de matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, *38*, 209-222.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16*(2),105-125.

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Bosch, M., García, F., Gascón, J. & Ruiz-Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, *18*(2), p. 37-74.

Bowen, J. y Roth, W. (1998). Lecturing graphing: What features of lectures contribute to student difficulties in learning to interpret graphs? *Research in Science Education, 28*(1), 77-90.

Buendía, G. & Montiel, G. (2011). From History to Research in Mathematics Education: Socio-Epistemological Elements for Trigonometric Functions. En V. Kotz y C. Tzonokis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education,* (pp. 67-82). USA: Mathematical Association of America, Inc.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Editorial Gedisa, S.A.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1991). *En la vida diez, en la escuela cero.* México: Siglo Veintiuno editores.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

Cordero, F., & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Invetigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Hoyles, C.; Noss, R., Kent, P. (2004). On the integration of digital technologies Into mathematics classrooms. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 309–326.

Leinhardt, G.; Zaslavsky, O.; Stein, M. (1990). Functions Graphs and Graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2013). Un Origen Matemático vs Dos Orígenes Fenomenológicos: la Significación del Movimiento de Objetos Respecto del Punto (0,0). *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 183-208.

Nemirovsky, R. Tierney, C. & Tracy, W. (1998). Body and graphing. *Cognition and Instruction*, *16*(2), 119-172.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3-32). New York: Springer.

Sánchez, L. & Moreno, L. (2013). Mediación cultural con SimCalc en la adquisición del conocimiento del movimiento rectilíneo. En Morales, Y. y Ramirez, A. (Eds.), *Memorias I CEMACYC* (pp. 1-13). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC.

Sherin, B. (2000). How students invent representations of motion. A genetic account. Journal of *Mathematical Behavior*, *19*, 399-441.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. México: Díaz de Santos.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 319-333.

Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. (Tesis inédita de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Programa de Matemática Educativa. México.

Urban-Woldron, H. (2015) Motion sensors in mathematics teaching: learning tools for understanding general math concepts? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(4), 584-598.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *VEsC, 3*(5): 73-94.

Zaldívar, J. (2015). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde una visión de construcción social. *Memorias de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-CIAEM 2015*. Recuperado el día 20 de abril de 2015 de: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/952/393

# 13 UNA FORMA DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE: OBJETOS PARA APRENDER

Ricardo Ulloa Azpeitia[1]

## Resumen

Se describen resultados de investigación de un proyecto general sobre Objetos Para Aprender (OPA). Los estudios se han enfocado en el diseño, implementación, validación, evaluación formativa, rediseño y reconstrucción, a fin de generar la mejor versión posible de los OPA. Se han producido OPA de contenidos de diferentes ramas de matemáticas, con una metodología de investigación de desarrollo que implica un proceso sistemático a lo largo del cual, colegas y expertos validan el material, luego se evalúa mediante tres etapas: (i) clínica, (ii) con grupo pequeño y (iii) de alrededor de 30 alumnos, a fin de generar la mejor versión al alcance con los recursos disponibles. Enseguida se describen el sustento teórico y los temas que se han atendido.
**Palabras Clave:** Objetos Para Aprender, Evaluación Formativa, Bancos de OPA, metadatos.

## Résumé

Nous rapportons les résultats d'un projet général portant sur Objets Pour Apprendre (OPA). Les études se sont intéressées à la conception, la mise en œuvre, la validation, l'évaluation formative, la reconception et la reconstruction, afin d'arriver à la meilleure version possible des OPA. Nous avons conçu des OPA de contenus appartenant à différentes branches des mathématiques, avec une méthodologie de recherche développement qui implique un processus systématique le long duquel, collègues et experts, valident le matériel qui est ensuite évalué en trois étapes: (i) clinique, (ii) avec un petit groupe et (iii) avec une trentaine d'étudiants, afin de générer la meilleure version possible avec les ressources disponibles. Par la suite, le support théorique et les sujets abordés seront décrits.
**Mots-clés** : objets à apprendre, évaluation formative, banques d'OPA, métadonnées.

## Abstract

Herein are described results of research about the use of objects for learning (LO). These studies have been focused on design, implementation, validation, formative evaluation, redesign and reconstruction in order to generate the best version of OPA, with the available resources. OPA have been produced about contents of different branches of mathematics, with a research methodology for development that entails a systematic process through which experts and colleagues validated the material, then those options were assessed through three stages: (i) clinical, (ii) with a small group and (iii) with a normal group, in order to generate the best version available. The theoretical support and the issues that have been addressed are described.
**Keywords:** Learning Objects, formative Evaluation, LO repositories, metadata.

---

[1] Universidad de Guadalajara, México.

## 1. Introducción

La información empleada en este capítulo, se deriva de trabajos de investigación realizados en el entorno de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, que se oferta en el Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara.

Se adopta que el principal sentido de aprender matemáticas es desarrollar competencias para resolver problemas, no solo del ámbito de la materia, sino de cualquier área. La obviedad del relativo fracaso de la enseñanza y el aprendizaje en ese tema, implica la necesidad de buscar alternativas para mejorar los procesos, tanto por parte de los profesores, como de los estudiantes, pues se tiene claro que el desarrollo científico de cualquier país, depende estrechamente de que sus habitantes construyan tales competencias.

Una de las alternativas en la que se confía resulte influyente para el logro de ese aprendizaje, es la elaboración de Objetos Para Aprender, con los cuales se disponga de ambientes para facilitar el desarrollo de actividades conducentes al dominio de los contenidos matemáticos programáticos.

## 2. Caracterización

Objeto Para Aprender (OPA) es un concepto derivado de la tecnología instruccional. Existen diferentes definiciones, una es: "entidad digital construida según un modelo de diseño instruccional sistemático, para usar, reutilizar o referenciar durante el aprendizaje apoyado en la computadora, para facilitar la generación de competencias en función de las necesidades de los alumnos". (Ulloa y Ulloa, 2013). A esta definición se debe agregar también, el empleo de tablets y teléfonos inteligentes.

En diversos foros se ha constatado que existe poca cultura sobre diseño instruccional en el medio y disponer de un banco como el que se pretende generar con todos los productos elaborados, puede propiciar su construcción, además de colaborar a mejorar la calidad de los cursos impartidos en el área y no se descarta que la infraestructura creada pudiera impulsar el desarrollo de materiales para materias afines.

De manera resumida, los OPA constituyen una opción digital para propiciar aprendizaje, que involucra el uso de internet (aunque no forzosamente todo el tiempo, pues también se descargan para trabajar de manera independiente de la red) y diversas alternativas para facilitar aprendizaje, apoyadas por la tecnología. Típicamente los OPA contienen al menos, un objetivo de aprendizaje, una unidad de aprendizaje de contenidos acotados y un medio de evaluación para identificar el logro del objetivo.

La disponibilidad de OPA en diferentes depósitos, también llamados bancos de OPA o repositorios (LOR)[1], constituye un enorme potencial para construir nuevas alternativas para casi cualquier tema, ya sea al tomar las secciones que sean de utilidad o mediante la adecuación de los que ya existen. A fin de ubicar los que sean de interés particular, se han definido normas internacionales para identificarlos (IEEE)[2], <<metadatos>> (LOM)[3], que refieren sus características, nivel educativo, contenido instruccional, prácticas incluidas, evaluación y posibles usos educativos.

Existen bancos que contienen físicamente a los OPA y otros que incluyen las ligas para descargarlos. Algunos bancos proporcionan ciertas ayudas a los usuarios, por ejemplo, referencias a los OPA que han sido de su interés. Otros más avanzados registran los intereses del usuario con base en los OPA que descarga y les avisa cuando son agregados otros de esos temas. También existen casos en los cuales LOR intercambian información.

Aunque la generosidad suele campear en la producción de OPA, es decir, que son disponibles de manera gratuita, hay algunos que requieren pago por derechos de propiedad intelectual y algunos que solo son accesibles para cierto grupo de usuarios.

Se pueden imaginar los OPA como una versión digital de recursos didácticos, entre cuyas características es notable que sean susceptibles de disponerse en red, para ser empleados por cualquiera, pues se les procura interoperabilidad, independientes del software en que fueron creados, lo que usualmente implica sean compilados para ser usados en casi cualquier equipo, estructura o plataforma. A este respecto es importante la iniciativa de generar estándares para facilitar una eficiente distribución de contenidos.

En ese sentido, la llamada Iniciativa para Archivos Abiertos (*Open Archives Initiative*, 2018), se funda en las tendencias para propiciar la instauración de bancos institucionales de acceso libre, aunque con el tiempo su trabajo se ha ampliado para promover acceso amplio a recursos digitales para e-Becas, e-

---

[1] LOR, por sus iniciales en inglés, *Learning Object Repositories*.
[2] IEEE Learning Technology Standardization Committee, Draft Standard for Learning Object Metadata
[3] LOM, por sus iniciales en inglés, *LearningObjects Metdata*.

Aprendizaje y e-Ciencia. Esto implica que sus contenidos puedan permanecer vigentes durante un tiempo razonable, sin requerir de actualizaciones, i.e., la característica denominada durabilidad.

Es deseable que los OPA sean escalables, es decir, que sea posible incorporarles adiciones o al revés, eliminar o sustituir lo que se estime conveniente, así como tomar alguna parte para usarla en otra aplicación, incluso con otros objetivos (la metáfora del LEGO), pues generalmente se construyen mediante opciones abiertas de software. También que sean autocontenidos, para que sean suficientemente amplios para el logro del objetivo, aunque es frecuente que incluyan ligas a otros sitios para obtener ayuda adicional.

Se procura que los OPA posean independencia y autonomía cualidad de que la inversión cognitiva para manejar el medio tecnológico en que fueron creados, no sea tal que implique más esfuerzo que aprender los contenidos planeados de la disciplina.

Entre otros bancos que incluyen contenidos de matemáticas o relacionados con la materia, se cuentan, en orden alfabético, no de importancia:

- *CITIDEL*, (2018). Contiene principalmente materiales relacionados con educación en ciencia computacional.
- *Connexions,* (2018). Material en módulos pequeños que pueden organizarse como cursos, libros, reportes o tareas de otros tipos.
- *Flatworld Knowledge,* (2018). Materiales no gratuitos.
- *IXL Community*, (2018). Fundado en 1998 bajo el concepto *Web Quest*, dispone de diversas categorías en contenidos para el aprendizaje del Álgebra; específicamente para el caso de la factorización, despliega una serie de problemas a resolver de manera directa. La desventaja es que el recurso digital no ofrece algún tipo de ayuda o tutorial antes de contestar los ejercicios. Es un recurso digital para practicar las matemáticas y lograr un buen dominio en este tema.
- *MERLOT, Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching,* (2018). De los mejores disponibles. Recursos gratuitos y abiertos, diseñados por gente de todo el mundo para compartir sus materiales pedagógicos y para aprender.
- *MIT OpenCourseWare,* (2018). Prácticamente contiene todos los contenidos de los cursos del Tecnológico de Massachusetts.

- OER Commons, (2018). Para encontrar y compartir recursos educativos internacionales abiertos. Se puede usar una herramienta de autoría sin costo, *Open Author.*
- OpenLearn, (2018). De la emblemática *Open University* de la Gran Bretaña, pionera en el establecimiento de Educación a Distancia. Se encuentran materiales de sus cursos.
- PBL Clearinghouse, (2018). Los interesados deben registrarse para consultar la colección de problemas y artículos arbitrados, diseñados para ayudar a los profesores a usar problemas con el enfoque de Aprendizaje Basado en Problemas.
- Scootle, (2018). Recursos congruentes con el *curriculum* de Australia. Disponibles para todos los profesores australianos, estudiantes y académicos. Se requiere registrarse.
- *Universidad de Antioquia, Colombia, Programa Integración de Tecnologías a la Docencia,* (2018). Banco de objetos para el aprendizaje distribuidos en ocho temáticas.
- *Álgebra con papas, (*2018). Recurso digital interactivo para educación secundaria elaborado por *Hot Potatoes,* avalado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática de España.
- *Descartes.* (2018). Portal español en la *web,* no gubernamental, que promueve innovaciones en el proceso enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, al utilizar los recursos digitales desarrollados en el proyecto "Descartes" como una herramienta de autor en la elaboración de objetos interactivos.

## 3. Sustento teórico

En el ámbito del trabajo realizado, los OPA han sido enfocados a contenidos matemáticos cuyo aprendizaje ha sido identificado como complicado para los estudiantes. Una orientación teórica frecuente para construir OPA, es la teoría de Representaciones Semióticas de Duval (1995, 2004), que distingue entre un objeto matemático[1] y su representación, i.e., existen diferentes formas de representación para un mismo objeto matemático.

Duval (2006) sugiere que no hay comprensión matemática si no se distingue entre un objeto matemático y su representación, que toda confusión provoca una pérdida de comprensión a mediano o largo plazo. Por tanto, una función esencial de un OPA estriba en que incluya ambientes para que los estudiantes distingan o logren construir una o más representaciones acordes a las características de los objetos matemáticos involucrados.

Una definición que ha sido motivo de diferentes reflexiones es la de *Objeto Atómico,* es decir un OPA mínimo, como el más elemental que se puede generar. Se ha adoptado: <<el que implica una única actividad pedagógica, tan amplio que cubra un objetivo de aprendizaje simple y específico>>. En términos de diseño instruccional, <<unidad mínima de aprendizaje con sentido didáctico>>. Es posible clasificar los objetos en términos de su tamaño, por el número de objetos atómicos que involucran, y cada uno puede ser removido, sustituido o utilizado en otro OPA.

Otro aspecto trascendente en el diseño de los OPA es el apoyo que puede obtenerse para superar el problema de lectomatemática, i.e., la traducción del lenguaje cotidiano al matemático, quizá el más importante a superar, tanto por estudiantes, como por los profesores, pues la comunicación ha sido subestimada como factor esencial a atender para superar las persistentes fallas en el aprendizaje de la materia.

¿Cómo puede un alumno comprender que debe realizar una cierta operación, si no comprende las palabras empleadas para implicar tal operación? ¿Cómo resolver un problema expresado en palabras, si no comprende el texto, si no es capaz de identificar datos, incógnitas y las relaciones involucradas?

Existen trabajos que muestran la dependencia de los estudiantes del lenguaje y la necesaria mediación que ejerce éste para producir aprendizajes más allá del nivel de memorización (Arrieta y Díaz, 2016); sin embargo, tampoco se puede asegurar que un estudiante con buena lectoescritura aprenderá Matemáticas sin enfrentar problemas.

---

[1] Un objeto matemático consiste generalmente en un conjunto y algunas relaciones matemáticas y operaciones definidas sobre este conjunto. Se considera en el enfoque ontosemiótico como un ente que emerge progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos.

Se infiere que si no se tiene capacidad para entender satisfactoriamente el lenguaje, es muy probable que existan dificultades para entender instrucciones matemáticas, particularmente cuando se refieren al planteamiento de un problema que requiera traducción a un modelo matemático que posibilite llegar a la solución.

Posiblemente está ligado a lo anterior, el problema de la transferencia de los conocimientos matemáticos a otras materias, pues para aspirar a un desempeño aceptable es indispensable tener un dominio adecuado de las matemáticas. Se percibe que el proceso de modelación matemática es un área en la que se requiere de alternativas como las que implican los OPA, dados los pobres resultados que se observan y también es notoriamente patente este problema en la solución de problemas que se presentan en palabras en todos los niveles escolares.

La clave estriba en ofrecer con los OPA, un ambiente de aprendizaje para que los estudiantes transiten del lenguaje verbal, al especializado de las matemáticas, al sincopado y finalmente al simbólico, de manera que el proceso de semiosis[1], ocurra de manera natural y no forzada. Con esta visión, se distingue la posibilidad de generar una gran variedad de posibles representaciones con los OPA, potencialmente eficientes para atender las necesidades de aprendizaje de alumnos.

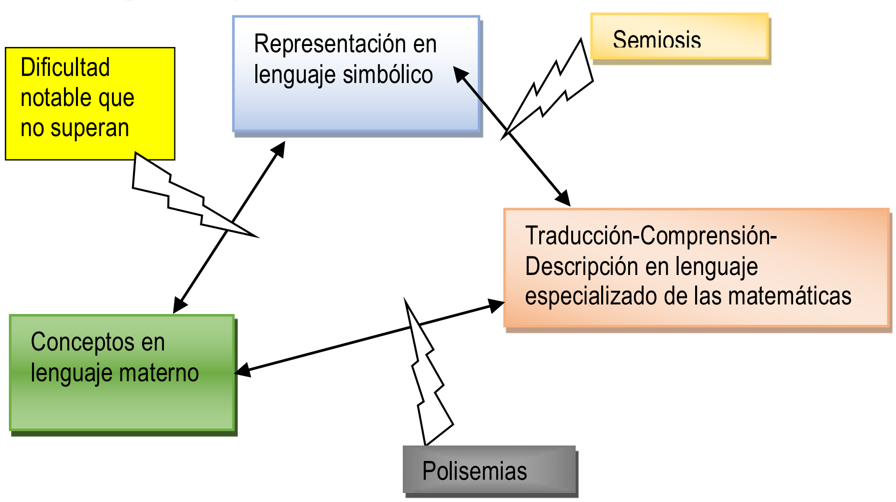



**Figura 1.** Procesos de traducción y dificultades

[1] Semiosis, entendido como el proceso de negociación de significados de las representaciones y, particularmente, de los símbolos matemáticos.

Se sugiere que en buena parte, la gran dificultad que se observa para resolver problemas matemáticos expresados en palabras, estriba en que además del reconocimiento de datos, la identificación y representación de variables, así como de las relaciones involucradas, el proceso transcurre en una primera traducción al lenguaje especializado de las matemáticas, posteriormente se da una representación sincopada y finalmente la representación con la simbología abstracta.

De cierta manera existe un paralelismo con el planteamiento de Bruner (Driscoll, 2004) respecto al curso del desarrollo intelectual, que pasa por una etapa de representación enactiva, seguida de una icónica, hasta tener la capacidad de producir la representación simbólica, proceso que es altamente influenciado por el entorno. Esa influencia se sugiere que debe ser la función de los Objetos Para Aprender.

Se plantea que la traducción al lenguaje simbólico matemático implica la mayor dificultad para los estudiantes, cuando se enfrentan a la solución de problemas expresados en palabras, como sugieren diversos autores (Arrieta y Díaz, 2016; Marquina, Moreno y Acevedo, 2013; Salett y Hein, 2004; Garay y Ulloa, 2017). Se observa que cuando resuelven ejercicios o se indica el modelo matemático a emplear en una situación problemática, tienen mejor desempeño que cuando deben identificar datos, variables y relaciones, para construir el modelo necesario y comúnmente es el tema en que más fallan.

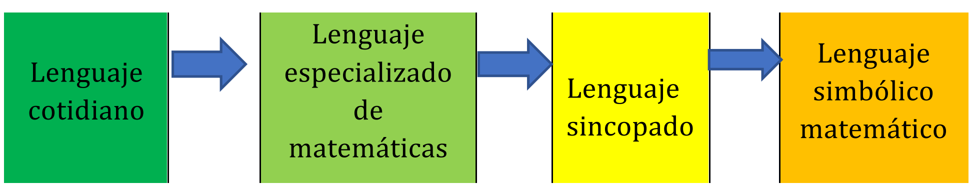



**Figura 2.** Traducción del lenguaje cotidiano al simbólico (elaboración propia)

Cuando se supera el obstáculo del paso del lenguaje cotidiano al especializado de las matemáticas, surge la dificultad de traducir al lenguaje simbólico, entonces se observa una resistencia a emplear las representaciones usuales en matemáticas, generalmente se observa que los alumnos tienden a intentar hacer prueba y error.

Una posible explicación se tiene a partir de la semejanza que existe con el aprendizaje del idioma materno. Los bebés cuando inician el proceso de apropiación del lenguaje emplean palabras incompletas o construcciones que no cumplen con las reglas gramaticales, pero que causan simpatía y reciben una cierta recompensa por sus borucas, por lo que puede especularse que eso les motiva a seguir intentando avanzar en esos intentos.

Se visualiza que existe una cierta negociación de significados que no resulta complicada, ni frustrante para los niños, ya que las muestras afectivas por sus esfuerzos, posiblemente les resultan gratificantes. En cambio, el proceso de semiosis está comúnmente ausente en el proceso de apropiación del lenguaje matemático y especialmente del simbólico (Ulloa, Nesterova y Yakhno, 2012).

A los estudiantes se les presenta un lenguaje acabado, sin opción a una construcción gradual, que se debe emplear sin posibilidad de equivocación. Los errores suelen costarles caros, muchas veces representan reprobar una materia y no extraño, desertar de la escuela o incluso, ser expulsados.

Del análisis de los resultados obtenidos en los exámenes departamentales que fueron aplicados durante varios ciclos en el CUCEI, se desprende que son mejores los correspondientes a ejercicios en los que solamente aplican un algoritmo, que los correspondientes a problemas expresados en palabras, en los que los alumnos notoriamente fallan. Por los resultados de investigación desarrollados como tesis se señala que el empleo de OPA en los que se dispone de una estructura para propiciar esa transición, es una alternativa para atemperar esa dificultad.

## 4. Objetivos del proyecto general

- Perfeccionar una metodología específica para construir OPA temas de matemáticas.
- Involucrar alumnos en proyectos de tesis para construir OPA que sean disponibles para cualquier interesado.

## 5. Metodología

Se han establecido procesos de normalización para la construcción de OPA, pues se pretende la integración de un Banco de OPA que se pondrá a disposición de todos los profesores del Departamento de Matemáticas y de quien desee emplearlos de cualquier instancia, de cualquier lugar (quizá excepto de aquellos que requieran autorización institucional o restricciones por la capacidad del equipo disponible).

La idea de generar normas se desprende de que no es suficiente utilizar herramientas computacionales, pues se pueden cometer mayores errores didácticos con empleo de la tecnología. Se requieren opciones para propiciar una mejoría en los resultados de aprendizaje y superar la inercia que se observa en cuanto a modificaciones del quehacer docente, pero también de las estrategias de aprendizaje de los estudiantes.

Se considera entonces que la oferta de materiales que además de presentar un contexto novedoso, sin restricciones de espacio y tiempo, aunque sí de infraestructura, con un enfoque sistemático y elementos potencialmente lúdicos, puede propiciar un cambio en la calidad y nivel deficiente que se observa, tanto de enseñanza como de aprendizaje de las materias de matemáticas.

En el proceso de producción de un OPA, se desarrolla una investigación cualitativa, de tipo participativa (Moreno, 1987), según se describe enseguida, la versión final es la quinta, con el empleo de una metodología (Ulloa, Nesterova y Yakhno 2012) inspirada en el proceso de evaluación formativa, descrito por Dick, Carey y Carey (2009), en la que se distinguen cinco fases y 28 procedimientos:

### 5.1 Fase I. Diseño, Construcción e Implementación del OPA

El primer acercamiento es acotar el tema que será el objeto de estudio a incluir en el OPA. Enseguida se desarrolla el Diseño Instruccional, con el uso de algún modelo apropiado a la filosofía educativa que se sustenta y el apoyo de los hallazgos relacionados, ubicados en las diferentes fuentes, es decir, se define cómo se espera que aprenda los contenidos considerados quien emplee el material.

Se construye el OPA del tema, con el uso de los programas que faciliten la presentación de las actividades definidas para el aprendizaje, así como la incorporación de materiales originales y los ubicados en las diferentes fuentes para el desarrollo congruente de los contenidos, preferentemente con tonos lúdicos.

Así se obtiene la primera versión del OPA.

### 5.2 Fase II. Análisis por expertos y colegas

La versión inicial es modificada y enriquecida en consideración de los comentarios y sugerencias que se obtengan en la evaluación realizada por conocedores del tema, preferentemente expertos o colegas que impartan el tema y tengan formación didáctica.

Se solicita analizar y evaluar el OPA, en cuanto a contenidos, aspectos pedagógicos, técnicos, funcionales, de utilidad, estéticos, de diseño, estructura del mismo, entre otros.

Para la recolección de la información se emplea una entrevista semi-estructurada o bien, una encuesta, según resulte más conveniente. Con la información que se recolecta, se realizan las respectivas correcciones y modificaciones del OPA, para obtener la segunda versión.

### 5.3 Fase III. Entrevista clínica, evaluación uno a uno, a dos estudiantes.

Se trabaja con dos o tres estudiantes del curso que incluye el tema considerado, con quienes se desarrolla una entrevista clínica, mientras se observa el empleo que hacen del OPA, se les cuestiona sobre los diferentes aspectos que encuentran y se recolecta la información pertinente sobre las cualidades de dicho OPA y las dificultades que enfrentan al usarlo.

Con la información recolectada y las opiniones dadas por los estudiantes, se realizan las respectivas correcciones y modificaciones al OPA que resulten pertinentes, para obtener la tercera versión.

### 5.4 Fase IV. Evaluación por grupo pequeño, preferentemente de nueve

En la siguiente fase se trabaja con un grupo de nueve alumnos del curso. Se sugiere disponer de tres equipos de cómputo para trabajo en parejas (seis alumnos) y otros tres para trabajo individual. Se observa el uso del OPA en ambas modalidades para lo cual se emplea una lista de observación, previamente construida.

Posteriormente se aplica una encuesta para obtener la información necesaria sobre la experiencia de la actividad de aprendizaje y sus cualidades. Luego se procesa e interpreta la información con la cual se adecúa el OPA y se obtiene la cuarta versión.

## 5.5 Fase V. Evaluación por grupo de 30 estudiantes

En la última fase del estudio usan el OPA 30 estudiantes, idealmente de la misma población, de los cuales, veinte usan el Objeto en pareja, i.e., diez parejas, y diez estudiantes trabajan de forma individual. Se procede de manera semejante a la fase anterior, se usa lista de observación para obtener datos pertinentes a la mejora del material.

Posteriormente se les solicita contestar la encuesta, la misma de la fase anterior o con modificaciones, según sea apropiado, se procesa e interpreta la información recolectada para adecuar nuevamente el OPA y obtener la quinta y última versión.

Las cinco fases implican 28 procedimientos que detallan el proceso.

1. Acotamiento de los contenidos disciplinares a incluir.
2. Definición del sustento teórico, tanto pedagógico, con respecto a los contenidos disciplinares.
3. Bosquejo del proyecto y búsqueda de información en las diferentes fuentes.
4. Diseño Instruccional referido a los contenidos disciplinares. Se define cómo se presentará el material, dosificación, efectos a emplear, sonidos, música, animaciones, etc.
5. Definición de programas, plataformas y medios que serán empleados. Se escribe el protocolo, entendido como el resumen del proyecto de investigación.
6. Diseño, escritura e implementación del material en el ambiente digital definido. Se obtiene la primera versión.
7. Evaluación por el autor o autores del OPA, para constatar que cumple con las características atribuibles a un OPA.
8. Elaboración de instrumentos para recabar la opinión de profesores y colegas investigadores.
9. Validación de los instrumentos de recolección de información por colegas e investigadores.

10. Análisis del OPA por parte de profesores del tema, expertos y colegas.
11. Aplicación de encuesta y entrevistas a los expertos, profesores y colegas que experimentan el OPA, para obtener la información pertinente que se usará para mejorarlo.
12. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la etapa anterior.
13. Revisión del OPA e incorporación de los resultados pertinentes de la etapa previa, lo que incluye además, comprobar que la propuesta cumple con las características atribuidas a un OPA. Se obtiene la segunda versión.
14. Empleo del OPA por dos o tres estudiantes. Se obtiene la información pertinente mediante la estrategia de entrevista clínica, que implica cuestionarles detalladamente al respecto de los contenidos, aspectos técnicos, dificultades o aciertos, entre otros, cuando lo usan.
15. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la etapa anterior.
16. Revisión del OPA en consideración de los productos pertinentes de la etapa previa. Se obtiene la tercera versión.
17. Empleo del OPA por un grupo de nueve estudiantes, bajo supervisión del investigador, con empleo de una lista de observación semi-estructurada para recabar datos sobre lo que sucede cuando los alumnos emplean el OPA. Se eligen nueve para experimentar su uso por parte de seis alumnos que trabajen en binas, i.e. tres binas y tres que usan el OPA individualmente.
18. Aplicación de encuesta a los involucrados en la etapa anterior, para complementar la información sobre las cualidades o defectos del OPA.
19. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la etapa anterior.
20. Revisión del OPA en consideración de los productos pertinentes de la etapa previa. Se obtiene la cuarta versión.
21. Empleo del OPA por un grupo de 30 estudiantes, diez en pareja y diez de manera individual, bajo supervisión del investigador. Como en la etapa previa, se utiliza una lista de observación semi-estructurada para recabar información sobre lo que sucede cuando los alumnos usan el OPA.
22. Aplicación de encuesta a los 30 estudiantes, para complementar la información sobre las cualidades del OPA.

23. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la etapa anterior.
24. Revisión del OPA en consideración de los resultados de la etapa previa. Se obtiene la quinta y última versión.
25. Sistematización de la información obtenida.
26. Elaboración de conclusiones.
27. Escritura de metadatos y, en su caso, del reporte de investigación.
28. Difusión de resultados y publicación del OPA en internet.

En sentido estricto, cualquier OPA siempre está en proceso de revisión, pues los usuarios pueden sugerir mejoras, como consecuencia de la experiencia obtenida con el material.

## 6. Resultados

En la página de la maestría (http://matedu.cucei.udg.mx) se planea ubicar los OPA que han sido diseñados, algunos ya están disponibles. Entre los elaborados:

- Objeto para aprendizaje autogestivo de las razones trigonométricas y sus identidades.
- Objeto para el aprendizaje del tema volúmenes, en nivel de secundaria.
- Alternativa para proporcionar entrenamiento a estudiantes de bachillerato a fin de mejorar su lectocomprensión del idioma y el particular de las matemáticas, para lo cual se instrumentó una secuencia didáctica en la que se impulsó el empleo de diccionarios en línea para analizar problemas de matemáticas en palabras, aunque también hicieron uso de herramientas de Internet.
- Objeto Para Aprender operaciones con fracciones por parte de estudiantes de la Escuela Normal Superior.
- Objeto Para Aprender el tema: Aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden de primer grado.
- Objeto para visualizar conceptos incluidos en el programa de la materia Algebra Lineal.

- Módulo para apoyar el aprendizaje de las Secciones Cónicas por parte de estudiantes de la Carrera de Profesorado de Matemática y Física de la Universidad de San Carlos de Guatemala.

- Objeto Para Aprendizaje de los Espacios Vectoriales (EV), incluye una secuencia animada que muestra una analogía de éstos con la creación de obras de arte y las combinaciones de colores, presentes en los cuadros las Meninas y el Guernica, pintados por Velázquez y Picasso, respectivamente. En términos matemáticos formales, presenta como organizador avanzado, la evaluación e inspección de los axiomas para la demostración de un EV. Se elaboró en la plataforma *NeoBook* para propiciar interactividad entre el objeto para aprendizaje y el usuario.

- Aprendizaje del tema de cuadriláteros diseñados con *GeoGebra* dirigido a conocer y analizar las características y propiedades de los objetos geométricos, así como introducir y desarrollar el pensamiento lógico y el razonamiento deductivo.

- Texto Dinámico para comprender la derivada, enfocado a estudiantes que cursan la materia de Cálculo Diferencial.

- Objetos para aprendizaje autogestivo de la magnitud, dirección y proyección de vectores en $R^2$.

- Diseño de Objeto Para Aprender el tema extremos relativos, con apoyo de *Maple*.

- Aprendizaje del tema de circunferencia, incluido en la materia de Fundamentos de Geometría. Cuenta con tres secciones principales, un diccionario de los conceptos involucrados, una con ejercicios y otra de teoría básica en la que se dispone de ligas para atender las dificultades debidas a una pobre comprensión de los conceptos correspondientes al tema de circunferencia. Se adicionaron imágenes y animaciones hechas en *GeoGebra*.

- Objeto para aprender el concepto de derivada de funciones de una variable real en el contexto de las ciencias biológicas.

- Objeto para aprender el tema de inecuaciones para estudiantes del primer semestre de la Carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional Experimental de los Llanos Occidentales Ezequiel Zamora, Venezuela.

En desarrollo:

- Objeto Para Aprender el lenguaje algebraico, por parte de estudiantes de secundaria, de primer año. Se incluye el empleo de elementos lúdicos, con empleo de la tecnología. Entre otros, se incluye el uso de videos y juegos incluidos en un objeto digital.
- Propuesta didáctica, dirigida a propiciar el desarrollo de habilidades de traducción de enunciados de problemas, al lenguaje matemático por parte de estudiantes de bachillerato de un plantel de CONALEP, ubicado en la Zona Metropolitana de Guadalajara.
- Objeto Para Aprender las operaciones fundamentales con conjuntos con el software *NeoBook*, como plataforma multimedia.
- Secuencia didáctica que incluye diferentes aspectos lúdicos y resolución de problemas diferentes a los triviales para el desarrollo de habilidades de traducción algebraica de problemas expresados en palabras, por alumnos de secundaria y bachillerato.

## 7. Conclusiones

De la evidencia obtenida al desarrollar los proyectos de tesis que se han derivado del proyecto general, se interpreta que es conveniente emplear OPA para negociar la construcción de significados. Los estudiantes actuales tienen una mentalidad influida por el constante uso de dispositivos electrónicos, por lo que se infiere cambiar drásticamente el escenario que aún ahora, en muchas instancias, reproduce una enseñanza semejante a la del siglo XIX, no es raro ubicar profesores que prohíben el empleo de cualquier tecnología.

Resultado de las observaciones realizadas en los trabajos de tesis de los estudiantes de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, se tiene que el empleo de OPA por parte de estudiantes de diferentes niveles educativos, particularmente nivel medio básico y superior, y licenciatura, les motiva a profundizar en el conocimiento de los contenidos incluidos. Ha sido notorio el registro de mejoras cualitativas en cuanto a motivación, interpretación de enunciados y representación algebraica.

También que el uso de los OPA disminuye o evita el rechazo hacia el estudio de las matemáticas, lo que se estima importante para mantener la participación de los estudiantes y mejorar los aspectos que contribuyen a elevar su eficiencia académica, es decir, representa propiciar el aprendizaje por parte de los usuarios.

Es pertinente mencionar, que en algunos casos los resultados de aprendizaje no fueron significativamente diferentes a los obtenidos por los grupos de control, lo que ha dado pauta para reflexionar sobre los aspectos que conviene adecuar.

Si bien existen muchos bancos de OPA, notables como *Merlot* (http://www.merlot.org/), disponerlos de manera que puedan ser empleados por las comunidades locales, es importante en términos de que el lenguaje empleado puede ser más potable cuando refleja sus usos y costumbres. Como se mencionó, una meta es integrar en un servidor, todos los OPA que han construido estudiantes y profesores de la maestría a lo largo del tiempo y los que se generen en el futuro, para ser consultados vía internet.

Una premisa para la construcción de OPA ha sido procurar que los ambientes de aprendizaje involucrados reflejen un contexto potencialmente atractivo y lúdico para los usuarios. Se observó que la atención preferente de los usuarios se mantiene durante veinte minutos, tiempo que aumenta cuando se incluyen elementos motivantes o divertidos.

Tiempo atrás se pensó que los OPA deberían ubicarse en algún Centro de Auto Acceso en cada institución, de manera semejante a como se disponen recursos para aprender idiomas, a donde deberían asistir los estudiantes para emplearlos. Sin embargo, la disposición en línea parece ser la opción que prevalecerá, pues los interesados pueden consultar los materiales desde cualquier rumbo del planeta en el que exista acceso a internet.

## Referencias

Álgebra con papas (2018). *Recurso digital interactivo para educación secundaria elaborado por Hot Potatoes, avalado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática de España.* Consultado en agosto de 2018 en https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/ .

Arrieta, J. y Díaz, L. (2016). *Investigaciones latinoamericanas en modelación*. Ciudad de México. Gedisa.

CITIDEL, Computing and Information Technology Interactive Digital Educational Library (2018). Consultado en http://www.citidel.org/ en Agosto de 2018.

Connexions (2018). *Discover learning materials in an open space*. Consultado en https://cnx.org/ en agosto de 2018.

Descartes, (2018). *Portal español del proyecto "Descartes"*. Consultado en septiembre de 2017 en http://arquimedes.matem.unam.mx/descartes.org.mx/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_4eso_B_polinomios/index_quincena3.htm .

Dick, W., Carey, L. & Carey, J.O. (2009). *The systematic design of instruction*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson.

Driscoll, M. P. (2004). *Psychology of Learning for Instruction.* Needham Heights MA: Allyn & Bacon.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine-registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Ed. Peter Lang.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 61, No. 1, pp. 103-131.

Espinoza, L.L. y Vasconcelo, S.A. (S.F.). *Software multimedia Fracciónate.* Consultado el 3 de enero de 2006 en http://ima.ucv.cl/lianggi/fraccionate/detalle.htm

Flatworld Knowledge (2018). ***Education is expensive.*** *textbooks don't have to be*. Consultado en https://catalog.flatworldknowledge.com/ en agosto de 2018.

http://www.scootle.edu.au/ec/p/home).

IXL Community (2018). Consultado en http://www.ixl.com/math/algebra-1, en agosto 2018.

Marquina, J., Moreno, G. y Acevedo, A. (2013). Transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico en educación media general. *Universidad de Los Andes*. Venezuela.

MERLOT, Multimedia Educational Resource for Learning and Online Teaching (2018). Consultado en agosto de 2018 en www.merlot.org.

MIT OpenCourseWare (2018). *Unlocking knowledge, empowering minds. Free lecture notes, exams, and videos from MIT*. Consultado en agosto de 2018 en https://ocw.mit.edu/index.htm

Garaymoreno, J.M. y Ulloa, R. (2017). Desarrollo de habilidades de traducción entre el lenguaje común y el matemático. *Memorias del XIV Seminario Nacional en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas con Tecnología*, ITCG.

Moreno, M.G. (1987). *Introducción a la metodología de la investigación educativa.* México: Ed. Progreso.

OER Commons (2018). *MITOPENCOURSEWARE*. Consultado en agosto de 2018 en https://www.oercommons.org/.

Open Archives Initiative (2018). Consultado el 27/08/2018 en http://www.openarchives.org

Open University (2018). *OpenLearn*. Consultado en agosto de 2018 en http://www.open.edu/openlearn/.

Salett, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, vol. 16, núm. 2, agosto, 2004, pp. 105-125.

Scootle (2018). *Discover learning resources***.** Consultado en agosto de 2018 en

Ulloa, R. y Ulloa, N. (2013). Elaboración de texto dinámico con estrategias de lengua extranjera para el aprendizaje del concepto de derivada. En memorias del *Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje* *de las Matemáticas 2013 "Dr. Edgar Gilberto Añorve Solano" y 10º SEMINARIO: Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas con Tecnología*.

Ulloa, R., Nesterova, E. y Yakhno, A. (2012). Uso de Objetos Para Aprendizaje en Lectomatemáticas: Textos Dinámicos. En F. Hitt y C. Cortés. *Formation à la recherche en didactique des mathématiques*. Longuueuil, Quebec:Loze-Dion éditeur inc.

Universidad de Antioquia, Colombia, Programa Integración de Tecnologías a la Docencia (2018). *Banco de objetos para el aprendizaje distribuidos en ocho temáticas.* Consultado en agosto de 2018 en (http://aprendeenlinea.udea.edu.co/boa/index.php?page=Pages.Navegacion.Inicio).

University of Delaware (2018). *PBL Clearinghouse.* Consultado en agosto de 2018 en http://www1.udel.edu/pblc/.

# 14 SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL CÁLCULO DEL VOLUMEN POR EL MÉTODO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN: EL CASO DE RECIPIENTES Y SANDÍA

Rafael Pantoja Rangel[1], Rosaura Ferreyra Olvera[1], Rafael Pantoja González[1]


## Resumen

La propuesta se centra en el acercamiento del cálculo de sólidos de revolución de objetos de la vida cotidiana, mediante el ajuste del contorno con polinomios de n-ésimo grado a una fotografía del objeto, en este caso: un florero y una sandía. Se aplica la metodología en tres momentos: a. Se fotografía el objeto de la vida cotidiana; b. Se emplea Tracker para obtener los datos del contorno del objeto; c. Se utiliza el GeoGebra para ajustar las funciones que acotan la región, aproximar el volumen con las rutinas de integración y hacer una simulación en 3D del objeto. Las actividades se integran en una secuencia didáctica y las desarrollan los alumnos en trabajo individual y colaborativo.


**Palabras clave:** Solidos de revolución, Representaciones semióticas, Fotografía, Tracker, GeoGebra.


## Résumé

Notre proposition de texte s'intéresse à une approche pour le calcul de solides de révolution d'objets de la vie quotidienne, en utilisant l'ajustement du contour avec des polynômes de degré-n d'une photographie de l'objet, en l'occurrence: un vase et une pastèque. La méthodologie est appliquée à trois moments: a) L'objet de la vie quotidienne est photographié; b) Tracker est utilisé pour obtenir les données de contour de l'objet; c) GeoGebra permet d'ajuster les fonctions qui délimitent la région, d'approcher le volume avec les routines d'intégration et de simuler l'objet en 3D. Toutes les activités sont intégrées dans une séquence didactique et sont développées par les étudiants, coordonnées par le professeur, à travers un travail en individuel et en collaboration.


**Mots-clés** : Solides de révolution, représentations sémiotiques, photographie, traqueur, GeoGebra.


## Abstract

The proposal focuses on the approximation of the calculation of solids of revolution of objects of everyday life, by adjusting the contour with n-th degree polynomials to a photograph of the object, in this case: a vase and a watermelon. The methodology is applied in three moments: a. The object of everyday life is photographed; b. Tracker is used to obtain the contour data of the object; c. The GeoGebra is used to adjust the functions that delimit the region, approximate the volume with the integration routines and make a 3D simulation of the object. All the activities are integrated in a didactic sequence and are developed by the students, coordinated by the instructor, in individual and collaborative work.


**Keywords:** Solids of revolution, Semiotic representations, Photography, Tracker, GeoGebra.

[1] Universidad de Guadalajara, México.

## 1. Introducción

La secuencia didáctica se plantea por el interés de generar y proponer un material útil a los maestros de cálculo integral de nivel medio superior y superior, que les ayude a guiar la enseñanza de la aplicación de la integral definida al cálculo del volumen de objetos de la vida cotidiana por el método de sólidos de revolución, a partir de la fotografía del objeto, con el empleo de los programas computacionales y de carácter libre Tracker y GeoGebra. La propuesta alternativa complementa lo visto en la clase tradicional sobre integrales definidas, pues se requiere que el alumno tenga conocimiento de la relación existente entre el Teorema Fundamental del Cálculo y su aplicación al cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, limitados por diversas funciones como son los polinomios, racionales, sinusoidales, exponenciales, logarítmicas, entre otras muchas.

El formato de la secuencia didáctica se centra en la propuesta de Tobón (2010), que se adapta a los contenido matemáticos seleccionados, con la finalidad de propiciar que el alumno calcule el volumen de un objeto, como un florero o una sandía por el método de sólidos de revolución, desde una perspectiva muy distinta a la matemática escolar, que le sea útil, atractivo y motivador, pues la propuesta lo ubica en un escenario en el que dirige su mirada a la aplicación de conceptos del cálculo a su entorno.

El sustento teórico de la secuencia es la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval (2004) pues una vez que el alumno identifica la representación visual del objeto en una fotografía, se procesa con Tracker y al señalar la trayectoria del contorno se generan en la pantalla del computador los acercamientos numérico (una tabla de datos) y gráfico (tres gráficas). La expresión analítica del contorno se procesa en GeoGebra a partir de la tabla de datos. Los alumnos en trabajo individual y colaborativo desarrollan las actividades incluidas en la secuencia didáctica, que los guía a relacionar las distintas representaciones semióticas, en el afán de lograr calcular el volumen del objeto con la aplicación del TFC y el método de sólidos de revolución.

La secuencia es producto de una investigación de tipo exploratoria y cualitativa, que se realizó en dos pruebas piloto y una fase experimental en las cuales se involucraron estudiantes y maestros en diferentes contextos, lo que ayudó a considerar muestras representativas y obtener conclusiones de la población de los estudiantes de ingeniería de primeros semestres de nivel superior, además de docentes de matemáticas de los mismos niveles.

Se trata de una propuesta sustentada en la metodología ACODESA (Hitt y González-Martín, 2015), pues incluyen actividades para el trabajo individual y colaborativo, el debate y la institucionalización como estrategia para propiciar el aprendizaje y favorecer la formación de estudiantes capaces de plantear y resolver problemas en distintos contextos, reflejada en la aplicación del TFC a situaciones de la vida cotidiana. En ella se distinguen cinco etapas diferentes.

- Trabajo individual: los estudiantes con sus conocimientos previos aproximan el volumen del objeto.
- Trabajo en equipo: Los estudiantes manipulan la imagen en Tracker, ubican los ejes coordenados en el lugar más adecuado para trazar la trayectoria que analizarán en GeoGebra, para la obtención del modelo matemático y con este último la obtención del volumen del objeto por el método de sólidos de revolución. También comparan sus resultados con los obtenidos en la primera etapa. En este proceso se produce la argumentación y validación;
- Debate: durante esta etapa, todo el grupo discute los diferentes tipos de objetos empleados y los modelos obtenidos, así como su relación con el TFC y su aplicación al cálculo del volumen de un objeto. Al final de esta etapa, el instructor recoge todas las producciones de los estudiantes;
- Auto-reflexión (trabajo individual en un proceso de reconstrucción): esta etapa permite a los estudiantes reconstruir individualmente lo que se hizo en grupos y con ello se fortalece el conocimiento;
- Proceso de institucionalización: se propicia cuando los estudiantes presentan los resultados del cálculo del volumen del objeto por el método de sólidos de revolución y lo relacionan con el Teorema Fundamental del cálculo.

Al final de la fase experimental se realizó una entrevista cara a cara y se aplicó una encuesta de opinión por escrito. Del análisis de los cuestionarios del cuaderno de trabajo, la observación directa, los resultados de la encuesta y la interpretación de la entrevista, se afirma que la propuesta didáctica se valora positivamente sobre el aprendizaje de la aplicación de la integral definida al cálculo del volumen de objetos por el método de sólidos de revolución, con el empleo de la fotografía y los programas computacionales Tracker y GeoGebra, sustentados en la teoría de Duval y la metodología ACODESA.

Los participantes en el estudio desarrollaron las actividades siguientes:

- Seleccionan el lugar de la ubicación de los ejes coordenados para delimitar el contorno del objeto.
- Seccionar el área de la sección trasversal de la región de integración para aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.
- Marcar los puntos sobre el objeto para obtener las coordenadas.
- Aplicar el ajuste de funciones para determinar las expresiones analíticas de los polinomios que limitan el contorno.
- Obtener los límites de integración y seleccionar las funciones seccionalmente continuas.
- Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para aproximar el volumen del objeto por el método de sólidos de revolución con las rutinas de integración de GeoGebra.

## 2. Secuencia didáctica: Cálculo de volumen de objetos cotidianos por el método de sólidos de revolución apoyados con la fotografía y los programas de cómputo Tracker y GeoGebra.

La organización de las actividades se integró en una secuencia didáctica en el formato que Tobón (2010) propone, modificado y adecuado al tema en cuestión y que se describe de manera general en este apartado:

### 2.1 Identificación de la secuencia didáctica

1. Problema significativo del contexto: Calcular el volumen del recipiente mostrado en la figura 1.
2. Nivel de estudios: Nivel superior.
3. Asignatura: Cálculo integral.
4. Tema: Cálculo del volumen de un objeto por el método de sólidos de revolución.
5. Conocimientos previos: fórmulas para calcular áreas y volúmenes de figuras geométricas, Técnicas de

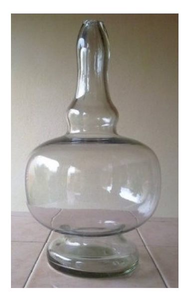


**Figura1.** Florero

integración, Ajuste de funciones.

6. Duración: 4 horas.

## 2.2 Objetivo

Promover la enseñanza y aprendizaje del cálculo de volumen por el método de sólidos de revolución, de objetos de la vida cotidiana con la fotografía y el empleo de los programas de cómputo Tracker y GeoGebra.

## 2.3 Metas

*a.* Investigar el origen del cálculo de volumen de sólidos; *b.* Seleccionar situaciones problema de la vida cotidiana como fuentes de enseñanza para propiciar el aprendizaje del cálculo de volumen de objetos; *c.* Diseñar el set de grabación del objeto de la vida cotidiana para calcular su volumen; *d*. Manipular el software Tracker; ***e.*** Aprender el uso de software GeoGebra en la parte de gráficas, ajuste de funciones y cálculo integral.

## 2.3 Competencias

1. *Saber conocer: a.* Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes de solidos regulares; *b.* Calcular integrales definidas; *c.* Trazar el bosquejo de gráficas de funciones; *d.* Ajustar funciones a un conjunto de datos; *e.* Construir gráficas de funciones seccionalmente continuas; *f.* Manipular la hoja de cálculo.
2. *Saber hacer: a.* Procesar la fotografía con el Tracker para obtener los datos numéricos, que se emplearán para ajustar las funciones que limitan el contorno de la proyección del objeto sobre un plano coordenado; *b.* Emplear la hoja de cálculo para el análisis de datos y ajuste de funciones con el GeoGebra; *c.* Aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para aproximar el volumen de objetos por el método de sólidos de revolución con el GeoGebra.
3. *Saber ser: a.* Trabaja en equipo colaborativo para propiciar el aprendizaje del cálculo de volúmenes de objetos; *b.* Muestra disposición y actitud para trabajar en equipo al ser puntual, participativo, honesto, respetuoso,

colaborativo, activo entre otros valores; *c.* Expresa sus ideas y opiniones para reflexionar en su proceso de aprendizaje del método de sólidos de revolución; *d.* Respeta la opinión de sus compañeros y tiene una actitud propositiva para desarrollar las actividades; *e.* Expone los resultados de su trabajo individual para el cálculo del volumen de un objetos ante el equipo colaborativo; *f.* Elabora reporte por escrito de la actividad para presentarlo, discutirlo y defenderlo en la exposición grupal.

## 2.4 Recursos

- Hoja de trabajo, computadora**,** Tracker**,** GeoGebra**,** Fotografías digitales de objetos de la vida cotidiana (recipientes, sandías, naranjas, huevos, copas, entre otros objetos).

## 2.5 Actividades del docente

*a.* Análisis de saberes previos de la integral definida; *b.* Integración de los grupos colaborativos; *c.* Selección de la situación problema; *d.* Curso-taller para el manejo de los programas de cómputo Tracker y GeoGebra.

## 2.6 Actividades para aprendizaje autónomo

a. Diseño del set de grabación de la situación problema seleccionada para grabar y editar la fotografía o el video del objeto de la vida cotidiana; b. Manipulación de la fotografía con Tracker para la obtención de datos y gráficas; c. Obtención de la función ajustada al contorno del objeto con la rutina de ajuste del Tracker, en caso de que exista el tipo de función; d. Exportación y manipulación de datos obtenidos de Tracker para su tratamiento con GeoGebra, para la obtención de la función ajustada; e. Discusión en grupo colaborativo de los resultados obtenidos del análisis de la fotografía de la situación problema; f. Elaboración del reporte de la actividad para generar informes escritos; g. Presentación de los resultados ante el grupo para promocionar la discusión e interacción entre los participantes.

## 2.7 Teoría de las representaciones semióticas de Raymond Duval

Uno de los motivos por el que el aprendizaje de las matemáticas se complica, se debe a la falta de comprensión de los conceptos matemáticos (Duval, 2004), que a su vez involucran objetos matemáticos que no son directamente comprensibles por medio de los sentidos, ya que para acceder a ellos se requieren de representaciones internas y externas. Las primeras, conocidas como mentales, son las que ocupan un lugar en la mente de los sujetos y permiten mirar al objeto en ausencia total del significante perceptible, por ejemplo, conceptos, nociones, creencias, fantasías e imágenes mentales, etc. Las segundas, conocidas como representaciones semióticas, son directamente visibles y observables.

En el contexto de las matemáticas las representaciones semióticas ayudan al estudiante a comunicar y expresar ideas matemáticas, a concebir de manera objetiva para sí mismo, el conocimiento matemático que se quiere comunicar, además propiciar una economía cognitiva al realizar tratamientos. Según Duval (2004) el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos. Enseñar y aprender matemática conlleva que estas actividades cognitivas requieran, además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de distintos registros de representación y de expresión.

Para aludir a un objeto matemático es necesario construir registros, lo que favorece la diferenciación entre el objeto y su representación, y con ello la comprensión. Para Duval la coordinación de varios Registros de Representación Semiótica (RRS) es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos matemáticos y como las representaciones son parciales con respecto a lo que representan, se debe buscar la interacción o tránsito entre ellas, natural y espontánea. El proceso de construcción y transformación de las representaciones semióticas involucra actividades conocidas como *formación, tratamiento y conversión*.

- La *formación* consiste en construir representaciones del objeto (al que se le calcula el volumen), a partir de un conjunto de caracteres e intencionalidades, es decir, en construir marcas perceptibles que sean identificables como una representación del objeto en un sistema determinado.

- El *tratamiento* es la transformación producida a una representación dentro de un mismo registro, que en la secuencia se genera cuando se trabaja en el registro gráfico, en la delimitación del contorno del objeto con funciones seccionalmente continuas.
- La *conversión* ocurre cuando la transformación produce otra representación en un registro distinto al de la representación inicial, es decir, es la transformación que se hace a las representaciones para cambiar de registro, pero que conserva los mismos objetos. Por ejemplo, pasar de una representación numérica (coordenadas sobre el contorno del objeto) a la expresión algebraica de la función (ajuste de funciones).

Como se detallará más adelante, los estudiantes siguieron un proceso para, a partir del objeto que tenían en sus manos, obtener su volumen. En dicho proceso construyeron varias representaciones del objeto: visual, numérico, gráfico, analítico, verbal y escrito. En la Figura 2 se ilustran algunas de las representaciones, las conversiones y tratamientos.

Los registros de representación semiótica que se formaron son: a. Visual: Fotografía digital del objeto de la vida cotidiana; b. Numérica: La tabla de datos de las coordenadas que se calcula con Tracker; c. Gráfica. Representación que genera Tracker al señalar el contorno de la fotografía; d. Algebraico. Al hacer doble clic sobre la gráfica de la trayectoria, se activa la rutina del ajuste de funciones de Tracker para obtener el registro algebraico; e. Verbal. Se genera cuando se discuten los resultados en trabajo colaborativo; f. Escrito.

Se identifica en dos momentos, el primero con la interacción con el cuaderno de trabajo y la segunda con el informe escrito sobre el desarrollo de la propuesta.

Por ejemplo, un tratamiento se genera cuando se simula el grosor del recipiente, pues primero se determina la función de la periferia $f(x)$ y posteriormente la función que modela el interior del recipiente $g(x)=f(x)-0.5$. De la misma forma, al menos se identificaron seis conversiones: a. Visual-gráfico; b. Visual-numérico; c. Visual-analítico; d. Gráfico-algebraico; e. Numérico-algebraico; f. Verbal-analítico.

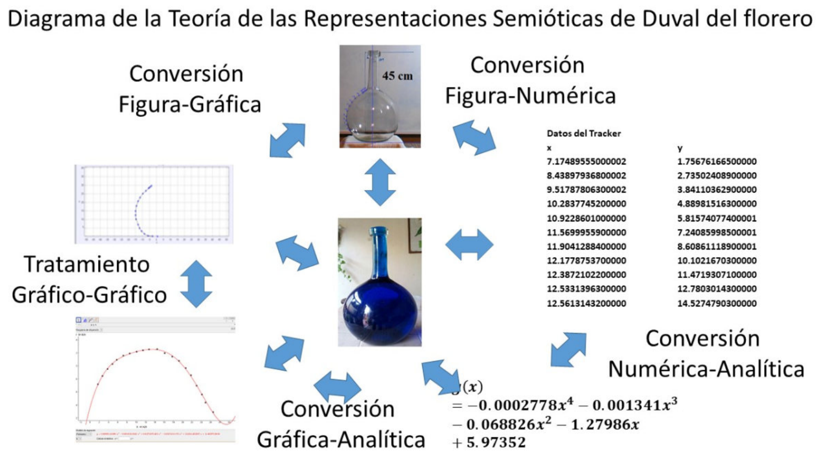



**Figura 2.** Representaciones semióticas para el florero

## 2.8 Cálculo del volumen de un florero por el método sólidos de revolución

*Actividad inicial*

Se presume que los alumnos tienen antecedentes escolares, sobre la forma de calcular el volumen de figuras geométricas regulares como esferas, pirámides completas y truncadas, cilindros o paralelepípedos (Figura 3), con la finalidad de relacionarlos con las formas que tienen objetos de su contexto, como frutas, macetas, recipientes, botellas, floreros, entre otras (Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016*)*, pero que por la forma algorítmica de enseñar el tema de sólidos de revolución (Zaragoza, López, Díaz, 2006), los alumnos no logran establecer una conexión entre los objetos de la vida cotidiana y la integral definida, pues en el aula las actividades se orientan principalmente a los ejercicios planteados en los libros de texto.

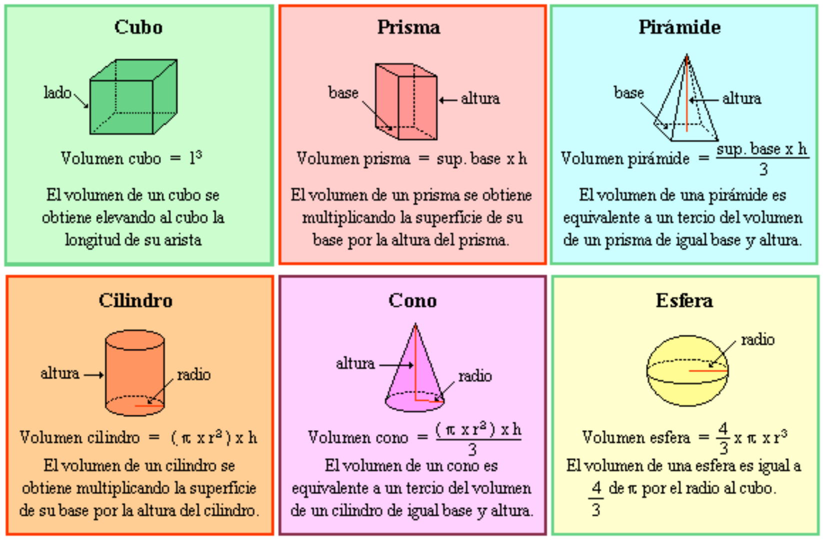
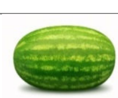
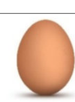
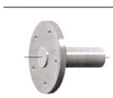
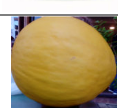



**Figura 3.** Sólidos regulares (http://cienciaytecnocsvf.blogspot.mx/2012/11/volumenes-de-solidos-regulares-e.html)

Así que con el propósito de relacionar los conocimientos previos del estudiante sobre los sólidos regulares con objetos de la vida cotidiana (Tabla 1), se aplica la actividad:

**Actividad 1**. Dibujar y describir una figura geométrica que se asemeje a cada una de las siguientes imágenes e investiga y escribe la fórmula para calcular el volumen del sólido que se asemeje al objeto. Ubica el sistema de coordenadas y traza en el plano las curvas que limitan su contorno, de tal manera que al girar sobre un eje obtengas el acercamiento al objeto seleccionado.

| Objetos de la vida cotidiana | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Volumen del sólido semejante | | Volumen del sólido semejante | | Volumen del sólido semejante |
|  | |  | |  | |
|  | |  | |  | |

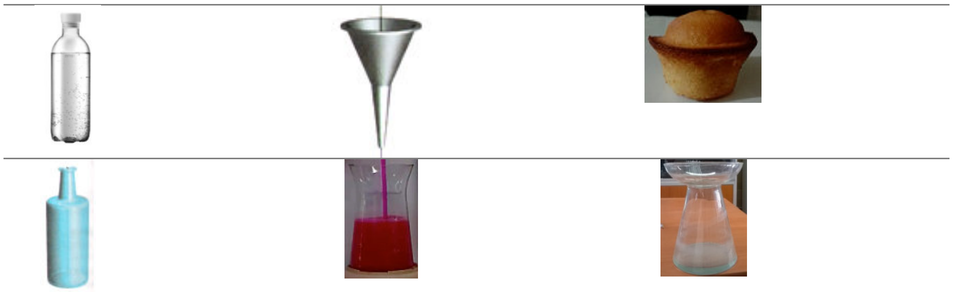


**Tabla 1.** Objetos tridimensionales de la vida cotidiana.

*Resumen de la teoría de sólidos de revolución*

Un sólido de revolución se define como un objeto tridimensional, que se obtiene al hacer girar el área limitada por una o varias curvas planas, en torno a una línea recta que se encuentra en el mismo plano, llamada eje de revolución (Figura 4). En los libros de texto y en los programas vigentes de cálculo diferencial e integral, se tratan los métodos de discos, arandelas y casquetes cilíndricos.

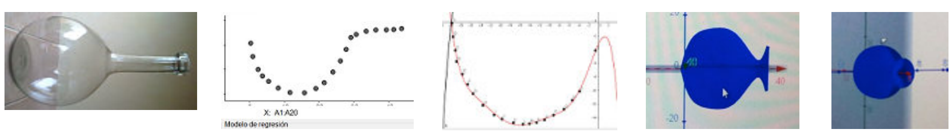



**Figura 4.** Modelación de un sólido de revolución con GeoGebra

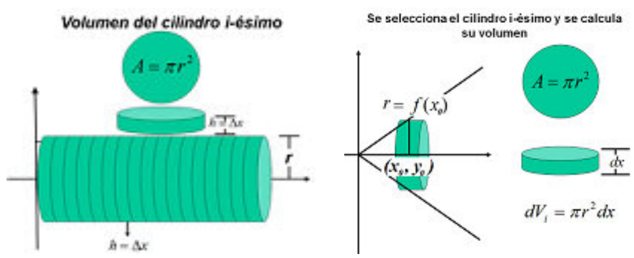
Se sabe de la importancia que tiene para la sociedad el diseño de una gran cantidad de objetos tridimensionales, que son empleados en el hogar o en la industria (Figura 5), entre ellos, los ejes de rotación de automóviles o máquinas, embudos, píldoras, botellas, recipientes y pistones que ya se han modelado y diseñado artesanalmente o con programas de cómputo, que no se relacionan con la matemática escolar, pues por lo regular se deja para los cursos de especialidad, porque el profesor se rige por lo señalado en los programas vigentes para el tema, en los que se integran muy pocos ejemplos para el cálculo de volúmenes de objetos de la vida cotidiana.

En la secuencia didáctica (Tobón, 2010) se pretende aproximar el cálculo del volumen de objetos por el método de sólidos de revolución, por la opción de discos, aplicado a floreros y frutas, aunque no se descartan otro tipo de objetos tridimensionales, pues una parte de la secuencia didáctica se orienta a que el alumno, en trabajo extraclase, seleccione un objeto y le aplique la metodología propuesta, por ejemplo, en uno de los talleres piloto un equipo seleccionó un exquisito y delicioso panqué para aproximar su volumen y modelar el objeto con Tracker y GeoGebra.

**Figura 5.** Sólidos de revolución en la vida cotidiana

*Método de los discos*

Este método consiste en dividir el área bajo la curva y=f(x) en rectángulos, que, al girar alrededor de un eje, da lugar a un disco de altura dx y radio el valor de la función f(x) valorada en el punto ($x_0$, $y_0$) (Figura 6a y b).




a b

**Figura 6.** Elemento diferencial $dV_i = \pi r^2 dx_i$ para calcular el volumen de un sólido por el método de discos

Se realiza la suma de todos los cilindros, para llegar al proceso de integración, que da origen a la fórmula para el cálculo del volumen por el método de sólido de revolución,

$$dV = \sum_{i=1}^{n} dV_i \qquad dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} dV_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2\,\mathrm{d}x_i \qquad = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2\,\mathrm{d}x_i$$

Al aplicar el límite se llega a la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

En caso de que el eje Y sea el eje de revolución, la fórmula que se aplica es:

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

*Validación del cálculo del volumen con la fotografía.*

Siempre se genera la duda de si lo modelado y simulado en un computador electrónico coincide con el mundo real, en este caso, en qué porcentaje el cálculo del volumen de un objeto con la opción de discos para un sólido de revolución, a partir de una fotografía procesada con Tracker y GeoGebra, se aproxima con el calculado por otro método o con lo señalado por la empresa que lo produce. Para dar certidumbre al proceso se calculó el volumen de un recipiente con forma aproximada a un cilindro (Figura 7).

El volumen del recipiente con forma cilíndrica se aproximó con el llenado de agua dando como resultado 6.125 litros y con los datos del Tracker $V=3.141592 \times 7.329^2 \times 33.5=6.10287$ litros, lo que genera un error del error del 3%, resultado que se considera aceptable y que es propiciado por las unidades de medida que se usaron (recipiente de un litro y una jeringa de hospital, ambos graduados), por la perspectiva en que se tomó la fotografía del objeto pues es una proyección de un objeto tridimensional, la colocación de la vara de calibración sobre la regla que se ubica en el momento de tomar la fotografía y por la irregularidad de los defectos de fábrica, entre otros.

Volumen


**Figura 7.** Recipiente con forma de cilindro

*Aproximación del volumen de objetos con Tracker y GeoGebra*

a. Diseño del set para la toma de fotografía del objeto.

Se selecciona el objeto al que se pretende calcular el volumen, en este caso, el recipiente mostrado en la figura 8; nótese que sobre la superficie se encuentra una marca sobre el fondo, que significa la unidad de medida (no tiene relación directa con las magnitudes del recipiente) que en Tracker se interpreta como la interface entre las medidas reales del objeto y la imagen digital, que en este caso mide 45 centímetros de longitud. La unidad de medida que se ubica en la fotografía puede ser una regla o un objeto con medida determinada, pues su importancia radica en que los datos que arroja Tracker son las dimensiones reales del objeto, pues de lo contrario sucede que el volumen calculado puede ser mayor o menor que el real, en proporciones que no son aceptables como un error de unidades de medida.


**Figura 8.** Recipiente que los alumnos denominaron esferoide

b. Configuración de Tracker.
   - Una vez que se toma la fotografía, se ubica el archivo en un directorio, pues cuando se incluyen otras imágenes de fotografía, Tracker los reconoce y los inserta como parte del proceso para construir el video, lo que provoca conflictos.
   - La fotografía en el Tracker se inserta con la instrucción *Video*➔*Importar* y se selecciona el directorio en el cuál se encuentra en archivo de la imagen del recipiente. Se le recuerda al usuario que se trabaja en un ambiente Windows, así que las opciones de Grabar, Abrir, Copiar, Pegar, Zoom, manipular los colores, entre otras rutinas, se encuentran activas para ser empleadas con el software.
   - Tracker sólo procesa video, así que con la fotografía se genera un video "estático" con la opción *Ajustes de corte* (Figura 9), que se activa con un clic derecho sobre la fotografía, con el propósito de seleccionar el número de cuadros que integran el video, que tiene relación directa con las marcas que servirán de referencia para señalar la periferia del recipiente, por

ejemplo, si se seleccionan 16 cuadros, ese es el número de puntos que se marcarán sobre la imagen del objeto. Se recomienda que el usuario seleccione el número de cuadros, en función del número de puntos que identifique plenamente el contorno del objeto, así, para el recipiente de la Figura 8b, los datos son: *Cuadro Inicial*: 0, *Tamaño del Paso*: 1 y *Cuadro final*: 15.

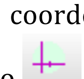


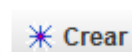
a b

**Figura 9.** Opciones para importar la imagen y números de cuadros

- Son tres los elementos importantes para completar la configuración de Tracker (Figura 10):

  - Vara de calibración. Se activa con el ícono  y tiene por función ser la interfase entre el objeto real y la fotografía. Una vez que se activa aparece en la zona de trabajo de Tracker, un segmento de recta que se prolonga o contrae, hasta que queda del mismo tamaño de la medida que se ubicó junto al objeto. En la parte superior de la vara de calibración se hace clic para ubicar la magnitud, en este caso, 45 cm.

  - Ejes coordenados. En el menú principal del Tracker, se encuentra el ícono  con el que se insertan los ejes coordenados sobre el objeto, que el usuario puede colocar en la sección del recipiente que mejor convenga a los intereses del usuario.

  - Trayectoria→Nuevo→Masa Puntual. Con la opción  se registra la actividad que el usuario desempeña para la toma de datos: Nombre, Color, Borrar pasos y Borrar.

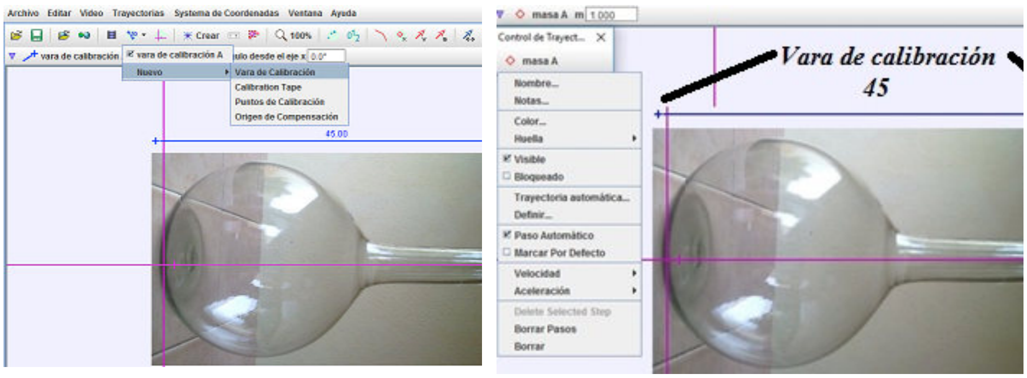



**Figura 10.** Vara de calibración y crear una masa puntual

c. Marcado de la trayectoria.

- Una vez que se crea la masa puntual, se inicia la marca de puntos sobre el contorno con Shift+clic. Al presionar la tecla Shift el puntero del cursor cambia de forma, lo que indica al usuario que Tracker está listo para el inicio del señalado de la periferia del recipiente. En la parte derecha aparece una cuadricula, en la que se registran los puntos correspondientes al contorno, análisis del video y en la parte inferior derecha el espacio en el que se muestra las coordenadas en forma de tabla de datos (Figura 11).

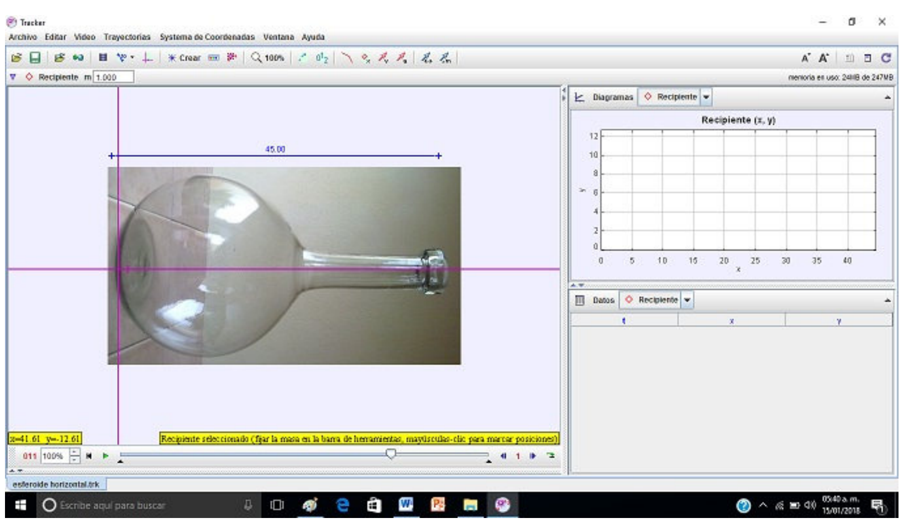


**Figura 11.** Secciones de la pantalla principal de Tracker

- El primer punto se señala sobre la fotografía y se registra sobre el plano cartesiano y en la tabla de datos. Se continúa de esta manera, hasta que se evidencia la trayectoria del objeto. Se aclara que en caso de que las marcas del contorno no sean precisas, se pueden corregir o borrar e iniciar de nuevo. Se sugiere estar consciente de que son datos aproximados, por eso se recomienda trazar con cuidado la señalización para minimizar el error de cálculo generado por la perspectiva al tomar la fotografía.
- Una vez que se ha señalado el contorno del recipiente, el bosquejo de la gráfica que presenta tiene como variables ***x-t*** en los ejes coordenados (Figura 12), que se deben cambiar con un clic sobre las variables a ***x-y*** en la lista de variables que se muestran en pantalla.
- En este caso, el recipiente seleccionado se ha dividido en dos secciones el contorno, lo que origina dos funciones ajustadas en los intervalos [0, 25.57640002] y [25.57640002, 44.57858454].

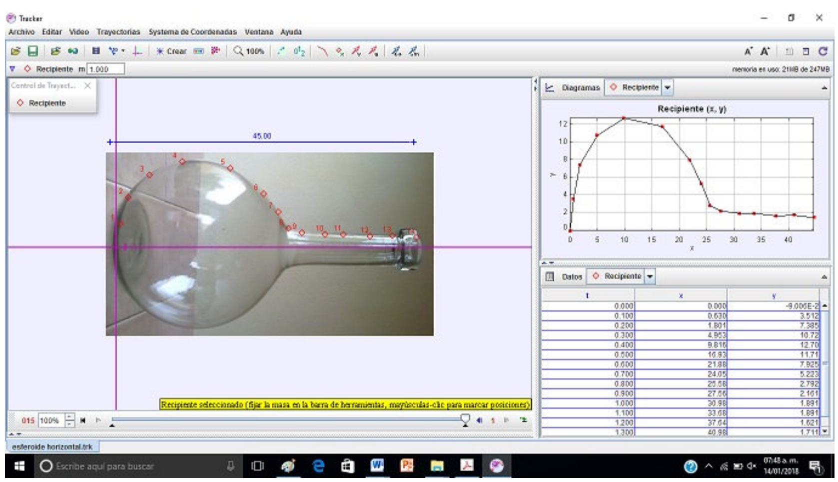


**Figura 12.** Periferia del recipiente, su representación gráfica y coordenadas en forma de tabla

- Ajuste de los datos

La rutina de ajuste de funciones de Tracker es limitada, así que se recomienda exportar los datos al programa GeoGebra, para obtener la expresión analítica que representa el acercamiento al contorno de la región de integración.

Una vez que los datos se han registrado en la hoja de cálculo del GeoGebra, se seleccionan y con la opción *Análisis de Regresión de dos variables* se activa la rutina para ajustar el polinomio al contorno del sólido. Las instrucciones son: *Análisis de Regresión de dos variables* ➔ *Modelo de regresión* ➔ *Polinomio* ➔ *Grado* ➔ *Copiar a Vista Gráfica* (Figura 13).

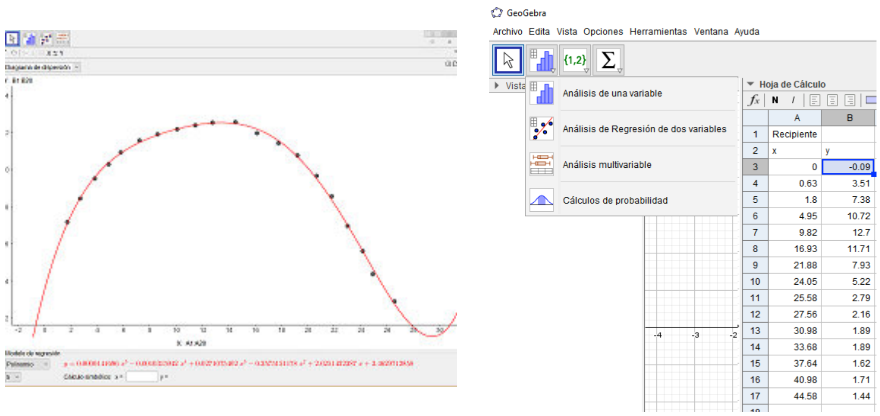



**Figura 13.** Rutina para determinar el polinomio de ajuste de datos

d. Cálculo de volumen del sólido de revolución.

Para concretar la actividad, se emplea la rutina de integración del GeoGebra para ajustar la función, pues se requiere para delimitar la región de integración. (Figura 14). El ajuste del polinomio a los datos que se encontraron con el GeoGebra, se secciona, por la forma del recipiente, en dos partes, lo que genera dos polinomios de ajuste, uno para los datos en el intervalo [0, 25.57640002] y otro para el intervalo [25.57640002, 44.57858454]. Ver Tabla 2.

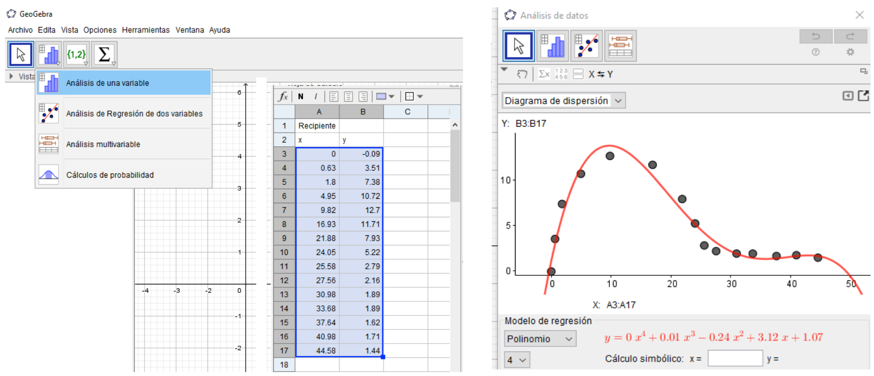



**Figura 14.** Límites de integración

| Datos primer intervalo | | Datos segundo intervalo | |
|---|---|---|---|
| x | y | x | y |
| 0 | -.09005774655 | 25.57640002 | 2.61167465 |
| .6304042258 | 3.512252115 | 27.55767044 | 2.161385917 |
| 1.801154931 | 7.384735217 | 30.97986481 | 1.801154931 |
| 4.953176060 | 10.71687184 | 34.49211693 | 1.530981691 |
| 9.816294374 | 12.69814226 | 37.64413806 | 1.53098169 |
| 16.93085635 | 11.70750705 | 40.97627468 | 1.440923945 |
| 21.88403241 | 7.925081696 | 44.57858454 | 1.440923945 |
| 24.04541833 | 5.223349300 | | |
| 25.57640002 | 2.61167465 | | |

**Tabla 2.** Datos del primer tramo del contorno del recipiente

Estos datos se exportan a GeoGebra, para determinar las funciones que limitan la periferia del objeto, mismas que se emplean para calcular el volumen de sólido de revolución:

1. Se activa en GeoGebra la opción *Vista*➔*Hoja de Cálculo.*
2. Se copian y se pegan los datos en la hoja de cálculo.
3. Para ajustar la función a los datos se selecciona la opción *Análisis de Regresión de dos variables*, luego se elige la mejor función que acota la región de integración (Figura 15), que para el recipiente son las funciones:
   - $f(x)=-.0000041907x^6+.000351825x^5-.0114300021x^4+.1800895374x^3-1.4599102208x^2+6.0185503007x+.0160741826$.

- p(x)= .0000024568$x^6$-.0005108574$x^5$+.0439475482$x^4$-.2.0022748857$x^3$+50.96822119438$x^2$-687.6100191184x+3845.5846327117.

Es necesario aclarar que estas funciones son las que limitan el contorno exterior del recipiente, pero para calcular el volumen se requiere de dos funciones que limitan el interior, pues tiene un grosor de .5 cm. Las expresiones para delimitar la región interior calculadas con GeoGebra son:

- f1(x)=f(x)-.5
- f2(x)=p(x)-.5

Los límites de integración se modifican a [0.8, 25.57640002], pues el fondo del recipiente tiene un grosor de .8 cm.

4. Para calcular el volumen se teclea en la barra de entrada de GeoGebra:

- Volumen1=pi*Integral[f1(x)^2, .8, 25.57640002]
- Volumen2=pi*Integral[f2(x)^2, 25.57640002, 44.57858454]

El dato arrojado por el GeoGebra para el volumen es Volumen=8.091 litros, que contrastado con lo calculado con el llenado manual con agua (V=8.125 litros) difiere en un 1%.

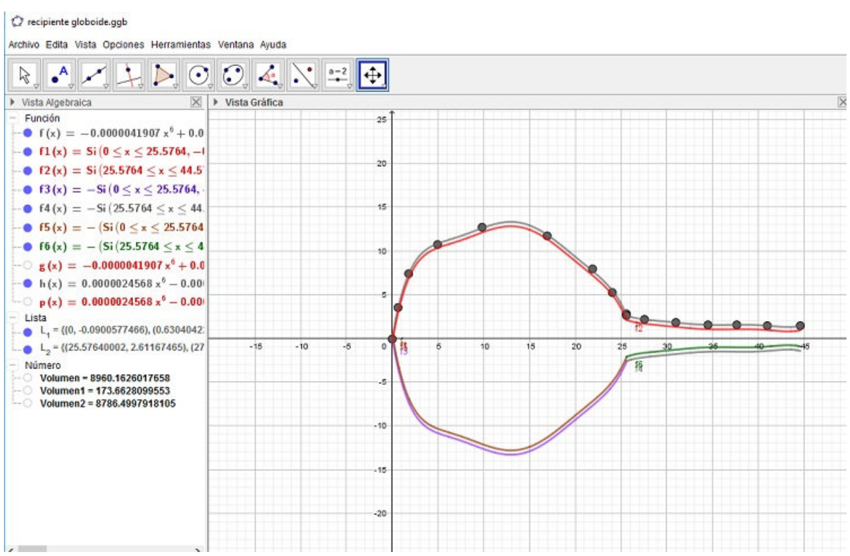



**Figura 15.** Ajuste de los datos a dos polinomios

## 2.9 Cálculo del volumen de una sandía por el método sólidos de revolución

Para esta actividad se ha seleccionado una rica y deliciosa fruta mexicana conocida como sandía, para calcular su volumen como un sólido de revolución, para ello se requiere conocer la función que describe su contorno, para posteriormente girar la curva que delimita la sandía alrededor del eje x. Los límites de integración se relacionan con el tamaño de la sandía, como se muestra en la figura 16.

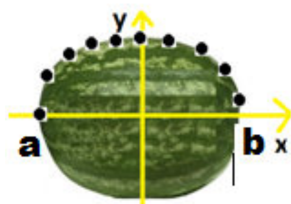
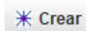



**Figura 16.** Trayectoria de la periferia de la sandía

Desarrollo de la actividad con el Tracker:

1. Diseñar el set para fotografiar la sandía.
2. Con el software Tracker realiza las siguientes actividades:
   a. Inserta la fotografía de la sandía en el Tracker.
   b. Con la opción *Ajustes del corte*, botón derecho sobre la fotografía, se selecciona el número de puntos a marcar sobre el contorno de la sandía: *Cuadro Inicial*: 0, *Tamaño del Paso*: 1 y *Cuadro final*: 17.
   c. Selecciona la ubicación del sistema coordenado, en este caso, se coloca el plano cartesiano con el eje horizontal de tal forma que la sandía se divida en dos partes iguales y el eje vertical alineado al costado izquierdo.
   d. Con las instrucciones  ➔*Nuevo*➔ *Vara de calibración* aparece en la zona de trabajo de Tracker un segmento de línea recta, cuya función es ser la interface entre el objeto real y su fotografía en la computadora. Este segmento de recta se contrae o se expande, para que tenga la misma magnitud que la marca que se ubicó cerca del objeto cuando se fotografió la sandía. Esto es importante pues de ello depende que el volumen calculado sea aproximado al valor real de la sandía.

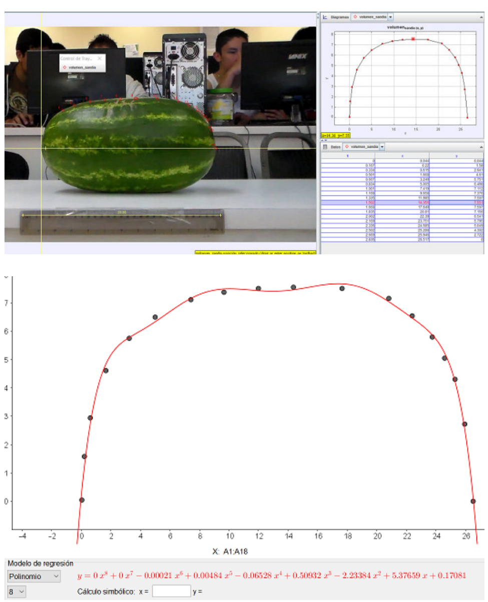
e. Elige la opción *Trayectoria*➔*Nuevo*➔*Masa Puntual* o hacer clic en el ícono 

para inicia el marcado de los puntos sobre el contorno.

f. La instrucción para marcar los puntos sobre el contorno de la sandía (Figura 16) es *Shift+clic.* Como se explicó en este documento, al presionar la tecla *Shift* el puntero del ratón cambia de forma, indicativo de que Tracker está listo para iniciar la señalización de los puntos sobre el contorno superior de la sandía.

g. Hacer una copia de la tabla de datos calculada por el Tracker y pegarla en la hoja de cálculo de GeoGebra. Se aclara que estos datos se obtuvieron para una sandía en particular, así que para otra sandía se requiere actualizarlos.

3. Una vez que se han exportado los datos a GeoGebra, se selecciona la opción *Análisis de Regresión de dos variables* ➔ *Modelo de regresión* ➔ *Polinomio* ➔ *Grado*➔ *Copiar a Vista Gráfica* y se ajusta el polinomio a la periferia (Figura 17). Se aprovechan las bondades de la velocidad de cálculo de la computadora, para aproximar el volumen de la sandía por el método de sólidos de revolución, y se elige el polinomio de grado x que mejor se aproxima. En la Tabla 3 se presentan las aproximaciones al volumen de la sandía con diferentes grados de polinomios.




| x | y |
|---|---|
| .04390227171 | .04.390227171 |
| .2195113586 | 1.580481782 |
| .6146318040E | 2.941452205 |
| 1.668286325 | 4.609738530 |
| 3.248768107 | 5.751197595 |
| 5.004858975 | 6.497536214 |
| 7.419483920 | 7.112168018 |
| 9.658499777 | 7.375581648 |
| 11.98532018 | 7.507288463 |
| 14.35604285 | 7.551190735 |
| 17.64871323 | 7.507288463 |
| 20.80967679 | 7.156070289 |
| 22.39015857 | 6.541438485 |
| 23.75112900 | 5.795099866 |
| 24.58527216 | 5.048761247 |
| 25.28770851 | 4.302422628 |
| 25.94624258 | 2.721940846 |
| 26.51697211 | 0. |

**Figura 17.** Contorno de la sandía, su gráfica y datos

Con los valores de la tabla de la Figura 16 y al análisis de los polinomios respectivos, con referencia al número de cifras significativas, se elige el polinomio de grado 6, pues el coeficiente de $x^8$ y de $x^7$ se consideran nulos: $a_8$ = .0000000438 y $a_7$ = .0000046765, respectivamente y el polinomio ajustado queda como:

$$g(x) = -.00021x^6 + .00484x^5 - .06528x^4 + .5093x^2 - 2.2384x^2 + 5.37658x + .1708$$

| Grado del polinomio | Volumen |
|---|---|
| 8 | 3655.6135 $cm^3$ |
| 7 | 3631.1000 $cm^3$ |
| 6 | 3631.7937 $cm^3$ |
| 5 | 3673.2741 $cm^3$ |
| 4 | 3681.9562 $cm^3$ |
| 3 | 3708.5699 $cm^3$ |
| 2 | 3699.1056 $cm^3$ |

**Tabla 3.** *Cálculo del volumen de la sandía con polinomios*

4. Simulación de la sandía en 3D

GeoGebra incluye en sus rutinas la opción de graficas de objetos en tres dimensiones, para ello se emplean los datos de la función polinomial ajustada para el contorno de la sandía.

Los pasos a seguir para simular la sandía en 3D con el GeoGebra son:

- En GeoGebra se selecciona la función que se va a modelar, en este caso el polinomio ajustado g(x) solo al intervalo .04390227171 <x<26.51697211 (Figura18), con el propósito de simular sólo el objeto, esto se logra al acotar la función en los intervalos que se parece más al objeto. En la barra de entrada de GeoGebra, con el comando ***Función*** donde se introduce la función que se analiza g(x) con valor inicial (0.04390227171) y valor final (26.51697211) obtenidos de la tabla de datos de Tracker.

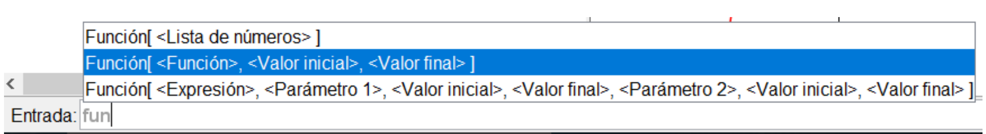



**Figura 18**. Redefinición de la función ajustada

- En la *Vista Gráfica* se inserta un deslizador (Figura 19), con la finalidad de propiciar el giro de la superficie que genera el sólido de revolución, se activan sus propiedades, se le da nombre y se selecciona ALPHA ($\alpha$) y la opción de ángulo. *Deslizador* ➔ *Vista gráfica 3D* ➔ *Rotación Axial* ➔ *Hacer clic a la función* ➔ *Clic al eje de rotación.*
- Se abre la *Vista gráfica 3D* y se hace clic en la función *Rotación Axial* (Figura 20).

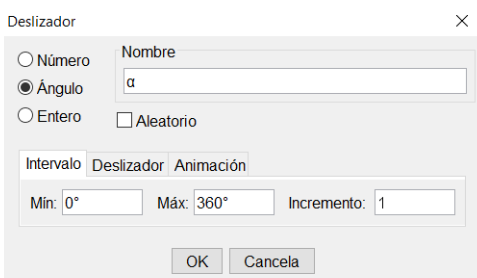



**Figura 19**. Propiedades del deslizador

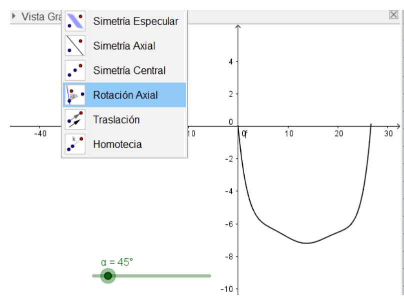



**Figura 20.** Vista 3D y la opción de Rotación Axial

5. Una vez que se activó la opción *Rotación Axial*, se abre la ventana 3D y se hace clic, primero, sobre la curva asociada a la función, y segundo, sobre el eje (Figura 21), que se pretende gire el plano limitado por la función.

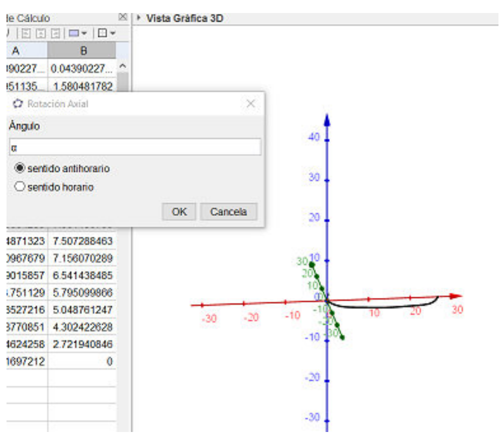



**Figura 21**. Ventana 3D y rutina para construir la simulación de la sandía

6. En la *Rotación Axial*, se introduce de nuevo el nombre $\alpha$ y se selecciona la forma en que se quiere ver girar la animación: horario o antihorario. En el momento después de hacer clic sobre la curva y luego sobre el eje de

rotación, en el menú de la *Vista Algebraica* GeoGebra construye de manera automática las ecuaciones paramétricas de la superficie de la sandía (Figura 22), que define la animación y con clic botón derecho sobre la expresión algebraica, se activa la opción *Rastro* para generar y visualizar la simulación de la sandía.


**Figura 22.** Curvas paramétricas de la superficie modelada

7. Por último, con un clic botón derecho, sobre el deslizador y se activa la casilla *Animación*, para visualizar el objeto simulado (Figura 23). En caso de que el usuario se interese por las propiedades del objeto, como en este caso, se elige el color verde, para simular la sandía.

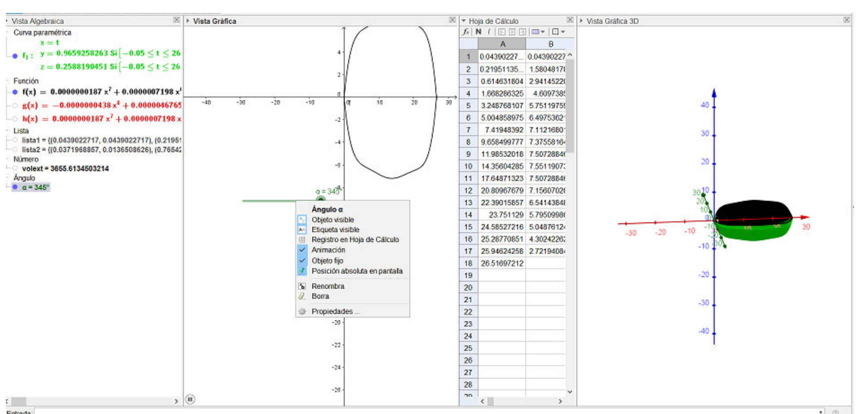


**Figura 23.** Cálculo del volumen, modelación y simulación de la sandía

## 3. Conclusiones

La propuesta didáctica para el aprendizaje de la aplicación de la integral definida al cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución con apoyo de la fotografía, el Tracker y GeoGebra, es de interés para los participantes porque es una buena alternativa para lograr conocimiento y propiciar motivación hacia las matemáticas.

Los estudiantes están muy familiarizados con el uso de la tecnología, la mayoría posee habilidades para su manipulación, destreza que facilitó manipular la cámara fotográfica, Tracker y GeoGebra para aprender matemáticas, situación distinta con los profesores, quienes tuvieron problemas para su manipulación.

Los conocimientos matemáticos previos y el manejo de la tecnología, son muy importantes en esta propuesta didáctica, porque de manera clara se vio la diferencia entre el trabajo que realizaron los profesores y los estudiantes. Mientras la dificultad que presentaron los profesores fue con respecto al manejo de la computadora, las fotografías digitales y los programas computacionales, la de los estudiantes fue con respecto a la deficiencia de conocimientos previos de matemáticas.

La tecnología facilita muchos quehaceres de la matemática, pero la tarea del docente es buscar la forma de vincular los temas de clase con situaciones que para el estudiante tengan utilidad o significado, pues en la medida que lo proponga, los estudiantes sentirán más atracción por aprenderla. En el aula se debe de promover la transferencia de la matemática escolar a otro contexto, pues se nota que están acostumbrados al método algorítmico, desprovisto de la relación con su entorno, por ejemplo, situación que se identificó cuando no lograban relacionar una función con el contorno del objeto cotidiano.

Se plantea que en un proceso educativo lo ideal es involucrar a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fortalecido con un ambiente de aprendizaje adecuado con las Tecnologías de la Información y Comunicación, en el que el estudiante, en trabajo individual y colaborativo, puede decidir qué y cómo va aprender, en el que tome la iniciativa, con el firme propósito de lograr un aprendizaje significativo.

Se afirma que incluir situaciones problema relacionados con el contexto de la vida cotidiana en el aula escolar, motivan e interesan por la forma en que se plantean para propiciar aprendizaje, pero eso no infiere que el alumno aprenda el tema de matemáticas, por tal motivo el profesor debe de ser cuidadoso, y sobre todo, diseñar instrumentos de evaluación validados, que permitan sustentar que el alumno aprendió matemáticas.

## Referencias

Duval, R. (2006) Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [en línea] ISSN 1665-2436. Fecha de consulta: 5 de octubre de 2017. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509904.

Hitt, F., González-Martín, A. (2015) Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. Educational Studies in Mathematics*.* 88:201–219. DOI 10.1007/s10649-014-9578-7. Springer Science Business Media Dordrecht: USA.

Pantoja, R. Guerrero, M. , Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*).* Modeling in problem situations of daily life*. Journal of Education and Human Development,* Vol. 5, No. 1, pp. 62-76. IS**SN**: 2334-2978 (Electronic Version). DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/.

Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación decompetencias.* México: Pearson Educación.

Zaragoza, G., López, S., Díaz, R. (2006). Construyendo modelos didácticos virtuales de sólidos de revolución utilizando SolRev. Ingeniería, Revista Académica de la FI-UADY, 10-3, pp.53-59, ISSN: 1665-529X. Recuperado el 4 de octubre del 2017 de http://www.redalyc.org.

# 15 GEOGEBRA COMME OUTIL D'EXPLORATION EN ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE

Loïc Geeraerts[1], Denis Tanguay[1]

## Résumé

GeoGebra, un logiciel de géométrie dynamique (LGD), peut se utiliser comme outil d'exploration, visant à ce que les élèves émettent et formulent des conjectures. Nous proposons une séquence d'activités assistées de GeoGebra, pour des élèves de 12 à 15 ans. Notre hypothèse centrale, issue des travaux sur le paradigme du géomètre-physicien, veut que de telles explorations ne doivent pas être circonscrites à des résultats isolés, mais gagnent à couvrir un sujet, un thème : l'énonciation de conjectures doit donner lieu à un travail sur la preuve, qui permet d'augmenter progressivement la « banque » des propositions déductivement reliées en réseaux. La séquence permet l'étude systématique des quadrilatères non croisés qui ont des angles droits, thème qui débouche ensuite sur celui des quadrilatères non croisés inscriptibles dans un cercle.
**Mots-clefs** : logiciels de géométrie dynamique, conjectures et démonstrations, exploration géométrique, le paradigme du géomètre-physicien, réseaux déductifs.

## Resumen

GeoGebra, un software de geometría dinámica (LGD), puede usarse como una herramienta de exploración, para emitir y formular conjeturas. Ofrecemos una secuencia de actividades asistidas por GeoGebra para estudiantes de 12 a 15 años. Nuestra hipótesis central, resultante del paradigma del físico-geómetra, es que las exploraciones no deben limitarse a resultados aislados, sino que deben cubrir un tema, un contenido: La enunciación de conjeturas debería dar lugar a un trabajo sobre la prueba, para aumentar progresivamente el 'banco' de proposiciones conectadas deductivamente en redes. La secuencia permite el estudio sistemático de cuadriláteros con ángulos rectos, que conduce a cuadriláteros que se pueden escribir en un círculo.
**Palabras clave** : Software de geometría dinámica, conjeturas y demostraciones, exploración geométrica, paradigma del físico-geómetra, redes deductivas.

## Abstract

GeoGebra, a dynamic geometry software, it is used as an exploration tool, with the aim of produce and state conjectures. We propose a sequence of teaching activities technologically supported by GeoGebra, intended for students aged between 12 and 15. Our central hypothesis, stemming from our work on the geometer-physicist paradigm, is to the effect that such explorations should not be restricted to isolated results, but improve from covering a whole subject, a theme : the utterances of conjectures must lead to working on proof and proving, paving the way to the construction of a directory, indeed a 'theory', in which results and theorems are organized through deductive reasoning into a network. The sequence allows the systematic study of quadrilaterals that have right angles, a theme that leads to quadrilaterals inscribable in a circle.
**Keywords**: dynamic geometry software packages, conjectures and proof, exploration in Geometry, the geometer-physicist paradigm, deductive networks

[1] Université du Québec à Montréal, Canadá..

## 1. Introduction

Les logiciels de géométrie dynamique (LGD) tels *Cabri-géomètre*, *The Geometer's Sketchpad*, *GeoGebra*, *CaRMetal*, *DGPad*, etc., sont des outils dorénavant incontournables de l'enseignement de la géométrie. Les usages que les enseignants en font sont très divers, nous proposons ci-dessous ceux qui nous apparaissent les plus usités en géométrie, constituant une liste qui n'est certainement pas exhaustive. Le dernier de la liste sera celui auquel nous nous attacherons plus précisément dans l'article, mais nous reviendrons aussi sur les items 2, 3 et 4 de la liste.

- D'abord le plus trivialement pratique, celui d'éditeur de figures. Bien qu'à l'origine, les LGD n'aient pas été conçus pour produire des figures fixes à insérer dans des documents sur support papier ou électronique — destinés ou non aux élèves, pour des recueils, des articles, des présentations numérisées, etc. — ces logiciels, quand ils permettent des exportations vectorielles[1], sont de véritables éditeurs de dessin et permettent une réalisation parfaite des illustrations géométriques.

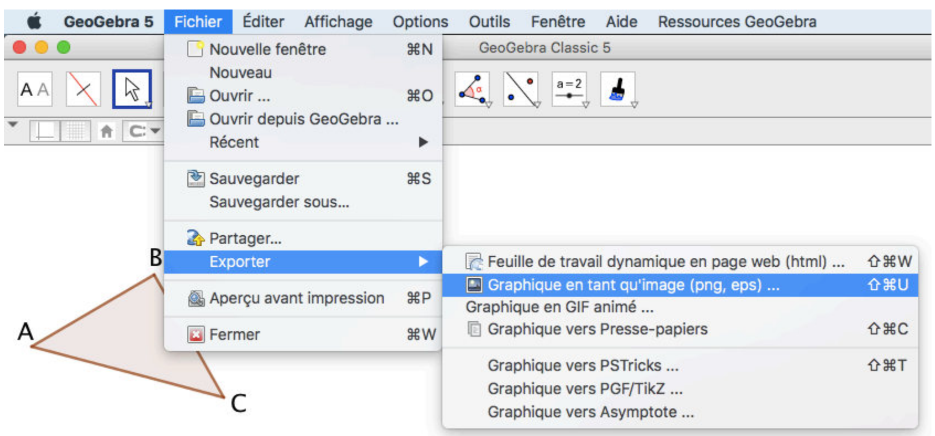



**Figure. 1** Exporter une figure avec GeoGebra

- Les LGD comme éditeurs de figures géométriques dynamiques. Les logiciels *Cabri Géomètre* et *The Geometer's Sketchpad* ont été conçus au milieu des années 80 pour produire des représentations graphiques *interactives*, que l'utilisateur peut déformer sans que pour autant, elles

---

[1] Une exportation vectorielle est une technologie informatique de représentation qui permettent de 'zoomer' sans effet apparent de pixellisation.

perdent les propriétés à partir desquelles elles ont été construites. Les potentialités de cette caractéristique pour l'enseignement de la géométrie ont vite été reconnues et mises à profit puisque comme outils de construction — au même titre que la règle, l'équerre, le compas, etc. —, ils permettent de surcroît à l'élève d'appréhender la distinction entre *dessin* et *figure géométrique* : nous y reviendrons à la section II.

- Les LGD comme outils d'expérimentation empirique ; notamment, mais pas uniquement, à partir des fonctionnalités de mesure : longueurs, distances, mesure d'angle, etc. L'expérimentation peut par exemple se placer dans le cadre de la géométrie du *géomètre-physicien*, (voir Tanguay et Geeraerts, 2014 ou 2012), où l'on cherche à redonner au *raisonnement hypothético-déductif* un sens qui est plus proche de celui que lui donne la physique. Il s'agit alors d'intégrer à la théorie en développement des résultats dont on fait des 'postulats', des 'hypothèses' comme en énonce la physique (qui les désigne alors le plus souvent comme des *lois*), hypothèse que la classe valide expérimentalement à l'aide du logiciel, soit parce que sa démonstration mathématique est hors de portée, soit parce que sa validation empirique peut mettre sur la piste d'une preuve possible, qui est travaillée par la suite. Une telle expérimentation empirique peut être conduite pour vérifier, par exemple, le *Postulat des 3 segments*, comme cela sera proposé en §4.1.
- Les LGD pour illustrer des éléments d'enseignement, des explications, des raisonnements dans des fichiers destinés aux élèves, avec des degrés d'interactivité variables. Un exemple classique [1] est l'illustration de la tangente au point $P$, de coordonnées $(x_P\ ;\ f(x_P))$ sur le graphique d'une fonction $f$, comme limite des sécantes joignant $P$ et un point mobile $M$ sur la courbe que l'élève peut déplacer et rapprocher de $P$. Un autre exemple beaucoup moins classique : dans Geeraerts et Tanguay (2012, 2e partie), nous expliquons comment élaborer un fichier GeoGebra qui permet d'illustrer figuralement, pour les élèves, l'enchaînement des déductions dans une démonstration.

[1] Pour une version sophistiquée de cet exemple, voir la 3e activité, §4, dans Miranda et al. (2016).

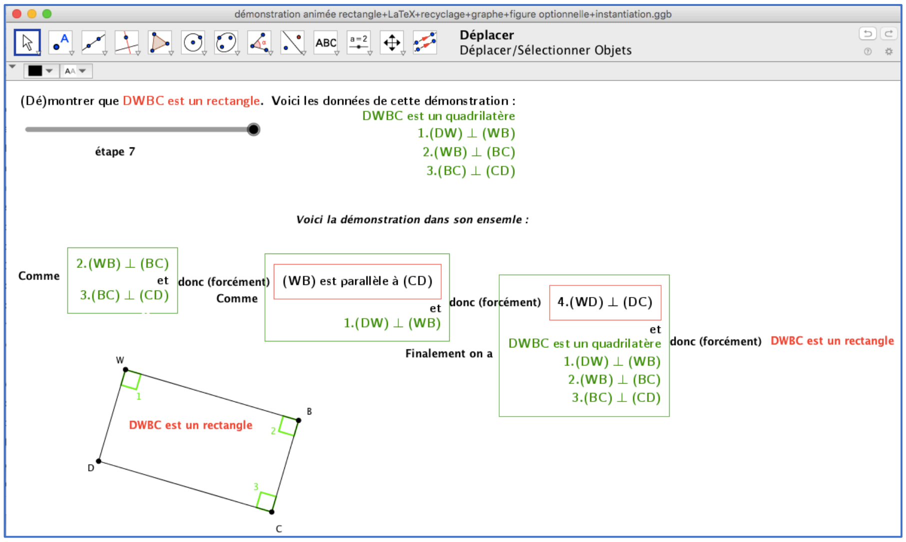



**Figure. 2** Un fichier interactif qui illustre l'organisation d'une démonstration

Nous proposons ici, dans le CD fourni avec le livre, un fichier GeoGebra pour des « illustrations dynamiques » du cercle trigonométrique. Il suffit d'y déplacer le point *M* sur le cercle trigonométrique pour voir varier à la fois l'angle orienté au centre du cercle, les valeurs du cosinus, du sinus et de la tangente, y compris pour des angles obtus, rentrants (de plus de 180°), négatifs, etc.

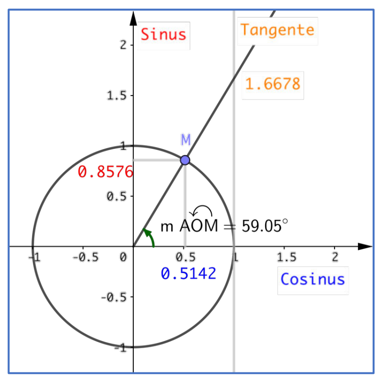



**Figure. 3** Une illustration dynamique en trigonométrie

Ces illustrations peuvent aussi prendre la forme de « pseudo-vidéos », dans laquelle les étapes d'une construction sont animées, avec accès aux fonctionnalités d'une vidéo comme *avance* et *retour* (accélérés ou non), points clés, arrêt sur image, etc. Mais contrairement à une simple vidéo, l'utilisateur peut déplacer des points, déformer certains éléments de la construction et observer de nouveau l'animation à partir de configurations initiales distinctes. On peut voir l'exemple d'une telle animation, sur la construction de l'image d'un triangle par rotation, dans les compléments interactifs fournis par la collection *Point de vue Mathématique* des Éditions Grand-Duc (Guay et al., 2013).

Il est également possible d'illustrer des situations variationnelles en contexte de résolution de problèmes, de remplacer des dispositifs expérimentaux (en physique par exemple) par des simulations moins coûteuses et complexes à gérer. Nous proposons en guise d'exemple le fichier d'une simulation du célèbre problème du marquis de l'Hospital, où $AC$ est une tige rigide qui pivote autour de $A$, $BG$ une corde de longueur fixe qui passe dans une poulie de centre $C$. On veut déterminer la position du point le plus bas que peut atteindre un poids attaché en $G$. Le fichier permet de faire varier le rayon de la poulie, et d'autres paramètres. L'élève doit alors choisir les contraintes physiques à garder ou pas, déterminer les bornes du domaine de telle ou telle variable, etc.

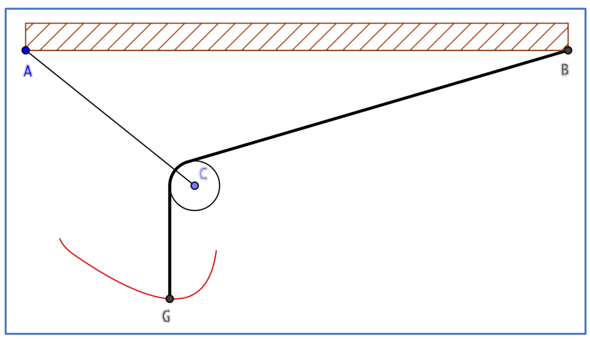



**Figure. 4** Le problème du marquis de l'Hospital

Les applications mentionnées précédemment ont toutes en commun de mettre l'élève en position de spectateur plus ou moins passif selon les cas. Mais on peut aussi utiliser les LGD comme outils pour trouver et identifier des résultats, que ceux-ci soient relativement bien ciblés au préalable ou découverts au gré d'une exploration plus ouverte. La distinction, poreuse, d'avec la catégorie précédente repose entre autres sur le type d'interactions qu'ont les élèves avec les fichiers, avec des interactions moins guidées dans la présente catégorie. Y a-t-il des directives précises sur les manipulations que l'élève doit faire avec le logiciel ? Le logiciel affiche-t-il des messages de rétroactions lors de ces manipulations ? Prévoit-on de donner aux élèves des stratégies, voire des pistes de démarches en cas de blocage ? Quand le problème n'est pas strictement géométrique comme dans le cas des simulations (cf. l'exemple précédent), la distinction pourrait reposer sur le critère « la modélisation est-elle à la charge de l'élève ou non ? » La présente catégorie cible entre autres cet aspect de l'activité mathématique sur laquelle les récents programmes ministériels insistent, et qui consiste à *émettre et formuler des conjectures* (cf. par exemple Bergé et Duarte, 2016). La séquence que nous proposons vise plus spécifiquement cet usage, avec GeoGebra. Nous discuterons des rapports que de telles activités peuvent ou doivent entretenir avec la démonstration.

## 2. Quelques considérations théoriques

On peut penser (avec, par exemple, Laborde et Capponi, 1994) que l'idée fondatrice derrière la conception des logiciels de géométrie dynamique est d'amener l'élève à distinguer la *figure géométrique* du simple *dessin*, grâce et surtout à la fonction 'dragging', ou 'déplacement'. Il s'agit pour l'élève de comprendre que la représentation graphique qu'il a sous les yeux ou qu'il doit tracer modélise un représentant idéal (le « trait de crayon » n'a pas d'épaisseur...) et générique (universel, sans particularité) concernant toutes les configurations possibles répondant aux mêmes données, aux mêmes 'hypothèses'. Cela signifie en particulier que cette représentation graphique ne suffit pas à elle seule à déterminer les propriétés et caractéristiques qui doivent être considérées : c'est l'énoncé de la tâche qui permet de décider de ce qui est pertinent ou non ; comme ne le sont généralement pas la position sur la feuille ou à l'écran, la taille, etc. La figure ne se réduit pas à sa représentation visuelle, elle intègre (implicitement ou explicitement) des éléments de l'énoncé et de la théorie développée jusqu'alors : définitions, propriétés, etc. Bref, l'appréhension de l'élève passe de perceptive à théorique : il ne travaille plus avec des *dessins* mais avec des *figures* [1]. Or, quand l'élève produit une représentation avec un LGD, la fonction déplacement permet :

- d'invalider les parties de la construction qui reposent sur une reproduction (d'une figure déjà existante ou d'un modèle mental de l'élève) qui ne serait basée que sur la perception (visuelle), qui n'aurait pas été obtenue à partir des primitives géométriques du logiciel telles « Parallèle », « Perpendiculaire », « Point sur objet », « Intersection », etc. ;

[1] On peut également se référer à la notion de *Figural concept*, de Fischbein (1993). Du point de vue de l'analyse didactique, il ne s'agit pas de statuer que telle ou telle représentation *est un dessin* ou *est une figure*, mais bien de postuler que telle représentation sera (ou risque d'être) appréhendée (par tel ou tel élève) comme un dessin, ou comme une figure.

- d'engendrer « en temps réel » une infinité de représentations de la même figure, de donner accès à toutes les représentations possibles (à tous les « dessins » possibles) de la ***même*** figure.

L'exemple suivant est repris de Laborde et Capponi (1994, p. 174) : un parallélogramme, obtenu par le tracé « à l'œil » de 4 segments à l'écran, ne « résistera » pas (ne restera pas un parallélogramme) au déplacement du sommet $A$ …

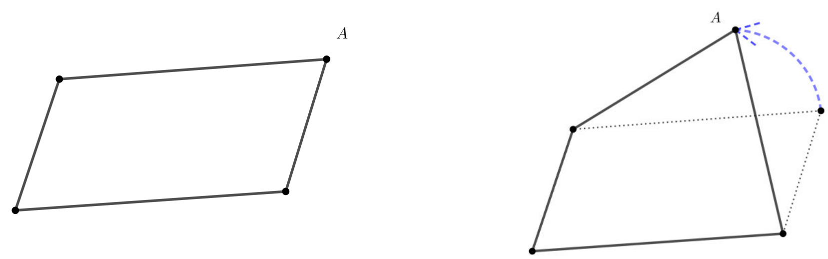



**Figure. 5** Un parallélogramme tracé « à l'œil » avec GeoGebra, puis déformé

… à l'inverse de celui qui aura été tracé à l'aide des primitives géométriques, en faisant intervenir les propriétés structurales du parallélogramme :

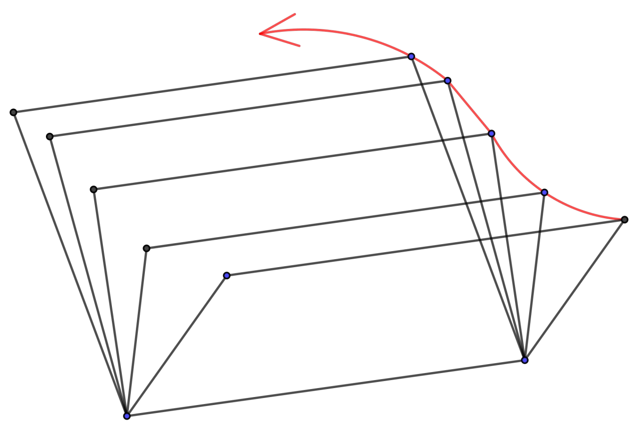


**Figure. 6** Un parallélogramme qui « résiste à la déformation »

Les bénéfices du travail avec un LGD sont multiples : il donne virtuellement accès à l'ensemble de tous les représentants, il permet une appréhension des propriétés structurales de la figure, il favorise un travail sur l'inclusion des classes (un rectangle est un parallélogramme puisque les déformations possibles permettent d'obtenir les rectangles), il procure une rétroaction indépendante de l'enseignant, 'extérieure' à l'élève et donc plus susceptible de le faire évoluer (Laborde et Capponi, pp. 175-176).

Cela suppose que des activités GeoGebra bien conçues doivent chaque fois que c'est possible demander des constructions « qui résistent à la déformation », avec des consignes du style « Attention, ton quadrilatère doit rester un parallélogramme quand tu déplaces les sommets ». L'enseignant doit par ailleurs rester conscient que ce travail n'est pas celui de la géométrie classique — disons, à la règle et au compas — avec des facilités en plus, mais qu'il s'agit bien d'une *nouvelle géométrie* ; voir par exemple Geeraerts et al. (2014). Nous y reviendrons…

## 3. GeoGebra pour explorer : un premier exemple

Les LGD pour produire, illustrer, construire, donc ; mais aussi pour explorer. Il peut s'agir d'un résultat ciblé et pointu, qu'on fait découvrir aux élèves. Voyons quels problèmes et questions peuvent alors se poser. Examinons la tâche suivante, proposée par Coutat et Richard (2011, p. 108). On peut la considérer comme relevant du 5e usage décrit en §I, encore que l'exploration soit fortement guidée et le résultat à découvrir relativement évident au regard de la perception visuo-géométrique d'un élève de 11-12 ans ; on pourrait donc considérer que cette activité relève plutôt du 4e usage, ce qui montre que ces catégories ne sont bien sûr pas nettement délimitées.

| | |
|---|---|
| Construction<br>Déplacement | • Construis un quadrilatère ABCD.<br>• M est le milieu de [AC], O celui de [BD].<br>• Déplace le point B pour que pour que les points O et M soient confondus. |
| Observation | Que devient ABCD?<br><br>------------------------------------------------------------------------------------ |
| Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :<br><br>------------------------------------------------------------------------------------------------------------ | |

**Figure. 7** Tableau reproduit de Coutat et Richard (2011, p. 108)

Dans leur analyse, les auteurs précisent que « … suite… au déplacement du point B pour confondre raisonnablement les milieux, l'élève est en mesure de constater que le quadrilatère est un parallélogramme parce que celui-ci possèderait un centre de symétrie » (ibid., p. 108). C'est *Cabri-Géomètre* qui est utilisé ici. Les auteurs expliquent qu'ils font du milieu de [AC] le segment [MM], pour pouvoir utiliser *l'oracle* de Cabri « *Le point O est sur l'objet* », oracle qui n'est pas utilisable quand l'objet est réduit à un point. Plusieurs questions méritent ici d'être soulevées. D'abord une question pratique : comment obtenir le même résultat avec GeoGebra, où les relations sont, comme le précise le logiciel, déterminées par calcul sur les coordonnées, avec un degré de précision auquel l'usager n'a pas accès ?

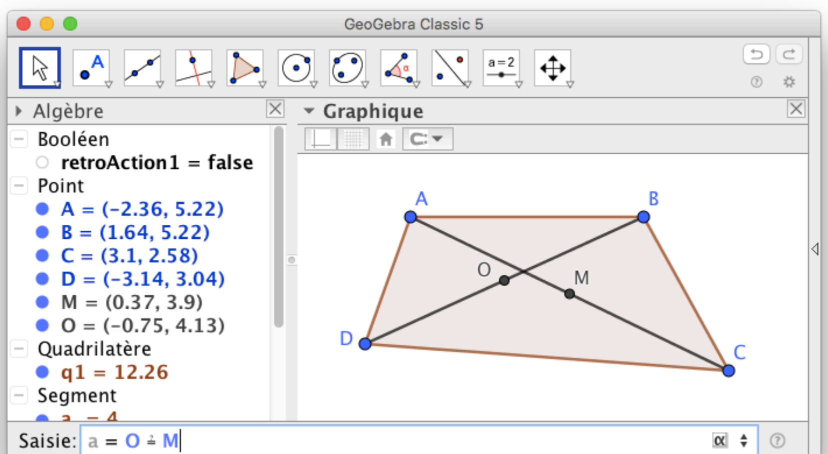



**Figure. 8** Comment adapter l'oracle, de Cabri-Géomètre à GeoGebra ?

Une question plus strictement mathématique est celle-ci : laquelle des deux implications est travaillée ici, « centre de symétrie ⇒ parallélogramme » ou « parallélogramme ⇒ centre de symétrie » ? À moins que ce ne soit l'équivalence ? La phrase « … [Le] quadrilatère est un parallélogramme parce que celui-ci possèderait un centre de symétrie » (ibid., p. 108) est ambiguë à cet égard. Pour répondre, il faudrait savoir quelle définition de 'parallélogramme' a été adoptée et quel statut a la propriété « avoir un centre de symétrie » à l'égard du parallélogramme pour la classe. D'un point de vue plus didactique, ils nous apparaît également important que les élèves adoptent un point de vue « existentiel », et se demandent s'il existe des quadrilatères ayant des diagonales de même milieu mais qui ne soient pas des parallélogrammes, ou bien s'il existe des parallélogrammes dont les diagonales n'ont pas le même milieu.

Même si mathématiquement, ça ne change rien, 'psycho-cognitivement', le fait qu'un sommet soit déplacé, et non un des milieux, n'est pas anodin : en déplaçant le sommet, l'inclinaison (de deux) des côtés est directement changée, alors que le déplacement du centre est indirect. On dira : « Oui mais les sommets sont 'libres', pas les milieux. » On mesure donc bien ici à quel point l'instrumentation imposée par le logiciel influe (subtilement, voire subrepticement) sur la conceptualisation mathématique, et la difficulté qu'il y a à gérer les paramètres et les fonctionnalités qui s'ajoutent dans le passage de la géométrie classique à la géométrie « dynamique ».

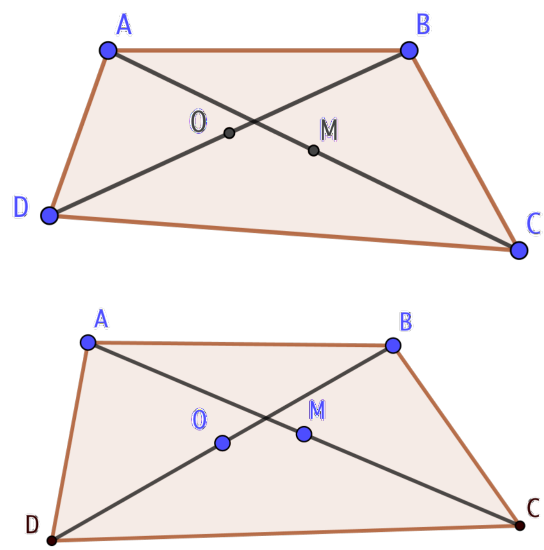
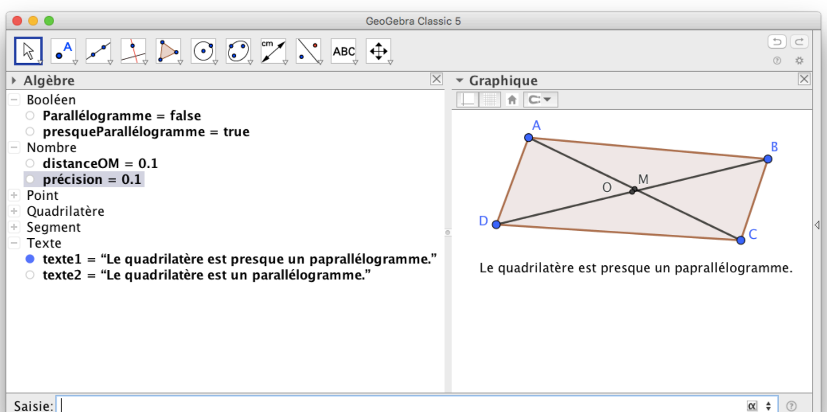



**Figure. 9** Des points O, M, D et C « libres » ou « contraints » selon les cas

Notre position sur ces questions consiste à chercher à *instrumentaliser* GeoGebra, pour ne pas se laisser *instrumenter* par lui. Pour la distinction *instrumentation* versus *instrumentalisation*, voir Rabardel (1995), Kieran et al. (2006) ou Geeraerts et al. (2014). Dans cette dernière référence, d'autres instrumentalisations de GeoGebra (dans d'autres contextes) sont discutées. On peut, par exemple, en « préparant » bien les fichiers de travail GeoGebra, proposer aux élèves de :

- travailler séparément les deux implications. Et pourquoi pas, séparément les deux 'parallélismes' ;
- voir à ce que l'objet géométrique que l'élève déplace en soit un qui corresponde directement à la prémisse ;
- obtenir des oracles à l'aide entre autres de « Condition pour afficher l'objet » (incluant ici des textes), celles-ci étant contrôlées par des variables booléennes ;
- obtenir des manipulations viables, sans contraintes de précision difficiles à atteindre, en faisant de certains points des zones, ou des nœuds de la grille (qui sont aimantés) ;

Il faut en contrepartie rendre l'élève conscient que les parallélismes, les superpositions, les isométries alors obtenues sont approximatives, ce que l'affichage peut souligner par l'emploi de « presque » (avec le sens qu'on lui donne en probabilités) ou de « quasi » ; par exemple « les droites sont quasi-parallèles ». Cependant, grâce à un peu de programmation, il est possible d'aimanter des points sur d'autres points ou sur des lignes ; cela permet d'en certains cas d'éviter d'avoir à utiliser « presque ».



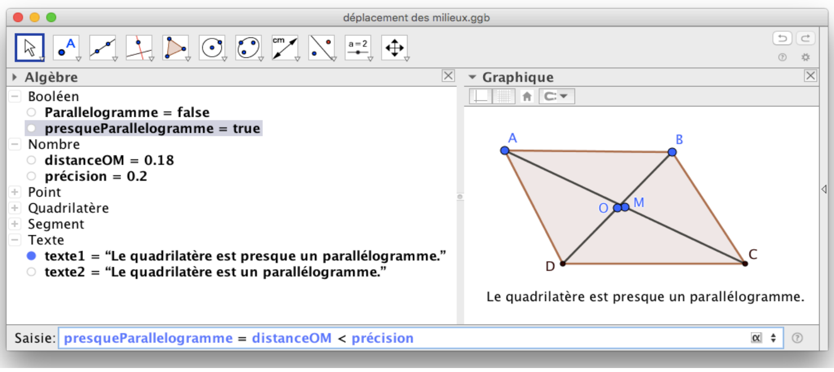



**Figure. 10** Exemples de fichiers de travail à proposer aux élèves

## 4. Geogebra comme outil d'exploration : une sÉquence d'activités

Nos hypothèses de travail, qui à plusieurs égards s'inscrivent dans le cadre du « paradigme du géomètre-physicien » (Tanguay et Geeraerts, 2014, 2012), supposent que :

- l'exploration gagne à ne pas se circonscrire à des résultats isolés, mais doit couvrir un sujet, un thème, en tissant un réseau de résultats qui sont inter-reliés à travers ce thème.
- Cette exploration, qui amène entre autres à énoncer des conjectures, doit en parallèle donner lieu à un travail sur la démonstration, en augmentant progressivement la 'banque' des propositions sur lesquelles on s'appuie pour prouver et que Kuzniak et al. (2016) désignent comme *référentiel théorique* dans les Espaces de travail mathématique (ETM).
- Les élèves doivent donc construire un édifice et en même temps voir se développer une théorie (conformément à l'étymologie grecque de théorie : ❍■ ⁅ ✖ⓘ✔ ↔ procession).
- Aux *îlots déductifs*, auxquels les programmes ministériels font référence, on substitue de plus vastes *réseaux déductifs*.

La séquence que nous donnons en exemple se déroule autour de trois sujets, ou thèmes, développés en cascade : 1. Les quadrilatères qui ont des angles droits ; 2. Les quadrilatères inscriptibles (dans un cercle) ; 3. Les angles au centre d'un cercle et inscrits dans un cercle. Jusqu'où va-t-on, où s'arrête-ton, quels résultats et preuves retient-on ? Cela dépend du niveau, du temps à disposition, de la classe…

### 4.1 Première phase : les quadrilatères qui ont des angles droits

Une première phase, presque d' « échauffement », permet d'amorcer le travail sur la preuve et d'introduire des énoncés qui seront utiles.

- Construisez avec GeoGebra un quadrilatère qui a 3 angles droits. Comme toujours avec GeoGebra, votre quadrilatère doit garder la propriété prescrite (les 3 angles droits) quand il est déformé. Déformez. Que constatez-vous ?
- Construisez avec GeoGebra un quadrilatère non croisé qui a 2 angles consécutifs qui sont droits. Déformez. Quel type de quadrilatères obtenez-vous ?
- Prouvez vos affirmations, en vous appuyant sur les énoncés
  a) Perpendiculaire-1. Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
  b) Parallèle-1. Si deux droites ont une perpendiculaire en commun, alors elles sont parallèles.
- Les deux autres angles du quadrilatère non croisé[1] qui a deux angles droits consécutifs ont quelque chose de particulier. Vérifiez, en déformant avec GeoGebra. Démontrez-le.

On suppose ici que les élèves ont déjà vu les énoncés suivants, à partir desquels plusieurs preuves du résultat qu'on demande de démontrer sont accessibles :

c) 180 degrés-2. La somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle est de 180°.

d) 360 degrés-1. La somme des mesures des angles intérieurs de tout quadrilatère non croisé est de 360°.

---

[1] Cette condition est très importante puisque la propriété n'est pas du tout la même quand le quadrilatère est croisé. En effet, dans ce cas les angles sont isométriques et non supplémentaires.

e) Parallèles-0. Si deux droites $d_1$ et $d_2$, coupées par une transverse t, forment avec elle une paire d'angles correspondants isométriques, alors les deux droites sont parallèles.

f) Angles isométriques-0. Si $d_1$ et $d_2$ ont pour transverse t et si $d_1$ est parallèle à $d_2$, alors les angles correspondants formés par $d_1$, $d_2$ et t sont isométriques.

g) Angles isométriques-2. Si $d_1$ et $d_2$ ont pour transverse t et si $d_1$ est parallèle à $d_2$, alors les angles alternes-internes formés par $d_1$, $d_2$ et $t$ sont isométriques.

– Construisez avec GeoGebra un quadrilatère non croisé qui a 2 angles opposés droits. Ces quadrilatères ont une propriété particulière. Explorez avec GeoGebra et essayez de découvrir laquelle. Si vous ne trouvez pas, passez au point suivant et revenez-y ensuite.

– Avec le fichier GeoGebra fourni, explorez la figure ci-dessous. Énoncez le résultat qu'elle cache. [Voir le fichier GeoGebra Exploration theoreme des 3 segments]

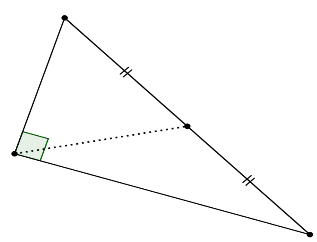


**Figure. 11** La figure qui illustre le Théorème des trois segments

Il s'agit donc d'une de ces expérimentations empiriques dont nous avons parlé (cf. l'item 3 en §1). Selon la classe, l'enseignant peut s'en tenir à une validation qui s'appuie sur l'invariance du résultat lorsque la figure ad hoc est déformée – il donne alors au résultat[1] le statut de postulat (au sens du géomètre-physicien)...

[1] Il va sans dire qu'il y a de nombreuse façons d'énoncer ce résultat. Par exemple :

- « Il existe sur l'hypoténuse un point équidistant des sommets de n'importe quel triangle rectangle. »

h) Postulat des 3 segments. Dans un triangle rectangle, le segment ayant pour extrémités le sommet de l'angle droit et le milieu de l'hypoténuse a pour mesure la moitié de celle de l'hypoténuse.

... ou encore faire travailler la preuve du résultat (pour en faire un théorème), par exemple à partir d'un déductogramme (cf. Tanguay, 2007, 2005 ; ou Tanguay et Geeraerts, 2012).

La preuve peut s'établir à partir de *Perpendiculaire-1* — résultat a) ci-dessus — et des résultats suivants, qui interviennent par ailleurs dans plusieurs autres constructions élémentaires :

i) Le Théorème des milieux. Dans tout triangle, le segment ayant pour extrémités les milieux de deux des côtés est parallèle[1] au 3e côté et sa longueur est exactement la moitié de celle du troisième côté.

j) Point équidistant-1. Si un point est sur la médiatrice de $\overline{\mathrm{AB}}$, alors il est à égales distances des extrémités A et B de ce segment.

k) Médiatrice-1 (la réciproque). Si un point est à égales distances de deux points (distincts) A et B, alors il est sur la médiatrice de $\overline{AB}$.

Avec l'énoncé du postulat / théorème des 3 segments et le travail sur le fichier GeoGebra, les élèves ont ce qu'il faut pour déduire que les « 2-droits-opps », ces quadrilatères qui ont deux angles opposés de 90°, sont inscriptibles dans un cercle : c'est la propriété qu'on cherchait à faire découvrir [voir le fichier GeoGebra Exploration theoreme des 3 segments]. On peut demander ensuite de démontrer que les deux autres angles opposés des 2-droits-opps sont supplémentaires.

[1] Nous avons simplifié l'énoncé pour des raisons de concision. En effet, en toute rigueur, nous devrions parler du parallélisme entre les droites support du segment et du 3e côté.

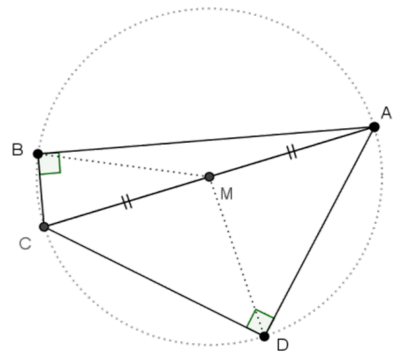



**Figure. 12** Les 2-droits-opps sont inscriptibles

### 4.2 Deuxième phase : vers une généralisation

Nous envisageons à ce stade deux voies possibles, la première étant plus difficile :

A. Poursuivre avec l'étude de l'implication « si angles opposés supplémentaires, alors inscriptible », qui généralise l'implication « si une paire d'angles opposés droits, alors inscriptible ».

B. Aborder tout de suite la réciproque « si inscrit, alors angles opposés supplémentaires », ce qui n'empêche pas d'attaquer par après l'implication « si angles opposés supplémentaires, alors inscriptible », en étant peut-être alors mieux outillé.

La voie B présente l'avantage de s'explorer aisément, de façon autonome pour l'élève, avec GeoGebra. La tâche s'énonce simplement

– Construisez avec GeoGebra un quadrilatère inscrit dans un cercle. Explorez ses propriétés.

et le fichier GeoGebra ne nécessite pas d'aménagement particulier. La propriété à conjecturer est « les angles opposés sont supplémentaires », et elle est d'un accès relativement aisé pour peu que l'élève fasse afficher les mesures d'angles et déforme[1] le quadrilatère inscrit. On peut demander de prouver cette propriété avec la directive suivante, qui met sur la piste d'un raisonnement possible. Pour une démarche plus dirigée et facile, on peut aussi envisager de donner la figure ci-dessous.

[1] Avec l'utilisation d'un LGD, les élèves vont très rapidement faire apparaître des quadrilatères croisés.

– Prouvez cette propriété des quadrilatères inscrits. Reliez pour cela les sommets au centre du cercle. Identifiez les angles (par exemple avec de la couleur). Faites intervenir la somme des mesures des angles intérieurs de tout quadrilatère (non croisé).

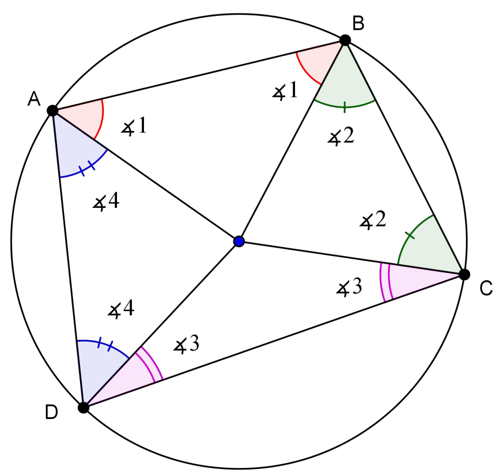



**Figure. 13** Les quadrilatères inscrits dans un cercle

Le raisonnement attendu consiste dans ses grandes lignes à établir l'égalité

$$2\times R1 + 2\times R2 + 2\times R3 + 2\times R4 = 360°$$

puis à constater qu'en chaque paire de sommets opposés, les angles $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ et $\angle 4$ se répartissent comme angles inscrits. C'est alors une bonne occasion de susciter la réflexion des élèves sur ce qu'est une preuve, en insistant sur l'exigence de généralité : le raisonnement proposé n'est pas parfaitement général puisqu'il ne s'applique plus quand le centre du cercle n'est pas à l'intérieur du quadrilatère.

L'enseignant annonce alors une nouvelle activité d'exploration avec GeoGebra, qui visera un théorème à partir duquel les élèves pourront prouver en toute généralité l'implication « quadrilatère inscrit $\Rightarrow$ angles opposés supplémentaires ». Il s'agit du résultat classique

l) Théorème de l'angle inscrit. Un angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Il faut bien clarifier ici ce qu'on identifie comme « arc intercepté par l'angle », entre autres parce que quand l'angle inscrit est obtus, l'angle au centre à considérer est l'angle rentrant, ce que les élèves ne font pas toujours spontanément. Il faut peut-être pour cela revenir à la définition d'angle, comme région (non bornée) du plan ; cf. par ex. Tanguay et Venant (2016) ou Tanguay (2012).

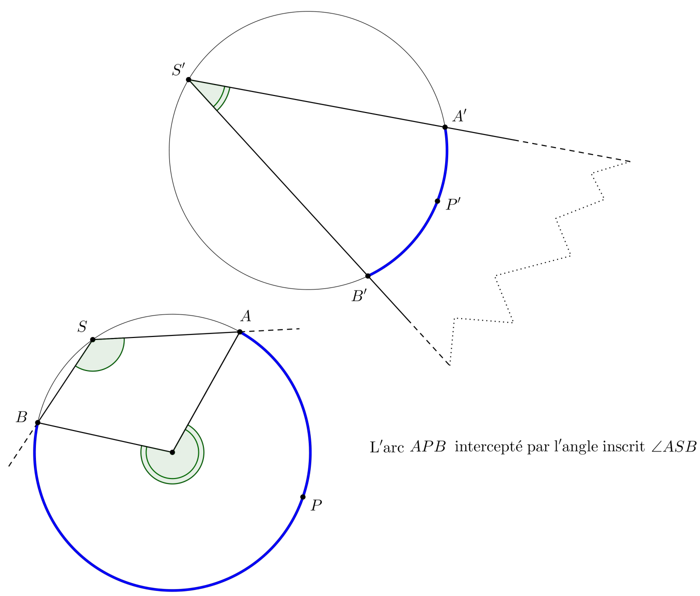



**Figure. 14** L'arc intercepté par un angle inscrit dans un cercle

On peut travailler la preuve de ce résultat, qui est relativement accessible. Il s'agit de traiter d'abord le cas particulier où l'un des côtés de l'angle inscrit porte un diamètre. On se ramène ensuite à ce cas en raisonnant additivement ou soustractivement, selon que le centre du cercle est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'angle inscrit.

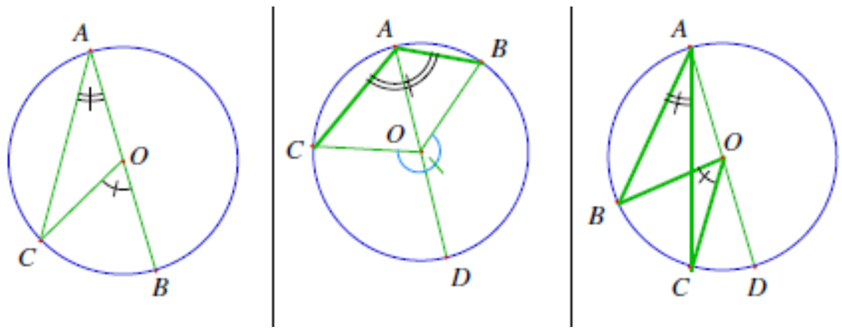



**Figure. 15** Théorème de l'angle inscrit : une preuve par cas

Du Théorème de l'angle inscrit découlent plusieurs corollaires, qu'on peut traiter avec la classe :

m) *Isométrie des angles inscrits*. Deux angles inscrits qui interceptent le même arc, ou des arcs de même longueur, ont même mesure. [Les angles au centre sont les mêmes, ou ont même mesure.]

n) *Angle inscrit interceptant un demi-cercle*. Un angle inscrit qui intercepte un demi-cercle est droit[1]. [L'angle au centre correspondant est plat].

o) *Quadrilatère inscrit*. Un quadrilatère inscrit dans un cercle a (forcément) ses angles opposés supplémentaires. [Les mesures des angles au centre qui leur correspondent totalisent 360°]

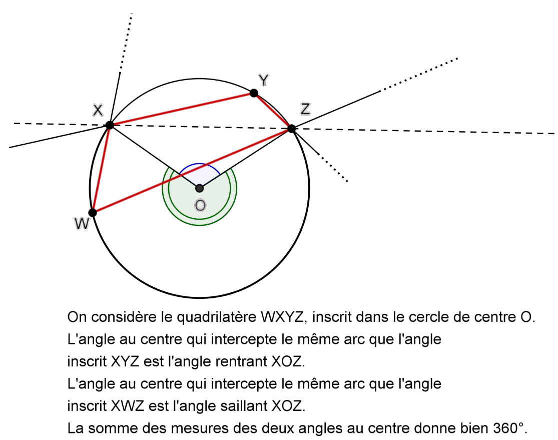



**Figure. 16** La somme des angles opposés dans un quadrilatère inscrit

[1] On peut alors faire le lien avec l'inscriptibilité des 2-droits-opps.

Finalement, on peut aborder la preuve de la réciproque :

p) si un quadrilatère a ses angles opposés supplémentaires, alors il est inscriptible dans un cercle.

Il s'agit d'une preuve par l'absurde plus difficile, typique des raisonnements qu'on met en œuvre en géométrie, notamment par le fait qu'elle fait appel à la réciproque de ce que l'on cherche à prouver, à savoir l'implication « quadrilatère inscrit ⇒ angles opposés supplémentaires », déjà démontrée. La preuve la plus simple (à notre connaissance) repose sur *Parallèles-0*, le résultat e) ci-dessus. Rappelons-le : « si deux droites $d_1$ et $d_2$, coupées par une transverse $t$, forment avec elle une paire d'angles correspondants isométriques, alors les deux droites sont parallèles. ».

> Grandes lignes de la preuve. Supposons que $ABCD$ ait ses angles opposés supplémentaires. On trace le cercle [redacted] qui passe par $A$, $B$ et $C$. Si $D$ est à l'intérieur du disque de frontière [redacted], le prolongement de $\overline{AD}$ coupe [redacted] en $X$, et $ABCX$ est inscrit dans [redacted] Mais alors $\angle ADC$ et $\angle AXC$ sont isométriques, ayant $\angle B$ comme supplémentaire commun. Comme ces angles sont correspondants pour la transverse $AX$, les droites $DC$ et $XC$ devraient être parallèles : contradiction ! Le cas où $X$ est à l'extérieur du disque de frontière [redacted] est similaire.

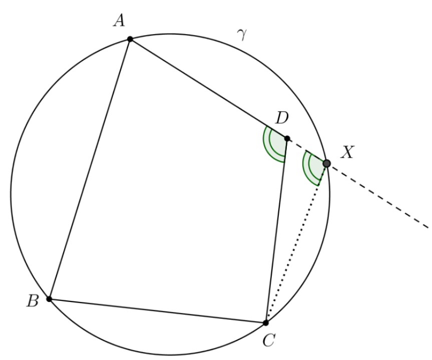



**Figure . 17** Le quadrilatère ABCX est inscrit dans [redacted]

## 5. Conclusions

Explorer avec GeoGebra, oui, mais sans perdre de vue :

- qu'il faut travailler la preuve chaque fois que c'est possible. Émettre des conjectures sans chercher à les prouver ensuite est plutôt pauvre mathématiquement;
- qu'il est dans la nature des preuves de s'appuyer les unes sur les autres (Rouche, 1989, p. 9), un travail riche suppose donc qu'on ne se contente pas d'étudier des résultats isolés ;
- qu'un tel travail suppose que le regard qu'on porte soit théorique, travailler la preuve ne peut se faire sans une édification théorique et systématique de la géométrie.

Mais peut-être que pour certains, il ira de soi que l'on puisse décider de faire de la géométrie sans jamais toucher à la preuve !

## Références

Bergé, A. et Duarte, B. (2016). Déployer un raisonnement mathématique au secondaire : problèmes ouverts, formulation de conjectures et gestion de classe. *Bulletin AMQ*, *56* (4), 44-66.

Coutat, S. et Richard, P.R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés mathématiques. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 97-126.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concept. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Geeraerts, L., Venant, F. et Tanguay, D. (2014). Subterranean Structures of Technological tools and Teaching Issues in Geometry. *Proceedings of EDULEARN 14 Conference*, 257-264. Barcelone, Espagne.

Geeraerts, L. et Tanguay, D. (2012). Geogebra comme outil d'exploration, d'expérimentation et de représentation des démonstrations, pour construire une théorie avec les élèves. *Envol*. Première partie au n°160, 25-31, deuxième partie au n°161, 45-48.

Guay, S., Laplante, S., Van Moorhem, A., Dionne, F., Dussault, J., Gagnon, D., Hould, P., Latulippe, P., Le Nabec, M. et Roy, M. (2013). *Point de vue Mathématique*, Séquence Sciences Naturelles, 5e secondaire, volumes A et B. Éditions Grand Duc, Laval, Québec.

Kieran, C. et Drijvers, P. (1ers auteurs), avec A. Boileau, F. Hitt, D. Tanguay, L. Saldanha et J. Guzmán. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*, 205-263.

Kuzniak, A., Tanguay, D. et Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in Schooling: An introduction. In A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), *Mathematical Working Spaces in Schooling*, *ZDM Mathematics Education*, *48* (6), 721-737.

Laborde, C. et Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 14, n°12, 165-210.

Miranda, V.C., Pluvinage, F. & Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. In A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), *Mathematical Working Spaces in Schooling*, *ZDM Mathematics Education*, *48* (6), 809-826.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Rouche, N. (1989). *Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?* In *La démonstration mathématique dans l'histoire*, colloque Inter-Irem *Épistémologie et histoire des mathématiques*, 8-38. Besançon, France.

Tanguay, D. et Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. In A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), *Mathematical Working Spaces in Schooling, ZDM Mathematics Education,* 48(6), 875-894.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2014). Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : comment intégrer le travail avec les LGD ? *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (RELIME), vol. 17 (4-II), 287-302.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, *88*, 5-24.

Tanguay, D. (2012). La notion d'angle au début du secondaire. *Envol.* Première partie dans le n°158, pp. 33-37. Deuxième partie dans le n°159, pp. 31-35.