UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

TÍTULO

La integral como función de acumulación con un enfoque infinitesimal

Documento predoctoral que presenta

Guadalupe Candelario Félix Sandoval

Directora(s) o director(es) de Tesis:

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez

Hermosillo, Sonora Noviembre, 2023

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (Conahcyt) por el apoyo que ha brindado para mi formación, con la beca de número 933474

Contenido

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de la integral como función de acumulación con un enfoque infinitesimal dirigida a estudiantes del curso Cálculo Diferencial e Integral II del área de ingeniería de la Universidad de Sonora, cuyo propósito es promover la construcción del concepto de la integral como función de acumulación a partir de un diseño de secuencias didácticas fundamentadas en una serie de principios y criterios descritos en este mismo documento. Los estudiantes deberán resolver situaciones problemas de cuantificación de cambios en progreso con base en modelos matemáticos de fenómenos físicos. El documento presentado está divido por secciones, las cuales serán descritas a continuación.

En el primer apartado tiene que ver con los antecedentes del proyecto, y consiste en la descripción de una revisión bibliográfica de la disciplina con relación a las diferentes dificultades documentadas en el estudio del cálculo, éstas van desde las más generales, hasta las más particulares. Por ejemplo, se describen las dificultades generales de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, las dificultades epistemológicas del concepto de límite, las dificultades a partir del currículo y por último las dificultades en el aprendizaje de la integral.

El siguiente apartado se conforma de dos partes, en una primera parte se describen los diversos trabajos realizados por distintos autores para abordar la enseñanza del cálculo y de la integral utilizando el enfoque de límite, ya sea como propuestas didácticas, diseños de actividades e implementación de recursos tecnológicos para favorecer la construcción de los conocimientos. Y una segunda parte compuesta por diversos trabajos para abordar la enseñanza del cálculo y de la integral utilizando un enfoque infinitesimal.

El tercer apartado del documento consta del planteamiento de la problemática en la cual se centra nuestra propuesta, así como elementos de justificación. Uno de estos tiene que ver con la caracterización de la integral como acumulación, dicha caracterización está compuesta por una estrategia para tratar algo que siempre cambia por algo que no cambia, una estrategia para modelar una razón de cambio variable mediante una razón de cambio por intervalos y una estrategia para resolver de manera aproximada problemas de acumulación en los que la razón de cambio no es constante. Y, para culminar, se declaran el objetivo general y los objetivos específicos de nuestro proyecto.

En el cuarto apartado se describe la propuesta didáctica y sus características, en donde se describen todas las características que le componen, por ejemplo, las generales, las de la propuesta, las del diseño, las del tema matemático de interés, las del lenguaje a desarrollar en el estudio variacional del cálculo. Del mismo modo se hace una caracterización de los diferentes elementos que componen los grupos de actividades a diseñar, por ejemplo, las actividades de acumulación con base en una razón de cambio constante, las de acumulación con base en una razón de cambio constante por intervalos y las de acumulación con base en una razón de cambio variable, éstas últimas nos restringimos a describir solamente para los casos en los que el modelo matemático de la razón de cambio es una ecuación lineal.

El quinto apartado está la descripción de los aspectos teóricos en los que se menciona el marco teórico que seleccionamos para el diseño y la valoración, tanto de la comprensión por parte de los estudiantes de la integral como función de acumulación y los planteamientos didácticos de nuestra propuesta. El marco teórico que seleccionamos es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, y las nociones teóricas a considerar son los sistemas de prácticas, en particular el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido, la configuración de objetos y procesos, la trayectoria epistémica y los componentes de la idoneidad didáctica.

El séptimo apartado tiene que ver con los aspectos metodológicos, éstos son descritos en fases que son compuestas por acciones realizadas o a realizar, según sea el caso. Son 4 fases las que actualmente componen nuestro proyecto. En las primeras dos se describen todas las acciones realizadas sobre la revisión documental de las diferentes dificultades, las diferentes propuestas didácticas desarrolladas por distintos autores que abordan el estudio del cálculo desde distintos enfoques, el planteamiento de la problemática, la caracterización de la integral como acumulación, la declaración de los objetivos y las características del diseño didáctico. Y las siguientes dos fases corresponden a la descripción de las acciones metodológicas para la implementación del diseño y la valoración, tanto de la comprensión de la integral como acumulación de los estudiantes como del diseño didáctico. Estas acciones son próximas a realizar.

Y, por último, se destina un apartado para mostrar un cronograma de las acciones próximas a realizar para concreción del proyecto de tesis.

2 ANTECEDENTES

Es cotidiano escuchar en los estudiantes de diferentes niveles educativos en donde se imparte la materia de cálculo, que los contenidos de los cursos son complicados. Se ha documentado en diversos trabajos que los estudiantes atraviesan por diferentes complicaciones cuando están conociendo y desarrollando las ideas del cálculo, tanto para el cálculo diferencial, como para el cálculo integral. En este apartado se desglosan diferentes tipos de dificultades que se han reportado en la literatura, con el fin de establecer un panorama amplio y general de las mismas.

2.1 Dificultades generales de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo

Hay diversas investigaciones que reportan las dificultades en la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, en este apartado mencionaremos algunas de las que se han reportado específicamente en la enseñanza del cálculo. Uno de los problemas más reportados en la literatura es la descontextualización de los contenidos con situaciones de la vida real. Para los estudiantes, la relación que existe entre los temas o contenidos matemáticos y la vida diaria o cotidiana es muy distinta. Generalmente desconocen su utilidad, consecuencia de esto son las frecuentes preguntas: "¿para qué me sirve todo esto que me están enseñando?", "¿por qué me están enseñando esto y no otra cosa?". En Cantoral (2001) se mencionan factores importantes sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, rescatando la poca posibilidad de los estudiantes de poder percibir los vínculos entre los procedimientos matemáticos y las aplicaciones de la vida cotidiana.

La enseñanza del cálculo puede tornarse bastante complicada si la manera en la que se aborda se restringe solamente a resolver problemas de manera mecanizada o algorítimica, ignorando contextos, y priorizando la aplicación de ciertas fórmulas. Si bien es cierto, es importante que los estudiantes tengan noción de calcular tanto derivadas como integrales, dichas acciones proporcionan un bajo entendimiento de los conceptos y métodos importantes de la derivación e integración. Por lo tanto, el estudiante cree que aprender cálculo se resume a saber resolver ecuaciones que, de principio a fin, no le dicen nada.

En particular, el cálculo en ingenierías debe tener un enfoque distinto al que se promueve, siendo así un enfoque práctico, donde los conocimientos sean utilizables para la resolución de problemas que los estudiantes enfrentarán en su labor profesional. Desde la perspectiva de García (2013) se expresa lo siguiente:

> El aprendizaje del cálculo para Ingeniería debería abordarse partiendo de la imperativa necesidad del desarrollo de profesionales en un mundo donde cada vez más escasean los recursos naturales, lo que demanda imaginación, creatividad y competencia para el mejor aprovechamiento de los que aún quedan, situación que, en gran medida, les corresponderá a los ingenieros resolver (p.2).

Es común que los métodos de enseñanza tradicionales en educación superior se restrinjan a prácticas mecanizadas o algorítmicas. En Selden, Mason y Selden, (1994) se realizó el seguimiento de una prueba que los mismos autores propusieron para validar los procedimientos y estrategias de solución de problemas no rutinarios, en una segunda prueba tomaron estudiantes de ingeniería de cursos en donde se implementa una enseñanza tradicional; después de hacer una caracterización de sus diferentes procedimientos y estrategias notaron que preferían utilizar métodos aritméticos y algebraicos, ignorando los métodos gráficos, debido a que les parecía complicada una interpretación correcta, y los métodos haciendo uso del cálculo. Notaron también que había debilidades conceptuales. Del mismo modo, los autores destacan que “nuestros resultados sugieren la utilidad de desarrollar técnicas de enseñanza que mejoren la capacidad de los estudiantes para resolver problemas no rutinarios”. Por último, externan su inquietud en cambiar las reformas del cálculo priorizando, no solamente la tasa de éxito en los estudiantes, sino en fomentar una mejora en la capacidad para aplicar el cálculo de una manera creativa, por lo que proponen una restructuración en la enseñanza de esta disciplina.

Debido a que existe esta descontextualización en las clases de cálculo, el estudiante requiere hacer un esfuerzo mayor al intentar aprender los contenidos de las clases, y a su vez, ingeniárselas para poder enlazarlas con alguna aplicación que requiera el campo de estudio.

2.2 Dificultades epistemológicas del concepto de límite

En este apartado desglosaremos, del mismo modo que en apartados anteriores, dificultades que presentan los estudiantes al momento de abordar las ideas del cálculo. En este caso, las dificultades epistemológicas que se generan al utilizar el enfoque de límite.

Para conceptualizar una dificultad epistemológica tomaremos la versión de Artigue (1995, p. 112) donde lo expresa como obstáculo epistemológico:

> El concepto de obstáculo epistemológico no se refiere a las dificultades desorganizadas o derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. Este quiere tener en cuenta el hecho de que el conocimiento científico no es el resultado de un proceso continuo, sino que necesita de algunos momentos de ruptura con los conocimientos anteriores.

A continuación, se muestra una serie de obstáculos epistemológicos con relación a la conceptualización del concepto límite (Artigue et al., 1995):

- El sentido que evoca el término límite, es decir que hace pensar al alumno como una barrera intraspasable y no alcanzable. Con estas características se puede concluir que de ninguna forma el concepto de límite puede catalogarse como un concepto intuitivo.

- En el sentido algebraico de algo finito, así como el principio de continuidad que transfiere las propiedades comunes de los elementos. No distinguir la diferencia que hay entre operación normal algebraica, con la de la noción del proceso infinito.
- En el sentido geométrico, el concepto de límite pierde claridad por la forma en que el proceso se lleva a cabo.
- En la formulación de preguntas que podrían evocar al concepto límite tiene posibilidades de tergiversar conceptos, incluso contrarios, como las sucesiones dinámicas y un número finito.
- Mencionar que el concepto de límite es una proximidad o un área vecina quebranta solidez en el concepto y a su vez genera dificultades por el mal manejo del criterio (Artigue et al., 1995)

Por otra parte, Cornu (1981) señala las percepciones de los estudiantes sobre las ideas que promueve la enseñanza tradicional utilizando la noción de límite. Él, al igual que Artigue, comparte la idea de la trasposición de la enseñanza en un sentido geométrico, donde se entiende a un límite como algo que no se alcanza, y en un sentido verbal, donde no pueden conectar una idea intuitiva con la frase "tiende hacia", debido a que no forma parte de su lenguaje natural. También es importante considerar que, debido a estas dificultades, el cambio de representaciones suele ser aún más complicado de lo que ya es, debido a que ni siquiera tienen claro qué están representando.

En el trabajo de Vrancken (2006) se diseñó una secuencia de actividades con el objetivo de detectar dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones, para después evaluar el grado de comprensión en los estudiantes de carreras no matemáticas. Las dificultades presentadas en ese trabajo son las siguientes:

- Dificultades relacionadas con el concepto de función: dificultades para representar gráficas que sean funciones, dificultades relacionadas con el concepto de dominio de una función, dificultades para distinguir entre variable independiente y dependiente.
- Dificultades relacionadas con el concepto de límite: dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, dificultades para reconocer e interpretar límites laterales, dificultades para la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar, dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Dificultades para pasar de un sistema de representación a otro: dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráficas o el proceso contrario (Vrancken, 2006, p. 17-18).

Del mismo modo, en el trabajo desarrollado por Tall (1992) se enlistan diferentes dificultades en el aprendizaje del cálculo bajo el enfoque de límite y los procesos infinitos:

- Dificultades incorporadas en el idioma; términos como "limitar", "tiende a", "se acerca", "tan pequeño como queramos" tienen poderosos significados coloquiales que entran en conflicto con los conceptos formales,

- El proceso límite no se realiza mediante simple aritmética o álgebra, surgen infinitos conceptos y todo queda "envuelto en misterio",
- El proceso de "una variable que se vuelve arbitrariamente pequeña" se interpreta a menudo como una "cantidad variable arbitrariamente pequeña", sugiriendo implícitamente conceptos infinitesimales incluso cuando no se enseñan explícitamente,
- Asimismo, la idea de que "n se vuelve arbitrariamente grande" sugiere implícitamente concepciones de números infinitos.
- Los estudiantes a menudo tienen dificultades sobre si realmente se puede alcanzar el límite,
- Existe confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito, en la comprensión de "lo que sucede en el infinito" (p.2).

Así pues, otros autores han mostrado las dificultades relacionadas con la enseñanza de la integral a partir del enfoque de límite; por ejemplo, Wagner (2017) describe algunos de los obstáculos epistemológicos que surgen a partir del tratamiento de la integral bajo el enfoque de límite como la confusión en la simbología de las sumas de Riemann por la interpretación que le dan los estudiantes, y la poca conexión que notan al momento de usar el Teorema fundamental del cálculo para encontrar el valor de una integral definida.

Estas son una serie de dificultades que emergen con el tratamiento de las ideas del concepto de límite y que, al momento de estudiar cálculo, a los estudiantes les cuesta construir significados sólidos de la materia, interpretar símbolos, entablar relaciones entre magnitudes, etc.

2.3 Dificultades a partir del currículo

Así como existen dificultades a partir de las formas en las que se aborda la enseñanza del cálculo, los planteamientos curriculares, muchas veces, colaboran con el seguimiento de estas dificultades al promover enfoques que, previamente, hemos descrito que generan dificultades.

En este apartado mostraremos solamente los contenidos promovidos y los objetivos del programa de materia de los cursos de cálculo integral en las carreras de ingeniería de la Universidad de Sonora, específicamente el de ingeniería civil, con el propósito de hacer explícita la trayectoria de contenidos que promueve la institución en la que aplicaremos nuestra propuesta.

El objetivo general del programa es el de utilizar la Integral de Riemann para modelar problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería; resolver problemas no matemáticos utilizando los conceptos y técnicas del Cálculo Integral y representar funciones como series de potencias.

Los objetivos específicos que consigna el programa son los siguientes:

Definir la Integral definida de Riemann a través de sumas superiores e inferiores.

- Resolver integrales definidas elementales por medio de límites de sumas.
- Expresar a la Integral como función del extremo superior y utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo en el cálculo de integrales indefinidas.
- Resolver integrales indefinidas con los diferentes métodos de integración.
- Modelar y resolver problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería por medio de la integral definida.
- Modelar y resolver problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería por medio de la integral indefinida.
- Encontrar el valor de series geométricas, telescópicas y aplicará los criterios de convergencia para series.
- Representar funciones por medio de series de potencias y resolver ecuaciones diferenciales elementales.
- Por otra parte, los contenidos del programa son los siguientes:
- La integral de Riemann: Definición por medio de sumas de Riemann, motivada con problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería, la Integral Indefinida.
- El teorema fundamental de cálculo: La Integral como función del extremo superior, relación entre áreas y tangentes (integral y derivada)
- Métodos de integración: Cambio de variable, integración por partes, sustitución trigonométrica, fracciones parciales, integración de funciones racionales de senos y cosenos.
- Aplicaciones de la integral: definida y la integral indefinida en la solución de problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería;
- Series: series numéricas; series de potencias y su aplicación en la solución de ciertas Ecuaciones Diferenciales.

Como podemos notar que la institución, en sus planteamientos, fomenta la idea tradicional de enseñar el cálculo, dándole prioridad a las sumas de Riemann y un enfoque prioritariamente geométrico. Siendo este enfoque el que genera tantas dificultades en los estudiantes por la descontextualización entre los contenidos y la práctica, del mismo modo que fomenta el desinterés del estudiante al no tener claro la utilidad de lo que está aprendiendo.

El propósito aunado a que solo se muestren los contenidos y objetivos de los planes y programas de la carrera de ingeniería civil, es mostrar que, si bien el estudiante aprenderá una serie de cosas, según la literatura revisada, no sabrá cómo aplicarlas, ni tendrá muy claro para qué lo está aprendiendo. Por lo que es necesario proponer una alternativa para el currículo del cálculo.

2.4 Dificultades en el aprendizaje de la integral

Si bien se han mencionado diversos aspectos que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, es necesario declarar el objeto central de interés de la tesis. Así pues, dicho objeto de interés tiene que ver con la enseñanza del cálculo integral, más específicamente, la enseñanza de la integral.

En el trabajo de Navarro y colaboradores (2021) se muestra una serie de investigaciones en las que describen y caracterizan los diferentes significados de la integral, del mismo modo que expresan las dificultades que los estudiantes tienen con dichos significados, por ejemplo:

> Thompson y Silverman (2007) presentan la integral definida de Riemann en términos de la idea matemática de función de acumulación $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, y tratan de explicar las dificultades de comprensión y de su uso por los estudiantes teniendo en cuenta sus partes constituyentes. El concepto de acumulación es central a la idea de integración y está en el núcleo de la comprensión de muchas ideas y aplicaciones del Cálculo, pero el significado que adquiere en esta rama de las matemáticas no es simple. Los estudiantes encuentran dificultades para pensar en algo que se acumula cuando no tienen claro los "bits" que se acumulan. Por ejemplo, para comprender la idea de trabajo realizado como algo que se acumula incrementalmente significa que se debe pensar la cantidad total de trabajo en cada momento como la suma de incrementos anteriores, y que cada bit incremental adicional de trabajo está compuesto de una fuerza aplicada a lo largo de una distancia." (Navarro et al., 2021, p. 7).

Las dificultades mostradas en el trabajo tienen que ver, por una parte, con las ambigüedades en los significados de los signos:

> En la definición general de la integral (Figura 5) dicho número se expresa con una notación compleja en el que el lector debe entender que el símbolo dx no tiene significado por sí mismo, y que la expresión $\int_b^a f(x)dx$, debe ser vista como un único símbolo para representar "un número que no depende de x. (p.33).

Definición de una integral definida:
Si f es una función definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$.
Supongamos que $x_0(= a), x_1, x_2, \dots, x_n(= b)$ son los puntos finales de estos subintervalos y supongamos que $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ sean cualquier punto muestral en estos subintervalos, por lo que x_i^* se encuentra en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la integral definida de f de a a b es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

siempre que este límite exista y dé el mismo valor para todas las posibles elecciones de puntos de muestra. Si existe, decimos que f es integrable en $[a, b]$.

Figura 1: Traducción de la Figura 5 (Navarro et al., 2021, p. 28)

Y por otra parte, a causa del significado solamente procedimental de la integral, se les dificulta hacer conexiones con los demás significados:

> Mientras aprenden la integral definida, los estudiantes se encuentran con sumas de Riemann, límites, derivadas, área y muchos otros conceptos. Para comprender bien la integral definida, los alumnos deben ser capaces de establecer conexiones entre todos estos conceptos. La investigación sobre las integrales definidas descubrió que el conocimiento de los estudiantes se limitaba a un conocimiento de tipo

procedimental, pero tenían dificultades para establecer conexiones entre las diferentes representaciones de la integral definida (p. 21).

En el trabajo de Fuster y Gómez (1997) se presentan diferentes dificultades en el aprendizaje de la integral, partiendo de las experiencias de los autores y diferentes investigaciones descritas en el trabajo. Una de las dificultades a resaltar es la identificación, por parte de los estudiantes, de la integral como "primitiva", en la que, para ellos, sólo representa un proceso puramente algebraico en donde la tarea es aplicar diferentes métodos de integración, y a pesar de que lo hacen con cierto dominio, no son capaces de aplicar estas nociones para el cálculo de un área e ignorando el concepto de las sumas de Riemann.

Un par de preguntas que emergen, casi de manera natural, en el estudiante desde niveles como el básico hasta el superior, son las siguientes: "*¿Y esto que me están enseñando para qué me va a servir?*" o *"¿En qué momento voy a utilizar esto que estoy aprendiendo en la vida real?"* Son preguntas que, acompañadas de las diferentes dificultades mostradas anteriormente, pareciera que el estudiante se plantea de forma causal por su interés por aprender matemáticas que cada vez se reduce más.

Por tales motivos, nuestro trabajo promueve una alternativa para la enseñanza de la integral diferente a la enseñanza tradicional. Esta alternativa es bajo el enfoque de las cantidades infinitamente pequeñas o infinitesimales. Bajo este enfoque, el objeto de estudio del Cálculo Diferencial es la razón instantánea de cambio y el del Cálculo Integral la acumulación exacta de una magnitud que varía en función de otra. Bajo estas ideas se presentan algunos trabajos desarrollados para la enseñanza del cálculo integral utilizando los infinitesimales.

3 ESTADO DEL ARTE

En este apartado se muestran propuestas que tratan la enseñanza del cálculo de maneras distintas. Por una parte, se hará una breve descripción de diversos trabajos de la enseñanza del cálculo bajo el enfoque tradicional utilizando la noción de límite. Ésta es la manera tradicional de hacerlo y la cual genera las dificultades previamente mencionadas. Y, por otra parte, se hará lo propio, pero bajo un enfoque infinitesimal utilizando magnitudes variables. Dicho enfoque es el que utilizaremos para desarrollar nuestro trabajo.

3.1 Trabajos con base en la noción de límite

En Pantoja, R., López A., Ortega, M., & Hernández, J. (2014) se aplicó un diseño instruccional para la enseñanza del cálculo sobre temas de límites y continuidad a estudiantes de cuatro instituciones de educación superior. Este diseño contenía diferentes tipos de representaciones como la tabular, la numérica y la gráfica. Como elementos de apoyo se utilizaron recursos tecnológicos como el software WinPlot y videos digitales.

En Trujillo, J. A., Vera, C. L. & Sosa, D. F. (2019) se realizó un diseño de secuencias didácticas sobre el concepto de límite y continuidad a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, comprende diferentes representaciones (numérico, algebraico, gráfico y comunicativo) bajo la teoría de Duval y se implementó como elemento metodológico la ingeniería didáctica para la valoración de su propuesta.

En Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., & Gregorini, M. I. (2007) se hizo un análisis de una secuencia didáctica diseñada tomando en consideración las dificultades documentadas por diversos autores como Cornu, Artigue y Orton. La secuencia didáctica está compuesta por elementos como: aproximaciones, límites laterales, la existencia de límite, la existencia o no de la imagen de la función en el valor hacia el cual tiende la variable, el valor de la función y el valor del límite.

En la tesis doctoral de Araya, D., & Pino-Fan, L. (2022) se realiza una investigación que propone un diseño de tareas para cada uno de los significados parciales del objeto límite de funciones en una variable para un grupo de profesores en formación. El propósito es estudiar los significados personales desarrollados por los participantes y describir los resultados obtenidos mediante la implementación de tareas.

En Galaz, José (2015) Este trabajo presenta una propuesta didáctica basada en el análisis de los programas curriculares chilenos y españoles. La propuesta didáctica involucra temáticas propias de la educación superior, pero está orientada a estudiantes de secundaria, particularmente, la utilización de la sumatoria para acercarse al concepto de integral. Se diseña una serie de actividades donde el estudiante es partícipe de su propio aprendizaje, buscando diversas estrategias de resolución a las problemáticas planteadas. Se muestra el análisis de cada una de las sesiones de trabajo, donde se pueden observar las producciones estudiantiles luego de haberse aplicado la propuesta.

En Martínez, M. (2016) se realizó un estudio de una situación didáctica desarrollada por estudiantes universitarios, utilizando como recurso el software GeoGebra, para introducir la noción de suma de Riemann a partir de la suma de áreas de rectángulos. Se reportó una reducción en las dificultades planteadas por dicho estudio al introducir notaciones gráficas y no sólo numéricas.

Y por último, en Vasquez, I. G. E. (2015) se hace un estudio que tiene que ver con la implementación de una actividad con base en dos proyectos preestablecidos, para dicho estudio utilizan el software de GeoGebra con el objetivo de que los estudiantes construyan y definan las sumas de Riemann como aproximación del área bajo una curva dando como resultado el aprendizaje de partición y suma de Riemann. Se resalta la importancia de utilizar recursos tecnológicos para la manipulación de representaciones gráficas y a su vez, una adquisición de conocimientos significativos en los estudiantes.

El propósito de este apartado es mostrar los trabajos desarrollados con el enfoque de límite para abordar conceptos del cálculo y describir las características de éstos. De igual forma, a continuación, se mostrarán trabajos desarrollados bajo un enfoque distinto, el infinitesimal.

3.2 Trabajos con base en un enfoque infinitesimal

Thompson et al., (2019) es un proyecto que se divide por capítulos, en cada uno de ellos se muestra una serie de actividades. En el apartado 1.1 del primer capítulo tratan a las cantidades muy grandes y muy pequeñas, de tal manera que progresivamente el estudiante vaya *acercándose* a la idea de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes que se aborda en el apartado 1.4. A continuación se muestra un ejemplo de los problemas que se abordan en el proyecto:

> 5. El desierto del Sahara tiene una superficie de aproximadamente $9400400\,\text{km}^2$. Si bien las estimaciones de su profundidad promedio varían, se centran alrededor de $150\,\text{m}$. Un cm^3 tiene aproximadamente 8000 granos de arena.
>
> a. ¿Aproximadamente cuántos granos de arena hay en el desierto del Sahara?
>
> - Exprese su respuesta en millones de granos de arena.
> - Exprese su respuesta en miles de millones de granos de arena.
>
> b. ¿Qué fracción del Sahara está formada por 1 grano de arena?
>
> c. Un camión de carga pequeño puede transportar aproximadamente $20.5\,\text{m}^3$ de arena. Supongamos que una larga fila de camiones fuera a descargar una

carga de arena cada 30 s. ¿Cuántos años se necesitarían para recrear el desierto del Sahara? (Thompson et al., 2019, p. sección 1.1)

Del mismo modo, en el capítulo 4, apartado 4.1 se aborda el concepto de diferencial con la notación propuesta por Leibniz. Por ejemplo:

> 2. Sea c la velocidad de la luz (299.792,458 km/seg), sea D la distancia que ha recorrido una partícula de luz y t represente el tiempo transcurrido, en segundos.
>
> a. Escribe los significados de "dD" y "dt" en palabras. (¡No escribas "de de" o "de te")
>
> b. Tenga en cuenta que "d" y " D " tienen diferentes significados en “dD”, ¿cuáles son sus respectivos significados?
>
> c. ¿Qué es dD cuando $dt = 0.000025\, seg$? Asegúrese de incluir la unidad de dD. (Thompson, 2019, sección 4.1)

Algunos de los problemas se abordan con elementos dinámicos, utilizando un software propuesto por los autores (una calculadora gráfica), para ayudar con la representación gráfica la comprensión en la conversión de registros y demás reflexiones.

En Ely (2021) se aborda, al igual que en trabajos previos citados en este documento, un fragmento histórico-epistemológico sobre el cálculo, y se dedica un apartado en especial para definir lo que son los diferenciales. Una vez definidos, se describen y tipifican los diferentes enfoques para abordar una clase de cálculo utilizando infinitesimales. Un primer enfoque tiene que ver con la formalización de las cantidades infinitamente pequeñas que se definen como números hiperreales, utilizando libros de texto como el de (Keisler, 2013), de tal manera que dicha visión se centra en la rigurosidad, y se concluye que en las investigaciones se registra una actitud por parte de los estudiantes, de alguna manera positiva, porque se les facilita más la poca rigurosidad del análisis no estándar, que es el análisis que estudia los números hiperreales, que la rigurosidad del análisis estándar que estudia el límite. Por otro lado, el enfoque por el que se inclina el autor es el siguiente:

> La segunda categoría incluye enfoques de cálculo basados en diferenciales. Estos enfoques tratan las diferenciales como cantidades y desarrollan ecuaciones diferenciales independientemente de las derivadas y antes de ellas. Utilizan un enfoque informal de los infinitesimales, en lugar de desarrollarlos formalmente con los hiperreales (Ely, 2021, p. 5).

En los cursos con ese enfoque se retoma la idea de Leibniz, en donde se declara que cualquier variable puede escribirse en términos de otras variables, de tal manera que el objeto de estudio es el concepto de cantidad variable, no el de función. Sin tantos formalismos ni rigurosidad.

> El objeto fundamental en un enfoque del cálculo basado en diferenciales es la cantidad variable, no la función. Concuerda con la opinión de Leibniz de que cualquier variable puede escribirse en términos de otras variables relacionadas (Ely, 2021, p. 5)

En el trabajo de Ávila & Ávila, (2017) se realiza una investigación, utilizando las herramientas teórico-metodológicas del EOS, sobre los procesos de construcción del significado de la integral con base en un diseño de situaciones problemas de acumulación para estudiantes de ingeniería.

La secuencia de actividades se compone por tres etapas: inicio, desarrollo y cierre. En cada una se desglosan actividades de diferente naturaleza; sin embargo, en el trabajo mostrado se puede observar modelación matemática de fenómenos físicos para crear un significado del objeto matemático contextualizado con la realidad, se proponen articulaciones entre las diferentes representaciones que tiene el objeto matemático de la integral, se promueven situaciones para generar deducciones en los estudiantes alrededor de las conexiones entre el contexto y el objeto, se tratan las cantidades infinitesimales como "la medida infinitamente pequeña de cada uno del número infinito de subintervalos en que se divide el intervalo" (p. 751), de tal manera que cada actividad contribuye con un aporte al significado de la integral como acumulación, manteniendo una conexión constante con la situación problema, de tal manera que los símbolos representan, no solamente objetos matemáticos, sino comportamientos de un fenómeno físico.

Por otro lado, en el trabajo desarrollado por Félix (2020) se presenta una propuesta didáctica utilizando el enfoque infinitesimal para la enseñanza de la razón instantánea de cambio, en donde se describen estrategias didácticas, dificultades presentadas por los estudiantes y actividades diseñadas a partir de dicho enfoque.

Del mismo modo, en Jiménez (2021) se desarrolla una propuesta dinámica para abordar la integral como función de acumulación. Se caracteriza un enfoque variacional basado en la noción de acumulación, describiendo los principios fundamentales que la componen, y de esta manera establece un análisis de una razón variable mediante una razón de cambio constante por intervalos. Describe de manera ordenada los procedimientos para construir funciones aproximadas de acumulación de manera algebraica y gráfica. Por último, también muestra las dificultades que generan planteamientos como éste; por ejemplo, la comprensión de los "pedacitos" que se están acumulando y la falta de familiaridad del estudiante con la forma algebraica abierta de representación de las funciones de acumulación.

Dadas las características de cada trabajo mencionado en este apartado, una alternativa para abordar las ideas del cálculo es la del enfoque infinitesimal. Este enfoque es el que nos interesa desarrollar en nuestro trabajo, puesto que no rige la formalidad, se centra en la modelación de fenómenos físicos, permite realizar análisis dinámicos de manera algebraica y gráfica, atendiendo las dificultades presentadas previamente. En apartados siguientes se mostrará una descripción más detallada de lo ahora mencionado.

4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO

En este apartado se desarrollará, de manera general, la problemática sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo desde los diferentes motivos que fueron expuestos en apartados anteriores.

Si bien se hizo mención de las diferentes dificultades que existen en el tratamiento de las ideas del cálculo y cómo se aborda en la enseñanza tradicional, esto conlleva consecuencias en muchas direcciones. Los profesores, en su mayoría, están acostumbrados a una manera de impartir sus clases, casi siempre a partir de los mismos libros clásicos y de una manera que promueve un sentido axiomático y mecanizado, por lo que los estudiantes se enfocan en las diferentes formas de aplicar ciertas fórmulas con base en los ejercicios planteados, pues eso basta con aprobar la materia. Es un juego que se promueve mucho en los salones de clase, en el cual el estudiante hace como que aprende y el profesor hace como que enseña.

Por otra parte, la descontextualización de los contenidos impartidos en las clases de cálculo con las otras materias también genera en los estudiantes un gran desinterés por la materia, pues no tienen idea de cómo lo que están aprendiendo les va a servir para algo más que para aprobar el presente curso. En ingeniería, la utilidad de las matemáticas sobrepasa la simple aplicación de fórmulas en ejercicios rutinarios. Los ingenieros tienen la obligación de poder entender diferentes fenómenos que su campo se dedica a analizar; necesitan herramientas matemáticas para modelar estos fenómenos y entender cómo pueden realizar diferentes cosas, ya sea calcular el cambio en cierto fenómeno o cuantificar el cambio ocurrido en el fenómeno.

Dicho esto, es natural que el estudiante, tras los contenidos y clases descontextualizados, se cuestione la utilidad de lo que está aprendiendo, y lamentablemente, las respuestas de los profesores no ayudan de mucho, ya que se restringen a que son las cosas que debe aprender para pasar la materia o bien, una respuesta ingenua que tiene que ver con que donde realmente se aprende a aplicar lo aprendido es en el campo laboral. Lamentablemente, algunos profesores ni siquiera tienen idea de la utilidad de lo que enseñan, la costumbre los llevó a pensar que solamente es una “tarea” que tienen que cumplir, tanto los estudiantes como ellos, sobre la impartición de ciertos contenidos puestos en un programa.

Así pues, emergen problemas también desde los planteamientos curriculares de las instituciones, en los que promueven una perspectiva que difícilmente se puede contextualizar con situaciones de la vida real, promoviendo enfoques que generan dificultades ampliamente documentadas.

La suma de todos estos factores orilla a los estudiantes a no tener clara la importancia de las matemáticas en su campo, ni mucho menos la importancia del cálculo como tal. Si bien los planteamientos curriculares se plantean una formación integral de los estudiantes al momento de egresar, se describe poco sobre la manera de lograrlo.

En nuestro trabajo nos proponemos desarrollar una propuesta didáctica que pretende atender la enseñanza del cálculo con un enfoque distinto al tradicional; por diversos motivos previamente descritos, ese enfoque es el infinitesimal. Este enfoque es una alternativa, en donde se deja de lado la idea de las sumas de Riemann, y se centra en ver a la integral como función de acumulación. A continuación, se hace una caracterización de lo previamente dicho.

4.1 Integral como acumulación

El acercamiento de nuestro trabajo tiene la intención de abordar un enfoque diferente a aquél que está basado en la noción de límite con las sumas de Riemann, procurando evitar las problemáticas que dicho enfoque genera en los estudiantes. En los trabajos desarrollado por Thompson (1994), Thompson y Silverman (2007), y Kouropatov (2008) se trata a la integral, en tanto función de acumulación, como una suma de un gran número de términos relativamente pequeños. Dicho enfoque considera al concepto de acumulación como el centro de las aplicaciones que atiende el Cálculo Integral, permite un acercamiento directo (sin necesidad de estudiar previamente las nociones de antiderivada e integral definida). Este acercamiento es tanto *dinámico* como *variacional* a la función $\int_a^x f(t)dt$, y no en valores concretos, como se calcularía con la integral definida $\int_a^b f(x)dx$. Del mismo modo, este enfoque variacional permite la conexión de diferentes conceptos, como la acumulación, integral definida e indefinida, tomando en cuenta al significado de la derivada como razón instantánea de cambio (Jiménez, 2021).

Todas las ideas siguientes han sido desarrolladas por Jiménez (s.f.) en sus notas para el curso de cálculo.

En un primer momento, es importante resaltar que el núcleo del estudio del cálculo se centra en el análisis de fenómenos de cambio, fenómenos del mundo real. Por ejemplo, el cambio de la temperatura de algún ecosistema con base en condiciones temporales, climatológicas o fenomenológicas (como huracanes, eclipses, etc.). Otro ejemplo puede ser el número de personas contagiadas de alguna enfermedad a causa de una bacteria o provocada por un animal, en este caso podemos analizar el cambio de las personas infectadas en un escenario donde una vacuna que contrarreste la enfermedad aún no ha sido producida, y a su vez, el cambio según la vacuna se haya desarrollado y haya sido aplicada a las personas.

Una de las tareas atendidas por el ser humano, al paso de los años, ha sido entender los cambios que ocurren en la naturaleza, para así predecir y cuantificar los efectos que éstos causan. De modo que la herramienta matemática para lograr entender, predecir y cuantificar los cambios es el cálculo, tanto diferencial como integral. Esta característica ha motivado a que se le nombre la matemática de las magnitudes variables.

La importancia del cálculo en las diversas ramas de la Ingeniería tiene que ver con su estrecha relación con el estudio de fenómenos de cambio, ya que la Ingeniería se encarga de eso, analizar el comportamiento de fenómenos o procesos de variación. Por ejemplo, la Ingeniería civil se encarga de calcular y diseñar estructuras para obtener una resistencia y durabilidad, de modo que es necesario que se pueda predecir qué variables intervienen para que un puente, un edificio u otra construcción se mantenga firme y soporte cierto peso, así como predecir qué hace que la construcción se pueda derrumbar. Otro ejemplo podría ser la Ingeniería mecatrónica en la que se combinan varias disciplinas como la eléctrica, la mecánica y la electrónica. Es importante conocer cómo funcionan los circuitos, los motores y el cableado de tal manera que no ocurran accidentes, que se pueden prevenir a partir de ciertos cálculos tanto de tensión, torque, corriente, por mencionar algunos.

De manera que el cálculo es una herramienta matemática útil para describir, estudiar y cuantificar el cambio, así como predecir y controlar sus efectos.

Los diferentes personajes que desarrollaron las ideas del cálculo que ahora conocemos se dedicaron a atender dos problemas, que después denominaron como los dos problemas fundamentales del cálculo, y que a su vez, fueron las causas de que se dividiera en Cálculo Diferencial y Cálculo Integral:

- El cálculo integral se encarga de cuantificar qué tanto hay de una cierta cantidad, por ejemplo, la temperatura en el ambiente, volumen en una presa, etc., en cada momento, y para esto se necesita saber qué tan rápido cambia esa cantidad en todo momento.
- El cálculo diferencial se encarga de estudiar qué tan rápido cambia o varía cierta cantidad en cada momento, y para esto se necesita saber qué tanto hay de ella en cada momento.

En un primer momento se puede entender que son dos cálculos diferentes, pero que, a su vez, cada cálculo "necesita" del otro. Por una parte, la idea fundamental del cálculo integral tiene que ver con la acumulación exacta en un fenómeno de cambio y, por otra parte, la idea fundamental del cálculo diferencial tiene que ver con la razón instantánea de cambio en un fenómeno, valga la redundancia, de cambio. Estas dos ideas, por sus características, dieron paso al llamado "Teorema Fundamental del Cálculo", y no es otra que la relación que existe en el análisis de un fenómeno de cambio con respecto a qué tan rápido cambia y cuánto es lo que cambia.

En este apartado hemos declarado características generales sobre el enfoque del cálculo que utilizaremos para el desarrollo de nuestra propuesta. En apartados posteriores describiremos características particulares que conforman a dicho enfoque. La única intención de hacerlo así es la de esclarecer las ideas fundamentales de nuestra propuesta, y mostrar, aunque sea de manera implícita, las diferencias que existen entre este enfoque y el tradicional.

4.1.1 Estrategia de tratar algo que siempre cambia por algo que no cambia

Una manera variacional de pensar que ha sido fundamental en el estudio del Cálculo es la idea de considerar que algo que siempre está cambiando, por mucho o poco que sea la rapidez de dicho cambio de la magnitud variable interviniente, a algo que, si bien también cambia, pareciera que no lo hace en pequeños intervalos. Esta idea emula de buena manera a lo que se conoce como una “cámara fotográfica instantánea” y a su vez, nos permitirá analizar las magnitudes variables de una manera intuitiva. Una muestra de esta estrategia se podría hacer con los siguientes dos ejemplos.

Un primer ejemplo para ilustrar la idea anterior sería el movimiento de un tren de alta velocidad. La velocidad que alcanza este vehículo oscila entre los 200 km/h sobre las líneas existentes actualizadas y los 250 km/h sobre líneas construidas y modificadas para el alcance de tal velocidad según la Unión Internacional de Ferrocarriles. Gracias a las tecnologías actuales es posible fotografiar vehículos como estos en movimiento, dando una ilusión de que están inmóviles.

Del mismo modo, podemos rescatar un ejemplo de la naturaleza y que, con mucha suerte, podemos apreciar a distancias muy cortas. Según las leyes de la física, una abeja no puede volar. Un principio aerodinámico dicta que la amplitud de sus alas es muy pequeña para conservar en vuelo su enorme cuerpo. Sin embargo, como sabemos, la abeja es capaz de volar sin ninguna dificultad, ésta bate sus alas con ángulos de 90° a una velocidad de 230 veces por segundo. Si bien es complicado pensar en cómo puede darse tal hazaña, no es complicado apreciarlo utilizando tecnologías modernas. En 2018 se creó una cámara capaz de capturar 10 billones de fotogramas por segundo, con la cual se podría capturar el movimiento de cada ala sin problema.

Estos dos ejemplos ayudan a ilustrar, de manera intuitiva, la idea básica del Cálculo para analizar el comportamiento de las magnitudes variables: por más rápido que una magnitud variable cambie, si la observamos en pequeños intervalos no tendrá oportunidad de cambiar mucho, o bien, casi no cambiará. Para fines prácticos, en ocasiones podremos considerar que no cambia, es decir, que se mantiene constante. Las razones de cambio también son magnitudes variables, y quedan comprendidas en esta visión. Una razón de cambio variable puede ser considerada como una razón de cambio que va cambiando por instantes, por pequeños intervalos, manteniéndose constante (o cambiando muy poco, casi sin cambiar) en el transcurso de cada uno de dichos intervalos.

Ahora bien, una vez que podemos considerar un fenómeno que está variando a altas velocidades, como un fenómeno que se mantiene constante por intervalos, nos planteamos una estrategia para poder calcular el valor constante de una magnitud en cierto intervalo.

4.1.2 Estrategia para modelar una razón de cambio variable mediante una razón de cambio constante por intervalos

Es importante precisar que el análisis variacional que se realizará tiene que ver con las magnitudes variables relacionadas con un fenómeno físico, representado matemáticamente, por mencionar alguna, como x a la magnitud variable independiente, que estará variando en todo momento de manera uniforme en pequeños intervalos previamente mencionados. Entonces, con base en lo anterior, es intuitivo pensar que la razón de cambio de la magnitud variable dependiente de x, a través de los pequeños intervalos, es constante también. Siendo así, existen cuatro maneras de realizar la cuantificación acumulativa de $y(x)$, o bien, la magnitud variable dependiente.

Para desarrollar las maneras de cálculo acumulativo, partiremos suponiendo que conocemos los valores exactos de la razón de cambio $r(x) = y'(x)$ en un intervalo compuesto por valores de x desde un valor inicial (x_i) hasta un último valor (x_f) para cualquier valor admisible de x. De esta forma, podemos pensar que, con base en la previa suposición, si tomamos el valor exacto de la razón de cambio inicial $r(x_i)$ podemos suponer que se mantendrá constante hasta el final del intervalo, siendo así el valor $r(x_i)$, el mismo que la razón de cambio $r(x)$ para todo el intervalo. Esta misma lógica también se puede aplicar al tomar el último valor exacto $r(x_f)$. Una manera intuitiva de concebir esta idea es utilizando la analogía de detener o congelar los cambios que va teniendo x en el intervalo.

Siguiendo con la misma idea planteada para los dos casos hipotéticos anteriores, una tercera manera de analizar es promediar el valor exacto inicial $r(x_i)$ y el valor final $r(x_f)$, teniendo en cuenta que un valor puede ser mayor o menor con relación al otro. De esta manera podemos expresarlo como: $\frac{r(x_i)+r(x_f)}{2}$, siendo así este valor el que asumimos como constante $r(x)$ para todo el intervalo.

Por último, una cuarta manera de concebir un valor constante para todo el intervalo consiste en tomar el valor de "en medio", o el que existe a la mitad de la variación entre el valor exacto inicial x_i y el valor exacto final x_f, teniendo así la siguiente expresión: $r(\frac{x_i+x_f}{2})$.

Se requiere enfatizar el hecho de que esta sustitución es racional si el intervalo en cuestión es pequeño. Cuando analizamos el comportamiento de una razón de cambio en un intervalo de tamaño considerable, podemos aplicar esta misma idea dividiendo dicho intervalo en un conjunto de subintervalos pequeños, y aplicando en cada uno de ellos cualquiera de las cuatro maneras de sustitución ya descritas, o bien todas. De este modo tendremos que una razón de cambio variable en un intervalo grande puede ser sustituida por una razón de cambio que es constante por pequeños intervalos.

4.1.3 Estrategia para resolver de manera aproximada problemas de acumulación en los que la razón de cambio no es constante

Esta estrategia para resolver problemas de acumulación puede ser formulada en términos generales como sigue. Supongamos que nos es conocida la expresión algebraica explícita $r(x)$ para la razón instantánea de cambio de cierta magnitud variable R, que depende de otra magnitud también variable (independiente) x, misma que puede tomar valores numéricos en cierto dominio $a \leq x \leq b$. En otras palabras, nos son conocidas dos cosas:

a) la expresión algebraica explícita $r(x)$ para cierta razón instantánea de cambio, y
b) el hecho de que $r(x) = \frac{dR}{dx}$, donde $a \leq x \leq b$.

En estas condiciones, la tarea consiste en encontrar la expresión algebraica explícita $R(x)$ de la magnitud variable R en términos de x, para cualquier valor permisible de ésta en el dominio dado, $a \leq x \leq b$.

Por el momento, la solución a este problema de acumulación será restringirá a una solución aproximada. Esta estrategia deberá ser *dinámica*, lo que significa que deberemos considerar a x como una auténtica variable, es decir, asumir el hecho de que x toma consecutivamente distintos valores numéricos en distintos momentos, comenzando con su *valor inicial* $x_0 = a$, pasando por su *valor actual* x, y llegando hasta su *valor final* $x_f = b$. En concreto, ahora será necesario proceder de acuerdo a los siguientes pasos:

- *Primer paso*. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente x, que va de su *valor inicial* $x_0 = a$ hasta su *valor actual* x (esto es, el intervalo $a \leq x$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δx, que con objeto de mejorar nuestra aproximación a la solución podremos posteriormente cambiar haciéndolos aún más pequeños.
- *Segundo paso*. Expresar analíticamente y graficar la función de razón constante de cambio por intervalos $f(x)$, con la que sustituiremos a la razón de cambio siempre variable $r(x)$, en el dominio $a \leq x$. Como hemos mencionado, existen cuatro maneras de realizar esta sustitución, por lo que habrá cuatro funciones de razón constante de cambio por intervalos para el problema.
- *Tercer paso*. Expresar analíticamente y graficar la función aproximada de acumulación $F(x)$ de la magnitud variable de interés, para cualquier valor numérico permisible de x en el dominio $a \leq x \leq b$. En concordancia con las cuatro posibilidades para las funciones de razón constante de cambio por intervalos consignadas en el paso anterior, también habrá cuatro funciones aproximadas de acumulación, para el mismo problema.
- *Cuarto paso*. Analizar en conjunto esas cuatro soluciones aproximadas, y extraer conclusiones válidas sobre el comportamiento de la magnitud acumulada.

Para ilustrar de mejor manera estos cuatro pasos anteriores, mostraremos, de manera resumida y breve un ejemplo utilizando un problema que tiene que ver con el lanzamiento vertical de una pelota, en donde la razón instantánea de cambio que en él figura está dada por la siguiente expresión algebraica lineal:

$$v(t) = 160 - 9.8t\,, \quad 0 \leq t \leq \tau\,.$$

Aquí τ representa el tiempo total que emplea la pelota en su recorrido al ser lanzada verticalmente hacia arriba y regresar hasta golpear el suelo; dato que por el momento no es desconocido.

De este modo, el problema de acumulación que queremos resolver se puede plantear algebraicamente de la siguiente manera: Dados $v(t) = \frac{dy}{dt} = 160 - 9.8t,\ 0 \leq t \leq \tau$, encontrar una expresión algebraica explícita para $y(t)$, en donde $y(t)$ representa la posición vertical de la pelota con respecto al suelo en cualquier momento.

Aplicando la estrategia descrita en este apartado, podemos hacer lo siguiente:

- *Primer paso*. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente t, que va desde su *valor inicial* $t_0 = 0$ hasta su *valor actual* t (esto es, el intervalo $0 \leq t$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δt.
- *Segundo paso*. Expresar analíticamente y graficar la función constante de razón de cambio por intervalos $f(t)$, con la que procederemos a sustituir la razón de cambio siempre variable $v(t)$, en el dominio $0 \leq t$.

Este segundo paso exige definir, para todo valor actual de t en cada uno de los "pequeños" intervalos considerados en el paso anterior, un cierto valor numérico para la velocidad constante de la pelota en cada uno de dichos intervalos. Dicho valor constante para la razón de cambio se puede determinar de cuatro maneras:

i. tomar el valor exacto de la velocidad al inicio de cada "pequeño" intervalo como el valor constante de dicha razón de cambio en todo ese intervalo;
ii. tomar el valor exacto de la velocidad al final de cada "pequeño" intervalo como el valor constante para la razón de cambio en todo ese intervalo;
iii. tomar el promedio de los valores exactos de la velocidad al inicio y al final de cada "pequeño" intervalo como el valor constante para la razón de cambio en todo el intervalo,
iv. tomar el valor exacto de la velocidad en el punto medio de cada "pequeño" intervalo como el valor constante de la razón de cambio en todo ese intervalo.

En este segundo paso, se necesitan, por lo menos, de tres acciones siguientes:

Acción 1: Determinar la abscisa del punto inicial del intervalo de tamaño Δt en el que actualmente se ubica el valor de t, independientemente del hecho de que se haya completado o no dicho intervalo. Representemos tal abscisa mediante t_{ini}.

Acción 2. Determinar la abscisa del punto final de este mismo intervalo. Representemos tal abscisa mediante t_{fin}.

Acción 3. Determinar la abscisa del punto medio del mismo intervalo. Representemos tal abscisa mediante t_{med}.

Sólo una vez ejecutadas estas tres acciones es que estaremos en condiciones de determinar las respectivas velocidades instantáneas de la pelota (al inicio, al final o a la mitad de cada intervalo, o bien promediar las velocidades inicial y final en el intervalo), que serán tomadas como la velocidad constante para todo el intervalo.

A su vez, para determinar correctamente las abscisas, tanto de los puntos extremos como del punto medio de cada uno de los "pequeños" intervalos de tamaño Δt, necesitamos previamente determinar el número de tales intervalos que quedan comprendidos entre el valor inicial $t_0 = 0$ y el valor actual t.

Como se ha estado mencionado, este análisis es dinámico, de tal manera que se necesita una notación adecuada para expresar las variaciones de la magnitud variable independiente a través de los pequeños intervalos en donde dicha magnitud se mantiene constante. Según sea el caso, el tamaño que se elija para los intervalos desde un momento inicial hasta un momento actual, dependerá de ciertos momentos. Un primer caso podría ser que exista un número entero de intervalos completos de la magnitud variable independiente, y otro distinto es que haya un intervalo incompleto. Para estas dos situaciones, la notación que en la que nos podríamos apoyar es la siguiente:

Podemos concluir que el número n de intervalos completos de tamaño Δt, comprendidos en el intervalo de 0 a t, estará dado por la expresión: $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$. En esta expresión algebraica, el símbolo [ ] se usa para representar la *parte entera* de un número, en este caso particular, del cociente $\frac{t}{\Delta t}$. Cuando el cociente $\frac{t}{\Delta t}$ no sea un entero, eso significará que además de un cierto número n de intervalos completos de tamaño Δt, en el intervalo de 0 a t habrá además un intervalo "incompleto" (es decir, menor que Δt), cuyo tamaño δt está dado por la expresión: $\delta t = \mathrm{frac}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t$. En esta última expresión, el símbolo "frac( )" representa la parte fraccionaria o decimal de un número; en este caso, ese número es $\frac{t}{\Delta t}$. Del mismo modo, podemos deducir que el tamaño incompleto también puede representarse con la siguiente expresión: $\delta t = t - n\Delta t = t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$.

Teniendo estas ideas claras, lo que sigue es la determinación de las abscisas de los puntos de división del intervalo 0 a t. Esto se logra conociendo el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de valores de 0 a t. Dicho esto, es fácil determinar las abscisas de cada uno de los respectivos puntos de división de ducho intervalo de valores, por ejemplo:

$$t_0 = 0 \cdot \Delta t = 0 \ ,$$

$$t_n = n\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$$

Esa sería la notación acorde a las abscisas indicadas, señalando nuevamente que $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$.

Ahora bien, tomando en consideración lo establecido anteriormente, podemos generar una representación para cada una de las expresiones algebraicas correspondientes a las abscisas de los puntos inicial, final y medio del subintervalo en el que actualmente se ubica el valor numérico de t. Dichas representaciones son las siguientes:

$$t_{\text{ini}} = n\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \,,$$

$$t_{\text{fin}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \,.$$

Una vez determinadas las abscisas de los puntos extremos y del punto medio del subintervalo de tamaño Δt en el que actualmente se ubica el valor de t, podemos continuar la ejecución del segundo paso. El objetivo del segundo paso consiste en determinar el valor constante para la velocidad de la pelota en cada subintervalo de tamaño Δt, y que esto se pue hacer de cuatro maneras. Así pues, es necesaria la ejecución de las siguientes acciones:

Acción 4. Determinar el valor exacto de la velocidad de la pelota en el inicio de cada subintervalo.

Acción 5. Determinar el valor exacto de la velocidad de la pelota en el final de cada subintervalo.

Acción 6. Determinar el valor exacto de la velocidad de la pelota en el punto medio de cada subintervalo.

Acción 7. Determinar el promedio de los valores exactos de la velocidad de la pelota al inicio y al final de cada subintervalo.

En este caso, para la expresión algebraica $v(t) = 160 - 9.8t$, lo que tenemos que hacer es sustituir en esta expresión para la velocidad instantánea de la pelota, los respectivos valores de t_{ini}, t_{fin} y t_{med} que obtuvimos anteriormente. Sin embargo, nos restringiremos a hacer una descripción de los procedimientos solamente para los casos en donde la razón de cambio toma los valores exactos de la velocidad de la pelota en el inicio y final de cada subintervalo.

a) En cada subintervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho subintervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese subintervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{ini}}) = v\left(\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \cdot \Delta t\right) = 160 - 9.8\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \cdot \Delta t \quad .$$

b) En cada subintervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea de la pelota al final de dicho subintervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese subintervalo:

$$\begin{aligned} v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{fin}}) &= v\left(\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \cdot \Delta t + \Delta t\right) \\ &= 160 - 9.8 \cdot \left(\left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor \cdot \Delta t + \Delta t\right) \quad . \end{aligned}$$

Las expresiones algebraicas que obtuvimos son las *funciones constantes de razón de cambio por intervalos*, que utilizaremos en la solución aproximada del problema del lanzamiento vertical de la pelota.

Lo siguiente por hacer en nuestra estrategia de resolución es: usar estas funciones constantes de razón de cambio por intervalos (velocidades de la pelota) para calcular de manera aproximada la distancia que ésta recorre en cada subintervalo de tiempo de tamaño Δt.

Empezaremos considerando el primer caso, en el que en cada intervalo de tiempo de tamaño Δt, la velocidad de la pelota se supone constante e igual a la velocidad exacta al inicio de dicho intervalo. Con el fin de obtener la expresión algebraica general para la función aproximada de acumulación, tomaremos valores de t en cada uno de tales subintervalos, y trataremos de detectar una regularidad en el cálculo algebraico de la altura aproximada de la pelota. Usaremos un valor concreto para Δt, a saber, 0.75, aunque lo representaremos en forma genérica. Del mismo modo, usaremos n para el número de intervalos completos de tamaño Δt que quedan contenidos entre 0 y t. La notación para representar los intervalos completos es la siguiente: $n = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor$.

a) El valor actual de t cae dentro del *primer intervalo*, es decir, $0 \leq t < \Delta t$ o, lo que es lo mismo, $0 \cdot \Delta t \leq t < 1 \cdot \Delta t$, y el número de intervalos completos es $n = 0$. Este resultado se obtiene también al considerar que, siendo $t < \Delta t$, el cociente $\frac{t}{\Delta t} < 1$ y por consiguiente $n = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor = 0$.

Del mismo modo, para encontrar la distancia vertical $\Delta y(t)$ recorrida por la pelota para cualquier instante t entre 0 y Δt, basta multiplicar la velocidad constante en este intervalo, por el tiempo transcurrido, que es precisamente el valor actual de t:

$$\Delta y(t) = (160 - 9.8 \times 0 \cdot \Delta t) \cdot t = 160t \ .$$

b) De nuevo, ahora consideramos el caso en que el valor actual de t cae dentro del *segundo intervalo*, lo que quiere decir que $1 \cdot \Delta t \leq t < 2 \cdot \Delta t$. En estas condiciones se tiene que $1 \leq \frac{t}{\Delta t} < 2$, y en consecuencia $n = \left\lfloor \frac{t}{\Delta t} \right\rfloor = 1$

Ahora, para encontrar la distancia vertical $\Delta y(t)$ recorrida por la pelota, para cualquier instante t comprendido entre Δt y $2\Delta t$, deberemos calcular la distancia parcial que ésta recorrió durante todo el primer intervalo, que ya quedó atrás, y a ella agregarle la distancia adicional recorrida durante lo que va del segundo intervalo.

De acuerdo con la expresión $\Delta y(t) = (160 - 9.8 \times 0 \cdot \Delta t) \cdot t = 160t$, la distancia vertical recorrida durante todo el primer intervalo (cuya duración es Δt) es igual a

$$\Delta y_1 = (160 + 0 \cdot \Delta t)\Delta t \ .$$

La distancia vertical adicional recorrida por la pelota en lo que va del segundo intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante durante este intervalo, por el tiempo durante el cual el móvil se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - \Delta t$:

$$\Delta y_{ad} = (160 - 9.8 \times 1 \cdot \Delta t) \cdot (t - \Delta t) \ .$$

De este modo, la distancia vertical total recorrida por la pelota a partir del punto de lanzamiento, cuando $\Delta t \leq t < 2\Delta t$, está dada por la expresión

$$\Delta y(t) = (160 - 9.8 \times 0 \cdot \Delta t)\Delta t + \\ (160 - 9.8 \times 1 \cdot \Delta t) \cdot (t - 1 \cdot \Delta t) \ .$$

Podríamos continuar esta línea de razonamiento hasta concluir con todos los intervalos, pero ello no es lo más práctico. Nuestro objetivo consiste en encontrar una *fórmula general* para obtener los tres resultados que ya tenemos, y *todos los resultados posibles*. Por ello, para establecer la expresión algebraica general de la función de acumulación es necesario escudriñar en estos resultados particulares, buscando una regularidad.

La *primera* característica importante que tienen en común todos estos resultados, es que *dependen del número de intervalos completos* de tamaño Δt comprendidos entre 0 y el valor actual de t.

La *segunda característica* en común que podemos advertir en estos resultados es que todos ellos *contienen* $n+1$ *sumandos*.

La *tercera característica* en común consiste en que todos estos sumandos dependen tanto del valor actual de t como del valor de Δt.

La *cuarta característica* que podemos advertir en común en estos resultados es que el último de los sumandos que en ellos figura tiene una *misma estructura*, que también depende del valor de n: es siempre igual a

$$(160-9.8n\Delta t)(t-n\Delta t)$$

La *quinta característica* que podemos encontrar en común en todos los resultados anteriores, en concreto para los n primeros sumandos, es que en cada uno de ellos *aparecen de manera consecutiva los números* $0,1,2,\cdots,n-1$.

La *sexta característica* en común que comparten los primeros n sumandos consiste en que todos ellos tienen *una misma estructura*, a saber, la de un producto de dos términos, el primero de los cuales siempre es $160-9.8n\Delta t$, mientras que el segundo es siempre igual a Δt.

Hasta aquí, ya pudimos formular, en términos generales, la expresión algebraica para la distancia vertical $\Delta y(t)$ que recorre la pelota, para cualquier valor permisible de t. Si entendemos que, para cualquier valor actual de t, el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan comprendidos entre 0 y dicho valor actual está dado por $n=\left[\frac{t}{\Delta t}\right]$, podemos expresar estos dos resultados generales en términos únicamente de t y Δt. La suma de los n primeros términos, se puede reescribir como

$$(160-9.8\times 0\cdot\Delta t)\Delta t+(160-9.8\times 1\cdot\Delta t)\Delta t+\cdots+$$
$$\left(160-9.8\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1\right)\Delta t\right)\Delta t\,.$$

El $(n+1)$-ésimo término también se puede rescribir como

$$\left(160-9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\left(t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right).$$

Resumiendo, nuestro análisis detallado de todos los casos particulares nos ha permitido establecer la *fórmula general para nuestra función aproximada de acumulación*, en este caso, la distancia vertical $y(t)$ a la que se encuentra la pelota con respecto al origen, en cualquier instante t entre los 0 y los τ segundos:

$$y(t) = y_0 + (160 - 9.8 \times 0 \cdot \Delta t)\Delta t + (160 - 9.8 \times 1 \cdot \Delta t)\Delta t +$$
$$(160 - 9.8 \times 2 \cdot \Delta t)\Delta t + \cdots +$$
$$\left(160 - 9.8\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t\right)\Delta t +$$
$$\left(160 - 9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \quad . \qquad \text{(E1.1)}$$

En esta última expresión algebraica, y_0 representa la posición vertical del punto de lanzamiento de la pelota, es decir, su altura inicial.

Del mismo modo, podemos utilizar todas estas ideas descritas anteriormente para encontrar la fórmula general para nuestra función de acumulación a partir de la velocidad exacta al fin de cada intervalo. Consideremos una vez más los primeros casos particulares de manera consecutiva para calcular la distancia vertical $\Delta y(t)$ recorrida por la pelota, para cualquier instante t comprendido entre los 0 y los τ segundos.

a) El valor actual de t cae dentro del *primer intervalo*, es decir, $0 \leq t < \Delta t$.

En este caso tenemos que $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] = 0$. La velocidad constante de la pelota en todo este intervalo es igual a $160 - 9.8 \times (0 \cdot \Delta t + \Delta t)$, y la distancia vertical recorrida por la pelota está dada por la expresión

$$\Delta y(t) = \big(160 - 9.8(0 \cdot \Delta t + \Delta t)\big) \cdot (t - 0 \cdot \Delta t)$$

b) Pasemos ahora a considerar el caso en que el valor actual de t cae dentro del *segundo intervalo*, lo que quiere decir que $1 \cdot \Delta t \leq t < 2\Delta t$. En estas condiciones se tiene que $1 \leq \frac{t}{\Delta t} < 2$, y en consecuencia $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] = 1$. La velocidad constante de la pelota en todo el primer intervalo fue igual a $160 - 9.8 \times (0 \cdot \Delta t + \Delta t)$, mientras que su velocidad constante en lo que va del segundo intervalo es $160 - 9.8 \times (1 \cdot \Delta t + \Delta t)$, de modo que la distancia vertical total recorrida por la pelota en este caso es igual a

$$\Delta y(t) = \big(160 - 9.8 \times (0 \cdot \Delta t + \Delta t)\big)\Delta t +$$
$$\big(160 - 9.8 \times (1 \cdot \Delta t + \Delta t)\big)(t - 1 \cdot \Delta t) \ .$$

c) Veamos ahora el caso en que el valor actual de t cae dentro del *tercer intervalo*, lo que quiere decir que $2 \cdot \Delta t \leq t < 3\Delta t$. En estas condiciones se tiene que $2 \leq \frac{t}{\Delta t} < 3$, y en consecuencia $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] = 2$. La velocidad constante de la pelota durante este tercer intervalo es igual a $160 - 9.8 \times (2 \cdot \Delta t + \Delta t)$. La distancia vertical total recorrida por la pelota es entonces igual a

$$\Delta y(t) = \big(160 - 9.8 \times (0 \cdot \Delta t + \Delta t)\big)\Delta t +$$
$$\big(160 - 9.8 \times (1 \cdot \Delta t + \Delta t)\big)\Delta t +$$
$$\big(160 - 9.8 \times (2 \cdot \Delta t + \Delta t)\big)(t - 2 \cdot \Delta t)\ .$$

En resumen, el análisis detallado de todos los casos particulares, similar al que ya hemos realizado en el apartado anterior, nos permite establecer la *fórmula general para nuestra función aproximada de acumulación*, en este caso, la expresión algebraica para la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la pelota, medida con respecto al origen, en cualquier instante t comprendido entre los 0 y los τ segundos:

$$y(t) = y_0 + \big(160 - 9.8 \times (0 \cdot \Delta t + \Delta t)\big)\Delta t +$$
$$\big(160 - 9.8 \times (1 \cdot \Delta t + \Delta t)\big) \cdot \Delta t + \cdots +$$
$$\left(160 - 9.8 \times \left(\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t + \Delta t\right)\right)\Delta t +$$
$$\left(160 - 9.8 \times \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\ . \qquad \text{(E1.2)}$$

Al igual que en el apartado anterior, aquí y_0 representa la posición vertical inicial de la pelota.

Llegados a este momento, debe aclararse que las expresiones anteriores tratan de la posición aproximada, no de la distancia vertical a la que realmente se encuentra la pelota. Estas ecuaciones proporcionan un resultado aproximado debido a que la velocidad real de la pelota, que siempre cambia, es sustituida en pequeños intervalos por velocidades constantes, iguales respectivamente a la velocidad exacta al inicio, al final y en el punto medio de cada uno de esos intervalos.

Si bien, las expresiones son correctas, todavía no son útiles para calcular valores numéricos concretos de dichas funciones. Esto se debe a que los sistemas de software matemático no pueden interpretar los puntos suspensivos que figuran en estas expresiones algebraicas. Necesitamos por tanto utilizar otra notación equivalente para dichas expresiones, que no involucre el uso de los puntos suspensivos, y que sea interpretable para el software matemático.

Al tratar de resolver esta clase de problemas de acumulación, con frecuencia obtendremos sumas largas como las que acabamos de escribir en el apartado anterior. Además, ningún sistema de software matemático puede interpretar los puntos suspensivos que figuran en dichas sumas. Por esta razón, en matemáticas se utiliza una notación especial para representar de manera abreviada y sin recurrir a los puntos suspensivos las sumas que contienen un gran número de sumandos, particularmente las sumas algebraicas. Se le conoce con el nombre de "notación sigma", debido a que utiliza el símbolo Σ, que es la versión en mayúscula de una letra del alfabeto griego. Su nombre es precisamente *sigma*, y equivale a nuestra S mayúscula. Wilhelm Gottfried Leibnitz (1646–1716), uno de los creadores del Cálculo, adoptó este símbolo por corresponder a la primera letra de la palabra "suma". En el alfabeto griego existe también la versión minúscula de esta letra, que es σ, y que se corresponde con nuestra "s" latina.

La notación sigma es un recurso adecuado para representar de manera compacta sumas que contienen un gran número de sumandos, cuando éstos obedecen a cierta ley general. En este caso, la notación sigma funciona de manera análoga a la de una impresora automática de boletos: todos los boletos se parecen, excepto por el número de serie. Los números de serie que se utilizan habitualmente son números naturales (es decir, enteros positivos), y el número de serie de cualquier boleto en la tirilla es una unidad mayor que el número de serie del boleto anterior.

La notación sigma funciona en dos direcciones. En una de estas direcciones se parece al "programa" o comando introducido en la impresora, y que sirve para generar todos los boletos. En este caso, la notación sigma es una manera eficiente de compactar en una simple expresión algebraica cada uno de los sumandos, y también la suma de todos ellos. Para lograr esto, el uso del símbolo Σ está sujeto a cierta sintaxis, que se expresa en tres reglas.

La primera regla que se debe observar al utilizar el símbolo Σ establece que, a la derecha e inmediatamente después de este símbolo se debe escribir todo aquello que los términos de la suma tienen en común, y que deberá ser "impreso" en la "tirilla de términos". Por ejemplo, en las expresiones algebraicas $(E1.1)$ y $(E1.2)$ los primeros n términos que en ellas figuran tienen en común la multiplicación de dos factores, uno de los cuales está contenido en paréntesis, mientras que el otro es igual a Δt. Pero, además, una porción del factor encerrado entre paréntesis también es común a todos los términos de la suma: se trata de $160 - 9.8 \times \_\_\_ \, \Delta t$, donde el espacio dejado en blanco contiene algo que es diferente para cada término de la suma. De este modo, esta primera regla nos dice que, en el caso de la expresión algebraica $(E1.1)$, al usar la notación sigma para reescribirla de forma equivalente deberemos empezar escribiendo

$$\sum (160 - 9.8 \,\_\_\_\, \Delta t)\Delta t \ ,$$

mientras que en el caso de la expresión algebraica $(E1.2)$ deberemos escribir

$$\sum \big(160 - 9.8\,(\_\_\_\,\Delta t + \Delta t)\big)\Delta t \,.$$

La segunda regla sintáctica que se debe observar al usar la notación sigma establece que, para expresar la parte que es diferente en cada uno de los términos de la suma, se debe emplear un índice de sumatoria, esto es, una variable algebraica, que siempre tomará valores enteros consecutivos, desde cierto valor inicial que habitualmente es igual a 0 o 1, hasta un valor final que puede ser cualquier número natural (usualmente mayor que 1). Habitualmente, para esta variable algebraica se emplea alguna de las letras i, j o k del alfabeto latino, aunque también puede emplearse cualquier otra letra o símbolo que resulte conveniente, lo que deberá declararse de manera explícita.

Usemos i como nuestro índice para las sumatorias. Como podemos concluir al analizar atentamente las respectivas ecuaciones, en el caso de $(E1.1)$ a $(E1.2)$ los valores que consecutivamente deberá tomar este índice empiezan en 0 y terminan en $\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1$, que es un número natural.

La tercera regla sintáctica para el uso correcto de la notación sigma establece que, al pie del símbolo Σ (debajo de él) se deberá escribir una igualdad que represente el valor inicial del índice de la sumatoria, mientras que en la parte superior (encima) se deberá escribir solamente el valor final que tomará dicho índice. Esta igualdad que se debe escribir en la parte inferior del símbolo de sumatoria en realidad cumple una doble función, ya que por un lado declara explícitamente cuál es el símbolo algebraico que se utilizará como índice, y por el otro, comunica también de manera explícita cuál es su valor inicial.

La notación sigma implica que el índice de la sumatoria deberá tomar valores enteros consecutivos, desde el valor inicial declarado en la igualdad que se escribe en la parte inferior del símbolo de sumatoria, hasta el valor final consignado en la parte superior. Es precisamente por eso que esta notación es perfectamente interpretable por el software matemático.

De esta manera, la suma de los n términos análogos contenidos en la expresión algebraica $(E1.1)$ quedará reescrita de este modo:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1}(160-9.8i\Delta t)\Delta t\ . \tag{$E1.4$}$$

A su vez, la suma de los n términos análogos contenidos en la expresión algebraica $(E1.2)$ quedará reescrita como sigue:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1}\big(160-9.8(i\Delta t+\Delta t)\big)\Delta t\ . \tag{$E1.5$}$$

Entonces, utilizando la notación sigma, las expresiones algebraicas $(E1.1)$ y $(E1.2)$ para nuestras funciones aproximadas de acumulación, podemos reescribirlas de forma compacta d:la siguiente manera:

$$y(t)=y_0+\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1}(160-9.8i\Delta t)\Delta t+ \\ \left(160-9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\left(t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\ . \tag{$E1.1a$}$$

$$y(t) = y_0 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} \big(160 - 9.8(i\Delta t + \Delta t)\big)\Delta t +$$
$$\left(160 - 9.8 \times \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) . \qquad (E1.2a)$$

Utilizando esta notación, los puntos suspensivos ya no figuran, por lo que el software matemático interpreta correctamente esta notación. Sin embargo, al usar calculadoras potentes como la Voyage 200, podemos notar que, a medida que vamos tomando valores numéricos de Δt cada vez más pequeños, el del cálculo de sus valores numéricos concretos, puede llegar a ser demasiado lento. Esto se debe a que, a medida que t va tomando sus valores permisibles en el intervalo desde 0 hasta τ, el número n de intervalos de tamaño Δt y, en consecuencia, el número de términos de cada sumatoria se va haciendo cada vez más grande, y por ello el tiempo requerido para la realización de los cálculos aumenta de manera notable.

Una forma de superar dicho inconveniente consiste en realizar transformaciones algebraicas de las sumatorias. Se debe señalar que el objetivo fundamental de toda transformación de una expresión algebraica habitualmente consiste en reducir el número de operaciones (aritméticas y/o algebraicas) que se deben ejecutar para obtener el mismo resultado. En otras palabras, la expresión algebraica simplificada (transformada) requiere de un menor número de operaciones que la expresión algebraica original (no simplificada) para obtener el mismo resultado.

Dicho esto, desarrollaremos una forma de transformar las expresiones algebraicas para las sumatorias contenidas en las ecuaciones (E1.1a) a (E1.2a).

Para la ecuación (E1.1a), empezaremos escribiendo, de manera desplegada, los n términos que figuran en esta sumatoria:

$$(160 - 9.8 \times 0 \cdot \Delta t)\Delta t + (160 - 9.8 \times 1 \cdot \Delta t)\Delta t + \cdots +$$
$$\left(160 - 9.8\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t\right)\Delta t .$$

Si en cada uno de los términos de esta sumatoria aplicamos la ley distributiva de la multiplicación, obtenemos los siguientes $2n$ sumandos:

$$160\Delta t - 9.8 \times 0 \cdot \Delta t\Delta t + 160\Delta t - 9.8 \times 1 \cdot \Delta t\Delta t + \cdots +$$
$$160\Delta t - 9.8\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t\Delta t \ .$$

Si ahora procedemos a agrupar los n términos semejantes de cada uno de los dos tipos (esto es, los términos que contienen al coeficiente 160 por un lado, y por el otro, los que contienen al coeficiente -9.8), tendremos los siguientes dos grupos:

$$\underbrace{160\Delta t + 160\Delta t + 160\Delta t + 160\Delta t + \cdots + 160\Delta t}_{n \text{ sumandos}} +$$

$$-9.8 \times 0 \cdot \Delta t\Delta t - 9.8 \times 1 \cdot \Delta t\Delta t - \cdots - 9.8 \times \left(\left[\frac{t}{\Delta t} \right] - 1 \right) \Delta t\Delta t \ .$$

En los últimos dos renglones, todos los sumandos tienen un factor común, que es $-9.8\Delta t\Delta t$. La factorización de este término nos permite reescribir estos dos renglones en la forma que sigue:

$$-9.8\Delta t\Delta t\left(0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + \left(\left[\frac{t}{\Delta t} \right] - 1 \right)\right).$$

De este modo, ahora tenemos todos los términos de la sumatoria original, pero reagrupados. La expresión algebraica equivalente y desarrollada para esta suma de términos es

$$\underbrace{160\Delta t + 160\Delta t + 160\Delta t + 160\Delta t + \cdots + 160\Delta t}_{n \text{ sumandos}} +$$

$$-9.8\Delta t\Delta t \cdot \left(0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + \left(\left[\frac{t}{\Delta t} \right] - 1 \right)\right) \ .$$

Es posible reescribir esta expresión algebraica en forma compacta usando la notación sigma. En este caso tendremos

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 160\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i \ .$$

De este modo, llegamos a la siguiente igualdad entre sumatorias:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (160 - 9.8i\Delta t)\Delta t = \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 160\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i \ .$$

Esta igualdad entre sumatorias es útil porque nos permite encontrar algebraicamente el valor de la sumatoria original, que figura en el miembro izquierdo de esta igualdad (y en la que aparecen mezclados números enteros y decimales), si podemos encontrar el valor de dos sumatorias más simples: $\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 160\Delta t$ y $\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i$. La primera de ellas, de hecho, es fácil de calcular intuitivamente, mientras que en la segunda sólo aparecen números enteros.

Del mismo modo, para la ecuación ($E1.2$a) escribiremos de manera desplegada los n términos que figuran en esta sumatoria:

$$\big(160 - 9.8 \times (0 \cdot \Delta t + \Delta t)\big)\Delta t + \big(160 - 9.8 \times (1 \cdot \Delta t + \Delta t)\big) \cdot \Delta t + \cdots +$$

$$\left(160 - 9.8 \times \left(\left(\left[\frac{t}{\Delta t} \right] - 1 \right) \Delta t + \Delta t \right) \right) \Delta t \, .$$

Aplicando a los términos de esta suma las mismas manipulaciones algebraicas que en el caso anterior, obtendremos para ella la expresión equivalente

$$\underbrace{160\Delta t + 160\Delta t + 160\Delta t + 160\Delta t + \cdots + 160\Delta t}_{n \text{ sumandos}} +$$

$$-9.8\Delta t\Delta t \cdot \left(0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\right) -$$

$$\underbrace{-9.8\Delta t\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t - \cdots - 9.8\Delta t\Delta t}_{n \text{ sumandos}} \; .$$

Compactando estas tres nuevas sumatorias obtenemos la igualdad

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} \Big(160 - 9.8\big((i-1)\Delta t + \Delta t\big)\Big)\Delta t =$$

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 160\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i - \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 9.8\Delta t\Delta t \; .$$

Al resolver problemas de acumulación en los que la razón de cambio es variable, usando la estrategia dinámica desarrollada en estos apartados, con frecuencia encontraremos sumatorias como las que acabamos de escribir, y que formarán parte de las expresiones algebraicas para las correspondientes funciones aproximadas de acumulación. En particular, una de estas sumatorias es la de los primeros n números naturales:

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \; .$$

Debemos a Carl Friedrich Gauss (1777–1855) una fórmula simplificada para calcular esta sumatoria. Gauss descubrió esta fórmula cuando apenas era un escolar inquieto. La fórmula, que el pequeño Gauss intuyó cierto día de clase, es la siguiente.

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \, .$$

Esta es la conocida fórmula de Gauss para la suma de los primeros n números naturales. El sentido de esta fórmula es muy simple: en vez de sumar uno por uno dichos números, el resultado de la suma se puede obtener más fácilmente si multiplicamos el número de sumandos n por la suma del primero y último de dichos sumandos, que es n + 1, y luego dividimos dicho producto entre 2. En otras palabras, el resultado de la suma se obtiene casi de inmediato realizando tres operaciones: una suma, una multiplicación y una división.

Aplicando esta idea de Gauss o la fórmula misma, podemos simplificar la sumatoria análoga que apareció en nuestras tres funciones aproximadas de acumulación:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i = \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1\right)}{2} = \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}{2} \ .$$

Hasta este momento, utilizando las ideas desarrolladas en los diferentes apartados y aplicando las respectivas reglas para simplificar las sumatorias, podemos reescribir las expresiones algebraicas de las sumatorias que figuran en nuestras tres funciones aproximadas de acumulación como sigue:

a) Sumatoria obtenida bajo la suposición de que, en cada intervalo de tamaño Δt, la velocidad de la pelota es constante e igual a la velocidad exacta que ella tiene al inicio de dicho intervalo:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (160-9.8i\Delta t)\Delta t = \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 160\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i$$

$$= 160\Delta t\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 9.8\Delta t\Delta t\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}{2}$$

$$= 160\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - 9.8\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\cdot\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\cdot\Delta t}{2} \ .$$

b) Sumatoria obtenida bajo la suposición de que, en cada intervalo de tamaño Δt, la velocidad de la pelota es constante e igual a la velocidad exacta que ella tiene al final de dicho intervalo:

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} \big(160-9.8(i\Delta t+\Delta t)\big)\Delta t =$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 160\Delta t - 9.8\Delta t\Delta t \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i - \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 9.8\Delta t\Delta t$$

$$= 160\Delta t\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 9.8\Delta t\Delta t\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}{2} - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\cdot 9.8\Delta t\Delta t$$

$$= 160\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - 9.8\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\cdot\Delta t}{2} - 9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\cdot\Delta t \ .$$

Una vez que hemos podido simplificar las sumatorias anteriores, podemos reescribir las expresiones algebraicas para nuestras tres funciones aproximadas de acumulación, que nos dan la distancia vertical aproximada, medida con respecto al suelo, a la que se encuentra la pelota en cualquier momento.

a) Función aproximada de acumulación obtenida bajo la suposición de que, en cada intervalo de tamaño Δt, la velocidad de la pelota es constante e igual a la velocidad exacta que ella tiene al inicio de dicho intervalo:

$$y(t) = y_0 + 160\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - 9.8\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} +$$
$$\left(160 - 9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (E1.1b)$$

b) Función aproximada de acumulación obtenida bajo la suposición de que, en cada intervalo de tamaño Δt, la velocidad de la pelota es constante e igual a la velocidad exacta que ella tiene al final de dicho intervalo:

$$y(t) = y_0 + 160\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - 9.8\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} - 9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t +$$
$$\left(160 - 9.8 \times \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (E1.2b)$$

En esta ocasión, utilizando las notaciones de las sumas de Gauss en las expresiones de las diferentes acumulaciones aproximadas de acumulación solucionamos el problema previo, referente a las múltiples operaciones.

Ahora, nos falta encontrar la función exacta de acumulación, y esto solo será posible entendiendo el comportamiento de las "partes variables" en estas expresiones algebraicas, esto es, las partes que cambian al cambiar el valor actual de la variable independiente. En este caso, se trata de t, y de las siguientes dos "partes variables":

$$\Delta t \quad \text{y} \quad \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ .$$

Hacemos alusión a "entender el comportamiento" de las "partes variables" en el impacto que dichas "partes variables" tienen en el resultado numérico final que las expresiones proporcionan.

Por ejemplo, el valor numérico del tamaño Δt de los subintervalos aparece en la expresión (E1.2b) involucrado en una suma y en una división (el último término de cada una de estas expresiones). No resulta difícil entender que, cuando Δt se hace insignificantemente pequeño (para fines prácticos), Esto implica que podemos "despreciar" la suma de Δt en dichas expresiones, ya que agregar una cantidad que es insignificante no impacta de manera decisiva en el resultado final. A la operación o acto de "despreciar" tales pequeñas cantidades lo simbolizaremos en la correspondiente expresión algebraica del modo que sigue:

$$\left(160 - 9.8 \times \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (E1.2b)$$

El otro lugar en las expresiones (E1.1b) a (E1.2b) en el que aparece Δt es en conjunto con la parte entera, a la que multiplica: $\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$. En este caso, es posible entender el impacto final que este "conglomerado" tiene en dichas expresiones algebraicas. Así como indicamos que $\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$ es la abcisa del extremo derecho del último subintervalo completo de tamaño Δt en el intervalo desde 0 (el valor inicial de la variable independiente), hasta el valor actual t de dicha variable, entonces tendremos claro que, a medida que Δt se hace cada vez más y más pequeño, hasta volverse insignificantemente pequeño para fines prácticos, el valor numérico de $\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$ es prácticamente indistinguible del valor numérico actual de t.

Esta importante conclusión que acabamos de formular la representaremos del siguiente modo:

$$\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t = t$$

Apoyándonos en las dos conclusiones que acabamos de formular, y que nos aclaran el impacto final que las "partes variables" tienen en las expresiones algebraicas de las funciones aproximadas de acumulación, podremos arribar a la expresión algebraica para la función exacta de acumulación. Sólo tenemos que aplicar estas conclusiones a lo largo de todas las respectivas expresiones algebraicas, como se ilustra enseguida.

Para la primera de las funciones aproximadas de acumulación tendremos:

$$y(t) = y_0 + 160\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - 9.8\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} +$$

$$\left(160 - 9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (E1.1b)$$

Esto sugiere que la expresión algebraica para la función exacta de acumulación en este caso es la siguiente:

$$y(t) = y_0 + 160t - 9.8\frac{t \cdot t - t \cdot 0}{2} - (160 - 9.8t)(t - t)$$

$$= y_0 + 160t - 9.8\frac{t^2}{2} \ .$$

Veamos ahora qué pasa con la segunda función aproximada de acumulación:

$$y(t) = y_0 + 160\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - 9.8\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} - 9.8\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t +$$

$$\left(160 - 9.8 \times \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (E1.2b)$$

De acuerdo con este análisis, la expresión algebraica para la función exacta de acumulación es la siguiente:

$$y(t) = y_0 + 160t - 9.8\frac{t \cdot t - t \cdot 0}{2} - 9.8t \cdot 0 + \big(160 - 9.8(t + 0)\big)(t - t)$$

$$= y_0 + 160t - 9.8\frac{t^2}{2} \ .$$

El resultado final que acabamos de obtener, en los dos casos, es la misma función exacta de acumulación, terminando aquí la serie de procedimientos planteados en el apartado. Ahora bien, ya podemos hacer uso de la expresión algebraica de la función exacta de acumulación para casos particulares.

Como lo mencionamos al principio del apartado, las ideas y procedimientos previamente desglosados fueron retomadas, en su totalidad, del trabajo desarrollado por Jiménez (s.f.) que utiliza para sus clases. Estos productos académicos son la base matemática para el desarrollo de nuestra propuesta.

Como se mencionó en el apartado de antecedentes, la dificultad a la cual hacemos más énfasis es la poca relación que existe entre el modelo matemático de un fenómeno en progreso y el uso de las herramientas del cálculo para predecir qué tan rápido cambia (razón instantánea de cambio) y cuánto cambió (acumulación). El enfoque que implementaremos en este trabajo atiende dicha dificultad, pues se parte, como pudimos notarlo, del modelo matemático de una razón instantánea de cambio que siempre está cambiando, la transformamos a una función constante por intervalos, creando así funciones aproximadas de acumulación, para después concluir con una única expresión algebraica exacta de acumulación. Es un trabajo algebraico, de modo que para desarrollarlo se deben tener unas buenas bases en álgebra, pues al no tenerla, es probable que se generen dificultades distintas a las reportadas previamente.

Estamos convencidos que esta estrategia de análisis y cálculo es adecuada para los estudiantes no matemáticos, o de ingeniería en este caso, puesto que en todo momento se manipulan magnitudes variables, las cuales, los estudiantes deberán conocer, analizar, utilizar y manipular para predecir los cambios ocurridos en un fenómeno en progreso. Si bien este enfoque cuenta con cierto rigor, no es lo primordial, lo primordial son las características variacionales y las oportunidades de manipular las magnitudes variables al momento de modelar un fenómeno en progreso.

Los apartados previamente descritos forman parte del propósito por alcanzar un objetivo general de nuestra propuesta, y éste a su vez está compuesto por una serie de objetivos específicos. A continuación, se declaran cada uno de ellos.

4.2 Objetivos

General

- Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la integral a estudiantes de ingeniería con el propósito de promover el enfoque infinitesimal como alternativa para la enseñanza de la integral como acumulación.

Específicos

- Determinar el significado institucional de referencia de la propuesta
- Determinar el significado institucional pretendido por el currículo en las carreras de ingeniería de la Universidad de Sonora
- Determinar el significado institucional pretendido por el diseño de la propuesta.
- Diseñar e implementar actividades didácticas para el estudio de la integral con un enfoque infinitesimal
- Incorporar el uso de los recursos tecnológicos digitales para agregar las representaciones geométricas en el estudio de la integral como proceso de acumulación
- Valorar la comprensión y entendimiento de los estudiantes de la integral como función de acumulación utilizando cantidades infinitesimales
- Valorar los diseños de las actividades didácticas a través de su implementación y reformularlas para una propuesta de mejora

5 LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

La propuesta desarrollada en este trabajo tiene que ver con el diseño y la implementación de una serie de actividades, con la cual se busca atender, de alguna manera, la serie de problemas y dificultades que previamente se describieron en capítulos anteriores.

La implementación de nuestra propuesta está destinada para estudiantes de ingeniería que están cursando el segundo semestre en la materia de Cálculo Diferencial e Integral II, con el propósito de promover la enseñanza de la integral como función de acumulación utilizando un enfoque infinitesimal.

El sustento teórico, tanto para el diseño como para la valoración de nuestra propuesta, está hecho con las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), estas herramientas son: el sistema de prácticas, la configuración de objetos y procesos, la trayectoria epistémica y la idoneidad didáctica.

El propósito se centra en la enseñanza de la integral como función de acumulación a partir de la resolución de problemas en contextos de ingeniería, es decir problemas relacionados con fenómenos físicos como el cálculo de trabajo realizado por un elevador, la temperatura en un ambiente que sufre cambios, la distancia recorrida por un automóvil en movimiento, etc. Con esto se busca que el estudiante identifique las magnitudes variables intervinientes en cada contexto y adquiera nociones de manipulación de variables para el cálculo de una magnitud variable de interés. Nos parece que esta práctica es habitual en el campo laboral ingenieril.

5.1 Características generales

- Título de la propuesta: “Propuesta de enseñanza de la integral como función de acumulación en ingeniería”.
- La propuesta está dirigida a estudiantes de las carreras de ingeniería de la Universidad de Sonora que estén cursando la materia de segundo semestre: Cálculo Diferencial e Integral II.
- El sustento teórico tiene que ver con las herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Éste cuenta con diferentes niveles de análisis, que son herramientas para una didáctica descriptiva – explicativa y a su vez, contiene criterios de *idoneidad* que permiten valorar los procesos de instrucción y guiar su mejora (Godino, 2008).
- Se propone el uso del software GeoGebra como herramienta tecnológica para apoyar en la comprensión de los diferentes conceptos dinámicos. La relevancia de contar con dicha herramienta tiene que ver con la posibilidad de visualizar las diferentes representaciones gráficas dinámicas.

5.2 Características de la propuesta

- El objetivo central es diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la integral a estudiantes de ingeniería con el propósito más ambicioso y de largo plazo
- de promover el enfoque infinitesimal como alternativa para la enseñanza del cálculo. De tal manera que los estudiantes desarrollen habilidades y competencias que tengan que ver con entender, analizar y modelar fenómenos de la realidad en progreso.
- Los objetivos específicos de la propuesta tienen un orden secuencial partiendo de la determinación de diferentes significados institucionales como el de referencia, el del currículo de la institución, en este caso el que es promovido en las carreras de ingeniería de la Universidad de Sonora, y el significado pretendido por la propuesta. Acto seguido el diseño de las actividades incorporando recursos tecnológicos, la valoración de la comprensión de los estudiantes a partir de los resultados obtenidos en la implementación de actividades y un último momento para la reformulación de las actividades planteadas. Esto último nos permitirá crear una propuesta de mejora.

A continuación, se argumentarán las razones por las cuales se pretende la enseñanza de un significado que no se corresponde plenamente con el pretendido por el currículo. Si bien el enfoque tradicional es utilizado para la resolución de problemas de aplicación propuestos por el currículo, genera todas las dificultades mencionadas en apartados anteriores. De tal manera que, lo que proponemos en nuestra propuesta es el uso de un enfoque distinto, el infinitesimal, que al igual que el tradicional es útil para resolver los problemas aplicados; la diferencia radica en la manera intuitiva y cercana a las prácticas de los estudiantes. Y, a su vez, atiende a las problemáticas generadas por el enfoque tradicional.

Un elemento fundamental del trabajo es la construcción y el desarrollo de un lenguaje común entre estudiantes y, en este caso, el profesor. De tal manera que exista una armonía entre el lenguaje natural y conceptual al momento de implementar las actividades. La manera en la que se realizarán las acciones para cumplir con dicho elemento aún está en construcción, sin embargo, nos parece importante tomar en cuenta que nuestra propuesta cuenta con una serie de conceptos y términos con los que se deberán familiarizar los estudiantes para un mejor entendimiento de las ideas que planteamos.

Nuestro punto de partida consistió en una revisión bibliográfica con el propósito de tener un panorama general de las dificultades y características reportadas en la enseñanza y aprendizaje del cálculo, más precisamente de la integral. Esta información nos sería de utilidad para identificar una problemática, plantear elementos de justificación y a su vez, tener un punto de partida para el diseño de las actividades que conformaran la propuesta.

Se realizó una implementación de actividades como experimentación con estudiantes de la carrera de Ingeniería Química de la Universidad de Sonora que cursaban la materia de Cálculo Diferencial e Integral I, con el propósito de realizar un diagnóstico sobre su comprensión de las ideas que pretendemos desarrollar con nuestra propuesta. Las actividades fueron tomadas de las notas de clase de Jiménez (s.f) en donde se plantean problemas elementales de acumulación con razón de cambio constante y razón de cambio constante por intervalos. Se realizará un análisis y valoración de la información recaudada en dicha implementación haciendo uso de las herramientas teóricas del EOS, de tal manera que nos permita tener un panorama concreto de la comprensión de las ideas que queremos promover con las actividades que diseñaremos en semestres posteriores.

La propuesta a desarrollar estará compuesta por diversas actividades con base en situaciones problema de contextos reales, es decir, que tengan que ver con fenómenos de la realidad en progreso, conceptos variacionales del cálculo y procedimientos algebraicos y gráficos dinámicos. Para esto último, las herramientas tecnológicas serán de suma importancia.

5.3 Características del diseño

- Los contextos de las situaciones problema planteadas en las actividades diseñadas serán de carácter intramatemático y extramatemático, teniendo prioridad éste último. Por ejemplo:
- Intramatemático: Cálculo de volúmenes de figuras geométricas
- Extramatemático: Cinemática, presión, electricidad, electrónica, hidráulica, población, contagio de bacterias, etc.
- Las dinámicas de las actividades serán diversas, es decir, actividades individuales, en las que deberán resolver problemas con base en sus conocimientos previos o actividades previas; en equipo, en donde se permitirá que haya discusiones, y presentación de sus productos según sea el caso; y por último, habrá momentos para la discusión grupal en se aproveche para la institucionalización de los contenidos.
- Las herramientas tecnológicas tendrán un papel de visualización y manipulación de expresiones. Esto quiere decir que habrá actividades en donde deberán graficar expresiones algebraicas generadas con base en la modelación matemática de los fenómenos, de tal manera que puedan observar el dinamismo que existe en el análisis variacional del fenómeno.
- El rol del profesor es el de moderador, guía y provocador de ideas. Debido a que el mismo diseñador será el que implementará las actividades, tendrá oportunidad de realizar preguntas que orienten a los estudiantes, aclarará dudas, moderará las discusiones en el grupo y planteará situaciones que problematicen a los estudiantes para que, de algún modo, provoque un aprendizaje activo.
- La visión dinámica de la integral como acumulación propuesta por Thompson & Silverman (2007) y Los indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas propuesta por Godino (2013) serán los elementos teóricos que sustentarán cada una de las actividades y punto de partida para los planteamientos del diseño de éstas.

Si bien, la cantidad de actividades aún no se ha precisado en su totalidad, pues depende de una serie de consideraciones didácticas, matemáticas y metodológicas, la estructuración es clara. Partiremos, de lo más “fácil” a lo más “complicado”. Las actividades diseñadas exigen diferentes tipos de conocimientos previos y procedimientos algebraicos y gráficos, por lo tanto, esas decisiones se tomarán más adelante. Del mismo modo, plantear una estrategia para el desarrollo del lenguaje variacional con el que trabajaremos.

5.4 Características del tema matemático de interés

El tema matemático, en este caso, la integral como función de acumulación, es el núcleo de nuestro diseño de actividades. Este concepto matemático es fundamental para los estudiantes de ingeniería, sino para que se apropien de las herramientas que el cálculo integral ofrece y sean de utilidad para futuros problemas en el área de interés.

La integral como función de acumulación relaciona directamente la cuantificación de una magnitud variable de interés con base en la razón de cambio que mantiene una magnitud variable con respecto a otra. Por mencionar un ejemplo, en el ámbito ingenieril, es necesario saber cuantificar la acumulación, en todo momento, del llenado de un recipiente, la velocidad de algún objeto, la carga de algún dispositivo, etc. De tal manera que, más allá de dominar los procedimientos matemáticos, sean capaces de interpretar una situación que involucre una relación entre magnitudes variables y aprovechen las ideas detrás de este análisis variacional que proponemos en las actividades utilizando magnitudes variables.

A continuación, se muestra una síntesis de las diferencias entre cada grupo de actividades que conformará el diseño de nuestra propuesta, mostrando los conocimientos que deberán tener los estudiantes, y a su vez desarrollar progresivamente al resolver las situaciones problema planteadas. Del mismo modo, todas las características descritas son tomadas de las notas de clase de Jiménez (s.f).

5.5 Características del lenguaje a desarrollar en el estudio variacional del cálculo

El trabajo que desarrollamos pretende apoyar a los estudiantes en la construcción de sistemas de prácticas que permitan concebir a la integral como una función de acumulación, por una parte, y, por otra como una suma de un gran número de términos relativamente pequeños. Esta manera de entender a la integral implica un acercamiento tanto *dinámico* como *variacional* a la función $\int_a^x f(t)dt$.

Para continuar con el desarrollo de estas ideas, es necesario aclarar que, cuando decimos una suma de un gran número de términos, nos referimos a "cambios". Si bien en un primer momento, de manera coloquial, podemos entender a dicho término como la transformación a algo distinto, en el caso del cálculo nos referimos a un cambio *en progreso*. Es decir, el incremento o decremento continuo de una magnitud variable o característica cuantificable de un fenómeno. Por ejemplo, en dinámica, podemos ver estos cambios como la diferencia de posición de un objeto cuando éste se mueve; en temperatura podemos entender un cambio cuando hace más calor, es decir cuando ésta aumenta, o cuando hace más frío, al disminuir; otro ejemplo válido es incluso en la propagación de una infección o bacteria, cómo ésta va aumentando una vez instalada en algún organismo o cómo va desapareciendo una vez aplicado algún antídoto.

Así pues, diremos que algo está variando cuando haya un cambio en progreso en alguna magnitud variable de interés, y del mismo modo hablaremos de variación cuando haya ocurrido un cambio concreto, desde un momento inicial hasta un momento final. Por ejemplo, decir que la variación en la temperatura fue de 20 grados Celsius, o que en el último año la variación en la estatura de un niño de 10 años fue de 15 centímetros. Es decir, un cambio ya establecido o completo.

En los primeros párrafos de este apartado se mencionó el enfoque infinitesimal, que tiene que ver con la conceptualización y manipulación de cambios infinitamente pequeños de una magnitud variable con respecto a otra. Debido a esto, es importante precisar qué significa dicho término. Una magnitud variable es una cualidad o propiedad cuantificable de un objeto, fenómeno o sistema físico. Si bien existen propiedades de tipo cualitativas, como por ejemplo la condimentación de una comida, lo colorido de un objeto o lo dulce de una bebida, en este caso no hablamos de ese tipo de propiedades, sino de las magnitudes variables cuantificables; por mencionar algunas, en la física se consideran magnitudes variables al tiempo, la temperatura, la velocidad, la presión, la elasticidad de un material, etc.

Por otra parte, también es importante precisar qué significa "cambios infinitamente pequeños". Algo infinitamente pequeño, en cálculo, puede tornarse relativo. Es decir, el contexto es el que caracterizará el "tamaño" a partir de una comparación. Por ejemplo, la distancia entre la casa en la que habita una persona con las diferentes esquinas de la calle por donde vive puede ser relativamente pequeña, en un sentido numérico, se podría calcular sin problema; sin embargo, si cualquiera de esas distancias las comparamos con la distancia que separa al Sol de Neptuno, la distancia de la casa se vuelve inmensamente pequeña. En caso contrario, si comparamos la distancia que hay de la casa que habita alguien a la tienda con la longitud de Planck, la cual es la mínima distancia física medible, entonces resulta que la distancia entre diferentes lugares se torna extremadamente muy grande. Con el fin de clarificar, también podemos pensar en comparaciones de otro estilo, por ejemplo, el volumen de un vaso de agua es pequeño si lo comparamos con el volumen de un tinaco de agua que se suele posicionar arriba de una casa particular, pero también el volumen de dicho vaso puede verse sumamente pequeño si se compara con el volumen de agua que existe en toda la tierra.

Teniendo clara la idea de la relatividad de las cantidades con base en los diferentes contextos, consideraremos una cantidad infinitamente pequeña a una cantidad finita, pero lo suficientemente pequeña para un uso práctico. Si bien, la existencia de algo infinitamente pequeño le da paso a algo infinitamente grande, siendo éste el inverso.

Como se puede notar, existen magnitudes que no se pueden hacer más pequeñas de lo que son; por ejemplo, la longitud de Planck, que, como se mencionó, es la longitud física medible más pequeña. Ejemplos como este hay varios, la molécula de alguna sustancia, siendo ésta la cantidad mínima dicha sustancia, o la carga de un electrón, siendo la unidad más pequeña para cuantificar cargas eléctricas.

Una vez establecidos los términos a los cuales nos estaremos refiriendo en el desarrollo de este trabajo, debemos determinar la notación que usaremos para la representación matemática de las relaciones que mantienen entre sí las magnitudes variables. La covariación de una magnitud variable con respecto a otra puede ser representada como función de una magnitud variable con respecto a otra. Por ejemplo, si la temperatura de un objeto varía conforme pasa el tiempo, podemos decir que existe una relación de covariación de la temperatura con el tiempo, o bien, la temperatura es función del tiempo.

Al momento de analizar el cambio en un fenómeno de la vida real, las magnitudes variables que intervienen en el fenómeno mantienen una covariación entre éstas. Esta covariación puede ser entre dos o más variables. Por ejemplo, cuando se observa un carro moverse, la distancia que éste recorre depende del tiempo transcurrido en el que cambió su posición. En el caso de que sean más de dos variables, podemos tomar el ejemplo del volumen de un cono, que depende del radio de la base y la altura.

Para representar matemáticamente las relaciones cuantitativas de dependencia de las magnitudes variables, o bien, las funciones de una variable con respecto a otra, se utilizan símbolos algebraicos. Por ejemplo, supongamos que una magnitud variable w es función de otra magnitud variable z, la representación en dicho caso sería: $w = f(z)$.

Los paréntesis se emplean con la finalidad de indicar, encerrando entre ellos, al símbolo que representa a aquella magnitud variable de quien la otra magnitud variable es función. A diferencia del uso que se les da en el Álgebra elemental, aquí los paréntesis no significan una multiplicación, de modo que no es correcto leer esta expresión simbólica como "doble u igual a efe por zeta". La lectura "*efe de zeta*" puede considerarse como una abreviación de la frase "función de z". Esta misma notación funcional se suele escribir de forma compacta como $w(z)$, en cuyo caso se lee como "*doble u de zeta*".

La expresión $w(z)$, si bien puede leerse de manera breve, trae consigo significados importantes, como por ejemplo la relación de los valores numéricos de las magnitudes variables z y w, y la dependencia de ambos valores numéricos. Esto quiere decir que a cada valor de z le corresponde un valor de w, y a su vez, que cada cambio en el valor de z tiene como consecuencia un cambio en el valor de w.

A continuación, se muestra una serie de ideas encapsuladas en esta notación para la representación algebraica de la dependencia de dos magnitudes variables:

- w y z son *magnitudes variables*, lo que significa que en distintos momentos ellas toman distintos valores numéricos, en el devenir del proceso o fenómeno en el que dichas magnitudes variables intervienen.
- *Variación conjunta*: al ir cambiando los valores numéricos que toma la magnitud variable z, simultáneamente van cambiando los valores numéricos que toma la magnitud variable w.

- La magnitud variable w se encuentra en una *relación de dependencia* con respecto a la magnitud variable z: los valores numéricos que ésta última toma predeterminan o condicionan los valores numéricos que puede tomar la magnitud variable w.
- w es la magnitud variable *dependiente*, mientras que z es la magnitud variable *independiente*.
- El *principio de unicidad*: a cada valor numérico que toma z le corresponde un único valor numérico de w y viceversa. No hay más valores numéricos de una que de la otra magnitud variable.
- El *principio de unicidad*: a un valor numérico concreto z_0 de la magnitud variable z, le corresponde siempre un único y mismo valor numérico concreto w_0 de la magnitud variable w. Este número también se puede representar como $w(z_0)$.
- El *principio de continuidad*: la magnitud variable independiente z fluye de manera *creciente*, *continua* y *uniforme*. Esto significa que la magnitud variable z toma progresivamente cada uno de sus valores numéricos permisibles, desde el más pequeño de todos (valor inicial) hasta el mayor de todos (valor final), sin omitir ninguno entre ellos y a un ritmo constante.
- El *principio de continuidad*: a menos que se indique explícitamente lo contrario o se declaren casos excepcionales, se asume que las magnitudes variables z y w experimentan una *variación continua*. Esto significa que, al tomar consecutivamente la magnitud variable z todos y cada uno de sus valores según lo estipulado en el punto anterior, ocurre que la magnitud variable w va tomando también todos y cada uno de sus respectivos valores numéricos permisibles, sin "saltos" y sin omitir ni uno solo de ellos, aunque no necesariamente lo haga de manera uniforme ni del menor al mayor.
- El *principio de dinamicidad*: al analizar el proceso o fenómeno en el que intervienen las magnitudes variables z y w como un "cambio en progreso", $w(z)$ representa el *valor actual* de la magnitud variable w, es decir, el valor que toma en el *momento actual* z. Bajo este análisis dinámico, cada uno de los valores numéricos de estas magnitudes variables es en su momento el valor actual.

Con base en las ideas desarrolladas en párrafos anteriores, es posible utilizar la notación algebraica de funciones como herramienta para expresar matemáticamente diferentes relaciones covariacionales entre las magnitudes variables, con el propósito de traducir situaciones de cambio en progreso matemáticamente. Por ejemplo:

- Si a es un valor numérico permisible de z, entonces

$$w(a)$$

representa el valor de w en el momento $z = a$.

- Si z_1 y z_2 son valores numéricos de z (suponiendo por simplicidad que $z_2 > z_1$, entonces

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

representa la magnitud del cambio experimentado por z al pasar de z_1 a z_2. En otras palabras, Δz es la cuantificación del cambio experimentado por z; expresa *qué tanto* o *cuánto* cambió z al pasar de z_1 a z_2.

- Bajo estas mismas condiciones,

$w(z_1)$ y $w(z_2)$

representan los valores numéricos de la magnitud variable w en los respectivos momentos z_1 y z_2.

- Análogamente,

$$\Delta w = w(z_2) - w(z_1)$$

es la cuantificación del cambio experimentado por la magnitud variable w al pasar ésta del valor $w(z_1)$ al valor $w(z_2)$, como consecuencia del hecho de que la magnitud variable z cambió del valor z_1 al valor z_2. En otras palabras, Δw es la cuantificación del cambio experimentado por w; expresa *qué tanto* o *cuánto y cómo* cambió w al pasar de $w(z_1)$ a $w(z_2)$.

- El cociente

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{w(z_2) - w(z_1)}{z_2 - z_1}$$

representa la *tasa o variación media de cambio* de w con respecto a z, relacionada con el hecho de que la magnitud variable z cambió del valor z_1 al valor z_2.

- El cociente de diferenciales

$$\frac{dw}{dz}$$

representa la *tasa o razón infinitesimal o instantánea de cambio* de w con respecto a z, relacionada con el hecho de que la magnitud variable z experimentó un cambio igual a una cantidad infinitesimal dz."

Hasta este momento, hemos declarado características generales sobre el enfoque del cálculo para el desarrollo de nuestra propuesta, y la notación que utilizaremos. La única intención de hacerlo así es la de esclarecer las ideas fundamentales que se encapsulan y mostrar, aunque sea de manera implícita, las diferencias que existen entre este enfoque y el tradicional.

A continuación, se describirán las características particulares de las diferentes actividades que conformarán nuestra propuesta; procedimientos, ideas, representaciones, etc.

5.6 Características del grupo de actividades 1: Acumulación con base en una razón de cambio constante durante todo el proceso

El punto de partida para el diseño de nuestras actividades tiene que ver con las situaciones problemas de acumulación con razón de cambio constante. Este grupo de actividades es el más elemental, debido a las siguientes características:

- Estos problemas tratan sobre situaciones problema en las que la razón de cambio de cierta magnitud variable de interés con respecto a otra es constante según el contexto planteado. Un ejemplo de la representación matemática de la idea anterior es la siguiente: considerando que la velocidad de un vehículo mantiene una velocidad constante de 60 km/h, la razón de cambio se expresa: $v = \frac{dx}{dt} = 60$
- Una segunda característica de estos problemas es que el cambio total de la magnitud variable de interés provocado por la razón constante de cambio, en cualquier contexto planteado, se calcula mediante una multiplicación básica. Una manera general de representar matemáticamente esta idea es la siguiente: $y = y_0 + k \cdot (x - x_0)$, donde y representa el valor actual de la magnitud variable de interés, y_0 el valor inicial de la misma, o bien, el valor numérico de esta magnitud variable en el *momento* x_0, k la razón constante de cambio ($k = \frac{dy}{dx}$) y x el *momento* actual.
- Una tercera característica tiene que ver con el cambio parcial de la magnitud variable de interés, provocado por cada una de las razones constantes de cambio según sea el caso del contexto, para cualquier valor permisible de la respectiva magnitud variable independiente, se calcula también mediante una multiplicación básica.
- La cuarta característica atiende a la representación gráfica del fenómeno estudiado, en este caso, el comportamiento lineal de las funciones de acumulación generadas a partir de las situaciones problema planteadas. Se tratará de segmentos de líneas rectas de pendiente positiva o negativa, que parten de un punto, ya sea el origen u otro.

La manera de abordar este grupo de actividades será con base en trabajo individual, y en un último momento, discusiones grupales para identificar y caracterizar este tipo de problemas. Es importante que esta manera de entenderlo quede clara y bien identificada, debido a que las ideas serán la base para actividades que requieran más esfuerzos por parte de los estudiantes.

5.7 Características del grupo de actividades 2: Acumulación con base en una razón de cambio constante por intervalos

El grupo de actividades 2 es muy parecido al grupo de actividades 1 en los procedimientos o representaciones; sin embargo, existen diferencias entre ambos grupos por ejemplo:

- Estos problemas tratan sobre situaciones problema en las que la razón de cambio de cierta magnitud variable de interés con respecto a otra cambia según el contexto planteado.

- La manera en la que cambia la razón de cambio planteada en tales problemas será constante por intervalos, es decir, que en todo momento se sabrá que en distintos intervalos identificados, el valor de la razón de cambio se mantendrá fijo y solo cambiará dicho valor al cambiar el intervalo.

- Cada problema planteado estará conformado por subproblemas de razón de cambio constante, y claro está que la cantidad de subproblemas estará condicionada por la cantidad de intervalos que se planteen en la situación problema. Entendiendo así que para llegar a una solución habrá que considerar todos y cada uno de los subproblemas como parte de un mismo problema. Las soluciones a este grupo de problemas siempre intervendrán dos funciones definidas por intervalos. Una de ellas será la función de razón de cambio que expresará matemáticamente los distintos valores numéricos que en diferentes intervalos toma dicha razón de cambio, por ejemplo:

$$v(t) = \begin{cases} 60 & 0 \leq t \leq 2 \\ 40 & 2 < t \leq 2.5 \\ 20 & 2.5 < t \leq 6.5 \end{cases}$$

- Y otra función por intervalos que será la denominada función exacta de acumulación, y expresará matemáticamente los distintos valores numéricos que la magnitud variable de interés toma, para cada uno de los respectivos valores numéricos de la magnitud variable independiente, por ejemplo:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 + 60t & 0 \leq t \leq 2 \\ x_0 + 120 + 40(t-2) & 2 < t \leq 2.5 \\ x_0 + 140 + 20(t-2.5) & 2.5 < t \leq 6.5 \end{cases}$$

- Del mismo modo, con base en representaciones gráficas, dentro de las respuestas de los estudiantes se tendrán que concebir dos diferentes representaciones: para la razón de cambio constante por intervalos, una función escalonada, por ejemplo:

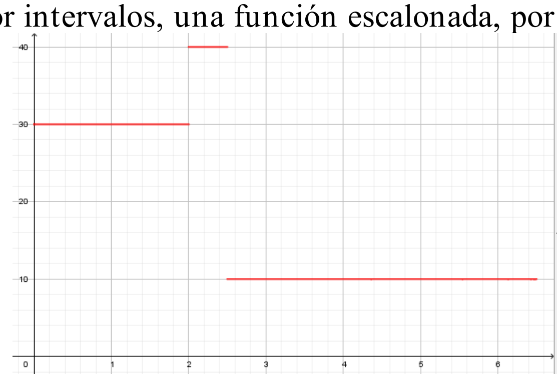

Figura 2: Gráfica variacional correspondiente a una función de razón de cambio constante por intervalos

- La gráfica de la función de acumulación de la magnitud variable de interés es un segmento de recta oblicuo, de tendencia ascendente (pendiente positiva) cuando la razón de cambio es mayor que cero, y de tendencia descendente (pendiente negativa) en caso contrario. En este caso, tendremos un conjunto de segmentos de recta oblicuos y consecutivos, a estas representaciones se les denomina línea quebrada o poligonal continua. Por ejemplo:

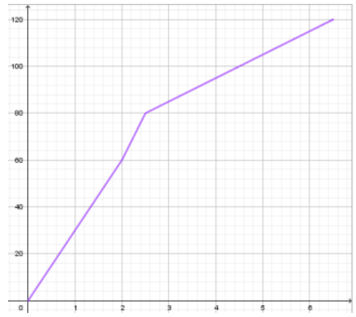

Figura 3: Gráfica cartesiana correspondiente a una función de acumulación, donde se asume que el punto de partido es el origen.

A diferencia de la manera de abordar el grupo de actividades anterior, para este grupo de actividades consideramos la pertinencia del trabajo en equipo. Esta manera nos permitirá observar y escuchar las discusiones a partir de lo que hicieron en el grupo en problemas anteriores y estos nuevos planteamientos. Del mismo modo, la discusión grupal es indispensable para crear un tipo de cierre o institucionalización de los contenidos e ideas que queremos promover.

5.8 Características del grupo de actividades 3: Acumulación con base en una razón de cambio variable: el caso lineal

En este grupo de actividades se tratan situaciones problema en donde la razón de cambio está cambiando en todo momento; por lo tanto, se requiere crear una estrategia para "transformar" este tipo de problemas a problemas que se hayan resuelto previamente, como lo son los de razón constante por intervalos.

Para la solución de estos problemas, como mencionamos, creamos una estrategia para hacer que lo que siempre está cambiando, se suponga que se mantenga constante por pequeños intervalos, esto nos generará diferentes representaciones algebraicas y cálculos en donde se necesitará que el estudiante cuente con competencias en álgebra.

Como se mencionó en apartados anteriores de este documento, describimos cuatro maneras de "fotografiar" o "congelar" lo que siempre está cambiando y así tomar valores numéricos de la razón de cambio como constantes para todo el intervalo, generando funciones de aproximación.

En otras palabras, una cierta razón de cambio variable $r(x)$ puede ser reemplazada, en un intervalo dado de valores de x que van desde cierto valor inicial x_i hasta cierto valor final x_f, de las siguientes cuatro maneras:

- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable en el inicio del intervalo, esto es, $r(x_i)$, asumiendo que tiene un valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;

- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable al final del intervalo, esto es, $r(x_f)$, se asume como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el promedio de los valores exactos de la razón de cambio variable al inicio y al final del intervalo, esto es, $\frac{r(x_i)+r(x_f)}{2}$, asumiéndolo como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo;
- por último, en todo el intervalo desde x_i hasta x_f, se toma el valor exacto de la razón de cambio variable en el punto medio del intervalo, esto es, $r\left(\frac{x_i+x_f}{2}\right)$, se toma como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo.

Se requiere enfatizar el hecho de que esta sustitución es racional si el intervalo en cuestión es pequeño. Cuando analizamos el comportamiento de una razón de cambio en un intervalo de tamaño considerable, podemos aplicar esta misma idea dividiendo dicho intervalo en un conjunto de subintervalos pequeños, y aplicando en cada uno de ellos cualquiera de las cuatro maneras de sustitución ya descritas, o bien todas. De este modo tendremos que una razón de cambio variable en un intervalo grande puede ser sustituida por una razón de cambio que es constante por pequeños intervalos.

Una vez planteada la estrategia de "transformación", describiremos, de manera breve, la estrategia para resolver, de manera aproximada, los problemas diseñados para este grupo.

Plantearemos problemas en donde serán conocidas dos cosas:

a) la expresión algebraica explícita $r(x)$ para cierta razón instantánea de cambio, y
b) el hecho de que $r(x) = \frac{dR}{dx}$, donde $a \leq x \leq b$.

En estas condiciones, la tarea consiste en encontrar la expresión algebraica explícita $R(x)$ de la magnitud variable R en términos de x, para cualquier valor permisible de ésta en el dominio dado, $a \leq x \leq b$.

En un primer momento, la solución a los problemas será aproximada. Queda claro que deberá ser *dinámica*, lo que significa que deberemos considerar a x como una auténtica variable, es decir, asumir el hecho de que x toma consecutivamente distintos valores numéricos en distintos momentos, comenzando con su *valor inicial* $x_0 = a$, pasando por su *valor actual* x, y llegando hasta su *valor final* $x_f = b$. Para lograr eso será necesario proceder ejecutando los siguientes pasos:

- *Primer paso*. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente x, que va de su *valor inicial* $x_0 = a$ hasta su *valor actual* x (esto es, el intervalo $a \leq x$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δx, que con objeto de mejorar nuestra aproximación a la solución podremos posteriormente cambiar haciéndolos aún más pequeños.

- *Segundo paso*. Expresar analíticamente y graficar la función de razón constante de cambio por intervalos $f(x)$, con la que sustituiremos a la razón de cambio siempre variable $r(x)$, en el dominio $a \leq x$. Como hemos mencionado, existen cuatro maneras de realizar esta sustitución, por lo que habrá cuatro funciones de razón constante de cambio por intervalos para el problema.
- *Tercer paso*. Expresar analíticamente y graficar la función aproximada de acumulación $F(x)$ de la magnitud variable de interés, para cualquier valor numérico permisible de x en el dominio $a \leq x \leq b$. En concordancia con las cuatro posibilidades para las funciones de razón constante de cambio por intervalos consignadas en el paso anterior, también habrá cuatro funciones aproximadas de acumulación, para el mismo problema.
- *Cuarto paso*. Analizar en conjunto esas cuatro soluciones aproximadas, y extraer conclusiones válidas sobre el comportamiento de la magnitud acumulada.

Para este grupo de actividades, el trabajo de los estudiantes deberá ser en equipo, y con apoyo de herramientas tecnológicas para la visualización de las diferentes representaciones. Así como en grupos de actividades anteriores, el momento de la discusión grupal será para discutir las características en común que comparten estos problemas. Una vez identificadas estas características, discutir sobre las ideas dinámicas y variacionales de las resoluciones y dar paso a la siguiente estrategia que consistirá en obtener las funciones aproximadas una sola función exacta.

6 Aspectos teóricos

Las herramientas teóricas-metodológicas que seleccionamos para la realización de esta propuesta son las desarrolladas por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), el cual trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y adoptando principios didácticos de tipo socioconstructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, JD., Batanero, C. & Font, V. (2007).

El EOS se compone de 5 grupos o nociones, éstos a su vez conforman un conjunto de herramientas teóricas que permiten un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas. Para la realización de nuestro trabajo haremos uso de 4 nociones. A continuación, se consignan las nociones y las herramientas específicas que seleccionamos.

6.1 Noción de sistema de prácticas

Se considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada para resolver problemas matemáticos. Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas entre personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas (Godino, et al, 2007).

Las herramientas por utilizar de este grupo son:

6.1.1 Significado Institucional de Referencia

Es el significado que usaremos como referencia para el diseño de nuestras actividades. Por las condiciones de nuestro trabajo, tomaremos las ideas desarrolladas por Thompson & Silverman (2007).

6.1.2 Significado Institucional Pretendido (SIP)

Es el significado que queremos promover con el diseño de las actividades que conformarán las secuencias didácticas de nuestra propuesta. Dicho de otra forma, podemos entender este significado como las respuestas esperadas del estudiante.

6.2 Noción de configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas

Es la adopción de una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) que articula de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos (Godino et al, 2007).

Del mismo modo que nos centraremos en la emergencia de los objetos previamente mencionados de las configuraciones, también será de nuestro interés describir y analizar los procesos a los que estos objetos conciernen, es decir procesos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Y del mismo modo, a procesos cognitivos con características duales como procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación. (Godino et al, 2007)

6.3 Trayectoria epistémica

Es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del sistema de prácticas implementado. Estos componentes (problemas, acciones, definiciones, propiedades, argumentos) se van sucediendo en un cierto orden en el proceso de instrucción.

6.4 Noción de la idoneidad didáctica

Es la única de todas de carácter valorativo y se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, ecológico y afectivo. Para propósitos de este trabajo, solo describiremos la que tiene que ver con el componente epistémico.

- *Idoneidad epistémica*, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia (Godino et al, 2007). Lo cual refiere al nivel de similitud entre los significados pretendidos por el diseño y el significado de referencia del cual partimos.

Con la intención de ilustrar los componentes teóricos antes mencionados, a continuación, se describirán nuevamente cada uno de ellos, pero esta vez en función a nuestro proyecto de tesis.

El *Significado Institucional de Referencia* lo construimos, por una parte, con base en un estudio histórico epistemológico del cálculo infinitesimal. Aquí se describirá el trabajo de Arquímedes de Siracusa, quien fue el autor de las ideas germinales del cálculo, también, se describirán los trabajos de Johannes Kepler y Bonnaventura Cavalieri, quienes fueron los autores de los llamados "indivisibles", que contienen ideas infinitesimales. Asimismo, el trabajo desarrollado por Gottfried Wilhelm Leibniz, autor del cálculo infinitesimal, junto a Newton.

La referencia principal, fundamentada a partir de las ideas germinales del cálculo infinitesimal previamente mencionadas, la tomamos del trabajo de Thompson & Silverman (2007) en donde se desarrolla un enfoque variacional para el estudio de la integral como función de acumulación, el cuál será utilizado para el diseño de las secuencias didácticas.

Arquímedes de Siracusa

En la antigua Grecia, los matemáticos de la época abordaron, entre otros, dos problemas importantes para el desarrollo de lo que ahora conocemos como cálculo. Dichos problemas son el cálculo de áreas de polígonos, en especial el del círculo, y el trazo de tangentes. Entre ellos destacan Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) y Arquímedes de Siracusa (287 a. C. – 212 a. C). Eudoxo creó el denominado método de exhaución, que consistía en un procedimiento geométrico de aproximación hacia un resultado, conforme aumentaba el número de lados del polígono Arquímedes hizo lo propio, tomando dicha idea para el cálculo del área del círculo, aplicando el método de Eudoxo en dos partes: por una parte, inscribiendo en una circunferencia polígonos regulares de radio 1 y, por otra, circunscribiendo polígonos con el mismo número de lados que los inscritos. De tal manera que, conforme se aumenten los lados de los polígonos, el área de dichos polígonos se aproximará cada vez más al área del círculo (Figura 4).

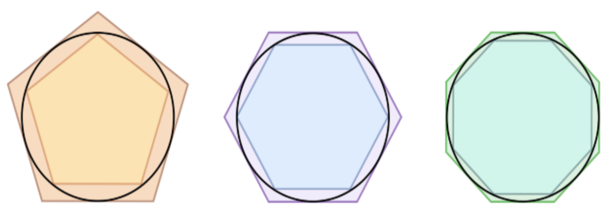

Figura 4 *Método de exhaución*

La fórmula para calcular el área de los polígonos con base en el número de lados era la siguiente:

- Polígono inscrito al círculo:

$$A_{inscrita} = n \cdot \text{sen}\left(\frac{180}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180}{n}\right)$$

- Polígono circunscrito al círculo:

$$A_{circuncrita} = n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

Sustituyendo todas las relaciones tendríamos lo siguiente:

$$A_{inscrita} = n \cdot \sin\left(\frac{180}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180}{n}\right) < A_{círculo} < A_{circunscrita} = n \cdot \tan\left(\frac{180}{n}\right)$$

Arquímedes hizo sus aproximaciones con figuras de 3, 6, 12, 24, 48 y 96 lados. Como el círculo era de radio 1, el logro consistió en la aproximación al número π. A continuación, se muestra la última relación de Arquímedes con respecto al área del círculo.

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}$$

Con las tecnologías actuales se podría hacer una aproximación de cuanto se quisiera, idea que dio origen a lo que se conoce como el límite, estableciéndose como:

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{180}{n}\right)\cdot\cos\left(\frac{180}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\tan\left(\frac{180}{n}\right)=A$$

Como se puede ver, este método tiene como base la idea de aproximación, planteando que el área, tanto de los polígonos inscritos como de los polígonos circunscritos, se asemeja al valor del área del círculo.

Esta idea evolucionó hacia la noción de límite, en la que coloquialmente se usa una frase como la siguiente: la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono (inscrito o circunscrito) es tan pequeña como se desee, y que condujo a la formalización del conocido criterio $\varepsilon-\delta$ para el límite de una función.

Una noción básica para el establecimiento de la idea del límite fue el desarrollo de la teoría de los números reales y la aceptación de propiedades como la llamada Propiedad Arquimediana, propuesta precisamente por Arquímedes cuando declara:

> "Dadas dos magnitudes desiguales, si se corta de la mayor una parte más grande que su mitad, si se corta del resto una parte más grande que su mitad, y si se continúa de este modo sucesivamente, quedará una magnitud que será más pequeña que la menor de las dos magnitudes dadas [originalmente]". (Kline, 1990)

Dicho de otra manera, basados en la noción de números reales, modernamente podemos decir que si tenemos dos segmentos cuyas longitudes son y y x, respectivamente, uno de menor longitud con respecto al otro, entonces existirá un número entero n que, suponiendo que x es el segmento de menor longitud, al multiplicar nx, se obtiene un segmento de longitud mayor a y.

Paralelamente se fue desarrollando una idea diferente, considerando que la circunferencia es un polígono de un número infinito de lados y, por tanto, el cálculo del área de un círculo no se obtendría con un proceso de aproximación, sino mediante el cálculo de una suma infinita, lo cual conduce a una forma diferente de proceder.

Por ejemplo, cuando los involucrados en atender este tipo de problemas, se preguntaron cuánto mide el lado del polígono de un número infinito de lados, en este caso de la circunferencia, la respuesta que dio Leibniz fue que el lado es de longitud inasignable o de longitud infinitamente pequeña. Esto conlleva a la necesidad de considerar que las cantidades infinitamente pequeñas, concebidas de esta manera, no satisfacen la Propiedad Arquimediana pues, por ejemplo, un múltiplo del segmento de longitud inasignable no puede alcanzar una longitud mayor a la de la circunferencia considerada.

Estas dos ideas coexistieron y se desarrollaron, mezclándose en más de una ocasión entre sí. Durante el Siglo XIX se logró la formalización de la noción de aproximación y límite de una función, de tal forma que el cálculo y el análisis matemático las tomaron como base de su desarrollo, desplazando a la noción de magnitudes o cantidades infinitamente pequeñas. La idea de límite y, junto a ella, de la noción de continuidad, se establecieron como base de la teoría de los números reales, en tanto que la noción de magnitud infinitamente pequeña se formalizó muchos años después, específicamente en los trabajos de Robinson (1961).

Si bien la construcción formal realizada por Robinson es compleja y escapa a los objetivos de este trabajo, permite reconocer la existencia formal de las cantidades infinitamente pequeñas (definidas mediante la noción de números hiperreales, que no satisfacen la propiedad arquimediana) y dichas magnitudes ofrecen la posibilidad de usar esta noción que, en algunos de los casos, resulta ser más intuitiva al momento de desarrollar las ideas del cálculo, sin necesidad de recurrir a la noción de límite.

Indivisibles

Continuando con la inquietud de que en este trabajo se muestren las ideas desarrolladas bajo el enfoque del uso de las cantidades infinitamente pequeñas, se mostrarán las contribuciones de diferentes autores alrededor de las ideas de los indivisibles, que es una forma geométrica de tratar dicho enfoque. Cada autor tuvo un tratamiento distinto en la concepción de los indivisibles. Sin embargo, estas ideas contribuyeron al concepto de la integral como suma de cantidades infinitamente pequeñas.

Johannes Kepler

Johannes Kepler (Weil der Stadt, 1571 - Ratisbona, 1630), además de haber sido un astrónomo distinguido por sus leyes de movimiento de los planetas sobre su órbita alrededor del Sol, también contribuyó en el desarrollo de las ideas del cálculo; a causa de un evento desafortunado con un mercader de cavas de vino, Kepler no estuvo de acuerdo con el cálculo de volúmenes de dicho mercader. Por lo que, a partir de este incidente, se dedicó a estudiar cómo calcular áreas y volúmenes de diferentes cuerpos, especialmente cuerpos de revolución. Esto lo llevó a escribir un libro, publicado en 1615, llamado "Nova Stereometria doliorum vinariorum" (Nueva Geometría sólida de los barriles de vino). En él se emplean diversas técnicas infinitesimales para el cálculo de áreas y volúmenes. Las ideas de Arquímedes fueron una gran influencia para Kepler en el desarrollo de su trabajo. Él planteaba diseccionar un sólido en un número infinito de piezas infinitamente pequeñas o sólidos *indivisibles*, de modo que la suma de estas piezas o sólidos le ayudaban a calcular de manera exacta el área o volumen según fuera el caso. Los infinitesimales que manipulaba Kepler tienen la misma dimensión que el cuerpo que quiere medir. Es decir, si quiere calcular el área de un cuerpo, suma elementos de área y si quiere calcular el volumen considera infinitesimales de volumen.

> "Pensó en el volumen de un barril, como el de cualquier otro cuerpo, como formado por numerosas hojas finas adecuadamente dispuestas en capas, y considera

el volumen del barril como la suma de los volúmenes de estas capas, siendo cada una de ellas un cilindro" (Klein, 2004, p. 209).

En la actualidad se utilizan procedimientos similares, con la noción de integral de una función para resolver ese tipo de problemas.

Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (Milán, 1598 - Bolonia, 1647), fue matemático italiano que, años después de que Kepler publicara su libro "Nova Stereometria doliorum vinariorum", publicó el suyo titulado: “Geometria indivisibilibus” en 1635. En dicho libro se declara una aplicación moderna del método de los indivisibles donde, según sea el caso de las dimensiones, expresa lo siguiente:

> “Caso bidimensional: supóngase que dos regiones de un plano (figuras planas) están incluidas entre dos rectas paralelas en ese plano. Si cada recta paralela a estas dos rectas interseca ambas regiones en segmentos de recta de igual longitud, entonces las dos regiones tienen áreas iguales.
>
> Caso tridimensional: supóngase que dos regiones del espacio tridimensional (sólidos) están incluidas entre dos planos paralelos. Si cada plano paralelo a estos dos planos interseca ambas regiones en secciones transversales de igual área, entonces las dos regiones tienen volúmenes iguales” (Eves, 1991, p. 119).

Por otro lado, Edwards (2012, p. 102) afirma lo siguiente:

> "Cavalieri hizo de la noción de indivisible la base de un método geométrico de demostración. No explicó precisamente lo que entendía por la palabra indivisible que empleó para caracterizar los elementos infinitesimales que usó en su método. Cavalieri concibió una superficie como formada por un número indefinido de líneas paralelas equidistantes y un sólido como compuesto por planos paralelos equidistantes, y designa estos elementos los indivisibles de la superficie y del volumen respectivamente."

En las Figuras 5 y 6 se muestra un ejemplo de cada caso del Principio de Cavalieri:

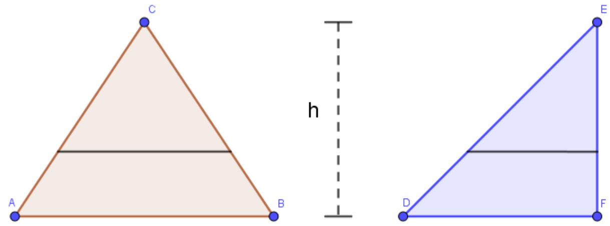

Figura 5: Principio de Cavalieri bidimensional

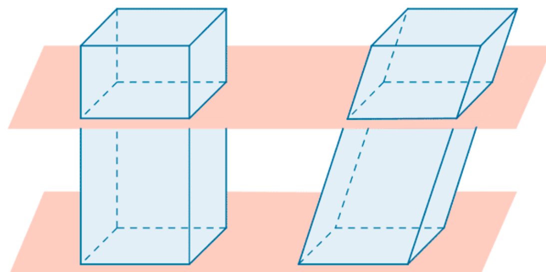

Figura 6: Principio de Cavalieri tridimensional

Los trabajos desarrollados por Kepler y Cavalieri fueron publicados un siglo antes que los trabajos desarrollados por Newton y Leibniz, personajes que consagraron el cálculo infinitesimal bajo ideas distintas. Por una parte, Newton se centró en la idea de convergencia que años después se formalizaría con la idea de límite y, por otra parte, Leibniz se centró en la manipulación de las cantidades infinitamente pequeñas. Debido a esa razón, lo siguiente por mencionar será el desarrollo de las ideas de Leibniz acerca del cálculo que él inventó, y que siglos después Robinson (1961) formalizaría con el llamado "Análisis no Estándar".

Cálculo leibniziano

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) fue un pensador y matemático que revolucionó y, de alguna manera, creó un cálculo en el cual la base de sus fundamentos tuvo relación con las cantidades infinitamente pequeñas. Él tenía un interés por desarrollar una notación matemática apropiada al cálculo, y uno de sus pensamientos tenía que ver con considerar a una curva como un polígono de infinitos lados, o lo que es lo mismo, la longitud del lado de la curva es infinitamente pequeña. De modo que él visualizaba una sucesión de abscisas (x) y ordenadas (y), en donde los puntos (x, y) eran "las piedras" y "el camino" era la curva. Una idea muy parecida a ésta, fue la que tuvo Arquímedes con el trazo de tangentes de su espiral. Ver Figura 7.

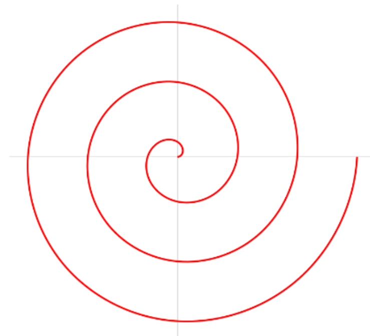

Figura 7: Espiral de Arquímedes

Leibniz conocía los métodos para trazar tangentes de carácter geométrico debido a los trabajos de cuadraturas que se desarrollaban en la época; sin embargo, no le eran de gran utilidad, por lo que se planteó una idea de carácter cinemático, que tenía que ver con trazar las tangentes de la espiral, según la dirección de movimiento de dos puntos sucesivos ubicados en la espiral.

Las diferencias entre los puntos sucesivos (x, y) se analizaban de manera independiente: la diferencia de x se anotaba como dx, mientras que la diferencia y se anotaba como dy. Se entiende, entonces, el diferencial dx como una cantidad infinitamente pequeña en comparación con x, misma idea que aplicaba con la diferencial dy y se nombra ds al lado del polígono de infinitos lados. A estos segmentos de longitud infinitamente pequeña, los denominaba diferenciales. Debido a que se toman puntos infinitamente cercanos, y las propiedades antes mencionadas, se concluiría en que la notación apropiada, utilizando las diferenciales, para representar la razón que existe de una diferencia en relación a la otra, sería $\frac{dy}{dx}$, y se le denominaría *cociente diferencial* (Suárez, 2008).

Con el único propósito de mostrar la manera intuitiva con que se puede calcular las diferenciales del producto y cociente utilizando las cantidades infinitamente pequeñas, se tomarán las siguientes propiedades del trabajo de Bell (1998) que siguen la misma idea, solo que resumida y compacta:

- $d \neq 0$.
- si $d > 0$, entonces d es más pequeño que cualquier número real positivo.
- si $d < 0$, entonces d es mayor que cualquier número real negativo.
- $d^2 = 0$ (y, por lo tanto, todas las potencias superiores de d, como d^3 y d^4, también son 0).

Con esta base, las reglas para obtener las diferenciales del producto y del cociente son las siguientes:

Producto

$$d(z) = d(xy)$$

$$z + dz = (x + dx)(y + dy)$$

$$dz = xy + xdy + ydx + dxdy - xy$$
$$dz = xdy + ydx$$

Cociente

$$d(z) = d\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$z = \frac{y}{x} \text{ o también } y = zx$$
$$dy = zdx + xdz$$
$$dz = \frac{dy - zdx}{x} = \frac{dy - \frac{y}{x}dx}{x} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$$

En un sentido gráfico, podemos decir que la integral se puede ver como la suma de todas las diferencias de las que hablaba Leibniz. Sin embargo, desde un sentido fenomenológico con situaciones físicas, es claro ver que la integral también es un proceso dinámico de acumulación. Por ejemplo, cuando abrimos la llave de agua en un circuito para llenar un recipiente vacío de cualquier capacidad, desde que cae la primera gota de agua, podemos observar que el volumen del recipiente cambió, y que conforme pasa el tiempo, el volumen va cambiando, en este caso, va en aumento. Es decir, el agua se va acumulando dentro del recipiente. La acumulación de las gotas de agua en el recipiente que cae de la llave es una manera intuitiva de concebir la integral. Más allá de formalismos, creemos que podemos rescatar ideas de esa naturaleza utilizando ejemplos de fenómenos físicos que se relacionen con el significado de la integral como acumulación.

Las ideas previamente descritas juegan un papel importante en el SIR de nuestra propuesta debido a que se describen las ideas germinales del cálculo infinitesimal; sin embargo, es necesario hacer énfasis en los siguientes puntos para justificar nuestra decisión al seleccionar este significado:

1) Debido a que el cálculo estudia la variación y el comportamiento de dicha variación, nos parece que la notación matemática desarrollada por Leibniz es más intuitiva, en el sentido que se puede relacionar estrechamente con fenómenos físicos, extendiendo las nociones de diferencial más allá de los tratamientos geométricos hechos por Leibniz y que en buena medida fueron el centro del trabajo de Euler.
2) La caracterización de las cantidades infinitamente pequeñas permite una manipulación algebraica operatoria básica con relación a los conocimientos previos de los estudiantes, y por lo tanto les permite un mejor entendimiento de los cálculos realizados.
3) En un sentido exploratorio, podemos describir y caracterizar dificultades diferentes a las que han sido reportadas al momento de estudiar el cálculo con el enfoque de límite.

Para ilustrar el *Significado Institucional Pretendido,* mostramos una actividad, como las que estaríamos diseñando para nuestra propuesta, más precisamente para el grupo de actividades 3, donde se muestran las respuestas esperadas por los estudiantes.

Como parte de la explicitación del significado pretendido en este diseño, a las preguntas y tareas formuladas en la actividad, les adicionamos posibles respuestas, que en su momento permitirán una mejor valoración de los significados personales construidos por los estudiantes, facilitando la contrastación de los significados correspondientes.

Actividad 3.1

El problema del consumo de energía eléctrica

La razón a la que una fábrica consume energía eléctrica durante la jornada diaria de explotación está dada por la expresión

$$\frac{dW}{dt} = -120t + 240,$$

donde $W(t)$ representa la cantidad de kilowatts consumidos, y t representa el tiempo transcurrido desde el inicio del proceso de operación, que se prolonga durante 16 horas todos los días laborables, e inicia cada día a las 7:00AM.

1. ¿Cuántos kilowatts son consumidos durante la primera hora de operación?

$$W(t) = W_0 - 120\frac{t^2}{2} + 240t$$

$$W(1) = 0 - 120\frac{(1)^2}{2} + 240(1)$$

$$W(1) = 180 \text{ kw}$$

2. ¿Cuántos kilowatts son consumidos durante la última hora de operación?

$$W(t) = W_0 - 120\frac{t^2}{2} + 240t$$

$$W(16) = 0 - 120\frac{(16)^2}{2} + 240(16) = -11520 \text{ kw}$$

$$W(15) = 0 - 120\frac{(15)^2}{2} + 240(15) = -9900 \text{ kw}$$

$$W(15{,}16) = W(16) - W(15) = -11520 - (-9900) = -1620 \text{ kw}$$

3. ¿Cuántos kilowatts se consumen entre las horas novena y duodécima?

$$W(t) = W_0 - 120\frac{t^2}{2} + 240t$$

$$W(12) = 0 - 120\frac{(12)^2}{2} + 240(12) = -5760 \text{ kw}$$

$W(9) = 0 - 120\frac{(9)^2}{2} + 240(9) = -2700\,\text{kw}$
$W(12{,}9) = W(12) - W(9) = -5760 - (-2700) = -3060\,\text{kw}$

4. Usando lo que has aprendido hasta ahora, escribe cuatro expresiones algebraicas que permitan calcular, de manera aproximada, la cantidad de kilowatts $W(t)$, consumidos por la fábrica, cuando han transcurrido t horas desde el inicio del proceso de operación.

- Abscisas

$$t_{\text{ini}} = n\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ ,$$

$$t_{\text{fin}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2}$$

- Funciones de razón de cambio constante por intervalos

Para fines prácticos, llamaré $r(t)$ *a la razón instantánea de cambio* $\frac{dW}{dt}$

$$a)\ r(t_{\text{ini}}) = -120(n\Delta t) + 240 = -120\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\cdot\Delta t\right) + 240$$

$$b)\ r(t_{fin}) = -120(n\Delta t + \Delta t) + 240 = -120\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\cdot\Delta t + \Delta t\right) + 240$$

$$c)\ r(t_{med}) = -120\left(n\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) + 240 = -120\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\cdot\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) + 240$$

- Funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos con notación Sigma

$$a)\ W(t) = W_0 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1}(-120(i\,\Delta t) + 240)\Delta t = \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} -120i\,\Delta t\Delta t + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240\Delta t$$

$$W(t) = W_0 + (-120)\Delta t\Delta t\cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240\Delta t$$

$$b)\ W(t) = W_0 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1}(-120(i\,\Delta t + \Delta t) + 240)\Delta t$$

$$W(t) = W_0 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120) i\,\Delta t \Delta t + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120)\,\Delta t \Delta t + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240 \Delta t$$

$$W(t) = W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120)\Delta t \Delta t + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240 \Delta t$$

$$c)\ W(t) = W_0 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} \left(-120\left(i\,\Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) + 240\right)\Delta t$$

$$W(t) = W_0 + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120) i\,\Delta t \Delta t + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120)\,\Delta t \frac{\Delta t}{2} + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240 \Delta t$$

$$W(t) = W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120)\Delta t \frac{\Delta t}{2} + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240 \Delta t$$

- Gauss ($\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i = \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1\right)}{2} = \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}{2}$)

$$a)\ W(t) = W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240 \Delta t$$

$$= W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]}{2} + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$$

$$= W_0 + (-120)\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$$

$$b)\ W(t) = W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120)\Delta t \Delta t + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240 \Delta t$$

$$= W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]}{2} + (-120)\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \Delta t + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$$

$$= W_0 + (-120)\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} + (-120)\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \Delta t + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$$

$$c)\ W(t) = W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \cdot \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} i + \sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} (-120)\Delta t \frac{\Delta t}{2} + \sum_{i=o}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]-1} 240\Delta t$$

$$= W_0 + (-120)\Delta t \Delta t \frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]}{2} + (-120)\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \frac{\Delta t}{2} + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$$

$$= W_0 + (-120)\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} + (-120)\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \frac{\Delta t}{2} + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t$$

- Funciones aproximadas de acumulación

$$a)\ W(t) = W_0 + \left(-120\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + (-120\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + 240)\ (t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t)$$

$$b)\ W(t) = W_0 + \left(-120\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} + \left(-120\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t\right) + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + (-120\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + 240)\ (t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t)$$

$$c)\ W(t) = W_0 + \left(-120\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2} + \left(-120\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \frac{\Delta t}{2}\right) + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + (-120\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + 240)\ (t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t)$$

5. Usa esas cuatro expresiones algebraicas para obtener el valor exacto de la cantidad de kilowatts $W(t)$, consumidos por la fábrica, cuando han transcurrido t horas desde el inicio del proceso de operación.

- Función exacta de acumulación

$$a)\ W(t) = W_0 + \left(-120\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \cdot \Delta t}{2}\right) + 240\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + (-120\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + 240)\ (t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t)$$

$$= W_0 + \left(-120\frac{t \cdot t - t \cdot 0}{2}\right) + 240t + (-120t + 240)\ (t - t)$$

$$= W_0 - 120\frac{t^2}{2} + 240t$$

$$b)\ W(t) = W_0 + \left(-120\frac{\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t \cdot \left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t - \left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t \cdot \Delta t}{2}\right) + \left(-120\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t \cdot \Delta t\right)$$
$$+ 240\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t + \left(-120\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t + 240\right)\left(t - \left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t\right)$$

$$= W_0 + \left(-120\frac{t \cdot t - t \cdot 0}{2}\right) + (-120t \cdot 0) + 240t + (-120t + 240)(t - t)$$

$$= W_0 - 120\frac{t^2}{2} + 240t$$

$$c)\ W(t) = W_0 + \left(-120\frac{\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t \cdot \left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t - \left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t \cdot \Delta t}{2}\right) + \left(-120\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t \cdot \frac{\Delta t}{2}\right)$$
$$+ 240\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t + \left(-120\left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t + 240\right)\left(t - \left\lfloor\frac{t}{\Delta t}\right\rfloor\Delta t\right)$$

$$= W_0 + \left(-120\frac{t \cdot t - t \cdot 0}{2}\right) + (-120t \cdot 0) + 240t + (-120t + 240)(t - t)$$

$$= W_0 - 120\frac{t^2}{2} + 240t$$

Para la construcción del significado institucional pretendido por el diseño, al menos en su componente epistémica, deberemos considerar la trayectoria correspondiente a la organización temporal de los objetos matemáticos primarios involucrados, tanto intervinientes como emergentes, las configuraciones en las que éstos se entremezclan entre sí, y los procesos matemáticos que deberán emplearse. En esta tesitura, la actividad que mostramos aquí sólo es un caso particular, más adelante se mostrarán actividades diseñadas de cada grupo de actividades mencionadas en apartados anteriores.

La configuración de objetos y procesos nos permitirá describir la interacción entre *los objetos matemáticos primarios* en la resolución del problema por los estudiantes. Estos objetos pueden ser intervinientes o emergentes de las prácticas matemáticas. A continuación, puede verse como aparecen cada uno de los objetos mencionados:

- Situación problema: Consumo de energía eléctrica
- Lenguaje: Algebraico (representación de las abscisas del punto inicial, final y medio del intervalo de tamaño Δ en el valor de la magnitud independiente, representación de las funciones de razón de cambio constante por intervalos, representación de las funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos con notación Sigma, representación de la simplificación de la suma usando la fórmula de suma de Gauss, representación de funciones aproximadas de acumulación, representación de la función

exacta de acumulación, representación de casos particulares a partir de la función exacta de acumulación).

- Conceptos: Magnitud variable dependiente, magnitud variable independiente, abscisa, razón de cambio, variación, función, covariación, acumulación.
- Procedimientos: Establecer las abscisas correspondientes para los valores inicial, final y media de la razón de cambio, "transformar" la razón de cambio variable por funciones de razón de cambio constante por intervalos utilizando los valores de las abscisas, generar funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos con notación Sigma para cada caso (inicial, final, y media), convertir la notación Sigma en cada una de las funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos por una notación de suma simplificada utilizando la fórmula de sumatoria de Gauss, construir funciones aproximadas de acumulación a partir de las funciones constantes por intervalos, a partir de esas cuatro funciones aproximadas de acumulación, realizar un análisis de tendencias para que Δt se haga despreciablemente pequeño, y obtener una y la misma expresión algebraica de los tres casos, utilizar la función exacta de acumulación para casos particulares.
- Proposiciones: Están en juego diversas proposiciones, sin embargo, resaltamos las que consideramos principales o más importantes como: el principio de unicidad, de continuidad, y de dinamicidad. Así como la caracterización de las cantidades infinitesimales (d):
    - $d \neq 0$.
    - si $d > 0$, entonces d es más pequeño que cualquier número real positivo.
    - si $d < 0$, entonces d es mayor que cualquier número real negativo.
    - $d^2 = 0$ (y, por lo tanto, todas las potencias superiores de d, como d^3 y d^4, también son 0).
- Argumentos: Son representaciones algebraicas que obedecen a una estrategia de convertir una razón de cambio variable por una razón de cambio por intervalos de tamaño variable, y el cálculo de casos particulares a partir de una función exacta de acumulación.

Los objetos matemáticos primarios forman parte de un primer nivel de análisis de la actividad matemática. Un segundo nivel tiene que ver con ciertos atributos contextuales que son caracterizados de manera dual. Sin embargo, éste segundo nivel no tendrá pertinencia desde dichos atributos sino desde los procesos que emergen a partir éstos, y nos serán de utilidad, una vez se tenga el diseño de actividades completo, para analizar la actividad matemática desde una perspectiva proceso-producto. Algunos de los procesos que emergen en la resolución de los problemas planteados por nuestro diseño son los siguientes:

- Idealización: El estudiante se imagina el caso hipotético de la situación problema planteada.
- Materialización: Cuando se plantea un problema de la vida cotidiana, es sencillo que este proceso aparezca, debido a que se pueden proporcionar videos o casos específicos de la vida diaria.
- Personalización: En la manifestación de sus respuestas bajo un sistema de prácticas específico y personal, debido a la intención de la actividad, buscamos que el estudiante exprese su significado personal en la actividad planteada.

- Institucionalización: Cuando los significados personales de cada estudiante converjan en uno solo propuesto por el profesor de lo que se esperaba que respondieran, o bien, al dar la respuesta correcta del problema.
- Representación: El estudiante elaborará gráficas y expresiones algebraicas con base en las relaciones existentes entre dos magnitudes variables intervinientes.
- Generalización: El estudiante genera fórmulas para el análisis de un fenómeno en progreso y para el cálculo de acumulación de una magnitud variable de interés con respecto a una razón de cambio.
- Particularización: Utiliza fórmulas generales para el análisis de un fenómeno en progreso y para el cálculo de acumulación de una magnitud variable de interés en casos particulares.

Para construir un orden y establecer una dirección sobre la emergencia tanto de los *objetos matemáticos primarios* como de los procesos involucrados en la construcción del SIP, decidimos utilizar la herramienta teórica denominada *trayectoria epistémica*. Un ejemplo breve de la manera en que emplearíamos esta herramienta es el siguiente:

En la actividad planteada, se parte de una situación problema que tiene que ver con el consumo de energía eléctrica durante la jornada diaria de explotación. Se parte por identificar las magnitudes variables intervinientes y entender la razón de cambio que se plantea en el problema, en este caso, una razón de cambio variable modelada con una expresión algebraica lineal. Acto seguido, se identifica que es una razón de cambio variable y se aplica la estrategia de transformar lo variable en constante por intervalos, para esto se determinan las abscisas (inicial, final y media) que se utilizarán para obtener los valores de la razón de cambio constante por intervalos, se procede a expresar algebraicamente las funciones de razón de cambio constante por intervalos. Debido a que lo que interesa es la cuantificación de la acumulación en la magnitud variable de interés, se plantean funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos con notación Sigma, para realizar la contribución a la acumulación de los intervalos completos por la magnitud variable independiente. Debido a que esta notación genera procesos muy largos según sea la delimitación del tamaño del intervalo, se hace una simplificación de la suma utilizando la fórmula de Gauss; de esta manera, la cantidad de sumas se reducen y, por lo tanto, los procesos de cuantificación son menores. Una vez hecho esto, tenemos funciones aproximadas de acumulación que, mediante un análisis de tendencias en el cual el intervalo se hace infinitamente pequeño, se obtienen una serie de igualdades y simplificaciones, en la que resulta una sola función de acumulación exacta para el problema planteado. Por último, se utiliza esa fórmula de acumulación exacta para casos particulares planteados.

Con la intención de ilustrar los componentes e indicadores establecidos por la *idoneidad epistémica*, se muestra la Tabla 1, y elaboramos una Tabla 2, en función al diseño planteado previamente, como se realizó en el trabajo de Grijalva e Ibarra (2017).

La Tabla 1 se compone de dos columnas, una primera donde se describen los componentes que conforman la idoneidad, y otra donde se describen los indicadores correspondientes a los componentes mencionados. La caracterización propuesta tiene un papel importante en nuestros planteamientos, pues será la guía de cómo cubrir las cuestiones epistémicas de nuestro diseño de actividades. La actividad diseñada, de la cual hacemos mención en páginas anteriores, contiene una situación problema caracterizada como de *contextualización* cuyo propósito es brindar un primer acercamiento al estudiante sobre las ideas de acumulación en una situación extramatemática. De la misma manera, en el diseño se atienden las demás componentes e indicadores (Ver Tabla 1). Posteriormente se diseñarán actividades de ejercitación, con el propósito de que los estudiantes puedan automatizar o mecanizar ciertos procedimientos y razonamientos para la resolución de problemas, y por último actividades de aplicación, en las cuales el estudiante deberá utilizar los conocimientos construidos en actividades previas, pero con otros planteamientos, por ejemplo, otros contextos extramatemáticos. Las características de las demás idoneidades: cognitiva, mediacional, interaccional, ecológica, y afectiva, serán explayadas posteriormente.

Tabla 1 Componentes e indicadores correspondientes a la idoneidad epistémica

Componentes	Indicadores			
Situaciones problema	Contextualización	Ejercitación	Aplicación	Problematiza ción
Lenguaje s	Verbal	Gráfico	Tabular	Algebraico
Reglas: definiciones, proposiciones, procedimientos	Claridad	Correctos	Adaptación al nivel educativo	Enunciados fundamentale s al nivel educativo
Argumentos	Explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas al nivel educativo	Promoción de situaciones para argumentar		
Relaciones	Entre los objetos matemáticos	Identificación de significados de los objetos intervinientes	Articulación de significados de los objetos intervenientes	

Como se mencionó, la Tabla 2 tiene que ver con la caracterización de las componentes y los indicadores de la idoneidad epistémica en función de la actividad planteada en páginas anteriores. Se realiza una descripción de la situación problema planteada, en este caso el consumo de energía eléctrica durante una jornada diaria de explotación, los distintos lenguajes que están interviniendo y emergiendo al momento de la resolución de la situación problema, así como los conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que se deberán desarrollar para la resolución de cada inciso planteado en la actividad.

Tabla 2 Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica con relación a la actividad planteada (Contextualización)

Situaciones problema	Consumo de energía eléctrica durante una jornada diaria de explotación
Lenguajes	Algebraico (representación de las abscisas del punto inicial, final y medio del intervalo de tamaño Δt en el valor de la magnitud independiente, representación de las funciones de razón de cambio constante por intervalos, representación de las funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos con notación Sigma, representación de la simplificación de la suma usando la fórmula de suma de Gauss, representación de funciones aproximadas de acumulación, representación de representación de la función exacta de acumulación, representación de casos particulares a partir de la función exacta de acumulación).
Conceptos	Magnitud variable dependiente, magnitud variable independiente, abscisa, función, razón de cambio, variación, covariación, acumulación.
Proposiciones	Están en juego diversas proposiciones, sin embargo, resaltamos las que consideramos principales o más importantes como: el principio de unicidad, de continuidad, y de dinamicidad. Así como la caracterización de las cantidades infinitesimales (d): • $d \neq 0$. • si $d > 0$, entonces d es más pequeño que cualquier número real positivo. • si $d < 0$, entonces d es mayor que cualquier número real negativo. • $d^2 = 0$ (y, por lo tanto, todas las potencias superiores de d, como d^3 y d^4, también son 0).
Argumentos	Representaciones algebraicas que obedecen a una estrategia de convertir una razón de cambio variable por una razón de cambio por intervalos de tamaño variable, y el cálculo de casos particulares a partir de una función exacta de acumulación.

Procedimientos	- Establecer las abscisas correspondientes para los valores inicial, final y media de la razón de cambio - Transformar la razón de cambio variable por funciones de razón de cambio constante por intervalos utilizando los valores de las abscisas - Generar representaciones algebraicas de funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos con notación Sigma para cada caso (inicial, final, y media) - Convertir la notación Sigma en cada una de las funciones aproximadas de acumulación a partir de intervalos completos por una notación de suma simplificada utilizando la fórmula de sumatoria de Gauss - Construir funciones aproximadas de acumulación a partir de las funciones constantes por intervalos, a partir de esas cuatro funciones aproximadas de acumulación - Realizar un análisis de tendencias para que Δt se haga despreciablemente pequeño, y obtener una y la misma expresión algebraica de los tres casos, utilizar la función exacta de acumulación para casos particulares.

7 ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este apartado se describen las fases metodológicas para el desarrollo del proyecto de tesis. Dado que el diseño de intervención es parte fundamental del proyecto, se destinan las dos últimas fases de la metodología planteada para hablar de ello. La descripción de dichas fases tiene como propósito enlazar el cumplimiento de los objetivos, tanto el general como los específicos, en concordancia con el grado de avance que se tiene hasta ahora y con las próximas acciones a realizar. El orden de las fases metodológicas se planteó con base en el orden de los objetivos específicos (OE). Es importante precisar que en algunos momentos se trabajará en diferentes fases de manera simultánea según se avance en el proyecto. A continuación, describimos dichas fases.

7.1 Fase 1

En esta fase desarrollamos diferentes componentes, como el estudio de las diferentes dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo en general y de la integral, el estudio histórico-epistemológico de las ideas del cálculo desde diferentes enfoques, la revisión de propuestas didácticas a partir de distintos enfoques de enseñanza del cálculo y la integral, el análisis del currículo de la institución en la que se implementará la propuesta, y la selección de herramientas teóricas a considerar para el diseño de nuestra secuencia didáctica. Esta fase está vinculada a los OE1 y OE2. Las acciones por realizar para esta fase son las siguientes:

- Revisar la literatura científica desarrollada en el campo de la Didáctica de la Matemática, específicamente, de estudios sobre las dificultades de enseñanza y aprendizaje del cálculo y la integral, y las propuestas didácticas desarrolladas para la enseñanza del cálculo utilizando el enfoque de límite y el enfoque infinitesimal. Las fuentes para consultar son bases de datos, revistas y actas de congresos propias de la disciplina.
- Revisar la historia de las ideas del cálculo, específicamente los trabajos de Arquímedes, y de precursores en el desarrollo de las ideas infinitesimales como Kepler, Cavalieri y Leibniz.
- Declarar la problemática en la enseñanza de la integral y elementos de justificación para nuestra propuesta, a partir de la revisión realizada.
- Declarar las características del Significado Institucional de Referencia de nuestra propuesta.
- Revisar los planes y programas de estudio de la materia de Cálculo Diferencial e Integral II de las carreras de ingeniería de la Universidad de Sonora.
- Analizar las características del Significado Institucional Pretendido por el currículo de las carreras de ingeniería de la Universidad de Sonora.
- Declarar las herramientas teóricas que sustentará la propuesta.

7.2 Fase 2

En esta fase nos centramos en dos cosas: la caracterización de la integral como función de acumulación con un enfoque infinitesimal y el desarrollo del Significado Institucional Pretendido, en este caso, por el diseño de la propuesta. Esta fase corresponde a los OE2, OE3 y OE4. Las acciones por realizar para esta fase son las siguientes:

- Revisar el enfoque teórico de la integral como acumulación.
- Establecer los principios y criterios de la integral como función de acumulación para el diseño de las secuencias didácticas.
- Diseñar las secuencias didácticas para promover la integral como función de acumulación a partir de los principios y criterios de la integral como función de acumulación y de los indicadores de la idoneidad didáctica del EOS.
- Diseñar applets utilizando el software de GeoGebra para el apoyo visual de las diferentes representaciones geométricas de los modelos matemáticos de fenómenos físicos en progreso.
- Declarar las respuestas esperadas por los estudiantes en las secuencias de actividades.
- Realizar un análisis a priori del diseño de las secuencias didácticas utilizando las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS), en este caso, la emergencia de objetos matemáticos primarios y procesos, la trayectoria epistémica y los componentes de la idoneidad epistémica del Significado Institucional Pretendido por el diseño.

Estas dos primeras fases tienen que ver con un análisis documental para el establecimiento de la problemática a abordar, la caracterización del objeto matemático de estudio (la integral) y el enfoque que utilizaremos para abordar nuestro diseño, del mismo modo, la descripción de las herramientas teóricas que utilizaremos para el desarrollo de la misma. Las siguientes dos fases tienen que ver con el desarrollo de nuestra propuesta de intervención en donde se describen aspectos metodológicos correspondientes al diseño de las secuencias didácticas, la población de interés, los instrumentos de recabación de datos, etc. A continuación, se realiza una descripción más amplia de lo antes mencionado.

7.3 Fase 3

Esta fase consiste en la descripción de los elementos a considerar para la implementación de nuestra propuesta de intervención y recabación de datos. Esta fase corresponde a los OE4 y OE5. Las acciones por realizar para esta fase son las siguientes:

- Diseñar o adaptar las hojas de trabajo con base en las secuencias didácticas del proyecto de intervención.
- Declarar las condiciones específicas de la implementación a realizar.
    - La intervención será realizada con una modalidad presencial, en este caso, el aula de clase. Sin embargo estamos conscientes de las adversidades que podrían ocurrir en el transcurso del tiempo que limitaran esta posibilidad, en dicho caso, haríamos uso de las plataformas virtuales que permitieran una implementación a distancia, como lo son plataformas como Skype, Teams, u otras.

- Los participantes a los que está destinada nuestra propuesta son estudiantes de las carreras de ingeniería. Debido al estado de desarrollo actual de nuestro trabajo, en este momento no nos es posible precisar la cantidad de estudiantes con la que se trabajará.
- Los instrumentos de recolección de datos serán hojas de trabajo donde se plasmen los diseños de las secuencias didácticas diseñadas. El diseño de applets en GeoGebra, como ya se mencionó, tomará un papel de apoyo para la visualización de representaciones geométricas solamente. Los datos recabados serán las respuestas de los estudiantes a dichas secuencias.
- Los instrumentos de observación que utilizaremos en dicha intervención, adicionales a la observación directa, serán dos cámaras de videograbación para analizar con detenimiento las interacciones de los estudiantes en el progreso de nuestra propuesta. Por otro lado, para los momentos en que se promuevan actividades en equipo, nos apoyaremos de los celulares de los estudiantes de cada equipo para generar grabaciones de voz que contengan las discusiones que éstos lleven a cabo y tener mayor claridad de los argumentos declarados.
- Con base en los avances y consideraciones actuales, suponemos que el tiempo destinado para cada secuencia didáctica planteada nos tomará dos sesiones de 1 hora cada una. Por el momento aún no se ha establecido el número de actividades didácticas que se diseñarán, por lo que la cantidad de secuencias didácticas a diseñar, por lo que no es posible, de momento, declarar el tiempo total destinado para la implementación de nuestra propuesta.

- Implementar el material didáctico (hojas de trabajo y applets de GeoGebra) diseñado con base en las condiciones consideradas.
- Recabar los datos de la implementación con los instrumentos diseñados.

7.4 Fase 4

En esta etapa se realiza un análisis a posteriori de la propuesta a partir de los datos recabados con los instrumentos previamente diseñados. Dicho análisis consiste en una contrastación de similitudes entre el Significado Personal Declarado por parte de los estudiantes y el Significado Institucional Pretendido por el diseño. Esta fase corresponde al OE6 y OE7. Las acciones por realizar para esta fase son las siguientes:

- Revisar el Significado Personal Declarado en las hojas de trabajo recabadas en la implementación de la propuesta didáctica.
- Revisar las diferentes interacciones entre los estudiantes y el profesor a partir de las grabaciones realizadas.
- Tomar nota de las dudas planteadas o comentarios imprevistos durante las sesiones, y rescatar elementos que nos parezcan relevantes de las diferentes participaciones por parte de los estudiantes, así como de la pertinencia de los momentos de institucionalización por parte del profesor.
- Realizar una valoración del entendimiento de la integral como acumulación bajo un enfoque infinitesimal a partir de la similitud o concordancia entre el Significado Personal Declarado por los estudiantes y el Significado Institucional Pretendido por el diseño.

- Realizar un análisis de la valoración previa caracterizando las dificultades presentadas o detectadas por los estudiantes al resolver las secuencias didácticas, dudas planteadas en las sesiones de implementación y notas realizadas por parte del profesor, a partir de la observación de las videograbaciones y con el propósito de realizar futuras mejoras en los planteamientos de nuestra propuesta didáctica.

CRONOGRAMA

En este apartado se presenta un cronograma de los avances actuales y las próximas fases a completar de nuestro trabajo.

Actividades	**Semestres**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Análisis preliminar								
Aplicación de experimentación exploratoria								
Análisis de experimentación exploratoria								
Establecimiento del grupo de participantes								
Diseño de applets								
Diseño de secuencias didácticas								
Diseño de instrumentos de recabación de datos								
Implementación de la intervención didáctica								
Análisis de los datos recabados								

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araya, D., & Pino-Fan, L. (2022). Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable. [Tesis de doctorado inédita]. Universidad de Los Lagos.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Ingeniería didáctica en educación matemática, 1, 97-140.

Bell, J. L. (1998). A Primer of Infinitesimal Analysis. Cambridge University Press.

Cantoral, R., (2001). Enseñanza de la matemática en la educación superior. Sinéctica, Revista Electrónica de Educación, (19), 3-27.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres. Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME, 322-326.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: Modèles spontanés et modèles propres. Actes du Cinquième Colloque du Groupe Internationale PME, 322-326.

Edwards, C. (2012). The historical development of the calculus.[Sl].

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. ZDM–Mathematics Education, 53(3), 591-604.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., & Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 3(11). Recuperado a partir de https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1246

Eves, H. (1991). Two surprising theorems on Cavalieri congruence. The College Mathematics Journal, 22(2), 118-124.

Fuster, J. L. L., & Gómez, F. J. S. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. Divulgaciones Matemáticas, 5(1/2), 61-76.

Galaz, José (2015). Uso de la sumatoria para acercarse al concepto de Integral como Suma de Riemann. RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática, 9(1), 71-77.

García Retana, J. Á. (2013). Reflexiones sobre los estilos de aprendizaje y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. Actualidades Investigativas en Educación, 13(1), 362-390.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 111-132.

Godino, Juan D.; Batanero, Carmen; Font, Vicenç (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), pp. 127-135.

Grijalva, A. e Ibarra, S. E. (2017). Una experiencia de diseño de actividades de enseñanza con base en los criterios de idoneidad didáctica. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Jiménez, J.R. (2021). Visualizando funciones aproximadas y exactas de acumulación. En Ibarra, S., del Castillo, A., Zaldívar, J. y Quiroz, S. (Eds), Modelación, visualización, y representaciones en la era numérica (1a ed., Vol. 1. pp. 187-208). Editorial AMIUTEM, 2021.

Jiménez, J.R. (s.f.). Materiales para el curso de Cálculo Diferencial e Integral I. No publicado.

Keisler, H. J. (2013). Elementary calculus: An infinitesimal approach. Courier Corporation.

Klein, F. (2004). Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis (Vol. 1). Courier Corporation.

Kline, M. (1990). Pensamiento matemático desde la antigüedad hasta los tiempos modernos.

Martínez, Mihály (2016). Una situación didáctica para introducir la noción de la suma de Riemann. En Estrella, Soledad; Goizueta, Manuel; Guerrero, Carolina; Mena, Arturo; Mena, Jaime; Montoya, Elizabeth; Morales, Astrid; Parraguez, Marcela; Ramos, Elisabeth; Vazquez, Patricia; Zakaryan, Diana (Eds.), XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática (pp. 381-385). Valparaíso, Chile: SOCHIEM.

Navarro, M. B., García, S. B., Godino, J. D., & Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral: Implications for teaching and learning Calculus. REDIMAT, 10(1), 4-40.

Pantoja, R. R., López Betancourt, A., Ortega Árcega, M. I., & Hernández García, J. C. (2014). Diseño instruccional para el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso en el ITCG, la UJED, la UASLP y la UAN. UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 10(37). Recuperado a partir de https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/745

Robinson, A. (1961). 1. Nonstandard analysis, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 64, 432-440.

Selden, J.; Mason, A. y Selden, A. (1994). Even good calculus students can't solve non-routine problems. En Kaput, J. y Dubinsky, E. (Eds.), Research issues in undergraduate mathematics learning. MAA 3, pp. 19-26.

Suárez, M. M. (2008). Orígenes del cálculo diferencial e integral: Historia del análisis matemático.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. Educational Studies in Mathematics, 26, 275- 298.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Thompson, P. W., Ashbrook, M., & Milner, F. (2019). Proyecto DIRACC. Cálculo: Newton, Leibniz y Robinson se encuentran con la tecnología. http://patthompson.net/ThompsonCalc/

Trujillo-Castro, J., Vera-Gutiérrez, C., & Saraza-Sosa, D. (2019). Ingeniería didáctica como recurso metodológico para el aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad. Perspectivas, 4(1), 39-47.

Vasquez, I. G. E. (2015). Construcción de los conceptos partición y sumas de Riemann con Geogebra. In XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática (pp. 1-11).

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., & Müller, D. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Premisa, 29, 9-19.

Wagner, J. F. (2017). Students' obstacles to using Riemann sum interpretations of the definite integral. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(3), 327-356. Disponible en línea en http://link.springer.com/article/10.1007/s40753-017-0060-7.