



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

**PROPUESTA DE DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE
PARA FAVORECER EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS DE
MODELIZACIÓN DE FENÓMENOS DONDE INTERVIENE LA
VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL**

Documento predoctoral que presenta
ULISES BLADIMIR GARCÍA ORTIZ

Directores de Tesis:

Dra. Silvia Elena Ibarra Olmos

Dr. Marco Antonio Santillán Vázquez



Posgrado en
**Matemática
EDUCATIVA**
Universidad de Sonora

Hermosillo, Sonora

Diciembre, 2023

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (Conahcyt) por el apoyo que ha brindado para mi formación, con CVU número 376372.

Contenido

1 INTRODUCCIÓN	1
2 ANTECEDENTES	3
2.1 Desarrollo Profesional Docente de Matemáticas	3
2.1.1 Conocimientos y habilidades del profesor de matemáticas.....	4
2.1.2 Conocimientos y habilidades para el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas	7
2.1.3 Conocimientos y habilidades para el diseño de actividades didácticas.....	8
2.2 Modelización Matemática	9
2.2.1 Perspectivas y Enfoques de la Modelización Matemática	10
2.2.2 La modelización en la enseñanza de las Matemáticas.....	14
2.2.3 Algunas dificultades en la implementación de la modelización en el aula.....	15
2.3 La Variación Directamente Proporcional	17
2.3.1 Epistemología de la Variación Directamente Proporcional	17
2.3.2 La variación directamente proporcional en el currículo escolar	18
3 ESTADO DEL ARTE.....	21
3.1 El diseño de actividades para la enseñanza de las matemáticas	21
3.2 El diseño de actividades didácticas en la formación de profesores de matemáticas	23
3.3 Formación y actualización docente para incorporar la modelización en el aula	25
3.4 Propuestas de formación y actualización docente para el estudio de la VDP	27
4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS.....	31
4.1 El desarrollo profesional docente de matemáticas de bachillerato en México.....	31
4.2 El diseño de actividades didácticas de modelización en bachillerato	33
4.3 El estudio de la Variación Directamente Proporcional en el nivel medio superior.....	34
4.4 Objetivo.....	36
4.4.1 Objetivos específicos:.....	36
5 ELEMENTOS TEÓRICOS	39
5.1 Competencias y Conocimiento Didáctico-Matemáticas del profesor.....	39
5.1.1 Competencia matemática del profesor.....	41
5.2 Herramientas del EOS	45
5.2.1 Idoneidad didáctica	47

5.3 La modelización como estrategia didáctica.....	48
6 ASPECTOS METODOLÓGICOS	51
7 LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS	55
7.1 Descripción de curso-taller.....	56
7.2 Estructura.....	57
8 CRONOGRAMA.....	63
9 REFERENCIAS.....	65

1 INTRODUCCIÓN

El profesor de nivel medio superior prepara ciudadanos capaces de integrarse a un nivel educativo superior y/o incorporarse al campo laboral, por lo tanto, tiene la tarea de diseñar estrategias para que los estudiantes adquieran conocimientos disciplinares y también desarrollen habilidades para la resolución de tareas.

La enseñanza de las matemáticas en este nivel es llevada a cabo principalmente por profesionistas como ingenieros, actuarios, arquitectos y licenciados en matemáticas que pudieran tener los conocimientos disciplinares que el nivel académico requiere, pero esto no garantiza que su actividad de enseñanza se lleve con éxito.

El conocimiento didáctico es esencial para que el profesor proponga espacios de enseñanza adecuados para favorecer nuevos conocimientos y habilidades en sus estudiantes, para lograr esto esencialmente el profesor lleva a cabo tres tareas: planear y diseñar sus clases, desarrollarlas a través de su guía frente a un grupo y valorar el impacto que tienen. Por lo tanto, es necesario que existan espacios que permitan a los profesores conocer herramientas didácticas (como la modelización) que serían de utilidad en el desarrollo de sus tareas, especialmente en el diseño de actividades, las cuales son el punto de partida de su proceso de enseñanza.

Ante lo anterior se propone un proyecto de intervención educativa para desarrollar habilidades de diseño de actividades de modelización en profesores de nivel medio superior.

La presentación de este proyecto en este documento está estructurada en diferentes apartados, cada uno de éstos aporta elementos que respaldan la creación de esta propuesta.

En el primer apartado se describen los antecedentes sobre el desarrollo profesional docente de matemáticas profundizando en los conocimientos y habilidades del profesor, respecto a la modelización matemática se describen diferentes perspectivas y dificultades sobre su uso dentro del aula, y por último se presenta la Variación Directamente Proporcional (VDP) como el tema matemático a estudiar en este proyecto, describiendo su epistemología y su presencia en diferentes currículos.

En el apartado Estado del Arte se presentan algunas investigaciones y aportaciones realizadas por expertos en Matemática Educativa referentes al diseño de actividades, al estudio e incorporación de la modelización en el aula y se describen propuestas de formación docente para estudiar razones, proporciones, proporcionalidad y variación, los cuales se consideran como temas matemáticos que integran la VDP.

Posteriormente se presentan los elementos de la problemática identificada en el desarrollo profesional docente de matemáticas en nivel medio superior, sobre el diseño de actividades de modelización y es estudio de la VDP cerrando el apartado con la declaración de los objetivos del proyecto de intervención educativa que aquí se presenta.

A partir de la declaración de los objetivos, se describen los elementos teóricos que respaldan el proyecto, en este apartado se presenta una descripción del modelo de Competencias y Conocimiento Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM), de las herramientas teóricas-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y del ciclo de modelización de Blum & Leiß (2007), para cada uno se presentan argumentos que fueron considerados para su selección y el papel que tendrán en el diseño y valoración de un curso-taller.

El apartado siguiente corresponde a los aspectos metodológicos donde se describen una serie de acciones y los productos esperados para cada uno de los objetivos específicos, se aclara que, dado el nivel de avance en el proyecto algunas acciones se encuentran en desarrollo mientras que otras se llevarán a cabo más adelante.

La presentación de la propuesta y sus características está presente en el apartado siguiente a los descritos anteriormente, aquí se hace una descripción amplia de sus objetivos, el uso de las herramientas teóricas para el diseño y la estructura que se considera óptima para su desarrollo.

En el cronograma, se presenta las actividades que forman parte del desarrollo de este proyecto de tesis, en éste se muestran los avances del trabajo y los tiempos programados para la conclusión de esta.

Para finalizar, se enlista las referencias correspondientes a las fuentes consultadas en cada uno de los apartados descritos anteriormente.

2 ANTECEDENTES

2.1 Desarrollo Profesional Docente de Matemáticas

Desde hace algunos años dentro del ámbito educativo se ha mostrado interés en el Desarrollo Profesional Docente (DPD), generando a través de investigaciones, elementos para organizar, clasificar y valorar las características, habilidades y conocimientos necesarios para que el profesor ejerza su labor adecuadamente.

La profesionalización docente es motivo de atención en diversas instituciones políticas y educativas, con el fin de concientizar, regular y promover la formación de profesores en distintos niveles educativos, considerando que lo anterior es una pieza fundamental para la mejora de la calidad de la educación.

En México, los inicios de formación y actualización de profesores atendían principalmente a futuros docentes en los niveles básicos, poniendo poca atención a los niveles Medio Superior y Superior. Sin embargo, en los últimos años se han realizado esfuerzos gubernamentales por distintas instituciones para capacitar y actualizar a profesores de todos los niveles.

Si bien no existe una definición única para DPD, ya que la comunidad científica y educativa le ha dado significados de acuerdo con el contexto y época de su estudio, durante años el término se relacionó con la formación permanente, continua y en servicio del profesor. Sin embargo, en la actualidad el DPD hace referencia a la concepción del docente como un profesional de la enseñanza, que lleva un proceso evolutivo de reflexión, acumulación de experiencias, habilidades y conocimientos (Ramos y Vásquez, 2020).

El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México, define al Desarrollo Profesional Docente como:

“un proceso de aprendizaje y crecimiento continuos que se da a lo largo de una trayectoria, cuyo punto de partida es la formación inicial, seguida de la incorporación a la docencia y la trayectoria laboral posterior. Este proceso está integrado por diversas experiencias formativas en las que el docente asume una participación activa y responsable de las demandas de su contexto, así como de la reflexión permanente, individual y colectiva, en la práctica y sobre ella (INEE, 2018: 15).

Esta definición aplica para todo aquel individuo que ejerza la profesión de docente en cualquier asignatura y nivel educativo. Como se ha mencionado el proceso de formación continua es un componente más del Desarrollo Profesional Docente, y por lo tanto no se deben considerar como sinónimos.

En Matemática Educativa, Lima (2019), considera el DPD de matemáticas como la transformación de la práctica a través de la reflexión sobre lo que dice hacer y lo que hace a partir

de sus concepciones sobre las matemáticas, las matemáticas escolares, la enseñanza y el aprendizaje y su conocimiento profesional, especializado, necesario para el ejercicio de su profesión (p. 3).

Acorde a lo anterior, en este trabajo el desarrollo profesional docente se refiere a los cambios que tiene el profesor de matemáticas sobre los conocimientos disciplinares y didácticos que obtiene con la experiencia laboral y que aplica en su quehacer diario. Se entiende que el profesor se encuentra en un proceso de reflexión sobre su labor y en la búsqueda de la mejora de sus prácticas de enseñanza, a través de la formación y actualización continua en conocimientos matemáticos, curriculares y pedagógicos, que serán parte del desarrollo de sus actividades didácticas.

Como se ha mencionado, tales conocimientos han sido caracterizado por investigadores en educación y en Matemática educativa, incorporando en sus estudios algunas habilidades que un profesor de matemáticas debe tener para que el proceso de enseñanza sea significativo para el estudiante.

2.1.1 Conocimientos y habilidades del profesor de matemáticas

¿Qué significa que un profesor de matemáticas se desarrolle profesionalmente? ¿Qué competencias y conocimientos debe tener el docente para enseñar matemáticas? Investigadores en Matemática Educativa proponen que un profesor debe tener ciertos conocimientos y competencias que le permitan desarrollarse de manera profesional.

Shulman (1986), a través de un análisis histórico de las necesidades del sistema educativo estadounidense, identifica que, en el año de 1975 el principal requerimiento para que un profesionista se desempeñase profesionalmente dentro del aula, era que contara con conocimiento del contenido; en el mismo estudio reporta que, cien años más tarde, aproximadamente en 1980, el mismo sistema educativo de Estados Unidos hacía énfasis en el conocimiento pedagógico del docente.

A partir de lo anterior, propone una manera de articular ambos conocimientos, además de incorporar el conocimiento curricular, de tal forma que afirma que para que los docentes logren con éxito sus prácticas de enseñanza, deben contar con el Conocimiento Pedagógico del Contenido, buscando, analizar de manera puntual la forma en que los docentes abordan dentro del aula algún contenido específico que promueva el aprendizaje de este con sus estudiantes.

En términos generales, Shulman habla sobre el conocimiento del contenido, pero desde una perspectiva de su enseñanza, es decir, considerando las formas de representación de los objetos matemáticos, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, demostraciones, en simples palabras las distintas formas de representar y formular situaciones que pudieran hacer comprensible dichos objetos para los estudiantes.

El conocimiento pedagógico del contenido considera también la búsqueda de los factores que hacen que el aprendizaje de ciertos temas sea fácil o difícil, profundizando su estudio en las nociones, concepciones y preconceptos de los estudiantes, los cuales, en caso de que sean erróneos

o se encuentren lejos de los referentes institucionales, deben ser reorganizados por los docentes, acercándoles a dichos referentes.

El conocimiento del currículo permite al docente relacionar el contenido disciplinar, en este caso matemático, con otros cursos que en un determinado momento estén desarrollando sus estudiantes, de tal manera que fomente el uso de las matemáticas en diferentes contextos (escolares y no escolares).

Después de las aportaciones de Shulman (1986), sobre la necesidad de ampliar el estudio de los conocimientos de los profesores, principalmente con el Conocimiento Pedagógico de Contenido, distintos investigadores profundizaron y ampliaron tal aportación considerando que los maestros efectivos tienen también un conocimiento único de las ideas y el pensamiento matemático de los estudiantes.

Lo anterior se puede observar en trabajos como el de Hill et al. (2008), respecto a la concepción y desarrollo de medidas del conocimiento combinado de los profesores sobre el contenido y los estudiantes; estos autores consideran que su trabajo podría aportar mejoras en el Conocimiento Pedagógico de Contenido, y permitir medir la capacidad de los profesores para el diseño de instrucción y la capacidad para motivar a los estudiantes a aprender matemáticas.

Hill et al. (2008) definen conocimiento del contenido y de los estudiantes como aquel que considera el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden un contenido en particular, considerando los errores o conceptos que surgen durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes, buscando comprender por qué algunos temas específicos son fáciles o difíciles para los mismos.

En su trabajo proponen el término de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés), el cual se fundamenta en la visión de Shulman, incorporando elementos puntuales como los conocimientos que están presentes en el Conocimiento del Contenido y el Conocimiento Pedagógico del Contenido que debe tener un profesor.

A partir de las aportaciones anteriores, investigadores en Matemática Educativa como Schoenfeld & Kilpatrick (2008), proponen un marco provisional de competencias para la enseñanza de las matemáticas y consideran que los profesores de matemáticas deben conocer las matemáticas escolares en profundidad y amplitud.

Los autores se refieren a la profundidad cuando el profesorado conoce los orígenes curriculares, las direcciones del contenido, dónde se han enseñado las matemáticas y a dónde conducen, entienden cómo las ideas matemáticas crecen conceptualmente. Respecto a la amplitud se refiere al dominio de distintas formas de conceptualizar algún contenido matemático según el nivel donde se desempeñen, además de tener una visión de cómo realizar conexiones de los contenidos enseñados con otros temas del mismo nivel.

Proponen que el docente de matemáticas reconozca a sus estudiantes como pensadores y como aprendices, es decir, al realizar su actividad debe considerar que sus alumnos no son solo

receptores de información, sino que tienen la capacidad de reflexionar y crear conocimientos y habilidades que les permitan utilizar las matemáticas en distintos contextos.

Por lo anterior, el profesor de matemáticas debe ser capaz de crear y de gestionar entornos de aprendizaje para promover el desarrollo de ciertas competencias en sus estudiantes, a través de la planificación y el análisis de los conocimientos que éstos tienen, considerando también, el desarrollo de normas en el aula, que permitan establecer desde sus prácticas la "enseñanza para la comprensión".

Godino et. al (2017), al igual que otros autores como Hill, Ball & Schilling (2008), consideran que el profesor de matemáticas debe de conocer y ser capaz de realizar las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas matemáticos que son abordados por los estudiantes del nivel correspondiente, y debe saber articularlos con los bloques temáticos posteriores, es decir, el conocimiento del profesor de matemáticas debe ir desde el conocimiento común hasta el conocimiento ampliado.

Godino (2009), resalta que es importante que dentro de las capacidades del profesor también se deben incluir la organización de la enseñanza, el diseño de tareas que promuevan un aprendizaje significativo en sus estudiantes, así como conocer el uso de los recursos adecuados y la comprensión de aquellos factores que intervienen en la enseñanza y el aprendizaje.

Lo anterior atiende a que el docente debe ser capaz de diseñar y gestionar entornos de aprendizaje, fundamentados en sus conocimientos disciplinares, didácticos, curriculares y sobre sus estudiantes, con el fin de promover en ellos el desarrollo de ciertas habilidades y conocimientos que les permitan proponer soluciones a problemas dentro de su entorno.

Por otra parte, la autorreflexión sobre las prácticas de enseñanza debe ser una actividad constante que le permita al profesor identificar fortalezas y debilidades de su quehacer. Tal reflexión exige al educador examinar, enmarcar e intentar resolver los dilemas de la práctica en el aula, además ser consciente y cuestionar los supuestos y valores que aporta a la enseñanza (Chapman, 2009). A través de este proceso reflexivo, podría desarrollar nuevos patrones de pensamiento para abordar las complejidades de la enseñanza; además, el desarrollo de patrones reflexivos pudiera permitir al profesor alejarse de sus formas rutinarias y considerar opciones educativas alternativas que tengan impacto en los diseños de actividades que promueva en su quehacer.

El construir relaciones que apoyen el aprendizaje y reflexionar sobre la propia práctica, son otras competencias que deberían tener los profesores de matemáticas; en este aspecto, los profesores deben de crear el ambiente y las relaciones para que los estudiantes tengan la libertad de proponer, ser escuchados y brindar apoyo a sus compañeros.

También algunos investigadores proponen, dentro de los conocimientos y habilidades del profesor de matemáticas antes mencionados, conocimientos sobre el uso de herramientas tecnológicas (Koehler y Mishra, 2009) y conocimiento de ciclos de modelización matemática (Pollak (2012), Kaiser & Schwarz (2010), Bassanezi (1994) y Sadovsky (2005)), como elementos necesarios para favorecer su desempeño profesional.

Dadas las tareas fundamentales que realiza el profesor de matemáticas, como diseñar actividades de enseñanza, implementarlas y valorar los resultados obtenidos en sus estudiantes el profesor debe tener los conocimientos y habilidades mencionados anteriormente, los cuales se profundizan en los siguientes apartados y secciones.

2.1.2 Conocimientos y habilidades para el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas

El uso de la tecnología en la enseñanza en las matemáticas ha sido motivo de estudio por investigadores de la Matemática Educativa. Reportes de investigación (Sinclair & Robutti, 2014) afirman que el uso de las herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas ha tenido dos funciones principales:

- (a) como apoyo para la organización del trabajo del profesor
- (b) como apoyo para nuevas formas de hacer y representar las matemáticas.

Como se ha mencionado, el conocimiento pedagógico del contenido y las competencias que todo docente de matemáticas debe tener para llevar a cabo un proceso de enseñanza de calidad, ha sido motivo de estudio por investigadores de la Matemática Educativa (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Shulman, 1986; Hill et al., 2008) definiendo teóricamente tales competencias, y se han tratado de definir desde una perspectiva pragmática con herramientas de distintos marcos teóricos (Pino-Fan et. al, 2022).

Con la incorporación de las herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza, Koehler y Mishra (2009), hacen una propuesta de un modelo que considera que el uso de la tecnología no puede cambiar (o cambiarse) aislándose de otros aspectos de la práctica docente, es decir, dichos autores articulan el conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido del profesor (TPACK). El docente tiene la tarea de familiarizarse con las tecnologías (sistema informático algebraico, software de geometría dinámica, hojas de cálculo), conocer los recursos disponibles e integrarlos en sus diseños de actividades didácticas.

De igual forma, la Sociedad Internacional de Tecnología en Educación (ISTE®), y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM), considera que el profesor necesita enseñar, trabajar y aprender en la era digital, es decir, actualizar continuamente el conocimiento sobre la tecnología y su aplicación para apoyar el aprendizaje, formando el desarrollo de lecciones de matemáticas que aprovechen los entornos ricos en tecnología y la integración de herramientas digitales en la instrucción diaria, inculcando una apreciación por el poder de la tecnología y su impacto potencial en la comprensión y el uso de las matemáticas por parte de los estudiantes.

En el contexto nacional, el impacto de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza ha sido tan profundo, que las instituciones gubernamentales de educación en distintos niveles han considerado incorporarlas en sus agendas de trabajo. Por ejemplo, el perfil docente para el nuevo Marco Curricular Común de la Educación Media Superior en México (MCCEMS) respecto al

desarrollo de habilidades digitales en su entorno como parte de su práctica docente menciona lo siguiente:

“Las y los docentes necesitan estar preparados para empoderar a sus estudiantes con las ventajas que les aportan las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Escuelas y aulas –ya sean presenciales o virtuales– deben contar con docentes que posean las competencias y los recursos necesarios en materia de TIC y que puedan enseñar de manera eficaz las asignaturas exigidas, integrando al mismo tiempo en su enseñanza conceptos y habilidades de estas.”

La incorporación de las herramientas tecnológicas y digitales en la enseñanza de las matemáticas es una tarea que el profesor debe llevar a cabo de manera consciente y reflexiva, es decir, para considerarlas en los diseños de actividades didácticas el docente debe tener claro el propósito de que se desea lograr con su uso, además de conocer fundamentos teóricos que enriquezcan y favorezcan la incorporación y tratamiento de objetos matemáticos propios del currículo escolar.

2.1.3 Conocimientos y habilidades para el diseño de actividades didácticas

Para llevar a cabo la tarea de diseñar actividades didácticas, el profesor de matemáticas debe tener conocimientos y habilidades que le permitan promover el aprendizaje significativos de sus estudiantes.

Tales conocimientos y habilidades o competencias han sido mencionadas en secciones anteriores, los cuales incluyen conocimientos del contenido, pedagógico del contenido, del contenido y los estudiantes, curriculares, de resolución de problemas, del contexto, de herramientas digitales, además de habilidades de autorreflexión de su práctica por parte de los docentes, de anticipación de posibles soluciones a las situaciones problema propuestas, entre otros. (Shulman, 1986; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008; Hill et al., 2008; Chapman, 2009)

Pino-Fan et. al (2022) coinciden con lo mencionado anteriormente, afirmando que el profesor debe considerar la adaptación curricular, la riqueza de significados matemáticos de la noción estudiada, el contexto y los recursos. Además, enlistan una serie de subcompetencias para la competencia matemática del profesor, describiendo en cada una diferentes niveles a lograr; las subcompetencias son resolución de tareas, propuesta de problemas y análisis de las respuestas a un problema planteado.

De tal manera que, en su propuesta, amplían el estudio del conocimiento didáctico matemático del profesor, categorizando de manera puntual niveles en los que se encuentra un profesor al momento de diseñar actividades didácticas.

Pochulu et. al, (2016) consideran que las actividades didácticas o tareas, son el punto de partida de la actividad de los estudiantes, procurando a través de su uso, promover el aprendizaje. El profesor de matemáticas tiene la responsabilidad de proponer y diseñar actividades didácticas que formarán parte del trabajo en el aula, por lo tanto, el diseño de actividades es crucial para lograr una enseñanza de calidad.

Por lo tanto, el profesor de matemáticas que busque diseñar actividades didácticas que busquen favorecer el aprendizaje significativo, debe tener una serie de conocimientos y habilidades como:

- Conocimiento matemático: sobre los objetos matemáticos de estudio (Shulman, 1986; Godino, 2009)
- Conocimiento didáctico matemático: de qué manera presentar, estudiar y desarrollar el estudio de las matemáticas (Hill, Ball & Schilling, 2008; Godino et. al, 2017)
- Conocimiento curricular: sobre el nivel educativo, que se pretende con el estudio de las matemáticas en dicho nivel, que conocimientos preliminares son necesarios y que impacto tiene en los niveles posteriores (Schoenfeld & Kilpatrick, 2008)
- Conocimiento de sus estudiantes: cómo aprenden, que conocimiento y nociones tienen sobre las matemáticas a estudiar (Hill et. al, 2008; Schoenfeld & Kilpatrick, 2008)
- Conocimiento en la resolución de problemas: diferentes maneras de abordar una situación problema, las posibles dificultades que pudieran surgir al resolverla, los errores comunes de los estudiantes ante un tipo de problemas, que tipo de tarea es pertinente utilizar y en qué momento (Godino, 2009)
- Conocimiento del contexto y recursos disponibles: cuales son las situaciones problemas que pudieran tratarse, con que recursos se cuentan para desarrollar las actividades (Pochulu et. al, 2016)
- Conocimiento de herramientas digitales: de qué manera y en qué momento se puede utilizar la tecnología, las dificultades presentes en su incorporación, las ventajas que pudiera tener en el desarrollo de las actividades (Koehler y Mishra, 2009)
- Conocimiento de teorías de enseñanza: cuál es el modelo óptimo para considerar dentro del diseño de las actividades (Pochulu et. al, 2016)

Además de lo anterior, el profesor de matemáticas debe articular con sentido cada uno de esos conocimientos y habilidades, siendo esto una tarea compleja que, en la mayoría de las veces, se pudiera entender como algo simple por los sistemas educativos.

En propuestas curriculares actuales como la Nueva Escuela Mexicana (NEM) y el Marco Curricular Común de Educación Media Superior (MCCEMS), el profesor de matemáticas tiene la tarea de diseñar y codiseñar actividades didácticas, las cuales deben tener sentido para los estudiantes y su comunidad, de tal manera que la incorporación de situaciones y análisis de fenómenos de física, química, economía, y otras áreas se pueden estudiar a través de herramientas como la modelización, la cual ha sido estudiada desde diferentes enfoques por distintos investigadores en Matemática Educativa, tal como se describe en el siguiente apartado.

2.2 Modelización Matemática

La modelización matemática, tiene un papel importante dentro de una práctica de enseñanza donde se relaciona el mundo real con las matemáticas, siendo esto de gran interés para cualquier

nivel de enseñanza. Para Blomhøj, (2004), las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos.

Biembengut & Hein, (2004) y Córdoba (2011), consideran la modelización matemática como una herramienta de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos, ya que pudiera permitir al alumno no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar.

El crecimiento que ha tenido la presencia de la modelización en estudios e investigaciones ha permitido propuestas para su clasificación en diferentes perspectivas y enfoques, las cuales sugieren y fundamentan el uso de ciclos de modelización con fines educativos, tal como se mencionan a continuación.

2.2.1 Perspectivas y Enfoques de la Modelización Matemática

A partir de lo anterior y enfocado principalmente al aprendizaje de las matemáticas, la incorporación de situaciones contextualizadas que promueven la modelización matemática se ha tratado desde diferentes enfoques y perspectivas, por ejemplo:

- a) La Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011), son modelos generales que se han enfocado en el análisis de la actividad matemática que surge dentro del proceso de modelización.
- b) Liljedahl & Santos-Trigo, (2019) consideran la modelización matemática como una actividad esencial para la resolución de problemas, es decir, como una herramienta que permite representar y tratar matemáticamente una situación problema determinada.
- c) Borromeo, (2006) y Abassian, et. al (2020) han estudiado la modelización matemática sobre las diferentes maneras en que se han estructurado en ciclos y las perspectivas sobre este proceso.

Con el fin de conocer la forma en que se abordan, los fundamentos teóricos que sustentan y se utilizan en cada perspectiva. Kaiser-Meßmer (1986) engloban dos perspectivas principales: la pragmática, enfocada en la capacidad de los estudiantes para aplicar las matemáticas en la solución de situaciones o problemas prácticos, y la perspectiva científico humanista, centrada en la capacidad que tienen los estudiantes para crear relaciones entre las matemáticas y el mundo real.

Kaiser & Sriraman (2006), a partir de la identificación de los objetivos epistemológicos y de las teorías con mayor impacto sobre la modelización, definieron seis perspectivas de modelización en la educación matemática:

- a) La modelización realista o aplicada como aquella donde se aplican las matemáticas para representar la realidad.

- b) La modelización contextual, utiliza las matemáticas para resolver problemas reales y en su proceso de solución considera no solamente el análisis del contexto, sino también el razonamiento matemático.
- c) La modelización educativa, se plantea la modelización como una práctica escolar, y su objetivo principal está relacionado con la pedagogía y la materia.
- d) La modelización sociocrítica, se enfoca en analizar la participación social de los estudiantes en la construcción de modelos, además de utilizar problemas socialmente relevantes para los alumnos.
- e) La modelización epistemológica o teórica es una perspectiva de modelización impulsada por la teoría y centrada en las formas de matematización para las cuales se consideró la modelización como una herramienta.
- f) La modelización cognitiva, se centra en comprender el proceso cognitivo que llevan a cabo los individuos que resuelven los problemas auténticos planteados y cuya modelización matemática es relativamente compleja.

Cada perspectiva entiende el proceso de modelización de forma distinta, dependiendo de sus objetivos particulares, es decir, si su interés está encaminado a la solución de un problema original o al desarrollo de teoría propia de la matemática educativa. Cualquiera que sea el caso, se considera el proceso de modelización como una serie de distintos pasos que son parte de un proceso cíclico para resolver problemas reales a través del uso las matemáticas y sus herramientas.

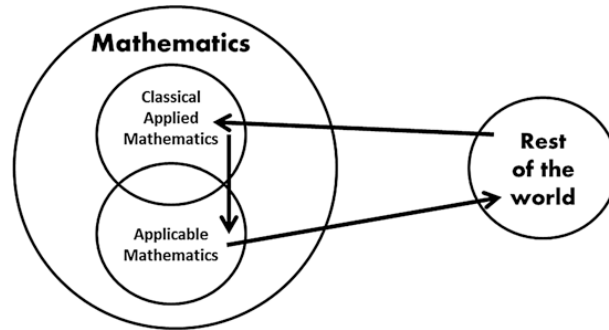
En términos generales, el proceso cíclico antes mencionado está formado por los siguientes pasos:

- A) Una vez identificada o planteada la situación del mundo real a tratar (comprensión), se simplifica para la construcción de un modelo basándose en distintas suposiciones y factores que permitan crear un modelo matemático aproximado de la situación;
- B) Ya que se cuenta con el modelo, se pueden utilizar las herramientas matemáticas pertinentes para darle solución.
- C) Dicha respuesta se debe interpretar para validarla en términos de la situación real;
- D) En caso de que los resultados obtenidos no satisfagan la solución, es necesario reconsiderar el modelo planteado o el proceso de su solución para modificarlo y repetir el ciclo.

Estos pasos generales forman parte de un ciclo de modelización y han sido estudiados desde diferentes enfoques dependiendo de su uso en investigación o en propuestas de enseñanza, por ejemplo, uno de los primeros planteamientos al respecto es el de Pollak (1979), el cual ha influido en el desarrollo de otros ciclos de modelización, se puede observar en la Figura 1 que tal propuesta de ciclo está compuesto por tres elementos dentro de dos *mundos* diferentes pero conectados, el *mundo real* y el *mundo matemático*, tal como se ha determinado en otros ciclos de modelización.

Figura 1

Ciclo de modelización de Pollak (1979, p. 233)



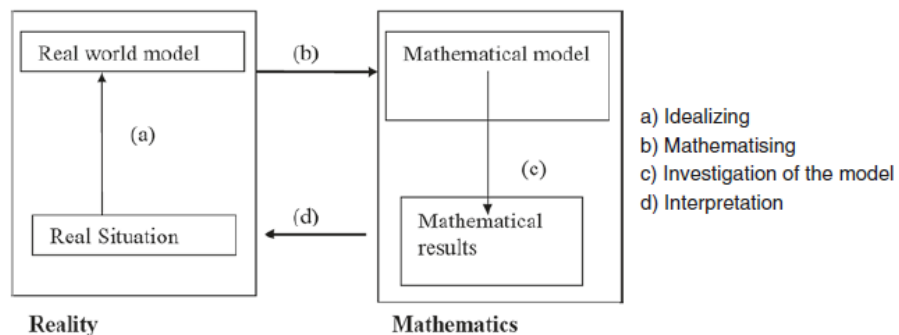
Cada ciclo de modelización se entiende de manera distinta dependiendo de los fines para los que se utilizan, es decir, para un matemático aplicado la interpretación es de forma completamente diferente a un profesor de matemáticas o a un investigador.

En el caso de que la modelización se utilice dentro del contexto educativo para favorecer el uso de las matemáticas se han propuesto ciclos de modelización con otros elementos a considerar y coincidiendo con la existencia de los *dos mundos* mencionados por Pollak.

Un ejemplo es el ciclo de modelización didáctica donde a partir de la situación real, que es dada a través del problema/tarea real, es necesario idealizar esta situación real para construir un modelo, posteriormente se puede matematizar y construir un modelo matemático, obteniendo resultados matemáticos que serán interpretados dentro de la situación real (Blum, 1996, y Kaiser, 1995, como se citó en Huincahue, 2017), tal como se muestra en la Figura 2.

Figura 2.

Ciclo de modelado de Blum (1996) y Kaiser (1995). a) Idealización. b) Matematización. c) Investigación del modelo. d) Interpretación

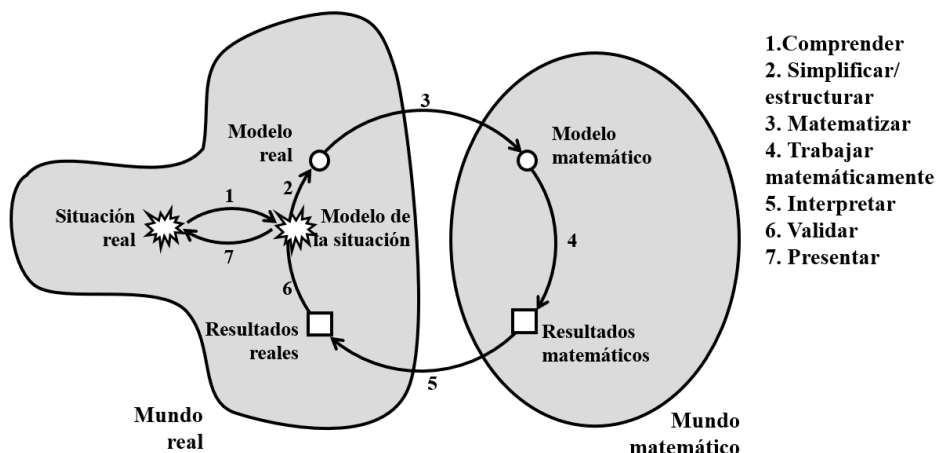


En la propuesta realizada por Blum & Leiß (2007), el ciclo se centra en los procesos cognitivos de los individuos durante los procesos de modelización, consideran al modelo de la situación como la fase más importante durante el proceso de modelización. Su ciclo se enfoca en la transición entre la situación real y el modelo matemático construido como una fase de comprensión de la actividad.

A través del modelo de situación y la representación mental de la situación, se da una visión cognitiva de los procesos de modelado en la que se desarrollan siete fases, tal como se muestra en la Figura 3.

Figura 3.

Ciclo de modelización matemática desarrollado por Blum & Leiß (2007).



Expertos en modelización y en distintos enfoques teóricos se han basado en este último ciclo mencionado haciendo algunas modificaciones a sus partes y enfocándose en particularidades según su objetivo a lograr. Por ejemplo, Haines (2000) se enfoca en la necesidad de reportar los resultados del proceso de modelización, además de incluir de forma explícita el refinamiento del modelo. Blum (2011) hace énfasis en los análisis cognitivos dentro del proceso de modelización, principalmente en la comprensión de la situación por parte de los alumnos.

Dentro de la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática se distinguen dos enfoques que contrastan entre sí, el enfoque holístico y el enfoque atomístico. El primero está relacionado con el desarrollo de competencias de modelización dentro del aula, para lograrlo es necesario que el individuo se enfrente a situaciones donde surjan procesos completos de modelización matemática, considerando que el grado de dificultad y complejidad estén dentro sus capacidades.

Por otra parte, el enfoque atomístico se centra en algunas partes del proceso de modelización, y por lo tanto considera que implementar problemas que requieran modelización de forma completa, sobre todo al principio de un curso, requeriría utilizar bastante tiempo y no sería suficientemente eficaz para que los estudiantes logren las competencias de modelización de manera individual. En la actualidad, la comunidad de matemática educativa coincide en que ambos enfoques deben y pueden integrarse para mejores resultados de la modelización matemática dentro del aula.

En distintas propuestas curriculares vigentes se incorporan dentro de la enseñanza de las matemáticas situaciones que fortalecen la relación con otras ciencias a través del uso de la modelización, valorando que para su aplicación es necesario conocer cuáles conocimientos

disciplinares tienen los estudiantes y de qué manera los aplican dentro de su contexto. Por ejemplo, en la propuesta curricular actual para el nivel medio superior en México se hace explícita la importancia de la modelización como herramienta para atender la transversalidad e interdisciplinariedad de las distintas áreas de estudio.

La presencia de la modelización en diferentes niveles educativos con el fin de favorecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tiene sus orígenes desde hace varias décadas, lo cual se reporta en el siguiente apartado.

2.2.2 La modelización en la enseñanza de las Matemáticas

Desde hace décadas se han realizado esfuerzos por incorporar problemas contextuales en la enseñanza de las matemáticas, principalmente desde el nivel básico. Klein (1905) citado por Kaiser (2014), a principios del siglo XX, propone incluir situaciones que permitan crear y aplicar modelos en la educación matemática para niños de alto rendimiento, haciendo énfasis en mantener un equilibrio entre las aplicaciones y las matemáticas puras.

En los años 60's, como una reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la aritmética que se sustentaba en Holanda, y a la aplicación en las aulas de la “matemática moderna” o “conjuntista”, nace la Educación Matemática Realista (EMR), cuyo fundador es Hans Freudenthal (1905-1990). Para Freudenthal, la matemática es una actividad humana, que se encuentra potencialmente al alcance de todas las personas, siendo así, un proceso de organización y estructuración del mundo real denominado matematización, por lo tanto, la enseñanza de las matemáticas debe estar conectada con la realidad, permanecer cercana a los alumnos y ser relevante para la sociedad en la toma de decisiones humanas.

Dentro de las tendencias actuales a nivel mundial, en la enseñanza de las matemáticas se busca la incorporación de situaciones reales para introducir y desarrollar conceptos y objetos matemáticos. A partir del mundo real se formula el problema, se resuelve, valida e interpreta con la realidad de la situación; lo cual contrasta con resolver ejercicios de manera mecánica y repetitiva como tradicionalmente se promueve.

Confrey (2007), afirma que la modelización está dando nueva vida a las ideas de la alfabetización matemática, y por consiguiente debería afectar las matemáticas tal como se enseñan. Esta perspectiva argumenta que cada vez más personas deben entender cómo las matemáticas transforman el proceso de modelización, dan forma a las afirmaciones que se pueden y deben hacer, e influyen en los recursos y concepciones sociales.

Investigadores como Pollak (2012), Kaiser & Schwarz (2010), Bassanezi (1994) y Sadovsky (2005), consideran que la incorporación de la modelización matemática en todos los niveles educativos es una manera de conducir el aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados con conocimientos de otras disciplinas, además de motivar a los estudiantes a utilizar las matemáticas en su entorno.

Las matemáticas escolares tienen una relación explícita con disciplinas como la física, química, biología, economía y ciencias sociales donde se crean o utilizan modelos matemáticos para resolver problemas propios de cada área. Pollak (2012), considera que, aunque esas ciencias utilizan matemáticas dentro de su estudio, la tarea de la educación matemática debe enfocarse principalmente en aprender y practicar el proceso de modelización matemática.

La enseñanza de las matemáticas según Sadovsky (2005), debe ofrecer a los estudiantes la oportunidad de reinventar las ideas y herramientas matemáticas a partir de matematizar situaciones problemáticas reales presentes en distintos contextos a través de la interacción con sus compañeros de clase y bajo la cuidadosa guía del docente. Por lo tanto, la modelización matemática en el aula debe ser considerada como una vía para que los estudiantes tengan una experiencia de producción de conocimientos de ciertos objetos matemáticos.

La base de la educación matemática se centra en la actividad de matematización de fenómenos, situaciones, problemas, o manifestaciones de la vida real en las que un tema u objeto matemático se encuentra presente dentro de éstos. Esta tarea no es fácil para el profesor de matemáticas que pretende incorporar la modelización dentro de sus diseños de actividades. Lo anterior ha sido estudiado y reportado por distintos investigadores como se muestra a continuación.

2.2.3 Algunas dificultades en la implementación de la modelización en el aula

Blum (2011) y Stillman et. al, (2010), exponen que cada paso del proceso de modelización es una barrera cognitiva potencial para los estudiantes, afirmando que existen “bloqueos” en los que los estudiantes se estancan y por lo tanto no tienen progresos significativos al resolver una situación dada, produciendo errores en sus procedimientos de modelización. Mencionan también que es importante enfatizar la importancia de estudiar la transición entre fases o pasos realizados en el proceso de modelización para incidir en la disminución de los bloqueos cognitivos de los estudiantes a través de la intervención mínima y oportuna del docente.

El profesor de matemáticas que diseñe actividades didácticas de modelización debe establecer entornos de aprendizaje que tengan sentido para los estudiantes y que al mismo tiempo sean un desafío interesante para resolver, además de identificar problemáticas presentes en la realidad, representar esa realidad en modelos físicos, digitales y /o matemáticos, y contrastar dichos modelos con la situación para validarlos, (Kaiser, 2014).

Para lograr lo anterior el docente debe conocer las herramientas didácticas para el diseño de actividades o secuencias de aprendizaje, las condiciones y necesidades de la comunidad estudiantil, el currículo escolar, los contenidos matemáticos a tratar, y conocimiento de los elementos presentes dentro de los ciclos de modelización.

La tarea de reconocer los contextos adecuados y su relación con las matemáticas no es algo simple para el profesor. Bonotto (2007), afirma que para que se logre realizar tal tarea el profesor debe considerar una modificación en su estilo de enseñanza de las matemáticas (seguramente influenciada por la forma en que aprendió), revisar sus posturas y creencias sobre el conocimiento

cotidiano para la resolución de problemas matemáticos, tener una visión de las matemáticas incorporadas en el mundo real para que sea un punto de partida para el diseño de sus actividades y realizar investigación del papel que tienen las matemáticas en las ideas y prácticas de la comunidad donde se desarrollan sus alumnos.

Kaiser (2014), afirma que el profesor de matemáticas y de ciencias básicas debe identificar e interpretar situaciones reales dentro del contexto de sus estudiantes, para realizar propuestas innovadoras sobre el uso y desarrollo de conceptos matemáticos propios del nivel donde se desempeñan. Tales propuestas pudieran promover el proceso de modelización de situaciones reales en contextos matemáticos, a través de distintos medios y representaciones.

Con respecto a los docentes, Borromeo (2011), a través de grabaciones de algunas clases donde se trabajó con modelización, caracterizó tres tipos diferentes de maestros. Algunos de los profesores subrayaron los aspectos formales mientras apoyaban a los estudiantes durante su proceso de modelización y discusiones sobre las soluciones de los problemas de modelización, mientras que otros enfatizaron los aspectos relacionados con la realidad para validar los resultados y ayudar a los estudiantes. Un tercer tipo consideraba tanto aspectos matemáticos formales como aspectos del mundo real.

Blum et. al, (2007), consideran que, para lograr el proceso general del ciclo de modelización en el aula, es necesario que los diseños de actividades didácticas sigan una serie de pasos que guíen el proceso, los cuales deben favorecer y desarrollar habilidades que permitan alternar entre la realidad y las matemáticas, analizando y evaluando los modelos construidos.

Cada ciclo de modelización tiene diferentes subprocesos o pasos los cuales deben ser considerados por el profesor al incorporarlos en sus diseños de estrategias didáctica. Dichos subprocesos abonan de forma parcial el proceso general de la construcción de un modelo, Greefrath (2015) propone las siguientes:

“Construcción: Los estudiantes construyen su propio modelo mental a partir de un problema dado y así formulan una comprensión de su problema.

Simplificar: los estudiantes identifican información relevante e irrelevante de un problema real.

Matematizar: los estudiantes traducen situaciones reales específicas y simplificadas en modelos matemáticos (por ejemplo, términos, ecuaciones, figuras, diagramas y funciones).

Interpretación: Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos de la manipulación dentro del modelo con la situación real y así obtienen resultados reales.

Validar: Los estudiantes juzgan los resultados reales obtenidos en términos de plausibilidad.

Exposición: Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos en el modelo con la situación real, y así obtienen una respuesta al problema.” (p. 175)

Como se ha mencionado en este apartado la tarea de reconocer situaciones que favorezcan el estudio de las matemáticas a través de la modelización es una tarea compleja para los profesores, sin embargo, el conocimiento de la presencia de algunos contenidos matemáticos en situaciones de la cotidianidad de una comunidad pudiera favorecer su estudio, por ejemplo, se puede advertir la presencia de las proporciones, razones, proporcionalidad y la variación en distintas situaciones dentro de contextos escolares y no escolares, las cuales pueden ser aprovechadas para articular tales contenidos en un contenido integrador como la Variación Directamente Proporcional (VDP), la cual se define en el siguiente apartado.

2.3 La Variación Directamente Proporcional

Dentro de las actividades diarias del ser humano, existen situaciones donde es necesario relacionar ciertas variables, representarlas y estudiar su relación para predecir el comportamiento de algunos fenómenos; ejemplos de esto se pueden observar al relacionar las cantidades de un producto o servicio con su precio, la cantidad de material a utilizar en un trabajo determinado dependiendo de las condiciones en donde se llevará a cabo, la cantidad de gramos a incluir dentro de una receta dependiendo de las raciones a elaborar, entre otras.

Se puede advertir que al igual que en los ejemplos anteriores, en los fenómenos presentes dentro del estudio de otras ciencias como la física, química, biología y ciencias sociales existen relaciones directas entre variables que se pueden representar matemáticamente por medio de razones, proporciones, o una constante de proporcionalidad, dichos objetos matemáticos forman parte de los contenidos disciplinares en diferentes niveles educativos.

En el presente trabajo se asume que la articulación e integración de tales objetos matemáticos son origen de la noción de Variación Directamente Proporcional (VDP), y por lo tanto en los siguientes subapartados se hace una descripción sobre sus orígenes y su presencia dentro del currículo escolar.

2.3.1 Epistemología de la Variación Directamente Proporcional

A través de su estudio epistemológico, Oller & Gairin (2013) consideran que la proporcionalidad es tratada desde dos diferentes contextos, el primero empleado en el libro de *Los Elementos de Euclides* (s. III a.n.e.) donde se relacionan dos magnitudes homogéneas, y el otro *El comentario de Liu Hui al Jiu Zhang Suan Shu* (s. III) que no hace distinción para relacionar magnitudes distintas, como por ejemplo, el peso de arroz con su precio, el tamaño de un terreno con impuestos, entre otras relaciones.

El impacto de la primera forma de considerar las proporciones contribuyó en gran medida a las aportaciones de la escuela Pitagórica (Siglo VI a.d.C). Aquí la proporcionalidad tenía como fundamento la razón, la cual a su vez era concebida como una relación y la proporción como una relación entre relaciones. Tal concepción, generó el descubrimiento de la inconmensurabilidad, para Guacaneme (2016), este descubrimiento permitió caracterizar los conceptos de razón y proporción.

Para dar posible solución a la inconmensurabilidad, según lo expuesto por Puertas (1994), Eudoxo de Cnido, partiendo de lo inexpresable a través de la razón entre dos cantidades inconmensurables y generando la idea de eliminar la dificultad definiendo no a la razón misma, sino a la igualdad de razones declara:

Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente (Puertas, 1994, p. 11).

Con lo anterior, Eudoxo aportó la teoría de las proporciones geométricas, introduciendo la noción de magnitud, que resultaba de gran utilidad para tratar segmentos, ángulos, áreas y volúmenes; en tal caso, tanto la razón como la proporción solo tenían sentido en la geometría, no en la aritmética, al no tratarse de números.

Con el surgimiento del Álgebra y de la Geometría Analítica existe una transición de las descripciones geométricas a descripciones algebraicas de las relaciones, la clásica teoría de las proporciones griega tiene una transformación y se reformula para ampliar su ámbito de aplicación a magnitudes no geométricas y su empleo en las ciencias naturales.

El estudio de las razones, proporciones y proporcionalidades es la base para la concepción de la variación directamente proporcional; las consideraciones didácticas para su incorporación en distintos currículos escolares tienen su atención principal en aspectos cognitivos de los estudiantes.

2.3.2 La variación directamente proporcional en el currículo escolar

El estudio de la variación directamente proporcional, dentro de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, así como la concepción de las razones, proporciones y proporcionalidad, son problemas que han sido tratados desde diferentes líneas de investigación de la Matemática Educativa, algunas de éstas son de carácter cognitivo, didáctico, curricular y epistemológico.

Se entiende que, en las matemáticas y otras ciencias, la variación directamente proporcional ocurre cuando dadas dos cantidades, si al aumentar una, la otra incrementa o disminuye proporcionalmente, se puede expresar matemáticamente como $y = kx$ donde x y y son variables y k es una constante de proporcionalidad distinta de cero. Como se ha mencionado, tal concepto está presente en distintas áreas como la física, la química, la biología, la economía, ciencias sociales y más. Por lo tanto, su estudio es fundamental para llegar a entender, estudiar y explicar una gran variedad de fenómenos que se encuentran a nuestro alrededor.

Obando et. al, (2014), a través de una investigación documental, afirman que a nivel curricular, las razones, proporciones y la proporcionalidad, están presentes en los currículos implementados en la mayoría de los países, presentando similitudes respecto a cómo están organizados los temas, las estrategias de enseñanza, su nivel de complejidad y su poca conexión entre los distintos niveles de escolaridad, es decir, que existe una desarticulación entre su estudio

con los cursos de matemáticas de otros niveles, con otros cursos y también con su uso en contextos cercanos a los estudiantes.

Lo anterior, pudiera ser producto de una enseñanza donde se sigue linealmente el programa de un curso, desatendiendo las conexiones entre temas u objetos que, desde el punto de vista matemático y didáctico son esenciales. Puede decirse que dicha práctica no integra la temática y las relaciones entre los objetos matemáticos, los cuales no pueden existir aisladamente.

La VDP pudiera ser el término estructural que integre y articule los objetos matemáticos señalados arriba, su presencia en situaciones comunes de la vida diaria, es una oportunidad para incluir contextos enriquecedores en los diseños de estrategias didácticas.

Propuestas curriculares en el nivel medio superior en México incluyen a la VDP dentro de sus programas de estudio, por ejemplo, en la propuesta curricular de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH), de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), es tema central de la Unidad 2 del curso de Matemáticas I. El propósito de la unidad está definido como:

Propósito:

Al finalizar, el alumno:

Modelará y analizará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sean proporcionales; utilizando los registros tabular, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad. (Programa de estudio del área de matemáticas, 2016, p. 23)

En otras propuestas curriculares del mismo nivel educativo como la actual del Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS), el estudio de las razones, proporciones, proporcionalidad, e incluso de las ecuaciones lineales, se encuentra esencialmente dentro de la Unidad de Aprendizaje Curricular del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático II (PM II)¹, dando la libertad a los diferentes subsistemas de abordar tales contenidos según sus necesidades y características. Es preciso mencionar que el PM II es antecedente del Pensamiento Matemático III, en el que se estudia el pensamiento variacional.

De tal manera que la identificación y uso de contextos donde esté presente la VDP puede favorecer la interdisciplinariedad y transversalidad de las matemáticas, como se propone en el MCCEMS. La VDP es fundamental para comprender fenómenos de la vida diaria, es un modelo elemental de varias situaciones comunes a nuestro alrededor. En estas situaciones cotidianas, tenemos un referente que da sentido a la actividad matemática, un elemento con potencial didáctico.

1

<https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Pensamiento%20Matematico%20II.pdf>

La VDP puede ser un puente desde el álgebra básica hacia el pensamiento variacional pues, aunque de forma elemental, apoya la construcción de este pensamiento al nuclear en torno suyo la razón, proporción, ecuación, sistemas de ecuaciones y funciones lineales. Trata, además, de crear una conexión entre los contenidos matemáticos arriba señalados y aprovechar las múltiples relaciones entre éstos.

Como se ha descrito en este apartado una de las tareas del profesor es el diseño actividades didácticas con el fin de promover el aprendizaje de las matemáticas a través estrategias innovadoras donde debe incluir situaciones problemas cercanos a sus estudiantes, hacer uso de herramientas como la modelización para dar sentido a las matemáticas dentro de diferentes contextos y considerar contenidos matemáticos como la VDP que articulen de forma sistémica otros objetos matemáticos presentes en el currículo escolar.

El diseño de actividades didácticas, el uso de la modelización en el aula y el estudio de VDP, presentan una serie de dificultades por si solas las cuales se han reportado por distintos investigadores de Matemática Educativa, generando así una variedad de propuestas para reducirlas o atenderlas, algunas de estas se mencionan en el siguiente apartado.

3 ESTADO DEL ARTE

3.1 El diseño de actividades para la enseñanza de las matemáticas

El diseño de actividades didácticas es fuente de diversas propuestas e investigaciones dentro de la comunidad internacional de Matemática Educativa; la Comisión Internacional sobre la Enseñanza de las *Matemáticas (ICMI, por sus siglas en inglés)* en su estudio 22 (2015), reporta a través de investigaciones, algunas dificultades presentes al diseñar tareas en educación matemática. Dentro de tal publicación, se presentan definiciones del diseño de actividades didácticas, y algunas propuestas para caracterizar elementos que lo conforman, en cada caso desde distintos enfoques teóricos.

Considerando a la actividad didáctica como una serie de preguntas, situaciones e instrucciones que son utilizadas para impulsar en los estudiantes procesos cognitivos, que permitan desarrollar y encontrar conceptos, ideas y estrategias matemáticas; Sullivan, Knott, & Yang (2015), afirman que, para llevar a cabo tal actividad, el profesor debe seleccionar, modificar, diseñar, rediseñar, secuenciar, implementar y evaluar dicha actividad.

En su trabajo, los autores presentan cinco posibles problemáticas que el profesor de matemáticas debe considerar en el diseño de actividades:

- *el contexto matemático y extramatemático*, por un lado, se refiere a considerar dentro de los diseños de actividades didácticas, contextos *realistas* con el fin de generar interés y necesidad para resolver una situación dada; por otro lado, se debe tomar en cuenta si el contexto pudiera ser un obstáculo para el logro del aprendizaje deseado, es decir, tener la capacidad para determinar de qué manera el contexto será considerado dentro del diseño.
- *la forma en cómo se usa e interpreta el lenguaje*, se refiere a la claridad y precisión en la redacción de las actividades a desarrollar, si la presentación realizada en un diseño no es clara, se corre el riesgo de que no se comprendan las tareas planeadas y se alejen del objetivo.
- *la estructura del diseño*, es decir, la manera secuencial en la que se presentarán las actividades, los grados de complejidad de cada tarea, considerar variedad de enfoques para la solución, determinar si las tareas son abiertas o cerradas respecto a estrategias de solución y si contendrán variedad de posibles soluciones o una solución.
- *la selección del contenido a ser estudiado*, refiriéndose al contenido matemático que será central en el diseño, por lo tanto, es necesario considerar las demandas cognitivas que pudieran tener los estudiantes al enfrentarse a las actividades planteadas para estudiar dicho contenido, por lo tanto, proponer actividades que pueden ir desde la memorización, hasta realizar procedimientos con conexiones entre diferentes contenidos.

- *la interacción de los participantes*, se hace referencia a la relación que existe entre el profesor, los estudiantes y las tareas presentes en la actividad didáctica diseñada, al llevar a cabo una actividad previamente diseñada, es decir, debe considerar en qué momento y de qué manera el profesor deberá intervenir en la implementación, además de tomar en cuenta posibles tareas que llevarán a cabo los estudiantes para lograr desarrollar la actividad. (p. 91-94)

El profesor de matemáticas que diseña actividades de enseñanza se enfrenta a estos cinco obstáculos; depende de sus conocimientos, habilidades didácticas y experiencias para superarlos.

De igual forma, aportaciones de distintos investigadores en Matemática Educativa (Gómez (2002); Drijvers et. al, (2010) y Trigueros (2019)) amplían lo propuesto anteriormente agregando otros elementos presentes en el diseño de actividades, tales como la tecnología digital, el conocimiento del currículo escolar, la epistemología del objeto matemático a estudiar, el conocimiento de herramientas teóricas para valorar y analizar los diseños realizados ya sea por su propia cuenta o que estén presentes en libros de texto u otras propuestas.

Por ejemplo, Gómez (2002), considera que el diseño de una actividad no se reduce a la redacción de una serie de preguntas y tareas propuestas por el profesor, sino que debe incluir la justificación sistemática, informada y razonada de la selección de la actividad, considerar qué tipo de acciones llevarán a cabo los estudiantes al momento de enfrentarse a la actividad y por consiguiente prevenir posibles conflictos en el planteamiento de las tareas, el diseño de esquemas de análisis de esas actuaciones, y la descripción de las reacciones del profesor a las mismas. (p. 8)

Gómez, propone que para realizar diseños de actividades se deben de considerar las siguientes características:

- Estructura conceptual y sistemas de representación
- Análisis fenomenológico y modelización
- Dificultades y errores
- Resolución de problemas, materiales y recursos
- Coherencia

Se advierte en su trabajo que existe una complejidad en los procesos involucrados en el diseño de las actividades de enseñanza, principalmente en la construcción de una justificación apropiada para éstos. El autor afirma que se requiere de un conocimiento (el conocimiento didáctico), y de una aproximación sistemática y reflexiva, lo cual pudiera distinguir de un profesor profesional a un profesor “intuitivo”.

Propuestas de diseño de actividades para la enseñanza de las matemáticas encontradas en la literatura especializada, coinciden con algunos los criterios y elementos mencionados anteriormente los cuales están respaldados desde diferentes referentes teóricos.

Por ejemplo, en el trabajo realizado por Grijalva e Ibarra (2017), se advierte que una de las consideraciones para diseñar actividades, en este caso, el diseño de 6 textos implementados en un

subsistema de educación media superior en el estado de Sonora, México, es conocer el modelo curricular que se encuentre vigente, de tal forma que, el diseño propuesto por el profesor atienda los objetivos del currículo y los que se establecen en los planes y programas de estudio.

En su trabajo, se observan las características y lineamientos que se tuvieron en cuenta para diseñar los textos, haciendo una descripción de los supuestos teóricos y metodológicos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que fueron considerados para tal fin; específicamente en los objetos matemáticos, configuraciones y trayectorias didácticas, así como los criterios de idoneidad didáctica.

Si bien, el diseño de los textos está orientado hacia el desarrollo de conocimientos y competencias en los estudiantes, también se promueve un cambio en las prácticas de enseñanza del docente, tales como la promoción del trabajo colaborativo, la regulación de sus intervenciones en el proceso de enseñanza, la evaluación, el rediseño de las actividades y el uso de herramientas digitales.

Lo anterior pone en evidencia que el diseño de actividades para la enseñanza es una tarea compleja que los profesores deben llevar a cabo de manera razonada y reflexiva, y en la que deben considerar diferentes factores y conflictos a superar; sin embargo, en la práctica real la mayoría de los profesores realiza sus diseños de forma empírica, lo cual no es algo negativo, pero se pudiera mejorar si se promueven procesos de formación y actualización, para incorporar herramientas validadas y respaldadas desde diferentes referentes teóricos propios de la Matemática Educativa.

3.2 El diseño de actividades didácticas en la formación de profesores de matemáticas

Investigadores en Educación y Matemática Educativa, han puesto interés en caracterizar y definir los conocimientos y habilidades necesarias que el profesor de matemáticas debe tener para que lleve a cabo el proceso de enseñanza de mejor manera. De igual forma, instituciones particulares y gubernamentales en formación y actualización docente, han centrado parte sus esfuerzos en promover el desarrollo de dichos conocimiento y habilidades, los cuales según Báez, Cantú y Gómez (2007) están ligados a los cambios requeridos por la escuela y la sociedad. Por consiguiente, el profesor requiere procesos formativos que le permitan ser capaz de diseñar, desarrollar y evaluar estrategias para resolver los problemas que la realidad educativa le presenta, es decir, el profesor debe de tener un perfil acorde con las necesidades actuales, por lo que es pertinente crear entornos de aprendizaje para que desarrollen y mejoren sus estrategias de enseñanza (Díaz & Poblete, 2003).

Respecto al diseño de actividades, en este apartado se presentan propuestas de formación y actualización docente que atienden las necesidades y conflictos del profesor al llevar a cabo tal tarea.

La experiencia realizada por Salazar (2014), pretende indagar y profundizar el efecto que produce, en la comprensión y el rendimiento académico de futuros profesores de matemática, la

incorporación de tareas diseñadas a partir de la modificación de problemas propuestos en libros de texto. La experiencia se desarrolló en un curso de análisis real, en el tema de funciones continuas, del programa de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. Se observaron algunas evidencias positivas, como por ejemplo mayor comprensión de los enunciados de problemas y teoremas, aumento en la comprensión de soluciones y pruebas formales, incremento numérico en la evaluación del tema y mayor competencia de reflexión sobre las matemáticas.

Propuesta como la de Pochulu, Font & Rodríguez (2013), muestran que a través de una intervención de formación y actualización docente con énfasis en diseño de actividades didácticas y con respaldo teórico y metodológico propio de la Matemática Educativa (en este caso elementos de EOS), los profesores de matemáticas pueden desarrollar habilidades críticas para diseñar actividades o mejorar diseños establecidos (rediseño).

Dicha propuesta de intervención se realizó en seis fases: “(a) Seminario virtual; (b) Encuentro presencial inicial donde se presentaron los diseños de tareas, y al mismo tiempo, se realizaron rediseños y ajustes en virtud de los análisis didácticos realizados; (c) Implementación de la secuencia de tareas, (d) Selección de algunos episodios de las clases implementadas (a partir de un registro en vídeo), (e) Análisis didáctico presencial de los episodios de clases, (f) Encuentro presencial final donde se analizaron episodios de clase y se reflexionó sobre todo el proceso seguido” (p. 4999)

Como resultado de la intervención, los autores proponen algunos criterios para la formulación de consignas de las tareas, por ejemplo:

- Que la tarea no sea cerrada.
- Que la tarea no brinde sugerencias de caminos posibles, resultados a aplicar, etc.
- Que la tarea tenga pocas preguntas (las más generales) y que los alumnos hagan un proceso de análisis que los lleve a resolver.
- Que la tarea requiera justificar las elecciones que se realizan los alumnos, así como también las que se rechazan.
- Si se propone una tarea en un contexto real, procurar que para resolverla este contexto sea significativo y relevante.
- En la medida de lo posible evitar dar información que asegure existencia y/o unicidad de la solución de la tarea.
- Considerar incluir consignas que activen en los futuros profesores una reflexión sobre la propia actividad que realizaron para resolver la tarea.
- Que el uso de nuevos recursos sea necesario para resolver la tarea.
- Que lo solicitado con la tarea sea algo matemático y no referido al uso de software. (pp. 5003-5005)

Se puede advertir que, dentro del proceso formativo del profesor de matemáticas, el diseño de actividades didácticas es una tarea fundamental para el desarrollo de su práctica. Dolores et. al (2013) afirma que el profesor de matemáticas debe desarrollar habilidades de planeación, orientar el proceso y evaluarlo, desde el diseño de actividades de enseñanza, hasta el diseño de un curso completo de matemáticas. Por lo tanto, es necesario que el profesor de matemáticas tenga acceso a programas de formación y actualización que le permitan desarrollar tales habilidades, en este caso de diseño de actividades.

3.3 Formación y actualización docente para incorporar la modelización en el aula

Como se ha mencionado, la tarea del diseño de actividades de enseñanza ha sido motivo de estudio por distintos investigadores, donde se han reportado algunas de las consideraciones y dificultades que están presentes en dicha tarea. De igual manera, se han realizado propuestas de formación y actualización cuyo objetivo es que los profesores de matemáticas superen algunos obstáculos presentes al diseñar actividades, además de integrar y promover estrategias como la modelización dentro de la enseñanza de las matemáticas.

Un ejemplo de lo anterior es el trabajo realizado por Zaldívar et. al (2017), cuya intervención buscaba promover la importancia de los procesos de aprendizaje e implementación de la modelización matemática en la formación docente inicial y/o continua. En su propuesta consideran la modelación como el “proceso cíclico donde se proporciona a los alumnos problemas abiertos y complejos en los que se ponen en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en términos matemáticos.” (Trigueros, 2006)

En tal estudio se describió una propuesta que tenía como fin el que los docentes experimenten y logren resolver una situación basada en modelización matemática tomando éstos el rol de alumnos. Los resultados mostraron un diseño de una situación basada en un contexto biológico cuyas tareas se inscriben propiamente en las etapas del proceso de modelización matemática, los conceptos matemáticos que se abordaron fueron proporcionalidad, razones, eventos aleatorios, histogramas de frecuencia, probabilidad clásica, porcentajes, entre otros. En dicha situación se incorpora una herramienta tecnológica (calculadora), con el propósito de favorecer el tránsito entre el planteamiento del problema y la generación de modelos matemáticos.

Los resultados generales de tal estudio reportan que, para trabajar con situaciones de modelización matemática en la formación de docentes, el formador de profesores debe considerar elementos teóricos ligados a cada una de las etapas del proceso de modelización, contextos que enriquezcan la actividad y el currículo escolar; se espera que este tipo de actividades acerquen al docente a reconocer las bondades, características y dificultades propias del uso de la modelización matemática y con ello se apoye una mayor implementación de esta estrategia en su trabajo con sus futuros alumnos.

Otra propuesta es la de Méndez (2020), en la cual realizó un estudio cualitativo que analiza el desarrollo de la competencia de planificación de la enseñanza relacionada con la integración de la modelización en el diseño de tareas. Con la implementación de un programa formativo, donde participaron 27 profesores de matemáticas en formación, trabajaron con el diseño de tareas de modelización y a través de la observación de las producciones, presentaciones que realizaron y una entrevista, se logró identificar el desarrollo de capacidades asociadas con la integración de la modelización en el diseño de actividades propuestas para la enseñanza de las matemáticas.

En los resultados presentados en tal estudio, se observa que los profesores desarrollaron una visión funcional de la modelización en la enseñanza, además de ser conscientes de las dificultades que se presentan al diseñar tareas con modelización; en conclusión, los profesores que participaron valoraron de manera positiva trabajar con la modelización en el diseño de las tareas, considerándola como una estrategia para mostrar a las matemáticas de una manera funcional a los estudiantes, lo cual, pudiera conectar los contenidos disciplinares con el contexto extraescolar, dando sentido y significado a los contenidos matemáticos abordados.

Por su parte, Huincahue et. al (2017), a partir de la premisa de que la inclusión de la modelación matemática en el currículo tiene un carácter transversal e integrador del conocimiento en todos los niveles escolares, mostrando, aplicando o construyendo conceptos matemáticos consideran que es necesario incluirla en la formación inicial docente en matemáticas (FIPM), por lo tanto realizaron una investigación en Chile, que utiliza el marco conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) para analizar los conocimientos y la reflexión sobre modelación puestos en juego por estudiantes en formación inicial durante un ciclo de 14 sesiones de 90 minutos cada una. Los resultados muestran un progreso en el conocimiento matemático y en el conocimiento pedagógico del contenido. El trabajo discute posibles maneras de establecer modelos de enseñanza de la modelación y un momento propicio para hacer uso de una propuesta sobre la materia.

En el trabajo realizado por Romo, Barquero & Bosh (2019), se considera que el desarrollo profesional online del profesorado de matemáticas permite articular la difusión de nuevas propuestas basadas en la investigación didáctica con la experiencia del docente y sus dificultades para integrarlas en el aula y observan que existe el problema general de integrar la modelización matemática en los sistemas educativos actuales; centraron su investigación en la dimensión ecológica de este problema: las limitaciones institucionales que obstaculizan el desarrollo de las matemáticas y la modelización como actividad docente normalizada. Su propuesta está centrada en el diseño y análisis de un curso en línea y a distancia para profesores de matemáticas. Este curso parte de la pregunta inicial de cómo analizar, adaptar e integrar un proceso de aprendizaje relacionado con la modelización matemática y cómo sustentar su desarrollo a largo plazo.

El análisis se basa en un estudio de caso que consiste en cuatro ediciones sucesivas de un curso para profesores de matemáticas en servicio de distintos países de Latinoamérica, y fue realizado en el Centro de Investigación Aplicada en Ciencia y Tecnología Avanzada de México. Los resultados mostraron cómo el curso representó un instrumento valioso para ayudar a los

profesores a progresar en el tema crítico de identificar las limitaciones institucionales, la mayoría de ellas más allá del ámbito de acción de los docentes y los estudiantes y que no se abordan por investigaciones previas, obstaculizando así la integración de modelos matemáticos en las escuelas secundarias actuales.

De igual forma, Covián & Romo (2017) diseñaron un curso para un programa de profesionalización docente en la modalidad en línea y a distancia del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnologías Avanzada del Instituto Politécnico Nacional (CICATA-IPN), cuyo objetivo es proveer herramientas teóricas y metodológicas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, para que los profesores diseñen actividades didácticas para la vida. Se consideró que para poder elaborar este tipo de diseños primero es necesario analizar la actividad matemática tanto en contextos escolares como no escolares, para estar en posibilidad de generar nuevas relaciones entre estos contextos a través de los conocimientos matemáticos.

Una de las actividades propuestas en el curso antes mencionado es el uso de técnicas matemáticas para obtener áreas de terrenos reales, y para realizarla los docentes utilizaron técnicas matemáticas como cuadriculación, trazo de figuras conocidas, radiación, determinantes, trazo de polígonos de numerosos lados y cálculo de su área usando software, requieren tomar en cuenta el tipo de terreno, la unidad de medida, la escala, las propiedades de figuras geométricas conocidas, las propiedades de polígonos irregulares, los medios a disposición (papel milimétrico, o software como GeoGebra o Free Map Tool) y el grado de aproximación al “valor buscado”.

Como resultados generales los docentes cuestionaron el paradigma tradicional de enseñanza, centrado en conceptos, definiciones y mecanización de técnicas, y consideraron que una manera de modificarlo es utilizar las herramientas teóricas-metodológicas puestas a su disposición, para generar una enseñanza más rica cuya razón de ser esté asociada al uso de las matemáticas en situaciones reales, dando sentido a modelos matemáticos establecidos y estudiados en el aula.

Propuestas de formación y actualización docente que buscan desarrollar habilidades de diseño de actividades de modelización como las mencionadas anteriormente, coinciden que el profesor de matemáticas pudiera presentar dificultades al enfrentarse con estrategias de enseñanza distintas a las tradicionales, sin embargo, también reportan que incorporar la modelización en las actividades favorece el reconocimiento del uso de las matemáticas en distintos contextos, además, atiende las necesidades presentes en propuestas curriculares actuales.

3.4 Propuestas de formación y actualización docente para el estudio de la VDP

La Variación Directamente Proporcional y/o los contenidos matemáticos que articula (razones, proporciones, proporcionalidad, variación), se estudian en diversas propuestas curriculares de matemáticas de todo el mundo, desde el nivel básico hasta el superior, es por ello que diversos investigadores han realizado propuestas formación y actualización para fortalecer los contenidos disciplinares y para la enseñanza de dichos conceptos, lo anterior se puede encontrar en

una gran variedad de artículos de investigación y propuestas de intervención realizadas desde diferentes perspectivas teóricas.

Ejemplo de lo anterior, Rivas et. al (2012) realizaron un proceso de formación inicial de profesores de matemáticas en primaria, con el objetivo de desarrollar conocimientos necesarios para la enseñanza de la proporcionalidad en sus cursos. La intervención se realizó en tres momentos o etapas, (a) resolución de un problema de proporcionalidad, (b) análisis de la resolución del problema haciendo uso de una herramienta de análisis epistémico, y (c) valoraciones dadas por futuras maestras a tres tipos de respuestas del problema, elaboradas por alumnos de 6º curso de primaria.

Los resultados indican que el reconocimiento de los significados de los objetos presentes en un problema dado (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos), es una actividad compleja a la que los profesores no están familiarizados, sin embargo, enfrentarse a dichas tareas, les permite identificar y reconocer proposiciones y realizar argumentos que pudieran considerar en el diseño de actividades de enseñanza de proporcionalidad.

Burgos y Chaverri (2023), realizaron una intervención formativa con futuros profesores de primaria, con el objetivo de desarrollar la competencia para crear problemas de proporcionalidad a partir de la variación de un problema dado. Para el diseño y el análisis de las respuestas realizadas por los participantes se emplearon herramientas teóricas y metodológicas del enfoque ontosemiótico.

Algunos de sus resultados más relevantes muestran que los futuros profesores de matemáticas crean con mayor frecuencia, adaptaciones a problemas encontrados en distintas fuentes; y que no logran crear problemas que permitan distinguir situaciones proporcionales. Concluyendo en su reporte, que los futuros profesores manifiestan un insuficiente conocimiento didáctico matemático para diseñar actividades didácticas de proporcionalidad, y por lo tanto, es necesario promover programas de formación y actualización docente que refuercen las estrategias de enseñanza de las matemáticas, para este caso particular, sobre proporcionalidad.

Entre otros trabajos, Herrera et. al (2021), a través de una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal y trabajando con profesores de matemáticas en formación inicial a nivel secundaria, buscan el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos, a partir de situaciones que abordan el contenido matemático, apoyándose en uso de tecnología (GeoGebra) y construcción, interpretación y valoración de modelos matemáticos.

Los resultados obtenidos en tal intervención muestran que este tipo de propuestas están en la misma línea de lo establecido curricularmente, y que aportan elementos para enriquecer el significado de la variación lineal, la pertinencia del uso de herramientas tecnológicas (para representar dinámicamente una magnitud variable) y la construcción de modelos matemáticos a través de una serie de tareas que promueven la reflexión sobre las situaciones dadas. Se promueve también, que los docentes analicen respuestas hipotéticas de estudiantes de secundaria, de tal manera que sus

respuestas reorienten nuevas estrategias didácticas para el estudio de la variación lineal atendiendo distintas representaciones.

Es preciso aclarar que existen variedad de propuestas de enseñanza que buscan desarrollar conocimientos disciplinares de contenidos como razones, proporciones, proporcionalidad y variación, sin embargo, a partir de la exploración documental se advierte que la productividad de propuestas para favorecer el diseño de actividades que consideren la Variación Directamente Proporcional como contenido integrador de tales conceptos es limitada.

Por lo anterior, a pesar de las investigaciones y propuestas que buscan identificar y subsanar las problemáticas presentes en el diseño actividades didácticas de modelización, estas siguen vigentes en todos los niveles educativos, principalmente en el nivel medio superior, tal como es descrito en el siguiente apartado.

4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS

Los profesores de Nivel Medio Superior (NMS) tienen la tarea de transformar a sus estudiantes en ciudadanos capaces de desarrollar conocimientos y habilidades para incorporarse en un nivel educativo superior o para desempeñarse en el campo laboral.

Su actividad en aula depende de sus conocimientos adquiridos en su formación inicial y actualización constante, además de las experiencias que forma durante su desarrollo profesional.

Es por ello que, en este proyecto de intervención educativa se busca trabajar con profesores de matemáticas en servicio dentro del NMS, con el fin de desarrollar en ellos habilidades para el diseño de actividades de modelización.

Por consiguiente, en este apartado se describen dentro de diferentes secciones los elementos que conforman la problemática que se advierte sobre este tema.

4.1 El desarrollo profesional docente de matemáticas de bachillerato en México

En las últimas décadas la profesionalización docente de matemáticas ha llamado el interés de investigadores en Educación y Matemática Educativa, (Shulman (1986); Schoenfeld & Kilpatrick (2008); Hill, Ball & Schilling (2008); Pino-Fan et al., (2022)), caracterizando los conocimientos y habilidades que un profesor de matemáticas debe poseer para que su práctica sea lo más cercano al éxito.

En México, la formación y actualización docente de matemáticas para los niveles básicos ha sido atendida por escuelas normales, tratando de cubrir las demandas actuales de profesores para cada nivel educativo; caso distinto para los niveles medio superior y superior, donde la demanda de profesores es atendida por profesionistas egresados de las universidades u otros centros de educación superior, es decir, los profesores de tales niveles no necesariamente son formados como docentes, sino que son ingenieros, contadores, actuarios y licenciados en matemáticas, desarrollando sus conocimientos para la enseñanza a través de la práctica. (Dolores, 2013)

El incremento de ofertas educativas (licenciaturas y posgrados) para preparar profesionales en educación matemática ha aumentado en los últimos años a nivel mundial, y México no es la excepción, lo cual pudiera reflejar una preocupación por las instituciones educativas por profesionalizar la labor del docente de matemáticas.

Sin embargo, se advierte que existe escasez de programas de formación inicial y actualización dirigidos específicamente a profesores de matemáticas de nivel medio superior. (Sosa y Ribeiro, 2014)

Las ofertas recientes de actualización docente del nivel medio superior, como el Programa de Formación, Capacitación y Actualización de las Maestras y los Maestros en la Nueva Escuela

Mexicana de la Educación Media Superior² propuestas por instituciones gubernamentales como la Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS) y la Coordinación Sectorial de Fortalecimiento Académico (COSFAC) están enfocadas en capacitar y actualizar al docente sobre las orientaciones propias de la Nueva Escuela Mexicana de la Educación Media Superior, además de promover que los profesores conozcan y utilicen los elementos presentes en el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS).

Como parte de los esfuerzos de la comunidad internacional y nacional de Matemática Educativa, se han llevado a cabo propuestas de trabajo con profesores de matemáticas en distintos niveles educativos (Salazar (2014); Pochulu, Font & Rodríguez (2013) y Dolores et. al (2013)), con el fin de favorecer el desarrollo de conocimientos disciplinares y pedagógicos en temas específicos y con el sustento de una variedad de referentes teóricos.

En la mayoría de los casos, los resultados de tales intervenciones han reportado que los profesores que formaron parte de tales propuestas han desarrollado nuevos conocimientos y habilidades para diseñar, analizar, valorar y rediseñar actividades didácticas, además de generar un proceso de autorreflexión sobre su práctica.

En su campo profesional los profesores de matemáticas de bachillerato tienen una variedad de responsabilidades en su quehacer según las instituciones educativas donde se encuentren; de manera general se pueden concentrar en grandes bloques como preparar clase, impartir clase, y evaluar a sus estudiantes; en cada bloque las tareas a realizar, los conocimientos y habilidades necesarias para lograrlas han sido estudiadas y caracterizadas por distintos investigadores (Linares et. al (2008) y Báez et. al (2007)).

Referente a la preparación de las clases, es responsabilidad del docente de matemáticas seleccionar y diseñar tareas matemáticamente que sean relevantes para los estudiantes, con el fin de lograr los objetivos de aprendizaje pretendidos institucionalmente, lo cual implica que el profesor conozca el contexto donde se llevará a cabo la clase (desde el conocimiento curricular, los recursos disponibles, hasta el conocimiento de sus estudiantes), tener conocimiento del contenido matemático (sus distintas representaciones, definiciones y relaciones con otros contenidos o disciplinas), conocer diferentes métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemática como pueden ser:

- *la enseñanza de las matemáticas desde su propia génesis,*
- *la educación matemática orientada en la resolución de problemas,*
- *educación matemática desde el punto de vista de las aplicaciones y la modelización,*
- *enseñanza de las matemáticas basada en proyectos.* (Mora, 2003)

En cada caso, las estrategias para diseñar actividades están orientadas según el método a utilizar, en cualquier caso, cuestiones generales como la anticipación de respuestas probables de

² <http://registro.desarrolloprofesionaldocente.sems.gob.mx/>

los estudiantes a dichas tareas, la selección de los contenidos a tratar, la definición de los recursos y tiempos dedicados a cada actividad, el uso adecuado de lenguaje, la interacción entre los participantes y la estructura del diseño de la actividad, deben ser considerados. (Sullivan et. al 2015, pp. 91-94)

Los procesos de impartir clase y evaluación de los resultados de los estudiantes también han sido estudiados con detalle por distintos investigadores en educación y Matemática Educativa, sin embargo, dada las características de este proyecto, no serán motivo de estudio y análisis.

Se puede observar que el diseño de actividades de enseñanza no es simple, y dada la formación profesional que la mayoría de los docentes tiene en ese nivel educativo, dicha tarea es realizada desde su experiencia como docente, sin el conocimiento y respaldo científico propio de la Matemática Educativa, lo cual se pudiera ver reflejado en los resultados pocos favorables en el rendimiento escolar de sus estudiantes.

4.2 El diseño de actividades didácticas de modelización en bachillerato

Como se ha mencionado, el diseño de actividades didácticas trae consigo una serie de dificultades y consideraciones que el profesor de matemáticas debe superar y atender con el fin de que sus diseños favorezcan el desarrollo de conocimientos y habilidades en la resolución de problemas de sus estudiantes (Gómez (2002), Pochulu, Font & Rodríguez (2013) y Sullivan, Knott, & Yang (2015))

Proponer diseños de actividades que permitan lo anterior, es un reto para los profesores de matemáticas, una manera de estructurar dichos diseños y que estén en congruencia con los objetivos institucionales, es considerar a la modelización como una herramienta de enseñanza, permitiendo no sólo aprender matemáticas de forma aplicada a situaciones problemas cercanas a la realidad, sino que ofrece una mejora a la capacidad de leer, interpretar, formular y solucionar tales situaciones. (Biembengut & Hein, (2004) y Córdoba (2011))

En investigaciones como las Pollak (2012), Kaiser & Schwarz (2010), Bassanezi (1994) y Sadovsky (2005) se reporta que para conducir el aprendizaje de contenidos matemáticos es necesario conectarlos con conocimientos de otras disciplinas, y la modelización es el enlace ideal para lograrlo, favoreciendo también la motivación de los estudiantes a utilizar las matemáticas en su entorno.

Las bondades educativas que tiene la incorporación de la modelización dentro de la enseñanza de las matemáticas han causado interés en investigadores e instituciones educativas dando lugar a investigaciones y propuestas de formación y actualización docente desde diferentes perspectivas.

Un ejemplo de esto es el MCCEMS en México, aquí la modelización se encuentra presente dentro de las categorías del Pensamiento Matemático (PM) y es definida “como el uso de la matemática en la descripción de fenómenos de diversa naturaleza.” Se define a la construcción de un modelo como “un esquema extraído de situaciones problemáticas o de un fenómeno de un

contexto específico basado en relaciones, patrones, para elaborar una expresión denominada modelo matemático, esto puede hacerse a partir de una representación gráfica o algebraica donde se describa la situación ya sea real o hipotética.”

Si bien, incorporar la modelización dentro de los procesos de enseñanza de las matemáticas, atiende los objetivos de propuestas curriculares actuales para el nivel medio superior, se puede advertir en el discurso como algo transparente considerando que los profesores conocen o dominan, pero en realidad no es una tarea simple, es decir, probablemente se desconocen las dificultades que esto representa para los profesores en el diseño de sus actividades de enseñanza lo cual ha sido reportado por distintos investigadores como Trigueros, (2006); Bonotto, (2007); Blum, (2011); Stillman et al., (2010); Pochulu, et. al, (2013); Kaiser, (2014); Zaldívar et. al, (2017) y Méndez (2020).

Dentro de las dificultades se encuentran:

- Reconocer los contextos adecuados y su relación con las matemáticas (Bonotto, 2007)
- Establecer entornos de aprendizaje que tengan sentido para los estudiantes y que al mismo tiempo sean un desafío interesante para resolver (Kaiser, 2014)
- Conocer el proceso general del ciclo de modelización (Blum et al., 2007)
- Proporcionar a los alumnos problemas abiertos y complejos en los que se ponen en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos. (Trigueros, 2006)

Tales dificultades y obstáculos pudieran llevar a los profesores de matemáticas a no considerar la modelización como una estrategia de enseñanza óptima ya que se requiere de un esfuerzo mayor para incorporarla dentro de los diseños de actividades (Pochulu & Aparisi, 2013). Por lo tanto, dadas las ventajas reportadas sobre la modelización en la enseñanza de las matemáticas, es necesario crear espacios de actualización docente para reflexionar sobre su uso y promoverla en el diseño de actividades como parte de una estrategia enseñanza viable.

La incorporación de un ciclo general de modelización en el diseño de actividades pudiera permitir a los profesores una trayectoria a seguir para proponer estrategias de enseñanza que permitan analizar y resolver diferentes situaciones problemas que sean familiares a sus estudiantes.

Por ejemplo, en el estudio de fenómenos físicos tales como la velocidad, la fuerza que ejerce un resorte y la elongación de este, la relación entre la presión y el volumen en un gas a temperatura constante, la distancia recorrida de un objeto en movimiento, entre otros; son situaciones forman parte de diferentes contextos y pueden ser aprovechadas para modelar conceptos matemáticos como la constante de proporcionalidad, las razones y la variación directamente proporcional.

4.3 El estudio de la Variación Directamente Proporcional en el nivel medio superior

Como se ha mencionado, las actividades didácticas de modelización favorecen sustancialmente el aprendizaje de las matemáticas, ya que le dan sentido a su aplicación en diferentes contextos cercanos a los estudiantes, sin embargo, para el profesor de matemáticas diseñar tales actividades lo enfrenta a ciertos conflictos y obstáculos que ya han sido mencionados con anterioridad en secciones anteriores.

Uno de los principales retos para el profesor es identificar y utilizar situaciones significativas que tengan relación con algunas experiencias presentes en su formación o cotidianidad (Aponte et., al 2015). A partir de la identificación de dichas situaciones, el profesor puede determinar que conceptos serán estudiados y modelados, de tal forma que los considere dentro de sus diseños de actividades.

El estudio de objetos matemáticos como las razones, proporciones, proporcionalidad y la variación directamente proporcional en los cursos de matemáticas y su presencia en contextos cotidianos, ha generado el interés de investigadores por proponer actividades que favorezcan el estudio de las matemáticas a través de estos contextos. (Obando et. al, 2014; Chávez et., al 2016 y Burgos & Chaverri 2023)

De nueva cuenta se reportan dificultades sobre el estudio de la variación directamente proporcional, las cuales debe considerar el profesor al momento de realizar sus diseños, entre las reportadas con mayor frecuencia se encuentran:

- Las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, debido a que es común que en el aula se enseñe este tema de manera mecánica;
- el uso indiscriminado de las comparaciones por parte de los estudiantes (La *aditiva*, por medio de una diferencia y la *multiplicativa*, por medio de un cociente que se considera como *razón*);
- el desconocimiento de la conexión de equivalencia que existe entre dos razones (proporcionalidad);
- la falta de identificación de las relaciones entre dos variables en una situación problema, y
- el uso de la variación proporcional directa se reduce a la aplicación de la regla de tres. (Mochón, 2012)

Por lo tanto, para superar tales dificultades, el profesor de matemáticas debe tener un conocimiento amplio de los contenidos matemáticos que están involucrados en el estudio de la variación directamente proporcional, además de tener el conocimiento para articularlos entre sí, e identificarlos en situaciones problemas que puedan ser tratadas en los diseños de sus actividades.

La evidencia documental sobre las dificultades presentes en la incorporación de la modelización en el proceso de enseñanza, en el estudio de la VDP y sobre el diseño de actividades didácticas es bastante, haciendo evidente que existe una necesidad de formación y capacitación articulada a profesores de nivel medio superior sobre tales temas.

Lo anterior también se observa en algunos resultados obtenidos de una intervención exploratoria tipo curso-taller realizada con un grupo de diez profesores de matemáticas de nivel

medio superior. Tal experiencia fue llevada a cabo en las instalaciones de un subsistema educativo del sur de Sonora con una duración de 12 horas presenciales, dentro de las actividades propuestas se tenían consignas como las siguientes:

- Identificar contenidos matemáticos dentro de los enunciados correspondientes a las situaciones problemas,
- Resolver las situaciones problemas propuestas,
- Analizar un diseño de actividad didáctica y
- Proponer un diseño de actividad didáctica desde su experiencia

El análisis preliminar no exhaustivo permite advertir que los profesores:

- Utilizan dentro de sus estrategias de solución diversos registros de representación como gráficas, tablas, expresiones algebraicas y diagramas.
- Logran identificar algunas nociones sobre razones, proporciones y proporcionalidad, pero no las relacionan entre sí.
- No están familiarizados con la tarea de diseñar actividades didácticas.

Este último punto se complementa con el hecho de que el subsistema selecciona un grupo de profesores del estado para diseñar cuadernillos (para estudiantes) con actividades y ejercicios puntuales sobre los temas a tratar dentro de un curso, por lo tanto, la mayoría de los profesores de matemáticas se apegan a lo propuesto institucionalmente y pocas veces realiza ajustes a dichas propuestas.

Lo expuesto en la evidencia documental y empírica permite identificar que existe una problemática real sobre la escasez de programas de actualización docente de matemáticas en el nivel medio superior que favorezcan el desarrollo de conocimientos y habilidades de diseño de actividades didácticas.

Por lo tanto, se propone un proyecto de intervención educativa con profesores de matemáticas en servicio que permita generar espacios de reflexión sobre el uso de herramientas y modelos para el diseño de actividades didácticas, y cuyos objetivos son:

4.4 Objetivo

Diseñar, ejecutar y valorar un curso-taller que desarrolle, en profesores de nivel medio superior, habilidades para el diseño de actividades didácticas de modelización de fenómenos donde esté presente la variación directamente proporcional.

4.4.1 Objetivos específicos:

1. Definir la estructura, propósitos, medios, situaciones problemas, ciclo de modelización y estrategias de conducción del curso-taller.
2. Diseñar e integrar el curso-taller atendiendo los elementos establecidos en el primer objetivo específico.

3. Implementar el curso-taller con profesores de matemáticas de nivel medio superior.
4. Analizar la información generada a partir de la implementación.
5. Valorar la pertinencia del curso-taller.
6. Valorar de forma global el curso-taller

El logro del primer objetivo permite tener bases para diseñar el curso-taller, aquí se determina su estructura, la selección de los medios necesarios para implementarlo, el diseño las actividades de modelización que serán estudiadas durante el proceso y las estrategias de conducción del instructor y/o los participantes según sea el caso.

La integración de los elementos antes mencionados permite tener una versión completa del curso-taller, la cual será sujeta a valoración a priori con las herramientas que serán expuestas en los elementos teóricos, de tal manera que el producto esperado del segundo objetivo es el diseño del curso-taller que será implementado.

Una vez diseñado el curso-taller el siguiente objetivo es la implementación, para lograrlo es necesario llevar a cabo una serie acciones preliminares al proceso, por ejemplo, la selección de los profesores que participarán, los recursos (hojas de trabajo, herramientas tecnológicas y digitales), el lugar, fecha y posibles horarios.

De igual manera, durante el proceso de la implementación se espera que se generen como evidencias las respuestas escritas en las hojas de trabajo, los diseños de actividades didácticas de modelización y grabaciones de video y audio de las sesiones.

Una vez concluida la implementación es necesario analizar la información generada, para esto es necesario establecer las categorías de análisis que permitan la valoración del curso-taller, así como la valoración global del proyecto de intervención.

Para lograr los objetivos se llevan a cabo una serie de acciones metodológicas respaldadas en herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y el Modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM), lo anterior se describe con detalle en los siguientes apartados.

5 ELEMENTOS TEÓRICOS

En este apartado se describen los elementos teóricos que respaldan este trabajo, los cuales serán el sustento para lograr los objetivos planteados. Cada uno de estos elementos juegan un rol importante en las etapas de diseño, implementación y valoración del proyecto de intervención educativa.

La descripción que se presenta en este apartado se hace en tres subapartados, el primero atiende a los elementos teóricos que permiten desarrollar y valorar habilidades de diseño de actividades en profesores de matemáticas, tales elementos forman parte del Modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM), desarrollado desde el 2009 por Godino, (2009) y Pino-Fan & Godino, (2015) y son utilizados para:

- a) Diseñar instrumentos de valoración del desarrollo de habilidades de diseño de actividades didácticas en profesores de nivel medio superior.

En el segundo subapartado se describen los elementos teóricos que forman parte del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), propuesto por Godino, Batanero y Font (2007), que son considerados para:

- b) Diseñar, analizar y valorar las actividades que formen parte de la propuesta de intervención educativa, y

Finalmente, en el tercero de los subapartados, se describe el ciclo de modelización propuesto por Blum & Leiß (2007) a partir de su uso dentro del diseño de las actividades didácticas presentes en el curso-taller.

5.1 Competencias y Conocimiento Didáctico-Matemáticas del profesor

El profesor de matemáticas debe de tener una serie de conocimientos y habilidades para desempeñarse de forma óptima en su labor. Los conocimientos didácticos y matemáticos han sido motivo de estudio y fuente de investigaciones dentro de la Matemática Educativa, de igual forma se han realizado aportaciones para caracterizar habilidades que son necesarias para el desarrollo de su práctica profesional.

En este sentido, el modelo de Competencias y Conocimiento Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM) busca articular los conocimientos y las habilidades necesarias para el desempeño del docente de matemáticas, proponiendo categorías y subcategorías de competencias profesionales que son necesarias para tal fin.

Es por ello, que uno de los motivos para seleccionar este modelo es la visión pragmática de analizar y categorizar conocimientos y habilidades del profesor de matemáticas referente al diseño de actividades didácticas. Se asume que lo anterior permite definir elementos y criterios que son necesarios para desarrollar tales conocimientos y habilidades en profesores de nivel medio superior.

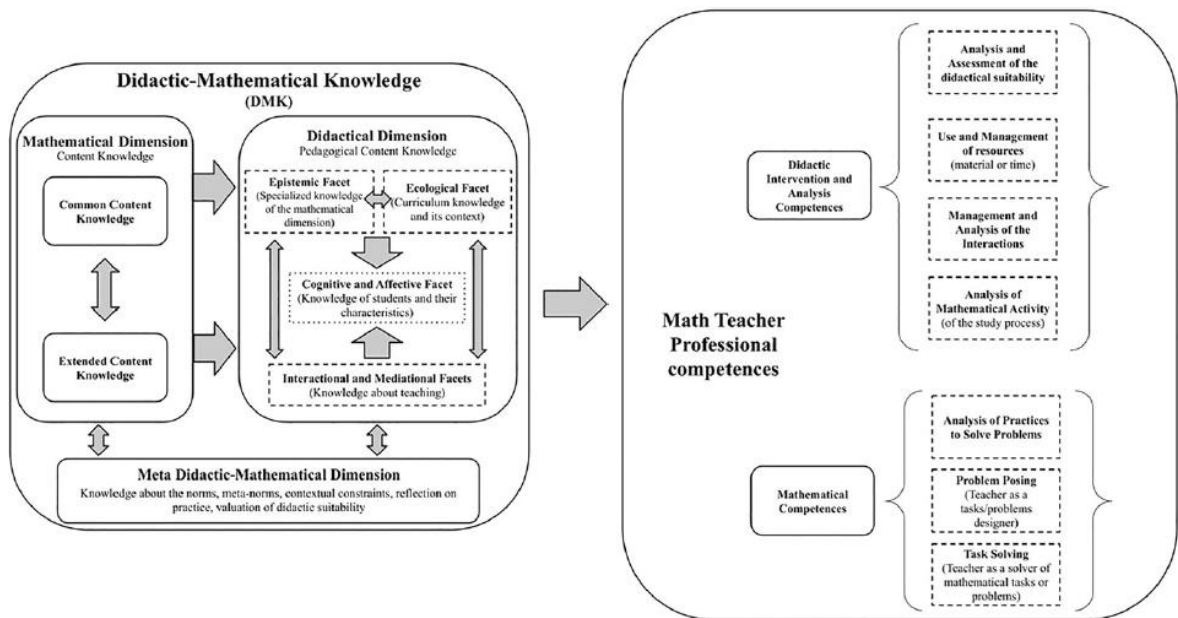
El fundamento del CCDM, es el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) en donde se propone que el conocimiento didáctico-matemático del profesor puede desarrollarse desde tres dimensiones principales: matemática, didáctica y metadidáctico-matemático (Pino-Fan et. al, 2015)

La dimensión matemática tiene dos subcategorías de conocimientos: *conocimiento común del contenido* y *conocimiento ampliado del contenido*. Es evidente que la dimensión matemática del CDM, que permite que el profesor resuelva problemas y tareas matemáticas no es suficiente para la práctica de enseñanza. Es aquí donde la dimensión didáctica juega un rol importante dentro del modelo.

El modelo CCDM sugiere dos competencias profesionales del profesor de matemáticas: (1) competencia matemática; (2) competencia de análisis e intervención didáctica (Figura 4)

Figura 4.

Conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (Pino-Fan et. al, 2022)



Dada la naturaleza de la propuesta de intervención educativa, el interés del análisis se centra en la competencia matemática del profesor y sus subcompetencias correspondientes, por lo tanto, en el siguiente subapartado se describen con detalle.

La competencia matemática del profesor requiere de los conocimientos que se describen en la dimensión matemática, así como el conocimiento presente en las facetas de la dimensión didáctica del modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM), con el fin de diseñar y proponer tareas.

En el siguiente subapartado se describe la competencia matemática del profesor, así como las subcompetencias que la componen y los niveles de logro respectivos.

5.1.1 Competencia matemática del profesor

El modelo CCDM propone tres subcompetencias con diferentes niveles de logro para la competencia matemática del profesor:

- Resolución de tareas (el profesor como solucionador de tareas o problemas matemáticos),
- Propuesta y planteamiento de problemas (el profesor como diseñador de tareas/problemas), y
- Análisis de prácticas para la resolución de problemas.

La primera subcompetencia que se enlista corresponde a la *resolución de tareas*, donde se contempla al profesor como un solucionador de tareas matemáticas o problemas asociados a una noción matemática concreta estudiada en un momento determinado.

De manera general esta subcompetencia considera que es fundamental que el profesor de matemáticas conozca e implemente las prácticas necesarias para la resolución de problemas matemáticos según el nivel educativo donde se desempeñe (Godino et al., 2017, p. 91).

Lo anterior es necesario para diseñar actividades didácticas ya que, sin el conocimiento de procesos de solución de problemas, el profesor estaría limitado a ciertas estrategias de solución, además pudiera desconocer posibles obstáculos y errores que enfrenten sus estudiantes al intentar resolver el problema propuesto.

Esta subcompetencia está categorizada por medio de los niveles de logro que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Niveles de logro de la subcompetencia de resolución de tareas (Pino-Fan et. al 2022)

Nivel	Descripción
N0	<p>El profesor reproduce tanto la formulación de las tareas matemáticas como sus procedimientos sin considerar:</p> <ul style="list-style-type: none">•Relaciones matemáticas de objetos•Procesos•Conocimiento mejorado•Las representaciones del objeto matemático•La variedad de procedimientos que resuelven la tarea matemática <p>Utiliza libros de texto o programas del grado que enseña para establecer tareas matemáticas y sus soluciones, las cuales serán discutidas durante el proceso de instrucción.</p>

- N1 El docente resuelve problemas en el nivel educativo que enseña, identifica los cambios en las variables de los problemas, pero generalmente, estos están ligados a "tipos de problemas", lo que lleva a la implementación de un tipo de procedimiento o a la generación de justificaciones, o argumentos similares, a la hora de resolver tareas o problemas matemáticos.
- N2 El profesor resuelve problemas correspondientes al nivel educativo y a las asignaturas que imparte utilizando diferentes representaciones del objeto matemático. En ocasiones, también utiliza diversos procedimientos y elabora otros argumentos. Por ejemplo, puede resolver problemas en los que se deben utilizar varios significados de la noción estudiada, pero no distingue entre las relaciones que se pueden establecer entre los diversos significados de la noción estudiada. Asimismo, puede vincular el objeto matemático que se estudia con otros objetos matemáticos del grado educativo que imparte (o anterior). Sin embargo, no puede conectarlos con objetos matemáticos de la etapa posterior ni exigirlos como conocimiento previo.
- N3 El docente resuelve problemas en el grado educativo y en el siguiente (asociado a la noción matemática estudiada en ese momento). Puede resolver tareas matemáticas utilizando diversos procedimientos y representaciones del objeto matemático. Asimismo, propone múltiples justificaciones o argumentos a la hora de resolver tareas matemáticas y puede movilizar más de un significado de la noción estudiada, relacionando y articulando los significados entre sí.^a

Nota. ^a Biehler, 2005; Pino-Fan et. al (2011) citados por Pino-Fan et. al (2022)

La segunda subcompetencia es la de *propuesta y planteamiento de problemas*, aquí se reconoce al profesor de matemáticas como el responsable de proponer las tareas que formarán parte del proceso de estudio con el objetivo de desarrollar conocimientos matemáticos y habilidades de resolución de problemas en sus estudiantes; para hacerlo debe tener ciertas competencias de selección, análisis y diseño de actividades didácticas.

En este caso, los niveles correspondientes a la subcompetencia de *propuesta y planteamiento de problemas* se describen en la Tabla 2. Pino-Fan et. al (2022) señalan que el nivel cero tiene características similares a la primera subcompetencia ya que se refiere a "replicar/repetir" tareas de otros medios (libros, internet, currículo).

Tabla 2

Niveles de logro de la subcompetencia planteamiento de problemas (Pino-Fan et. al 2022)

Nivel	Descripción
-------	-------------

-
- | | |
|----|--|
| N0 | El profesor reproduce tanto el enunciado de las tareas como sus soluciones, y hace uso de internet, libros de texto o programas de la asignatura del grado en el que imparte las clases. Esto último se realiza para establecer las tareas matemáticas que se propondrán en el proceso de estudio |
| N1 | El profesor propone tareas adecuadas al nivel educativo que enseña. Para ello, tiene en cuenta las características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos de los estudiantes y rediseña las tareas del objeto matemático, pero no prevé conceptos erróneos, errores, dificultades o diferentes posibilidades de respuesta. Se trata principalmente de adaptaciones de tareas tomadas de otras fuentes con respecto a las tareas propuestas |
| N2 | El docente propone tareas correspondientes al nivel educativo, considerando características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos del estudiante. Además, considera para su propuesta diversas respuestas plausibles, conceptos erróneos, conflictos o errores relacionados con la práctica matemática, los contextos más apropiados de acuerdo con las características, intereses y necesidades de los estudiantes. Las tareas pueden ser adaptaciones o modificaciones de tareas tomadas de otras fuentes o de su diseño. El profesor no considera que diferentes tipos de situaciones de tareas puedan requerir diferentes significados sobre la noción en estudio |
| N3 | Además, el profesor considera nuevas tareas asociadas al tema matemático y propone retos para los alumnos. Las tareas vinculan el objeto matemático estudiado con otros objetos matemáticos (en el grado escolar, grados anteriores o posteriores). Los significados de las nociones matemáticas que se propone estudiar amplían su visión de los tipos de situaciones/problemas en términos de los contextos en los que dichas nociones pueden ser utilizadas (se consideran las conexiones intra y extramatemáticas de las nociones bajo estudio). En este nivel, el profesor se anticipa a los conflictos o errores de los estudiantes y, a veces, los induce a crear oportunidades de aprendizaje |

La tercera subcompetencia llamada *análisis de prácticas para la resolución de problemas* parte del hecho de que el profesor requiere de ciertos conocimientos para analizar la actividad matemática de los estudiantes, lo que le permitiría evaluar adecuadamente las competencias

matemáticas de sus estudiantes. Esta subcompetencia está caracterizada con los niveles de logro expuestos en la Tabla 3.

Tabla 3

Niveles de logro de la subcompetencia análisis de prácticas para la resolución de problemas

Nivel	Descripción
N0	El profesor analiza las prácticas matemáticas de los estudiantes, identificando elementos matemáticos evidentes como los procedimientos o definiciones de algunos conceptos utilizados. El profesor valora estos aspectos matemáticos en términos de usos correctos o incorrectos. En este nivel, el docente no realiza un análisis a priori de las prácticas matemáticas que espera implementar con las tareas que se propone; por lo tanto, no anticipa errores o conflictos en las soluciones de los estudiantes.
N1	El profesor realiza lo indicado en el nivel anterior. Aun así, el análisis a posteriori de las prácticas matemáticas de sus alumnos se realiza tomando como referencia, el análisis a priori desarrollado con base a la respuesta que se espera obtener. El profesor planifica la respuesta que espera obtener con una tarea específica propuesta. En cualquier caso, los análisis se realizan con base a su experiencia sin considerar ninguna metodología de análisis.
N2	El profesor utiliza herramientas teórico-metodológicas para analizar las prácticas matemáticas, tanto las esperadas (a priori) como las implementadas por los alumnos (a posteriori). Con la herramienta teórico-metodológica de configuración ontosemiótica, el docente puede identificar las prácticas esperadas de sus estudiantes, las representaciones y su adecuación, conceptos/definiciones, propiedades/proposiciones, procedimientos y argumentos; y puede identificar características que fueron "generadoras" de errores o conflictos en las prácticas de los estudiantes.
N3	En este nivel, el docente se ha apropiado de algunas herramientas teórico-metodológicas. Por ejemplo, el profesor conoce la configuración ontosemiótica y la utiliza como herramienta para analizar las prácticas matemáticas. Adicionalmente, considera diversas prácticas esperadas en las que se implementan diferentes significados relacionados con el contexto e identifica y analiza elementos de configuración en las prácticas en tiempo real de los estudiantes, lo que permite al docente tomar decisiones y tomar medidas para superar errores o conflictos

Los niveles descritos en cada una de las subcompetencias permiten ser una guía para elaborar instrumentos de valoración sobre el nivel en el que se encuentran los profesores. Para lograrlo, es necesario utilizar algunas herramientas “teóricas-metodológicas” propuestas en el EOS.

Un ejemplo es la valoración de la segunda subcompetencia descrita anteriormente, aquí el profesor utiliza su *conocimiento del contenido* para proponer tareas según el objeto matemático estudiado. Tal conocimiento está categorizado como común (donde resuelve ciertos tipos de tareas), especializado (conocimiento de los *objetos matemáticos primarios* (Figura 8) presentes en la resolución de problemas y sus relaciones) y ampliado (realiza conexiones con temas más avanzados y el objeto matemático estudiado). Por consiguiente, uno de los criterios para la valoración de esta subcompetencia es el conocimiento matemático del profesor.

El uso de algunas de las herramientas propuestas y descritas en el EOS no sólo permiten la estructuración de instrumentos de valoración de los niveles antes mencionados, sino que cuentan con elementos suficientes para crear pautas al momento de diseñar y analizar actividades didácticas, en este caso el curso-taller.

A continuación, en el siguiente subapartado se describen tales herramientas a través de la forma en la que se están considerando en este proyecto de intervención educativa.

5.2 Herramientas del EOS

Dado que el objetivo principal de este proyecto de intervención educativa es desarrollar habilidades de diseño de actividades de modelización, se utilizan los constructos y nociones del EOS para:

- a) Diseñar, analizar y valorar las actividades que formen parte de la propuesta de intervención educativa, y

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) tiene sus inicios a principios de los años noventa en la Universidad de Granada, surge como una propuesta para integrar de manera articulada elementos presentes en la diversidad de teorías usadas para estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. (Godino, 2022)

En este enfoque la matemática es considerada como:

- (a) Actividad de resolución de problemas,
- (b) Socialmente compartida,
- (c) Lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado.

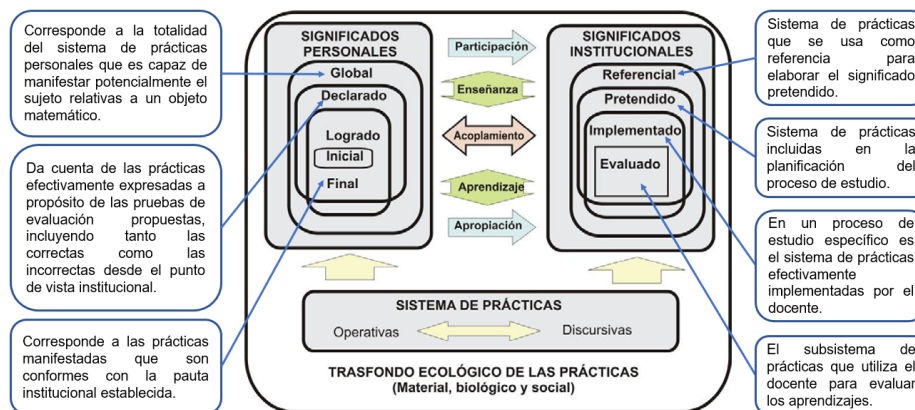
Por lo tanto, a partir de la noción primitiva de situación-problemática, en el EOS se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática que los autores hacen referencia, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia.

De tal manera que, dentro el desarrollo de este proyecto de intervención se considera necesario que para diseñar actividades didácticas el profesor de matemáticas debe tener nociones sobre:

- Las posibles actuaciones matemáticas que tienen los estudiantes al enfrentarse a cierto tipo de problemas (*sistema de prácticas y significados personales*, Figura 7),
- Un conocimiento de los contenidos matemáticos a estudiar desde la concepción epistemológica hasta su tratamiento dentro del currículo (*significados institucionales*),
- Identificación de algunos *objetos matemáticos* primarios (Figura 8) intervinientes y emergentes al resolver una situación problema planteada y cómo se relacionan entre sí, y
- El uso posible de herramientas tecnológicas con el fin de favorecer el aprendizaje de sus estudiantes.

Figura 7.

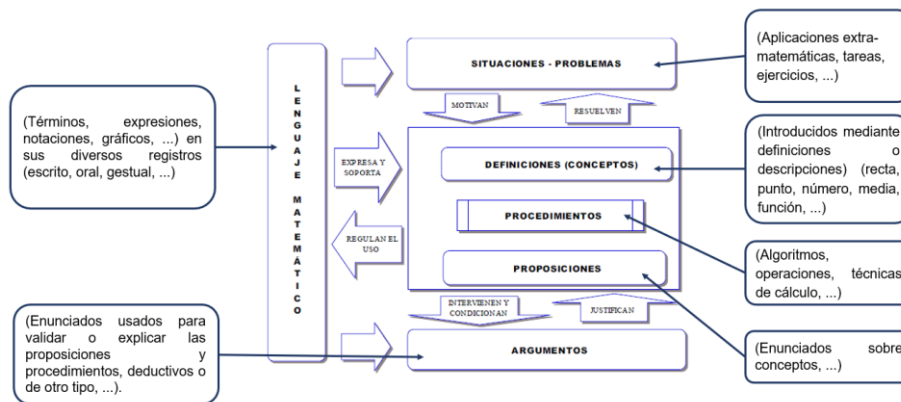
Descripción de los tipos de significados institucionales y personales propuestos por Godino et. al, (2009, p. 5, 6)



En el EOS, el significado se concibe en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. Tales sistemas de prácticas se hacen operativos mediante las correspondientes configuraciones (*epistémicas o cognitivas*), y son relativos al marco institucional, las culturas y comunidades de prácticas.

Figura 8.

Configuración de objetos primarios (Godino et. al, (2009, p. 7)



En el EOS se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. La complejidad de tal emergencia hace que su estudio se lleve a cabo desde dos niveles distintos, el primero se centra en las entidades que son observables dentro de un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.); el segundo nivel atiende a los objetos que emergen de las interacciones entre los individuos al describir los procesos de solución implementados (distintas maneras de ver, hablar, operar, etc.)

Otra herramienta de este enfoque es la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción, en este caso su uso es fundamentalmente para diseñar, analizar y valorar el curso-taller que se propone este trabajo. La descripción de esta herramienta se describe a continuación.

5.2.1 Idoneidad didáctica

En la búsqueda de herramientas para diseñar, analizar y valorar actividades didácticas se ha determinado considerar la noción de *idoneidad didáctica* de un proceso de instrucción la cual ha sido desarrollada e implementada por distintos investigadores con ese fin. Tal como lo describe Godino (2013)

La noción de idoneidad didáctica se puede aplicar al análisis de un proceso de estudio puntual implementado en una sesión de clase, a la planificación o el desarrollo de una unidad didáctica, o de manera más global, al desarrollo de un curso o una propuesta curricular. También puede ser útil para analizar aspectos parciales de un proceso de estudio, como un material didáctico, un manual escolar, respuestas de estudiantes a tareas específicas, o “incidentes didácticos” puntuales. (p. 118)

Por lo anterior, en este proyecto de intervención, tal noción es utilizada para diseñar y valorar el curso-taller.

Esta noción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes, Godino (2013) las describe de la siguiente manera:

- *Idoneidad epistémica*. Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

- *Idoneidad cognitiva.* Expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad interaccional.* Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional.* Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad emocional.* Grado de implicación (interés, motivación, entre otros) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- *Idoneidad ecológica.* Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo el centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla (p.116).

Valorar las idoneidades parciales descritas anteriormente en un proceso de instrucción es una tarea compleja que puede ser guiada a través de los indicadores de idoneidad, los cuales pueden servir de guía para el diseño y valoración de acciones formativas planificadas. (Godino, 2011, p. 8)

Con respecto al uso de la modelización como estrategia didáctica, en el apartado siguiente se describe el ciclo de modelización que es considerado como guía para el diseño de la propuesta de intervención y que estará presente dentro de las actividades didácticas diseñadas por los profesores.

5.3 La modelización como estrategia didáctica

La modelización es una actividad que permite estudiar y comprender el *mundo real* a través de las matemáticas, este proceso ha sido descrito por distintos investigadores proponiendo diferentes ciclos que la representan, tal como se ha mencionado en apartados anteriores.

En esta propuesta se considera necesario desarrollar y utilizar las fases (Figura 3) del ciclo de modelización propuesto por Blum & Leiß (2007), para estructurar el proceso de solución de los problemas planteados, además de que cuenta con los elementos para estructurar de manera esquematizada los diseños de actividades didácticas, las cuales pudieran dar sentido al estudio de las matemáticas a través de la resolución de problemas en correspondencia a la propuesta curricular actual para el nivel medio superior.

Las fases del ciclo de modelización antes mencionado, se describen a continuación tomando como referencia su presencia dentro del diseño de las actividades del curso-taller. El ciclo está conformado por siete fases, las cuales se describen a continuación:

1. **Comprensión:** El individuo vincula el contenido del problema con sus conocimientos previos, en este momento surge el planteamiento de preguntas sobre el problema, propone tipos de solución, representa las características principales.

2. **Simplificación / Estructuración:** se identifican los datos del problema, describiendo los que se conocen y los desconocidos; aquí surgen propuestas para simplificar el problema a través de la discriminación de variables.

3. **Matematización:** En este proceso, se produce una sustitución de los elementos presentes en la situación problema por objetos matemáticos, argumentando su uso a través de las características del problema y de qué manera se relacionan.

4. **Trabajo matemático:** A través del uso de los objetos matemáticos dentro de las prácticas matemáticas surgen estrategias para proponer soluciones del problema, con el fin de obtener un modelo matemático inicial.

5. **Interpretación:** En este momento se realiza una comparación de la solución con el problema inicial, argumentando la validez de los resultados obtenidos, se comprueba la coherencia de la solución matemática dentro del contexto de la situación problema original y se identifican posibles limitaciones o restricciones del modelo matemático planteado.

6. **Validación:** se promueve la justificación el modelo propuesto mediante argumentos coherentes y válidos, se valora si el modelo proporciona la solución parcial o total a la situación problema dada, aquí se pueden considerar si es necesario realizar variaciones al modelo en caso de que la situación problema cambie o si es posible usarlo de manera general en ciertos tipos de problemas.

7. **Exposición/presentación:** En este momento, se comunican las acciones y decisiones tomadas a lo largo del proceso de modelización y para obtener el modelo que corresponde a la representación de la situación problema, se hace evidente el uso de distintos lenguajes y/o representaciones (dibujos, esquemas, tablas de valores, gráficos, algebraicas, símbolos, entre otros); aquí se expresan y se escuchan las observaciones y/o sugerencias de los compañeros del grupo.

El proceso general de modelización se puede fomentar dentro del aula mediante los tipos de problemas o situaciones específicas, pero para lograrlo, los docentes deben conocer el tipo de preguntas y problemas a proponer según las condiciones y necesidades del grupo, del sistema educativo y de los contenidos matemáticos a tratar.

Es por ello que es preciso que los docentes adquieran y/o fortalezcan capacidades para identificar problemáticas presentes en la realidad donde a través de distintos contenidos matemáticos traducir esa realidad en modelos matemáticos, que sean la base de sus propuestas de enseñanza, por consiguiente, los estudiantes lleven a cabo el proceso de modelización dentro de las actividades planteadas por los docentes.

La perspectiva de modelización que se está considerando para esta propuesta de intervención es la modelización educativa, desde esta perspectiva se plantea la modelización como una práctica escolar, en la que los modelos se utilizan para estructurar y promover el proceso de aprendizaje (Trigueros, 2009).

Los elementos teóricos descritos en este apartado respaldan las acciones que se llevan a cabo para diseñar, implementar y valorar el curso-taller que será implementado con profesores de matemáticas del nivel medio superior. Tales acciones se describen a continuación en el siguiente apartado.

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Las acciones necesarias para llevar a cabo el logro de los objetivos planteados para este proyecto se describen en este apartado. Presentando de forma esquemática cada uno de los objetivos específicos, las acciones para lograrlo y el producto esperado del proceso.

El objetivo general de este trabajo de tesis es

Diseñar, ejecutar y valorar un curso-taller que desarrolle, en profesores de nivel medio superior, habilidades para el diseño de actividades didácticas de modelización de fenómenos donde esté presente la variación directamente proporcional.

Como se ha mencionado, los primeros dos objetivos específicos atienden al diseño del curso-taller, el tercero sobre la implementación y los objetivos cuatro y cinco forman parte del análisis y la valoración de la propuesta y el objetivo seis corresponde a la valoración global del curso-taller. En la Tabla 4, se presenta cada uno de los objetivos específicos, las acciones metodológicas que son llevadas a cabo para su logro y el producto esperado.

Algunas de las acciones descritas en este apartado se encuentran en desarrollo y otras por realizar, hasta este momento las acciones desarrolladas permiten aportar elementos para la presentación de las características del curso-taller que se está diseñando. Las cuales se describen en el apartado siguiente.

Tabla 4.*Objetivos específicos, acciones metodológicas y producto esperado*

Objetivo	Acciones	Producto
O1. Definir la estructura, propósitos, medios, situaciones problemas, ciclo de modelización y estrategias de conducción del curso-taller.	<p>A01. Declaración de los objetivos del curso-taller.</p> <p>A02. Determinación de la estructura del curso-taller en diferentes etapas y momentos, declarando para cada uno:</p> <ul style="list-style-type: none">a. Los objetivos,b. El tiempo destinado,c. Los recursos,d. El tipo de trabajo (individual, equipo, grupal),e. Las actividades o tareas que realizar. <p>A03. Elaboración de un instrumento diagnóstico que proporcione información de los profesores sobre sus conocimientos disciplinares, conocimientos sobre el diseño de actividades, conocimiento curricular y conocimiento sobre modelización.</p> <p>A04. Implementación del instrumento diagnóstico.</p> <p>A05. Selección de los medios y recursos necesarios para la elaboración del curso-taller.</p> <p>A06. Determinación de los criterios a considerar para la selección de los contextos que son estudiados en el curso-taller.</p> <p>A07. Selección de los contextos que son la base para proponer las situaciones problemas que formen parte del curso-taller.</p> <p>A08. Selección del ciclo de modelización.</p>	<p>P01. Objetivos del curso-taller.</p> <p>P02. Estructura y todos los elementos para el diseño del curso-taller.</p> <p>P03. Instrumento diagnóstico</p> <p>P04. Información a partir de la implementación del instrumento diagnóstico.</p>

	<p>A09. Diseño de las actividades didácticas de modelización que forman parte del curso-taller.</p> <p>A10. Selección de los sujetos y gestión de las condiciones requeridas para realizar una primera experimentación.</p> <p>A11. Selección de técnicas e instrumentos para generar y registrar la información.</p> <p>A12. Selección de las categorías de análisis.</p> <p>A13. Experimentación de las actividades diseñadas.</p> <p>A14. Análisis de la información generada.</p> <p>A15. Rediseño de las actividades a partir de las observaciones obtenidas en las intervenciones exploratorias.</p>	
<p>O2. Diseñar e integrar el curso-taller atendiendo los elementos establecidos en el primer objetivo específico.</p>	<p>A16. Integración de los elementos obtenidos a partir de las acciones realizadas para lograr el O1.</p> <p>A17. Diseño del curso-taller.</p>	<p>P05. Curso-taller diseñado</p>
<p>O3. Implementar el curso-taller con profesores de matemáticas de nivel medio superior.</p>	<p>A18. Gestión de los recursos y lugar para la implementación (hojas de trabajo, calculadora, computadora con GeoGebra, proyector y espacio físico).</p> <p>A19. Determinación de la duración del curso-taller, (30 horas presenciales y 20 de trabajo independiente distribuidas en 2 semanas).</p> <p>A20. Determinación del número de profesores participantes (de 6 a 10 profesores de matemáticas de nivel medio superior).</p> <p>A21. Selección de técnicas e instrumentos para generar y registrar la información.</p>	<p>P06. Curso-taller implementado en su totalidad.</p> <p>P07. Evidencias</p>

	A22. Experimentación del curso-taller.	
O4. Analizar la información generada a partir de la implementación.	A23. Selección de las categorías de análisis. A24. Análisis de las evidencias utilizando las categorías previamente seleccionadas.	P08. Evidencia obtenida en el objetivo 3 analizada.
O5. Valorar la pertinencia del curso-taller.	A25. Elaboración de instrumentos basados en los niveles de las subcompetencias que forman parte de la competencia matemática del profesor propuestos en el CCDM. A26. Valoración del desarrollo de habilidades para diseñar actividades de modelización a través los instrumentos previamente diseñados.	P09. Conclusiones sobre el desarrollo de las habilidades de diseño de actividades en los profesores.
O6. Valorar globalmente el curso-taller	A27. Valoración del curso-taller utilizando los indicadores de los criterios de <i>idoneidad didáctica</i>	P10. Conclusiones sobre la pertinencia del curso-taller.

7 LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

Dados los argumentos que se describen en apartados anteriores, se propone una intervención de desarrollo profesional docente, a través de un curso-taller dirigido a profesores de matemáticas de nivel medio superior con los siguientes objetivos:

Objetivo general:

Desarrollar habilidades para diseñar actividades didácticas de modelización a través de contextos donde esté presente la Variación Directamente Proporcional.

Para lograr este objetivo, es necesario que los profesores:

- *Reconozcan la importancia de conocer el currículo escolar, los conocimientos previos de sus estudiantes, las posibles estrategias de solución, conceptos erróneos, conflictos o errores presentes en la práctica matemática de sus estudiantes, para diseñar actividades didácticas.*
- *Conozcan y utilicen las fases del ciclo de modelización de Blum & Leiß (2007) para resolver problemas.*
- *Identifiquen contextos donde esté presente la VDP, para proponer situaciones problemas para su estudio.*
- *Utilicen las fases del ciclo de modelización de Blum & Leiß (2007) para estructurar el diseño de actividades didácticas.*
- *Diseñen actividades didácticas para el aula a través de la modelación matemática y resolución de problemas.*

Sus características principales son:

- Busca la integración de un grupo de trabajo con profesores de matemáticas de nivel medio superior para generar un espacio de reflexión que permitan dar respuesta a cuestionamientos como: ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos y habilidades necesarios para diseñar actividades didácticas?, ¿Qué características debe tener un diseño de actividades didácticas?, ¿Cuáles son los criterios al proponer las tareas que forman parte de un diseño de actividades didácticas?, ¿Qué papel tiene la modelización matemática dentro de la propuesta curricular actual y de qué manera se puede incorporar en el diseño de actividades?, ¿De qué manera las herramientas digitales pueden ser incorporadas dentro de las actividades didácticas de modelización?
- Se plantean situaciones problemas de fenómenos donde interviene la VDP, susceptibles a ser modelados, con el objetivo de que se considere a la VDP como integradora de temas matemáticos como la razón, la proporción, proporcionalidad, variación y ecuación lineal, abonando así, a la articulación su estudio que por lo general se tratan de manera aislada.

- La modelización se considera como la actividad que permite representar y manipular objetos reales por medio de modelos físicos, representaciones algebraicas, gráficas, tabulares y simulaciones digitales, con el fin de generar y aplicar el conocimiento matemático escolar, permitiendo resolver o predecir situaciones de diferentes contextos tanto reales como ficticios dentro del ambiente educativo.
- Las situaciones problemas que son propuestas tienen los elementos necesarios para ser resueltas por medio de las fases del ciclo de modelización de Blum & Leiß (2007), los cuales son: 1. Comprensión, 2. Estructuración, 3. Matematización, 4. Trabajo matemático, 5. Interpretación, 6. Validación y 7. Exposición/presentación.

7.1 Descripción de curso-taller

La presencia en diferentes contextos escolares y no escolares de las razones, proporciones, proporcionalidad, variación e incluso del uso de ecuaciones lineales permite tener al alcance una variedad de situaciones problemas que pueden ser descritas, analizadas y resueltas a través de su integración articulada por medio de la VDP.

En este sentido, las situaciones problemas que son propuestas en el curso-taller permiten dar sentido al estudio de la VDP desde una perspectiva práctica, es decir, se busca que a partir de una situación problema dada los profesores utilicen y desarrollen diferentes tipos de lenguajes (verbal, gráfico, aritmético, simbólico), que describan y argumenten sus procedimientos para la representación de la expresión matemática como producto de la fase de matematización del ciclo de modelización de Blum & Leiß (2007).

En tal proceso se espera que los tratamientos dados a los objetos matemáticos permitan identificar y representar en diferentes registros de representación como el gráfico, tabular, algebraico y numérico la constante de proporcionalidad (k), siendo un elemento clave para desarrollar un modelo matemático inicial, éste es el punto de partida para el análisis y discusión de las posibles estrategias a utilizar en el desarrollo de los otros procesos siguientes como el de interpretación y validación.

Además, se promueve la articulación entre los diferentes significados de los objetos matemáticos que surgen en las prácticas matemáticas de los profesores.

Si bien el curso-taller tiene como propósito desarrollar habilidades para diseño de actividades vía la modelización, se promueve también el desarrollo de conocimientos disciplinares presentes que favorezcan el desarrollo de las fases de matematización y trabajo matemático, es decir el tránsito entre representaciones a partir de los significados personales sobre la VDP.

Dentro del curso-taller se considera necesario tener espacios para que los profesores reconozcan la importancia de las matemáticas dentro de situaciones extramatemáticas, promoviendo así que las actividades sean de su interés.

De igual manera se busca la participación a través de presentaciones individuales de los procesos elaborados para la resolución de problemas, con el fin de favorecer el desarrollo de actitudes para el desenvolvimiento entre pares.

Cada uno de los momentos que constituyen el curso-taller, tienen un propósito específico, por lo tanto, según la actividad a realizarse es necesario llevar a cabo interacciones entre el instructor y los participantes, interacción entre los participantes y trabajo individual promoviendo la autonomía del profesor en la toma de decisiones para la elaboración de sus diseños de actividades.

Una parte esencial en el diseño del curso es la selección de los medios necesarios para llevar a cabo la elaboración e implementación, en este caso, los recursos considerados son hojas de trabajo, calculadora, computadora con GeoGebra y proyector.

Este curso-taller está destinado para trabajar con 6 a 10 profesores de matemáticas de nivel medio superior, en un tiempo estimado de 30 horas presenciales distribuidas en dos semanas, y 20 horas de trabajo independiente.

Se advierte que el diseño del curso está en congruencia con la propuesta curricular actual para la educación media superior en México, ya que reconoce la importancia del uso de contextos para desarrollar el conocimiento matemático y el desarrollo de estrategias de solución de problemas como en este caso las fases del ciclo de modelización seleccionado, por lo tanto, da sentido a la articulación entre los contenidos estudiados dentro de los cursos de ese nivel y en los cursos siguientes.

7.2 Estructura

El curso-taller, está planeado para desarrollarse a través de dos etapas, la primera está enfocada en el trabajo matemático que se necesita para la resolución de ciertos tipos de problemas a través del uso de las fases del ciclo de modelización de Blum & Leiß (2007), la segunda está planteada para el desarrollo didáctico-matemático del profesor, aportando herramientas para diseñar actividades didácticas de modelización; cada etapa está compuesta por diferentes momentos en los que proponen una serie de actividades y tareas para lograr los objetivos específicos del curso-taller.

Tabla 5.

Descripción de la estructura del curso-taller.

Momento en la intervención	Propósitos
-----------------------------------	-------------------

<p>Momento 0 (Sesión grupal con guía del instructor)</p> <p>Presentación del curso-taller a través de una discusión grupal guiada por el instructor, tratando de dar respuesta a los siguientes cuestionamientos:</p> <p><i>¿Qué sabemos sobre la propuesta curricular actual?</i></p> <p><i>¿Cuáles son las actividades principales del profesor de matemáticas y qué retos enfrenta para desarrollarlas?</i></p> <p><i>¿Qué es la modelización?</i></p> <p><i>¿Qué se espera lograr con este curso-taller?</i></p>	<p>Reflexionar sobre el panorama actual ante los cambios curriculares en el nivel medio superior y el reto que enfrentan los profesores al diseñar actividades.</p> <p>Presentar algunas bondades y posibles conflictos al utilizar la modelización como estrategia para la resolución de problemas.</p> <p>Presentar y describir los objetivos del curso-taller y el tipo de actividades a desarrollar.</p> <p>Especificar las características de los productos esperados durante el desarrollo y conclusión del curso-taller.</p>
<p>Momento 1 (trabajo individual)</p> <p>Presentación de una situación problema dentro de un contexto específico.</p> <p>Dada la situación problema, se propone realizar un análisis sobre el enunciado del problema. Se proponen preguntas guías como:</p> <p><i>¿Qué objetos matemáticos están presentes en el enunciado?</i></p> <p><i>¿Qué datos se conocen y se desconocen en el problema?</i></p> <p><i>¿Cuáles son necesarios para la solución?</i></p> <p><i>¿En qué curso considera que se pudiera trabajar con dicho problema?</i></p>	<p>Identificar los conocimientos previos de los profesores sobre los objetos matemáticos.</p> <p>Describir los objetos matemáticos presentes y los que consideren ser necesarios para la solución de la situación.</p>
<p>Momento 2 (trabajo grupal con guía del instructor)</p> <p>Exposición e intercambio de las respuestas a los cuestionamientos.</p>	<p>Reflexionar sobre los objetos matemáticos presentes en una situación problema, con el fin de favorecer su identificación y uso en los diseños de actividades que se llevarán a cabo.</p>
<p>Momento 3 (trabajo individual)</p>	<p>Identificar en las prácticas matemáticas, el uso del lenguaje y sus representaciones, los</p>

<p>De manera individual, se solicita al profesor resuelva la situación problema.</p>	<p>procedimientos y argumentaciones. (<i>significado personal</i>)</p>
<p>Momento 4 (sesión grupal con conducción del profesor) Exposición de las estrategias de solución de manera individual.</p>	<p>Reflexionar sobre las estrategias presentadas por los profesores, enfatizando en la variedad de rutas que se pueden dar al resolver una situación problema. Lo cual es importante al proponer una situación problema. Identificar las practicas matemáticas compartidas por el grupo. (<i>significados institucionales</i>)</p>
<p>Momento 5 (trabajo en equipo de 3 integrantes) A partir de las soluciones propuestas al problema dado, y con base a la situación problema original, los profesores diseñarán por equipos una actividad enseñanza (desde su experiencia), el trabajo será realizado por equipos.</p>	<p>Identificar las nociones que tienen los profesores sobre un diseño de actividad didáctica. <i>¿Cómo estructuran una actividad didáctica?, ¿Qué tipo de preguntas o tareas proponen?, ¿Cuál es el propósito?</i></p>
<p>Momento 6 (trabajo grupal, con exposición en equipos) Exposición en equipo de los diseños de actividades</p>	<p>Identificar similitudes y diferencias en las propuestas diseñadas. Poniendo atención en la estructura del diseño y la justificación de los elementos presentes en sus propuestas.</p>
<p>Momento 7 (trabajo grupal con guía del instructor) En este momento se pretende hacer una reflexión grupal, considerando como guía, cuestionamientos como: <i>¿Qué es un diseño de actividad de calidad? ¿Qué es necesario para elaborar un diseño de actividad didáctica de calidad? ¿Qué debo hacer para diseñar?</i></p>	<p>Reflexionar sobre las características de un diseño de actividad didáctica. Establecer criterios necesarios para incorporar en un diseño de actividad didáctica.</p>

<p>Momento 8 (trabajo grupal con guía del instructor)</p> <p>Con la intervención del instructor y la discusión grupal, a partir de los diseños didácticos presentados por los equipos, se busca orientar a los participantes a identificar las fases del ciclo de modelización declarado en los elementos teóricos, las cuales son:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Identificación de la situación problema (comprensión) • Simplificación para la construcción de un modelo (diagrama u otra representación) • Creación de un modelo matemático de la situación • Utilizar el modelo matemático para dar una posible solución • Validar la solución con la situación problema (se puede considerar el uso de herramientas digitales como GeoGebra) • Presentación y exposición 	<p>Reflexionar sobre un ciclo de modelización matemática y de qué manera las fases pudieran ser guía para diseñar actividades didácticas.</p>
<p>Momento 9 (trabajo en equipo)</p> <p>Dados los elementos descritos, se busca profundizar cada fase del ciclo de modelización, para esto, se proponen secuencias didácticas de modelización con el fin de que los profesores identifiquen las fases, describan cuáles y de qué manera están presentes en los diseños de actividades.</p>	<p>Analizar diseños de actividades de modelización, y reflexionar si ese tipo de actividades pudieran implementarse a los cursos que imparten los profesores.</p>
<p>Momento 10 (trabajo en equipo)</p> <p>Diseñar una actividad didáctica de modelización a partir de una situación problema donde interviene la VDP.</p>	<p>Identificar la incorporación y uso de las fases del ciclo de modelización seleccionado dentro de los diseños de actividades.</p>

<p>Momento 11 (trabajo grupal, con exposición en equipos)</p> <p>Exposición de los diseños de actividades realizados, y discusión grupal sobre los motivos de los elementos presentes (y faltantes) en los diseños.</p>	<p>Identificar y reflexionar sobre los cambios que surgen al considerar el ciclo de modelización dentro del diseño de actividades.</p>
<p>Momento 12 (trabajo grupal con guía del instructor)</p> <p>Reflexión sobre las propuestas de diseños y las implicaciones que pudieran tener las actividades didácticas de modelización en los cursos de matemáticas en el bachillerato.</p>	<p>Reflexionar sobre la importancia de esquematizar un diseño de actividad en congruencia al ciclo de modelización estudiado.</p> <p>Reflexionar sobre las ventajas y desventajas de incorporar este tipo de actividades en el aula.</p>
<p>Momento 13 (trabajo individual)</p> <p>Dado un contexto determinado y se propone que el profesor identifique y redacte una situación problema donde esté presente la VDP.</p>	<p>Identificar si la situación problema corresponde con el nivel educativo, si el profesor considera diferentes objetos matemáticos en su descripción.</p>
<p>Momento 13 (trabajo grupal con exposición del profesor)</p> <p>Presentación de la situación problema diseñada</p>	<p>Analizar las propuestas individuales con el fin de identificar elementos comunes en su presentación.</p> <p>Reflexionar sobre la importancia de tener conocimiento sobre el currículo escolar, considerar los conocimientos previos de sus estudiantes, reconocer posibles estrategias de solución, y los conflictos o errores que pudieran surgir en la práctica matemática.</p>
<p>Momento 14 (trabajo en equipo)</p> <p>A partir de las reflexiones anteriores, se propone a los profesores la tarea de seleccionar y replantear (si es necesario) una situación problema expuesta previamente, para posteriormente diseñar una actividad</p>	<p>Analizar y valorar los diseños de actividades propuestos, poniendo atención a la incorporación de los criterios que se han reflexionado durante el curso-taller (si está en correspondencia al nivel educativo, si se consideraron posibles estrategias de solución, si se promueven diferentes representaciones,</p>

<p>didáctica que se fundamente en las fases del ciclo de modelización.</p>	<p>si se consideraron herramientas tecnológicas).</p> <p>Analizar si las consignas llevan a desarrollar las fases del ciclo de modelización de Blum & Leiß (2007).</p>
<p>Momento 15 (trabajo grupal con guía del instructor)</p> <p>Cierre del curso-taller</p>	<p>Presentar a manera de cierre, un espacio para reflexionar sobre la importancia de utilizar las fases del ciclo de modelización estudiado como estrategia para esquematizar actividades didácticas.</p> <p>Reflexionar sobre el papel que tiene el trabajo colaborativo para diseñar actividades didácticas de modelización.</p> <p>Conocer de qué manera impactó en los profesores de matemáticas participar en el curso-taller.</p>

8 CRONOGRAMA

En este apartado de muestra un esquema con las actividades que se han realizado y las que están por desarrollarse

ACTIVIDAD	ENE-JUN 2022	AGO-DIC 2022	ENE-JUN 2023	AGO-DIC 2023	ENE-JUN 2024	AGO-DIC 2024	ENE-JUN 2025	AGO-DIC 2025
Antecedentes								
Estado del arte								
Problemática y Objetivos								
Recolección de evidencia empírica								
Aspectos teóricos								
Aspectos metodológicos								
La propuesta y sus características								
Diseño del curso								
Selección de contextos								
Definición de estructura, propósitos, medios y estrategias de conducción								
Pilotaje de actividades								
Rediseño y ajustes								
Integración y diseño completo del curso								
Implementación y recolección de datos								
Análisis de datos								
Valoración de la propuesta de intervención								

9 REFERENCIAS

- Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(1), 53-65. <https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360>
- Báez, M.A., Cantú C.A. y Gómez, K.M. (2007). Un estudio Cualitativo sobre las prácticas Docentes en las Aulas Matemáticas en el Nivel medio. Tesis de licenciatura UADY, México.
- Bassanezi, R. (1994). Modelling as a Teaching – Learning Strategy. *For the Learning of Mathematics* 14 (2), 31-35.
- Biembengut, M., Hein, N. (2004). *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*. Educación Matemática, 16 (002), 105-125.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. In B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lester, A. Wallby, & K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education.
- Blum, W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds), *Trends in Teaching and Learning Mathematical Modelling* (pp. 15-30). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3
- Blum, W., Leiß, D. (2007). How Do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? En: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (eds.). *Mathematical Modelling (ICT-MA12): Education, Engineering and Economics*. Chichester, UK: Horwood. pp. 222-231
- Bonotto, C. (2007). How to Replace Word Problems with Activities of Realistic Mathematical Modelling. In: Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, HW., Niss, M. (eds) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_18
- Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 86-95. <https://doi.org/10.1007/bf02655883>
- Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in mathematics. Didactique des mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Trads.). Nueva York, EE.UU.: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2>

- Burgos, María, & Chaverri Hernández, Jorhan. (2023). Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de docentes de primaria. *Uniciencia*, 37(1), 254-277. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14>
- Chapman, O. (2009). Educators Reflecting on (researching) their own Practice. In R. Even
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.
- Córdoba, F. (2011). La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería. (Maestría en Ciencias en Matemática Educativa), Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, México.
- Confrey, J. (2007). Epistemology and Modelling — Overview. In: Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, HW., Niss, M. (eds) *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New ICMI Study Series, vol 10. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_10
- Covián, O. & Romo, A. (2017). Matemáticas para la vida. Una propuesta para la profesionalización docente de profesores de matemáticas. *Innovación educativa (México, DF)*, 17(73), 17-47. Recuperado en 03 de mayo de 2022, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732017000100017&lng=es&tlng=es.
- Díaz, V. & Poblete, A. (2003). “Competencias Profesionales del Profesor de Matemáticas”. *Revista Números*, 53, pp.3-13.
- Dolores, Crisólogo (2013), “La formación profesional de los profesores de matemáticas”, en Crisólogo Dolores, María del Socorro García, Judith Alejandra Hernández y Leticia Sosa (eds.), *Matemática educativa: la formación de profesores*, México, Díaz de Santos, pp. 13-25.
- Dolores, C., García-González, M., Hernández-Sánchez, J., y Sosa, L. (2013). *Matemática Educativa: La formación de profesores*. Ciudad de México, México: Ediciones Díaz de Santos.
- Drijvers P, Kieran C, Mariotti M (2010) Integrating technology into mathematics education. In: Hoyles C, Lagrange J-B (eds) *Mathematics education and technology – rethinking the terrain*. Springer, New York, pp 81–87
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.
- Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), 1-24 - e202201.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57),90-113 [fecha de Consulta 20 de octubre de 2022]. ISSN: 0103-636X. Recuperado de: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291250692007>
- Gómez, Pedro (2002). *Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. En Penalva, M. C.; Torregosa, G.; Valls, J. (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.
- Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modeling. In G. Stillman, W. Blum, M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences ICTMA 16* (pp. 173–183). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.
- Grijalva, A. e Ibarra, S. E. (2017). Una experiencia de diseño de actividades de enseñanza con base en los criterios de idoneidad didáctica. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
- Guacaneme, E. (2016). Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas (Tesis de doctorado en Educación). Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Haines C, Crouch R, Davis J (2000) *Mathematical modelling skills: a research instrument*. Technical Report No 55, University of Hertfordshire: Department of Mathematics
- Herrera, K., Dávila, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. (2021). *Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 108, pp. 263-289.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students.

- Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372–400.
<http://www.jstor.org/stable/40539304>
- Huincahue, J. (2017). *Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría Socioepistemológica* [Tesis de doctorado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso]. Researchgate.
https://www.researchgate.net/publication/328171391_Propuesta_de_modelacion_matematica_en_la_formacion_de_profesores_y_bases_para_una_variedad_de_modelacion_desde_la_teor%C3%ADa_Socioepistemologica
- Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R. & Mena-Lorca, J. (2017). Math modeling knowledge from reflection in math teachers initial training. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 36(1), 99.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277>
- INEE. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2018). *Directrices para mejorar las políticas de formación y desarrollo profesional docente en educación básica*. Ciudad de México: INEE.
- Kaiser, G. (2014). Mathematical Modelling and Applications in Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht.
https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_101
- Kaiser-Meßmer G. (1986) *Anwendungen im Mathematikunterricht*. Vol. 1 – Theoretische Konzeptionen. Vol. 2 – Empirische Untersuchungen. Franzbecker, Bad Salzdetfurth.
- Kaiser, G. & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education Examples and Experiences. *J Math Didakt (2010)* 31, 51–76
- Kaiser, G., Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 38, 302–310
<https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Koehler, M. & Mishra, P. (2009) What is technological pedagogical content knowledge? *Contemp Issues Technol Teach Educ* 9(1). Retrieved 8 Feb 2012 from
<http://www.citejournal.org/vol9/iss1/general/article1.cfm>
- Kuzniak, A. (2011). L’Espace de Travail Mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
- Liljedahl, P. y Santos-Trigo, M. (Eds.). (2019). *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research*. Cham, Suiza: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6>
- Lima Díaz, I. (2019). *Desarrollo profesional del profesor de matemáticas: Estudio de caso en el nivel medio de secundaria*. Tesis de posgrado. Universidad Nacional de La Plata.

Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. En Memoria Académica. Disponible en: <http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/tesis/te.1771/te.1771.pdf>

- Llinares, S., Valls, J., & Roig, A. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, 20(3), 59-82.
- Méndez Reina, M. (2020). *Caracterización de ambientes y tareas de modelación matemática en la formación de docentes de matemáticas*. Universidad Santo Tomás.
- Mochón Cohen, S., (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática*, 24(1), 133-157.
- Mora Castor D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 24(70), 181-272. Recuperado en 19 de septiembre de 2023, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000200002&lng=es&tlng=es
- Obando Z, G., & Vasco U., C., & Arboleda A., L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (1), 59-82. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1713>
- Oller, A., & Gairin, J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317-318.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109.
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., & Moll, V. F. (2022). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher' practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- Pochulu, M. D., y Aparisi, L. A. (2013). *Obstáculos y desafíos que enfrentan los profesores en escenarios de modelización*. *Matemática Educativa: La formación de profesores*, 251–266.
- Pochulu, M., Font, V., Rodríguez, M., (2013). *Criterios de diseño de tareas para favorecer el análisis didáctico en la formación de profesores*. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 4999-5009). Montevideo, Uruguay: SEMUR.
- Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas [Development of the competence in didactic analysis of trainers of future mathematics

- teachers through task design]. RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19 (1), 71–98. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1913>
- Pollak, H. O. (1979). The interaction between mathematics and other school subjects. In UNESCO (Ed.), *New trends in mathematics teaching IV* (pp. 232–148). Paris: OECD.
- Pollak, H. (2012). What is Mathematical Modelling? In Heather, G., Diane, M., y Andrew, S. (Eds.), *Mathematical Modelling Handbook* (Introduction, viii). Washington, D.C., Estados Unidos: COMAP
- Programas de Estudio. Área de Matemáticas: Matemáticas I–IV. Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades. México. Primera edición: 2016.
- Puertas, L. (1994). *Los Elementos. Libros V- IX*. Ed. Gredos. Colección Biblioteca Clásica. Madrid.
- Ramos-Rodríguez, E. y Vásquez, C. (2020). Un modelo de programas efectivos para el desarrollo profesional docente del profesor de matemáticas. *PNA*, 15(1), 27-49
- Rivas, M. A., Godino, J. D., & Castro, W. F. (2012). Desarrollo del Conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros Profesores de Primaria. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42 B), 559-588.
- Romo-Vázquez, A., Barquero, B., y Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, 19(2), 161-183.
- Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Salazar Solórzano, L. (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto de matemática. *Paradigma*, 35(1), 55-77. Recuperado en 01 de septiembre de 2023, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512014000100003&lng=es&tlng=es
- Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The handbook of Mathematics teacher education: Volume 2* (pp. 321–354).
- Sinclair, N., Robutti, O. (2014). Teaching Practices in Digital Environments. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_153
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14.

- Sosa, L. y Ribeiro, C. M. (2014). La formación del profesorado de matemáticas de nivel medio superior en México: una necesidad para la profesionalización docente. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*, 1, 1-15.
- Stillman, G., Brown, J. and Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at Year 9. In R. Lesh, P. L. Galbraith and C. R. Haines & A. Hurford (Ed.). *Modeling students' mathematical modeling competencies: ICTMA13* pp. 385 - 398 Springer.
- Sullivan, P., Knott, L., & Yang Y. (2015). The Relationships Between Task Design, Anticipated Pedagogies, and Student Learning. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in mathematics education: The 22nd ICMI study. New ICMI study series* (pp. 83–114). New York: Springer
- Trigueros, M. (2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240. Recuperado de <http://www.redalyc.org/pdf/140/14003106.pdf>
- Trigueros, M., & Oktaç, A. (2019). Diseño de tareas en la Teoría APOE. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (15), 43–55. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.256>
- Zaldívar, J., Quiroz, S., & Medina, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 8(15), 87-110. Recuperado en 05 de mayo de 2022, de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2448-85502017000200087&lng=es&tlng=es.