UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

El desarrollo del concepto de Derivada mediante la razón promedio de cambio con apoyo de tecnología

Documento predoctoral que presenta

PAULINA DANAE LÓPEZ CEBALLOS

Directora de Tesis:
Dra. Gloria Angélica Moreno Durazo

Codirector de Tesis:
Dr. José Luis Díaz Gómez

Hermosillo, Sonora noviembre, 2023

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCyT) por el apoyo que ha brindado para mi formación, con la beca de número 2022-000002-01NACF-07526 y CVU número 1193695.

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN

La matemática ha sido una herramienta fundamental para plantear y resolver muchos problemas a lo largo de la historia. Sin embargo, la forma en cómo se transmite el conocimiento matemático ha cambiado muy poco a lo largo de la historia (Cantoral et al., 2000; Heuvel-Panhuizen, 2002; Salinas y Alanís, 2009 y Hitier y González, 2022), a pesar de las múltiples investigaciones que se pueden encontrar en educación matemática sobre cómo mejorar el proceso de enseñanza o aprendizaje.

Estos avances, muchos de los cuales utilizan tecnología para mejorar los procesos de construcción del aprendizaje, han permeado muy poco en las aulas Lavicza (2010). La educación matemática actual, sigue repitiendo el formato anterior, una educación discursiva, centrada en el docente, donde el aprendizaje se caracteriza por la memorización y repetición de fórmulas, donde se privilegia el método y el resultado y se deja de lado la comprensión práctica y significativa de los conceptos matemáticos, aún y cuando esta es la principal razón por la que, la matemática, se incluye en todos los programas educativos, particularmente en los de orden superior (Freudenthal, 1991).

En el nivel universitario, particularmente en la Universidad de Sonora, en algunos casos la enseñanza de la matemática no dista mucho de este modelo, el docente expone los temas, realiza algunos ejemplos y les deja a los alumnos ejercicios para repitan de manera similar (algunos docentes incluso exigen que se realice de forma exacta) el procedimiento que realizó para llegar al resultado. Esto deja muy poco espacio para que el alumno comprenda su utilidad práctica para modelar y resolver un sinfín de situaciones que se pueden presentar en su formación académica, en su campo laboral o en su vida diaria. Las matemáticas forman parte del currículo escolar porque deben servir para desarrollar habilidades como abstraer, explicitar, identificar, interpretar y resolver cualquier situación tanto intramatemática como extramatemática.

La educación que se centra en lo procedimental (mira y repite) nulifica el desarrollo de estas habilidades, porque centra su atención en la obtención de un resultado y no en las habilidades para modelar matemáticamente la situación (Sfard, 2001).

En el currículum del nivel universitario se incluye un concepto matemático fundamental para resolver numerosos problemas de fenómenos dinámicos: la función derivada. Este concepto se encuentra en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral para ingeniería, así como en los cursos de Cálculo o Matemáticas para programas de licenciatura, como Geología, Genética, Química, Economía, entre otros. Esto se debe a su utilidad para analizar los cambios instantáneos en fenómenos de las ciencias naturales, físicas, sociales, y más.

Este proyecto inmerso en la línea de generación y aplicación del conocimiento: *Diseño de proyectos de intervención didáctica*, toma el concepto de derivada para proponer un cambio en la forma de abordarlo en el nivel universitario, esto es, a través de la resolución de situaciones problema de optimización que permitan, por un lado, ver su utilidad para resolver este tipo de problemas y, por otro, desarrollar, habilidades de modelación matemática que contribuyan al propósito del ser y estar de la matemática en el currículo universitario.

En este documento, en la sección de antecedentes, se describen las dificultades que provoca el aprendizaje de la derivada desde el enfoque actual, donde se prioriza el tratamiento algebraico, lo que conlleva a un aprendizaje limitado y una escasa aprehensión de este concepto por parte de los estudiantes, de acuerdo a la revisión bibliográfica y al análisis de los datos obtenidos del examen departamental aplicado en el año 2019 a los programas de ingeniería de la Universidad de Sonora.

En la sección del estado del arte, la revisión bibliográfica se enfocó en identificar errores conceptuales que han sido señalados en investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de derivada, con el propósito de reducirlos, en alguna medida, mediante las actividades didácticas propuestas en la secuencia didáctica del Proyecto de Intervención Doctoral. Otro punto importante identificado en el análisis bibliográfico, sugiere incluir, en las actividades, diferentes tipos de representación, ya que estos desempeñan un papel fundamental en la construcción de conceptos matemáticos más integrales (Clark et al., 1997; Asiala, 2001 y Ariza y Llinares, 2009).

El marco teórico que se ha seleccionado para el desarrollo de esta propuesta de intervención, es la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR). En esta teoría, las actividades deben permitir que sea el propio estudiante quién desarrolle el concepto matemático a partir de sus conocimientos previos, mediante la resolución de una situación problema. Esta perspectiva es distinta a la forma tradicional de enseñar y aprender el concepto de derivada, y está más apegada al propósito de su inclusión en el currículo de todos los programas de ingeniería y muchos programas de licenciatura a nivel universitario. Para guiar las secuencias didácticas, hacemos uso de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje como marco metodológico, ya que permiten guiar, de forma secuencial, la construcción de actividades, que permitan a los propios estudiantes, construir el concepto de derivada a partir de la resolución de un problema de optimización. Al final, se incluye un ejemplo de secuencia didáctica con actividades propuestas y los recursos tecnológicos sugeridos.

El objetivo de este proyecto de tesis doctoral es crear un repositorio en línea con varias secuencias didácticas centradas en el estudio de la derivada desde la perspectiva variacional de la razón de cambio, con el apoyo de recursos tecnológicos. El propósito es favorecer un aprendizaje integral de la derivada que permita identificar, modelar y resolver problemas, como los de optimización, en la Ingeniería.

Como orientación al trabajo por venir se encuentra un cronograma separado por semestres en el que se detallan las actividades realizadas hasta el momento y las pendientes para los próximos dos años.

2 ANTECEDENTES

La organización didáctica de muchos de los cursos de matemáticas en el nivel universitario aún está influenciada por la corriente educativa conocida como Matemática Moderna, la cual influyó curricularmente a nivel internacional y tuvo su auge en México durante la década de 1960 a 1970 (Martínez, 1978). En este enfoque, la enseñanza está centrada en el docente, quien está encargado de transmitir sus conocimientos y el aprendizaje se enfoca hacia la comprensión profunda de los conceptos matemáticos formales, dejando a un lado la vinculación de la matemática con otras ciencias, tal como lo indican Cantoral et al. (2005):

> En la enseñanza superior, [se asume] que la matemática interviene en ese nivel casi exclusivamente como disciplina principal de enseñanza olvidando un hecho fundamental que caracteriza al sistema didáctico de la educación superior; también y quizá con mayor fuerza, la matemática escolar está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, de donde a su vez adquiere sentido y significación. (p. 189)

Muchos docentes imparten su catedra de la misma forma como a ellos le fue enseñado el contenido matemático y sus maestros les impartieron clase imitando a sus profesores y así continuamente hacia el pasado. La forma de enseñar y aprender matemáticas, en el nivel universitario, en muchos cursos, está centrada en el discurso del docente y se caracteriza por la formalización de los conceptos matemáticos a través de teoremas, donde la demostración rigurosa de los mismos se interpreta como una verdad incuestionable (Jiménez et al, 2022). La memorización de fórmulas y el mecanicismo de procedimientos es la estrategia utilizada en el aprendizaje, dejando de lado la comprensión significativa de los conceptos matemáticos como herramienta para modelar y resolver problemas intra y extra matemáticos.

En aquellos casos en los que el docente muestra la forma en cómo la matemática resuelve algún problema de otra ciencia, este se ve como una aplicación de los teoremas estudiados o analizados, como si la matemática surgiera de forma autónoma y luego se "busca donde aplicarla". Barrantes (2006) describe cómo Schoenfeld plantea una serie de creencias sobre la matemática que tiene el estudiante, entre las que se encuentra, "las matemáticas aprendidas en la escuela tienen poco o nada que ver con el mundo real… Esta lista [de creencias] está basada en estudios que se han realizado en diferentes partes del mundo" (p. 6).

Asimismo, Montiel (2005) encontró que "tradicionalmente la convivencia de las matemáticas con otras áreas científicas escolares se entiende como la aplicación de las primeras en los problemas de las segundas" (p. 4). Gravemeijer y Terwel (2000) enfatizan que se debe rechazar el enfoque de enseñar matemáticas puras o teóricas primero y luego mostrar cómo aplicarlas, ya que esto representa un orden equivocado si se quiere que los estudiantes aprecien la utilidad de las matemáticas para estudiar, modelar, representar y explicar los fenómenos que surgen en otras ciencias, "esto no se puede lograr simplemente enseñando “matemáticas útiles”; esto inevitablemente resultaría en un tipo de matemática que es útil sólo en un conjunto limitado de contextos” (ídem, p. 780).

Por su parte, Sfard (2001) menciona que, “durante mucho tiempo se ignoró en las clases de matemáticas la necesidad humana básica del significado” (p. 106), es decir, los docentes enfocan su atención y esfuerzo en plantear y demostrar teoremas y dejan de lado el significado práctico que dio origen al concepto matemático que están describiendo.

En este escenario, los estudiantes finalizan sus cursos sin saber cuáles son los problemas que se pueden modelar y resolver con las estructuras geométricas, algebraicas, tabulares y gráficas que utilizaron una y otra vez durante su curso de matemáticas, convirtiéndose en una materia tediosa, aburrida, difícil e inútil, “desde que se convirtieron en una parte obligatoria de los currículos escolares, las matemáticas se han conocido como el terror escolar” (Sfard, 2001, p. 97).

En este mismo sentido, Zúñiga (2007) señala que “saber matemáticas significa, para los alumnos, tener alguna habilidad en la resolución de ecuaciones, desarrollar procedimientos, aplicar fórmulas y métodos. Rara vez un estudiante concibe a las matemáticas como algo que le pueda ser útil más allá de eso” (p. 148). Los estudiantes acreditan las materias de matemáticas repitiendo lo que realizó el profesor, aunque no tenga sentido ni significado; así lo indica Barbosa quien identificó que la mayoría de los estudiantes se enfocan en la resolución de ejercicios de forma mecánica, aplicando reglas sin sentido (citado en Gonçalves y da Silva, 2013).

De la misma manera, Ruiz (2008) encontró que “tradicionalmente la matemática es de las materias que generalmente menos entusiasma a los estudiantes, rechazándolas en la mayoría de los casos al tildarlas de difíciles y carentes de uso posterior en la vida, reconociendo en todo momento su carácter abstracto” (p. 4).

Desde la experiencia de Silva y Borges (1994) “cuando los estudiantes perciben que los contenidos se corresponden con sus expectativas, es decir, son capaces de relacionarlos con probables situaciones reales que vivirán en el futuro, casi siempre intentan asimilar los conocimientos transmitidos y desarrollar habilidades más rápidamente” (p. 4). De igual manera Gonçalves y da Silva (2013) identificaron que “una posible forma de mostrar...[la] importancia [de la matemática] es desarrollar actividades en el aula en las que se trabajen aplicaciones” (p. 420).

En conjunto, estos resultados de investigaciones evidencian que, desde la perspectiva didáctica actual, los estudiantes no reconocen a la matemática cómo una herramienta útil para modelar, representar y resolver problemas de su disciplina, a pesar de que esta es una habilidad que se espera adquieran durante su trayectoria escolar dentro de la Universidad de Sonora (Figura 1).

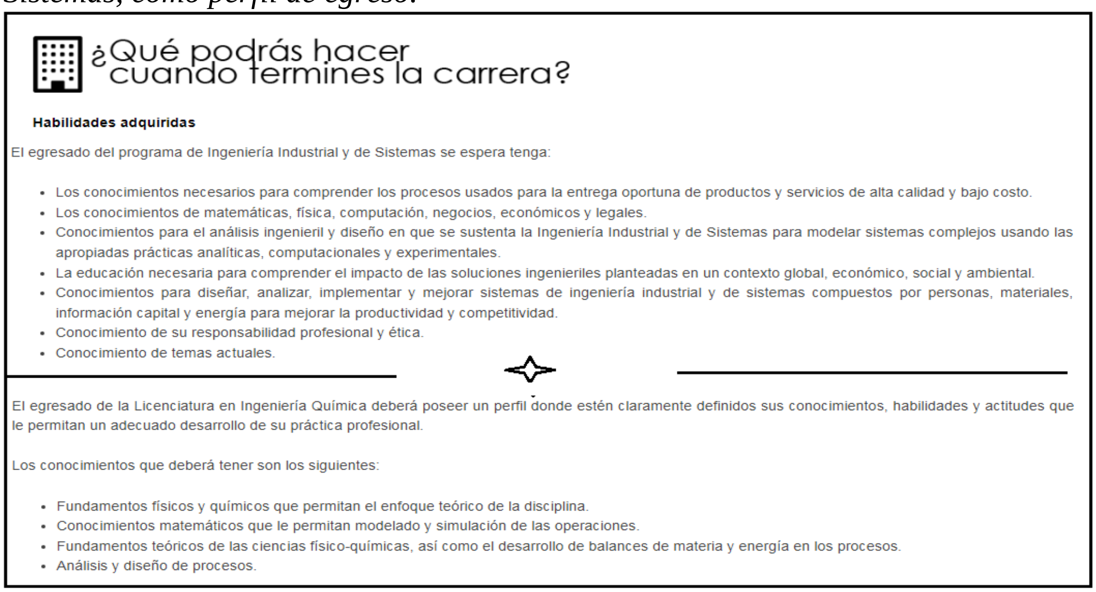
Otro aspecto importante que se debe resaltar es que el currículo universitario de los cursos de matemáticas, en las áreas de Ingeniería, Química, Biología, etc., en la Universidad de Sonora, está diseñado de la misma manera que el currículo para la Licenciatura en Matemáticas, es decir, la estructura, los temas y su secuenciación, los teoremas, las demostraciones, la bibliografía, etc., son iguales para estos dos tipos de estudiantes, aunque el perfil de egreso y las competencias a desarrollar son obviamente muy diferentes.

Los estudiantes no matemáticos requieren un aprendizaje menos formal y más práctico, relacionado con los problemas que van a enfrentar y que deberán resolver cuando estén en el campo laboral (de acuerdo a su perfil de egreso), así lo expresa Bressan (2005) “no todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos, y que para una mayoría la matemática a utilizar será la que les ayude a resolver los problemas de la cotidianeidad” (p.75). En este sentido, Camarena (2009) menciona que:

> Las investigaciones que se han efectuado verificaron que gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de áreas de ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento, y que con el tiempo pierden su contexto para ofrecer una matemática “pura” que es llevada a los ambientes de aprendizaje, lo cual carece de sentido para aquellos estudiantes que no desean ser matemáticos. (p. 17)

Figura 1.

Habilidades a desarrollar en estudiantes de Ingeniería Química e Ingeniería Industrial y de Sistemas, como perfil de egreso.



¿Qué podrás hacer cuando termines la carrera?

Habilidades adquiridas

El egresado del programa de Ingeniería Industrial y de Sistemas se espera tenga:

- Los conocimientos necesarios para comprender los procesos usados para la entrega oportuna de productos y servicios de alta calidad y bajo costo.
- Los conocimientos de matemáticas, física, computación, negocios, económicos y legales.
- Conocimientos para el análisis ingenieril y diseño en que se sustenta la Ingeniería Industrial y de Sistemas para modelar sistemas complejos usando las apropiadas prácticas analíticas, computacionales y experimentales.
- La educación necesaria para comprender el impacto de las soluciones ingenieriles planteadas en un contexto global, económico, social y ambiental.
- Conocimientos para diseñar, analizar, implementar y mejorar sistemas de ingeniería industrial y de sistemas compuestos por personas, materiales, información capital y energía para mejorar la productividad y competitividad.
- Conocimiento de su responsabilidad profesional y ética.
- Conocimiento de temas actuales.

El egresado de la Licenciatura en Ingeniería Química deberá poseer un perfil donde estén claramente definidos sus conocimientos, habilidades y actitudes que le permitan un adecuado desarrollo de su práctica profesional.

Los conocimientos que deberá tener son los siguientes:

- Fundamentos físicos y químicos que permitan el enfoque teórico de la disciplina.
- Conocimientos matemáticos que le permitan modelado y simulación de las operaciones.
- Fundamentos teóricos de las ciencias físico-químicas, así como el desarrollo de balances de materia y energía en los procesos.
- Análisis y diseño de procesos.

Nota: Información presentada de las carreras de Ingeniería Industrial y de Sistemas (https://ofertaeducativa.unison.mx/division-de-ingenieria/ingenieria-industrial-y-de-sistemas/) y de Ingeniería Química (https://ofertaeducativa.unison.mx/division-de-ingenieria/licenciatura-en-ingenieria-quimica) de la Universidad de Sonora.

Según Garcés (2021), esto ocurre también a nivel iberoamericano, donde se tiene “la creencia de que aprender un conocimiento abstracto y general de tipo científico en la base de la formación académica [es] suficiente para que el ingeniero lo aplicase cuando lo necesitase” (p. 26), es decir, se presupone que los conocimientos abstractos y formales, como aprenderse un teorema y su demostración, permite que este concepto pueda ser aplicado en diferentes contextos con cierta facilidad, lo cual no ocurre así.

Por otro lado, dedicar mucho tiempo del curso a los teoremas y sus demostraciones, que los estudiantes de Ingeniería rara vez van a utilizar en su práctica laboral, no deja suficiente tiempo para que el estudiante pueda comprender y resolver aquellos problemas que sí pueden llegar a presentarse en su contexto profesional, como lo marca el perfil de egreso de Ingeniería Industrial e Ingeniería Química. Así lo mencionan Cantoral et al. (2005), "[en] ciertas ocasiones, el profesor presenta un problema, pero no destina suficiente tiempo a sus estudiantes para que ellos propongan soluciones" (p. 36). También Milner y Jiménez (2020) encontraron que:

> La solución de los problemas de la vida real (en contraste con los problemas matemáticos que podemos considerar como teoremas, o verdades a demostrar) no requieren todo ese formalismo, hecho bien conocido por los físicos e ingenieros que cuentan con maneras prácticas de resolverlos con una "formalidad" mucho más intuitiva y por lo tanto comprensible. (p. 2)

La influencia de la Matemática Moderna, aún presente en los cursos de Cálculo de las Ingenierías en la Universidad de Sonora, explica en gran medida su diseño didáctico, donde se inicia con definiciones, teoremas y sus demostraciones, siguiendo con series de ejercicios donde se repite "de forma exacta" lo que realizó el docente y, al final, si el tiempo alcanza, se ven algunas aplicaciones, regularmente dentro de la misma matemática. Esta secuencia de temas la podemos apreciar en los libros de texto que se utilizan como bibliografía en estos cursos, por ejemplo: Fundamentos de Cálculo de Flores et al. (2008), Cálculo Breve con Aplicaciones de Larson et al. (1990), Calculo de Leithold (1988) y Calculo I de Apóstol (1990). Según mencionan Jiménez et al. (2022):

> El Cálculo es una asignatura matemática de grandes contrastes. Por un lado, es el curso de matemática que goza de la peor reputación y registra los más bajos índices de aprovechamiento y retención, y también los más altos en reprobación y deserción en casi todos los sistemas educativos alrededor del mundo. Por otro lado, es una asignatura de la que se tienen grandes expectativas, dado su papel central en las ciencias como herramienta...para el estudio de la realidad. (p. 11)

Esto lo podemos reafirmar con los resultados obtenidos en el Examen Departamental de Cálculo Diferencial e Integral I, que se aplicó el 5 de diciembre del 2019 a 10 grupos de Ingeniería de la Universidad de Sonora, donde se obtuvo un promedio global de 41.42 puntos (escala 0-100), con una desviación estándar de 10.90; lo que indica un aprovechamiento muy bajo, con una calificación global que no alcanza la mínima aprobatoria para estos cursos (60 puntos).

Estos resultados pueden explicarse porque, según Reis, "muchos conceptos de Cálculo se trabajan en el aula de forma clásica, a través de definiciones, teoremas, demostraciones y propiedades, seguidos de listas de ejercicios que los estudiantes deben resolver" (citado en Gonçalves y da Silva, 2013, p. 426), de manera que algunos estudiantes pueden resolver de forma mecánica cálculos y operaciones, pero no pueden resolver aquellos problemas "no rutinarios".

El objetivo de un curso de cálculo debería ser proveer a los estudiantes herramientas matemáticas que les permitan representar, modelar y resolver problemas de su entorno, tal y como lo describe su perfil de egreso, no mecanizar procedimientos y cálculos sin sentido. Garcés (2021) menciona que actualmente han surgido dudas sobre si esta formalidad en la enseñanza de las matemáticas es, o no, la mejor forma de aprender para los futuros ingenieros, afirmación que comparte Sfard (2001), Faulkner et al. (2019), Jiménez et al. (2020), entre otros.

Los estudiantes no pueden desarrollar habilidades matemáticas más allá de un enfoque mecanicista y procedimental si el docente le proporciona los métodos, las herramientas y los pasos a seguir como recetas, esto deriva en aprendizajes puramente algebraicos y memorísticos carentes de significado, en palabras de Dávila (2010):

> En los cursos se presenta a los objetos matemáticos como algo ya acabado y alejado de la realidad...esto puede ocasionar que el curso de cálculo carezca de sentido para el alumno, ...que se le dificulte usarlos en contextos distintos del analítico…y para modelar situaciones planteadas en contextos extra matemáticos. (p. 10)

Si se quiere formar ingenieros capaces de resolver problemas dentro del contexto en el que se desarrollen profesionalmente, la forma de enseñar los contenidos matemáticos debe modificarse. D'Amore y Godino (2007) encontraron que, "en un contexto eficaz de aprendizaje… el aprendiz…[debe] hacer el resultado como propio, crea[r] un camino personal para su comprensión… el conocimiento debe convertirse en conocimiento personal" (p. 201). Es decir, el docente no debe darle la receta, sino permitir que el estudiante explore y descubra como los ingredientes se mezclan para obtener el resultado esperado. Complementando lo anterior, Ruiz (2008) afirma que:

> Un mayor acercamiento o vinculación del contenido matemático a la realidad, a través de la utilización de métodos de enseñanza aprendizaje que la vinculen a la resolución de problemas de la vida, ayuda a eliminar tal rechazo a la matemática al tiempo que contribuye a satisfacer las demandas que la UNESCO plantea para el aprendizaje de las ciencias…. fortaleciéndose así el vínculo interdisciplinar. (p. 4)

Actualmente, la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2022) está proponiendo un nuevo modelo educativo denominado *La Nueva Escuela Mexicana* para educación preescolar, primaria y secundaria, donde "los contenidos dejan de responder a una especialización progresiva por asignaturas y se articulan junto a situaciones que son relevantes para el sujeto y la comunidad a partir de puntos de conexión comunes entre las disciplinas que integran cada campo" (p. 7). Esto involucrará necesariamente transformaciones didácticas desde el nivel básico hasta el nivel superior para poder trabajar con los estudiantes egresados de este nuevo sistema escolar.

Utilizar situaciones contextualizadas que el estudiante pueda modelar, es una buena forma de atender estas propuestas, ya que permite abordar los conceptos matemáticos correspondientes a la asignatura de Cálculo, de manera activa e interdisciplinaria, a la vez que permite que sea el propio estudiante quién descubra e interprete los conceptos y sus representaciones a través de su manipulación al modelar y resolver el problema. Así lo identificaron Juárez et al. (2020) cuando comentan que:

> El uso de la modelización matemática en las aulas universitarias puede cambiar la percepción de los estudiantes sobre la importancia de las matemáticas, así como apoyar la comprensión de los contenidos matemáticos vinculándolos con la realidad... a través de la modelización, los estudiantes universitarios pueden entender cómo se originan muchos conceptos y estructuras matemáticas, así como sus aplicaciones. (p. 162)

Además, el uso de la modelación permite que el estudio del cálculo sea más atractivo para los estudiantes, pues además de vincularlo con problemas de su disciplina, permite involucrarlos en un proceso de aprendizaje activo, donde ellos proponen soluciones, las prueban, las reestructuran, etc., lo que conlleva a un aprendizaje significativo. Así lo indican Sulasmi et al. (2020):

> Un estudio realizado por McCormic muestra que, cuando los estudiantes participan activamente en el proceso de aprendizaje, experimentan un aprendizaje significativo y una mejor comprensión de las ideas matemáticas importantes. La actividad de los estudiantes se convierte en un elemento muy importante en el éxito del aprendizaje. (p. 2)

Actualmente se puede encontrar una amplia diversidad de investigaciones respecto a la modelación, los tipos de problema que son adecuados, los contextos, las fases de la modelación (incluyendo sus diagramas), la manera en que se puede integrar a las actividades escolares, por mencionar algunos elementos. Por ejemplo, Villa et al. (2022) mencionan que:

> Una de las comprensiones más amplias de la modelación radica en concebirla como la resolución de problemas del mundo real con el fin de comprender y explicar una situación, un fenómeno o para controlar y anticipar los comportamientos de las variables. (p. 68)

Para Stillman (2019) la modelación es el reconocimiento de un problema del mundo real, el cual es estudiado y analizado a partir de diversas posturas y con propósitos diferentes. Para este investigador, la modelación puede ser el vínculo para enseñar conceptos y procedimientos matemáticos; enseñar modelos matemáticos y maneras de aplicar las matemáticas y promoverlas como una actividad humana que responda a problemas de diferente naturaleza que den lugar a la aparición de conceptos, nociones y procedimientos. También Camarena (2009) identifica que "la matemática en contexto auxilia al estudiante a construir su propio conocimiento con amarres firmes y duraderos y no volátiles" (p. 23).

En este trabajo, la visión de la modelación estará sustentada por el Marco Teórico que va a guiar el desarrollo de esta tesis. En la Educación Matemática Realista (EMR), la modelación se refiere a una visión pedagógica que busca desarrollar en los estudiantes la capacidad de utilizar las matemáticas para comprender, analizar, expresar y resolver problemas del mundo real; bajo este enfoque los estudiantes no solo aprenden conceptos y procedimientos matemáticos abstractos, sino que también aprenden a aplicarlos en situaciones concretas y contextualizadas (Bressan, 2005).

A través de este posicionamiento teórico sobre la modelización, los estudiantes trabajan en la identificación de variables relevantes, la formulación de relaciones que describen cómo estas variables están interrelacionadas (modelos emergentes), la manipulación de sus distintas representaciones (gráficas, tabulares, algebraicas, etc.), la interpretación de estas representaciones en el contexto de la situación que las originó, el desarrollo hacía modelos matemáticos más generales y abstractos, hasta la consolidación de los conceptos matemáticos formales (de nivel superior) descontextualizados de la situación original, que permiten extenderlos a otros contextos similares o bien definirlos formalmente, a través de sus teoremas y demostraciones. “Se trata [de] que los alumnos, quienes al principio no poseen herramientas matemáticas suficientes, las reinventen a partir de abordar problemas presentados en contextos y situaciones realistas” (Bressan et al., 2016, p. 3).

De esta manera, la EMR promueve un enfoque más dinámico y aplicado de la matemática, donde la modelación se define como aquellos modelos que emergen cuando se está resolviendo la actividad “in statu nascendi” y no aquellos modelos preconstituidos e impuestos desde la matemática formal (Bressan et al., 2016).

Esta perspectiva de la EMR no solo tiene implicaciones teóricas, sino también prácticas en la educación matemática, las cuales son retomadas por este proyecto para debatir intervenciones didácticas diferentes en la forma actual de enseñar el Cálculo, especialmente en lo que respecta a la enseñanza de la derivada. En concreto, bajo esta perspectiva se propone partir de situaciones problema que los estudiantes puedan concebir como reales, es decir, que pueden llegar a presentarse en su vida académica, laboral o personal, y se crean ambientes propicios para que emerjan modelos cognitivos. Estos modelos se desarrollan a través de la modelización, la exploración, el descubrimiento de reglas, operaciones, representaciones, entre otros elementos. Al permitir que los estudiantes sean partícipes activos en la construcción de su conocimiento matemático, la EMR fomenta un aprendizaje más auténtico y significativo, lo que a su vez contribuye a un mejor dominio de los conceptos matemáticos y a una mayor capacidad de aplicarlos en diversas situaciones.

En particular, el concepto de derivada es sumamente relevante dentro de un curso de Cálculo, motivo por el cual está presente en una variedad de programas académicos de nivel universitario; motivación por la que este proyecto la tiene como concepto matemático de interés. La derivada es una de las piedras angulares de Cálculo, por lo que su aprendizaje permite entrar a otros conceptos más elevados como son las Ecuaciones diferenciales. Además, tiene una amplia gama de aplicaciones prácticas en la vida real, desde la física y la ingeniería hasta la economía y las ciencias de la salud. Por lo que no solo se utiliza como un concepto teórico, sino que también es una herramienta esencial para resolver problemas del mundo real.

En la Universidad de Sonora, la derivada es un concepto que se encuentra en el currículo de numerosos programas académicos de Ingeniería, en todas las licenciaturas del área de Ciencias Exactas y Naturales, algunos programas de Ciencias Biológicas y de la

Salud, así como en el área Económico Administrativa, por lo que el impacto que se pudiera tener es amplio.

La presencia de este concepto en varias disciplinas muestra su importancia, versatilidad y transversalidad como herramienta matemática fundamental en la preparación de los estudiantes para enfrentar desafíos del mundo real.

3 ESTADO DEL ARTE

El concepto de derivada se comienza a estudiar en el quinto semestre de la educación media superior en México y se retoma en las áreas de Ciencias, Ingeniería, Economía y Administración en la educación superior. La forma habitual de introducir este concepto es utilizando la noción de límite (Larson et al., 1990; Leithold, 1998 y Flores et al., 2008), obtenida como la pendiente de una recta secante $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ que se convierte en recta tangente al acercar el punto (x_2, y_2) al punto (x_1, y_1). Los puntos, inicialmente arbitrarios, se sustituyen de la siguiente manera, el punto (x_1, y_1) por $(x, f(x))$ y el punto (x_2, y_2) por $\big((x+h), f(x+h)\big)$ para obtener la pendiente de la recta secante.

Después, mediante procedimientos algebraicos de desarrollo de binomios y factorización, se reduce la expresión, se factoriza h y finalmente se hace que h tienda a cero, obteniendo la derivada de una función como $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; posteriormente el docente cambia las funciones (generalmente polinómicas) para que los alumnos repitan el cálculo del límite varias veces hasta que "deducen" la fórmula $f'(x) = anx^{n-1}$, dada la función $f(x) = ax^n$.

Esta forma de abordar la derivada, se apega a la visión rigurosa de la matemática formal, que la ubica en el enfoque del Análisis Matemático y la aleja del enfoque variacional del Cálculo Diferencial e Integral, "la mayoría de los acercamientos en la enseñanza del concepto de derivada, en los textos y programas…, generalmente siguen la estructura del Análisis Matemático, quizá para ganar en rigor matemático" (Dolores, 2007b, p. 14).

Así mismo, Jiménez et al. (2022), identificaron que, "durante muchas décadas -por no decir varios siglos- se ha mantenido el formalismo del Análisis Matemático en los cursos de Cálculo, a pesar de las dificultades insalvables que representa para los estudiantes, así como su falta de necesidad" (p. 12). Al respecto Dolores (2007b) expresa que los estudiantes "difícilmente logran reconocer las ideas asociadas al concepto de derivada en la resolución de problemas elementales sobre la rapidez de la variación a pesar de que en los problemas de este tipo se encuentra la esencia de este concepto" (Prólogo).

En otras palabras, los cursos de Cálculo se abordan desde una perspectiva rigurosa y formal, con un enfoque tradicional centrado en el discurso del docente, esto a menudo dificulta el entendimiento de este concepto por parte de los estudiantes, ya que el enfoque del Análisis Matemático no permite visualizar cómo este concepto sirve para resolver problemas de variación y cambio. Además, la enseñanza de la derivada se restringe a procesos puramente algebraicos, y se abandona el trabajo con las representaciones gráficas, numéricas y verbales, lo que provoca que este concepto no se aprenda de forma integral.

En este sentido, Kinley (2016) menciona que, es en la definición formal de límite, donde se utilizan notaciones y símbolos (la sintaxis) fuertemente ligados al Análisis y al rigor matemático, la que provoca múltiples dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes, desligando el origen variacional (práctico y operativo) del concepto. En su lugar, fomenta un aprendizaje memorístico de fórmulas y procesos algebraicos que van en detrimento de una comprensión del concepto de derivada como razón de cambio de dos variables (magnitudes) que están relacionadas y que tienen a su vez relación con el problema que modelan o representan.

De la misma manera, Gonçalves y da Silva (2013) identificaron que “una de las posibles causas de las dificultades de los estudiantes para aprender el concepto derivada puede estar relacionada con [las] dificultades en [el] aprendizaje de límites” (pp. 420-421).

Enseñar Cálculo priorizando la visión formal de límite, conduce a procesos algebraicos mecanicistas que poco o nada tienen que ver con la función práctica de la derivada, provocando que los alumnos no vean su utilidad y desmeriten su aprendizaje, lo que provoca frustración, rechazo y altos índices de reprobación como mencionan Salinas y Alanís (2009), quienes encontraron que:

> Un paradigma tradicional de enseñanza… deja mucho que desear en cuanto al aprendizaje: elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas son hechos que han sido reportados en los últimos treinta años con respecto a los cursos de Cálculo en el nivel medio superior y superior de educación. (p. 359)

Para los alumnos, derivar es sólo aplicar una fórmula memorizada que transforma una función en otra; en el mejor de los casos, algunos alumnos que ya han cursado y aprobado la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral recuerdan que la fórmula se dedujo de los límites, así “[los] estudiantes… prefieren simplemente aprender ‘de memoria’, considerando el manejo de las técnicas como el camino más corto al éxito en los exámenes finales” (Sfard 2001, p. 104), aunque no comprendan para qué sirvió lo que estudiaron.

La enseñanza de la derivada a partir de la definición de límite (manejo algebraico) no permite observar la covariación de magnitudes, relaciones que son fundamentales para modelar, entender y resolver problemas de variación, de razón de cambio, de maximizar una ganancia, de minimizar un costo, etc. Los alumnos acreditan la asignatura de Cálculo con pocas habilidades para poder plantear y resolver problemas que pueden surgir en su campo laboral, contraviniendo el objetivo por el que forman parte de las asignaturas curriculares de su programa de licenciatura o ingeniería.

Dolores (2007b) comenta que:

> Cantidades significativas de estudiantes sólo pueden obtener derivadas de funciones algebraicas mediante fórmulas, pero difícilmente comprenden el significado de los algoritmos que realizan, inclusive, difícilmente logran asociar las ideas claves del cálculo en la resolución de problemas elementales sobre la variación, a pesar de que históricamente del estudio de estos últimos se generaron las ideas que le dieron origen. (p. 1)

Como docentes inmersos en el campo de la educación matemática, es imperativo que nos involucremos más activamente en la atención de estas deficiencias en la enseñanza de la derivada, desarrollando estrategias que permitan a los estudiantes no solo comprender el concepto de derivada de forma integral, sino también apreciar su utilidad como una herramienta poderosa para resolver problemas de otras ciencias; en este sentido, debemos buscar formas innovadoras que fomenten una comprensión práctica de la derivada y de su aplicación en situaciones concretas.

Consideramos que, al ayudar a los estudiantes a ver la derivada como una herramienta valiosa para abordar problemas de variación, de razón de cambio, de optimización de ganancias y de minimización de costos, por mencionar algunos, estamos proporcionándoles habilidades esenciales que serán relevantes en su vida académica, profesional y personal. Además, al mejorar su comprensión es posible que los estudiantes se sientan motivados y se pueda mejorar de alguna manera los índices de aprobación de esta asignatura. Abordar el estudio de la derivada de manera práctica, significa un giro de 180° a la forma en cómo se trabaja actualmente. Gravemeijer y Terwel (2000), mencionan que la cosa está al revés si uno empieza por enseñar el resultado de una actividad en lugar de enseñar la actividad misma.

En la enseñanza de la derivada, se comienza con la definición de límite, en vez de iniciar con problemas básicos de variación, donde surjan las ideas intuitivas que van dando forma al concepto de derivada y que aporta más elementos para su comprensión, al final se puede formalizar con la definición de límite. Salinas y Alanís (2009) mencionan que algunos investigadores como "Cantoral, Cordero, Farfán e Ímaz… advierten [que, en] la enseñanza del Cálculo: la estructura general del discurso matemático teórico constituye la base menos propicia para comunicar las ideas del Cálculo" (p. 360).

Nuestra propuesta cambia este enfoque, pasando del discurso del docente al trabajo práctico de los estudiantes. En vez de darles las herramientas matemáticas y las instrucciones para utilizarlas, ellos descubren las matemáticas y sus relaciones al estar resolviendo una situación problema. Esto está en concordancia con las ideas de Hans Freudenthal (padre de la Teoría de la Educación Matemática Realista), quien menciona que:

> Hacer matemáticas [es] más importante que [aprender] matemáticas como un producto ya hecho. Desde su punto de vista, lo mismo debería ser válido para la educación matemática: la educación matemática es un proceso de hacer matemáticas que conduce a un resultado, las matemáticas como producto. En la educación matemática tradicional, el resultado de las actividades matemáticas de otros se tomó como punto de partida para la instrucción. (citado en Gravemeijer y Terwel, 2000, p. 780)

El proyecto de intervención didáctica que se propone, implica un cambio de perspectiva, por lo que, el enfoque se orientará en el aprendizaje de la derivada y no en la enseñanza de la derivada, esta idea se describe con más detalle en la sección 7 que se refiere a la propuesta y sus características. Nuestra propuesta comienza con una situación problema contextualizada en algún problema de ingeniería en el que la derivada sea la herramienta que permita solucionar dicho problema, como, por ejemplo, un problema de optimización.

De esta manera, los estudiantes podrán empezar planteando ideas informales basadas en sus conocimientos previos, intuición, y percepción, y a través de actividades secuenciadas, se irá dando forma y sentido a estos pensamientos hasta llegar a la definición formal de derivada a través del límite.

Para estructurar la propuesta didáctica es esencial llevar a cabo una revisión de la literatura, la cual permitirá identificar los obstáculos, errores, fallas cognitivas, y otros desafíos que pueden surgir en el proceso de aprendizaje de la derivada. Además, a través de esta revisión, podremos identificar estrategias y propuestas sugeridas por investigadores que han mostrado, en sus resultados, fomentar una mejora significativa en el aprendizaje de este concepto.

Con respecto a las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, se pueden distinguir en la literatura dos momentos. Entre las décadas de los 80´s y 90´s los investigadores se enfocaron en identificar y estudiar los problemas asociados con el aprendizaje. Sánchez et al. (2008) mencionan que "la descripción sobre los errores y dificultades que tienen los estudiantes con respecto a la derivada ha sido objeto de estudio desde la década de los 80´s" (p. 273).

Para mediados de la década de los 90 se formalizaron teorías sobre el aprendizaje, como la de Duval centrada en las representaciones. En esta teoría, se menciona que la comprensión del concepto de derivada es, en su esencia, una aprehensión conceptual que solo puede ser alcanzada a través de sus representaciones semióticas y la articulación entre estas. Por lo tanto, se consideró necesario "entender los problemas de los estudiantes en los procesos de conversión entre representaciones" (Hitt, 2016, p. 7).

En este contexto, muchas investigaciones se centraron en proporcionar herramientas (incluyendo manipulables y tecnológicas) para facilitar la transición de los estudiantes entre las distintas representaciones, como la algebraica, tabular, gráfica, verbal, entre otras. En esa época "se señalaba que habría que resolver los problemas ligados a los antecedentes al cálculo, y luego atacar los conceptos ligados al cálculo" (ídem, p. 7).

El segundo momento se identifica a comienzos de los años 2000, con un enfoque hacia la enseñanza del Cálculo, "en el 2001… se realizó un cambio en la enseñanza [del cálculo] siguiéndose un acercamiento por competencias" (ídem, p. 8). En este momento podemos encontrar innovaciones didácticas para el tratamiento de la derivada, donde:

> [Se aprecia] la articulación de acercamientos numéricos, algebraicos y gráficos, es decir, se intenta abandonar el carácter algorítmico y estático de dicho concepto. Sin embargo, estas aproximaciones siguen considerando como fin último una definición, un objeto matemático construido y no susceptible de construcción por parte del individuo, es decir la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente. Ello deja de lado la actividad que rodeó, acompañó y dio significado a la derivada en su contexto de origen, y por el cual se constituye como un conocimiento matemático. (Montiel, 2005, p. 223)

Esta aseveración se ve reforzada al revisar las investigaciones de Font (2005), Pineda (2013), Bonilla y Díaz (2014), Sánchez (2014), Pinto y Parraguez (2018), Sulasmi et al. (2020) y Rojas et al. (2021), quienes abordan el estudio de la función derivada, desde distintos marcos teóricos, con el uso de límites. En este mismo sentido Ramírez (2009) menciona que "desde 1823, cuando Cauchy definió el objeto función derivada, se han propuesto algunos trabajos respecto a la misma, sin embargo, la mayoría de ellos retoma la definición de Cauchy para su elaboración” (p. 158).

Son pocas investigaciones revisadas las que no hacen uso del concepto de límite para abordar la derivada, como la de Cantoral (1995) quien hace una propuesta para el estudio de la derivada retomando el trabajo de Lagrange sobre series de potencias. Ramírez (2009) aborda el concepto de derivada con análisis no estándar, usando hiperreales, donde menciona que esta idea es más intuitiva y práctica, pues permite suprimir muchos procesos algebraicos. Además, menciona que “con este enfoque se disminuye el peso del rigor matemático asumido” (p. 158).

Recientemente, algunos investigadores como Jiménez y colaboradores (2022) han retomado las afirmaciones que realizó Cantoral en 1995, dónde señala que los cursos de Cálculo tienen el enfoque riguroso del Análisis y no el enfoque variacional del Cálculo. En su libro publicado en diciembre del 2022, Jiménez y colaboradores proponen una reconceptualización didáctica del cálculo.

Las investigaciones enfocadas en el análisis de la comprensión del concepto de derivada, han sido abordadas desde distintas perspectivas y utilizando diferentes marcos teóricos. Los trabajos de Tall (1985a, 1985b, 1986, 1987, 1990, 1991, 1992, 1996a, 1996b) por ejemplo, mencionan la inconsistencia que hay en el aprendizaje del cálculo usando el enfoque formal del análisis, y las dificultades que provocan los conceptos de límite, infinito y sus demostraciones rigurosas, pues requieren del pensamiento avanzado del Análisis.

Tall (1985a, 1986b, 1987) utiliza la representación gráfica en una calculadora para permitir al estudiante asociar la derivabilidad de una función en un punto con la imagen de una función cuya representación gráfica, por acercamientos sucesivos, termina por confundirse con una recta. La noción de tangente globalmente se asimila con la de una recta que pasa por dos puntos muy cercanos (tangente práctica); así, el concepto de límite aparece implícito. Los resultados de la experimentación presentados en su tesis resaltan las capacidades adquiridas en el reconocimiento y el trazo gráfico de la derivada.

Posteriormente, Tall (2012) propone un enfoque práctico que comienza utilizando los sentidos (expresión corpórea) para desarrollar ideas intuitivas de forma natural, donde se relacionan las representaciones gráficas y algebraicas, para después formalizar. En sus conclusiones menciona que la dificultad de dar sentido a la definición formal de límite se puede disminuir con un Cálculo básico (elemental) que surge de forma natural en el mundo de la encarnación y simbolismo, utilizando un enfoque visual y práctico.

En la tesis de Azcárate (1990) se observa el uso de contextos extramatemáticos para el aprendizaje de la derivada, tratando de darle un enfoque menos teórico. En el libro de Azcárate et al. (1996) proponen cambiar la perspectiva rigurosa de la derivada a partir del concepto de límite, utilizando la tasa de variación. Ellos parten de situaciones problema fuera del ámbito matemático y las resuelven mediante el uso de la tasa promedio de cambio, la cual se convierte en tasa instantánea de cambio a medida que las magnitudes se acercan cada vez más.

Estas investigaciones proporcionan valiosas pautas a seguir en el diseño de la propuesta didáctica. Dicha propuesta, se enfocará en la comprensión de la tasa de variación promedio como un elemento fundamental para comprender el concepto de derivada. Además, se reconoce la importancia de integrar la tecnología como una herramienta que facilita la interacción entre diversas representaciones semióticas. Al aprovechar los resultados de estas investigaciones como base, se busca desarrollar un enfoque pedagógico que fomente una comprensión más práctica y significativa de la derivada, al tiempo que se identifique como una herramienta para resolver problemas de variación y cambio, como los de optimización.

Otro libro revisado cuyos resultados se retoman para el diseño de la propuesta didáctica es el de Artigue, Douady y Moreno (1995), sobre la Ingeniería Didáctica. En el capítulo 6, Artigue aborda la enseñanza del cálculo y sus problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En la introducción de este capítulo se menciona que, de acuerdo a numerosas investigaciones, se puede enseñar cálculo de forma más o menos mecánica, pero esto acarrea muchas limitantes a la hora de resolver problemas, de manera que los estudiantes no pueden utilizar los conocimientos adquiridos en su formación universitaria para resolver problemas de su campo laboral. Por lo que, propone como punto de partida, las intuiciones y concepciones previas de los estudiantes, las cuales pueden evolucionar por medio de situaciones adaptadas, así los estudiantes pueden entender el concepto de derivada, aunque no se formalice mediante el límite, porque está implícito.

Este resultado encaja perfectamente con las ideas propuestas desde el marco teórico utilizado para el desarrollo de este trabajo. La Educación Matemática Realista propone la construcción de los conceptos matemáticos a partir de las intuiciones y producciones informales de los estudiantes, las cuales van evolucionando de forma secuenciada a través de niveles (ver Sección 5).

Cantoral et al. (2000) realizaron un análisis didáctico de los contenidos matemáticos, encontrando que el movimiento de la Matemática Moderna que se estableció en los años setenta en Latinoamérica, aún permanece en muchos cursos de Cálculo, donde la enseñanza se reduce a una reproducción fiel de contenidos, y el aprendizaje a una repetición carente de significado de lo que hace el docente. En este libro, los autores proponen otra visión, donde el aprendizaje sea el resultado de "construcciones sucesivas" mediante el uso de secuencias de actividades, dentro del marco de la teoría de las situaciones didácticas. Además, los autores hacen uso de contextos de variación para propiciar el surgimiento del concepto de derivada.

Como se puede apreciar, el uso de situaciones en contextos de variación y el diseño de secuencias didácticas, donde la construcción del conocimiento se lleve de forma progresiva, han sido elementos didácticos que demostraron, según los autores, su utilidad para mejorar la comprensión del concepto de derivada. Por lo tanto, serán incluidos dentro de la propuesta didáctica que se platea en este proyecto.

En un segundo libro, sobre el desarrollo conceptual del cálculo, Cantoral y Farfán (2004) resaltan la necesidad de hacer una revisión histórica y epistemológica de la derivada, para contextualizar su desarrollo y así proponer actividades adecuadas, señalando que la matemática a enseñar debe ser cualitativamente diferente de la matemática formal. Si bien, en este documento no se incluye el análisis histórico epistemológico de la derivada por el espacio establecido, sí se incluye en el documento doctoral.

En otro trabajo revisado, Clark y colaboradores (1997) realizaron una investigación alrededor de la derivada, particularmente con la regla de la cadena, donde señalan que para comprender un concepto matemático se necesita construir un esquema, el cuál debe incluir al menos un proceso que relacione aquellos elementos que forman el concepto; es decir al desarrollar una actividad se deben poner en juego las distintas representaciones que tiene la derivada. En el estudio de Baker et al. (2000) se ha documentado ampliamente que a los estudiantes les va bien en problemas rutinarios de cálculo, pero presentan serias dificultades al abordar los no rutinarios, debido principalmente a dificultades conceptuales; en su investigación muestran que los estudiantes retienen y usan ciertos conceptos sin tener en cuenta otros, por ejemplo, se sintieron confundidos para aceptar que una gráfica puede ser creciente y cóncava hacia abajo, por lo que proponen, al igual que Clark y sus colaboradores, trabajar de forma simultánea con la representación gráfica, analítica y tabular.

Otros trabajos revisados relacionados con las distintas representaciones de la derivada son el de Asiala et al. (2001), quienes llevaron a cabo un estudio sobre la naturaleza de la comprensión gráfica de la derivada por parte de los estudiantes de cálculo, donde sugieren que hay al menos dos caminos relacionados que pueden recorrerse al construir un esquema mental del concepto de derivativa: el camino gráfico y el camino analítico, los cuales deben trabajarse simultáneamente. También, Ariza y Llinares (2009) concluyen en su investigación que el uso de los registros gráfico y algebraico sirve para apoyar la comprensión de la derivada en temas de economía.

Font (1999) en su tesis de doctorado analiza las distintas formas de calcular $f'(x)$, las que agrupa en *forma directa,* utilizando límites, gráficas y aproximaciones y *forma indirecta,* donde se utilizan las reglas de derivación. En su trabajo, que incluye actividades didácticas, reporta que a partir de la representación gráfica de $f(x)$ y $f'(x)$ se puede calcular la expresión algebraica (simbólica) de funciones derivadas. En su trabajo además de funciones polinómicas incluye funciones trigonométricas.

Finalmente, Vrancken et al. (2009) y Vrancken y Engler (2014) parten de situaciones planteadas en fenómenos de cambio y utilizan secuencias didácticas con alumnos de ingeniería para introducir el estudio de la derivada mediante la razón promedio de cambio, donde estuvieron presentes tanto el registro gráfico como el analítico, tabular y verbal. En sus conclusiones mencionan que la definición de la derivada surgió de manera natural al final de la secuencia.

Estas investigaciones evidencian la necesidad de trabajar con al menos dos registros de representación de forma simultánea en cualquier propuesta didáctica para lograr un aprendizaje integral del concepto de función derivada.

Por otro lado, Gonçalves y da Silva (2013) identificaron en varias investigaciones revisadas, dificultades en los estudiantes para idear estrategias en la resolución de situaciones problema donde es necesario utilizar el concepto de derivada. Ellos proponen que se comience el aprendizaje de la derivada a partir de problemas de aplicación de la derivada (como tasa de cambio y cálculo de máximos y mínimos) donde los estudiantes tengan que resolverlos. Los autores enfatizan la ventaja del uso de software gráfico ya que proporciona relevancia a la exploración de los diversos registros representación (algebraico, gráfico y geométrico); en sus conclusiones señalan que los estudiantes tuvieron la oportunidad de repensar y reflexionar sobre los conceptos involucrados en el estudio de la derivada, lo que contribuyó a la construcción y resignificación de este concepto. Además, señalan que el uso de la tecnología para modelar los problemas y realizar simulaciones, permitió desarrollar habilidades de visualización que no hubieran sido posibles sin esta herramienta.

La propuesta de Bonilla y Díaz (2014), también consiste en el diseño de una secuencia didáctica utilizando geometría dinámica (software Geogebra); según estos autores, el uso de este tipo de software es un facilitador en la comprensión y estudio de la función derivada. Para Villarreal, "algunos conceptos de Cálculo llevan dentro de sí una dinámica que muchas veces no es posible observar utilizando únicamente una pizarra y tiza y/o pincel." (citados en Gonçalves y da Silva, 2013, p. 426).

También Dávila (2010) aborda la resolución de problemas de optimización en ingeniería usando Geogebra, donde expone las ventajas de trabajar con este tipo de software dinámico para lograr una adecuada visualización, en sus conclusiones reporta que, "tras la observación de la simulación dinámica del fenómeno, los estudiantes percibieron una dependencia entre las magnitudes involucradas" (p. 176).

Estos resultados sugieren que la utilización de software dinámico puede ser una herramienta que facilite la visualización y el tránsito entre diferentes registros de representación, por lo que será un elemento a incluir en el diseño de la propuesta.

Dentro de la revisión bibliográfica, también se abordaron aquellas investigaciones que reportan dificultades, errores de concepción, conflictos con las representaciones, etc., en el aprendizaje de la derivada, elementos que deben estar presentes tanto en la construcción de las actividades como en la puesta en práctica.

Badillo (2003) en su tesis doctoral reporta que los participantes en su estudio confundieron el concepto de derivada $f'(x)$ con la ecuación de la recta tangente en un punto dado, $f'(a)$. Además, menciona que "los estudiantes tenían concepciones débiles de las razones de cambio ya que no podían conceptualizar a la derivada como una función que denota una razón de cambio" (p. 14). A partir de estos hallazgos, Badillo et al. (2011) destacan la importancia de hacer una clara distinción, al abordar el estudio de la derivada, entre la noción de derivada en un punto ($f'(a)$) y la función derivada ($f'(x)$), con el fin de ayudar a los estudiantes a distinguir estos dos conceptos.

D'Avoglio también identificó que algunos estudiantes confunden el concepto derivada con la recta tangente, la derivada en un punto con la función derivada en toda la curva, las reglas de derivación como el resultado de encontrar una derivada y la recta tangente con la pendiente de la recta tangente (citado en Gonçalves y da Silva, 2013).

Sánchez et al. (2008) identificaron que, para poder desarrollar en el estudiante el concepto de derivada, se deben considerar diversos aspectos:

> Su perspectiva gráfica, como pendiente de la tangente a la curva; su perspectiva analítica, como límite del cociente incremental [razón de cambio]; su carácter puntual o global –es decir, en intervalos–… en conjunto, las características de los problemas planteados pueden mostrar a la derivada desde la integración de una perspectiva analítica y gráfica (apoyándose en la presentación de la idea de derivada en un punto y de la función derivada). (p. 269)

También Gonçalves y da Silva (2013) identificaron que “la derivada es un concepto que puede explorarse desde diferentes puntos de vista: derivada como límite, como pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado, además de situaciones que involucran tasas de cambio, máximos y mínimos” (p. 420). Así mismo Sánchez et al. (2013) mencionan que:

> [Varias] investigaciones aportan información sobre las características de la comprensión del concepto de derivada y han empezado a proporcionar indicadores de cómo se desarrolla dicha comprensión en tres ámbitos. El primero, relativo a la relación entre los conceptos de razón de cambio y cociente incremental. El segundo, el papel desempeñado por los sistemas de representación cuya integración es necesaria para el desarrollo del esquema. Finalmente, la relación entre la derivada de una función en un punto, la función derivada y el operador derivada. (p. 283)

Según mencionan Barreto y Caro (2012) hay un interés cada vez mayor en la investigación en educación matemática, por dar mayor importancia al análisis de la variación y la covariación como puerta de entrada a conceptos básicos del cálculo, ya que este enfoque facilita una comprensión más clara y significativa de los conceptos fundamentales del cálculo.

Esta afirmación se puede encontrar en algunas investigaciones como la de Sánchez et al. (2008) quienes mencionan que los sistemas de representación tienen un papel relevante para dotar de significado a este concepto, así mismo, señalan que “la información de [muchas] investigaciones destaca la importancia de la relación entre la razón de cambio y el cociente incremental en la comprensión de la derivada, entendida como una cuantificación del cambio” (p. 273).

También en los trabajos de Tall (2012) y de Sfard (1992) se pueden encontrar aproximaciones de la derivada desde la razón promedio de cambio. Sin embargo, una de las primeras investigaciones sobre el uso de la razón promedio de cambio para abordar la derivada la encontramos en Orton (citado en Ortega y Sierra, 1998), quién investigó las concepciones de un grupo de 110 estudiantes para profesor de matemáticas, realizando entrevistas individuales con cada uno. Encontró errores como los siguientes: los estudiantes creen que la fórmula de la derivada de una función en un punto mide la tasa de variación entre dos puntos, confunden tasa de variación media con tasa de variación en un punto y además no saben cómo calcularla, tampoco asocian la variación negativa con una función decreciente, la variación cero con el valor máximo (o mínimo) y confunden los símbolos $dx, dy, \frac{dy}{dx}, \Delta x, \Delta y$ y $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Ortega y Sierra (1998) mencionan que “la tasa de variación es una manera general de indicar lo que de una manera específica se llama velocidad media, tasa de crecimiento anual, ritmo de respiración, pendiente de la recta secante, etc.” (p. 93). En su análisis de dos propuestas para introducir el concepto de derivada desde la tasa de variación, mencionan el libro de texto realizado por el Grupo Cero de Valencia, en donde se comienza con la tasa de variación a través de dos situaciones problemas, y se van desarrollando simultáneamente los conceptos de variación y velocidad instantánea, considerando intervalos cada vez más pequeños que se acercan a un valor, ahí introducen la palabra límite sin ninguna formalidad.

Los autores comentan que al final del libro aparece un anexo con la formalización de los conceptos de límite y continuidad. Otro proyecto analizado por Ortega y Sierra es el Proyecto Escolar de Matemáticas (School Mathematics Project) el cual está centrado en el alumno, quien “aprende matemáticas haciendo matemáticas y donde se utilizan calculadoras gráficas y programas de computadora” (p. 94). Según los autores, la secuencia didáctica inicia con la tasa de variación de una función en distintas situaciones, pasando a las pendientes de las curvas y sus gráficas, para obtener después la forma numérica de la pendiente, pasando a la formalización de la función pendiente y se finaliza con la notación de Leibniz $\left(\frac{df}{dt}\right)$.

En el libro “Cálculo diferencial e integral” de los autores Azcárate et al. (1996), en el prólogo se menciona que:

> La mayoría de los alumnos no comprenden la definición rigurosa de derivada a partir del concepto de límite y, por tanto, teníamos que apartarnos del programa oficial. Entre los libros de texto y materiales que consultamos, destacan unos fascículos de Janvier (1975) para los profesores en ejercicio y los textos SMP (1973) de matemáticas de bachillerato, que nos dieron la idea de introducir el concepto de derivada de una función en un punto, como la tasa instantánea de variación de la función, a partir de la tasa media de variación de la función entre dos puntos.

En años recientes, algunas investigaciones han retomado la discusión de la necesidad de entender que los cursos de cálculo, estructurados desde lo formal, se alejan de su origen variacional y se transforman en cursos de análisis, con el rigor y la formalidad de este, donde se presenta como algo abstracto y difícil de aprender (Gonçalves y da Silva, 2013 y Jiménez et al. 2022). Por lo que el estudio de la derivada desde el enfoque variacional (Vrancken y Engler, 2009, 2014 y Dolores, 1999, 2000, 2007b, 2009) está tomando fuerza pues permite entender de manera natural la razón de cambio entre las magnitudes de un fenómeno, deducir sus propiedades y llegar a la definición de derivada de manera natural, sin el uso de series y sucesiones, de hiperreales o incluso de límites.

El enfoque variacional para el estudio de la derivada, se asemeja al proceso histórico que le dio su origen (Cantoral y Farfán, 2004), donde se estudiaban las relaciones cuantitativas entre las magnitudes presentes en los procesos físicos.

La revisión de estas investigaciones proporciona elementos esenciales a retomar en la propuesta de intervención. En este sentido, advierte de las dificultades que han sido observadas y documentadas por muchos investigadores con respecto al uso del concepto de límite para definir e introducir el estudio de la derivada. Por lo que, se ha reorientado su abordaje desde la perspectiva de la razón promedio (o razón media) de cambio. Según los resultados reportados, este enfoque permite desarrollar de manera natural el concepto de derivada y ayuda a su comprensión.

En otro sentido, esta revisión recomienda el desarrollo de actividades secuenciadas utilizando situaciones problemas extramatemáticas, apoyadas con software dinámico que permita abordar los distintos registros de representación. Esto ha probado ser efectivo para dotar de sentido y significado al concepto de derivada.

Por lo tanto, el enfoque de este proyecto doctoral se ubicará en esta área de la matemática educativa, aportando resultados al abordar el estudio de la derivada usando situaciones problemas de optimización, mediante la razón de cambio y el uso de tecnología. Con ello se pretende que los estudiantes de ingeniería de la Universidad de Sonora puedan desarrollar de forma natural, integral y significativa el concepto de derivada.

4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO

En el año 2019, el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, cuyos docentes imparten la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I en todos los programas de ingeniería, organizó y llevó a cabo un Examen Departamental[1] (examen estandarizado), que consistió en aplicar el mismo examen a distintos estudiantes para medir su aprendizaje, esperando un resultado homogéneo, que no dependiera del profesor que impartió la asignatura. El 5 de diciembre del año 2019 se aplicó este examen a un total de 472 estudiantes. El examen consistió de 73 reactivos de respuesta múltiple, es decir, los posibles resultados en cada reactivo fueron: correcto (si eligió la respuesta correcta), incorrecto (si eligió alguna de las otras respuestas) o vacío (si no se eligió alguna).

Cada estudiante dispuso de 150 minutos para responder la evaluación la cual se llevó a cabo en un centro de cómputo. De los 73 reactivos, 24 corresponden al tema de funciones y 49 al tema de derivación. Esta evaluación se aplicó en el mes de diciembre, de manera que los estudiantes ya habían agotado el temario del curso. En la Tabla 1 se resumen algunos de los resultados obtenidos en el tema de derivación.

Figura 2.
Porcentaje de estudiantes que respondió correctamente el tema de derivación en el Examen Departamental de Cálculo Diferencial e Integral I del año 2019.

Tema evaluado	Porcentaje de estudiantes que respondió correctamente
La función derivada	58.21%
Velocidad media/Velocidad instantánea	50.21%
La recta tangente como mejor aproximación lineal	50.05%
La segunda derivada como razón de cambio	43.22%
Fórmulas de derivación de funciones	38.39%
Problemas de optimización	35.66%
La derivada en un punto	33.63%
Concepto intuitivo de derivada	21.47%
Interpretación geométria del signo de la derivada	20.87%
Razones de cambio instántaneas	19.92%

En los resultados que se muestran en la Figura 2, el porcentaje más alto corresponde al tema de función derivada. Las preguntas que se plantearon en esta sección son de bajo grado cognitivo (observar-recordar), ejemplo: 1) identifica la expresión que define a la función

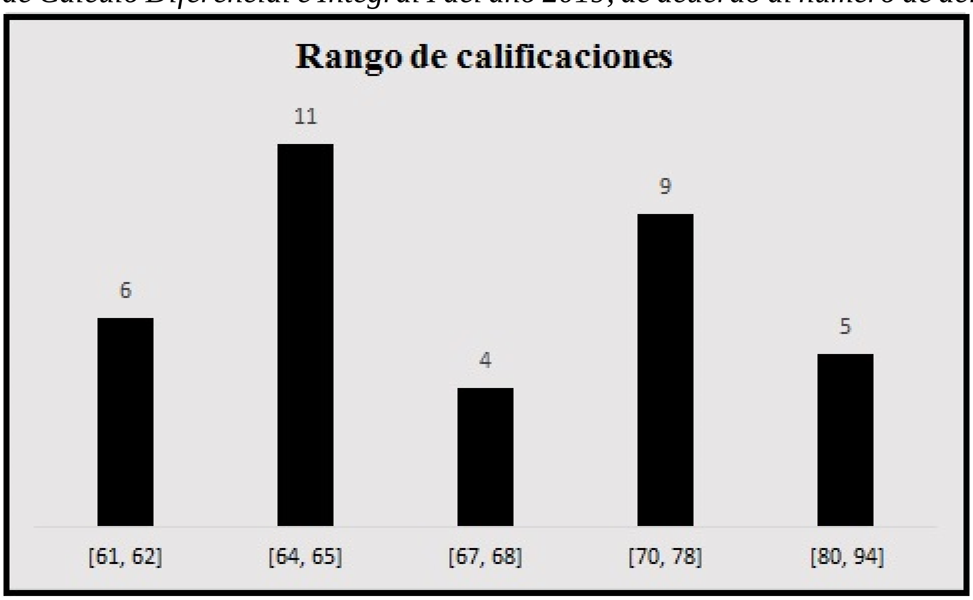
[1] Examen Departamental de Cálculo Diferencial e Integral I, clave 6881. Registrado en el Acta 474 del 1 de julio del 2019 en la División de Ciencias Exactas y Naturales ahora Facultad Interdisciplinaria de Ciencias Exactas y Naturales, de la Universidad de Sonora, bajo la dirección del Dr. Martín Gildardo García Alvarado y la Dra. Milka del Carmen Acosta Enríquez.

derivada, 2) identifica la equivalencia de la expresión: $(f(x) + g(x))'$ (propiedad de linealidad), etc. Conforme avanza el nivel cognitivo (interpreta), los porcentajes van disminuyendo. El porcentaje de alumnos que mostró capacidad para entender y resolver problemas donde la derivada es la herramienta necesaria no llegó al 36%. En general, se puede observar que no se está cumpliendo el objetivo por el cual la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I forma parte del plan de estudios de los programas de ingeniería y que está implícito en el perfil de egreso (ver Figura 1).

Si evaluamos la puntuación en la escala de 0 a 100 en el tema de derivación, basándonos en los aciertos obtenidos (ver Figura 3), podemos observar que solo 35 de los 472 estudiantes obtuvieron una calificación aprobatoria de 60 para la Universidad de Sonora. Esto representa únicamente el 7% de todos los participantes evaluados. Aunque en muchas instituciones, 60 puntos en una escala de 0 a 100 no se considerarían una calificación aprobatoria, en la Universidad de Sonora, un estudiante con esta puntuación indica que ha cumplido con los objetivos de aprendizaje del tema en particular o de la asignatura en general y, por lo tanto, puede considerarse competente. Basados en los resultados de este examen el 93% de los estudiantes no es competente en el tema de la derivada, incluyendo su interpretación geométrica, sus distintas representaciones, su uso para resolver problemas de optimización, etc.

Figura 3.

Rango de calificaciones obtenidas para el tema de Derivación en el Examen Departamental de Cálculo Diferencial e Integral I del año 2019, de acuerdo al número de aciertos obtenidos.



Además, de los 35 alumnos aprobados, ninguno superó la calificación de 94 en el tema de derivación. El 60% (21 de 35) obtuvo una calificación entre 61 y 68, lo que indica que menos del 3% de los todos los participantes superó la calificación de 70 en el tema de derivación[2]. Para muchas instituciones educativas, donde 70 es la calificación mínima aprobatoria, solo este 3% habría demostrado tener competencia para acreditar la asignatura de Cálculo Diferencial. En este examen no se incluyó la evaluación del tema de integración, el cual está incluido en los objetivos de la asignatura. Las razones para no incluir el tema en la evaluación, de momento no son conocidas, sin embargo, en pláticas con algunos docentes que imparten la asignatura, comentaron que no alcanzan a cubrir el tema de forma exhaustiva para poder ser evaluado.

Los resultados obtenidos en el examen departamental son consistentes con los reportados por Artigue et al. (1995), Clark et al. (1997), Cantoral (2000), Baker et al. (2000), Tall (2010), Asiala et al. (2001), Ariza y Llinares (2009), Vrancken et al. (2009), Dávila (2010), Gonçalves y da Silva (2013) y Vrancken y Engler (2014), entre otros, quienes mencionan que los estudiantes suelen desempeñarse adecuadamente en ejercicios rutinarios, como el uso de fórmulas, cálculos y la identificación de expresiones matemáticas. Pero no comprenden al concepto de derivada en términos de la razón de cambio y su capacidad para identificar la relación entre las variables, determinar si una función es creciente o decreciente, evaluar su rapidez de cambio y, en consecuencia, su forma (por ejemplo, si experimenta un decrecimiento acelerado, crecimiento constante o crecimiento desacelerado). Asimismo, los estudiantes suelen presentar problemas al identificar la derivada en general o en un punto específico, y en sus diversas representaciones, ya sea tabular, gráfica o algebraica.

Estos resultados abren un espacio de oportunidad para llevar a cabo una intervención didáctica destinada a mejorar, al menos en cierta medida, la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes. Una comprensión que vaya más allá de lo procedimental (manipulación algebraica, memorística, mecanicista), les permitirá comprender y trabajar con las diversas representaciones de la derivada. Esto, a su vez, mejorará su capacidad de aplicarla de manera efectiva en situaciones de variación y cambio.

Cuando los estudiantes sean capaces de identificar a la derivada en problemas relacionados con variación y cambio, les resultará más sencillo utilizarla como una herramienta para resolver cuestiones que puedan surgir en su entorno laboral, como por ejemplo, problemas de optimización. De esta forma, contribuiremos al cumplimiento de los objetivos establecidos en el plan de estudios de los programas de ingeniería de la Universidad de Sonora y al logro del perfil de egreso correspondiente.

A partir de la revisión bibliográfica y de los resultados obtenidos en el Examen Departamental de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral I, del 2019, aplicado a los programas de ingeniería en la Universidad de Sonora, identificamos una problemática. Esta se refiere a la forma en cómo se introduce y aborda el estudio de la función derivada en este curso. La utilización de la definición formal de límite tiende a alejar el enfoque variacional del concepto, lo que conlleva a dificultades en su comprensión. Además, la clase tradicional (discursiva o magistral) del docente fomenta un aprendizaje memorístico que a menudo

[2] En el examen general, donde se incluye el tema de funciones, el 12% obtuvo una calificación de 60 puntos o más y solo el 7% superó los 70 puntos del examen.

resulta en una comprensión deficiente de este concepto y de su posible aplicabilidad en problemas de diversas disciplinas científicas. A partir de esto, se plantea el Objetivo General y los Objetivos Específicos.

4.1 Objetivo General

Crear un repositorio en línea con secuencias didácticas enfocadas al estudio de la derivada desde la perspectiva variacional de la razón de cambio, utilizando el enfoque de la Educación Matemática Realista y con apoyo de recursos tecnológicos, para favorecer un aprendizaje integral de la derivada que permita identificar, modelar y resolver problemas de variación en la Ingeniería.

4.2 Objetivos Específicos

- Diseñar situaciones problema que:
    - Incluyan al concepto de derivada para su solución, enfocadas en programas de Ingeniería de la Universidad de Sonora.
    - Aborden el concepto derivada desde la perspectiva de la variación de las magnitudes y la razón de cambio, en correspondencia con los niveles de la Educación Matemática Realista.
- Diseñar Applets dinámicos en Geogebra y Excel
    - Que faciliten la comprensión visual de las relaciones entre las magnitudes, permitiendo la percepción de su razón de cambio.
    - Que faciliten la comprensión de las distintas representaciones y propiedades de la razón promedio y la razón instantánea de cambio.
    - Que contribuyan a la comprensión de las propiedades numéricas de la razón promedio de cambio y su aproximación a la razón instantánea de cambio mediante acercamientos cada vez más pequeños.
- Crear un repositorio de secuencias didácticas en una plataforma en línea para el aprendizaje de la derivada, disponible para su uso de forma gratuita y a través de cualquier dispositivo móvil o fijo conectado a internet.
- Realizar pruebas piloto para ajustar y/o modificar el diseño de las secuencias didácticas y los Applets.
- Evaluar el diseño de las actividades didácticas.

5 ASPECTOS TEÓRICOS

La Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), fundada por Hans Freudenthal "nace en Holanda como reacción al movimiento de la Matemática Moderna de los años 70´s y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática" (Bressan et al., 2004, p. 1). Sostiene como idea principal que la matemática debe ser una actividad accesible para todas las personas (Freudenthal, 1991), y que el proceso de aprendizaje debe iniciar con las producciones intuitivas e informales de los estudiantes las cuales van evolucionando a través de las actividades que se desarrollan, la interacción con sus compañeros y la intervención docente.

Alsina (2009) indica que "los fundamentos teóricos del aprendizaje realista se establecieron en el marco del Proyecto Comenius 2003-2005 denominado «Aprender en y a través de la práctica» …" (p. 120). Sin embargo, antes de surgir como una teoría dentro de la Investigación en Matemática Educativa, se enfocó en establecer ideas básicas centradas en el cómo y el qué de la enseñanza matemática (Heuvel_Panhuizen, 2002) y fue a través de la acumulación y la revisión repetida de estas ideas que se transformó en teoría. Heuvel_Panhuizen menciona que "la lucha contra el enfoque mecanicista de la educación matemática no ha sido conquistada por completo, especialmente en la práctica en el aula" (ídem, p. 2).

La Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) trabajó en sus inicios (1980) con niños de escuelas primarias en Holanda, donde el 95% de los libros que se utilizaban en la educación contenía el enfoque mecanicista y procedimental. Para el año 2004 los libros de texto basados en la EMR alcanzaron el 100%, desapareciendo los libros de texto tradicionales para educación básica (Heuvel_Panhuizen y Drijver, 2020). Según estos autores "se puede observar una evolución similar en la educación secundaria, donde el enfoque de EMR también influyó en gran medida en las series de libros de texto [en Holanda]" (ídem, p. 716).

A nivel mundial, se puede observar la influencia de la Teoría de la Educación Matemática Realista en los libros de texto Mathematics in Context (Matemáticas en Contexto) del Wisconsin Center for Education Research, realizados en colaboración con el Instituto Freudenthal en Holanda. En Indonesia, se creó el Instituto Indonesio de Educación Matemática Realista (Pendidikan Matematika Realistik Indonesia), y en América Latina surgió a principios del año 2000 el Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática (GPDM), en Argentina.

Esta teoría, que tiene aproximadamente 40 años desde que inició, no se considera una teoría terminada con un enfoque unificado en lo que se refiere a cómo usarse en la educación, "a lo largo del tiempo los investigadores le han puesto distintos acentos en alguno de los muchos aspectos que considera está teoría, lo que ha contribuido a la solidez metodológica" (Heuvel_Panhuizen y Drijver, 2020, p. 716).

La Educación Matemática Realista tiene dos características principales en las que se fundamenta:

1) *La matemática es una actividad práctica*, es decir se aprende haciéndola. Desde la perspectiva de la EMR, el énfasis del aprendizaje no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de la algoritmización, no se trata de aprender álgebra por sí misma, sino en algebrizar las situaciones que se plantean, no debe enseñar abstracciones sino permitir que los estudiantes abstraigan los conceptos matemáticos que surgen cuando se resuelve un problema (Bressan et al., 2016).

2) L*a enseñanza de la matemática debe estar conectada con el mundo real*. Se parte de una situación contextual realista que sirve como base para iniciar el proceso matemático, que abarca el desarrollo de conceptos, herramientas y procedimientos. La palabra "realista", que da el nombre a esta teoría, está relacionada a situaciones en contexto que aparezcan como imaginables, razonables o reales en la mente del estudiante, para que pueda iniciar el proceso de matematización, "un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, se revela al alumno para ser matematizado" (Freudenthal, 1991, p. 73).

Freudenthal define el proceso de matematizar, como la organización de la realidad con elementos matemáticos, reconociendo aquellos que son esenciales para representar y resolver las *Situaciones Problema* (situaciones problema en adelante), descubriendo características comunes, ejemplificando ideas generales, buscando atajos, descubriendo estrategias y simbolizaciones y reflexionando acerca de todos estos procesos.

> Al reflexionar sobre su propia actividad, el hombre descubre paradigmas, que se abstraen en patrones de acción mental y se vuelven conscientes como esquemas mediante los cuales el pensamiento los organiza como nuevos progresos: esquemas adaptables, es decir, que permiten variedades de uso, así como, en el mismo derecho, rígidas o de un solo propósito. Estas formas, a su vez, pueden convertirse en materia, en un núcleo, por así decirlo, de contenidos de orden superior. (Freudenthal, 1991, p. 10)

Una diferencia notable entre EMR y el enfoque tradicional de la educación matemática, es la connotación de "lo pragmático", en esta teoría se rechaza el enfoque mecanicista, donde los estudiantes son los receptores del conocimiento del docente y la técnica didáctica se centra en la práctica de procedimientos de resolución de listas de ejercicios, donde los estudiantes repiten de forma "fiel" lo que realizó el docente, aunque no tenga ningún significado para ellos, en palabras de Freudenthal (1991), "la imagen familiar de las matemáticas: un conjunto de algoritmos, tan inútiles como estrictos donde no se comprende cómo y por qué funcionan" (p. 11).

La EMR, en cambio, se centra en la conceptualización significativa del aprendizaje, donde los estudiantes son partícipes activos de su propio proceso de aprendizaje mediante oportunidades para compartir sus experiencias y conocimientos con otros compañeros (Heuvel_Panhuizen, 2002).

Los inicios de la Teoría de la Educación Matemática Realista se remontan a 1968 con el proyecto Wiskobas dirigido por Edu Wijdeveld y Fred Goffree al que posteriormente se unió Adri Treffers. En el año 1971 este proyecto pasó a formar parte del recién creado

Instituto IOWO (Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs/ Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática) donde Freudenthal era director; ahí se involucra en esta perspectiva didáctica defendiendo que la enseñanza de las matemáticas debe ser relevante para el estudiante. Introduce el término *fenomenología didáctica* para referirse a los conceptos matemáticos, las estructuras e ideas que surgieron y se desarrollaron históricamente con relación al fenómeno extra matemático que le dio origen, y que deben estar presentes durante la matematización (Heuvel_Panhuizen, 2002). Hans Freudenthal contribuyó al desarrollo y consolidación de esta Teoría y por eso se le considera su fundador. En 1991 el Instituto IOWO cambió su nombre por el Instituto Freudenthal (Freudenthal Instituut).

Según comentan Bressan et al. (2016), la investigación de Freudenthal y sus colaboradores se orientó a la investigación sobre "cómo pasa el alumno del conocimiento informal, al preformal y de allí al formal, y cómo ayudarlo en ese [tránsito]" (p. 6). Para dar respuesta a estas interrogantes, Freudenthal y sus colaboradores, se enfocaron en formular secuencias didácticas que probaron durante muchos años en varias aulas, y en donde identificaron que "en este proceso de matematización progresiva… los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión, caracterizados por distintos tipos de actividades mentales y lingüísticas. Estos niveles son: situacional, referencial, general y formal" (ídem, p. 6).

En el **nivel situacional**, el estudiante interpreta mediante sus experiencias previas e intuiciones, la situación problema, apoyándose de sus conocimientos anteriores, su sentido común o su experiencia. Se espera que comience planteando o esbozando ideas intuitivas e informales que le permitan matematizar el problema al descubrir relaciones, regularidades o analogías con otros conceptos o problemas que haya visto en el pasado.

En el **nivel referencial**, el estudiante propone modelos gráficos, notaciones y/o procedimientos ligados estrechamente a la situación problema, centrándose en tratar de obtener un modelo que establezca una relación entre las magnitudes involucradas, de esta manera surgen los *modelos de* (Figura 4). En este nivel se prueban aproximaciones, se verifican supuestos y se modifican los razonamientos que surgieron en el nivel anterior, mediante las interacciones con pares y el docente.

Al **nivel general** se llega a través de la exploración, la reflexión, el lenguaje y la generalización de los saberes planteados en el nivel anterior, donde surge *el modelo para* (Figura 4), es decir, se logran generalizar los saberes, procedimientos, estrategias, formulaciones matemáticas, etc. a situaciones parecidas, lo que provoca que se vayan desligando los aprendizajes del problema original.

En el **nivel formal**, se trabaja con procedimientos, simbología y notaciones generales y convencionales desligadas completamente de la situación problema inicial (contexto), y se da la formalización matemática (institucionalización).

Con respecto al uso de modelos en el nivel referencial, Freudenthal (1991) menciona que "el modelo es simplemente un intermediario, a menudo indispensable, a través del cual una realidad o teoría compleja es idealizada o simplificada con el fin de volverla susceptible a un tratamiento matemático formal" (p. 34). Es decir, se refiere a los modelos que surgen en la mente del estudiante y que le dan la pauta (o estrategia) a seguir para entender, representar matemáticamente y resolver el problema, lo que Freudenthal define como matematización.

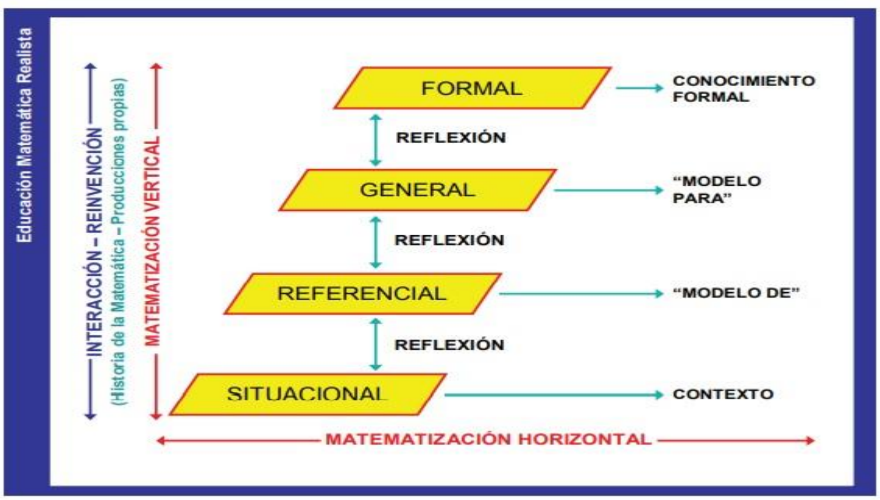
Según Treffers (1987), durante el tránsito a través de los niveles, desde el nivel situacional en la matematización horizontal (que implica el desplazamiento de la situación real al modelo matemático mediante ideas intuitivas e informales), se progresa hacia el nivel referencial. La matematización vertical se manifiesta en los niveles referencial, general y formal, y consiste en avanzar dentro de la realidad matemática mediante la utilización de esquematización, simbolización, prueba, generalización y rigor matemático (ver Figura 4).

Según Bressan et al. (2016) estos niveles no son rígidos, por el contrario:

> Son dinámicos y un alumno puede funcionar en diferentes niveles de comprensión para contenidos distintos o aspectos de un mismo contenido. Más que describir en forma exacta qué puede hacer el alumno en cada uno, sirven para seguir sus procesos globales de aprendizaje. (p. 8)

Figura 4.

Niveles de Comprensión según la Educación Matemática Realista.



Nota. Imagen tomada de Zolkower y Bressan, 2016.

El proceso de enseñanza y aprendizaje que surge y se desarrolla en estos niveles, está regido por las ideas principales que sostiene la Teoría de la Educación Matemática Realista, como son:

> 1) La matemática es una actividad presente en todas las etapas del desarrollo humano, entonces debería ser accesible para todas y cada una de las personas, de acuerdo al nivel académico correspondiente.
>
> 2) Las actividades de enseñanza que el estudiante llevará a cabo deben inducir a la reinvención de sus ideas intuitivas e informales, así como de las herramientas matemáticas con las que inicia. A medida que se matematizan las situaciones problemáticas contextualizadas propuestas, emergen modelos cognitivos propios (modelos emergentes), los cuales, al ser matematizados, experimentan una

reestructuración de manera secuencial y progresiva por niveles. Este proceso requiere el respaldo de ayudas o guías, interacciones con compañeros y una dirección en el proceso de reinvención proporcionada por el docente, que permita orientar el proceso cognitivo de los estudiantes hacia el logro de los objetivos establecidos.

3) La actividad de matematización, en forma de reinvención guiada, requiere la aplicación de la fenomenología didáctica. Esta metodología de investigación se enfoca en la identificación de aquellos fenómenos de la vida real (contextos y situaciones) en los cuales un tema u objeto matemático se presenta o se aplica de manera natural, e incluye su desarrolló histórico-epistemológico. A través del análisis fenomenológico didáctico, surgen los conceptos matemáticos que deben enseñarse y en qué orden, y se identifican puntos de anclaje que facilitan el proceso de matematización. Además, esta metodología también ayuda en el diseño de las actividades organizadas en trayectorias o secuencias.

Estas ideas (de Freudenthal) se han estructurado en seis principios, abarcando aspectos tanto del aprendizaje como de enseñanza de la matemática, y constituyen la filosofía de la Educación Matemática Realista (Treffers, 1987). Estos principios son:

- *El principio de actividad,* implica un cambio en el enfoque de enseñanza: en lugar de presentar el producto terminado, se debe enseñar la actividad misma para que el estudiante la descubra y comprenda. Este enfoque implica facilitar el acceso a conocimientos, destrezas y habilidades a través de situaciones problemáticas que generen en los estudiantes la necesidad de ser matematizadas. Es decir, se busca que surjan las herramientas matemáticas adecuadas para organizar, representar y resolver dichas situaciones
- *El principio de realidad,* sugiere que la educación matemática no solo debe estar vinculada al mundo real o existente, sino que también debe situarse en el nivel de desarrollo potencial de los estudiantes. Esto significa que debe ser realizable, imaginable o razonable para los estudiantes.
- *El principio de reinvención,* establece que la educación matemática debe proporcionar a los estudiantes la oportunidad guiada de reinventar la matemática. Los estudiantes no simplemente crean o descubren la matemática; en cambio, llevan a cabo un proceso de reestructuración de conceptos, operaciones y estrategias matemáticas. Este proceso es “similar” al utilizado por los matemáticos en el pasado durante el desarrollo de estos conceptos.
- *El principio de niveles,* indica que durante el proceso de matematización, los estudiantes atraviesan diversas etapas de comprensión, que incluyen lo situacional, referencial, general y formal. A lo largo de estos niveles, los propios estudiantes deben analiza su actividad matemática mediante la aplicación de estrategias, modelos, esquemas y lenguajes pertenecientes a diferentes categorías cognitivas.
- *El principio de interacción,* señala que el aprendizaje de la matemática es una actividad social, por lo tanto, el trabajo colaborativo en grupos heterogéneos es muy importante, debido a que las interacciones con sus pares permiten reflexionar

la ideas, modificar concepciones, generalizar conceptos, encontrar patrones, modificar estrategias, etc.

- *El principio de interconexión,* indica que la resolución de situaciones problemáticas realistas no solo se basa en una comprensión limitada de la matemática, sino que el proceso de aprendizaje implica establecer conexiones significativas con un amplio espectro de herramientas y conceptos matemáticos. Este principio subraya la importancia de la interrelación y la versatilidad de las habilidades matemáticas que se deben promover con las actividades, para proveer una comprensión integral y aplicada de las matemáticas.

Los cambios en la educación matemática a nivel mundial, reflejados en las actuales reformas educativas globales son innegables (Da, 2022). En países como México, se impulsa un Nuevo Modelo Educativo como parte de este panorama de transformaciones. En este contexto de cambio, la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) encuentra convergencias con los enfoques educativos contemporáneos adoptados en distintos países, destacando, por ejemplo, el uso de situaciones contextualizadas para la enseñanza de las matemáticas, en la reforma educativa en México.

La EMR se sustenta en principios fundamentales para la enseñanza matemática, inicialmente delineados de manera explícita por Treffers en 1978. Estos principios han sido revisados y adecuados a lo largo del tiempo, incluso por el propio Treffers (Da, 2022). Esta revisión constante permite adaptarlos a nuevos horizontes educativos, sin perder su esencia.

5.1 Implementación de los Principios de la Educación Matemática Realista en un ambiente en línea.

Un aspecto fundamental en la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) es el hecho de que identifica que el aprendizaje no se produce de manera homogénea entre los individuos, "no se piensa en una clase homogénea en sus trayectos de aprendizaje, sino en individuos que siguen senderos propios" (Bressan, 2005, p. 11). Según Alsina (2009), "el aprendizaje empieza cuando un grupo de personas con diversas expectativas, experiencias, habilidades y ritmos de aprendizaje entran en contacto" (p. 123).

Cada estudiante parte de un conjunto desigual de conocimientos, avanza y comprende de manera diferente. A través del intercambio de ideas durante sus interacciones, de acuerdo con el *principio de interacción*, reflexionan, modifican conceptos, generalizan, etc., dando lugar al proceso de aprendizaje. De manera similar, Ruiz (2008) menciona que:

> No todos [los estudiantes] tienen iguales intereses, motivaciones, aspiraciones ni características y posibilidades, incluso las condiciones personales y el medio familiar o laboral de los estudiantes de un mismo grupo, no tienen por qué ser las mismas, todo lo cual se sabe influye en los resultados que del proceso enseñanza aprendizaje se obtenga. (p. 3)

También Molina (2007) identificó que "el alumnado es diferente, aprende a ritmos diferentes y de formas diferentes" (pp. 19-20). Esta diversidad en los ritmos de aprendizaje, identificada en diversos estudios, puede impactar el desarrollo efectivo de las actividades dentro de una secuencia didáctica, por lo tanto, este aspecto se vuelve crucial en el diseño e implementación de dichas secuencias. Otro elemento que puede afectar el desarrollo óptimo de una secuencia didáctica es la limitación de tiempo en el aula. La resolución de actividades está sujeta a un tiempo determinado, el cual a veces resulta insuficiente para completarlas, agotar discusiones o resolver todas las dudas. Juárez et al. (2020) destacan que "las interacciones en el aula están limitadas por el tiempo, el espacio y el número de estudiantes, buscando una respuesta rápida [para resolver sus dudas y avanzar]" (p. 165).

Esta realidad es especialmente evidente para aquellos estudiantes que aprenden con mayor lentitud, subrayando la necesidad de buscar estrategias que les permitan desarrollar las actividades contempladas en la secuencia didáctica a su propio ritmo. De esta manera, podrán alcanzar efectivamente el aprendizaje esperado.

El uso de plataformas con fines educativos, como Moodle, puede ser una alternativa para solventar estas limitaciones. Al alojar las secuencias didácticas en una plataforma en línea, las actividades ya no se encuentran restringidas a un horario en el salón de clases. Por el contrario, se pueden utilizar en cualquier momento y desde cualquier lugar, mediante cualquier dispositivo conectado a internet, ya sea fijo o móvil (Azevedo, 2005, Cabero, 2006; Kramarsky y Gutman, 2006; Alemany, 2007 y Boneu, 2007;).

La plataforma Moodle cuenta, además, con foros cuyo objetivo es ayudar a resolver dudas en cualquier momento a través de los comentarios vertidos allí. Cuando un usuario tiene dudas, no sabe qué camino seguir en la resolución del problema, quiere verificar un procedimiento o una idea, puede entrar a los foros y revisar si hay alguna respuesta que coincida con su pregunta. Quizá otro compañero ya resolvió algo y explico los pasos que realizó o si hay una respuesta del docente a una pregunta similar, los foros resultan ser recursos valiosos.

Además, “los foros virtuales… permiten construir una pausa en la comunicación, importante para la asimilación e integración de materiales, [promover la] creatividad y [la] conexión profunda entre [los] estudiantes” (Juárez et al., 2020, p. 165). Los comentarios dejados en los foros, tanto por parte de los usuarios como del docente, permanecen ahí para poder consultarse posteriormente las veces que se necesite. Esto contrasta con los comentarios en clase, que pueden no ser asimilados en el momento o incluso olvidarse con el tiempo.

Según algunos investigadores como Henn (2007), Brown (2015) y Stillman (2019), el uso de la tecnología puede contribuir positivamente para que los estudiantes comprendan los fenómenos del mundo real que les rodean, favoreciendo el *Principio de realidad*, ya que, para los estudiantes es muy difícil por si mismos relacionar el contenido matemático con situaciones de la vida real (Henn, 2007; Olveira y Barbosa, 2013 y Ortega et al., 2019).

Moodle (Modular Object Oriented Dynamic Learning Environment) fue desarrollada por un pedagogo e informático australiano con fines educativos (Cortés et al., 2020) y está diseña para favorecer la gestión del aprendizaje, ya que ofrece una amplia variedad de herramientas para la enseñanza y el aprendizaje a distancia. En Moodle, es posible crear actividades, evaluaciones, foros para la interacción en línea, entre otras funciones. Además, se pueden insertar videos o Applets, e incluso permite el seguimiento del progreso del estudiante. "El uso de plataformas virtuales permiten a los alumnos acceder una diversidad de materiales de aprendizaje, los cuales se adecuan a las habilidades, necesidades y disponibilidades de cada estudiante" (Romero et al., 2021, p. 116).

Según Dado y Bodemer (2017) el aprendizaje colaborativo asistido por computadora "puede describirse como actividades en las que dos o más estudiantes interactúan y se comprometen mutuamente con el logro de un objetivo de aprendizaje común, con el apoyo de las tecnologías de la información y la comunicación" (p. 160). Cuando se diseñan actividades con el propósito de fomentar interacciones productivas entre los estudiantes, se promueve una comprensión compartida del aprendizaje (*Principio de interacción*). Además, el proceso de aprendizaje se puede manifiesta cuando los participantes en los foros realizan intercambios de ideas que provocan transformaciones en las percepciones originales de otros usuarios.

Otra ventaja del uso de la plataforma Moodle para desarrollar secuencias didácticas es que permite insertar herramientas de apoyo para el aprendizaje del usuario como videos, Applets, guías, Wikis, etc. (Biasutti, 2017). Al tener todos los recursos necesarios en un solo espacio de trabajo, los estudiantes pueden ir desarrollando las actividades de forma secuenciada reduciendo la posibilidad de que se disperse o distraiga (Kristanto, 2021).

Freudenthal (1991) mencionaba que "la innovación [como] proceso de aprendizaje, es bastante singular, más que uno de reinvención guiada. En la medida en que puede ser guiado [mediante] un alto grado de flexibilidad" (p. 170). En este sentido, las actividades en línea podrían representar una innovación en el aprendizaje de los estudiantes si están bien diseñadas y cuentan con los recursos necesarios, tanto tecnológicos como de apoyo docente, para guiarlos en la construcción de su propio conocimiento, a partir de la transformación de sus concepciones e ideas preliminares sin la presión del tiempo, permitiéndoles avanzar a su propio ritmo.

Hay desventajas que pueden presentarse al desarrollar una secuencia didáctica en línea. Las que se consideran más relevantes para el desarrollo de este trabajo, son: 1) dificultad en el uso de la plataforma, 2) dificultad en el uso de alguna herramienta tecnológica, 3) falta de aportes útiles por parte de los usuarios en los foros, o la ausencia total de respuestas, y 4) la posibilidad de que algunos usuarios no logren identificar el punto central en el cual deben prestar atención (*reinvención guiada*) mientras realizan una actividad o manipulan un Applet.

Para mitigar algunas de estas desventajas, se pueden implementar estrategias como el desarrollo de tutoriales específicos, la participación activa del docente en los foros proporcionando orientación, y la utilización de mensajes privados dentro de la plataforma para brindar una guía personalizada al usuario. Sin embargo, es importante reconocer que estas medidas pueden no ser suficientes o aplicables en todos los casos, debido, entre otras cosas, a la diversidad de habilidades, destrezas y necesidades, pero sobre todo al interés genuino del usuario por realizar la secuencia didáctica para aprender.

Los principios de la Educación Matemática Realista, establecidos por Treffers (1987), han sido adaptados en varias ocasiones, por ejemplo, Alsina (2009), Heuvel-Panhuizen y

Drijvers (2014) y Da (2022). En este trabajo, se usará la versión de Da (2022) para adecuarla al desarrollo de las secuencias didácticas insertadas en una plataforma en línea tipo Moodle.

1. *Exploración fenomenológica o uso de contextos (Principio de realidad)*. Se trata del uso de contextos y no de la aplicación de las matemáticas. El plan de estudios de la Educación Matemática Realista (EMR) se construye alrededor de contextos que tengan el potencial de generar conocimientos robustos y flexibles. Esto permite que los estudiantes desarrollen la capacidad de imaginar y participar en estas situaciones específicas. Además, el contexto debe impulsar al estudiante a explorar la situación, identificar contenido matemático relevante, descubrir reglas, realizar operaciones y crear un modelo que conduzca a una solución matemática. Al reflexionar y generalizar, los estudiantes desarrollan un concepto más completo que puede facilitar su aplicación en áreas extramatemáticas.

Según Gravina y Santarosa (1998), un entorno educativo mediado por la tecnología permite al estudiante construir su conocimiento. Con la ayuda de un dispositivo conectado a internet, el estudiante puede modelar problemas, realizar simulaciones, visualizar situaciones, entre otras acciones, que no serían posibles sin tecnología. Estas tecnologías "brindan condiciones óptimas para transformar una enseñanza tradicional y centrada en la transmisión del contenido en otro tipo de educación más personalizada y centrada en alcanzar aprendizajes diversos" (Cortés et al., 2020, p. 241).

Plataformas como Moodle permiten integrar varios recursos didácticos (imágenes, videos, Applets, etc.) en una misma tarea, lo cual no solo ayuda al desarrollo de ideas intuitivas, sino que también contribuye a verificar supuestos y fomentar el autoaprendizaje. La disponibilidad de diversas herramientas para el alumno puede mejorar la percepción y facilitar la identificación de relaciones entre diferentes representaciones, ya que "se pueden tener todas las funcionalidades integradas en un mismo entorno, pudiendo disponer de todos los instrumentos y contenidos con una gran accesibilidad" (Cabanillas et al., 2020, p. 34).

2. *El uso de modelos o puentes mediante instrumentos verticales (El principio de niveles).* El término modelo se refiere a modelos situacionales y modelos matemáticos desarrollados por los propios estudiantes. Esto significa que los estudiantes desarrollan patrones en la resolución de problemas. Al principio, el modelo es un modelo situacional familiar para los estudiantes y a través de un proceso de generalización y formalización, el modelo eventualmente se convierte en un objeto matemático en sí mismo.

Según menciona Schoenfeld (citado en Barrantes, 2006), los estudiantes pueden utilizar distintas estrategias para resolver un determinado problema, las cuales pueden ser útiles o no, incluso "si alguna sirve puede presentar mayores obstáculos que otras…por esto se destaca la importancia de que el estudiante o la persona que está resolviendo el problema [pueda] monitorear y evaluar [su propio] proceso" (p. 3).

La utilización de Moodle permite proporcionar retroalimentación inmediata sobre las actividades realizadas por los estudiantes, lo que les permite no solo conocer la corrección de sus respuestas, sino redirigir y orientar su enfoque. Además, los recursos como los foros, salas de chat y mensajes privados en Moodle permiten aclarar dudas y compartir conocimientos, lo que facilita la modificación, ampliación o mejora de las concepciones. Cortés et al. (2020) señalan que “la enseñanza de las matemáticas exige para su comprensión la realización de muchas actividades prácticas de forma sistemática y el escenario de trabajo virtual que favorece la plataforma Moodle posibilita esta exigencia” (p. 6).

3. *El uso de producciones y construcciones propias o aportes de los estudiantes (El principio de actividad)*. El aporte de los estudiantes se puede convertir en una componente fundamental del proceso de evaluación. Por ejemplo, se les puede requerir que desarrollen diversas tareas, tales como la redacción de un ensayo y se puede solicitar a otro compañero que lo evalúe o que ellos mismos diseñen ejercicios o tareas para otros compañeros.

La plataforma Moodle permite que los estudiantes incorporen diversos materiales elaborados por ellos mismos, que los otros usuarios pueden ver o utilizar. Además, considerando que cada estudiante avanza a su propio ritmo y que las habilidades cognitivas con las que cuenta cada sujeto son distintas (Barrantes, 2006), Moodle proporciona espacio y tiempo para que cada estudiante avance a su ritmo, sin que esto afecte el desarrollo de otro compañero, ya que no se está restringido a recibir o enviar sus aportaciones en un tiempo determinado.

Según comentan Romero et al. (2021), el ambiente de Moodle es compatible con computadoras y smartphone (iOS y android), de manera que los usuarios pueden acceder en cualquier momento y desde cualquier lugar. De esta manera, si tiene alguna duda, puede consultar foros, manipular un Applet, ver un video, repetir el ejercicio, enviar un mensaje privado, etc., Este aspecto puede ser motivador para que ellos aporten sus propias producciones, tal y como mencionan Artal et al. (2017), “una de las ventajas de los dispositivos digitales es que facilitan… la participación interactiva y el desarrollo de estrategias motivadoras para los estudiantes” (p. 2).

También Gamboa (2007) menciona que uno de los objetivos fundamentales en la enseñanza es motivar al estudiante a que analice, critique y extraiga conclusiones a partir de información que se le da y la que él mismo proporciona, y es ahí donde “el uso de herramientas tecnológicas se transforma en un medio ideal” (p. 16), porque le permite modificar sus esquemas cognitivos a través de los distintos recursos que tiene disponible en la plataforma. Según mencionan Soto y Del Castillo (2016), “si los estudiantes pueden matematizar su propia actividad, entonces pueden reinventar sus resultados matemáticos bajo la guía del profesor o del material instruccional diseñado para ello” (p. 1416).

4. *El carácter interactivo del proceso de enseñanza o interactividad (El principio de interacción).* La interactividad en el proceso de enseñanza es un componente fundamental de la Educación Matemática Realista (EMR). Esta interacción se manifiesta a través de la discusión, la cooperación y la evaluación, elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo. En este enfoque, los métodos informales de los estudiantes se utilizan como plataforma para alcanzar los formales. Bajo este principio, los estudiantes comparten sus ideas y participan activamente en

explicar, debatir, llegar a acuerdos o desacuerdos, promoviendo así un ambiente dinámico y participativo.

Según mencionan Juárez et al. (2020):

> Algunas investigaciones han mostrado que la interacción a través de foros virtuales crea oportunidades para el diálogo, fomenta la reflexión, permite la formación y reafirmación de significados, apoya la estructuración y organización de pensamientos y tiene un efecto positivo, tanto en el aprendizaje de los estudiantes como en la calidad de sus trabajos (p. 162).

De la misma manera, Barrantes (2006) encontró que, dentro del proceso de aprendizaje, es muy importante que el estudiante pueda "monitorear [su] proceso y decidir cuándo abandonar un camino no exitoso y tomar uno nuevo" (p. 4). En este sentido, los foros permiten leer los caminos que han tomado otros compañeros y las soluciones que han encontrado, facilitando la detección de errores, omisiones o fallas.

También Biasutti (2017) sostiene que los foros "se consideran herramientas útiles para desarrollar la dimensión cognitiva y el razonamiento de los participantes" (p. 159), ya que "asocian las actividades del foro con pensar, tener opiniones y tener que escribir material, que luego sería leído por sus compañeros" (p. 160). Otra ventaja de los foros es que las respuestas esperadas, pueden (o no) tener un tiempo límite, y este tiempo puede establecerse en horas, días, semanas, incluso meses, permitiendo pausas en la comunicación, las cuales sirven para asimilar e integrar de ideas y conocimientos entre los estudiantes (Silva y Gros, 2007).

Además, el rol del profesor en un ambiente virtual se transforma en un tutor en línea (Romero et al. ,2021), quien, además de guiar el trabajo de los estudiantes a través de foros o mensajes privados, incorpora actividades adecuadas, Applets, video tutoriales, etc., que sirven de apoyo para que el estudiante pueda reflexionar sobre sus concepciones. Moodle cuenta con distintos tipos de foros (una discusión única global, preguntas-respuestas, de evaluación, etc.), donde los usuarios pueden comparar y contrastar sus respuestas y debatir opiniones que les permitan modificar, reacomodar o generalizar sus concepciones e ideas.

Al respecto, Biasutti (2017) menciona que "en cuanto a la cognición, la orientación de los foros [debe ser] hacia … compartir información y contrastar ideas, … sobre la interdisciplinariedad, la internalización, la elaboración y síntesis de los conceptos que surgieron durante las discusiones" (p. 170).

5. *El entrelazamiento de varias líneas de aprendizaje (El principio de interconexión).* La integración de eslabones o unidades matemáticas es esencial en la cadena de aprendizaje. Estos eslabones de aprendizaje no pueden tratarse como entidades separadas; por el contrario, el entrelazamiento de estos aprendizajes en la cadena del conocimiento es lo que permite la resolución del problema. La formulación de este principio se basa en la idea de que la aplicación de la matemática se vuelve más difícil si se enseña solo de manera "vertical", es decir, si diferentes asignaturas, temas o conceptos se enseñan por separado, sin tener en cuenta las relaciones cruzadas.

La versatilidad de la plataforma Moodle permite que el estudiante tenga disponible diversos recursos didácticos que facilitan el entrelazado de conocimientos, temas o asignaturas. Gonçalves y da Silva (2013) mencionan que “el uso de software permite explorar conceptos matemáticos a través de construcciones no estáticas, que pueden ser manipuladas y brindar una percepción diferente de las Matemáticas” (p. 244). Así, por ejemplo, los estudiantes pueden manipular distintos tipos de representación a la vez, lo que amplía su percepción y aprendizaje.

Couy menciona que “cuando se manipulan imágenes visuales, la Matemática adquiere un carácter exploratorio, posibilitando analizar, interpretar, descubrir variantes y comprender el contenido matemático, sus características y propiedades, estimulando el descubrimiento” (citado en Gonçalves y da Silva, 2013, p. 425). También Gamboa (2007) menciona que “el uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. Cada uno de los ambientes computacionales que pueden emplear, proporciona condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas” (p. 9).

El uso de distintas herramientas, como Applets de Geogebra y Hojas de Cálculo, que se pueden manipular dentro de la misma actividad, como un foro, por ejemplo, ayuda que no sea “el procedimiento algebraico… la única forma de resolver el problema, sino que [pueda] explorar otras formas de representación del mismo concepto” (ídem, p. 13), permitiendo un aprendizaje transversal dentro de la misma matemática. Además, como todos los recursos están siempre "a la mano", el estudiante puede regresar a las primeras actividades para contrastar resultados y observar cómo este proceso que está realizando le permite modelar, entender y resolver las situaciones problema propuestas en otras ciencias.

6. *Principios y enseñanza en la RME* (*Principio de reinvención guiada*). Un principio fundamental de la RME, según la idea de Freudenthal (1991), es la "reinvención guiada" de las matemáticas, donde se destaca la necesidad de que los profesores desempeñen un papel activo en el aprendizaje de los estudiantes, y los programas educativos incorporen situaciones que actúen como palanca para provocar cambios en la comprensión de los estudiantes. Para lograr esto, la enseñanza y los programas deben basarse en una trayectoria educativa extensa y coherente.

Las plataformas como Moodle ofrecen un entorno interactivo y flexible que permite la integración de diversos recursos multimedia, como videos, simulaciones y aplicaciones interactivas. Esto crea experiencias de aprendizaje más dinámicas y participativas, enriqueciendo la experiencia educativa y ofreciendo a los estudiantes diferentes formas de abordar y comprender conceptos.

El uso de foros, chats o mensajes fortalece la comprensión de los contenidos y proporciona oportunidades para que los estudiantes expresen sus ideas y resuelvan problemas juntos. Dado que la plataforma está disponible en cualquier momento, permite avanzar a su propio ritmo, facilitando un aprendizaje más efectivo. La retroalimentación inmediata que ofrecen las plataformas permite comprender rápidamente errores, corregir conceptos erróneos y avanzar en una comprensión más eficiente. La inclusión de simulaciones en

Geogebra o Excel actúa como palanca para comprender temas abstractos al proporcionar experiencias tangibles.

Además, las plataformas permiten su actualización continua, posibilitando el desarrollo de nuevas actividades, la incorporación de otros recursos didácticos o interactivos, la presentación de nuevos contextos o situaciones problema, entre otras posibilidades. Esto proporciona un entorno educativo enriquecido y permanente que puede ampliar la trayectoria educativa.

5.2 Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA)

En relación a los ambientes virtuales de aprendizaje, según Rubio y Montiel (2021), nos podemos referir a todas aquellas interacciones entre los usuarios y los recursos tecnológicos con el fin de cumplir una función formativa o educativa, a través de internet. Para Mikropoulos y Natsis (2011):

> Un Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA) o Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) se puede definir como un entorno virtual que se basa sobre un determinado modelo pedagógico, que incorpora o reúne uno o más objetivos didácticos, proporciona a los usuarios experiencias que de lo contrario no sería capaz de experimentar en el mundo físico y provoca resultados de aprendizaje específicos. (p. 770)

El interés por el uso de ambientes virtuales de aprendizaje (AVA) dentro de la comunidad educativa, según Rubio y Montiel (2021), se debe, entre otras cosas, al avance de la tecnología, al desarrollo de plataformas tipo e-learning y al aumento de la apertura de programas de licenciatura y posgrado en modalidad en línea (a distancia), lo que permite ampliar la oferta educativa y la matrícula en instituciones educativas con limitaciones físicas. Según mencionan estos autores, los AVA son propios de la educación a distancia o en línea, los cuales se construyen a través de *sistemas de gestión del aprendizaje* (*learning management systems)*, donde Moodle, Docebo, Geogebra o Canvas, pueden ser ejemplos de estos sistemas de gestión educativa. Los autores mencionan además que:

> La concepción de los AVA… [implicó] una amplia gama de estudios sobre los diversos fenómenos alrededor de esta modalidad educativa [como los estudios de] (Álvarez y Álvarez, 2012; Clark y Rosa, 2018; Farías y Montoya, 2009; Lameras, Levy, Paraskakis y Webber, 2012; Pesare, Roselli, Rossano y Di Bitonto, 2015; Urquidi, Calabor y Tamarit, 2019; entre muchos otros); sin embargo, en la práctica se comenzaron a crear y usar diversos recursos y ambientes de aprendizaje sin las estructuras (sistemas de gestión del aprendizaje), las normas y los modelos pedagógicos preestablecidos de una institución…. Todas las formas de caracterizar esta diversidad de AVA se aceptan en la comunidad académica, en tanto cumplen una función formativa y socializadora en un entorno digital (internet). (Rubio y Montiel, 2021, p. 215)

Las plataformas virtuales, como Moodle, han provocado cambios significativos en la educación (Cortés et al., 2020), generando nuevas formas de transferencia del conocimiento docente-dicente, favoreciendo:

> [El] proceso de formación para una sociedad marcada por el cambio y por la velocidad a la que se renuevan los conocimientos… [Además], las nuevas generaciones de jóvenes que ingresan y egresan de las universidades prefieren la utilización de los celulares, tabletas, portátiles, etc. (p. 241)

En la enseñanza actual de las matemáticas, muchos docentes promueven el uso de medios tecnológicos para apoyar o potenciar el aprendizaje de los estudiantes mediante el uso de calculadora graficadora, calculadora tipo CAS, uso de Geogebra, Excel, entre otros. En estos medios tecnológicos se incluyen las plataformas como otra herramienta importante dentro de la gestión académica. Según menciona Del Toro (citado en Cortés et al., 2020) “las asignaturas [que] se encuentran montadas en plataformas virtuales de aprendizaje y en laboratorios virtuales facilitan mayores niveles de interactividad y trabajo colectivo” (p. 242). Las plataformas tipo Moodle, según estos autores, están siendo utilizadas por más de 130 millones de personas en el mundo ya que es gratuita y de libre acceso. Además, comentan que al haber sido creada por pedagogos y psicólogos:

> Su curva de aprendizaje es menor [con respecto a] los otros Sistemas Gestores Contenidos (SGC). Permite a los estudiantes, recibir los contenidos por parte de los profesores como si estuviesen en una clase, cambiando la tiza por el teclado y el mouse, y el aula por un monitor. (Cortés et al., 2020, p. 243)

De acuerdo con Álvarez y Álvarez (2012), en un medio informático se pueden integrar diferentes notaciones simbólicas que se pueden mostrar en la pantalla al mismo tiempo. Además, se pueden insertar videos o Applets para presentar fenómenos de variación y cambio, los cuales tienen una fuerte influencia en la cognición del estudiante. Según las autoras, “la página web constituye una interfaz dinámica e interactiva entre el usuario y las posibilidades de la página como un todo” (p. 76).

Asimismo, mencionan que las plataformas permiten modificar la clase tradicional, donde el docente tiene la palabra y el estudiante es un receptor de esos mensajes, hacia un verdadero intercambio comunicativo donde el conocimiento es socialmente construido. “Son estas características de la página web las que le otorgan una nueva vigencia a la reflexión sobre las formas en que se construyen los sentidos y los significados de lo que se aprende” (ídem, p. 76).

Cortés et al. (2020) comentan que, a través de la plataforma, el docente puede saber por los mensajes en los foros, las respuestas de las evaluaciones o la manipulación de los recursos tecnológicos qué errores se presentan en cada etapa de la actividad. No solo la cantidad de estudiantes que presentaron dicho error, sino cuál es el error (obstáculo cognitivo) que está presente. Asimismo, Turégano identificó que la tecnología:

> Favorece el establecimiento de conexiones... [y] juega un papel importante debido a su potencia visual, que ayuda a la formación y transformación de intuiciones y a la creación de imágenes del concepto, y debido también a la facilidad para realizar cálculos, eximiendo al estudiante de esta tediosa labor. De esta forma el estudiante puede centrarse en la exploración y discusión de los conceptos. Los errores cometidos

> por los estudiantes sirven para acrecentar su aprendizaje y completar así sus imágenes del concepto. (citado en Jácome et al., 2022, p. 245)

Por su parte Cortés et al. (2020) mencionan que "la enseñanza de las matemáticas exige para su comprensión la realización de muchas actividades prácticas de forma sistemática y el escenario de trabajo virtual que favorece la plataforma Moodle posibilita esta exigencia" (p. 245). También Álvarez y Álvarez (2012) encontraron que al combinar varias representaciones semióticas como lo escrito y lo gráfico (a través de imágenes, videos o Applets) hay más posibilidades de que los estudiantes recuerden esta información en el futuro. Sin embargo, las autoras enfatizan que:

> No se trata de usar herramientas, documentos, vídeos, imágenes porque exista la posibilidad técnica de hacerlo, el asunto pasa más por la comprensión del potencial… que cada una de ellas representa y posibilita dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje. (p. 86)

Es decir, no se trata de introducir o utilizar tecnología sin un sustento teórico-didáctico; su uso debe estar sustentado en la investigación, la teoría, el análisis histórico, la experiencia docente, los objetivos que se quieren alcanzar y el pilotaje realizado. Drijvers et al. (2010) lo describen de la siguiente manera:

> La forma en que el docente decide explotar una configuración didáctica en beneficio de sus intenciones …[requiere] decisiones sobre la forma en que se presenta y trabaja una tarea, sobre los posibles roles de los artefactos [tecnológicos] que se jugarán y sobre los esquemas y técnicas que los estudiantes desarrollarán y establecerán. (p. 215)

Álvarez y Álvarez (2012) también señalan que "el aspecto organizacional… constituye una parte básica en los... cursos virtuales" (p. 85). Esto implica entonces seleccionar de manera adecuada aquellas herramientas tecnológicas que permitan, a través de su manipulación, observar la variación del fenómeno e identificar sus magnitudes, comprender la razón de cambio (media e instantánea), tanto de forma algebraica como de forma gráfica y tabular. Esto facilita que los estudiantes puedan transitar entre distintos registros de representación (verbal, gráfico, tabular y algebraico), ya que, como lo indican Roorda et al. (2009), es mediante la representación gráfica y simbólica y las conexiones y relaciones entre éstas, lo que permite saber si un alumno comprende o no el concepto de función derivada. Las herramientas tecnológicas deben ubicarse estratégicamente dentro de la secuencia didáctica para facilitar de forma efectiva el aprendizaje.

Por otro lado, las secuencias didácticas también han demostrado ser útiles en el aprendizaje de los conceptos matemáticos al facilitar la construcción ordenada de conocimientos de orden superior basados en los conocimientos previos, mediante la organización del proceso cognitivo del estudiante. Varios trabajos respaldan esta afirmación, como el desarrollado por Jácome et al. (2022), quienes, utilizando tecnología en su secuencia didáctica, identificaron que los estudiantes "logran representar retórica y algebraicamente la situación problema y, a partir de la reflexión, logran identificar y representar la relación entre las magnitudes variables" (p. 302).

Otra secuencia didáctica desarrollada por Sulasmi et al. (2022), donde proponen varias situaciones problema para abordar el aprendizaje de la función derivada, encontraron que "el modelo que proponemos puede mejorar la eficiencia de la enseñanza y aprendizaje de [la derivada como] tema del cálculo" (p. 1). En la secuencia didáctica de Pineda (2013), utilizando Geogebra, se menciona que la tecnología usada dentro de la secuencia, "permite que el estudiante pueda aprender los conceptos matemáticos rápidamente, especialmente aquellos que están relacionados con la derivada de una función… haciendo que el estudiante pueda comprender el concepto de derivada de manera rápida y efectiva" (pp. 90-91).

Dentro de la secuencia didáctica que se propone en este proyecto doctoral, se van a incorporar a la secuencia didáctica herramientas tecnológicas como Geogebra y Hojas Electrónicas de Google.

El uso Geogebra está respaldado por varios trabajos, como por ejemplo el de Pierce y Stacey (2011) quienes comentan que "la geometría dinámica [como Geogebra] ofrece oportunidades para llevar el mundo real al aula de matemáticas, para agregar visualización, color y animación que no es posible en un aula tradicional y para profundizar el pensamiento matemático" (p. 41). Además, los softwares de geometría dinámica permiten desarrollar Applets para modelar situaciones problema de manera muy cercana a la realidad, lo que permite que los estudiantes las perciben como realizables o razonables en términos de la EMR.

También Geogebra permite restringir las herramientas que el estudiante puede manipular para evitar "la exploración libre de los estudiantes [que] a menudo puede degenerar en un comportamiento asistemático sin contenido matemático" (Henningsen y Stein, citados en Pierce y Stayce, 2011, p. 53). También Gutiérrez (2016) encontró que Geogebra:

> Reúne de forma dinámica, aritmética, geometría, álgebra y cálculo e incluso recursos de probabilidad y estadística, en un único conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente. Ofrece representaciones diversas de los objetos desde cada una de sus posibles perspectivas: vistas gráficas, algebraica general y simbólica, estadísticas y de organización en tablas, planillas y hojas de datos dinámicamente vinculadas. (p. 12)

Por su parte, la Hoja Electrónica, en particular la de Google, se puede insertar en la plataforma utilizando un hipervínculo público y se puede, al igual que Geogebra, restringir su manipulación para que el estudiante centre su atención en ciertos aspectos de la actividad.

Según mencionan Vargas y Guzmán (2012), el uso "de herramientas [hojas electrónicas] para resolver tareas puede apoyar el desarrollo de conocimiento en los estudiantes, tomando como base sus conocimientos previos." (p. 89). En las conclusiones de su investigación, los autores mencionan cómo los resultados obtenidos sugieren que los estudiantes fueron capaces de interactuar con "objetos simbólicos" al abordar problemas en el entorno de una hoja electrónica. También mencionan que esto forma parte de las capacidades potenciales que se han identificado en la investigación sobre el uso de hojas electrónicas.

En la sección 7, se presenta un primer acercamiento al diseño de una secuencia didáctica, la cual estará alojada en la página Moodle AVAUS (Ambientes Virtuales de Aprendizaje) de la Universidad de Sonora. Esta secuencia didáctica está conformada de seis Applets de Geogebra, tres actividades usando la hoja electrónica de Google, 14 foros y 8 evaluaciones.

La organización de la secuencia didáctica sigue los niveles establecidos por la Teoría de la Educación Matemática Realista y las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (que se detallan en la siguiente sección) previstas para cada nivel. Todas las actividades están abiertas y disponibles para el estudiante sin límite de tiempo. Además, los foros están abiertos, permitiendo que todos los participantes comenten y lean los comentarios de los demás usuarios; de igual manera, tienen la posibilidad de editar sus comentarios en los foros en cualquier momento.

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) fueron desarrolladas por primera vez en 1995 por Martin Simon. Su intención fue “reconstruir la pedagogía de las matemáticas desde una perspectiva constructivista” (Gómez y Lupiáñez, p. 79), donde el constructivismo se apega a las propuestas epistemológicas opuestas al conductismo, la memorización, la enseñanza tradicional basada en el discurso, etc. Simon (1995) establece que en toda THA existen tres componentes principales: 1) objetivos de aprendizaje, 2) actividades de aprendizaje y 3) un proceso de aprendizaje hipotético.

En el año 2004, Martin Simon y Ron Tzur llevaron a cabo una redefinición del punto 2 de las THA, con el objetivo de conferirle un sentido más específico a la palabra "actividad". En este proceso, los autores sustituyen la palabra “actividad” por "tarea". Según su concepción, “tarea” implica un propósito cognitivo específico, a diferencia de "actividad”, que simplemente se refiere a la realización de algo. Además, la tarea, al tener un propósito, abarca todas las actividades que los estudiantes llevarán a cabo para alcanzar el objetivo de aprendizaje. De esta manera, según los autores, la tarea se refiere a todas las actividades inmersas en el proceso de aprendizaje.

Tomando en cuenta estos elementos, las tres componentes principales en una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje son: 1) los objetivos que se tienen establecidos para el aprendizaje de los estudiantes, 2) las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes y 3) las hipótesis acerca de cómo se va a desarrollar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Estas componentes están enmarcadas por el objetivo de enseñanza determinado por el docente.

Según Simon y Tzur (2004), estas componentes se fundamentan en los siguientes supuestos:

1. La construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en (o parte de) la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción; es decir, en los conocimientos que ya poseen y que servirán de soporte y apalancamiento para desarrollar nuevo conocimiento.
2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos concretos. Permite definir cada etapa de manera sistematizada, desde el punto de partida y a través de las actividades planificadas, especificando lo que se espera lograr en cada fase, hasta completar la tarea. Asimismo, la trayectoria permite determinar cuándo se puede avanzar a concepto de orden superior, es decir, "medir" si se ha logrado el objetivo planteado. De esta manera, el docente puede evaluar si se cumplió el objetivo establecido o debe realizar ajustes en la actividad.
3. Las tareas matemáticas abarcan las actividades, el uso de herramientas o manipulables, la logística de las actividades, la instrucción, la organización del trabajo y el tiempo establecido para cada actividad, entre otros aspectos. Estos

elementos son fundamentales para organizar el aprendizaje y fomentar el desarrollo de conceptos matemáticos concretos. Por lo tanto, constituyen un componente clave en el proceso de aprendizaje.

4. Dada la naturaleza hipotética e inherentemente incierta del proceso de aprendizaje, el docente se verá obligado a modificar sistemáticamente algún aspecto de la trayectoria hipotética. Esto se debe a que, en el aprendizaje, pueden surgir situaciones no consideradas, derivadas de diversas causas. Por ejemplo, errores en los aprendizajes previos, falta de claridad en las instrucciones, escaso o nulo manejo de las herramientas, falta de empatía para comentar en los foros o retroalimentar comentarios de otros usuarios, no completar las actividades, entre otras causas.

Al respecto Ponte (2014) indica que:

> Una tarea puede o no tener potencial en términos de conceptos y procesos matemáticos que pueden ayudar a movilizar. Pueden dar lugar a diferentes actividades, dependiendo de la forma en que se planteen, de la forma en que se organice el trabajo de los estudiantes, el ambiente de aprendizaje y de la propia capacidad y experiencia previa. (p. 16)

La THA se centra en anticipar los resultados que se derivan de enseñar a los alumnos de una manera específica. Esto implica realizar actividades particulares, utilizar herramientas específicas, llevar a cabo ciertas acciones, todo ello de acuerdo con la trayectoria de aprendizaje diseñada dentro de la secuencia didáctica. Un aspecto fundamental para el progreso exitoso de la secuencia didáctica es la definición clara de las habilidades matemáticas que los estudiantes deben desarrollar en cada etapa de la tarea para alcanzar los objetivos establecidos.

Estas habilidades son el componente central, y deben estar estrechamente alineadas no solo con la trayectoria prevista para el estudiante, sino también con el desarrollo histórico-epistemológico del concepto y con los errores y obstáculos señalados en la literatura. A su vez, la trayectoria, que indica el camino que se espera que el estudiante recorra para cumplir con el objetivo, debe manifestarse de manera palpable en la tarea asignada. De esta manera, la coherencia entre la planificación de la instrucción, las metas establecidas y las tareas propuestas se convierten en un factor esencial para el éxito del proceso educativo. En palabras de Simon y Tzur, “las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje [y] las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas” (2004, p. 93).

Para Stein y Smith (1998), “una tarea [está] dedicada al desarrollo de una idea matemática particular” (p. 105). Para Watson y Ohtani (2015) las [tareas] que generan en el estudiante actividad manual y cognitiva, brindan la oportunidad de descubrir conceptos, ideas, estrategias, reestructurar conceptos anteriores, modificar creencias, etc., [y] todo esto permite desarrollar pensamiento matemático.

Al pensar en las tareas que formarán parte de las secuencias didácticas, Simon (1995) sugiere anticipar tanto las formas en que se pueden abordar las actividades dentro de la tarea como los objetivos específicos que se pretende que el estudiante alcance. El diseño de tareas debe tener en cuenta el desarrollo histórico del concepto y los obstáculos identificados en su aprendizaje, obtenidos de la literatura consultada. De esta manera, se puede establecer un enfoque integral al desarrollar una tarea, la cual tiene más posibilidades de provocar aprendizaje en el estudiante.

La secuencia didáctica en este proyecto doctoral se enmarca en la Teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), que establece niveles (situacional, referencial, general y formal) para la comprensión de conceptos matemáticos, en este caso, la derivada. Por tanto, es importante establecer primero los objetivos asociados con cada nivel, ya que esto proporciona la base para el diseño de las tareas. A su vez, esto indica la pauta para el desarrollo de actividades, tales como foros de discusión, aplicaciones interactivas (Applets) y evaluaciones, que permitan alcanzar el aprendizaje esperado en cada nivel, de acuerdo con la EMR. Esta estructuración cuidadosa y alineada con los niveles de la EMR facilitará un progreso secuencial, asegurando que los estudiantes adquieran las habilidades y conocimientos necesarios en cada etapa antes de avanzar al siguiente nivel.

Dado que se espera que el concepto de derivada surja a partir de la razón promedio de cambio, es crucial seguir un proceso de comprensión progresiva. Inicialmente, el estudiante debe identificar las magnitudes presentes en el fenómeno y reconocer la relación de cambio entre ellas, dentro de la situación problema (nivel situacional). Posteriormente, debe entender cómo una magnitud cambia al modificar la otra, utilizando la razón promedio de cambio (calculada como la pendiente de la recta secante). Al identificar esta relación, el estudiante debe establecer conexiones tanto con la situación problema como con sus representaciones algebraica, gráfica y tabular (nivel referencial). La revisión bibliográfica realizada indica que los registros de representación, ya sean algebraicos, gráficos, tabulares o verbales, deben estar presentes en las tareas.

En el nivel general, es necesario que se comprenda el concepto de Δx como un incremento infinitesimal entre dos cantidades (desvinculado de la situación problema), y entre las cuales se desea medir la razón de cambio en intervalos muy pequeños (tangente práctica). Finalmente, en el nivel formal, el estudiante debe llegar al concepto de razón instantánea de cambio, deduciendo que esta razón se alcanza cuando Δx tiende a cero, y de ahí su representación mediante el límite. Además, debe establecer conexiones de la razón instantánea de cambio con su representación gráfica y tabular, distinguiendo claramente entre $f'(a)$ y $f'(x)$.

Para el desarrollo de cada tarea, de acuerdo a los niveles de la EMR, en cada etapa de la secuencia didáctica, el estudiante dispondrá de actividades, Applets o herramientas creadas en una hoja electrónica, foros y evaluaciones. Donde se espera que estas actividades tengan un efecto en la cognición del estudiante. Esta relación se le conoce como la relación actividad-efecto dentro de las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje.

6.1 Relación actividad-efecto

La relación actividad-efecto, fundamenta en el constructivismo de Piaget, constituye, según los autores Simon et al. (2004) una particularización de la abstracción reflexiva que se cree realizará el estudiante, para identificar los factores que configurarán la Trayectoria de Aprendizaje.

Específicamente, se basa en el constructo de asimilación, que, según Piaget (citado en Simon et al., 2004), se refiere a los esquemas mentales que los alumnos crean al estructurar mentalmente sus experiencias y al discriminar entre lo importante y lo no importante. Según los autores, cuando Piaget introdujo la noción de asimilación, no se refería simplemente a absorber un concepto nuevo desde el exterior, sino a construir nuevas concepciones a través de la percepción de conceptos nuevos y la reestructuración mediante la acomodación de conceptos ya existentes.

Los conceptos nuevos deben ajustarse o encajar con ciertos conocimientos anteriores para formar conocimiento matemático de orden superior. Mientras tanto, la acomodación o reestructuración de conocimientos anteriores implica encontrar nuevas conexiones o interpretaciones, así como relacionarlos con un registro de representación que antes no se consideraba, por ejemplo.

En este contexto, los autores señalan que, al basarse en el constructivismo, "evitan la idea de que los alumnos simplemente asimilan conceptos nuevos y poderosos, y en cambio, adoptan la idea de que el aprendizaje es un proceso interno de construcción" (ídem, p. 310). Esto se alinea con los niveles y la noción de matematización en la Educación Matemática Realista (EMR). Así, cuando los alumnos observan el efecto de su actividad van clasificando, comparando, relacionando, discriminando, etc., lo que les lleva a identificar la relación entre lo que observan, lo que manipulan, lo que obtienen en un cálculo, lo que leen en un foro, es decir, la actividad que están realizando y el efecto que produce.

Este efecto no solo se limita a una percepción sensorial a través de los sentidos, sino que también influye en la psique del estudiante. Según los autores, "a través de la reflexión sobre su actividad y los efectos de su actividad, [el estudiante] llega a desarrollar la comprensión (quizás implícita) [de un concepto matemático]" (ídem, p. 318).

El mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto involucra tres términos:

1. *La psique-actividad* se refiere a los procesos mentales generados por una acción, que pueden ser observables o no. Generalmente, consiste en una secuencia de acciones mentales coordinadas. La actividad mental del estudiante solo puede ser inferida por un observador a través de las producciones elaboradas, tales como las producciones de los estudiantes subidas a la plataforma, los resultados obtenidos en las evaluaciones y el lenguaje escrito en un foro.
2. *La meta* se refiere al motivo por el cual los estudiantes inician y desarrollan una actividad. Las metas de cada actividad deben servir como una referencia anticipada sobre cuál será el foco de atención de los alumnos. Por ejemplo, conseguir una calificación más alta en una evaluación, comprender un gráfico,

calcular correctamente un valor, aprobar una materia, etc. Cualquiera que sea la meta para el estudiante, debe motivarlo a leer la retroalimentación con detalle, a utilizar una estrategia planteada en un foro, a preguntar sus dudas o a manipular nuevamente los Applets para detectar algún detalle que se obvió en la manipulación previa.

3. *Los efectos* que observan sirven para que el estudiante juzgue hasta qué punto una actividad, como la manipulación de un Applet, la calificación obtenida en una evaluación, el resultado obtenido en un cálculo que realizaron, etc., tuvo el éxito esperado o les dejó un aprendizaje. Esto lo pueden notar en los aciertos obtenidos en una evaluación o en las coincidencias que comparten con las respuestas de sus compañeros en los foros.

El proceso de actividad-efecto es una espiral creciente (Simon y Tzur, 2004). Para resolver una situación problema, los alumnos seleccionan de entre sus saberes anteriores aquellos que les permitan entender el problema, creando modelos emergentes, e implementan una actividad, ya sea dibujar, manipular, calcular o comentar. Al llevar a cabo una o varias de estas actividades, sus sistemas mentales (reflexión del estudiante, no necesariamente consciente) identifican los efectos de la actividad, en los cuales pueden detectar patrones, relaciones y similitudes (con aprendizajes previos, comentarios de otros compañeros o resultados de la evaluación).

Estas actividades les permitirán discriminar si lograron el objetivo o no. Si se alcanza el objetivo, esta reflexión resulta en la abstracción de una nueva relación de actividad-efecto, que constituye la base de una concepción más avanzada (que puede ser percibir la relación entre sistemas de representación, por ejemplo). Si no logra el objetivo, el estudiante modifica las estrategias e implementa una actividad diferente (puede ser volver a manipular un Applet para observar elementos que antes no observó, repetir un cálculo poniendo atención a los valores negativos, al uso de paréntesis, etc.), que tendrá un nuevo efecto, y así sucesivamente.

La teoría de la Educación Matemática Realista (EMR) a menudo se asocia con tres heurísticas o principios heurísticos que guían el diseño instruccional (Gravemeijer, 2020):

- Heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes: Se centra en el uso de modelos que surgen naturalmente a medida que los estudiantes interactúan con las situaciones matemáticas.
- Heurística del diseño instruccional de la actividad-efecto: Enfatiza la conexión entre la actividad que realiza un estudiante y los efectos resultantes, promoviendo la reflexión y la construcción activa del conocimiento.
- Heurística del diseño instruccional de las metas: Se refiere a establecer metas claras para los estudiantes, proporcionando un propósito y dirección para sus esfuerzos de aprendizaje.

Según Cárcamo et al. (2023) tanto la relación actividad-efecto como la heurística del diseño instruccional que permite surgir los modelos emergentes, son enfoques “cognitivos que se interesan por reconstruir el pensamiento del estudiante cuando construye un cierto contenido matemático” (p. 78). Según estos autores:

> La heurística del diseño instruccional de los modelos emergentes es una de las tres heurísticas del diseño instruccional con las que se puede caracterizar la teoría de la Educación Matemática Realista. Esta busca crear trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) que permitan a los estudiantes desarrollar *modelos-de* actividad matemática informal que luego se conviertan en *modelos-para* su razonamiento matemático más sofisticado. Para la progresión de un *modelo-de* actividad matemática informal a un *modelo-para* el razonamiento matemático formal, Gravemeijer establece cuatro niveles de actividad: situacional (interpretación y solución del problema contextual en un escenario particular), referencial (involucra modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que abordan el problema de la actividad situacional), general (involucra exploración, reflexión y generalización de lo que se vio en el nivel anterior, pero con un enfoque matemático en la estrategia y sin hacer referencia al problema inicial), y formal (involucra trabajar con métodos y notaciones convencionales). (p. 79)

En este sentido, el desarrollo del concepto de derivada a partir de la razón promedio de cambio tendrá la siguiente trayectoria hipotética de aprendizaje:

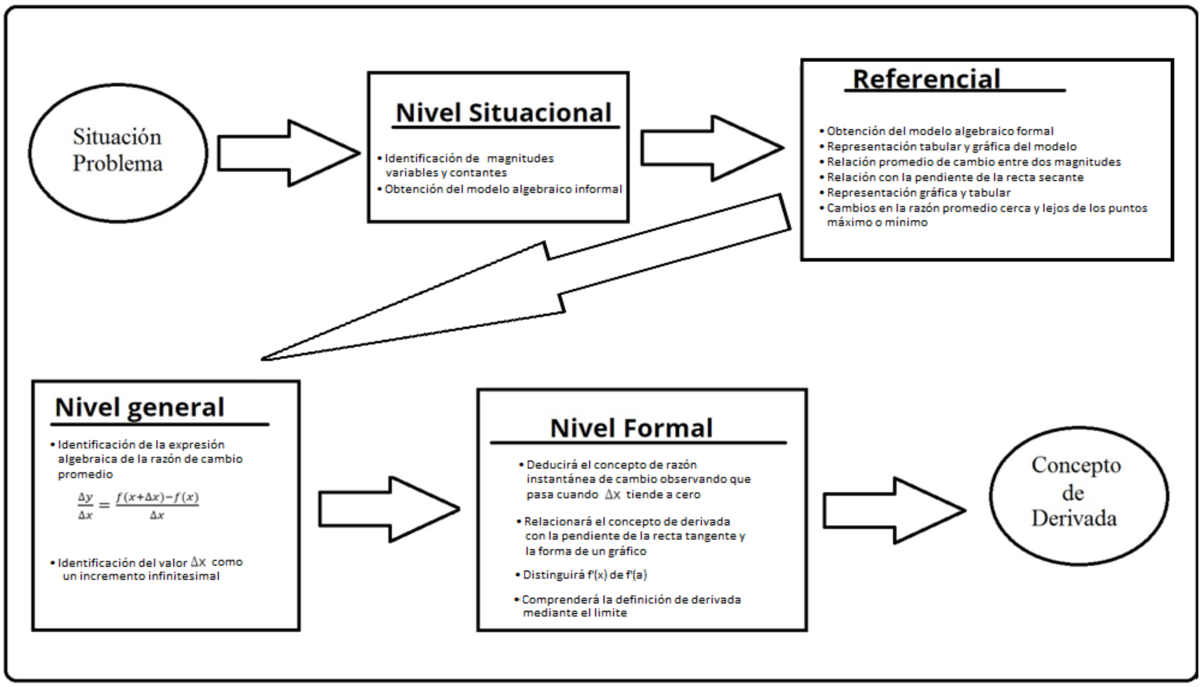
- **En el nivel situacional**. Se inicia con la situación problema contextualizada que permita a los estudiantes identificar las magnitudes involucradas en el fenómeno, cuáles son constantes y cuáles varían. Se busca que el estudiante interprete la situación problema apoyándose en sus conocimientos previos y pueda identificar cómo se relacionan dos magnitudes. Se encausará a que obtenga (de manera informal o formal) el modelo de esta relación (*modelo-de*) y que restrinja el dominio a valores prácticos relacionados con la situación problema.
- **En el nivel referencial**. Se busca que el estudiante se acerque al modelo algebraico que relaciona las variables y que obtenga la representación tabular y gráfica del modelo, distinguiendo cada componente de un punto (x, y) en relación con el fenómeno que se está modelando. Además, se espera que emplee la razón promedio de cambio como una proporción o tasa de cambio entre dos magnitudes, midiendo cómo cambia una magnitud cuando se modifica la otra. El estudiante relacionará este concepto con la pendiente de la recta secante, que ya posee tanto algebraica como gráficamente. También establecerá una conexión entre una pendiente positiva, negativa o nula y la forma del gráfico que modela el fenómeno. Asimismo, observará que el valor de la pendiente de la recta secante disminuye conforme dos puntos consecutivos se acercan al valor máximo (o mínimo) del modelo gráfico.
- **En el nivel general**. Identificará la razón promedio de cambio obtenida mediante la expresión $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ y comprenderá el concepto de Δx como un incremento infinitesimal entre dos cantidades dependientes, desvinculadas de la situación problema. Se calculará la razón promedio de

cambio en intervalos muy pequeños, lo que permitirá deducir la variación instantánea de cambio.

- **En el nivel formal**. Entenderá el concepto de razón instantánea de cambio como una función que se obtiene cuando Δx tiende a cero, relacionándola con su representación mediante el concepto de límite. Además, comprenderá que el valor óptimo se obtiene cuando esta función se iguala a cero. Finalmente, relacionará el concepto de derivada con la pendiente de la recta tangente, la forma de un gráfico y distinguirá entre $f'(a)$ y $f'(x)$.

Figura 5.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la derivada de acuerdo con los niveles de la EMR.



7 LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

La aproximación a la derivada mediante la tasa de variación promedio está relacionada con diversos contextos: el físico, como la velocidad promedio de cambio; el gráfico, como la pendiente de la recta secante; y el numérico, donde el valor de la pendiente disminuye al acercarse al óptimo (máximo o mínimo). Por lo tanto, es crucial incorporar en la secuencia didáctica al menos un Applet de Geogebra que permita visualizar la relación entre las magnitudes variantes del fenómeno de estudio.

Con este Applet, se espera que el estudiante pueda percibir cómo cambia la magnitud dependiente al variar la magnitud independiente y con esto pueda representar esta relación mediante una expresión algebraica, que puede ser en un principio errónea. Está aproximación deberá modificarse en una expresión correcta, mediante las interacciones con sus compañeros y con el docente. Se propone un segundo Applet, ya sea construido con Geogebra o Excel, para calcular valores tabulares de las magnitudes dependiente e independiente utilizando la expresión algebraica que modela la situación problema. Además, este Applet debe posibilitar la obtención de su representación gráfica. Un tercer Applet de Geogebra debería permitir visualizar la razón promedio entre las magnitudes variantes como la proporción $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, con la capacidad de manipular tanto el valor de Δy como el de Δx para observar cómo cambia la pendiente.

Asimismo, se sugiere un cuarto Applet de Geogebra que relacione la razón promedio (obtenida anteriormente) con la pendiente de la recta secante, brindando la posibilidad de ubicar a la secante en cualquier sección de la representación gráfica para observar cómo decrece el valor de la pendiente al aproximarse al óptimo (máximo o mínimo). Un quinto Applet deberá permitir observar cómo la recta secante se convierte en recta tangente al acercar dos puntos. Finalmente, se propone un sexto Applet que permita observar la recta tangente y su valor a lo largo de la representación gráfica.

Cómo también se quiere incluir la representación numérica de la razón de cambio se sugiere trabajar con Geogebra (vista tabular) o Excel con al menos dos recursos: el primero que permita calcular la razón de cambio en puntos consecutivos para observar como los valores decrecen al acercarse al valor óptimo y, además, observar que si su valor cambia de positivo a negativo se tiene un máximo y si cambia de negativo a positivo se tiene un mínimo como valor óptimo.

El segundo recurso dinámico que se puede elaborar en Geogebra (vista tabular) o Excel, debe permitir calcular la razón promedio para dos valores que puedan aproximarse tanto como se quiera, para introducir la noción de Δx como una aproximación infinitamente pequeña.

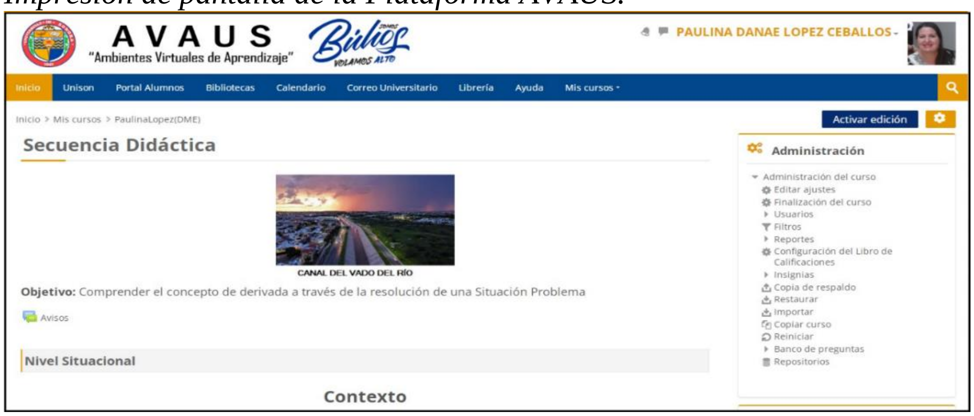
Para ejemplificar la propuesta de una secuencia didáctica, utilizaremos como situación problema la construcción de un canal de agua con volumen óptimo. Esta propuesta consta de seis tareas o fases: una para contextualizar la situación problema, otra para el nivel situacional, dos para el nivel referencial, una quinta para el nivel general y la sexta en relación con el nivel formal de acuerdo a la Teoría de la Educación Matemática Realista. Las fases incluyen foros, manipulación de Applets y evaluación de los aprendizajes. Algunas fases también incorporan trabajo con lápiz y papel que los estudiantes realizan en sus cuadernos y luego suben a la plataforma.

Cada fase tiene una intencionalidad de acuerdo al nivel correspondiente en la Teoría de la Educación Matemática Realista y a la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje del concepto de derivada. Además, las fases cuentan con actividades de inicio, generalmente en forma de foros, que permiten ubicar a los alumnos en los conceptos que se requiere hayan quedado interiorizados para avanzar. Actividades de desarrollo, que incluyen la manipulación de Applets y respuestas en foros, así como las actividades de cierre, conformadas por evaluaciones.

La secuencia didáctica estará alojada en una plataforma Moodle de creación *ad hoc*. Sin embargo, mientras se desarrolla, se estará utilizando la plataforma AVAUS (Ambientes Virtuales de Aprendizaje de la Universidad de Sonora | https://ntic.uson.mx/avaus2/) para alojar, construir, probar y modificar las secuencias didácticas que se vayan diseñado (ver Figura 6).

Figura 6.

Impresión de pantalla de la Plataforma AVAUS.



La cabecera de la plataforma incluye, para este ejemplo, una fotografía del Canal del Vado del Río en Hermosillo, Sonora (ver Figuras 6 y 7). Este canal, de forma trapezoidal, está ubicado en el Centro del Gobierno de la localidad, y se ha seleccionado con la intención de presentarles a los estudiantes un contexto familiar.

Las seis actividades de la secuencia didáctica se describen a detalle a continuación. Iniciando con los objetivos de acuerdo a lo que marca la EMR. Al final de cada actividad se incluye un cuadro que lista la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de la derivada, contextualizada para el problema de optimización del canal de agua y relacionada al nivel correspondiente.

En la Actividad 1 se plantea el contexto del cual surge la problemática de optimización, con el objetivo de que los estudiantes puedan imaginar la situación problema. También se incluye una imagen de las distintas formas de los canales (ver Figura 8), para que puedan responder el Foro 1.

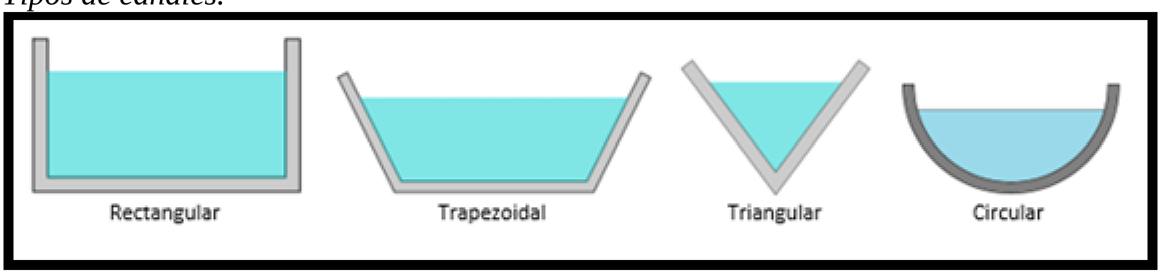
Figura 7.
Canal del Vado del Rio en Hermosillo, Sonora.

NOTA: Imagen tomada del sitio www.construplan.com.mx

Actividad 1. Contexto

Los canales se han diseñado a lo largo de la historia para transportar líquido, principalmente agua. Derivado de los asentamientos humanos se han construido edificios y casas en sitios donde corren ríos o riachuelos, y en época de lluvias fuertes el agua tomará ese camino, inundando los bienes inmuebles que se ubican en su trayecto, esta es una razón por la que se construyen canales. Un ejemplo de esto, es el canal del Vado del Rio, el cual tiene el objetivo de conducir el agua en épocas de lluvia para que no inunde los edificios del centro de gobierno, en Hermosillo, Sonora.

Figura 8.
Tipos de canales.



- Foro 1. Formas de los canales. ¿Cuál de las formas anteriores utilizarías para construir un canal, tomando en cuenta que se desea maximizar el volumen de agua transportado? Argumenta tu respuesta.

Actividad 2. Nivel situacional

Objetivos

i) Se busca que el estudiante interprete la situación problema apoyándose en sus conocimientos previos (cálculo de áreas y volumen, ideas intuitivas de los canales hidráulicos, reconocimiento de magnitudes variables y magnitudes constantes).

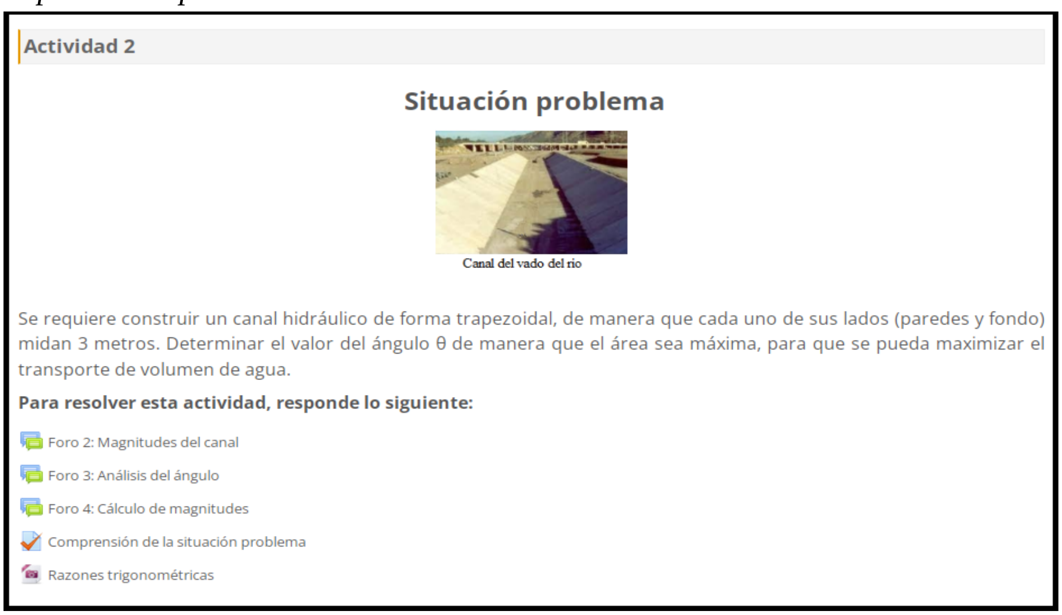
ii) Se espera que plantee ideas intuitivas e informales sobre la variación del área con relación a la variación del ángulo, a través de la observación, la exploración y la manipulación en Geogebra.

Se plantea la situación problema de forma escrita: Se requiere construir un canal hidráulico de forma trapezoidal, de manera que cada uno de sus lados (paredes y fondo) midan 3 metros. Determinar el valor del ángulo θ de manera que el área sea máxima, para que se pueda maximizar el transporte de volumen de agua (ver Figura 9).

Para identificar las variables se plantea el Foro 2. Magnitudes del canal, donde se incluyen dos actividades: 1) Realiza un bosquejo del canal en tu cuaderno y señala en el dibujo las magnitudes que varían y las magnitudes constantes (que no varían) y súbelo a la plataforma. Y 2) En el problema presentado se quiere maximizar el volumen de agua que puede contener un canal de forma trapezoidal, ¿cuál sería la explicación por la que, maximizar el área permite maximizar el volumen?

Figura 9.

Impresión de pantalla de la Actividad 2.



Después se plantea el Foro 3. Análisis del ángulo, donde cada estudiante deberá manipular el Applet Geogebra #1 (ver Figura 17) para que visualice cómo cambia la forma del canal trapezoidal cuando se modifica el ángulo. Una vez que se da tiempo para manipular el Applet, deberá responder las siguientes preguntas: 1) ¿Qué puedes decir respecto a la posibilidad de construcción de un canal con forma trapezoidal, con base en los datos del problema?, ¿es siempre posible construirlo? Y 2) Identifica los valores mínimo y máximo que puede tomar el ángulo para formar el canal, argumenta tu respuesta.

En el Foro 4. Cálculo de magnitudes, se solicitará responder lo siguiente: 1) La variación en el ángulo ¿tiene alguna implicación en la medida del área? De ser así, describe esta relación de manera detallada. Y 2) Calcula el área que tendría el canal de agua si el ángulo toma los valores de 45° y 60°. Finalmente se sugiere evaluar los conocimientos desarrollados con un cuestionario mostrado en la tabla 1.

Tabla 1.
Cuestionario final de la Actividad 2.

Cuestionario. Comprensión de la situación problema
1. Con base en tu dibujo, los datos que proporciona el problema y la manipulación del Applet Geogebra #1 responde: ¿Qué datos se necesitan para poder calcular el área del canal de agua (área del trapecio)? 2. ¿Entre que valores del ángulo te parece lógico construir el canal? 3. Al mover el ángulo del Applet Geogebra #1 su valor aumenta y disminuye. Observa el valor del área (coloreada en azul) y responde: Siempre que aumento el valor del ángulo el valor del área...

Como en el Nivel Situacional, el estudiante debe interpretar la situación problema apoyándose en sus conocimientos previos, se plantea el Foro 1. En este nivel, además, se espera que, en este nivel, el estudiante plantee producciones intuitivas e informales que le permitan matematizar la situación problema, esto se propone en el Foro 2. Para la aproximación informal de la expresión que modela el problema del canal, se plantea el Foro 3. Los foros tienen la intensión de que las producciones de todos los usuarios estén disponibles para su consulta en cualquier momento.

Si la plataforma se utilizará como auxiliar didáctico en un curso presencial de Cálculo Diferencial e Integral, se propone que, se realice una discusión grupal, cada vez que se termine el tiempo destinado a responder el foro, para rescatar los elementos y conceptos necesarios para el transitar al siguiente nivel.

Si la secuencia se trabaja en línea, de manera personal, el administrador de la página, estará revisando constantemente los comentarios en los foros para retroalimentar de forma individual las producciones de los alumnos que utilicen la plataforma.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el nivel situacional, se detalla a continuación en la Tabla 2.

Tabla 2.
THA para el Nivel situacional.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de la Derivada: Nivel situacional
a. El estudiante identifica las magnitudes variables y constantes en el problema. b. Observa que distintos valores de ángulos modifican el área de la figura trapezoidal y que esta figura tiene un intervalo que la acota. c. Proporciona de manera informal la expresión algebraica que modela el problema.

Actividad 3. Nivel Referencial

Objetivos

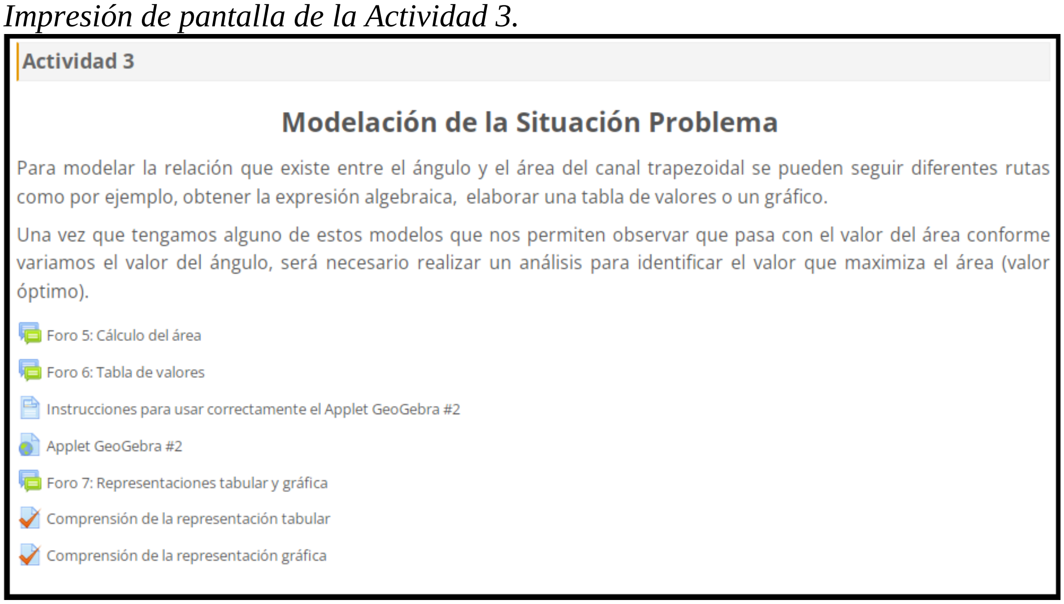
iii) Se busca que el estudiante se aproxime al modelo del canal trapezoidal probando sus aproximaciones y verificando lo que supone.

iv) Se espera que modifique sus razonamientos mediante las interacciones con otros compañeros y con la ayuda del docente.

Para ayudar al estudiante a entender la modelación de una situación problema, en la introducción de la Actividad 3 se expresa lo siguiente: Para modelar la relación que existe entre el ángulo y el área del canal trapezoidal se pueden seguir diferentes rutas como, por ejemplo, obtener la expresión algebraica, elaborar una tabla de valores o un gráfico.

Una vez que tengamos alguno de estos modelos que nos permiten observar que pasa con el valor del área conforme variamos el valor del ángulo, será necesario realizar un análisis para identificar el valor que maximiza el área (valor óptimo) (ver Figura 10).

Figura 10.
Impresión de pantalla de la Actividad 3.



En el Foro 5. Cálculo del área, se pregunta: ¿Cómo se puede calcular el área del trapecio que modela el canal si el ángulo es una magnitud variable? También se cree conveniente que se les proporcionen las identidades trigonométricas plasmadas en el dibujo del canal de agua para guiarlos en la solución (ver Figura 9, parte final). Una vez que tengan su modelo, que puede ser una aproximación, se les pedirá que calculen, en el Foro 6. Tabla de valores, los valores de 23°, 38°, 63° y 78°, utilizando su expresión algebraica. Así ellos pueden probar su aproximación.

Además, como los resultados obtenidos, van a estar en un foro, los estudiantes podrán visualizar lo que compartieron otros compañeros (o usuarios) para verificar si su expresión algebraica es correcta o no. Las respuestas de sus compañeros (o usuarios) podrán ser vistas una vez que se han subido la respuesta al foro (condición que permite establecer el foro). Así no pueden basarse en las respuestas de sus compañeros para dar la suya.

Posteriormente, los alumnos deberán manipular el Applet Geogebra #2, que incluye la vista tabular y gráfica (ver Figura 17).

Para focalizar la visualización de las representaciones tabular y gráfica se propone introducir el Foro 7. Representaciones tabular y gráfica, donde se proponen las siguientes preguntas: 1) Si seleccionamos un punto (x, y) de la gráfica, ¿qué representa el valor x y qué representa el valor y con relación al problema que estamos modelando? Y 2) La relación que identificaste entre el ángulo y el área en la evaluación anterior (punto número tres de la Tabla 1), ¿se corresponde con lo observado en el Applet Geogebra #2? Explica ampliamente.

Se recomienda que las discusiones grupales de estos foros, en clase presencial, se focalicen hacia la obtención de la expresión algebraica que modela el problema [(6 + 6*cosθ)*(1.5*senθ)], así como a su representación gráfica y tabular y la relación entre estas, observando un valor máximo entre todos los valores tabulares del dominio. Finalmente, se propone cerrar la sección con dos evaluaciones, una para la comprensión tabular y otra para la comprensión gráfica (ver Tabla 3).

Tabla 3.

Cuestionarios finales de la Actividad 3.

Cuestionario. Comprensión de la representación tabular
1. Como observaste en la tabla de datos, cuando el ángulo vale 0° el área vale cero. ¿Qué interpretación le podemos dar a esto en el problema del canal de agua? 2. Toma un valor de ángulo al inicio de la tabla y comienza a aumentarlo ¿El valor del área siempre aumenta? 3. ¿Cuál "parece" que es el valor del ángulo que nos da un área máxima? 4. ¿Cómo podemos estar seguros que el valor del ángulo que "suponemos" que produce el área máxima es el correcto?
Cuestionario. Comprensión de la representación gráfica
1. La gráfica que vemos es de puntos ¿Significa que entre un punto y otro no hay valores?

2. En este ejemplo del canal del agua, el valor de ángulo óptimo es el que produce el área máxima. ¿Por qué el gráfico da información respecto a que este problema tiene un valor máximo y no un valor mínimo? Argumenta tu respuesta.

Actividad 4. Nivel Referencial (continuación)

Para introducir la razón promedio de cambio, se propone que al inicio de la Actividad 4 se comience con la siguiente información escrita (ver Figura 11): Hasta este momento, hemos identificado o determinado la función que modela el área del canal. Además, hemos analizado valores que podrían ser el valor óptimo. Mediante la razón promedio de cambio, realizaremos un análisis más profundo de la gráfica de la función para verificar si la hipótesis del valor máximo es correcta.

Figura 11.
Impresión de pantalla de la Actividad 4.

Para comenzar esta sección, se propone que el estudiante visualice la razón promedio de cambio como la proporción $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con el Applet Geogebra #3 (ver Figura 17). Además, se sugiere que el estudiante pueda visualizar que esta proporción es la pendiente de la recta secante con el Applet Geogebra #4 (ver Figura 17).

Se sugiere utilizar un foro, el Foro 8. Comportamiento gráfico de la razón promedio de cambio, para que el estudiante pueda evaluar sus conjeturas, al leer los comentarios de sus compañeros (o usuarios).

Las preguntas que se proponen en este foro son: 1) Al seleccionar pares de puntos antes del "posible máximo" ¿Observaste algún cambio en la razón promedio? De ser así descríbelo ampliamente. 2) ¿Observaste algún cambio en la razón promedio de pares de puntos después del "posible máximo"? De ser así descríbelo ampliamente. 3) Realiza un bosquejo de la gráfica en tu cuaderno, donde se refleje cómo cambia la razón promedio a lo largo de la curva y compártelo en el foro. 4) ¿Encuentras una relación entre la razón promedio de cambio y la forma de la curva? De ser así describe lo mejor posible. Y 5) ¿Qué relación hay entre la razón media de cambio y la recta secante?

Con estas preguntas, se busca dirigir la atención hacia el comportamiento de la pendiente: Observando que comienza con un valor positivo que disminuye a medida que se acerca al valor máximo. Posteriormente, al pasar este valor máximo, la pendiente se vuelve cada vez más negativa. Este patrón indica que la curva experimenta un crecimiento inicial seguido de un decrecimiento, lo que implica que tiene un valor máximo.

Como también se debe trabajar con la representación numérica, se sugiere introducir un Foro 9: Comportamiento numérico de la razón promedio de cambio. Aquí se puede utilizar la Hoja Electrónica #1 (ver Figura 17), para que cada estudiante calcule la razón promedio de cambio entre dos valores consecutivos con $\Delta x = 1$.

Una vez que haya realizado el cálculo, se sugiere que responda las siguientes preguntas: 1) En el contexto del problema ¿qué interpretación le puedes dar a la razón promedio de cambio? 2) Analiza los valores obtenidos de la razón promedio de cambio en la Hoja Electrónica #1, anteriores al "posible máximo" y describe cuál es su comportamiento. 3) Analiza los valores de la razón promedio de cambio, posteriores al "posible máximo" y describe cómo es su comportamiento. Y 4) ¿Se corresponden las descripciones de las preguntas anteriores con lo observado en la gráfica?

En el Foro 10. Identificación del valor máximo. Se propone el trabajo con una Hoja Electrónica #2 (ver Figura 17), donde los estudiantes coloquen un valor de ángulo arbitrario, dentro del dominio ya establecido, en una celda. Luego determinan un valor de Δx que puede ser 0.0.1, 0.001, 0.0001, 0.00001,…. Para obtener el valor de la pendiente en ese ángulo.

Las preguntas pensadas para un Foro 10, son: A partir del análisis realizado sobre la gráfica y la hoja electronica anteriores, responde lo siguiente: 1) ¿Cómo la razón promedio de cambio permitiría encontrar el área máxima del canal? Y 2) Apóyate en la Hoja electrónica #2, realizando varias pruebas según las instrucciones que vienen ahí y responde. 2.1) ¿Para qué valor del ángulo la razón promedio se aproxima a cero? 2.2) En la gráfica ¿dónde se ubica ese valor? Y 2.3) ¿Este valor es el que resuelve el problema? Argumenta ampliamente tu respuesta.

Para finalizar la Actividad 4 se propone incluir dos evaluaciones como se describen en la Tabla 4.

Tabla 4.

Cuestionarios finales de la Actividad 4.

Cuestionario. Evalúa tus conocimientos sobre la razón promedio de cambio
1. Si tomamos dos puntos que estén cerca de la cima del gráfico ¿Cómo es su razón promedio de cambio? 2. Si tomamos dos puntos que estén alejados de la cima del gráfico ¿Cómo es su razón promedio de cambio? 3. ¿Cuándo la razón promedio de cambio es negativa? 4. ¿Cuándo la razón promedio de cambio es positiva? 5. ¿Cuándo la razón promedio de cambio es casi cero?
Cuestionario. Comprensión de la representación gráfica
1. Ubica el signo de la razón promedio según la parte de la curva que corresponda (ver Figura 12) 2. Relaciona la forma de las siguientes curvas con su representación textual (ver Figura 13)

Como en el Nivel Referencial aparecen los modelos gráficos, las notaciones y procedimientos generados por los estudiantes y se esquematiza la situación problema agregamos el Foro 5. Además, en este nivel debe surgir el modelo del canal trapezoidal que se cubre con el Foro 6.

Por otro lado, en este nivel, se busca introducir la razón promedio de cambio para encontrar el valor del ángulo que maximiza el área, por lo que se elaboraron los Applet de Geogebra #3 y #4 y las Hojas de Cálculo #1 y #2. Con esto se puede cubrir el trabajo con las representaciones gráficas y numéricas. Los Foros #9 y #10, permitirían probar las aproximaciones y verificar los supuestos que ayuden a modifican los razonamientos de los usuarios de la plataforma. Se recomienda que, si el trabajo es en clase, el docente conduzca el foco de atención hacia los cambios de valor en la pendiente de la recta secante y su relación con la forma del gráfico.

Figura 12.

Cuestionario. Comprensión de la representación gráfica. Pregunta No.1

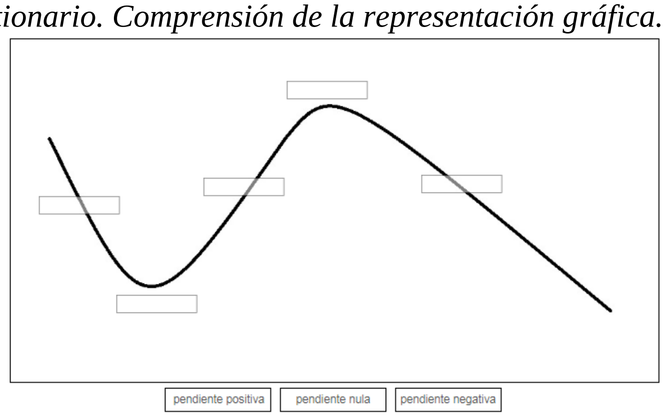
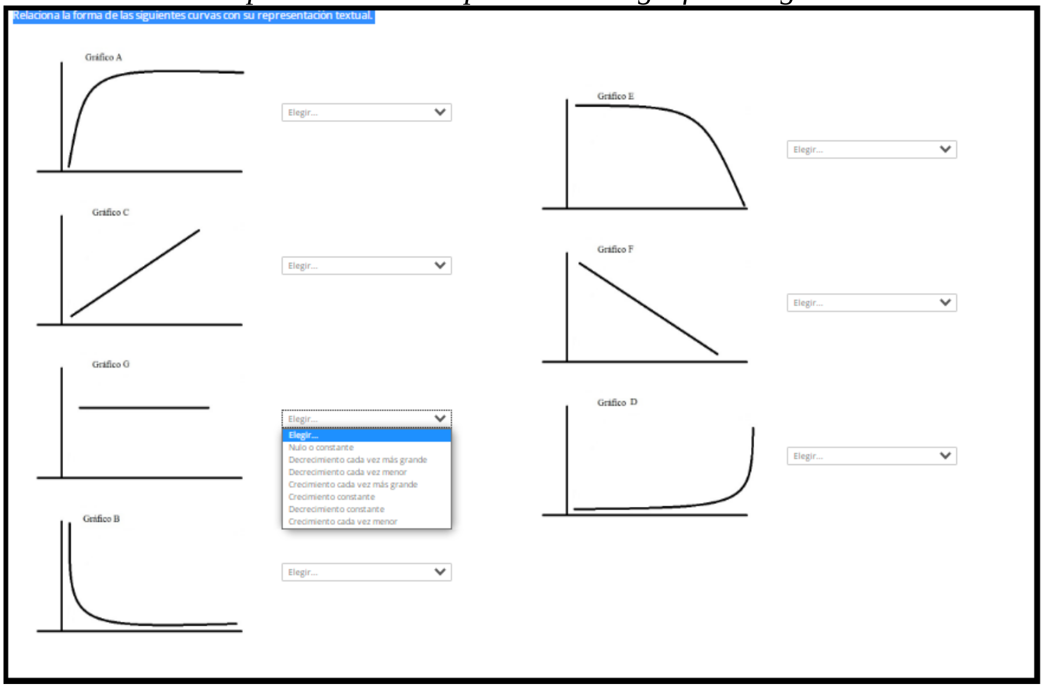


Figura 13.

Cuestionario. Comprensión de la representación gráfica. Peganta No. 2



La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el nivel referencial, se detalla en la Tabla 5.

Tabla 5.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el Nivel Referencial.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de la Derivada: Nivel referencial
a. El estudiante debe llegar a una expresión algebraica que permita obtener el área del trapecio, dado el valor de un ángulo. b. Observará y contrastará las representaciones: algebraica, gráfica y tabular del modelo que representa la situación problema. c. Proporcionará argumentos sobre cómo determinar el valor del ángulo que produce un área máxima. d. Relacionará la razón promedio de cambio con un valor que indica cuánto aumenta o disminuye el valor del área por unidad de cambio en el valor del ángulo. e. Relacionará la razón promedio de cambio con la pendiente de la recta secante. f. Relacionará la razón promedio de cambio con su representación tabular y verbal “valores que se hacen cada vez más pequeños al acercarse al valor máximo”. g. Relacionara la pendiente de la recta secante con la forma del gráfico.

Actividad 5. Nivel General

Objetivos

v) Se busca que el estudiante mediante la exploración y la reflexión llegue a generalizar el concepto de razón promedio de cambio para cualquier función continua que modela problemas de optimización, específicamente de valores máximos.

vi) Se espera que surja el modelo cognitivo que permite obtener la razón instantánea de cambio a partir de la razón promedio de cambio.

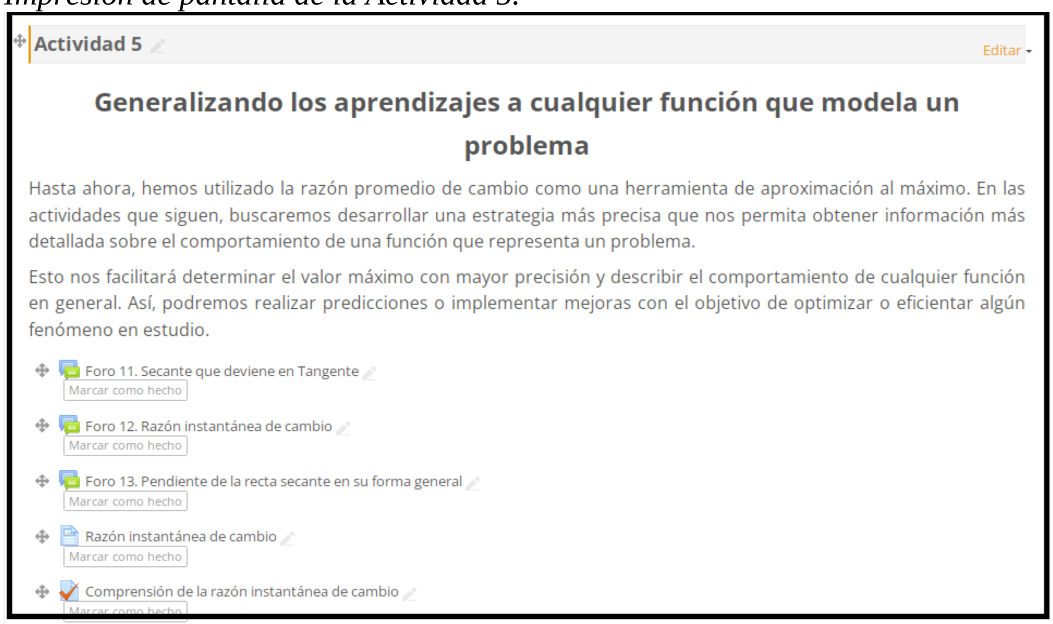
vii) Se espera que el estudiante tenga un primer acercamiento al criterio de la primera derivada para encontrar máximos.

Para poder generalizar la razón promedio de cambio, se propone que la Actividad 5 comience con la siguiente información escrita (ver Figura 14): Hasta ahora, hemos utilizado la razón promedio de cambio como una herramienta de aproximación al máximo. En las actividades que siguen, buscaremos desarrollar una estrategia más precisa que nos permita obtener información más detallada sobre el comportamiento de una función que representa un problema.

Esto nos facilitará determinar el valor máximo con mayor precisión y describir el comportamiento de cualquier función en general. Así, podremos realizar predicciones o implementar mejoras con el objetivo de optimizar o eficientar algún fenómeno en estudio.

Figura 14.

Impresión de pantalla de la Actividad 5.



En este nivel, de acuerdo a la EMR, se busca que el estudiante se desprenda de la situación problema y generalice los conceptos a cualquier función $f(x)$.

Por lo que se propone un Foro 11. Secante que deviene en Tangente. En este foro se sugiere la manipulación del Applet de Geogebra #5 (ver Figura 17), donde la recta secante se aproxime a la recta tangente al acercar el punto A al punto B (o el punto B al punto A). Una vez que el estudiante haya manipulado el Applet se proponen las siguientes preguntas: 1) Argumenta: ¿Qué ocurre con la recta secante cuando el punto A se aproxima al punto B? 2) Argumenta: ¿En qué momento las dos pendientes tendrían el mismo valor? Y 3) En ese punto (donde las dos pendientes tienen el mismo valor ¿estaríamos refiriéndonos a la razón promedio de cambio? si la respuesta es no ¿De qué razón de cambio estaríamos hablando?

La discusión del docente, si la plataforma se utiliza como auxiliar didáctico, debe enfocarse hacia la derivación de la secante en la tangente cuando la distancia entre los puntos A y B, simbolizada como Δx, se haga cada vez más pequeña.

Para complementar la representación gráfica con la representación numérica, se sugiere un Foro 12. Razón instantánea de cambio. Donde se trabaje con una Hoja Electrónica #3 (ver Figura 17) donde los estudiantes, a partir de una función dada, coloquen un valor de x, dentro del dominio establecido, en una celda. Luego determinen un valor de Δx que puede ser 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001,…. Para obtener el valor de la pendiente en ese punto.

Las preguntas sugeridas en este foro son: 1). Si se selecciona un valor de x que este dentro del dominio de la función $f(x)$. Y además se selecciona un Δx suficientemente pequeño, el valor de la pendiente en ese punto ¿es la pendiente de la recta secante o tangente? 2) Cambia el valor de Δx por otro más pequeño, obtén el valor de la pendiente en ese punto y responde ¿Este valor es la pendiente de la recta secante o tangente? 3) ¿Para qué valor de Δx la pendiente en el valor de x corresponde a la pendiente de la recta tangente? 4) ¿En qué valor de x la razón instantánea de cambio vale cero? Y 5) ¿Este valor es un mínimo o un máximo? Argumenta tu respuesta.

Una vez que han trabajado con la representación gráfica y numérica, se sugiere el trabajo con la representación algebraica. Por lo que, se propone un Foro 13. Pendiente de la recta secante en su forma genera. En este foro se espera que el estudiante pueda calcular la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ para cualquier función dada. Las preguntas que se proponen son: 1) Calcula la pendiente de la recta secante para la función: $f(x) = -x^2 + 4x + 4$, usando los valores de $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$. Calcula los valores de $y = f(x)$, es decir $f(3)$ y $f(5)$ para obtener los puntos (x_1, y_1) y $(x_{2,} y_2)$ y poder calcular la pendiente de la recta secante. 2) Calcula pendiente de la pendiente de la recta secante para la misma función $f(x) = -x^2 + 4x + 4$, pero ahora usa puntos arbitrarios muy cerca. Punto 1: $(x, f(x))$ y punto 2: $(x + \Delta x, f(x + \Delta x)$. Simplifica la expresión. Y 3) ¿Qué expresión obtienes cuando $\Delta x \to 0$?

Para verificar que los estudiantes hayan comprendido como la recta tangente se obtiene a partir de la recta secante cuando $\Delta x \to 0$, se sugiere incluir al final de esta sección un cuestionario de evaluación que se describe en la Tabla 6.

Tabla 6.

Cuestionario final de la Actividad 5.

Cuestionario. Evalúa tus conocimientos sobre la razón promedio de cambio
1. Explica ampliamente: ¿Cuál es la diferencia entre la razón promedio de cambio y la razón instantánea de cambio? 2. Explica ampliamente: ¿Cómo la razón instantánea de cambio permite encontrar valores máximos (o mínimos)?

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el nivel general, se detalla en la Tabla 7.

Tabla 7.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el Nivel General.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de la Derivada: Nivel referencial
a. Identificará la expresión algebraica de la razón promedio para cualquier función como $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ y la relacionará con la pendiente de la recta secante. b. Identificará que la expresión anterior deriva en tangente cuando el incremento se hace cada vez menor (infinitesimal). Cuando $\Delta x \to 0$. c. Comprenderá que la razón instantánea de cambio permite obtener el valor óptimo cuándo la pendiente de la recta tangente vale cero. d. Identificará los valores de la pendiente de la recta tangente en relación con la forma de la curva. Observando que en el máximo la pendiente es horizontal.

Actividad 6. Nivel Formal

Objetivos

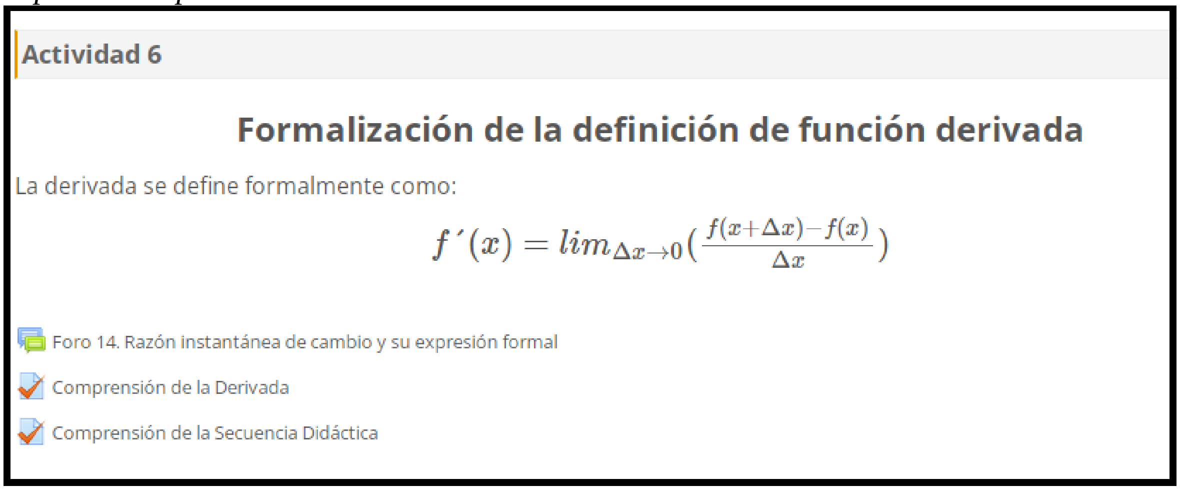
viii) Se busca que el estudiante interprete mediante notaciones general y convencionales a la derivada (usando el límite).

ix) Se busca que el estudiante comprenda el procedimiento de igualar a cero a la función derivada para obtener un valor máximo.

Para formalizar la razón instantánea de cambio mediante el límite, se sugiere comenzar la Actividad 6 con la definición de derivada, como usualmente se encuentra en los libros de texto, a partir del límite (ver Figura 15). Consideramos que, en este punto de la secuencia didáctica, el estudiante desarrollo bases cognitivas para identificar cada uno de los elementos de la expresión $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ y podría comprenderla con menos dificultad.

Figura 15.

Impresión de pantalla de la Actividad 6.



Un Foro 14. Razón instantánea de cambio y su expresión formal. Podría dirigirse a probar este supuesto, indicando: La razón instantánea de cambio o derivada se define formalmente como:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1) Explica cada uno de los elementos que están en esa expresión. Es decir, cómo se llega a esa expresión a partir de la razón promedio de cambio. 2) Manipula el Applet Geogebra #6 (ver Figura 17) y responde. ¿Cuál es la relación de la pendiente de la recta tangente con la forma de la curva? 3) ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente en el punto máximo? Y 4) Utiliza la definición anterior y determina el valor máximo de esta función $f(x) = -x^2 + 4x + 4$.

Para finalizar la sección y la secuencia didáctica, se propone incluir un cuestionario con las preguntas que se describe en la Tabla 8.

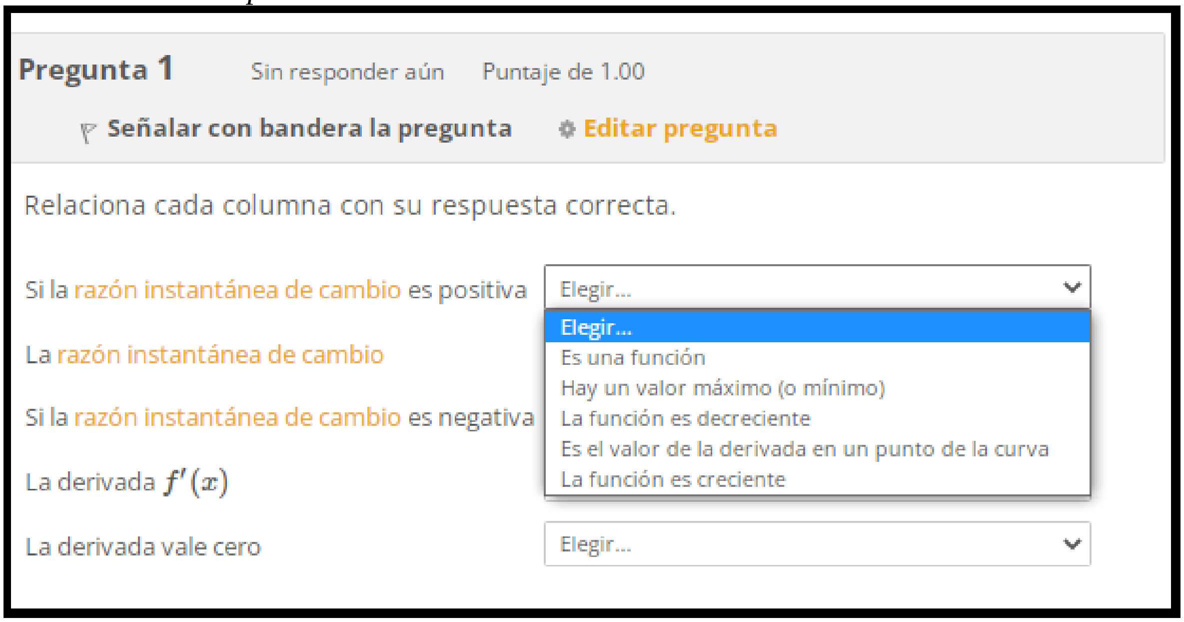
Tabla 8.

Cuestionario final de la Actividad 6.

Cuestionario. Evalúa tus conocimientos sobre la razón promedio y la razón instantánea de cambio
1. Relaciona cada columna con su respuesta correcta (ver Figura 16). 2. Explica ampliamente: ¿Qué es una razón promedio de cambio? 3. Explica ampliamente: ¿Cómo a partir de la razón promedio se llega a la razón instantánea de cambio? 4. Explica ampliamente: ¿Cómo la razón instantánea de cambio permite resolver problemas de optimización?

Figura 16.

Cuestionario. Comprensión de la Derivada



La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el nivel general, se detalla en la Tabla 9.

Tabla 9.

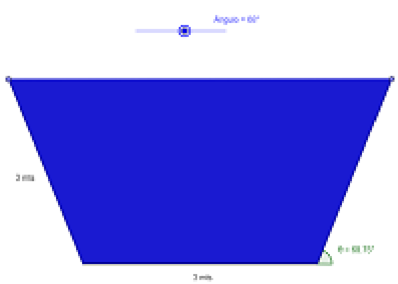
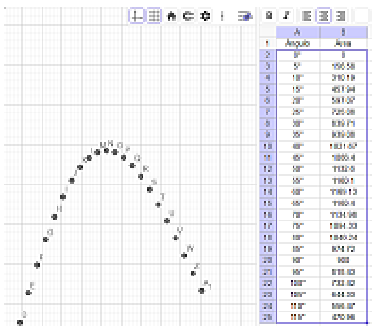
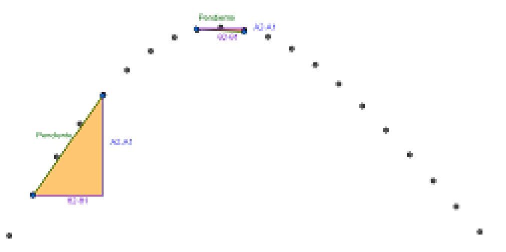
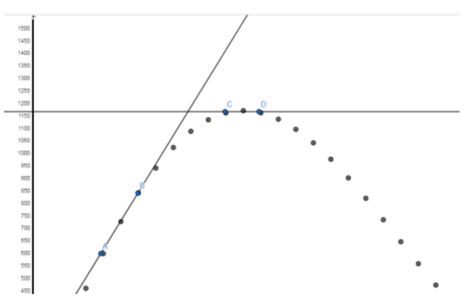
Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para el Nivel Formal.

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje de la Derivada: Nivel referencial
a. Generalizará la expresión de la razón promedio de cambio a la razón instantánea de cambio mediante el límite. $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ b. Identificará a la derivada como una herramienta para obtener valores máximos y mínimos.   c. Identificará a la derivada como una herramienta para resolver problemas de optimización.

En la Figura 17 se muestran los Applets de Geogebra elaborados para esta propuesta de secuencia didáctica, sobre la optimización de un canal de agua de forma trapezoidal.

Figura 17.

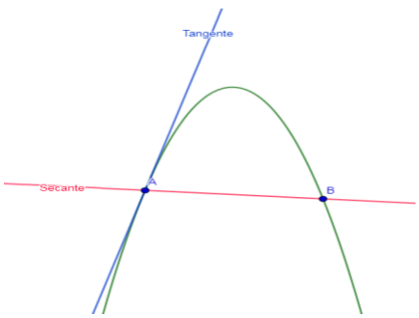
Tabla de resumen de los Applets de Geogebra y de la Hoja de Cálculo.

Tabla: Resumen de la secuencia didáctica en relación a la Teoría de la Educación Matemática Realista y las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje		
Applet de Geogebra 1 	**Nivel Situacional**	**THA** 1. Identificará las magnitudes variables y constantes en el problema. 2. Observará que distintos valores de ángulos modifican el área de la figura trapezoidal y que esta figura tiene un intervalo que la acota. 3. Proporcionará de manera informal la expresión algebraica que modela el problema.
Applet de Geogebra 2  **Applet de Geogebra 3**  **Applet de Geogebra 4** 	**Nivel Referencial**	THA 1. Obtendrá una expresión algebraica que permita calcular el área del trapecio, dado el valor de un ángulo. 2. Observará y contrastará las representaciones: algebraica, gráfica y tabular del modelo que representa la situación problema. 3. Proporcionará argumentos sobre cómo determinar el valor del ángulo que produce un área máxima. 4. Relacionará la razón promedio de cambio con un valor que indica cuánto aumenta o disminuye el valor del área por unidad de cambio en el valor del ángulo. 5. Relacionará la razón promedio de cambio con la pendiente de la recta secante. 6. Relacionará la razón promedio de cambio con su representación tabular y verbal. 7. Relacionará la pendiente de la recta secante con la forma del gráfico.

Hoja electrónica 1

A	B	C
DATOS DEL MODELO		
Ángulo	Área	Razón de cambio
0	0.0514	0.3548
1	0.4062	0.3492
2	0.7554	0.3436
3	1.099	0.338
4	1.437	0.3324
5	1.7694	0.3268
6	2.0962	0.3212
7	2.4174	0.3156
8	2.733	0.31
9	3.043	0.3044
10	3.3474	0.2988
11	3.6462	0.2932
12	3.9394	0.2876
13	4.227	0.282
14	4.509	0.2764
15	4.7854	0.2708
16	5.0562	0.2652
17	5.3214	0.2596
18	5.581	0.254
19	5.835	0.2484

Applet de Geogebra 5



Hoja electrónica 2

Coloque el valor que eligió en la celda azul (C8)
Si utiliza el signo positivo (en la aproximación) significa que se está aproximando con valores super
Si usa el signo negativo significa que se aproxima por valores inferiores

Ángulo	Aproximación	Ángulo cercano	Razón de cambio
20	-0.0001	19.9999	24.3600276

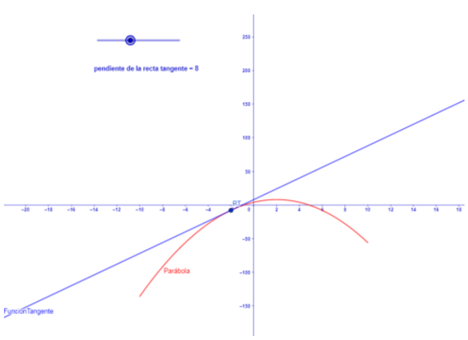
Observe a que valor se aproxima, es decir si pudieramos aproximarnos muchisimo ¿cuánto vale la
Está pendiente ya no puede ser la pendiente de la recta secante porque los puntos ya están tan cerca ur
¿La pendiente de que recta es?

Nivel General

THA

1. Identificará la expresión algebraica de la razón promedio para cualquier función como $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ y la relacionará con la pendiente de la recta secante.
2. Identificará que la expresión anterior deriva en tangente cuando el incremento Δx se hace cada vez menor.
3. Comprenderá que la razón instantánea de cambio permite obtener el valor óptimo cuándo la pendiente de la recta tangente vale cero.

Applet de Geogebra 6



Nivel formal

THA

1. Generalizará la expresión de la razón promedio de cambio a la razón instantánea de cambio mediante el límite. $f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
2. Identificará a la derivada como una herramienta para obtener valores máximos y mínimos.
3. Identificará a la derivada como una herramienta para resolver problemas de optimización.

8 CRONOGRAMA

La siguiente tabla presenta las acciones que se proponen llevar a cabo en los dos años siguientes.

Semestre	Curso	Actividades
2024-1	Tesis I (diseño)	✓ Visitar docentes de Ingeniería para identificar áreas donde se utiliza el concepto de derivada. ✓ Diseño de una secuencia didáctica en el área de Ciencias Biológicas
2024-2	Tesis II (implementación)	✓ Estancia ✓ Revisar con el profesor receptor el diseño de la secuencia didáctica del área de Ciencias Biológicas ✓ Rediseño de Applets y elaboración de nuevas herramientas. ✓ Implementar el diseño a distancia.
2025-1	Tesis III (análisis)	✓ Análisis de la implementación. ✓ Revisión y reestructuración de la secuencia didáctica y los Applets. ✓ Diseño de una secuencia didáctica en el área de Ingeniería en materiales.
2025-2	Tesis IV (reporte)	✓ Prueba de las secuencias en línea. ✓ Diseño de tutoriales para la versión en línea. ✓ Escritura de la tesis.

La prueba de cada una de las secuencias didácticas se contempla de tres formas:

1. **Prueba presencial**. En un aula de clase, con el uso del celular, o en un centro de cómputo donde los estudiantes realicen las actividades en la plataforma cada día, con el docente presente.
2. **Semipresencial**. Utilizando la plataforma como auxiliar didáctico en un curso, de modo que los estudiantes realicen las actividades de la plataforma fuera del horario de clase. El docente que imparte la materia les brindará seguimiento y resolverá sus dudas en clase, a través de los foros o con mensajes privados dentro de la plataforma.
3. **En línea**. Seleccionando aleatoriamente a algunos alumnos que estén cursando la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral, sin la participación del docente que imparte la clase. El administrador de la plataforma les brindará seguimiento

y resolverá sus dudas, evaluando si el uso de la plataforma benefició a los estudiantes a través de su calificación final del curso.

9 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alemany, D. (2007). Blended learning: modelo virtual-presencial de aprendizaje y su aplicación en entornos educativos. En R. Roig-Vila, S. Mengual-Andrés y F. Pastor (Ed.) I Congreso Internacional Escuela y TIC, IV Fórum Novadors: Más allá del Software Libre. Universidad de Alicante. ISBN 978-84-690-6871-7. https://bit.ly/2EonlcL

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. XIII Simposio de la SEIEM. Acta 13. pp. 119-128. ISBN: 978-84-8102-548-4. https://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-AngelAlsina.pdf

Apostol, T. (1990). Calculus I. Editorial Reverté, 840 páginas. Edición e-book 2019. ISBN-10-8429150021. Edición original en lengua inglesa publicado por Blaisdell Publishing Company.

Ariza, A. y Llinares, S. (2009). Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económicos en estudiantes de bachillerato y universidad. Enseñanza de las Ciencias 27(1), pp. 121-136. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3667

Artal J., Casanova O., Serrano R. & Romero E. (2017). Dispositivos móviles y Flipped Classroom. Una experiencia multidisciplinaria del profesorado universitario. EDUTEC: Revista electrónica de Tecnología Educativa. Número 59 ISSN 1135-9250. Obtenido de: http://www.edutec.es/revista/index.php/edutec-e/article/download/817/425

Artigue, M., Douady, R., Moreno L. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Gómez P. (Editor). Grupo Editorial Iberoamérica, México D. F. https://www.researchgate.net/profile/Pedro-Gomez-11/publication/277733635_Ingenieria_didactica_en_educacion_matematica/links/559e491308ae76bed0bb8948/Ingenieria-didactica-en-educacion-matematica.pdf#page=41

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E.y Schwingendorf, K. (2001). The development of students' graphical understanding of the derivative. The Journal of Mathematical Behavior, 16 (4), pp. 399-431. ISSN 0732-3123. https://people.math.wisc.edu/~rwilson/Courses/Math903/APOS-Overview.pdf

Azcárate, C. (1990). La velocidad: introducción a la derivada [Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona]. Barcelona, España.

Azcárate, C., Casadelvall, M., Casellas, E., y Bosch, E. (1996). Cálculo diferencial e integral. Editorial Sintesis, ISBN-10 847738357X ISBN-13 978-8477383574

Azevedo, R. (2005). Computer environments as metacognitive tools for enhancing learning. Educational Psychologist, 40, 193-197

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanzay aprendizaje en profesores de matemática de colombia [Tesis doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona]. TDX: Tesis doctorales en Xarxa. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4702/erbj1de4.pdf

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f´(A) y f´(x) de profesores de matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 29(2). pp. 191-206. https://ensciencias.uab.cat/article/view/v29-n2-badillo-azcarate-font/546-pdf-es

Baker, B., Cooley, L. y Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. Journal for Research in Mathematics Education, 31(5), pp. 557-578. https://doi.org/10.2307/749887

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas: El Trabajo de Allan Schoenfeld. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 1(1). https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6971/6657

Barreto, H., Caro J.P. (2012). Estudio de las variaciones y covariaciones proporcionales de las funciones polinómicas hasta cuarto grado, como estrategia didáctica para la enseñanza del

concepto de derivada a partir de razones de cambio correlacionadas [Tesis de Licenciatura]. Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central. Código FOR020GIB p.76.
Biasutti, M. (2017). A comparative analysis of forums and wikis as tools for online collaborative learning. Computers & Education, 111, pp. 158-171. ISSN 0360-1315. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360131517300787?via%3Dihub
Boneu, J. (2007). Plataformas abiertas de e-learning para el soporte de contenidos educativos abiertos. Educational Technology in Higer Education, 4(1), pp.36-47. http://dx.doi.org/10.7238/rusc.v4i1.298
Bonilla, D. y Díaz, J. (2014). Una propuesta didáctica para la comprensión de la función derivada en secundaria desde la TAD. RECHIEM. Revista Chilena de Educación Matemática, 8(1), pp. 79-85.
Bressan, A.M., Zolkower, B. y Gallego, M.F. (2004). La educación matemática realista. Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.
Bressan, A. (2005). Los principios de la educación matemática realista. https://educrea.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-matematica-realista.pdf
Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). Educación Matemática Realista Bases teóricas. https://documen.site/download/educacion-matematica-realista-bases-teoricas_pdf
Brown, R. (2015). La evaluación auténtica: El uso de la evaluación para ayudar a los estudiantes a aprender. RELIEVE. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa, 21(2), pp. 1-10. https://www.redalyc.org/pdf/916/91643847007.pdf
Cabanillas, J., Veríssimo, S. y Luengo, R. (2020). Contraste en la percepción sobre el uso de una plataforma virtual para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologias de Informação, 38, pp. 33-47. DOI: 10.17013/risti.38.33–47
Cabero, J. (2006). Bases pedagógicas del e-learning. RRUSC. Universities and Knowledge Society Journal, 3(1), pp.1-10. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=78030102
Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. Innovación Educativa [en línea], 9(46), pp. 15-25. http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf
Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. Mathesis, 11 (1), pp. 55 –101.
Cantoral, R., Farfán, R.M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez R.A. y Garza, A. (2000). Desarrollo del pensamiento Matemático. Editorial Trillas: ITESM, 225 p. ISBN 968-24-7203-2
Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 6(1), pp. 27-40. ISSN 1665-2436
Cantoral, R.y Farfán, R. (2004). Desarrollo conceptual del cálculo. Thomson. https://www.researchgate.net/profile/Ricardo-Cantoral/publication/261363638_Desarrollo_conceptual_del_calculo/links/5542db5d0cf23ff716837942/Desarrollo-conceptual-del-calculo.pdf
Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F. Alanís, J. Rodríguez R. y Garza A. (2005). Desarrollo del pensamiento matemático. Editorial Trillas, ITESM, Universidad Virtual. 225 páginas. ISBN 968-24-7203-2. https://www.researchgate.net/profile/Rosa-Farfan/publication/261363590_Desarrollo_del_pensamiento_matematico/links/58e2b14baca2722505d16462/Desarrollo-del-pensamiento-matematico.pdf
Cárcamo, A., Fortuny, J. y Fuentealba, C. (2023). Identificando una progresión de aprendizaje para un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones. Formación Universitaria, 16(1), pp. 77-86. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062023000100077
Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., John, D. S., ... & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? The Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 345-364.
Cortés Cortés, M., Cortés Iglesias, M., Medina, J., Manzano, M., y León, J. (2020). Ventajas de la plataforma Moodle para la enseñanza de las matemáticas en la universidad de Cienfuegos.

Revista Universidad y Sociedad, 12(6), pp. 240-245. http://scielo.sld.cu/pdf/rus/v12n6/2218-3620-rus-12-06-240.pdf

Da, N. (2022). Designing a teaching model based on the Realistic Mathematics Education (RME) approach and its application in teaching calculus. Journal of Mathematics and Science Teacher, 2(1), em006. https://doi.org/10.29333/mathsciteacher/11918

Dado, M. y Bodemer, D. (2017). A review of methodological applications of social network analysis in computer-supported collaborative learning. Educational Research Review, 22, pp. 159-180. https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.08.005

D'Amore, B. y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10(2), pp. 191-218. http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v10n2/v10n2a1.pdf

Dávila, M. T., (2010). La Derivada a partir de la Resolución de Problemas de Optimización en ambientes creados con Geogebra [Tesis de maestría, Universidad de Sonora]. Repositorio Institucional Unison. http://148.225.114.121/bitstream/unison/885/1/davilaaraizamariateresam.pdf

Dolores, C. (1999). Una introducción a la derivada a través de la variación. Grupo Editorial Iberoamérica. México

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. El futuro del cálculo infinitesimal, pp. 155-181.

Dolores, C. (2007b) Elementos para una aproximación variacional a la derivada. México: Universidad Autónoma de Guerrero y Ediciones Díaz de Santos, 2007b.

Dolores, C. (2009). Usos de las gráficas y sus representaciones en el aprendizaje de las Matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20 (pp. 499- 503). Camagüey, Cuba: Clame

Faulkner, B., Johnson-Glauch, N.San Choi, D. y Herman, G.(2019). When am I ever going to use this? An investigation of thecalculus content of core engineering courses. *Journal of Engineering Education 109(3*), pp. 347-615. DOI: 10.1002/jee.20344402

Flores, R., Valencia, M., Dávila, G. y García, M. (2008). Fundamentos del Cálculo. Publicado por Editorial GARABATOS, Proyecto FOMIX CONACYT, Gobierno del Estado Clave: SON-2004-C02-008. ISBN: 970-9920-18-5 Tiraje: 1000 ejemplares. http://148.225.114.121/bitstream/unison/885/1/davilaaraizamariateresam.pdf

Font, V. (1999) Procediments per obtenir expressions simboliques a partir de grafiques. Aplicacions a les derivades [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona]. https://www.researchgate.net/publication/279462148_Procediments_per_obtenir_expressions_simboliques_a_partir_de_grafiques_aplicacions_a_les_derivades/references#fullTextFileContent

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En Maz, Alexander; Gómez, Bernardo; Torralbo, Manuel (Eds.), Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM. pp. 111-128.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education: China Lectures. *Kluwer Academic Publishers*, *9*. Editorial Board. eBook ISBN 0-306-47202-3. 200 páginas. https://p4mriunismuh.files.wordpress.com/2010/08/revisiting-mathematics-education.pdf

Gamboa, R. (2007). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de las Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemáticas, 2(3),* pp. 11-44. https://core.ac.uk/download/pdf/333874981.pdf

Garcés, W. (2021). *Criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería en el Perú: el caso de la derivada* [Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona]. diposit.ub.edu. https://www.tesisenred.net/handle/10803/673794

Gómez, P. y Lupiáñez, J.L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista dela Universidad de Granada, 1(2)*, pp. 79-98. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6214

Gonçalves, D., da Silva, F. (2013). Atividades investigativas de aplicações das derivadas utilizando o GeoGebra. Bolema*: Boletim de Educação Matemática*, *27(46)*, pp. 417-432.

Gravemeijer, K. P. E., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies, 32(6)*, pp. 777-796. https://doi.org/10.1080/00220270050167170

Gravemeijer, K. (2020). Emergent Modeling: an RME Design Heuristic Elaborated in a Series of Examples. Educational Designer, 4(13), pp.1-31. ttp://www.educationaldesigner.org/ed/volume4/issue13/article50/

Gravina, M. y Santarosa, L (1998): A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. IV Congreso RIBIE, Brasilia. http://www.niee.ufrgs.br/eventos/RIBIE/1998/pdf/com_pos_dem/117.pdf

Henn, H. (2007). Modelling pedagogy—Overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, &M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study(pp. 321–324). New York: Springer.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Fou-Lai Lin (Eds.). Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education (pp. 1- 43). Taiwan: National Taiwan Normal University

Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. En: Lerman, S. (eds). Encyclopedia of Mathematics Education, Springer, pp. 521-525. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_170

Hitier, M. y González, A. (2022). Derivatives and the Study of Motion at the Intersection of Calculus and Mechanics: a Praxeological Analysis of Practices at the College Level. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. 8*, pp. 293–317.

Hitt, F. (2016). El Aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *Encuentro Internacional en Educación Matemática 8(1)*, pp. 6-15. ISSN 2539-1885. E-ISSN 2462-8794.

Jiménez, J., Grijalva, A., Milner, F., Dávila, M. y Romero, C. (2022). *Reconceptualización didáctica del Cálculo*. Editorial de la Universidad de Sonora. ISBN: 978-607-518-508-8. https://doi.org/10.47807/UNISON.201. 429 páginas.

Juárez, J., Chamoso, J. y González M. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias, 38(3)*, pp. 161-178. ISSN (digital) 2174-6486. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041

Kinley, (2016). Grade Twelve Students Establishing the Relationship Between Differentiation and Integration in Calculus Using graphs. *IEJME-Mathematics Education, 11(9)*, pp. 3371-3385.

Kramarsky, B. y Gutman, M. (2006). How can self-regulated learning be supported in mathematical E-learning environments? *Journal of Computer Assisted Learning, 22*, pp. 24-33. https://www.researchgate.net/publication/229783715_How_can_self-regulated_learning_be_supported_in_mathematical_E-learning_environments

Kristanto, Y. (2021). Pelatihan Desain Aktivitas Pembelajaran Matematika Digital dengan Menggunakan Desmos. *Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat, 27*, pp. 192-199, doi: 10.24114/jpkm.v27i3.23908.

Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1990). Brief Calculus with Applications. Alternate Third Edition. D.C. Heath and Company. ISBN:0-669-21763-8. 648 páginas.

Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *The International Journal on Mathematics Education, 42(1)*. pp. 105-119. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-009-0225-1

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press. ISBN 970-613-182-5, 7ed. 1,360 páginas. https://www.academia.edu/10288710/Libro_Calculo_Louis_Leithold_Septima_Edicion

Martínez, J. (1978). *La actividad manual y mental en el aprendizaje de las matemáticas elementales* [Tesis de licenciatura, Universidad de Monterrey]. Archivo digital. https://repositorio.udem.edu.mx/bitstream/61000/2062/1/33409000522759.pdf

Milner F. A. y Jiménez, J.R. (2020). Grupo de Trabajo: Contrastes Didácticos entre Cálculo y Análisis. *Psychology of Mathematics Education-Northern American Chapter (42nd)*, pp. 171-174. ISBN: 978-1-7348057-0-3. https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Molina, S. (2007). *Los grupos interactivos: Una práctica de las comunidades de aprendizaje para la inclusión del alumnado con discapacidad* [tesis doctoral, Universitat de Barcelona]. TDX.CAT. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/31986/SMR_TESIS.pdf

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Relime, 8(2)*, pp. 219-235.

Oliveira, A. M. P., & Barbosa, J. C. (2013). Mathematical modelling, mathematical content andtensions in discourses. *In G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum, & J. P. Brown (Eds.), Teachingmathematical modelling: Connecting to research and practice*, pp. 67–76. Dordrecht: Springer.

Ortega, M., Puig, L. y Albarracín, L. (2019). *The Influence of Technology on the Mathematical Modelling of Physical Phenomena*. DOI: 10.1007/978-3-030-14931-4_9.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: Algunas indicaciones para su enseñanza. Revista interuniversitaria de formación del profesorado V.12(2), ISSN 0213-8646, ISSN-e 2530-3791, Nº 32, págs. 87-115

Pineda, C. (2013). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de la derivada en el último grado de educación secundaria. [Tesis Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio #75064.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2018). Un modelo de acercamiento local y global de la derivada en pro de superar el obstáculo de su comprensión. Acta latinoamericana de Matemática Educativa 31(2), pp. 070-1076

Ponte, J. (2014). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Repositorio.ul.pt. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310

Ramírez, E. (2009). Historia y epistemología de la función derivada. 4o Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias. *Tecné, Episteme y Didaxis: TEΔ No. Extraordinario*, pp. 157-162.

Rojas, Y., Padilla, I., Consuegra, S., Ortega, T, Rivera, L. y Rocha, Y. (2021). Obstáculos epistemológicos y cognitivos en el aprendizaje del cálculo diferencial: Una mirada sobre los casos de límites especiales. *Revista Boletín Redipe, 10(6)*, pp. 229-244. https://doi.org/10.36260/rbr.v10i6.1321

Romero, D., Quiñonez, M. y del Castillo, A. (2021). Intervención didáctica para el aprendizaje de números complejos en modalidad virtual. *Sahuarus 5(1)*. pp.112-126. https://sahuarus.unison.mx/index.php/sahuarus/article/view/111/116

Ruiz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana De Educación, 47(3)*, pp. 1-8. https://doi.org/10.35362/rie4732348

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. Relime, 12(3), p. 359. https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 11(2), 267-296. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005&lng=es&tlng=es.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. BOLEMA (Boletim de Educação Matemática), 27(45), 281-302. https://www.scielo.br/j/bolema/a/CXvNzWc3FZTz9s834C5p3xp/?format=pdf&lang=es

Sánchez, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII*, pp. 41-53. Salamanca: SEIEM.

SEP (2022). *Puntos centrales del Plan de Estudios para la educación preescolar, primaria y secundaria.* Consejo Técnico Escolar y Taller Intensivo de Formación Continua para Docentes, Primera Sesión Ordinaria. https://educacionbasica.sep.gob.mx/wp-content/uploads/2023/03/Puntos-centrales-del-Plan-de-Estudio.pdf

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, *25*, pp. 59-84.

Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: Los Estándares del NCTM a la luz de las Teorías del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista EMA 2001, 6(*2), pp. 95-140. http://funes.uniandes.edu.co/1125/1/73_Sfard2001Equilibrar_RevEMA.pdf

Silva, J. y Borges, N. (1994). *Questões básicas do ensino de cálculo*. Artículo científico. Laboratorio de Investigación Multimedia de la Facultad de Educación de la Universidad Federal de Ceará. http://www.multimeios.ufc.br/archivals/pc/artigos/artigo-questoes-basicas-do-ensino-de-calculo.pdf

Silva, J. y Gros, B. (2023). Una propuesta para el análisis de interacciones en un espacio virtual de aprendizaje para la formación continua de los docentes. *Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información 8 (1)*, pp. 81-103. ISSN 1138-9737.

Simon, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26(2)*, pp. 114-145. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.26.2.0114

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2)*, pp. 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a Mechanism for Conceptual Learning: Elaborating the Construct of Reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35(5)*, pp. 305–329. https://doi.org/10.2307/30034818

Soto, J., Del Castillo, A. (2016). Actividades Didácticas para Profesores de Matemáticas, usando Tecnología. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Capítulo 5/Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. http://funes.uniandes.edu.co/11883/1/Soto2016Actividades.pdf

Stein, M., Smith, M. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), pp. 268-275.

Stillman, G. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education—Lines of Inquiry. In: Stillman, G., Brown, J. (eds) *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1

Sulasmi, S. Sampoerno, P. y Noornia, A. (2020). Development of learning using Indonesian realistic mathematics education approach to build students' relational understanding of derivative. The 7th South East Asia Design Research International Conference (SEADRIC 2019). IOP Conf. Series: *Journal of Physics: Conf. Series 1470-012060*. IOP Publishing. Doi:10.1088/1742-6596/1470/1/012060

Tall, D. (1985a). Graphic Calculus, ABCo Ltd: London.

Tall, D. (1985b). Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics, Ph.D. Thesis in Education, Warwick.

Tall, D. (1986). A graphical approach to integration. Mathematics Teaching, 114, 48-51

Tall, D. (1987). Whither Calculus? Mathematics Teaching, 118, 50-54

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *In Focus on Learning Problems in Mathematics 12(3)*. Pp. 49-63

Tall, D. (1991). Real Functions & Graphs: SMP 16-19 (computer programs for theArchimedes computer), Cambridge University Press.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits,Infinity, and Proof, in Grouws D. A. (ed.) Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning, Macmillan, New York, 495–511.

Tall, D. (1996a). Advanced Mathematical Thinking. 10.1007/0-306-47203-1.

Tall, D. (1996b). Functions and Calculus. In: Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (eds) International Handbook of Mathematics Education. *Kluwer International Handbooks of Education, 4*. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_9

Tall, D. (2012). A Sensible approach to the Calculus. El cálculo y su enseñanza, 3(1), 81–128. https://doi.org/10.61174/recacym.v3i1.139

Treffers, A. (1987). Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction: The Wiskobas Project. Kluwer D. Reidel Pub Co: The Netherlands.

Vargas, A. y Guzmán, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Ciencias, 30(3), pp. 89-107

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.

Villa, J., Sánchez, C. y Parra, M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática. En Rodríguez, Mabel; Pochulu, Marcel David; Espinoza, Fabián (Eds.), *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, pp. 67-89. Argentina: Ediciones UNGS.

Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2009). *Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación*. Análisis de resultados.

Vrancken, S., y Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. Bolema: *Boletim de Educação Matemática*, *28(48)*, pp. 449-468. Doi: 10.1590/1980-4415v28n48a22

Watson, A., Ohtani, M. (2015). Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction. In: Watson, A., Ohtani, M. (eds) Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_1

Zolkower, B. y Bressan, A. (2016). Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Pp. 175-200.

Zúñiga, L. (2007). El Cálculo en carreras de Ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [en línea],10(1)*, pp. 145-175. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500107