UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Propuesta de enseñanza con un enfoque de modelación matemática experimental para el estudio de la covariación

Documento predoctoral que presenta

ERIK MORALES MERCADO

Directores de Tesis:
Dr. José David Zaldívar Rojas
Dr. César Fabián Romero Félix

Hermosillo, Sonora Noviembre, 2023

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (Conahcyt) por el apoyo que ha brindado para mi formación, con número de CVU 828621

Contenido

1 INTRODUCCIÓN

Los enfoques de enseñanza en los cursos de Cálculo demandan una constante revisión y actualización, con el objetivo de resolver los problemas contemporáneos que se presentan en diferentes contextos. Se deben de centrar en promover la resolución de problemas, con el fin de vincular la educación escolar con la formación ciudadana y profesional de los estudiantes. Este proyecto está dirigido a escuelas de Educación Media Superior (EMS) en el contexto mexicano, reconociendo las necesidades y desafíos actuales que demanda la sociedad.

El documento inicia con un breve desarrollo histórico del cálculo, destacando las contribuciones de cuatro personajes trascendentales. Posteriormente, se realiza un análisis de los procesos de modelado llevados a cabo por estos actores, evidenciando la progresiva abstracción de la disciplina. Esta evolución abstracta ha generado algunas dificultades al introducir el cálculo de manera formal y abstracta en el entorno educativo.

En el año 2023, se implementa un rediseño del marco curricular común de educación media superior, orientado hacia la resolución de problemas comunitarios. Entre las alternativas consideradas para abordar estos desafíos se destaca el uso de la modelación matemática. Sin embargo, se reconoce que una implementación deficiente puede acarrear obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos.

Se identifica la ruptura del cálculo con la modelación matemática y experimentación de fenómenos físicos como una fuente crucial de dificultades en su enseñanza. El propósito del presente trabajo es reintegrar estas estrategias fundamentales que dieron origen al cálculo.

En este proyecto específico, se propone un diseño de enseñanza centrado en la modelación matemática, con el objetivo de abordar la variación cuya segunda razón de cambio instantánea es constante, dentro de un curso de Cálculo Diferencial para escuelas de educación media superior. La experimentación en contextos de Física se presenta como una herramienta clave para alcanzar este fin.

Para lograr este objetivo, se adopta la perspectiva de modelos y modelación, de la cual se derivan actividades diseñadas para favorecer la generación de modelos. Estas actividades se basan en principios específicos de diseño, centrándose en la manipulación de objetos físicos para generar covariaciones entre magnitudes variables.

2 Antecedentes

En esta sección se realiza un breve viaje a lo largo de la historia del Cálculo, destacando las contribuciones de cuatro figuras fundamentales en su desarrollo. Galileo, pionero en el estudio del movimiento, allanó el camino para comprender las leyes fundamentales que rigen el cambio en la naturaleza. Newton y Leibniz, figuras icónicas que emergieron simultáneamente, se erigieron como los arquitectos clave del Cálculo, dando forma y estructura a esta importante rama de las matemáticas. Sus aportes revolucionarios proporcionaron las herramientas esenciales para abordar problemas complejos relacionados con el cambio y la acumulación, sentando las bases de lo que hoy conocemos como Cálculo. El viaje histórico culmina con Cauchy y sus contemporáneos, quienes llevaron el Cálculo a nuevas alturas al formalizar de manera abstracta sus elementos, dando origen al Análisis Matemático como una disciplina independiente.

A continuación, nos sumergimos en el modelo educativo que enmarca el proyecto de intervención. En 2023, este proyecto se fusiona con la Nueva Escuela Mexicana (NEM), marcando un cambio significativo en la forma en que se enseñan las matemáticas. La transición desde una visión fragmentada del conocimiento, dividida por disciplinas, hacia una enseñanza basada en actividades transversales y la resolución de problemas comunitarios representa una evolución esencial en la educación matemática.

Finalmente, exploramos la relevancia de la modelación matemática en la resolución de problemas en contextos reales. Este enfoque no solo brinda una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos, sino que también conecta directamente la teoría con la práctica, equipando a los estudiantes con habilidades aplicables a situaciones del mundo real. En conjunto, esta sección destaca la evolución del Cálculo a lo largo del tiempo, la transformación del modelo educativo hacia un enfoque más integrado y la importancia de la modelación matemática en la resolución de problemas prácticos en la actualidad

2.1 Desarrollo Histórico y análisis de los procesos de modelado

El origen del cálculo se dio de la mano de la modelación matemática y la experimentación, iniciando con situaciones para modelar el movimiento. Desde los babilonios se pueden observar intentos por representar matemáticamente estos cambios. Para hacer visible esta relación, este proyecto se remite al trabajo de cuatro personajes que realizaron grandes aportes al desarrollo del cálculo.

Galileo Galilei (1564-1642)

Galileo realizaba una serie de experimentos, lo que hoy conocemos como modelación matemática para determinar las relaciones que existían entre las magnitudes variables (covariación). Con base en estas observaciones pudo determinar una serie de teoremas, los cuales representaba de manera gráfica. En algunos de ellos se puede mostrar la relación que existe en el movimiento uniforme de una partícula entre dos magnitudes variables, la velocidad y el tiempo, lo que se puede interpretar como el inicio del pensamiento variacional del cálculo.

A continuación, se presentan las representaciones que utilizaba para caracterizar la variación a velocidad constante, en las Figuras 2.1 y 2.2 se representa el movimiento de un cuerpo a una velocidad constante y se plantea la proporcionalidad de las magnitudes variables.

> TEOREMA I, PROPOSICIÓN I
>
> Si una partícula en movimiento, transportada uniformemente a una velocidad constante, recorre dos distancias, los intervalos de tiempo requeridos son entre sí como la proporción de estas distancias.

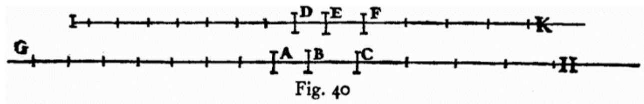


Figura 2.1 Teorema I, proposición I. Tomado de (Galilei, 1638, pág. 155)

> TEOREMA II, PROPOSICIÓN II
>
> Si una partícula en movimiento recorre dos distancias en intervalos de tiempo iguales, estas distancias guardarán entre sí la misma relación que las velocidades. Y a la inversa, si las distancias son como las velocidades, entonces los tiempos son iguales.

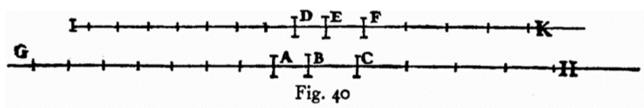


Figura 2.2 Teorema II, Proposición II. Tomado de (Galilei, 1638, pág. 157)

Una de las contribuciones más importantes de Galileo para el estudio de la variación fue la posición de un objeto en caída libre. En la Figura 2.3 se representa este movimiento, donde el tiempo está dado en la horizontal en intervalos iguales $bc, cd\ y\ de$, el intervalo ab es una velocidad constante (por lo general igual a cero) antes de iniciar la caída libre, y la posición está dada por los intervalos ci, df que es 4 veces mayor a la de ci, ef que es nueve veces mayor que ci y así sucesivamente.

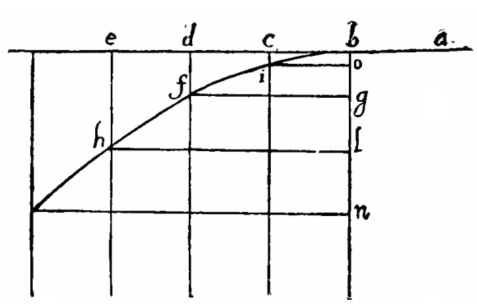


Fig. 108

Figura 2.3 Movimiento de un cuerpo en caída libre. Tomado de (Galilei, 1638, pág. 249)

Galileo pudo demostrar por medio de la experimentación y la representación gráfica que la caída de un cuerpo en caída libre no depende del peso del objeto, sino del tiempo transcurrido; además, clasifico algunos movimientos en: movimiento uniforme, uniformemente acelerado y movimiento de proyectiles. Su trabajo es de gran relevancia para el estudio de la variación y por consiguiente del Cálculo, el cual tuvo sustento en la modelación matemática.

Isaac Newton (1642-1727)

Newton en su trabajo *Principia: the mathematical principles of natural philosophy*, realizó estudios sobre el movimiento de objetos, definiendo algunas leyes (que hoy en día conocemos como las leyes de Newton). Entre otros conceptos, en el Libro 1 denominado El movimiento de los cuerpos realiza la modelación del movimiento de los objetos por medio de proposiciones y teoremas apoyado en representaciones gráficas, un ejemplo es la proposición IX, problema IV:

Si un cuerpo gira en una espiral PQS, cortando todos los radios SP, SQ, y así sucesivamente, en un ángulo dado, se requiere encontrar la ley de la fuerza centrípeta que tiende al centro de la espiral, como se muestra en la figura:

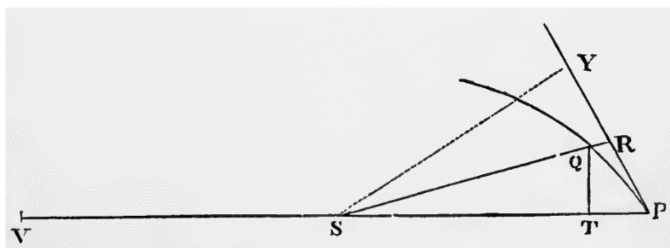


Figura 2.4 Ley de la fuerza centrípeta. Tomado de (Newton I. , 1846, pág. 113)

> Sea el ángulo indefinidamente pequeño PSQ dado; porque, entonces, dados todos los ángulos, se dará la figura $SPRQT$ en especia. Por lo tanto, también se da la relación $\frac{QT}{QR}$, y $\frac{QT^2}{QR}$ es como QT, es decir (porque la cifra se da en especias), como SP. Pero si el ángulo PSQ cambia de todos modos, la línea recta QR, subtendiendo el ángulo de contacto QPR (por el Lema IX) cambiará en la proporción duplicada de PR o QT. Por tanto, la relación $\frac{QT2}{QR}$ seguirá siendo la misma que antes, es decir, como SP. Y $\frac{QT^2xSP^2}{QR}$ es como SP^3, y por tanto (por Corolario 1 y 5, Proposición VI) la fuerza centrípeta es recíprocamente como el cubo de la distancia de SP. (Newton I. , 1846, pág. 113)

Después, en *The methods of fluxions* utiliza el método de fluxiones (lo que hoy conocemos como derivadas), el método inverso de las fluxiones y la relación entre las cuadraturas y las fluxiones. Considera cantidades variables que van cambiando con el tiempo, a las que denominó fluentes y representó con las letras: $x, y, z,$ ..., fluxiones a las razones de cambio instantáneas de las fluentes y fueron representadas con letras punteadas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z},$ ... y momentos, como un incremento infinitesimal en el tiempo con la letra o, de tal manera que los incrementos de las fluentes se representaron de la siguiente forma $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o,\ldots$ Los problemas que abordó fueron la determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas, curvaturas, entre otros.

El primer problema que planteó fue el siguiente:

Problema 1

Dándose la Relación de las Cantidades que Fluyen entre sí, para determinar la Relación de sus Fluxiones.

Solución.

> Definir la Ecuación, por la cual se expresa la relación dada, de acuerdo con las dimensiones de una de sus cantidades que fluyen, suponiendo x, y multiplicar sus términos por cualquier progresión aritmética, y luego por $\frac{\dot{x}}{x}$. Y realiza esta operación por separado para cada una de las Cantidades que fluyen. Luego haga que la Suma de todos los Productos sea igual a nada, y tendrás la ecuación requerida. (Newton I. , 1736, pág. 21)

En el primer ejemplo donde realiza cálculos con las fluentes y las fluxiones, se puede observar como un problema de derivación implícita, utilizando la siguiente curva:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Realizando las operaciones, primero se debe sustituir x por $(x + \dot{x}o)$ e y por $(y + \dot{y}o)$, se tiene:

$$(x + \dot{x}o)^{3} - a(x + \dot{x}o)^{2} + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

Desarrollando:

$$(x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(x^2 + 2\dot{x}xo + \dot{x}^2o^2) + a(xy + x\dot{y}o + \dot{x}o\dot{y} + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3)$$

Teniendo en cuenta que: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ nos queda:

$$(3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(2\dot{x}xo + \dot{x}^2o^2) + a(x\dot{y}o + \dot{x}o\dot{y} + \dot{x}\dot{y}o^2) - (3\dot{y}oy^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3)$$

Dividiendo todo entre o:

$$(3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}^2ox + \dot{x}^3o^2) - a(2\dot{x}x + \dot{x}^2o) + a(x\dot{y} + \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{y}o) - (3\dot{y}y^2 + 3\dot{y}^2oy + \dot{y}^3o^2)$$

Despreciando los términos que contengan o:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2$$

Newton llega a la siguiente conclusión:

> La suma de los productos es $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2$, cuya ecuación da la relación entre las fluxiones x y. Porque, si tomas x a tu antojo, la Ecuación $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ le dará y, el cual siendo determinado será $x : y :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$. (Newton I. , 1736)

Gottfried Leibniz (1646-1716)

Leibniz realizó una modelación matemática en la que definió una curva s como un polígono de lados infinitos de longitud infinitesimal Figura 2.5, con la cual se asociaba una sucesión de abscisas $x_1, x_{2,}\, x_3, x_4$ ... y una sucesión de ordenadas $y_1, y_{2,}\, y_3, y_4$ ... y llamó vértices del polígono a las parejas (x_i, y_i) que se encuentran todos en la curva. Nombró a los diferenciales como la diferencia entre dos valores sucesivos (ya sea de x o de y) y se representa como dx, dy, siendo estas una cantidad fija, no nula e infinitamente pequeña en relación con x o y, de tal manera que se puede construir un triángulo si los lados del polígono se representan con el diferencial de ds al que se denomina triangulo característico de Leibniz.

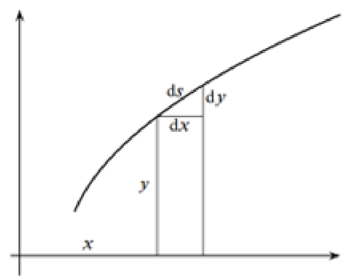


Figura 2.5 Triángulo característico de Leibniz. Tomado de (Suarez, 2008, pág. 43)

Se puede observar que en el triángulo característico de Leibniz se cumple el teorema de Pitágoras quedando $ds^2 = dx^2 + dy^2$. "El lado ds sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de dicha tangente viene dada por $\frac{dy}{dx}$, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó cociente diferencial. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite." (Suarez, 2008, pág. 13)

Leibniz determino las reglas para diferenciar productos y cocientes:

$$d(xy) = ydx + xdy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy sentó las bases del análisis matemático, separando al cálculo de la geometría, éste se basa en el desarrollo del límite, introduce la derivada y la integral desde el punto de vista analítico, tal y como se realiza actualmente.

Primero, diferenció entre número, cantidad y magnitud; al primero lo define en el sentido aritmético, como una medida absoluta de magnitudes, a la cantidad como el valor precedido del signo (más y menos) y, por último, a la magnitud como la comparación de dos medidas, es decir, se puede operar con ellas y se puede establecer un orden con ellas. Después definió a la cantidad variable como aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes y le asignó las últimas letras del abecedario para representarlas.

Después estableció las nociones de cantidad variable y constante, para definir el límite de la siguiente manera:

> Cuando los valores sucesivos atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acabará por diferir de éste tan poco como se quiera, este último se llamará el límite de todos los demás. Así por ejemplo un número irracional es el límite de diversas fracciones que dan valores cada vez más próximos de él. En geometría, la superficie del círculo es el límite hacia el cual convergen las superficies de los polígonos inscritos, mientras que el número de sus lados crece cada vez más (Cauchy, 1821/1994).

Luego realiza algunas consideraciones generales sobre las funciones, definiendo como las cantidades variables se relacionan, dando origen a la variable dependiente y la variable independiente, define las funciones simples que resultan de una sola operación sobre la variable, y a las funciones compuestas como aquellas que resultan de varias operaciones compuestas.

En su capítulo 2 define las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes de la siguiente manera:

> Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera a converger hacia al límite cero… y una cantidad variable deviene infinitamente grande cuando su valor numérico crece indefinidamente de manera a converger hacia el límite ∞. (Cauchy, 1821/1994)
>
> Como ejemplo de una cantidad infinitamente pequeña se tiene a la sucesión de valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$
>
> Un ejemplo de una cantidad infinitamente grande es la sucesión de valores $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ (Cauchy, 1821/1994)

Cauchy realiza una clasificación de las funciones en:

- Función explícita
- Función implícita
- Función simple
- Función compuesta
- Funciones de funciones
- Funciones algebraicas
- Función exponencial o logarítmica
- Función racional
- Función entera
- Función fraccionaria
- Función lineal
- Funciones trigonométricas o circulares

En la segunda parte de su libro Cauchy aborda las derivadas de funciones en una sola variable y la define de la siguiente manera:

> Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable x y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la razón de las diferencias
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$$
>
> serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultánea al límite cero, la razón misma podrá converger a un límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x (Cauchy, 1821/1994).

2.1.1 Análisis de los procesos de modelado de Galileo, Newton, Leibniz y Cauchy

Al realizar un análisis a los estudios de Galileo, Newton, Leibniz y Cauchy utilizando el ciclo de modelación de Lesh y Doerr, con el fin de hacer visible la transición entre las etapas en las que basaron sus contribuciones al desarrollo del Cálculo o del Análisis Matemático, se obtuvieron los siguientes esquemas:

La Figura 2.6 ilustra claramente el enfoque metodológico de Galileo en sus experimentos. Lo interesante es que Galileo seguía un ciclo completo en sus investigaciones. Iniciaba su proceso partiendo de una situación real concreta, específicamente el movimiento de objetos en este contexto. A continuación, Galileo aplicaba una habilidad distintiva al construir un modelo matemático que capturara y representara los aspectos esenciales de esa situación real. Este proceso de matematización es crucial, ya que permite traducir fenómenos del mundo real en términos matemáticos, proporcionando una base sólida para el análisis y la predicción.

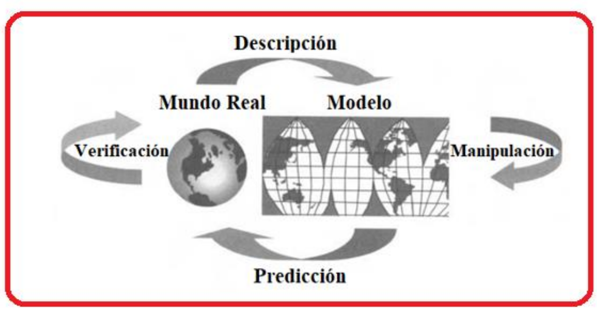


Figura 2.6 Análisis de las etapas del proceso de modelado de Galileo Galilei. Adaptado de (Lesh & Doerr, 2003, pág. 17)

La representación gráfica, como se observa en la figura, probablemente desempeñaba un papel esencial en la comunicación y comprensión de los resultados de sus modelos. Los gráficos son herramientas poderosas para visualizar relaciones y patrones, lo que facilita la interpretación y la comunicación efectiva de los hallazgos. Finalmente, Galileo cerraba el ciclo comprobando sus resultados en la situación inicial. Esta validación experimental le permitía contrastar la predicción de su modelo con la realidad observada, cerrando así el círculo entre la teoría matemática y la práctica observacional.

Este enfoque cíclico demuestra la capacidad de Galileo para integrar la teoría matemática con la experimentación práctica, un principio fundamental en la metodología científica. Este ciclo continuo de observación, modelización, representación gráfica y validación experimental contribuyó significativamente a la comprensión del movimiento y sentó las bases para el desarrollo posterior del Cálculo y la física moderna.

La Figura 2.7 nos ofrece una visión del método utilizado por Newton en sus investigaciones, específicamente en su estudio de los cuerpos celestes. Newton adoptaba un enfoque sistemático que se alineaba con la naturaleza abstracta y matemática de sus contribuciones al Cálculo. En el proceso de Newton, todo comenzaba con el estudio de un modelo del mundo real, en este caso, los fluentes o los cuerpos celestes. Este modelo servía como la base empírica para su investigación, proporcionándole datos y fenómenos observados en la realidad.

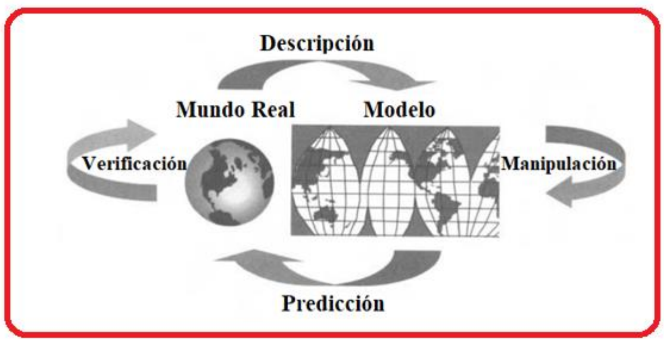


Figura 2.7 Análisis de las etapas del proceso de Modelado de Isaac Newton. Adaptado de (Lesh & Doerr, 2003, pág. 17)

Luego, Newton realizaba una abstracción de las magnitudes variables involucradas en el modelo. La abstracción es un paso crucial que implica aislar y representar matemáticamente las variables relevantes del sistema. Esta transformación permitía a Newton trabajar con conceptos más generales y abstractos. A continuación, Newton operaba con estas magnitudes variables abstractas, aplicando los principios del Cálculo para derivar resultados matemáticos. Esta fase involucraba la manipulación algebraica y el uso de sus innovadoras técnicas de cálculo, lo que le permitía obtener soluciones y entender las relaciones fundamentales. Finalmente, Newton cerraba el ciclo comparando los resultados matemáticos obtenidos con el modelo del mundo real inicial. Esta fase de comparación validaba la utilidad y la aplicabilidad de sus teorías, asegurando que las abstracciones matemáticas coincidieran con los fenómenos observados en la realidad.

En resumen, Newton seguía un proceso lógico que iba desde la observación y abstracción de la realidad, hasta la manipulación matemática y la validación experimental. Este método demostró ser esencial en la formulación de leyes fundamentales de la física y contribuyó significativamente al desarrollo del Cálculo.

La Figura 2.8 nos ofrece una perspectiva del enfoque de Leibniz en sus investigaciones, específicamente en su estudio de las curvas. A diferencia de algunos de sus contemporáneos, Leibniz adoptaba un punto de partida diferente, centrándose inicialmente en el modelo matemático. En el proceso de Leibniz, su investigación comenzaba con el estudio de una curva, un objeto matemático. Aquí, la curva misma se convertía en la base conceptual de su exploración, destacando su enfoque único en la pureza matemática.

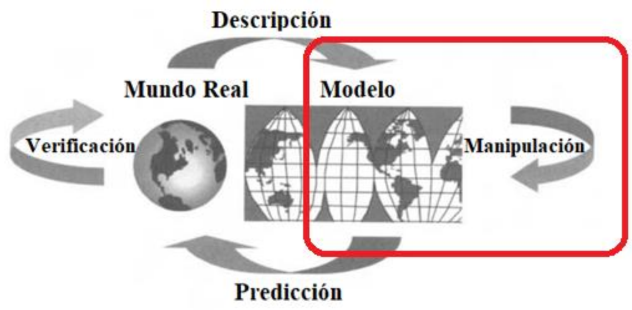


Figura 2.8 Análisis de las etapas del proceso de modelado de Gottfried Leibniz. Adaptado de (Lesh & Doerr, 2003, pág. 17)

La matematización en el trabajo de Leibniz involucraba el uso de diferenciales, una herramienta central en su desarrollo del Cálculo. Diferenciales le permitían abordar problemas relacionados con las tasas de cambio y la variación, aspectos esenciales para comprender el comportamiento de las curvas y las funciones matemáticas en general. Durante este proceso, Leibniz realizaba consideraciones y derivaba resultados matemáticos, construyendo así un puente entre el modelo matemático abstracto y las aplicaciones prácticas. Su enfoque se caracterizaba por su énfasis en la notación diferencial, que se ha convertido en una parte integral del Cálculo moderno.

En resumen, Leibniz tomaba un camino desde el estudio de una curva como modelo matemático, aplicaba la matematización mediante el uso de diferenciales y derivadas, y obtenía resultados que no solo eran matemáticamente elegantes sino también aplicables a una variedad de fenómenos. Este método particular contribuyó significativamente al desarrollo y la formalización del Cálculo.

La Figura 2.9 nos brinda una visión destacada del enfoque de Augustin-Louis Cauchy en su trabajo de formalización de los elementos del Cálculo. A diferencia de algunos de sus predecesores, Cauchy se distinguió por su dedicación exclusiva al mundo de las matemáticas. En su proceso de investigación, Cauchy se sumergió completamente en el ámbito matemático, centrándose en la formalización y rigurosidad de los fundamentos del Cálculo. Su enfoque se caracterizó por la abstracción y la búsqueda de una base lógica y consistente para los conceptos matemáticos.

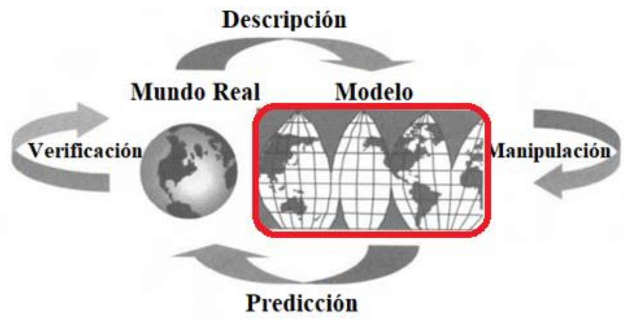


Figura 2.9 Análisis de las etapas del proceso de modelado de Augustin Cauchy. Adaptado de (Lesh & Doerr, 2003, pág. 17)

Cauchy trabajó para establecer definiciones precisas y demostrar teoremas de manera rigurosa. Su empeño en la formalización se tradujo en la introducción de conceptos fundamentales como la definición rigurosa de límites y continuidad, contribuyendo así a sentar las bases para el análisis matemático moderno. Es notable que Cauchy, al concentrarse exclusivamente en el mundo de las matemáticas, elevó la disciplina a nuevos estándares de precisión y claridad conceptual. Su enfoque riguroso y puramente matemático allanó el camino para el desarrollo de una teoría más sólida y estructurada en el campo del Cálculo.

El análisis de los procesos de modelado revela distintos enfoques y filosofías entre Galileo, Newton, Leibniz y Cauchy. Galileo y Newton optaron por utilizar modelos matemáticos como herramientas para representar fenómenos físicos, especialmente en el estudio del movimiento. Estos modelos matemáticos expresaban las relaciones y covariaciones entre las variables relevantes, permitiéndoles realizar predicciones y comprender los principios fundamentales detrás de los fenómenos observados. Además, ambos científicos se apoyaban en la experimentación y observación de situaciones del mundo real para concretar sus modelos, cerrando así el ciclo de modelado con la validación experimental.

Leibniz, por otro lado, adoptó un enfoque más abstracto al basar sus estudios en la modelación de curvas y objetos matemáticos. Su ruptura con la modelación física directa marca un cambio hacia la formalización y purificación de conceptos matemáticos, destacando la abstracción y la manipulación simbólica como elementos esenciales de su método. Cauchy, como precursor en la formalización del Cálculo, llevó esta tendencia a su máxima expresión al centrarse exclusivamente en el estudio del mundo de las matemáticas. Su trabajo se caracterizó por una rigurosa formalización de los elementos del Cálculo, separándose en gran medida de la modelación matemática de situaciones del mundo real.

Este análisis resalta la evolución en los métodos y enfoques a lo largo del tiempo, desde el uso de modelos matemáticos en conexión directa con fenómenos físicos hasta la formalización pura y abstracta de los conceptos matemáticos. Cada enfoque ha contribuido significativamente al desarrollo del Cálculo y al entendimiento de las relaciones matemáticas y físicas.

2.1.2 Enseñanza del Cálculo por medio del estudio de la variación

En la experiencia de David Tall, quien reflexiona sobre los cursos de Cálculo a mediados del siglo pasado, en específico 1956, se utiliza el libro de “Elementary Calculus” de Durell y Robson publicado en 1933. Este texto se fundamenta en el libro del matemático Robert Woodhouse publicado en 1803, en el que "la derivada se definía como: $f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{dx}\right)$, después para cualquier número real dy se define $dy = f'(x)dx$ y luego, para $dx \neq 0, f'(x) = \frac{dy}{dx}$" (Tall, 2019, pág. 20). En la Figura 2.10 se presentan algunos gráficos que se utilizaban para introducir la derivada.

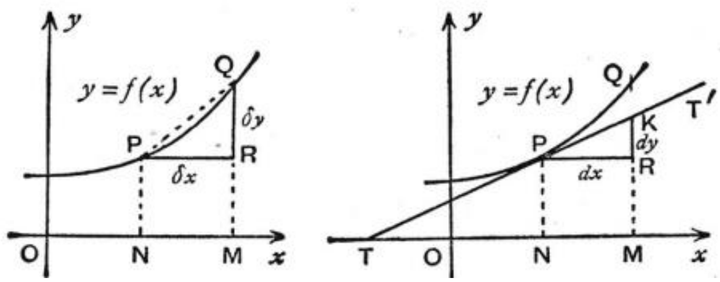


Figura 2.10 Introducción de la derivada en el libro de Durell y Robson. Tomada de (Tall, 2019, pág. 20)

Como se puede observar los cursos de Cálculo de la época (1950's) se basaban en el reconocimiento de sus elementos de manera abstracta, "se reconocen múltiples símbolos para la derivada de la función, tales como: $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}\right)y$, donde algunos podían ser operados $\left(\frac{d}{dy}\right)^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}$" (Tall, 2019, pág. 20) se menciona también que algunos problemas aún continúan en la actualidad.

En 1980, David Tall desarrolló un software para visualizar conceptos del Cálculo, donde se podía ampliar parte del gráfico, para introducir la derivada como pendiente y no como un límite (donde la gráfica ampliada se ve como una recta). En la figura 2.11 se muestra una imagen del software.

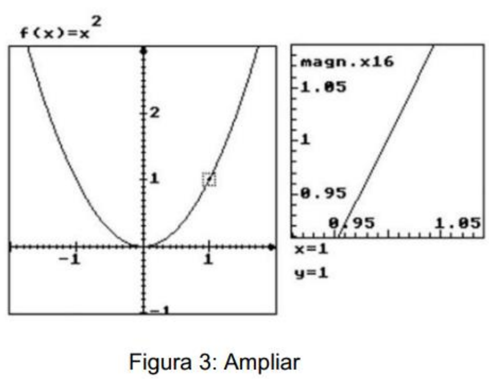


Figura.2.11 imagen del software Graphic Calculus. Tomada de (Tall, 2019, pág. 21)

De esta manera, se propone en los cursos de Cálculo el estudio de la variación, para la introducción de los conceptos de este, en él se propone definir la continuidad, para no sólo ver imágenes estáticas, sino resaltar el dinamismo que implica la variación. En la actualidad existen algunas alternativas de enseñanza del Cálculo que se acercan al estudio de los procesos de variación y acumulación, tratando de conjugar los objetos formales y la covariación de las magnitudes variables.

Entre las que resalta el estudio de la variación por medio del razonamiento variacional y covariacional. Bajo esta alternativa se puede hacer uso de la modelación matemática y de la experimentación, mediante la resolución de problemas prácticos. Cuando sólo se aborda la variación con los elementos abstractos, los estudiantes pueden concebirlas como estáticas, sólo como símbolos que deben seguir un procedimiento, tal como se afirma:

> Los estudiantes no pensaron en las variables como símbolos que representaban cantidades cuyos valores variaban. Cuando los estudiantes vieron las variables estáticamente, no pudieron imaginar que las expresiones que las contenían representaran relaciones entre cantidades variables, lo que eliminó la concepción de expresiones simbólicas como representativas de una tasa de cambio de una cantidad con respecto a otra (Thompson & Carlson, 2017, pág. 446)

La definición de covariación según Carlos y colaboradores (2003, pág. 466) es "un marco para describir y analizar las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables, prestando atención a las formas en que cambian entre sí" y distingue seis acciones mentales cuando los estudiantes aplican el razonamiento covariacional al representar e interpretar un modelo gráfico.

> MA1) Una imagen de dos variables cambiando simultáneamente;
>
> MA2) Una imagen vagamente coordinada de cómo las variables cambian entre sí (por ejemplo, aumentan, disminuyen);
>
> MA3) Una imagen de una cantidad de cambio de la variable de salida considerando cambios en cantidades fijas del dominio de la función;
>
> MA4) Una imagen de tasa/pendiente para intervalos contiguos del dominio de la función;
>
> MA5) Una imagen de velocidad en continuo cambio en todo el dominio;
>
> MA6) Una imagen de tasa creciente y decreciente en todo el dominio (Carlson, Larsen, & Lesh, 2003, pág. 467)

Bajo esta perspectiva se han realizado algunas actividades para introducir la variación en estudiantes, un ejemplo es la actividad de la botella (Figura 2.12) de Carlson y colaboradores (2017, pág. 468) "imagínese esta botella llenándose de agua. Dibuja una gráfica de la altura en función de la cantidad de agua que hay en la botella".

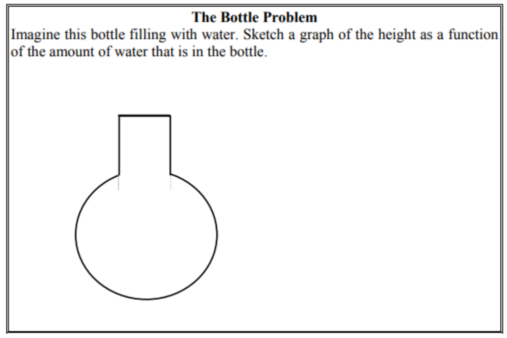


Figura 2.12 Problema de la botella. Tomado de (Carlson, Larsen, & Lesh, 2003, pág. 468)

En México se ha desarrollado el Pensamiento y Lenguaje variacional para el estudio del cambio y la variación, que según Cabrera (2014, pág. 68) refiere al "al análisis de las variaciones que intrínsecamente determinan el comportamiento y las leyes que rigen a un fenómeno o situación de cambio, con la finalidad de su comprensión y/o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre el mismo" y propone el siguiente esquema "tomar conciencia de aquello que cambia; establecer un sistema de referencia para medir y estudiar el cambio; análisis del comportamiento variacional, y abstraer el carácter estable del cambio" Cabrera y Zaldívar (2021, pág. 192).

Con esta perspectiva se realizó la siguiente actividad "Supongamos que los recipientes de la imagen (Figura 2.13) con el mismo volumen, se llenan con el mismo flujo constantede agua. bosqueja la gráfica que representa como cambia la altura del líquido" Cabrera y Zaldívar (2021, pág. 196).

Figura 2.13 Llenado de recipientes y análisis de los cambios de altura del líquido. Tomado de (Cabrera & Zaldívar, 2021, pág. 196)

Utilizando el Lenguaje y Pensamiento Variacional, también se ha abordado la derivada, un ejemplo es la secuencia didáctica de Antonio, Escudero y Flores (2018) en la que se presenta 3 actividades, la primera se les solicita que tracen la gráfica de la situación planteada y se presenta en la figura 2.14.


Actividad 1. Conversión entre el registro gráfico y verbal
Instrucciones: Traza la gráfica posición – tiempo que representa el movimiento de Juan en la siguiente situación:

Juan sale de su casa para ir a estudiar a casa de su compañero. No es necesario tomar el camión, pues su amigo vive en una colonia próxima a la suya. Cuando sale de casa contesta un mensaje avanzando con paso lento los primeros 250 metros, en cuanto envía el mensaje continúa caminando más rápido. Cuando han transcurrido 8 minutos recuerda que olvidó su libreta y regresa a casa corriendo. Llega a casa, toma su libreta y, como ya es tarde, camina a la esquina y espera 3 minutos para tomar un taxi que lo lleva a la casa de su compañero.

Figura 2.14 Actividad 1. Tomado de (Antonio, Escudero, & Flores, 2018, pág. 267)

En la segunda actividad se les pide que respondan unos reactivos tomando como referencia la gráfica de movimiento mostrada en la Figura 2.15, tales como: ¿en qué sección cambia más rápido? ¿Cuándo permanece inmóvil? ¿Cómo varía en intervalos específicos? Que determinen la concavidad, Entre otras.

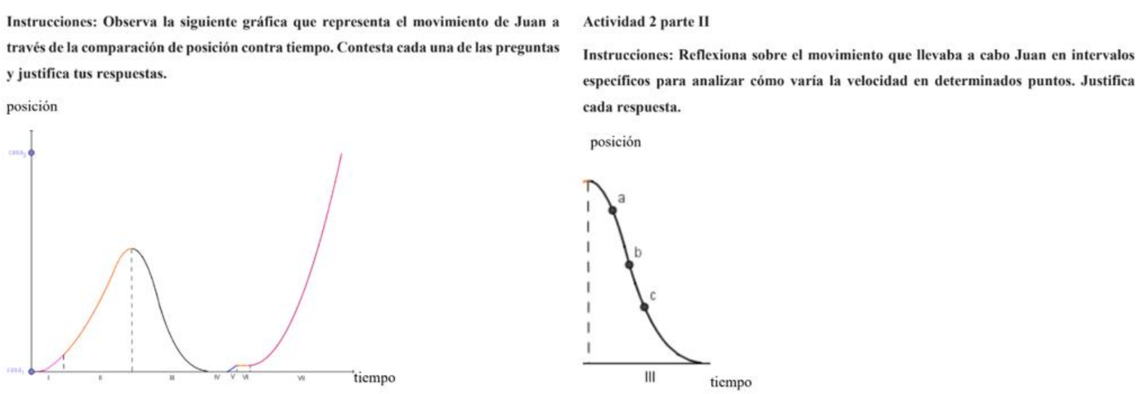


Figura 2.15 Actividad 2. Tomado de (Antonio, Escudero, & Flores, 2018, pág. 272)

Por último, en la actividad 3 (Figura 2.16) se les pide que comparen la velocidad en un punto, con respecto a otro,

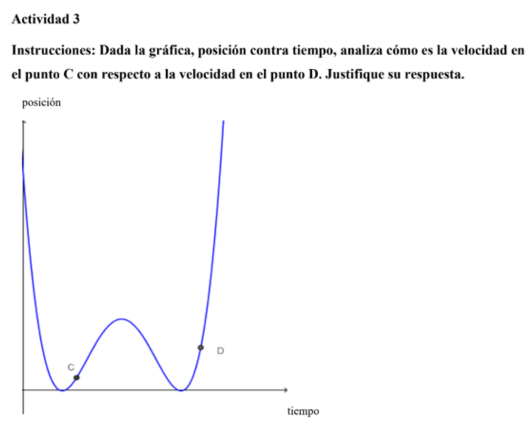


Figura 2.16 Actividad 3. Tomado de (Antonio, Escudero, & Flores, 2018, pág. 274)

Como se puede observar, integrar actividades de variación en los cursos de Cálculo puede acercar a los estudiantes a los elementos formales de este, sin centrarse en los procesos tecnicistas y algorítmicos, para ello se han valido de situaciones extramatemáticas para simular la variación y el cambio para la resolución de problemas.

2.2 Modelo Educativo

El modelo actual se propone un enfoque por competencias, donde es necesario proveer de herramientas a los estudiantes de tal manera que puedan introducirse en el campo laboral. En el área de matemáticas son ocho competencias y determinan el despliegue de diferentes valores y actitudes para propiciar diferentes conocimientos y habilidades. Los programas de materia se encuentran regidos por la Dirección General de Bachillerato (DGB) en ellos se plasma el contenido temático de cada asignatura. En la tabla 2.1 se presenta el de Cálculo diferencial.

Bloque	Conocimientos	Habilidades
Bloque I Límites	Antecedentes y aplicaciones del cálculo. Límites: • Concepto e interpretación de límites. • Propiedades de los límites. Límites de funciones algebraicas. • Límites de funciones trascendentes.	• Reconoce los principales personajes y sus aportaciones en el desarrollo del cálculo, así como la importancia de su aplicación en la actualidad. • Interpreta gráficamente los diferentes tipos de límites. • Identifica de forma analítica los distintos tipos de límites (finitos, infinitos e indeterminados).
Bloque II La Derivada	• Derivada por definición de funciones polinómicas (regla de los cuatro pasos).	• Interpreta la definición de la derivada como una razón de cambio.

	• Derivada de funciones algebraicas. • Derivada de funciones trascendentes. • Derivadas de orden superior.	• Distingue distintas formas de obtener la derivada de una función.
Bloque II Aplicaciones de la derivada	• Máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. • Optimización. • Velocidad, aceleración y rapidez de un móvil. • Regla de L' Hopital.	• Interpreta gráficamente los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. Reconoce los criterios de primera y segunda derivada para obtener los máximos, mínimos y puntos de inflexión de una función. • Asocia distintas variables para generar modelos matemáticos. Interpreta la primera derivada de la posición como la velocidad y la segunda derivada de la posición como la aceleración.

Tabla 2.1 Programa de la materia de Cálculo. Adaptado de (Subsecretaría de Educación Media Superior, 2023)

En la tabla 2.1 se puede observar un programa muy amplio, donde predomina un sentido formal, dejando al estudiante la tarea de abordar situaciones en contextos extra matemáticos, tal como se menciona en (SEMS S. d., 2023, pág. 7) "La gran cantidad de contenidos en los temarios hacen que los temas se revisen de forma superficial y no se reflexione a mayor profundidad en aspectos importantes de los mismos".

El propósito de la asignatura de *Cálculo diferencial* es el siguiente:

> La asignatura de Cálculo diferencial tiene como propósito general el desarrollo de habilidades características del pensamiento lógico-matemático, por medio del uso o los procedimientos para derivar y su aplicación en problemas de optimización que le permitan predecir situaciones reales, formales y/o hipotéticas de su contexto, logrando entender e interpretar los resultados en diversos ámbitos colaborando a desarrollar su capacidad de razonamiento, así como su toma de decisiones (Subsecretaría de Educación Media Superior, 2023, pág. 7).

Es decir, la asignatura propone como fin la aplicación de los conceptos en problemas de optimización e interpretar sus resultados en diversos contextos, así como favorecer la capacidad de razonamiento, pero desde un punto de vista realista el propósito no se cumple, en gran medida debido al tiempo destinado para la materia (3 clases a la semana de 50 minutos cada una) donde por lo general se puede abordar hasta el tema de máximos y mínimos de manera abstracta, en caso de tocar el tema de resolución de problemas se ve de manera superficial o con libros de texto en situaciones a modo (relacionados con los algoritmos vistos en clases).

En el campo disciplinar de las ciencias experimentales en las aulas predomina la enseñanza teórica, existe una falta de experimentación, no se promueve la modelación de fenómenos físicos lo que repercute en el poco aprendizaje significativo de las mismas, como se menciona "La falta de experimentación repercute en la formación de los estudiantes, dejando fuera una parte integral de la enseñanza-aprendizaje de las ciencias naturales que se relaciona con las metodologías aplicadas en el aula predominantemente tradicionales" (SEMS, 2019, pág. 6).

Se promueve una enseñanza tradicional que se basa en procesos tecnicistas, y no en situaciones contextualizadas que posean significado para los estudiantes, no desarrolla el pensamiento matemático, ni una concepción más allá del seguir procedimientos, no existe una vinculación con los contextos sociales de su entorno.

> Por lo que se requiere dar sentido a los contenidos matemáticos actuales en el bachillerato, considera que la finalidad de la enseñanza de las matemáticas consiste en potenciar el pensamiento matemático de diversas nociones y que los estudiantes sean capaces de establecer relaciones entre las nociones matemáticas para darle un sentido a este tipo de conocimiento y utilizarlo para comprender e interactuar con el mundo que los rodea (SEMS, 2019, pág. 8).

La Nueva Escuela Mexicana (NEM) entró en vigor en agosto de 2023, la cual presenta un cambio radical respecto a los modelos educativos que le preceden, los cuales estaban basados en el currículo estadounidense, ahora se trata de abordar una educación humanista e integral que no sólo enseñe contenidos aislados o fragmentados en distintas asignaturas, sino que considere el entorno social y los problemas de la comunidad para realizar los procesos de enseñanza – aprendizaje.

El centro de este modelo educativo es el estudiante y su desarrollo integral, que posea un pensamiento crítico, donde se pueda admitir como un ciudadano reflexivo, con un sentido de igualdad, alejándonos de la idiosincrasia de la historia colonial, se busca que la educación le permita una emancipación de la cultura racista, machista y de segregación de los grupos étnicos prevaleciente en el México actual.

En el Marco Curricular Común (MCC) de Educación Media Superior en la NEM se propone un enfoque integral por medio de los aprendizajes de trayectoria, este proviene de los conocimientos previos y del currículo de educación media superior, el cual se divide en currículo fundamental y currículo ampliado.

Los elementos del MCC se desarrollan por medio de aprendizajes de trayectoria a través de progresiones de aprendizaje, que se definen como:

> La descripción secuencial de aprendizajes de conceptos, categorías y subcategorías que llevarán a los estudiantes a desarrollar conocimientos y habilidades de forma gradual, en las que se desarrolla relaciones que van de lo más simple a lo más complejo, construidas desde la multidisciplina y contemplando cuando sea posible la transversalidad" (SEMS, 2019, pág. 63).

Para el logro de los aprendizajes por trayectoria se plantean: el currículo fundamental, que articula los recursos sociocognitivos con las áreas del conocimiento. Los Recursos cognitivos son el eje articulador del currículo fundamental y lo conforman: lengua y comunicación, el pensamiento matemático, la conciencia histórica y la cultura digital, con los cuales se pretende construir el conocimiento por medio de la transversalidad en el currículo para lograr aprendizajes de trayectoria, se vislumbra que estos recursos den forma a las trayectorias para que los estudiantes puedan estructurar su forma de aprender. Las áreas del conocimiento representan la base común de la formación fundamental de los estudiantes de bachillerato y se divide en Ciencias Naturales, experimentales y tecnología, Ciencias Sociales y Humanidades.

En el Rediseño del marco curricular común de la educación media superior 2019-2022 (SEMS, 2019, pág. 39) definen los recursos sociocognitivos como:

> Son el eje articulador del currículum fundamental, conformado por lengua y comunicación, el pensamiento matemático, la conciencia histórica y la cultura digital, elementos esenciales para la construcción del conocimiento y la experiencia en las ciencias sociales, ciencias naturales, experimentales y tecnología y las humanidades. Desempeñan un papel transversal en el currículum para lograr aprendizajes de trayectoria.

La definición de recurso sociocognitivo no se encuentra claramente definida, se menciona que a través de ellos se puede construir conocimiento y donde se puede utilizar (en las áreas sociales, naturales, experimentales, tecnologías y humanidades) y es uno de los elementos principales del currículo fundamental, por lo que tiene una implicación directa en los aprendizajes de trayectoria. Es un punto débil de la propuesta en el rediseño del MCC de EMS.

El Pensamiento matemático es un recurso sociocognitivo que comprende la realización de operaciones, procedimientos y algoritmos para crear o usar modelos con el objetivo de hacer conjeturas y crear argumentos para comunicar y sustentar sus ideas y se divide en categorías, que son:

- Procedural
- Procesos de intuición y razonamiento
- Solución de problemas y Modelación
- Interacción y leguaje matemático (SEMS, 2019, pág. 52)

En la categoría procedural se promueven los procedimientos algorítmicos, que eran los que predominaban en la enseñanza tradicional, los cuales tienen una gran importancia en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, pero no debe ser el objetivo de las matemáticas, para el logro de esta categoría se proponen las subcategorías: elementos aritméticos-algebraicos, elementos geométricos, elementos variacionales y manejo de datos e incertidumbre. Tal como se menciona en "*Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático*" (SEMS, 2019, pág. 27) "los recursos procedurales, lleva a describir y ejecutar procedimientos matemáticos, en forma sintética o extendida, automatizada o como una secuencia razonada de pasos".

Procesos de intuición y razonamiento es la segunda categoría, de estos deben partir los métodos matemáticos, como se presenta en el documento de Progresiones del Pensamiento

Matemático (SEMS, 2019, pág. 28) "incluye procesos fundamentales en el quehacer matemático como lo son la observación, la intuición, el acto de formular conjeturas y la argumentación", es importante hacer mención que no se espera que se formulen con alto grado de formalismo como lo haría un matemático o ingeniero. Las subcategorías son: capacidad para observar y conjeturar, pensamiento intuitivo, pensamiento formal.

La tercera categoría es la solución de problemas y modelación, aquí se engloba los procesos de intuición y los procedurales para resolver problemas, nos ayuda describir una situación en contextos extramatemáticos y por medio de las mecanizaciones y algoritmos resolver el problema en cuestión. Contiene las siguientes subcategorías: uso de modelos, construcción de modelos y estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios.

En el documento de progresiones no se da una definición de modelo y se maneja la siguiente definición para modelación "se entiende como el uso de la matemática y su lenguaje en la descripción de fenómenos de diversa naturaleza" (SEMS, 2019, pág. 29), la cual es una definición muy limitada, ya que no se plantea la manipulación matemática para realizar predicciones o verificar su utilidad en la situación inicial.

La categoría 4 es Interacción y lenguaje matemático, aquí el estudiante debe saber utilizar el lenguaje matemático formal y realizar una convergencia con el natural para la explicación de las situaciones planteadas, para esto se plantean las siguientes subcategorías: registro escrito, simbólico, algébrico e iconográfico, negociación de significados y ambiente matemático de comunicación, con el fin de que pueda interactuar con personas que manejen ese lenguaje.

En la NEM se enfatiza el uso de la experimentación en las ciencias naturales, la modelación matemática por medio del pensamiento matemático y cultura digital, además de promover la transversalidad entre las disciplinas, lo que permitiría reinstalar el vínculo entre el cálculo, la modelación matemática y la experimentación para generar un aprendizaje significativo que pueda ser utilizado en diversos contextos, no sólo en procesos mecanicistas o tecnicistas, se pretende lograr un pensamiento matemático de los estudiantes basado en contextos extra matemáticos, es decir, que pueda ser aplicado en situaciones del contexto profesional o social.

En la NEM se plantea una autonomía didáctica, no solo a los contextos a abordar, sino también en el uso de recursos didácticos, además se debe cumplir con las 4 categorías que marca el pensamiento matemático y la transversalidad de los contenidos a abordar por medio de las áreas de conocimiento. Sin embargo, el docente no se encuentra capacitado para el diseño de este tipo de actividades y en el modelo no existe un procedimiento para realizar esta labor, lo que hace visible la necesidad de una propuesta de actividades que cumplan con estas características.

2.3 Modelación Matemática

En la educación matemática en general se pueden observar diferentes alternativas para abordar la contextualización de los problemas en situaciones extra matemáticas en los cursos, por un lado tenemos "las visiones tradicionales de enseñanza en la que la solución de problemas aplicados se trata como un caso especial de la resolución de problemas, por otro lado tenemos la visión de modelación donde la resolución de problemas tradicionales se aborda como un caso especial de las actividades que facilitan la generación de modelos" (Lesh & Doerr, 2003, pág. 4). En la tabla 2.2 se muestra la manera en que se abordan estas dos perspectivas según Lesh y Doerr.

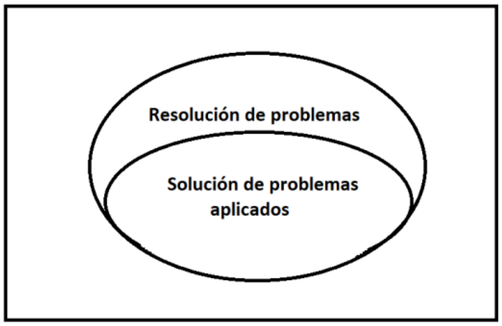
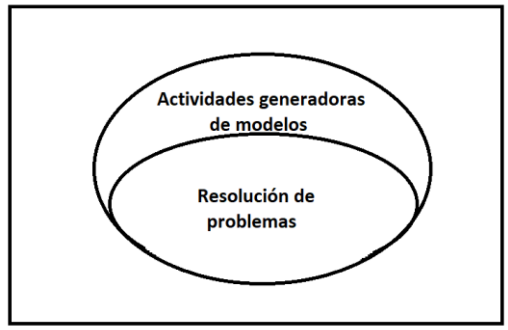
Visión tradicional	**Perspectivas de modelación**
	
Se supone que aprender a resolver problemas de la "vida real" implica tres pasos: 1. Primero, aprenda las ideas previas y habilidades en situaciones descontextualizadas. 2. Aprende contenido general de forma independiente. Procesos heurísticos de resolución de problemas. 3. Finalmente (si el tiempo lo permite), aprenda a usar las ideas anteriores, habilidades y heurística en situaciones confusas de la " vida real " donde también se requiere información adicional.	Se supone que resolver problemas significativos es más fácil que resolver aquellos donde debe ocurrir una interpretación significativa (parafraseando, dibujando diagramas, etc.) antes de que se puedan considerar pasos de solución sensatos. La comprensión no se considera como una situación de todo o nada. Las ideas se desarrollan; y, para las construcciones, procesos y habilidades que se necesitan para resolver problemas de la "vida real" la mayoría se encuentran en etapas intermedias de desarrollo.

Tabla 2.2 Actividades aplicadas de obtención de modelos de resolución de problemas. Tomado de (Lesh & Doerr, 2003, pág. 4).

La enseñanza tradicional se basa en procesos tecnicistas y no en situaciones contextualizadas extra-matemáticas que posean significado para los estudiantes. No se desarrolla el pensamiento matemático, ni una concepción más allá del seguir procedimientos, no existe una vinculación con los contextos sociales y físicos de su entorno. En cambio, al utilizar la modelación matemática se fomenta el pensamiento inductivo y deductivo de los estudiantes, tal como se menciona:

> La modelación matemática es un método cognitivo importante. Desarrolla la capacidad de pensamiento inductivo y deductivo de los estudiantes, competencias como la resolución de problemas, la formación y prueba de hipótesis, la revelación de relaciones causales y conexiones entre características. (Sekerák, 2010).

Desde principios del siglo XX, Felix Klein que fue el primer presidente del ICMI expuso la necesidad de incluir la modelación matemática en los cursos de matemáticas para niños de alto rendimiento en escuelas básicas, tratando de orientar a la utilización de las matemáticas en diversos contextos, pero al enfrentar la segunda guerra mundial estas ideas pasaron a segundo plano en muchos países que se centraron en la educación tradicional.

Actualmente, en la mayoría de los países se sigue utilizando la perspectiva tradicional, donde se utiliza poco la modelación matemática. Se abordan problemas en los cuales el único objetivo es la utilización de métodos algorítmicos y procedimentales, tal como lo mencionan (Blum & Borromeo, 2009, pág. 48) "Se tratan mayoritariamente "problemas verbales" en los que, tras "desnudar" el contexto, el objetivo fundamental es el ejercicio de las matemáticas".

En los últimos 20 años, en educación matemática se está impulsando la modelación en los cursos de las escuelas en todo el mundo, con la finalidad de que se desarrolle un pensamiento crítico en los estudiantes que les provea de herramientas para resolver problemas. Se pretende dejar de lado la educación tradicional en la que se explica con problemas estereotipados donde se pone el énfasis en el proceso de solución de dichos problemas, sin enfatizar la conexión que tiene con la resolución de problemas del mundo real.

Sin embargo, no existe un consenso en cuanto a la perspectiva de modelación a seguir al abordar los contenidos matemáticos. Se debe hacer notar que las actividades deben ser significativas para los estudiantes, se deben abordar situaciones de problemas de la comunidad, nacionales y globales. También se propone la trasversalidad entre las disciplinas de educación media superior.

Una de las alternativas para la enseñanza de las matemáticas de manera transversal con uso de la modelación matemática son los experimentos en contextos de física donde el estudiante puede poner en práctica los conocimientos matemáticos y se pueden generar otros, tal como se menciona en López (2012, pág. 147) "El trabajo de laboratorio favorece y promueve el aprendizaje de las ciencias, pues le permite al estudiante cuestionar sus saberes y confrontarlos con la realidad. Además, el estudiante pone en juego sus conocimientos previos y los verifica mediante las prácticas".

> Las matemáticas nos permiten articular las relaciones existentes entre las variables en física, el apoyo que proveen las matemáticas permite una comprensión más completa de resultados empíricos y permite la expansión de los conceptos más allá de una comprensión cualitativa, a medida que la física se vuelve más avanzada, requiere de más utilización de las matemáticas (Thompson J., 2006, pág. 77).

Existe una interacción muy fuerte entre la Física y las Matemáticas, se debe potenciar la experimentación en conceptos de física y la generación de modelos matemáticos para la resolución de problemas, partiendo de la descripción de sistemas o fenómenos físicos. "La descripción matematizada del sistema o fenómeno puede posteriormente ser manipulada matemáticamente y ser reinterpretada en términos físicos" (Palmgren & Rasa, 2022, pág. 13).

Se debe aprovechar al máximo las situaciones ricas en contenido que provee la experimentación en conceptos de la Física, de tal manera que se produzca un ciclo de modelado completo según (Lesh & Doerr, 2003) describir, manipular, predecir y verificar, así lo aseveran Brahmia, Boudreaux y Kanim (2016, pág. 1) "Matematizar en física implica traducir entre el mundo físico y el mundo simbólico en un esfuerzo por comprender cómo funcionan las cosas. Las habilidades específicas incluyen representar conceptos simbólicamente, definir problemas cuantitativamente y verificar que las soluciones tengan sentido"

Es imperante la necesidad de que los estudiantes puedan aplicar los conocimientos vistos en clases mediante contextos de interés y con un significado, que las matemáticas no se queden en su esencia abstracta y formal, que se puedan aplicar para resolver problemas y/o entender el mundo que nos rodea.

> La actividad experimental hace mucho más que apoyar las clases teóricas de cualquier área del conocimiento; su papel es importante en cuanto despierta y desarrolla la curiosidad de los estudiantes, ayudándolos a resolver problemas y a explicar y comprender los fenómenos con los cuales interactúan en su cotidianidad. Una clase teórica de ciencias, de la mano de la enseñanza experimental creativa y continua, puede aportar al desarrollo en los estudiantes de algunas de las habilidades que exige la construcción de conocimiento científico. (López R., 2012, pág. 148).

Los modelos matemáticos han influido de manera positiva en los grandes descubrimientos científicos en el campo de la Física, desde el estudio del movimiento hasta la Física cuántica, gracias a estos estudios se han presentado teorías sólidas sobre muchos fenómenos naturales, tal como lo menciona Ganusov (2016, pág. 1) "Los modelos matemáticos han sido especialmente fuertes en ciencias físicas, donde las teorías, basadas en principios básicos, fueron capaces de predecir energías asociadas con la masa (famosa ecuación E = mc2) y la existencia de partículas fundamentales (por ejemplo, positrones)".

3 ESTADO DEL ARTE

En esta sección, exploramos diversas visiones sobre la resolución de problemas, comenzando con la perspectiva tradicional. Esta visión establece las bases convencionales para abordar y resolver problemas, arraigada en enfoques más clásicos y estructurados. Posteriormente, nos sumergimos en las perspectivas de modelación, donde se destacan diferentes enfoques y actividades implementadas en cursos universitarios en Estados Unidos. Estas prácticas buscan alejarse de la rigidez tradicional y acercarse a la aplicación práctica de los conceptos, utilizando la modelación matemática como herramienta clave para la comprensión profunda.

Como punto culminante, se presentan actividades diseñadas para fomentar la generación de modelos. Esta propuesta innovadora busca abordar situaciones del mundo real, brindando a los estudiantes la oportunidad de aplicar sus conocimientos en contextos prácticos y relevantes. Esta visión, centrada en la creación activa de modelos, busca no solo resolver problemas, sino también comprender la interconexión entre la teoría y la realidad.

3.1 Visión tradicional de solución de problemas en Cálculo

En la bibliografía revisada proliferan las actividades con una visión tradicional para resolución de problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo, tal como se mencionó en la sección anterior primero se abordan ideas previas, después ejercicios descontextualizados y por último se presentan problemas en situaciones de la realidad por lo general provenientes de libros de texto.

En este contexto Villa-Ochoa (2012) aborda una actividad para describir la variación del área de un rectángulo inscrito en un cuadrado cuando se mueve un punto, en ella se pretende determinar ¿qué cambia?, ¿cómo cambia?, ¿cuánto cambia? y que construyan una gráfica sobre el movimiento, con apoyo del software Cabri II, en este artículo se puede mostrar el uso de la tecnología para generar un modelo por medio de la simulación de objetos intramatemáticos. En la figura 3.1 se presenta la ilustración de la situación.

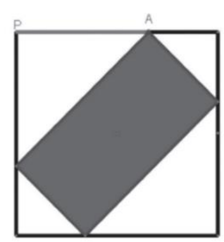


Figura 3.1 Imagen de la situación rectángulo inscrito. Tomada de (Villa-Ochoa, 2012, pág. 15)

Aunque con la actividad del rectángulo inscrito en un cuadrado puede ayudar a la introducción de la variación, esta se realiza en contextos intramatemáticos, que no deja claro la utilidad en contextos de la realidad.

En su trabajo Sarmiento, Boné, & Puyol (2022) se proponen una serie de actividades con la utilización del software MATLAB para el cálculo de derivadas, se inicia con la función $4x^3 - 2x^2 - 5x + 10$, usando la derivada por definición. En la figura 3.2 se puede observar el resultado al utilizar la función de MATLAB *limit*.

```
syms x h
f=@(x) 4*x^3-2*x^2-5*x+10;
limit((f(x+h)-f(x))/h, h, 0)
```

ans = $12\,x^2 - 4\,x - 5$

Figura 3.2 Derivada por definición. Tomada de (Celi, Sarmiento, Boné, & Puyol, 2022, pág. 206)

En la figura 3.3 se muestran los resultados al usar el comando *diff* para obtener la derivada de la función y el comando *eval* para evaluar la derivada cuando $x = 5$.

```
syms x
f = 4*x^3-2*x^2-5*x+10;
derivada = diff(f,x)
```

derivada = $12\,x^2 - 4\,x - 5$

```
x=5;
eval(derivada)
```

ans = 275

Figura 3.3 Derivada y evaluación. Adaptado de (Celi, Sarmiento, Boné, & Puyol, 2022, pág. 207)

También se obtuvo la tabla de valores $x, f'(x)$ y la gráfica de la derivada de la función en el intervalo de [-5,5] por medio del comando *plot* tal como se muestra en la figura 3.4.

```
x=-5:1:5;
y=eval(derivada);
table(x',y','VariableNames', {'x', 'dx'})
plot(x,y)
```

x	dx
-5	315
-4	203
-3	115
-2	51
-1	11
0	-5
1	3
2	35
3	91
4	171
5	275

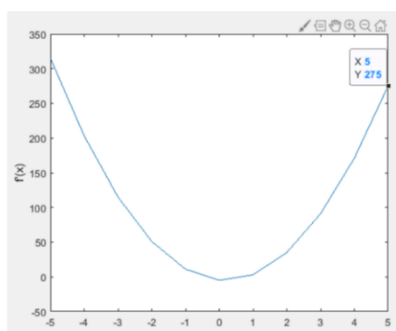


Figura 3.3 Tabla y gráfica de la función derivada. Tomado de (Celi, Sarmiento, Boné, & Puyol, 2022, pág. 207)

En este documento se puede observar que se hace uso de recursos tecnológicos para modelar situaciones intramatemáticas para generar modelos, este tipo de actividades se encuentran guiadas y se requiere que el estudiante pueda ser capaz de realizar un análisis a las respuestas obtenidas.

Un aspecto que destacar es que se requiere de capacitación adicional para el uso de los comandos del software. En este tipo de actividades sólo se promueven los objetos abstractos del Cálculo.

Malaspina (2007) realiza un análisis de las respuestas a dos problemas propuestos con el fin de determinar si encontraron el resultado, si usaron un procedimiento adecuado y si formalizaron y justificaron para evaluar el nivel en el que se encuentran los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas, utilizando como lente teórico el Enfoque Ontosemiótico (EOS). En este documento se pueden observar situaciones en el mundo de las matemáticas, en él se promueve la generación de un modelo matemático utilizando sólo el razonamiento con objetos no ostensivos y sus representaciones semióticas. En la tabla 3.1 se presentan los problemas de optimización

Problema 1	**Problema con variaciones continuas**
Hallar en el plano cartesiano cuatro puntos de coordenadas enteras, de modo que sean los vértices de un paralelogramo cuyo perímetro sea 28 y cuya área sea máxima.	
Problema 2	**Problema con variaciones discretas**
Llamamos paso aplicado a un número, cuando se le multiplica por 2 o cuando se le disminuye en 3 unidades. Hallar el menor número de pasos que se deben aplicar para obtener el número 25, partiendo del número 11.	

Tabla 3.1 Problemas de optimización considerados en el estudio. Tomado de (Malaspina, 2007, pág. 375)

Los problemas de optimización presentados se encuentran en contextos abstractos, donde se privilegian los procedimientos y tecnicas para llegar a un resultado. Otros de los aspectos a tomar en cuenta es que se evalúa el uso de elementos formales, dejando de lado la aplicación en contextos extramatemáticos.

Moreno presenta uno de los problemas más utilizados de cálculo diferencial en ingeniería, donde se debe construir una caja de madera con las siguientes indicaciones “de base cuadrada y de $108\ dm^3$ de capacidad. La parte de arriba debe ser abierta. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que la cantidad de material empleada en su construcción sea mínima?” (Moreno, 2017, pág. 5) de tal manera que su construcción se realice con los costos mínimos.

En la figura 3.5 se muestra la producción del docente en la resolución del problema del globo y la caja de madera, donde se puede observar la resolución de problemas de una manera tradicional, ya que el estudiante debe conocer todos los conceptos que va a utilizar en la solución de dicha actividad, la cual consiste en una serie de pasos (algoritmos) para representar el modelo y dar con el resultado esperado.

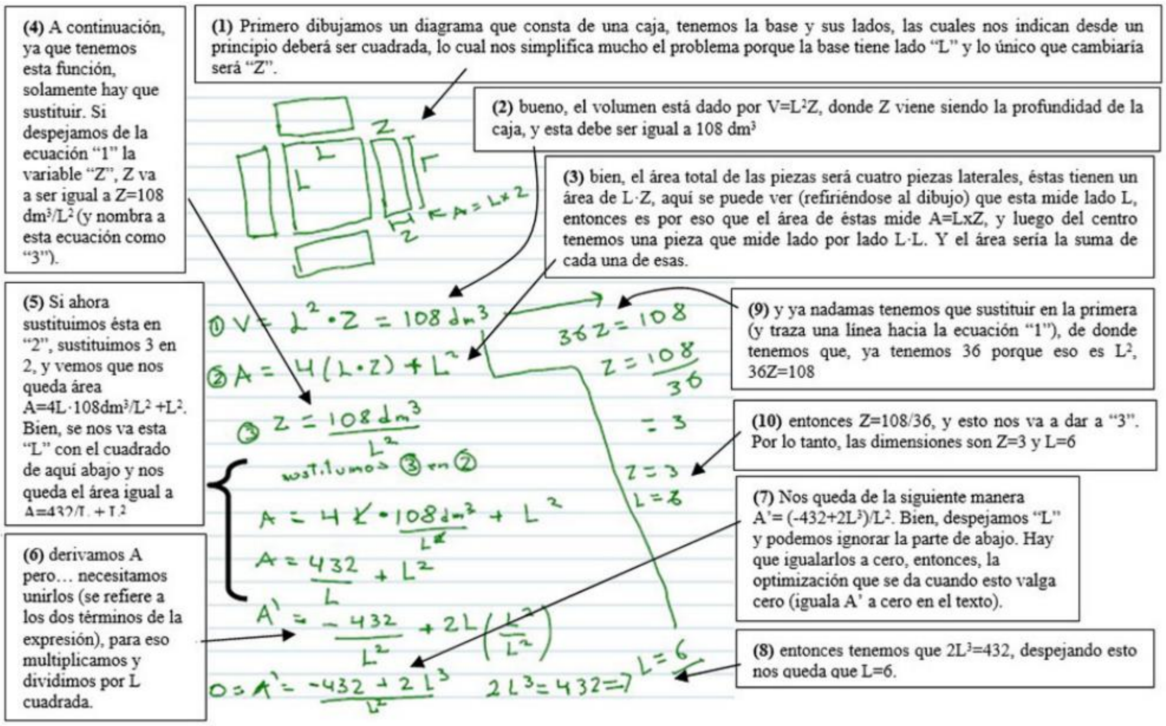


Figura 3.4 Producción del docente en la resolución los problemas de la caja de madera. Tomado de (Moreno, 2017, pág. 10)

El problema de la caja sin tapa es uno de los más utilizados en la enseñanza de problemas de optimización. Aunque la situación proviene de una situación extramatemática, la manera de abordarla concuerda con una visión tradicional, en donde para poder resolver el problema, primero el estudiante debe saber derivar, determinar los puntos críticos definir si corresponden a un máximo, para después definir el volumen.

3.2 Enseñanza por medio de la modelación matemática en la solución de problemas

En los últimos 30 años se ha estado impulsando la modelación matemática en los cursos en escuelas de todo el mundo, esto con la finalidad de que se desarrollen las competencias para resolver problemas de la vida laboral usando las matemáticas como herramienta. Se pretende dejar de lado la educación tradicional en la que se explica con problemas estereotipados, donde se pone el énfasis en el proceso de solución de dichos problemas, sin enfatizar la conexión que tiene con la resolución de problemas del mundo real.

3.2.1 Enfoques de modelación en Matemática Educativa

A finales del siglo XX comenzaron a surgir varios enfoques teóricos sobre modelación matemática, en las cuales se realizaron representaciones o esquemas tratando de explicar la forma en que los estudiantes pasan de un contexto real a un modelo matemático y cómo se deben interpretar los resultados obtenidos de la situación inicial. En la figura 3.6 se presentan de manera general los elementos de un ciclo de modelado.

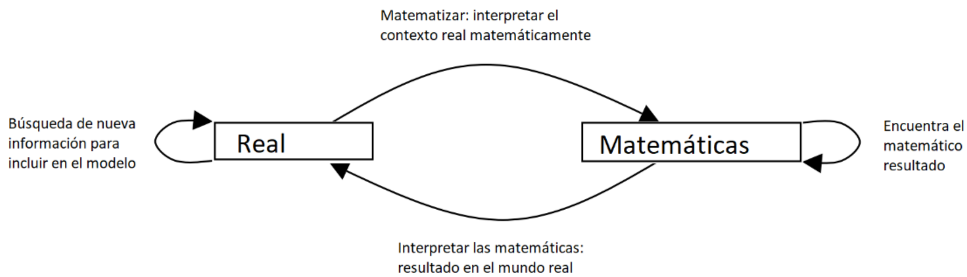


Figura 3.5 Elementos del ciclo de modelado. Tomado de (Yoon D. T., 2010, pág 144)

Blum y Kaiser desarrollaron un ciclo de modelado basados en el trabajo de Pollak y se le utilizó como base para otros enfoques similares, en él se pueden observar elementos que se encuentran en algunos ciclos de modelación: una situación de la vida real se utiliza para dar origen a un modelo de ese problema, lo que ayuda a la matematización de esta y la creación de un modelo matemático con lo que manipular, transformar de tal manera que nos provea de un resultado matemático que nos ayude a interpretar y validar esa solución en la situación original, en la figura 3.7 se muestra este ciclo.

> El ciclo mostrado idealiza el proceso de modelado. En realidad, se producen varios ciclos de mini-modelado que se elaboran en pasos secuenciales lineales como el ciclo o de una manera menos ordenada. La mayoría de los procesos de modelado incluyen cambios frecuentes entre los diferentes pasos de los ciclos de modelado. (Kaiser, 2017)

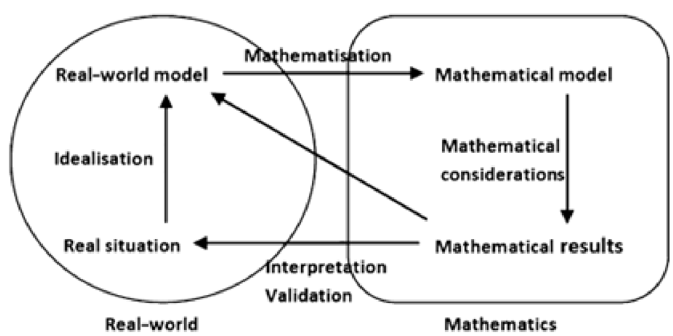


Figura 3.6 Ciclo de modelado de Kaiser y Blum. Tomado de (Kaiser, 2017, pág. 399)

Haines, en el año 2000 propuso un ciclo de modelado que proviene de las matemáticas aplicadas, en este se resalta la necesidad de interpretar y evaluar los resultados del modelo matemático para elaborar reportes y con esto hacer una refinación del modelo para llevar esta solución al problema de la vida real. En la figura 3.8 se presenta este ciclo.

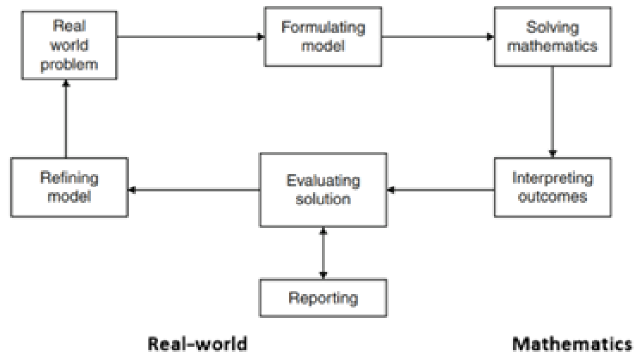


Figura 3.7 Ciclo de modelado de Haines. Tomado de (Kaiser, 2017)

En el año 2011 Blum realizó un nuevo ciclo de modelado matemático, donde enfatizó el análisis cognitivo de los estudiantes; en la figura 3.9 se puede observar que en el inicio del ciclo es importante que se comprenda la tarea que se desea realizar, después debe estructurar los datos necesarios para matematizar la situación, luego se trabaja matemáticamente para interpretar, validar y presentar los resultados. Cabe mencionar que se desarrollan en dos mundos: la realidad y el mundo de las matemáticas.

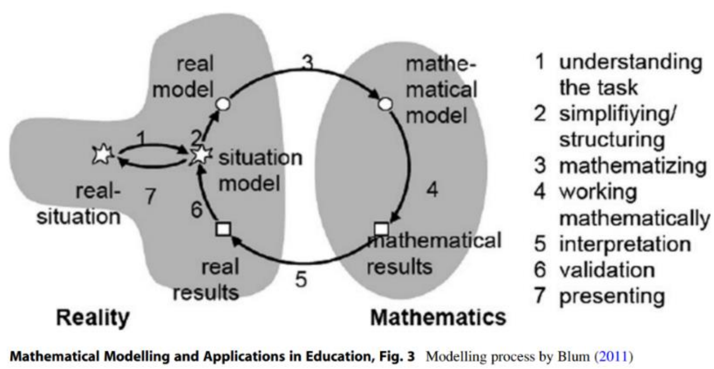


Figura 3.8 Ciclo de modelado de Blum. Tomado de (Kaiser, 2017, pág. 400)

Perspectiva de modelos y modelación

Existen otros enfoques de modelación matemática, tales como la Perspectiva de modelos y modelación de Richard Lesh y Hellen Doerr, en las que se enfatiza la creación de modelos, estos se usan para describir matemáticamente otros modelos utilizando diferentes medios de representación. Como se observa en la figura 3.10, la resolución de problemas implica cuatro pasos:

a) Descripción que establece un mapeo del mundo modelo desde el mundo real (o imaginario).
b) Manipulación del modelo para generar predicciones o acciones relacionadas con la situación original de resolución de problemas.
c) Traducción (o predicción) que lleva resultados relevantes al mundo real (o imaginario).
d) Verificación sobre la utilidad de acciones y predicciones. (Lesh & Doerr, 2003, pág. 17)

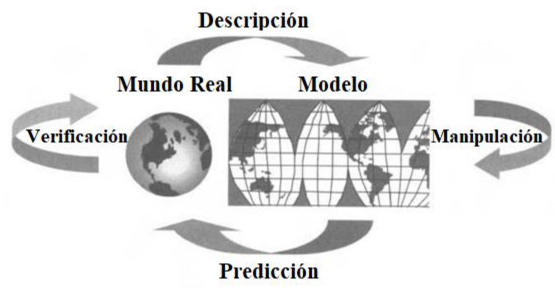


Figura 3.9 Ciclo de modelado con los 4 pasos básicos. Tomado de (Lesh & Doerr, 2003, pág. 17)

En la perspectiva de modelos y modelación se pretende que el estudiante resuelva problemas con aplicación significativa para él, primero interpretando el problema antes de considerar una solución. Además de proveer estas habilidades de crear modelos a partir de la realidad que les serán de gran ayuda en su desarrollo profesional. Para el desarrollo de este ciclo de modelación se utilizan actividades que facilitan la generación de modelos MEA's (Model Eliciting Activities por sus siglas en inglés).

Sin embargo, un sólo ciclo de modelado en ocasiones no es suficiente para desarrollar una interpretación completa del problema, se deben realizar varios ciclos de modelado, en las que se van refinando las soluciones obtenidas, de esta manera los estudiantes tienen adquieren habilidades para juzgar estas descripciones y pueden modificarlas como se muestra en la figura 3.11.

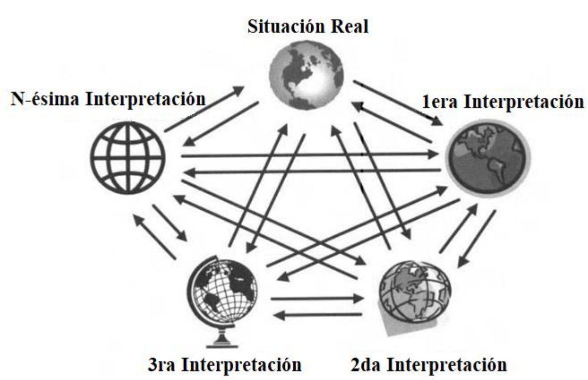


Figura 3.10 La modelación puede involucrar secuencias de ciclos interactivos (Lesh & Doerr, 2003, pág. 18)

3.2.2 Actividades de Cálculo con conceptos de Física

En la enseñanza del Cálculo existen varios trabajos donde se utiliza la modelación matemática relacionados con el manejo de conceptos de Física, en específico del movimiento de objetos utilizando diferentes representaciones para expresar un modelo con el fin de describirlos o manipularlos para la resolución de problemas. A continuación, se mencionan algunos de ellos.

Sanchez, Moreira y Caballero (2009) presentan en primera instancia una actividad donde una persona salta de un helicóptero suspendido en un paracaídas en la que se les pide que representen en un gráfico la trayectoria, la rapidez y la aceleración que actúa sobre el paracaidista. En la segunda actividad el helicóptero se encuentra en movimiento, se les pide que describan la trayectoria que puede tener el paracaidista. En la tercera actividad se les pide que representen el movimiento completo de un paracaidista (en la segunda guerra mundial) que se avienta de un helicóptero a una velocidad v_0, el gráfico del cambio de coordenadas del avión y el paracaidista y la rapidez de ambos. En la figura 3.12 se presenta la primera situación.

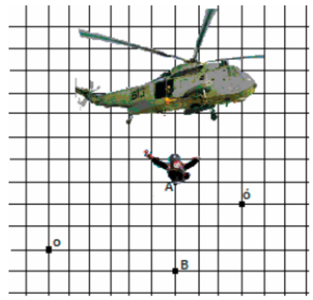


Figura 3.11 Caída de un paracaidista. Tomado de: (Sanchez, Moreira, & Caballero, 2009, pág. 32)

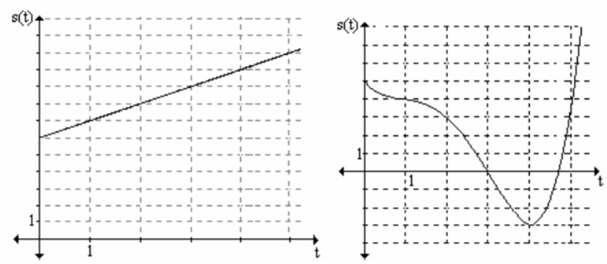
Este tipo de actividades provienen de una situación del mundo real (es decir, puede ocurrir en la realidad), en la cual los estudiantes deben imaginarse las condiciones en que suceden los hechos descritos y poder generar un modelo abstracto al describir dichas relaciones, sin embargo, la actividad se encuentra muy delimitada, ya que se les presentan los pasos a seguir para conseguir el modelo buscado, tal y como se presenta en el documento.

a) Describa el movimiento del paracaidista que se muestra en la figura 1, desde que se deja caer, se abre su paracaídas, hasta que llega al suelo.
b) Represente en un gráfico: a) la trayectoria del paracaidista, la rapidez y c) la aceleración que actúa sobre el paracaidista (sin valores).
c) Considere un sistema de referencia, en el punto O, de la figura 1, e investigue acerca de los valores de altura apropiados para dejarse caer; asigne valores a cada cuadrado en la figura 1 y los instantes de tiempo que pasa por A y B. Encuentre: a) El vector posición del paracaidista al pasar por A y B; b) el desplazamiento entre A y B; c) la rapidez media; d) la velocidad media, d) repita las preguntas a, b, c y d, para el sistema de referencia en O´; d) Compare los resultado de: desplazamiento, rapidez media y velocidad media obtenidos en O y O'.
d) Asigne un valor a la rapidez del paracaidista al pasar por el punto A, y encuentre las ecuaciones que describen su movimiento hasta llegar a B, donde se abre el paracaídas y cambia su rapidez (Sánchez, 2009).

La actividad se puede aprovechar por lo rico de su contenido y ser una situación de interés para los estudiantes, donde pueden interactuar diferentes magnitudes variables y poder generar una gran diversidad de relaciones y modelos; sin embargo, al estar delimitada por un algoritmo a seguir en el cual sólo se obtiene un modelo correcto, se desaprovecha la situación, en la que se podrían manipular las variables y predecir resultados, incidiendo en el desarrollo cognitivo de los alumnos.

Vrancken, Engler y Müller (2009) presentan situaciones sobre el movimiento de varios objetos, en las cuales se les proporcionan gráficas, tablas o ambas para determinar los cambios de posición y que puedan relacionar la derivada con la velocidad, en una secuencia de actividades. En la figura 3.13 se muestra la primera actividad, donde se muestran dos gráficas del movimiento de dos partículas, y se les pide a los estudiantes que completen una tabla por cada movimiento.

Actividad. Las gráficas muestran el espacio recorrido $s(t)$ por dos partículas respecto del tiempo demorado en recorrerlo. Para cada una complete una tabla como la que sigue.



Intervalos	Δs
$0 \le t \le 1$	
$1 \le t \le 2$	
$2 \le t \le 3$	
$3 \le t \le 4$	
$4 \le t \le 5$	

¿Cómo se comportan en cada caso los cambios Δs? ¿En qué intervalos los cambios fueron más rápidos?

Figura 3.12 Actividad comportamiento de dos curvas (Vrancken, Engler, & Müller, 2009, pág. 132)

En la siguiente actividad se parte del movimiento vertical de una piedra que es lanzada de acuerdo con una ecuación definida de la posición y se presenta una tabla para mostrar algunas relaciones. Tal como se muestra en la figura 3.14.

Actividad. La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2$ metros, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$.

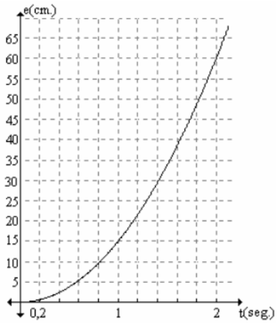
Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$		
$1 \le t \le 2$		
$2 \le t \le 3$		
$3 \le t \le 4$		

¿Qué significado tienen los valores obtenidos en cada columna? Determine las unidades en las que se expresan los mismos. ¿Qué puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto? Estime la velocidad de la piedra a los 3 segundos de iniciado el movimiento.

Figura 3.13 Actividad velocidad de una piedra Adaptado de: (Vrancken, Engler, & Müller, 2009, pág. 133)

Para concluir en la figura 3.15 se aborda una situación sobre caída libre de un objeto, en la cual se les proporcionan a los estudiantes la gráfica correspondiente y debe llenar una tabla con valores predeterminados y responder algunos cuestionamientos sobre dicho movimiento.

Actividad. En un experimento de laboratorio se estudió la caída libre de una bola de hierro pequeña. La gráfica muestra el espacio e recorrido por la bola (en centímetros) en función del tiempo t (en segundos).



a) Determine la velocidad promedio de la bola en el intervalo de 1 a 2 segundos.

b) Observe el gráfico y complete la tabla considerando los intervalos (1, 1 + Δt), teniendo en cuenta los valores de Δt que aparecen en la primer fila de la tabla.

Δt	0,8 seg.	0,6 seg.	0,4 seg.	0,2 seg.
Intervalo (1, 1 + Δt)				
Espacio recorrido				
Velocidad promedio				

c) En cada uno de los siguientes gráficos, calcule la pendiente de la recta que une los puntos A y B. Relacione los valores de las pendientes con los cálculos realizados en los incisos anteriores. Dibuje la recta.

Nota. Por razones de espacio los gráficos no se incluyen. En cada uno se presenta la misma gráfica de arriba y se representan los puntos A y B que son los que tienen como abscisa los extremos de los intervalos de los incisos a) y b).

d) ¿Cuál es aproximadamente la velocidad de la bola en el instante t = 1 segundo?

e) Dibuje la recta tangente a la gráfica en el punto **A**. ¿Qué relación existe entre la pendiente de esta recta y la velocidad pedida en **d)?**

Nota. El gráfico no se incluye. El punto A corresponde a la abscisa t = 1.

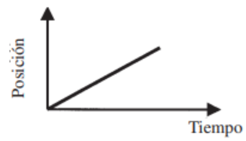
Figura 3.14 Actividad bola de hierro. Adaptado de: (Vrancken, Engler, & Müller, 2009, pág. 135)

Estas situaciones provienen de contextos extramatemáticos del movimiento de objetos, sin embargo, se les presenta una representación del modelo en forma de gráficas, tablas, expresiones algebraicas, lo que limita la visualización de otras relaciones que se podrían observar durante la presentación del problema. Se puede notar que al igual que los documentos presentados anteriormente, esta propuesta se encuentra muy dirigida.

Guidugli, Fernández Gauna y Benegas (2004) proponen una actividad donde se presentan series de gráficos que provienen del movimiento de objetos, para que el estudiante interprete su significado, es decir, se plantea el modelo matemático que representa la situación y se les pide a los estudiantes que lo interpreten por medio de su representación gráfica. Se podría decir que realizan el ciclo de modelado comenzando en la interpretación de resultados; en la figura 3.16 se muestran algunos ejemplos.

3. El siguiente gráfico representa el movimiento de un objeto. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la mejor interpretación del mismo?

a) El objeto se mueve con una aceleración constante no nula.
b) El objeto no se mueve.
c) El objeto está moviéndose con una velocidad uniformemente creciente.
d) El objeto se mueve a velocidad constante.
e) El objeto se mueve con aceleración uniformemente creciente.



8. El movimiento de un objeto está representado por el siguiente gráfico. ¿Cuál de las siguientes es la afirmación correcta?

a) El objeto se mueve por una superficie plana, luego baja una colina y finalmente se para.
b) El objeto no se mueve al principio, luego desciende una colina y se detiene.
c) El objeto se mueve a velocidad constante, luego se frena y finalmente se detiene.
d) El objeto primero no se mueve, luego retrocede y se detiene.
e) El objeto se mueve sobre una superficie plana, luego retrocede bajando de una colina y sigue luego moviéndose.

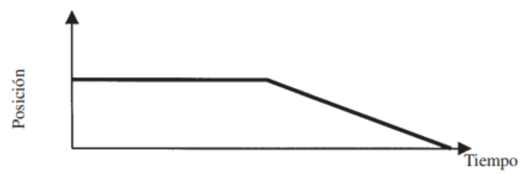


Figura 3.15 Cuestionario Tomado de (Guidugli, Fernández Gauna, & Benegas, 2004, pág. 470)

Bermúdez y Godoy (2015) presentan un problema en el cual se utiliza un simulador donde se presentan caída de cuerpos, el software genera una tabla de datos para el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración (t, x, v, a), además de la gráfica de posición vs tiempo y permite manipular la altura y la velocidad inicial. A continuación, se presenta la situación.

> *Problema*: Se deja caer un cuerpo de una altura de 100 m, a partir del reposo. Inicialmente se les pide llenar una tabla (Tabla I) para diez valores diferentes del tiempo, obtener las velocidades generadas por la simulación computarizada. Enseguida con los datos anteriores construir la Tabla II, que consiste en obtener 8 cambios de velocidad con respecto al tiempo, usando la expresión: $(vf - vi)/(tf - ti)$ (Bermúdez & Godoy., 2015, pág. 208).

En la figura 3.17 se puede observar la gráfica que provee el simulador al introducir los datos del problema:

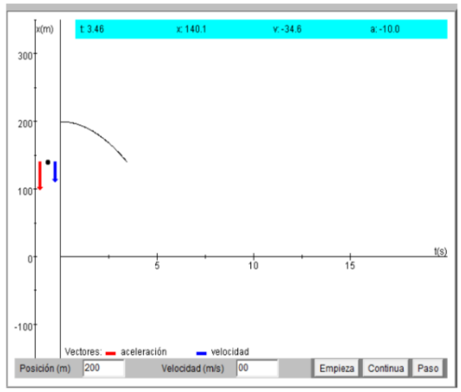


Figura 3.16 Simulación computarizada en línea para caída de cuerpos. Tomada de (Bermúdez & Godoy., 2015, pág. 208)

Sánchez (2009) utiliza la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas de manera secuencial, para ello se utiliza una actividad de la montaña rusa. En estas actividades se presentan situaciones en contextos reales, la matematización se genera de manera guiada para obtener el modelo deseado. En la Figura 3.18 se puede observar la imagen de la montaña rusa y el movimiento en el que se basa el problema.

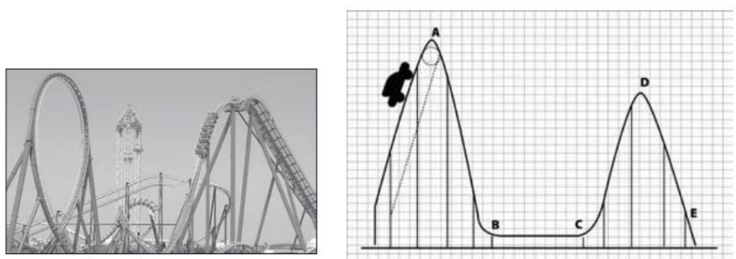


Figura 3.17 Montaña rusa y el movimiento del carro entre dos cimas. Adaptado de (Sánchez, 2009)

Se inicia con un problema 0 donde se establecen los conocimientos previos, tales como representaciones y operaciones con vectores, álgebra escalar y vectorial. El problema 1 se plantea con la finalidad de representar vectores en el plano, hasta llegar a los vectores de velocidad y aceleración. En el problema 2 los estudiantes deben describir el movimiento (en una y dos dimensiones) en una montaña rusa, MRU, MRUA, condiciones de frontera, tiempos, entre otros, y utilizar expresiones algebraicas. En el problema 3 se representan gráficamente los resultados y se identifican las condiciones de frontera finales. Por último, en el problema 4 se utilizan los conocimientos en cuanto a movimiento circular uniforme y MCUA, para describir analítica y gráficamente el movimiento circular.

La secuencia de problemas se presenta por medio de cuestionarios y actividades de aprendizaje. En la figura 3.19 se presentan las del Problema 1.

Cuestionario

1.- a) ¿Por qué las cimas de la montaña rusa van disminuyendo su altura en su recorrido?
b) ¿Qué puede decir de la rapidez y la velocidad en este recorrido?
b2.- Escriba una lista de parámetros físicos involucrados en el movimiento del carro.
3.- ¿Qué parámetros físicos permiten describir el movimiento del carro en la montaña rusa?
4.- ¿Depende la velocidad del carro del punto de referencia?

Actividad aprendizajes

a) Asigne valores de tiempo al carro de la Figura 4, cuando pasa por los puntos **A**, **B**, **C**, **D** y **E**.
b) Dibuje un sistema de referencia O, represente los vectores posición de los puntos **A**, **B**, **C**, **D** y **E**.
c) Encuentre el desplazamiento y camino recorrido aproximado en cada tramo.
c) Determine par cada tramo la rapidez media y la velocidad media.
e) Repita los cálculos de rapidez y velocidad media para un sistema de referencia con origen en O`.

Figura 3.18 Cuestionario y Actividades de aprendizaje del problema 1. Adaptado de (Sánchez, 2009, pág. 955)

3.2.3 Proyectos de diseños de MEA’s

En la literatura podemos encontrar gran diversidad de actividades de modelación matemática, entre ellas se pueden destacar las MEA’s, que han sido ampliamente estudiadas e implementadas en varias universidades de Estados Unidos al proveer de elementos que favorecen la generación de modelos, ayudan a promover habilidades para la toma de decisiones en contextos reales, además de poner en juego diferentes formas de reflexión, como las que provienen de la matematización de las situaciones y otros aspectos no declarados, como dilemas éticos para la resolución de problemas, tal como se menciona.

> Los estudiantes comienzan a comprender que los problemas reales generalmente requieren que quien toma las decisiones vaya más allá de las soluciones racionales, analíticas y matemáticas de los problemas y reconozca el impacto de factores no cuantificables como la seguridad, los efectos ambientales y los dilemas éticos (Bursic, Shuman, & Besterfield-Sacre, 2011, pág. 12)

En el área de Cálculo sobresalen dos actividades MEA, la primera se puede observar en el documento de Hamilton, Lesh, Lester y Brilleslyper (2008) donde adaptaron el problema de texto “Tidal power plant Project” de Larson, Hostetler y Edwards Figura 3.20, con el fin de que los estudiantes puedan desarrollar diferentes modelos para la resolución del problema, tomando en cuenta algunas restricciones. A continuación se presenta la situación problema:

> El Ayuntamiento de Sea Shell lsland ha pedido a su empresa de ingeniería que proporcione un análisis de su planta de energía mareomotriz. Debido a la expansión de la población y los negocios en Sea Shell Island, existe la necesidad de obtener más energía de la planta de energía. En concreto, el Ayuntamiento pretende aumentar la producción energética de la planta en torno a un 20% (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008, pág. 7).

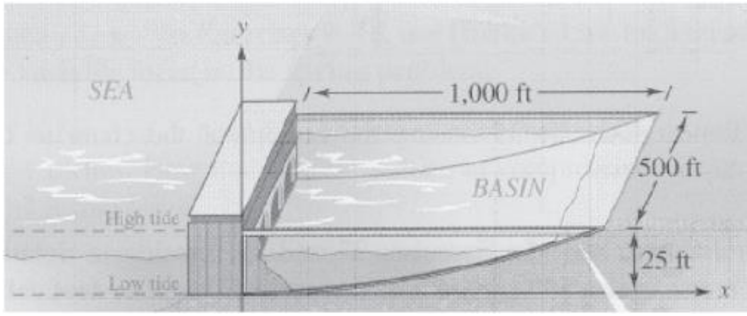


Figura 3.19 Isla Sea Shell. Tomado de (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008, pág. 7)

En este planteamiento se pide que los estudiantes trabajen como un equipo de ingenieros que desea ganar una licitación para tomar el proyecto de la presa de Sea Shell Island y deben proporcionar al menos dos diseños alternativos que cumpla con los requerimientos ya previstos en la actividad, se debe tener en cuenta que el ganador de la licitación es el que optimice los costos y el tiempo, cuidando los requerimientos de factibilidad (por ejemplo, no se puede cambiar el ancho de la presa).

En la adaptación del problema se siguieron los principios de diseño de las MEA's para que se favorezca la generación de modelos, en tabla 3.3 se presentan los resultados observados por los autores:

Principios de diseño de las MEA's	Comentarios del MEA Sea Shell Island
Principio de Realidad: ¿Podría suceder esto en la vida real? ¿Se alentará a los estudiantes a dar sentido a la situación basándose en extensiones de sus propios conocimientos y experiencias personales?	Los estudiantes universitarios encuentran el problema realista y motivador.
Construcción de modelos: ¿implica construir, explicar, manipular, predecir o controlar un sistema estructural significativo? ¿La tarea creó la necesidad de construir (o modificar, ampliar o refinar) un modelo?	Se pueden construir, modificar o refinar múltiples modelos.
Documentación del modelo: ¿La respuesta requerirá que los estudiantes revelen explícitamente cómo piensan acerca de la situación (datos, objetivos, posibles caminos de solución)? ¿En qué tipo de sistemas (objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones, regularidades) están pensando?	Esta es una tarea impulsada por el cliente y requiere documentación de al menos dos soluciones que cumplan con los requisitos, pero tienen diferentes compensaciones.

Autoevaluación: ¿El planteamiento del problema sugiere claramente los criterios apropiados para evaluar la utilidad de respuestas alternativas? ¿Podrán los estudiantes juzgar por sí mismos cuando sus respuestas sean lo suficientemente buenas? ¿Quedará claro qué propósitos pretenden abordar los resultados? ¿Para quién? ¿Cuándo?	Debido a los parámetros y restricciones iniciales, la autoevaluación es sencilla: se puede determinar un costo por porcentaje de aumento de energía para cada modelo de solución que se prueba.
Generalización del modelo: en situaciones de la "vida real", rara vez vale la pena desarrollar una herramienta conceptual (como un modelo) si la herramienta se va a utilizar una vez. Entonces, el principio de generalización del modelo dice: "¿Es el modelo no sólo poderoso para la situación específica y el cliente en cuestión, sino también compartible con otros y reutilizable en otras situaciones"?	Una vía de generalización interesante para este problema implica parametrizar modelos específicos (por ejemplo, el enfoque de "extender la parábola más lejos") en función de hasta dónde se extiende la base. Curiosamente, pocos estudiantes universitarios de la USAFA alcanzan este nivel de generalización, basándose en prueba y error continuos.
Prototipo simple: ¿Es la situación lo más simple posible y al mismo tiempo crea la necesidad de un modelo significativo? ¿Proporcionará la solución un prototipo (o metáfora) útil para interpretar otras situaciones estructuralmente similares?	La situación tiene algunas complicaciones; puede recordarse con bastante facilidad e implica sólo un puñado de características estructurales definitorias, pero requiere la construcción de modelos y el potencial de generalización.

Tabla 3.2 Seis principios del MEA Sea Shell Island. Traducido de (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008, pág. 8)

Este MEA también fue implementado por De Villiers (2018) y en el documento se resalta la necesidad de que las actividades se construyan a partir de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, por lo que es necesario que los estudiantes comprendan cómo se puede generar electricidad a partir del cambio de la marea, además de algunas fórmulas que se utilizarán en dicha actividad. De Villiers hace referencia a la puesta en escena de esta actividad y determina los recursos que se utilizaron. En la figura 3.21 se muestran algunas fórmulas que se necesitaran para la construcción de los modelos.

You need to specify the current volume of the dam, as well as the proposed new volume of the dam	
Density of water (ρ)	1000 kg/m^3
Gravity (g):	9,8 m/s^2
The gravitational potential energy of the water mass:	$PE_g = mgh = \frac{kg.m}{s^2}.m = Work \times m = Newton \times m = Joules$ where m represents the mass of the water in kg, g represents gravity (m/s^2), and h represents the **average height** of the dam (m).
Power produced as water flows through the turbine	$P = \frac{PE_g}{t}$

Figura 3.20 Otras especificaciones relativas a MEA Tidal Power Task. Tomado de (De Villiers, 2018, pág. 240)

También se hace uso de vídeos de la plataforma de youtube.com para que los estudiantes tengan una comprensión de cómo se puede generar energía por medio de una planta mareomotriz, en la figura 3.22 se muestran los que el investigador propuso para la implementación de la actividad.

YouTube video clips explaining tidal power			
Tidal Power 101	**Tidal barrage generation systems**	**Hydro Power 101**	**Tidal Power**
			
(Student_Energy, 2015b)	(Allaboutrenewables, 2013)	(Student_Energy, 2015a)	(SarahGotsMadSkillz, 2012)

Figura 3.21 Videos del MEA Tidal Power Task. Tomado de (De Villiers, 2018, pág. 242)

Una actividad inicial para abordar el problema de la presa fue la de realizar una investigación para mejorar su comprensión de cómo funcionan las presas mareomotrices, para lo cual utilizaron los recursos propuestos por el docente, en el documento se menciona que esta tarea les ayudó a entender e interpretar el contexto, encontraron formas de calcular el volumen de la presa y a descubrir otras matemáticas que podían utilizar.

En la implementación de esta actividad el rol del docente es muy importante, no debe proveer de las respuestas a los estudiantes, pero debe ayudar a superar sus complicaciones. Es por lo que De Villiers preparó una serie de cuestionamientos para guiarlos en caso de que los estudiantes tuvieran dificultades en la comprensión del problema planteado. En la tabla 3.4 se muestran las dificultades previstas que se pueden presentar por parte de los estudiantes y las preguntas guía que se harán para que puedan afrontar los obstáculos declarados.

Dificultades previstas	**Cuestionamientos e indicaciones sugeridas**
Los estudiantes comienzan con cálculos detallados antes de planificar una aproximación. Por ejemplo, comienzan con los primeros números y luego hacen	Describa con palabras un plan para abordar este problema. ¿Cuáles son las decisiones clave que tienes que tomar? ¿En qué información te vas a centrar al principio? ¿Cuál ignorarás (si corresponde)?

multiplicaciones y divisiones sin sentido con los siguientes.	
Los estudiantes no comprenden el concepto del problema.	¿Cuál es el principal objetivo al intentar resolver el problema?
Los estudiantes ignoran una o más restricciones.	¿Cuáles son tus suposiciones, si las hay? ¿Qué planeas hacer para simplificar tu problema?
Los estudiantes no justifican las decisiones tomadas. Por ejemplo, plantean una solución sin explicación.	¿Por qué has elegido aplicar esta fórmula? ¿Cómo puedes estar seguro de que esta es la mejor solución?
Los estudiantes se van directo a las conclusiones.	¿Has tomado en cuenta todos los aspectos involucrados? ¿Tiene sentido la solución si el tamaño o la forma de la excavación difieren? ¿Qué pasa con la variación en la altura del muro de la presa?
Los estudiantes no captan el significado de sus cálculos. Por ejemplo, los estudiantes pueden realizar un cálculo sensato, pero no entender lo que representa su respuesta.	¿Qué representa esta respuesta? ¿Respondiste la pregunta de los clientes? ¿Por qué se decidió por este diseño de excavación específico?
Los estudiantes solo escriben números sin justificaciones.	¿De dónde han salido estas cifras? ¿Sabes lo que representan? ¿Puedes justificar por qué has utilizado estos números?
Los estudiantes no ajustan la altura promedio de su presa según las excavaciones que proponen.	Explica cómo influye la altura de la presa en la energía generada. Permítales explicarlo visualmente para ayudarlos a comprender cómo diferirá la solución dependiendo de cómo se planifique la excavación.
Los estudiantes pueden confundirse con las unidades de medida o no ser capaces de comprender el significado de sus cálculos.	Deben poder explicar las respuestas de sus cálculos de manera significativa, deben tener claro lo que representan sus gráficos/diagramas/soluciones.

Es posible que los estudiantes no comprendan el hecho de que sólo se puede utilizar el 70% de la energía generada.	Sondéelos para que expliquen su pensamiento, haciéndoles preguntas como: "¿Puedes explicar por qué planean un uso del 70% y no del 100%?"

Tabla 3.3 Dificultades previstas. Traducido de (De Villiers, 2018, págs. 241-242)

Como conclusión de la actividad se menciona: “los estudiantes continuaron mostrando mejoras consistentes en sus habilidades para resolver problemas del mundo real, todos los grupos permanecieron enfocados en su objetivo de encontrar un diseño efectivo para expandir la presa y así aumentar la producción potencial de energía” (De Villiers, 2018, pág. 251). En cuanto al ciclo de modelación de los MEA se dice:

> Los estudiantes revelaron, probaron y refinaron repetidamente sus formas de pensar. A medida que avanzaban a través de las secuencias iterativas de los ciclos de interpretación-desarrollo, comenzaron a aplicar formas de pensamiento más sofisticadas y se centraron en las relaciones, patrones o tendencias en los datos (De Villiers, 2018, pág. 251).

Existen varias instituciones educativas que trabajan con MEA’s en varias de sus licenciaturas, una que se destaca es la Universidad de Pittsburgh como de las pioneras en utilizar este tipo de actividades en el desarrollo de sus cursos. Para describir como se implementan a continuación se aborda la MEA “Campus Lighting Economics”, la cual se lleva en dos momentos, en la primera etapa es un trabajo individual (20 puntos) y la segunda parte es trabajo en equipo (80 puntos), además cuentan con una guía instruccional para el docente.

Como ya se ha mencionado, en las Model Eliciting Activities se trabaja a manera de profesionistas, en la MEA Campus Lighting Economics se les brinda información acerca de las restricciones presupuestarias para la iluminación de un campus y una preocupación de seguridad de las personas que caminan por ciertas áreas muy oscuras lo que influye en la cantidad de accidentes y robos. La tarea por realizar se describe a continuación.

> Los funcionarios de la universidad han decidido consultar con usted y su equipo de análisis económico de ingeniería sobre el análisis económico de cuatro propuestas de sistemas de iluminación para un área específica del campus.
>
> Al Departamento de mantenimiento de Instalaciones le gustaría que considere todos los costos relevantes al completar su análisis para poder comparar de manera justa las cuatro propuestas, así como una alternativa de “no hacer nada” (sistema actual). La comunidad universitaria también está preocupada por la seguridad del campus. Los detalles de los cinco sistemas de iluminación se proporcionan en la Tabla 1 a continuación (University of Pittsburgh S. S., Campus Lighting Economics, 2010, pág. 2).

En la actividad individual se les solicita que desarrollen una lista de factores a tomar en cuenta para comparar los diferentes sistemas de iluminación disponibles con el fin de seleccionar la mejor. Además, deben definir qué información consideraron relevante y como realizaron la clasificación de los sistemas de iluminación, tomando en cuenta las limitaciones de presupuesto y el tiempo que tienen disponible para dar respuesta al campus. En la tabla 3.5 se les brinda información sobre los sistemas disponibles.

Propuestas de iluminación						
	Lampara tipo 1	**Cantidad**	**Lampara tipo 2**	**Cantidad**	**Lampara tipo 3**	**Cantidad**
Propuesta 1	MH 250W	42	MH 150W	14	NINGUNA	NINGUNA
Propuesta 2	MH 250W	40	LPS 90W	14	NINGUNA	NINGUNA
Propuesta 3	HPS 250W	32	HPS 150W	12	NINGUNA	NINGUNA
Propuesta 4	LPS 35W	36	HPS 150W	16	NINGUNA	NINGUNA
Actual	MV 400W	40	MV 250W	12	MV 100W	10

Tabla 3.4 Propuestas de iluminación. Traducido de (University of Pittsburgh S. S., Campus Lighting Economics, 2010, pág. 2)

En un segundo momento de la actividad se plantea en equipo de 3 alumnos, donde se les recuerda la tarea "Los funcionarios de la universidad han decidido consultar con usted y su equipo de análisis económico de ingeniería sobre el análisis económico de cuatro propuestas de sistemas de iluminación para un área específica del campus" (University of Pittsburgh S. S., Campus Lighting Economics, 2010, pág. 2) en el cual otra opción puede ser dejar el sistema actual; en esta parte se les brinda información adicional a los estudiantes. La tabla 3.6 muestra el costo de instalación, reemplazo de y consumo de energía de las bombillas.

Información de instalación, mantenimiento y funcionamiento

Costos de mano de obra de instalación	$165 por lámpara (incluida la instalación de la primera bombilla), independientemente del tipo o la altura.
Los costos de energía	$0.11 por kWh
Costos de reemplazo de bombillas	
▪ Preparación/Pedido	$200 por viaje para reemplazar bombillas
▪ Mano de obra	$ 25 por accesorio
▪ Costo de la bombilla	Consulte la Tabla 3 a continuación.

Tabla 3.5 Información de instalación, mantenimiento y funcionamiento. Traducido de (University of Pittsburgh S. S., Campus Lighting Economics, 2010, pág. 4)

Las características de las bombillas, el costo de los accesorios y el costo del bulbo se presentan en la tabla 3.7.

Tipo de lampara	**Watts**	**Lumens**	**Uso anual (kWh)**	**Tiempo de vida esperado (hrs)**	**Costo del accesorio**	**Costo del bulbo**
Low Pressure Sodium (LPS)	90	13500	513	18000	410	20
Low Pressure Sodium (LPS)	135	22500	738	18000	495	24
High Pressure Sodium (HPS)	150	16000	791	24000	415	16
High Pressure Sodium (HPS)	250	25700	1205	24000	500	19
Metal Halide (MH)	150	13000	754	10000	395	15
Metal Halide (MH)	250	20500	1210	10000	460	19
Mercury Vapor (MV)	100	4100	554	12000	295	10
Mercury Vapor (MV)	250	11850	1169	12000	360	11
Mercury Vapor (MV)	400	20500	1866	14000	400	13

Tabla 3.6 Información de las bombillas. Traducido de (University of Pittsburgh S. S., Campus Lighting Economics, 2010, pág. 4)

En el grupo de la Universidad de Pittsburgh se incluye una Guía instruccional MEA para el docente, donde se describen varios elementos de la actividad, en la tabla 3.8 se presenta la de la MEA "Campus Lighting Economics".

MEA: Campus Lighting

Primary Field: Industrial Engineering

Academic Level: Sophomore to Senior

Extensions: Ethics

Problema/Contexto	¿Qué propuesta de iluminación se debe seleccionar para un área de un campus universitario? Los estudiantes deben abordar cuestiones de costos y presupuesto, así como las preocupaciones de seguridad de la comunidad universitaria.
Modelos obtenidos	Ingeniería / Toma de decisiones / Económica
Disciplina de Ingenierías	Ingeniería Industrial
Datos e información del problema	En la Parte 1 (realizada individualmente), los estudiantes leen un artículo de periódico que analiza los recortes presupuestarios en la Universidad, el proyecto de iluminación del campus y cuestiones de seguridad de los estudiantes. El artículo también incluye estadísticas sobre delitos en el campus. Se describen cuatro propuestas y se dan datos básicos sobre el número de lámparas y tipos. Se pide a los estudiantes que enumeren y prioricen otros datos que necesitarían para tomar una decisión. Una vez entregada la Parte 1, a los estudiantes se les entrega la Parte 2. En la Parte 2 (realizada en equipos), los estudiantes reciben información adicional que incluye costos de instalación y energía, costos de reemplazo de bombillas y vida útil de las bombillas. Se les solicita un procedimiento general a seguir para seleccionar una propuesta (incluir una hoja de cálculo Excel) así como una solución al caso específico. También se les pide que comenten cómo podría cambiar su decisión si las estadísticas de criminalidad hubieran incluido dos casos de asesinato en el campus.
Rutas de solución anticipadas	Se espera que los estudiantes creen una hoja de cálculo general que permita seleccionar una propuesta de menor costo. Además, que los equipos no solo consideren los costos sino también otros criterios, incluida la seguridad (iluminación).
Rutas de solución observadas (por el estudiante)	Los estudiantes generalmente crearán listas adecuadas de la información necesaria. Los estudiantes utilizarán hojas de cálculo de Excel para realizar un análisis de costos de cada propuesta.

	Si se asigna MEA antes de que se introduzca el concepto del valor del dinero en el tiempo, los estudiantes no lo considerarán. Los equipos crearán una hoja de cálculo general en la que se pueden manipular varios factores para un escenario diferente. Se consideran las estadísticas de delincuencia y, a menudo, hacen que los estudiantes no basen simplemente su decisión en la propuesta de menor costo.
Objetivos de aprendizaje	Comprensión de la comparación económica de alternativas y del valor temporal del dinero. Consideración de todos los criterios relevantes. Problemas contemporáneos.
Habilidades específicas por promover	Análisis económicos generales.
Prerrequisitos	Ninguno
Tiempo estimado	Parte 1 – aproximadamente 1 hora. Parte 2: varía de un equipo a otro, pero se esperan entre 2 y 4 horas.
Implementación	Se sugieren equipos de 3 integrantes. Introducir la MEA en clase, con trabajo extra-clase.
Evaluación en proceso	Uso de una herramienta de reflexión para capturar el aprendizaje individual y el proceso grupal.
Evaluación del producto final (MEA)	Rúbricas para calificar tanto la parte individual como la parte en equipo.
Materiales complementarios	Ninguno
Dificultades por resolver	Ninguna
Actividades de seguimiento	Discusión en clase sobre por qué las estadísticas de criminalidad y la seguridad son criterios importantes en la decisión (no solo la economía).

	También discusión sobre la necesidad de considerar el valor del dinero en el tiempo.

Tabla 3.7 Guía instruccional MEA Campus lighting Economics. Traducido de (University of Pittsburgh S. S., Campus Lighting Economics, 2010, págs. 5-6)

En la guía instruccional se realiza un análisis a los principios de diseño de los MEA's, en la tabla 3.9 se presentan.

Principio	
Construcción del modelo	Ingeniería Economía / Comparación de Alternativas / Hoja de Cálculo
Documentación del modelo	Memorándum para el cliente; Hoja de cálculo de Excel con análisis de datos.
Generalización del modelo	Dado que se necesitan mejoras en la iluminación del campus en otras áreas del campus, se le pide al equipo que proporcione una hoja de cálculo general que podría usarse para comparar otras propuestas.
Prototipo simple	La comparación de alternativas es un concepto fundamental en la ingeniería económica... los estudiantes pueden hacer una comparación económica similar de otros proyectos de ingeniería.
De realidad	El artículo de noticias implica que es el campus de la Universidad de Pittsburgh y se proporcionan estadísticas sobre delitos en Pitt. Esto se puede cambiar fácilmente para representar a otra universidad.
Autoevaluación	En la parte 1, los estudiantes reconocerán cuando hayan desarrollado una lista completa de información importante necesaria para tomar la decisión. En la parte 2, se espera que los equipos determinen la propuesta de menor costo y tomen una decisión sobre qué propuesta recomendar.

Tabla 3.8 Principios de diseño de los MEA's para "Campus lighting economics" traducido de (University of Pittsburgh S. S., Campus Lighting Economics, 2010, pág. 7)

A continuación, se enlistan algunas actividades que favorecen la generación de modelos (MEA's) en el área de Cálculo que han sido implementadas en las Universidades de Purdue, Pittsburgh y Minessota en sus cursos de ingeniería, los investigadores

- La ruta de senderismo: Se les pide que determinen la dificultad de una ruta de senderismo al analizar una gráfica de la altura y la distancia, se realiza por medio del gradiente y se les solicita que lo determinen para cualquier gráfico (generalizar) (Yoon & Dreyfus, 2010).

- La planta mareomotriz: Se realiza una licitación en la que el objetivo es incrementar la producción en una planta de energía mareomotriz en un 20%, se requiere hacer ajustes a la planta ya existente y se dan algunas restricciones en cuanto a sus dimensiones, el equipo ganador se queda con el trabajo (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008).
- Captación de agua de lluvia: que aborda la resolución de problemas relacionados con propiedades de fluidos y fuerzas de corte resultantes de fluidos newtonianos, donde se requiere el diseño para evaluar la eficacia y la economía de la recolección de agua de lluvia para uso de riego residencial (University California Polytechnic State, 2010).
- Diseño de experimentos de mecánica de fluidos: en donde se promueve la resolución de problemas relacionados con propiedades de fluidos y fuerzas de corte resultantes de fluidos newtonianos, utilizando ecuaciones integrales para determinar el volumen (California Polytechnic State University, 2010).

Existen otras actividades que también se han implementado en cursos de ingeniería de las universidades mencionadas que pueden ser adaptadas para centrar los modelos esperados en conceptos de variación.

- Tiro a gol: Se llevan a los estudiantes a un campo de fútbol y ellos trata de encontrar las posiciones en el campo de futbol para maximizar las posibilidades de anotar gol, se espera que utilicen el ángulo de tiro para encontrar estos lugares. (Magiera, 2013)
- A home run: Un entrenador les pide a Ingenieros de materiales que le ayuden a comprar bates de beisbol más duraderos, les proporcionan muestras de aluminio para determinar la resistencia del material. Para resolver la actividad los estudiantes deben utilizar el área promedio de los cristales de aluminio de diferentes muestras de bates (Diefes-Dux, Hjalmarson, Zawojewski, & Bowman, 2006)
- Represas, terremotos y recortes presupuestarios: Construir una presa en Turquía, presentar varias alternativas que incluyan disminuir la altura, reducir costos eliminando materiales, también se debe tener en cuenta que la construcción se encuentra en una zona propensa a terremotos (University of Pittsburgh S. S., 2008).
- La Sociedad de Aviones sin Piloto de América: La NASA patrocina una competencia de cohetes, se desea realizar un proceso para definir el ganador en cada categoría (100, 500 y 1000 yardas). Cada equipo tiene 5 intentos por cada categoría y se proporcionan estadísticas de la longitud, tiempo de vuelo, entre otros (University of Pittsburgh S. S., Pilotless Airplane, 2008).

En la asignatura de Cálculo se han realizado MEA´s con el fin de abordar algunos elementos, y que el estudiante pueda visualizar alguna de las aplicaciones que tiene este tipo de actividades con la modelación matemática de contextos reales.

Una característica muy importante en la resolución de problemas utilizando MEA’s es que se deben tomar en cuenta varios factores, no sólo los resultados matemáticos de problemas convencionales en el aula de clases (por lo general en condiciones ideales), sino que también se deben tener en cuenta elementos éticos y de seguridad, tal como sucede en la realidad.

> Los estudiantes comenzaban a comprender que los problemas reales generalmente requieren que quien toma las decisiones vaya más allá de las soluciones racionales,

analíticas y matemáticas de los problemas y reconozca el impacto en factores no cuantificables como la seguridad, los efectos ambientales y los dilemas éticos (Bursic, Shuman, & Besterfield-Sacre, 2011, pág. 11).

3.2.4 Limitaciones de la enseñanza utilizando modelación

Es notable resaltar que el uso de la modelación matemática en el aula de clases no es tarea fácil, se debe tener en cuenta el tiempo que se debe dedicar a enseñar algunas técnicas para modelar partiendo de las matemáticas de los estudiantes, tal como menciona Trigueros (2009, pág. 85) "El tiempo que puede perderse en este tipo de técnicas —en un curso cuyo objetivo no es enseñar a modelar— puede empañar el propósito real de éste —que es la introducción de ciertos conocimientos matemáticos— y perder la atención de los estudiantes en los aspectos conceptuales importantes de la disciplina".

Además, la formación de los profesores en cuanto a resolución de problemas fue de manera tradicional y no se encuentran capacitados para trabajar con actividades de modelación matemática, una clase de modelación conlleva varios desafíos para el docente en cuanto a manejo de tiempos, el involucramiento con las matemáticas de los estudiantes, las interacciones, entre otros aspectos, lo que hace que no sea tan popular esta alternativa , como lo afirma Nielsen y Pochulu (2013, pág. 1396) "conlleva a que no siempre sea vista la modelización como una estrategia de enseñanza viable de ser utilizada en las clases, a pesar de que los profesores reconocen las ventajas que remarca el currículo escolar".

Sin olvidar que, los estudiantes tienen dificultades en varias etapas del proceso de modelación, iniciando por definir, reconocer las variables y sus relaciones con otras, así como el describir la situación en lenguaje matemático, tal como se afirma:

> Los resultados del análisis de los datos de la investigación muestran que un problema fundamental e importante que enfrentan los estudiantes es su falta de reconocimiento de variables y parámetros; y si estos valores son conocidos o desconocidos, oscuros o claros, independientes o relacionados. Sin este conocimiento fundamental, los estudiantes pueden tener dificultades para participar en actividades de modelado matemático, especialmente durante el proceso de matematización. Por tanto, no se debe ignorar la insuficiente capacidad de los estudiantes para categorizar variables y parámetros. Los educadores deberían ayudar a los estudiantes a establecer las relaciones útiles que requieren los problemas matemáticos. Otro problema obvio es el cambio representacional. Las herramientas y sistemas de representación, como tablas, gráficos y dibujos, son partes importantes del proceso de modelado matemático (Huang, 2012, pág. 313).

4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO

En las secciones anteriores, trazamos un recorrido por el desarrollo histórico del Cálculo, destacando cómo la disciplina ha evolucionado hacia una forma más abstracta, distanciándose de sus raíces fundamentadas en la experimentación y la modelación matemática. Al analizar los procesos de modelado de los cuatro personajes presentados, queda claro que el Cálculo ha experimentado una transformación significativa, adoptando una naturaleza más teórica y conceptual.

La introducción de esta forma más formal del Cálculo en las aulas de clases no ha estado exenta de desafíos. Este capítulo se centra en explorar algunas de las dificultades inherentes a la enseñanza de esta disciplina. Una de las problemáticas más notables es la creciente carga de abstracción, que ha llevado a muchos estudiantes a enfrentar obstáculos significativos al intentar comprender y aplicar los conceptos, ya que se abordan de manera algorítmica y tecnicista.

Ante este panorama, surge la idea de abordar la enseñanza abstracta a través de la modelación matemática de situaciones de la realidad. La aplicación de la modelación en el aula se presenta como una posible solución, ya que conecta los conceptos abstractos con situaciones tangibles y aplicaciones prácticas. Sin embargo, este enfoque no está exento de desafíos propios. En este apartado, se identifican y exploran algunos de los obstáculos que pueden surgir al emplear la modelación matemática como estrategia pedagógica. Es crucial tener en cuenta estos desafíos para desarrollar enfoques efectivos que integren la abstracción del Cálculo con la comprensión práctica, buscando así mejorar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes y abordar las dificultades asociadas con la enseñanza de esta disciplina en un contexto más abstracto.

4.1 Dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje del Cálculo

El propósito de los cursos de cálculo debe ser el de proveer herramientas a los estudiantes para que puedan resolver problemas de optimización, razón de cambio instantánea y acumulación en diversos contextos, pero en la realidad el enfoque tradicional de los cursos no cumple con esas expectativas.

Los cursos actuales de cálculo son de gran relevancia para la resolución de problemas relacionados con optimización, razón instantánea de cambio, acumulación en diversas áreas profesionales como la economía, física, ingeniería, medicina, entre otras. "Por otro lado, cuando en su actividad profesional y laboral los egresados tienen que resolver un problema de la industria, la modelación matemática es necesaria, y los estudiantes tiene dificultades para modelar el problema ya que no han sido preparados para ello durante sus estudios universitarios" (Camarena, 2012, pág. 2).

Es indispensable que en los cursos de cálculo la enseñanza se centre en que los estudiantes puedan utilizar estas herramientas. "Reenfocar la enseñanza en busca de un aprendizaje que implique un razonamiento matemático que tenga sentido y significado para el estudiante constituye un replanteamiento sustancial en la forma de arribar a las nociones y procedimientos del cálculo" (Salinas, 2011, pág. 66); la mayoría no dedicarán su vida laboral a las matemáticas, como mencionan Cantoral, Cordero, Farfán e Imaz:

> A pesar de las declaraciones en sentido opuesto, se tiene toda la impresión de que dentro del fenómeno de enseñanza del cálculo se ha olvidado por completo que dicho fenómeno se proyecta hacía futuros usuarios del tema, no hacía futuros expertos del mismo (Cantoral, Cordero, Farfán, & Imaz, 1990, pág. 56).

Los cursos de cálculo tradicional no se encuentran vinculados a los problemas que van a enfrentar los estudiantes en su ámbito laboral, se centran en problemas abstractos que para los estudiantes no poseen ningún valor adicional que el aprobar una materia y cuando se adentran en problemas de aplicación de los textos, carecen de sentido de replicabilidad en su futuro, tal como lo menciona Zúñiga:

> Un problema importante ligado a esta situación es que el conocimiento generalmente se trata fuera de contextos apropiados. Así, cuando se pretende mostrar a los estudiantes la utilidad de los contenidos que se estudian, a lo más que se llega en un curso común de cálculo es a resolver los llamados problemas de aplicación que se proponen en los textos, que casi nunca corresponden a la realidad (Zúñiga, 2007, pág. 147).

La educación tradicional se ha orientado a los procesos mecanicistas y algorítmicos abordando problemas estereotipados, con poca o nula conexión con las áreas ya mencionadas, además de introducir los conceptos del cálculo de una manera abstracta, privilegiando aumentar el porcentaje de aprobados del curso, sin importar que se comprendan y se puedan aplicar dichos conocimientos en su desarrollo profesional.

> La enseñanza mecanicista tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del Cálculo. Si bien con este tipo de enseñanza se logra disminuir sustancialmente el porcentaje de reprobados, con él no se logra que los estudiantes comprendan de manera satisfactoria los conceptos y métodos de pensamiento propios del Cálculo; los estudiantes acreditan los cursos por llevar a cabo, de manera más o menos mecánica, algunos cálculos de derivadas y primitivas y por resolver ciertos problemas estereotipados (Artigue, 1995, como se citó en Alanís y Soto, 2011, pag. 2).

Además, los cursos tradicionales se abordan desde un sentido tecnicista, donde prevalece enseñar "técnicas" para resolver cierto tipo de problemas de forma algorítmica, dejando de lado los contextos del mundo real. "El modelo tecnicista tiende a trivializar el proceso de enseñanza de las matemáticas" y "el tecnicismo tiene a olvidar los auténticos problemas" (Gascon, 2001, pág. 136).

El cálculo es una disciplina que ha evolucionado en la resolución de problemas propios, sin embargo, la concepción de los estudiantes acerca de ella difiere de la historia misma del cálculo, tal como lo menciona García:

> Si bien el álgebra constituye la base para el lenguaje matemático, debe tenerse en cuenta que es diferente al cálculo. Cada uno de estos campos de las matemáticas posee sus propias reglas y características, de manera tal que lo que es verdad en uno no significa que en el otro deba asumirse de igual manera. Al considerarse al cálculo como una extensión del álgebra, se potencia un aprendizaje sin comprensión, débil, pasajero contradictorio, descontextualizado, formal, superficial y libresco (García, 2013, pág. 34).

El estudio en los cursos actuales del cálculo tiende a ser de manera abstracta, utilizando el concepto de límite y la continuidad para introducir los elementos del cálculo que tiene su propia complejidad, además de que parece ser una extensión del álgebra, ya que no se hace una distinción entre los elementos de dichas áreas. Artigue dividió en tres grupos las dificultades de los estudiantes:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo.
- Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo.
- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo (Artigue, 1995, pág. 107).

4.2 Obstáculos relacionados con la modelación matemática

El Cálculo diferencial es una de las herramientas más importantes de las que puede hacer uso un profesionista para resolver problemas por medio de la modelación matemática. Sin embargo, el diseño de actividades de modelación no es tarea fácil. A finales de los años 60´s del siglo XX Pollak logró determinar una serie de obstáculos didácticos al tratar de introducir problemas del contexto real en las clases de matemáticas, los cuales se presentan en la tabla 4.1.

Obstáculo didáctico	
Problemas que utilizan palabras de la vida cotidiana y pretenden en distintos grados ser aplicaciones	Las actividades utilizan palabras de la vida cotidiana sólo para que el problema suene bien, la formulación rara vez cuestiona la veracidad de la conexión con el mundo real y suele ser falsa en más de una forma.
Problemas que usan palabras de otras disciplinas	Los problemas pretenden originarse de otras disciplinas académicas, sirven como pretexto para abordar ejercicios de técnicas matemáticas y se descuida la aplicación.

Problemas fantasiosos	Este tipo de problemas pueden describirse mejor como pura fantasía. Se utilizarán palabras de la existencia diaria o de otras disciplinas, pero quedará bastante claro para todos que no se pretende ninguna aplicación real.

Tabla 4.1 Obstáculos epistemológicos de Pollak. Adaptado de (Pollak, 1969). Elaboración propia

A partir de los años 80´s del siglo pasado, se comenzaron a presentar ciertos cursos de matemáticas utilizando modelos teóricos de modelación, por lo que también se pudieron hacer notar algunos obstáculos, que han sido clasificados según Plaza y Villa-Ochoa (2019, pág. 234) en "Ontogenéticos o psicogenéticos: se hallan y tienen su origen en los procesos del desarrollo de la niñez (limitaciones neurofisiológicas entre otras) y Didácticos: a partir de las diversas situaciones presentes en el sistema educativo, al establecer escenarios de enseñanza", en la tabla 4.2 se realiza una clasificación en categorías (Plaza Gálvez & Villa-Ochoa, 2019).

Categoría	**Obstáculo**	**Descripción**
Didácticos	Tiempo de clase	Los docentes no disponen de tiempo necesario y suficiente para poder abordar problemas a ser resueltos por modelación matemática.
	Acceso a tecnología	Los salones de clase o los alumnos no cuentan con equipos tecnológicos adecuados ni acceso a programas especializados.
	Métodos de enseñanza	las tareas de modelamiento pueden ubicar al docente en una zona de inseguridad, donde no siempre se saben las respuestas a posibles inquietudes planteadas por los estudiantes.
	Número de estudiantes por grupo	incide directamente en el logro de objetivos, por la forma en que puedan interactuar. La indisciplina cumple un papel importante.
	Tiempo de aprendizaje	Es necesario que el estudiante tenga unos conceptos previos al modelamiento matemático, para así contar con el tiempo necesario de comprensión de los problemas a resolver.
	Falta de formación en los docentes	Han sido formados con un estilo profesional, y la matemática cada vez se especializa más, por medio de los proyectos de aplicación.

Ontogenéticos	Origen en el docente	Interpretación del contexto: pocas situaciones se les exponen a los estudiantes donde se requiere de lectura, interpretación y explicación en contexto.
		Perfeccionamiento: son la falta de cursos de actualización en los saberes sobre MM para nuestros docentes.
		Bibliografía: no hay suficientes trabajos especializados publicados sobre MM, disponibles y de fácil acceso por parte de los docentes.
		Orientación: es necesaria por parte de un especialista en MM, ya que le garantiza seguridad al docente, al estar en capacidad de dirimir posibles dificultades.
		Planificación: la ausencia de esta permite un desvío de los procesos por parte del docente y, por ende, de los estudiantes.
		Disponibilidad para aprender y orientar simultáneamente.
		Evaluación: el MM n0ecesita una evaluación diagnóstica, procesal y de resultados
	Origen en el alumno	Interpretación de un contexto: el alumno presenta dificultades en la lectura, su interpretación y entendimiento. Reconoce poca relación entre el fenómeno real estudiado, los modelos físicos (por ejemplo, un circuito) y el MM planteado (su ecuación diferencial).
		Disponibilidad para investigar: el alumno puede tener inconvenientes de horario y espacio que no le permiten investigar sobre MM.
		Elección de un tema inicial: no es un proceso fácil. Para ello se requiere una correcta y oportuna orientación por parte del docente del curso que guíe el tópico de MM.
		Trabajo en grupo: la falta de empeño o compromiso por parte de algunos alumnos no permite el cumplimiento de actividades grupales sobre MM.

Tabla 4.2 Obstáculos didácticos y ontogenéticos. Adaptado de (Plaza Gálvez & Villa-Ochoa, 2019)

Es indudable que la modelación matemática debe ser parte en la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, es fácil caer en situaciones mal planteadas o utilizar como pretexto el contexto de otras disciplinas sin ser significativas para los estudiantes. Esto resalta la importancia de que las actividades se encuentren fundamentadas bajo una perspectiva de modelación que se centre en el diseño de actividades. En la literatura podemos encontrar varias perspectivas que se enfocan en los ciclos de modelación y cómo el estudiante pasa de la parte real al mundo matemático, y después, como se pueden interpretar los resultados en la situación inicial; sin embargo, al pretender atender la importancia del diseño de las actividades que generen modelos, en este trabajo se plantea una perspectiva que se enfoque en la actividad de modelación matemática.

4.3 Objetivos

En los cursos tradicionales se introducen los conceptos del Cálculo iniciando con límites, seguido por demostraciones de teoremas en los que se pierde la esencia del estudio de las magnitudes variables, dejando de lado la importancia de la experimentación que fue un pilar fundamental en su desarrollo histórico. En este trabajo se propone una alternativa desde la perspectiva de modelación matemática para impartir los cursos de Cálculo en educación media superior.

4.3.1 Objetivo General

Proponer y validar un diseño de enseñanza centrado en la modelación matemática con el fin de abordar la variación cuya segunda razón de cambio instantánea es una constante, en un curso de Cálculo Diferencial para escuelas de educación medio superior utilizando la experimentación en contextos de Física.

4.3.2 Objetivos específicos

1) Comprobar la viabilidad de las actividades que favorecen la generación de modelos para educación media superior en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
2) Promover en los estudiantes la capacidad de interpretar situaciones, crear y manipular modelos en la resolución de problemas a partir de la realidad.
3) Valorar la pertinencia de las actividades diseñadas para favorecer la generación de modelos con experimentación en contextos de Física para la enseñanza del Cálculo.

5 ASPECTOS TEÓRICOS

En esta sección, se adopta una perspectiva de modelación que se aparta de los enfoques convencionales centrados en ciclos de modelado, en los que se pone el foco en los procesos cognitivos de los estudiantes y en cómo realizan la transición del mundo real al mundo de las matemáticas. El enfoque de actividades MEA's (Model Eliciting Activities por sus siglas en inglés) emerge como una herramienta valiosa para el diseño de actividades que favorecen la generación de modelos, por medio del cumplimiento de sus principios.

En este proyecto se realiza una clasificación de estas actividades en MEA's mentales, MEA´s de simulación y MEA´s manipulables físicos, y se proporciona un marco claro para entender cómo los estudiantes pueden interactuar y comprender los conceptos matemáticos a través de diferentes medios. En particular, el proyecto se centra en el desarrollo de actividades con manipulables físicos, reconociendo la importancia de la experiencia táctil y visual en el aprendizaje matemático.

Las adecuaciones realizadas a los elementos teóricos para converger hacia actividades con manipulables físicos indican un enfoque práctico y orientado a la acción. Este ajuste demuestra una comprensión profunda de las necesidades y estilos de aprendizaje de los estudiantes, reconociendo que la manipulación física puede ser un puente efectivo entre el mundo real y las abstracciones matemáticas.

En esta sección destaca un enfoque innovador que se aparta de las convenciones y se enfoca en la experiencia cognitiva de los estudiantes. La adopción de actividades MEA y la clasificación en tipos específicos proporcionan un marco claro para el diseño de experiencias de aprendizaje matemático, y las adaptaciones hacia manipulables físicos señalan una consideración cuidadosa de las necesidades prácticas de los estudiantes. Este enfoque promete no solo mejorar la comprensión matemática, sino también hacerla más accesible y significativa para los aprendices.

5.1 Perspectivas de modelos y modelación

En la literatura podemos encontrar varias perspectivas que se centran en los ciclos de modelación, con el objetivo de detallar los procesos cognitivos intervinientes al momento de describir, matematizar, manipular, predecir y verificar las situaciones problema. En este trabajo se hace énfasis en el diseño e implementación de actividades que puedan ayudar a crear modelos. De esta manera se utilizarán las actividades que favorecen la generación de modelos MEA's (Model Eliciting Activities por sus siglas en inglés) que provienen de la Perspectiva de Modelos y Modelación de Richar Lesh y Hellen Doerr. La definición de modelo según este enfoque es:

> Los modelos son sistemas conceptuales (que consisten en elementos, relaciones, operaciones y reglas que rigen las interacciones) que se expresan mediante sistemas de notación externa y que se utilizan para construir, describir o explicar el

> comportamiento de otro(s) sistema(s), tal vez para que el otro sistema puede manipularse o predecirse inteligentemente. Un modelo matemático se centra en las características estructurales (en lugar de, por ejemplo, las características físicas o musicales) de los sistemas relevantes. (Lesh & Doerr, 2003, pág. 10).

En el mismo sentido, la definición de modelación es “La modelación es el proceso dinámico de crear y manipular estos modelos conceptuales en la resolución de problemas. Se puede describir como un proceso de adaptación, de crear soluciones a problemas previamente no resueltos” (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008, pág. 8).

Al utilizar este enfoque de modelación de manera adecuada se favorece la generación de modelos y el pensamiento crítico, los estudiantes pueden estar revisando si sus respuestas son coherentes y utilizan un ciclo donde expresan modelos, los prueban y revisan, de tal manera que pueden evaluar sus sistemas conceptuales. Hamilton y colaboradores (2008, pág. 9) menciona “Una suposición central de la investigación MEA es la noción de que el pensamiento matemático funciona como un conjunto de sistemas, donde las ideas matemáticas están conectadas e integradas en contextos en los que se aprenden y utilizan”.

Las actividades que se plantean parten de un principio de realidad, en la que al diseñar debemos preguntarnos ¿la situación o problemática a solucionar presentada a los estudiantes puede suceder en la “vida real”? Cuando los estudiantes abordan situaciones significativas se crean estructuras cognitivas en la resolución de problemas, tal como se menciona:

> los individuos crean comprensiones y modelos matemáticos a medida que matematizan problemas cuya resolución les resulta significativa. El significado impulsa la cognición. Muchos conceptos, habilidades y procesos matemáticos que los estudiantes desarrollan durante la resolución de problemas del mundo real son significativamente menos utilizables cuando se enseñan de una manera desconectada de contextos intrínsecamente motivadores o significativos (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008, pág. 9).

Este tipo de actividades fomentan el pensamiento sistémico, el cual consiste en dar sentido a los procesos y resultados matemáticos, aquí se incluye la toma de decisión para afrontar el problema o como proceder ante situaciones que dificultan su resolución, Hamilton y colaboradores (2008, pág. 9) lo definen como “un proceso sistémico: organizar, interpretar, conectar y manipular diferentes partes de la situación para dar más sentido al conjunto y a los posibles caminos de solución” y lo caracterizan como la contribución más importante de los MEA con la educación matemática.

En la perspectiva de modelos y modelación de Richard Lesh y Hellen Doerr se enfatiza la creación de modelos, en donde “el proceso es el producto, es decir los fines van más allá de dar una sola respuesta a un ejercicio o problema en específico” (Lesh & Doerr, 2003, pág. 1) En la figura 5.1 se puede observar que el proceso es parte del producto.

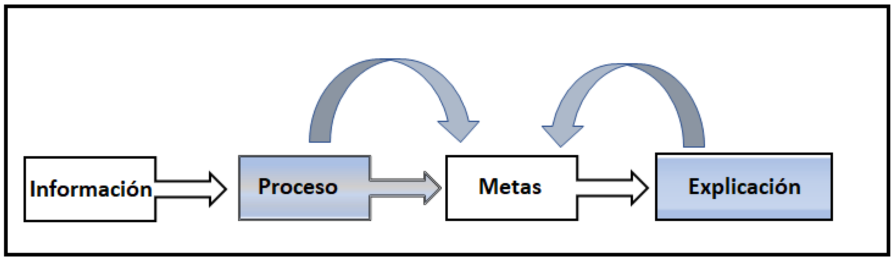


Figura 5.1 En las MEA's el proceso es el producto. Tomado de (Lesh & Doerr, 2003, pág. 3)

Donde el estudiante tiene el control para la obtención del modelo que represente la realidad, por lo que a menudo alternan una gran diversidad de representaciones. Entre las más utilizadas y estudiadas se encuentran las tablas, ecuaciones y gráficas. Pero los estudiantes manejan otro tipo de representaciones tales como: símbolos escritos, lenguaje hablado, diagrama o imágenes, modelos concretos y representaciones basados en experiencias o metáforas y se mueven de una a otra como se observa en la figura 5.2.

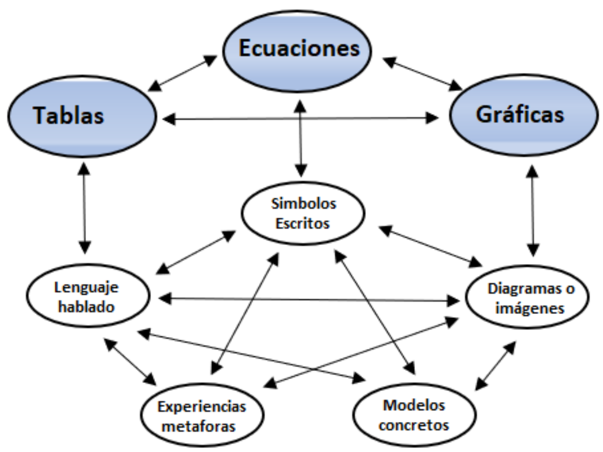


Figura 5.2 Los significados de los sistemas conceptuales se distribuyen a través de una variedad de medios de representación (Lesh & Doerr, 2003, pág. 12)

Los autores de las actividades que favorecen la generación de modelos MEA´s no se identifican con las perspectivas tradicionales de resolución de problemas de aplicación, donde estos se resuelven después de recibir la teoría correspondiente y el método de resolución es estandarizado. En cambio, las actividades generadoras de modelos, los estudiantes deben formar el camino a seguir, afrontando problemas en los que la teoría propuesta no es suficiente.

Las actividades generadoras de modelos simulan problemas auténticos, situaciones del mundo real con pequeños equipos de 3 a 5 estudiantes que trabajan para resolverlos en una o dos sesiones de clase. La interacción crucial de la resolución de los problemas de un MEA consisten en expresar, probar y revisar modelos que resolverán el problema. A diferencia de otros enfoques que se concentran en procesos cognitivos o análisis de la actividad cíclica de modelación, los MEA's surgen con un enfoque de intervención, para el diseño de enseñanza.

5.2 Principios de diseño de las MEA's

En entrevistas clínicas que realizaron los autores de los MEA's sobre actividades de modelación matemática, el tema de "características del problema" fue predominante, lo que llevó a la conclusión que, durante el diseño se deben enfocar en el desarrollo de modelos que puedan ocurrir en la vida cotidiana o profesional, que los estudiantes puedan modificar, adaptar y refinar estos sistemas o ideas que tienen y que logren encontrar formas de afrontar las dificultades que se presentan en su desarrollo. De esta manera, los puedan interpretar significativamente con diferentes descripciones matemáticas y tener control sobre su modelo. A partir de estas premisas para el diseño de los MEA´s se debe cumplir con los 6 principios siguientes (Lesh & Doerr, 2003).

Principios de diseño de las MEA's
Principio de Realidad: ¿Podría suceder esto en la vida real? ¿Se alentará a los estudiantes a dar sentido a la situación basándose en extensiones de sus propios conocimientos y experiencias personales?
Construcción de modelos: ¿implica construir, explicar, manipular, predecir o controlar un sistema estructural significativo? ¿La tarea creó la necesidad de construir (o modificar, ampliar o refinar) un modelo?
Documentación del modelo: ¿La respuesta requerirá que los estudiantes revelen explícitamente cómo piensan acerca de la situación (datos, objetivos, posibles caminos de solución)? ¿En qué tipo de sistemas (objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones, regularidades) están pensando?
Autoevaluación: ¿El planteamiento del problema sugiere claramente los criterios apropiados para evaluar la utilidad de respuestas alternativas? ¿Podrán los estudiantes juzgar por sí mismos cuando sus respuestas sean lo suficientemente buenas? ¿Quedará claro qué propósitos pretenden abordar los resultados? ¿Para quién? ¿Cuándo?
Generalización del modelo: en situaciones de la "vida real", rara vez vale la pena desarrollar una herramienta conceptual (como un modelo) si la herramienta se va a utilizar una vez. Entonces, el principio de generalización del modelo dice: "¿Es el modelo no sólo poderoso para la situación específica y el cliente en cuestión, sino también compartible con otros y reutilizable en otras situaciones"?

Prototipo simple: ¿Es la situación lo más simple posible y al mismo tiempo crea la necesidad de un modelo significativo? ¿Proporcionará la solución un prototipo (o metáfora) útil para interpretar otras situaciones estructuralmente similares?

Tabla 5.5 Principios de diseño. Tomada de (Hamilton, Lesh, Lester, & Brilleslyper, 2008, pág. 7).

Para poder cumplir con el principio de Realidad se deben tomar en cuenta todas las variables que intervienen en la MEA, es decir no basta con que los estudiantes se puedan imaginar una situación, es necesario que se modele con datos reales, inclusive se deben tomar en cuenta los dilemas éticos al presentar una solución de un problema, por ejemplo, la destrucción de árboles (actividad Trees and road safety) en la tabla 5.2 se presentan algunos MEA's con algunos aspectos relevantes.

Título	**Grupo de autores**	**Situación problema**	**Dilema Ético**	**Conceptos relevantes**
Campus Lighting Economics	Purdue University	¿Cuál es la propuesta menos costosa de iluminación para un campus universitario y que considere la seguridad de la comunidad?	Preocupaciones por la seguridad del campus versus el costo de la nueva iluminación	Estimación de costos Valor temporal del dinero Comparación de alternativas de inversión
Trees and Road Safety	University of Pittsburgh	¿Deberían eliminarse los árboles viejos de los parques para aumentar la seguridad vial?	Destrucción de árboles viejos (preocupaciones ambientales) contra de seguridad del conductor/pasajero	Estimación de costos, valor temporal del dinero. Relación costo-beneficio. Consideración de todos los criterios relevantes Problemas contemporáneos.
Dams, Earthquakes and Budget Cuts.	University of Pittsburgh	¿Cómo debería completarse un importante proyecto de represa en Turquía teniendo en cuenta los recortes	Provisión de agua, creación de empleo, estabilidad económica contra riesgos	Estimación de costos, valor temporal del dinero.

		presupuestarios necesarios?	de la construcción en regiones propensas a terremotos, preocupaciones ambientales y relaciones internacionales	Relación costo-beneficio, incertidumbre. Consideración de todos los criterios relevantes Problemas contemporáneos.
Bridge Replacement	University of Minnesota	Decidir el tipo de estructura del puente a reemplazar tomando en cuenta varios factores.	Realizar un análisis de costo/beneficio de la construcción del puente.	Uso de datos numéricos y categóricos. Ponderación de variables para la toma de decisiones.
Energy Efficiency Rebate	California Polytechnic State University	Desarrollar programas que brinden incentivos financieros para que los clientes tomen medidas para hacer que sus hogares sean más eficientes energéticamente	Disminuir el consumo energético.	Potencia instantánea, media. Consumo de energía estimada al mes. Análisis comparativo.

Tabla 5.2 Implementación de MEA´s en la Universidad de Pittsburgh. Adaptado de (Shuman, Besterfield-Sacre, Pinar, & Sieworiek, 2010)

5.3 Clasificación de MEA's

En este trabajo se ha realizado una clasificación de las MEA´s según la manera en la que se presentan los datos relevantes para la matematización de las situaciones problemas para generar modelos. En este tipo de actividades los estudiantes trabajan a nivel de profesionistas, ya sea como ingenieros, científicos, entre otros. Por lo que es necesario que las situaciones problemas presenten retos de su ámbito profesional, lo que les ayuda a vincular el contenido escolar con otros contextos.

A. MEA's mentales

La componente principal de este tipo de actividades consiste en que el docente proporciona a los estudiantes los datos, provenientes de contextos reales, que podrían ser estadísticas, medidas, o cualquier conjunto de información relevante. Se alienta a los participantes a visualizar la situación de la vida real detrás de la información proporcionada, incorporando elementos cualitativos que podrían no ser evidentes a primera vista. Utilizando la combinación de datos y su imaginación, los participantes desarrollan modelos matemáticos que no solo capturan la esencia de la situación, sino que también ofrecen soluciones prácticas.

B. MEA's de simulación

En este tipo de MEA se adopta la simulación por medio de software como la fuente primaria de datos para la generación de modelos matemáticos. Este método ofrece una alternativa eficiente y controlada para explorar fenómenos complejos sin la necesidad de llevar a cabo experimentos físicos. El software utilizado ofrece diversas representaciones visuales y numéricas, permitiendo a los participantes abordar los problemas desde múltiples perspectivas y fortalecer su comprensión. Además, simulación proporciona un entorno controlado y versátil para la exploración matemática.

C. MEA's con manipulables físicos

En este tipo de actividades la generación de modelos matemáticos se realiza mediante la manipulación directa de objetos físicos. La experimentación práctica con estos objetos no solo facilita la observación de interacciones y covariaciones, sino que también permite realizar ajustes en tiempo real, buscando optimizar los resultados del problema propuesto. Este enfoque, basado en la experimentación con objetos físicos, resalta la importancia de la práctica y la acción directa para la comprensión y generación de modelos matemáticos significativos.

5.4 MEA´s con manipulables Físicos

En la literatura se puede encontrar gran cantidad de actividades MEA´s que involucran procesos mentales, ejemplos de éstos se pueden observar en algunas materias de Ingeniería de universidades de Estados Unidos como en la Universidad de Pittsburgh o la Universidad de Purdue. En este proyecto de intervención se promueve el uso de los MEA's con manipulables físicos.

Al centrase en el estudio de los MEA's físicos manipulables, en este trabajo se adecuan algunos elementos teóricos con el fin de hacer visible la importancia de las covariaciones y relaciones entre magnitudes variables a través de la manipulación de objetos, en la tabla 5.3 se muestran los principios de diseño bajo esta perspectiva.

Principios de diseño de las MEA's	**Principios de diseño para MEA's Físicos manipulables**
Principio de Realidad: ¿Podría suceder esto en la vida real? ¿Se alentará a los estudiantes a dar sentido a la situación basándose en	**Principio de Realidad:** Los contextos provienen de la experimentación en Física en donde los estudiantes pueden ver y manipular objetos.

extensiones de sus propios conocimientos y experiencias personales?	
Construcción de modelos: ¿implica construir, explicar, manipular, predecir o controlar un sistema estructural significativo? ¿La tarea creó la necesidad de construir (o modificar, ampliar o refinar) un modelo?	**Construcción de modelos**: El objetivo de la experimentación es crear modelos matemáticos para describir, manipular y predecir los resultados al manipular objetos físicos.
Documentación del modelo: ¿La respuesta requerirá que los estudiantes revelen explícitamente cómo piensan acerca de la situación (datos, objetivos, posibles caminos de solución)? ¿En qué tipo de sistemas (objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones, regularidades) están pensando?	**Documentación del modelo:** Se debe especificar a los estudiantes que documenten los productos intermedios para indagar como están pensando en la resolución del problema.
Autoevaluación: ¿El planteamiento del problema sugiere claramente los criterios apropiados para evaluar la utilidad de respuestas alternativas? ¿Podrán los estudiantes juzgar por sí mismos cuando sus respuestas sean lo suficientemente buenas? ¿Quedará claro qué propósitos pretenden abordar los resultados? ¿Para quién? ¿Cuándo?	**Autoevaluación:** Al estar realizando el experimento los estudiantes pueden encontrar algunas discrepancias o errores al medir, y pueden realizar de nuevo el experimento para corroborar los efectos que se producen, en el caso de que busquen una mejora, pueden manipular algunas variables para predecir mejores resultados.
Generalización del modelo: en situaciones de la "vida real", rara vez vale la pena desarrollar una herramienta conceptual (como un modelo) si la herramienta se va a utilizar una vez. Entonces, el principio de generalización del modelo dice: "¿Es el modelo no sólo poderoso para la situación específica y el cliente en cuestión, sino también compartible con otros y reutilizable en otras situaciones"?	**Generalización del modelo**: Los alumnos pueden llegar a parametrizar modelos específicos al manipular objetos, de tal manera que pueden variar ciertas magnitudes y predecir fácilmente los resultados.
Prototipo simple: ¿Es la situación lo más simple posible y al mismo tiempo crea la necesidad de un modelo significativo? ¿Proporcionará la solución un prototipo (o	**Prototipo simple**: Al abordar situaciones problema por medio de la experimentación se generan habilidades al trabajar con objetos físicos, lo que puede promover la construcción de modelos y el potencial de

metáfora) útil para interpretar otras situaciones estructuralmente similares?	generalización en el que se incluyen aspectos de manipular objetos y cuantificar sus variaciones.

Tabla 5.3 Principios de diseño para MEA´s con objetos físicos manipulables. Elaboración propia

5.5 Guía instruccional

Para la implementación de los MEA en el grupo de la universidad de Pittsburgh se ha elaborado una guía instruccional con el fin de que la actividad se pueda llevar a cabo por distintos docentes, tal como se muestra en la tabla 5.4 donde se añade la componente de MEA's físicos manipulables.

Aspecto	Definición	MEA's físicos manipulables
Problema/Contexto	Se presenta el contexto y el problema a resolver.	Se define el experimento a llevar cabo, el contexto y la situación a resolver.
Modelos obtenidos	Se definen a que disciplina pertenecen los modelos	Modelos matemáticos y físicos
Disciplinas	Se definen las disciplinas involucradas	Matemáticas y Física
Datos e información del problema	Se divide la actividad en momentos, dentro de los cuales se define: • Los datos e información del problema • Las restricciones • Los productos que se deben obtener	Se divide la actividad en momentos y se define: • Las restricciones • Las variables involucradas • Datos del problema • Productos
Rutas de solución anticipadas	Se consideran las rutas de solución previstas que pueden seguir los estudiantes	Se consideran las rutas de solución previstas durante y al finalizar el experimento.
Rutas de solución observadas (por el estudiante)	Se reportan las rutas de solución observadas de los estudiantes	Se reportan las rutas observadas de los estudiantes.
Objetivos de aprendizaje	Se determinan los objetivos de aprendizaje de la actividad	Se determinan los objetivos de la experimentación.
Habilidades específicas por promover	Se definen las habilidades por promover.	Se definen algunas habilidades a promover antes y durante la experimentación.
Prerrequisitos	Se definen los conocimientos previos requeridos por los estudiantes.	Se definen los conocimientos previos de los estudiantes para llevar a cabo el experimento, además de los

		conocimientos en cuestiones de experimentación.
Tiempo estimado	Se definen los tiempos requeridos por cada momento de la actividad.	Se definen tiempos de cada momento, donde se incluye el tiempo de duración del experimento.
Implementación	Se determina como se aborda cada momento en el MEA, es decir si es de manera individual, en equipo o grupal. Se define la carga de trabajo en clase y extraclase.	Se determina como se aborda cada momento en el MEA con manipulables físicos (individual, en equipo o grupal). Se define la carga de trabajo para el experimento en clase y las actividades extraclase.
Evaluación en proceso	Uso de una herramienta de reflexión para capturar el aprendizaje individual y el proceso grupal.	Uso de herramientas de evaluación para el trabajo durante la experimentación.
Evaluación del producto final (MEA)	Rúbricas para calificar tanto la parte individual como la parte en equipo.	Rúbricas para calificar tanto la parte individual como la parte en equipo.
Materiales complementarios	Se determinan los materiales complementarios para realizar el MEA.	Se definen los materiales complementarios para realizar el experimento.
Dificultades por resolver	Se definen algunas dificultades a resolver durante el MEA.	Se determinan algunas dificultades a resolver durante: • El experimento • La teoría del tema a abordar
Actividades de seguimiento	Son actividades complementarias para analizar las habilidades promovidas por el MEA	Se realizan exámenes para verificar que se haya promovido en los estudiantes ciertas habilidades durante el experimento.

Tabla 5.4 Guía instruccional para MEA's Físicos. Adaptado de (University of Pittsburgh S. S., Trees and Road Safety, 2008)

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este proyecto, se ha optado por complementar las metodologías formales de diseño de intervención didáctica con una metodología experimental. Mientras que las metodologías formales son valiosas para definir características en el diseño, la implementación, la toma de datos y el análisis, la metodología experimental agrega una capa adicional al enfoque, permitiendo una exploración más profunda y detallada. La investigación basada en el diseño emerge como una herramienta práctica en la intervención educativa. Proporciona los elementos necesarios para evaluar el diseño y el entorno en el que se desarrolla, brindando la oportunidad de influir en los procesos cognitivos de manera más directa.

Dentro de la variedad de enfoques experimentales, nos centramos en "Experimentos de diseño uno a uno (maestro-experimento y estudiante)". Este enfoque implica que un equipo de investigación lleve a cabo una serie de sesiones de enseñanza con un pequeño grupo de estudiantes. El objetivo es crear una versión a pequeña escala de una ecología de aprendizaje, lo que permite un estudio minucioso y detallado. Siguiendo la definición de Steffe y Thompson (2000), este enfoque brinda la oportunidad de sumergirnos en un entorno controlado, donde los aspectos específicos de la intervención pueden ser analizados con profundidad. La interacción directa entre el maestro-investigador y los estudiantes permite una comprensión detallada de cómo se reciben y procesan los conceptos, y cómo estos influyen en los procesos cognitivos.

La combinación de metodologías formales de diseño y experimentales proporciona un enfoque integral para abordar la intervención educativa. Al incorporar experimentos de diseño uno a uno, se busca no solo diseñar efectivamente la intervención, sino también comprender en detalle cómo se desarrolla y cómo impacta en los estudiantes en un entorno controlado.

6.1 Metodología de Experimentos en el aula

En el proyecto se propone el diseño de actividades donde la generación de modelos es uno de los propósitos fundamentales, lo que hace notable la importancia de tener una metodología que provea de elementos para valorar durante el proceso de implementación y verificar que realmente se fomenta la construcción de modelos. En este contexto la metodología de Experimentos de Enseñanza de Steffe y Thompson se adecua, puesto que permite el acercamiento a las matemáticas de los estudiantes, por medio del acompañamiento en la implementación, no sólo con la recogida de datos y su análisis. Las etapas metodológicas del proyecto de intervención se muestran en la Figura 6.1.

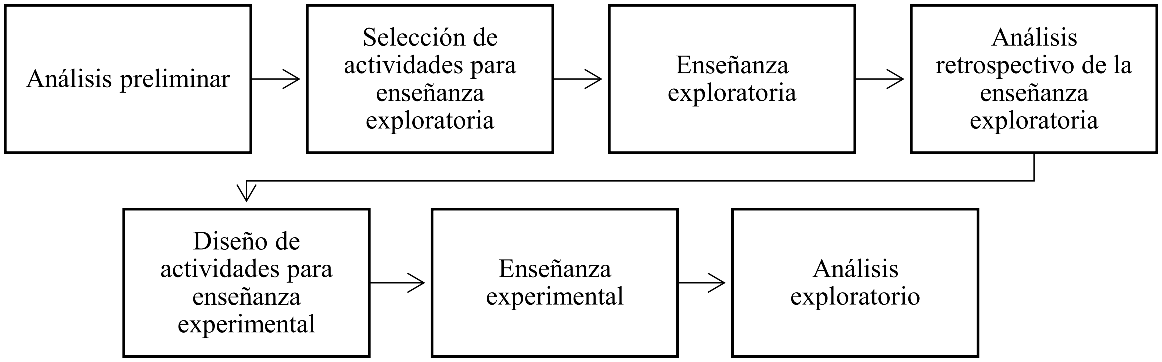


Figura 6.1 Etapas generales del proyecto de intervención

6.2 Análisis preliminar

Para el diseño de la propuesta se realiza un análisis del contenido por medio de una revisión bibliográfica sobre trabajos con actividades de modelación matemática y elementos del Cálculo utilizando contextos de Física. El objetivo es encontrar situaciones y tipos de problemas que han sido abordados con un enfoque de modelación. Para el diseño de las actividades realizó una búsqueda en la literatura con el fin de generar dos productos. Primero, definir algunas situaciones de aprendizaje que favorecieran la generación de modelos por medio de la experimentación y segundo el tipo de problemas a abordar.

Dentro de esta revisión se analizaron prácticas de laboratorio de varias instituciones educativas de diferentes niveles, con el fin de adaptar estas situaciones a las Actividades que favorecen la generación de modelos (MEA's), pero pudimos observar que intervienen muchas variables y ello pudiera provocar algunas dificultades que no son deseadas al trabajar con estudiantes de bachillerato en los que podría ser su primer acercamiento a la experimentación. De acuerdo con estas condiciones, se decide trabajar con situaciones de cinemática en específico, se plantean situaciones en los siguientes contextos: caída libre, tiro vertical y tiro parabólico.

Después de definir las situaciones, se plantea el tipo de problemas a abordar según la clasificación de las actividades que favorecen la generación de modelos, en el que se decide trabajar con los MEA's Manipulables físicos. Tomando como referencia los conceptos que se determinaron en contextos de la cinemática, donde se pueda abordar la variación cuya segunda razón de cambio instantánea es constante, determinar las variables de estudio y del entorno para estudiantes de educación media superior.

6.3 Selección de actividades para la enseñanza exploratoria

Se realizó una búsqueda en la literatura de MEA's que han sido implementadas en educación media superior, se encontró una actividad que ya fue implementada en bachillerato en una preparatoria de educación privada en México, por lo que se decidió utilizar esta MEA en la enseñanza exploratoria. La actividad es "El problema del Hotel histórico" donde se debe plantear un procedimiento para conocer cuánto se debe cobrar por habitación con el fin de maximizar las ganancias tomando en cuenta los precios y los costos de mantenimiento (Aguilar, 2021). A continuación, se presenta la actividad completa.

El problema del Hotel histórico

> El Sr. Frank Graham acaba de heredar un hotel histórico. Le gustaría quedarse con el hotel, pero tiene poca experiencia en gestión hotelera. El hotel tiene 80 habitaciones, y el dueño anterior le dijo al Sr. Graham que todas las habitaciones están ocupadas cuando la tarifa diaria es de $60 por habitación. También le dijeron que por cada dólar de aumento en la tarifa diaria de $60, se renta una habitación menos. Cada habitación ocupada tiene un costo de $4 por servicio y mantenimiento por día.
>
> Al Sr. Graham le gustaría saber cuánto debería cobrar por habitación para maximizar su ganancia y cuál sería su ganancia a esa tasa. Además, le gustaría tener un procedimiento para encontrar la tarifa diaria que maximizaría sus ganancias en el futuro, incluso si cambian los precios del hotel y los costos de mantenimiento. Escríbale una carta al Sr. Graham diciéndole qué precio cobrar por las habitaciones para maximizar sus ganancias e incluya su procedimiento para que lo use en el futuro (Aguilar, 2021, pág. 57).

Se desea plantear esta actividad con el fin de verificar que se cumplen los principios de diseño propuestos por las actividades que favorecen la generación de modelos, para esto se utiliza la metodología de experimentos de enseñanza, la cual plantea una enseñanza exploratoria como un primer encuentro por parte del docente/investigador a esta metodología, de tal manera que pueda enfocarse en las matemáticas de los estudiantes.

6.4 Enseñanza exploratoria

Los autores de la metodología sugieren un primer acercamiento a la misma por medio de la enseñanza exploratoria para que "el profesor/investigador se familiarice con la actividad experimental, las formas y medios de operación de los estudiantes en cualquier dominio de los conceptos y operaciones matemáticas que sean de su interés" (Steffe & Ulrich, 2014, pág. 104). Es centrarse en lo que hacen los estudiantes y dejar de lado sus propias concepciones matemáticas, permitiendo que en esta enseñanza revele los procesos de los estudiantes.

Con la implementación de la enseñanza exploratoria se quiere validar la viabilidad de las Actividades que favorecen la generación de modelos y la consecución de sus principios. En lugar de elaborar un diseño de una MEA bajo la perspectiva del docente, con hipótesis preconcebidas y sesgar los resultados, se plantea la implementación de una actividad ya diseñada en las condiciones más cercanas posibles al contexto educativo.

6.5 Análisis retrospectivo de la enseñanza exploratoria

El objetivo de la enseñanza exploratoria es descubrir cómo operan los estudiantes, observar las interacciones, sus maneras de pensar y sus conocimientos previos. Además, le añadimos un propósito adicional que es verificar el cumplimiento de los principios de diseño de los MEA's, los cuales se pretende que sean válidos para educación media superior en el subsistema COBACH de Sonora.

En este análisis se generan algunas hipótesis para el diseño de la enseñanza experimental en cuanto a las rutas de solución previstas, obstáculos observados, entre otros. El docente/investigador observa detalladamente las interacciones de los estudiantes, prestando atenciones en las estrategias, autoevaluaciones y las repuestas de los estudiantes. Se deben identificar posibles obstáculos que se puedan presentar durante la implementación, con el fin de proporcionar algunos elementos para ajustar la instrucción y abordarlas.

6.6 Diseño de actividades para enseñanza experimental

El diseño de la enseñanza experimental se basa en los principios de los MEA's con manipulables físicos, reconociendo la importancia de la manipulación tangible en el aprendizaje matemático. Estos principios buscan aprovechar la interacción directa con objetos físicos para profundizar la comprensión y construcción de conocimiento matemático. Los resultados obtenidos durante la enseñanza exploratoria sirven como cimientos valiosos para el diseño. La observación detallada de las interacciones estudiante-estudiante y estudiante-matemáticas proporciona información clave sobre los procesos de aprendizaje y los desafíos enfrentados.

La guía de instrucción de MEA’s físicos manipulables actúa como un recurso esencial para el diseño. Proporciona pautas y mejores prácticas específicas para la implementación efectiva de manipulables físicos en el contexto educativo, asegurando un enfoque pedagógico alineado con la metodología experimental. La formulación de hipótesis de diseño puede provenir de:

- Principios de diseño: Se plantean hipótesis sobre cómo concretar estos principios en la actividad seleccionada, los cuales estarán centrados en la manipulación física, se espera que influyan en la comprensión y retención del contenido matemático.
- Modelos generados: Se anticipa la diversidad de modelos que los estudiantes podrían generar a través de la interacción con los manipulables físicos, considerando la flexibilidad cognitiva.
- Rutas de solución anticipadas: Se definen hipótesis sobre las posibles rutas de solución que los estudiantes podrían tomar al enfrentar problemas específicos, incorporando la variabilidad esperada en las respuestas.

Es importante resaltar que la diversidad en las evaluaciones durante el proceso en la enseñanza experimental es fundamental para obtener una comprensión integral del aprendizaje de los estudiantes y ajustar la instrucción de manera efectiva. A continuación, se presentan algunos tipos, criterios e instrumentos de evaluación propuestos:

- Observación continua: Se establece la observación continua durante los episodios de enseñanza para evaluar la interacción estudiante-estudiante y la efectividad de la manipulación física.
- Retroalimentación formativa: Se implementa la retroalimentación formativa para realizar ajustes en tiempo real, respondiendo a las necesidades emergentes de los estudiantes.
- Evaluación del producto final.

- Criterios de evaluación: Se definen criterios específicos para evaluar los productos finales generados por los estudiantes, considerando la calidad de las representaciones matemáticas y la solidez conceptual.
- Instrumentos de evaluación: Se seleccionan instrumentos de evaluación, como rúbricas adaptadas, que facilitan una evaluación integral y objetiva de los resultados finales.

Este enfoque de diseño integral asegura una alineación estrecha con los principios de los MEA's con manipulables físicos, aprovechando la enseñanza exploratoria como una base informada y utilizando la guía de instrucción para optimizar la implementación práctica. La formulación cuidadosa de hipótesis y la atención a las evaluaciones durante el proceso y el producto final garantizan una implementación efectiva y una retroalimentación significativa.

6.7 Enseñanza experimental

La enseñanza experimental se posiciona como una estrategia que fusiona la investigación con la intervención didáctica, priorizando las matemáticas de los estudiantes. En este enfoque, las interacciones entre profesor y estudiante se construyen a partir del trabajo activo de los alumnos. La implementación de la metodología implica las pruebas de hipótesis derivadas del diseño de actividades y del diseño de la implementación de estas, utilizando los experimentos de enseñanza de Steffe y Thompson para validar y generar nuevas hipótesis durante la ejecución.

Durante los episodios de enseñanza, se enfatiza la documentación de modelos generados por los estudiantes, estableciendo la base para ciclos de revisión expresar-revisar-probar. La evaluación de procesos intermedios se realiza para definir las representaciones matemáticas que intervienen en el proyecto, utilizando rúbricas adaptadas del grupo de la Universidad de Pittsburgh en específico la Guía Instruccional. Es crucial determinar si se requieren materiales adicionales para el desarrollo de las actividades, asegurando que estos respalden la experimentación y el proceso de modelado de los estudiantes.

La interacción durante la enseñanza experimental se caracteriza por un enfoque analítico, según la definición de Steffe (2014). Los docentes se convierten en observadores críticos del pensamiento de los estudiantes, saliendo de su rol receptivo/intuitivo. La evaluación de la interacción puede llevarse a cabo de forma individual, por equipo o grupal, destacando la importancia de comprender y analizar el pensamiento en curso.

La recolección de datos se realiza en varios momentos clave. Durante la generación de modelos, se utiliza rúbricas de evaluación para evaluar los procesos intermedios. Al concluir la actividad, se recopilan los modelos generados para un análisis más profundo. Una guía instruccional adaptada del grupo de la Universidad de Pittsburgh se utiliza como referencia para este propósito.

La enseñanza experimental no solo busca mejorar la comprensión matemática de los estudiantes, sino también desarrollar la capacidad de los docentes para analizar, adaptar y enriquecer su enfoque pedagógico. La integración de investigación y práctica didáctica ofrece una plataforma dinámica para la mejora continua en el proceso educativo, fomentando el pensamiento crítico y la participación activa de los estudiantes en su propio aprendizaje.

6.8 Análisis retrospectivo de la enseñanza experimental

Se realiza un análisis integral: explorando el fenómeno del aprendizaje y el diseño Instruccional.

El primer tipo de análisis se centra en el fenómeno del aprendizaje, abordando las respuestas finales de los estudiantes. Este estudio va más allá de la mera evaluación de resultados, incorporando un análisis profundo de los productos intermedios y las representaciones matemáticas empleadas en la generación de modelos. Este enfoque integral permite comprender las etapas intermedias del proceso de aprendizaje, identificar patrones y desafíos específicos, y evaluar la efectividad de las estrategias pedagógicas utilizadas. Preguntas clave para el Análisis del Fenómeno del Aprendizaje:

- ¿Cómo se reflejan las respuestas finales de los estudiantes en relación con los objetivos de aprendizaje establecidos?
- ¿Qué patrones o variaciones se observan en los productos intermedios generados durante la actividad?
- ¿Cómo las representaciones matemáticas utilizadas impactan en la comprensión y aplicación del conocimiento?

El segundo tipo de análisis se enfoca en el diseño instruccional, evaluando las hipótesis generadas y validadas durante la implementación. Este análisis va más allá de la simple revisión de la estructura del plan de estudios, explorando las complicaciones que los estudiantes enfrentaron al realizar las actividades. Se busca identificar áreas de mejora en el diseño instruccional, ajustar estrategias pedagógicas y garantizar la alineación efectiva con los objetivos de aprendizaje. Preguntas clave para el Análisis del Diseño Instruccional:

- ¿Cómo las hipótesis generadas durante el diseño instruccional se reflejan en los resultados finales del aprendizaje?
- ¿Qué complicaciones específicas surgieron durante la implementación de las actividades?
- ¿En qué medida las ajustes en el diseño instruccional podrían mejorar la comprensión y participación de los estudiantes?

La combinación de ambos análisis proporciona una visión holística del proceso educativo. La retroalimentación obtenida del análisis del fenómeno del aprendizaje informa directamente la mejora continua de las estrategias pedagógicas. Por otro lado, el análisis del diseño instruccional guía ajustes específicos para optimizar la efectividad de la enseñanza. La interconexión de estos dos enfoques asegura un ciclo de mejora constante, donde la investigación y la práctica se complementan mutuamente para elevar la calidad educativa.

7 La propuesta y sus características

Este proyecto de intervención didáctica propone un enfoque de enseñanza bajo la perspectiva de modelación matemática, con el diseño de actividades de variación, para promover la comprensión y aplicación de algunos elementos del Cálculo diferencial. Con el diseño se busca favorecer la generación de modelos matemáticos utilizando conceptos de Física, específicamente Cinemática, a través de la experimentación.

El proyecto pretende desarrollar de algunos elementos conceptuales del Cálculo y habilidades de modelación matemática para la resolución de problemas, fortaleciendo el pensamiento crítico. Además, busca que los estudiantes se encuentren motivados al generar modelos matemáticos que reflejen fenómenos físicos reales. En el diseño se incluirán mayormente con situaciones experimentales de manera directa. Al utilizar la experimentación se busca que los estudiantes realicen la generación de los datos a través de la manipulación y observación de las magnitudes variables.

7.1 Nivel Educativo

El diseño y la implementación de la propuesta se ubicán en educación media superior, específicamente en un grupo de Cálculo diferencial en un plantel del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH), para abordar las actividades, se plantea la distribución del grupo en equipos de 3 integrantes, tal como se menciona en los elementos teóricos de las MEA's.

Identificamos que el desarrollo de las actividades bajo este enfoque se alinea con los requerimientos y principios de la Nueva Escuela Mexicana. Al presentar actividades de resolución de problemas, se utiliza la experimentación y la modelación matemática y coadyuba en el desarrollo del pensamiento crítico. La interdisciplinariedad se aborda mediante la contextualización de las actividades en conceptos de la Física, lo que permite a los estudiantes un acercamiento de interconexión entre diferentes áreas del conocimiento.

7.2 Área matemática de interés

El objetivo principal en el diseño de las actividades es abordar conceptos de Cálculo diferencial mediante la cuantificación de la variación, centrándose en la segunda razón de cambio instantáneo como una variación constante. La elección de utilizar manipulables físicos en la experimentación es clave para permitir a los estudiantes manejar objetos y representar covariaciones al manipular variables, lo que facilita la verificación y predicción de resultados. Para este fin se realizó una revisión de literatura para la elección de situaciones de enseñanza y el tipo de problemas a trabajar.

7.2.1 Situaciones de enseñanza

Las situaciones de enseñanza que se proponen para el diseño de las actividades provienen de contextos de la cinemática, ya que no existen muchas variables involucradas y permite una predicción muy cercana a la teoría utilizando la experimentación, como se mencionó anteriormente consta de al menos tres actividades, en la que se abordan diferentes objetos matemáticos provenientes de la covariación de magnitudes variables.

Para la primera actividad se propone utilizar una situación en contexto del tiro parabólico, donde se pretende que describan la trayectoria de un objeto, además que puedan describir la variación y encontrar diferentes representaciones mediante la modelación matemática. En la segunda actividad se aborda el concepto de tiro vertical, con la finalidad de introducir la derivada de una función por medio del lanzamiento de un cohete. Para la tercera actividad se pretende que el estudiante encuentre la magnitud de la gravedad al determinar la segunda derivada de la posición contra el tiempo mediante el concepto de caída libre de un objeto.

7.2.2 Tipos de problemas

El tipo de actividades MEA's que se abordan son manipulables físicos, con el fin de que puedan encontrar las covariaciones entre las magnitudes variables por medio de la experimentación, en este tipo de MEA's la autoevaluación de sus resultados preliminares mediante el ciclo de expresar-probar- revisar se hace con la manipulación de elementos físicos, de manera tal que pueden variar algún elemento, probar sus resultados y les será más viable predecir los resultados.

7.3 Estrategia y estructura del diseño

Para el diseño de las actividades de enseñanza, se plantean al menos tres actividades, distribuidas en tres episodios de enseñanza, todas se apoyan en la estructura y los principios de diseño de los MEA's, se busca favorecer la generación de modelos. Para cada MEA se construyen las Guías instruccionales y de dificultades previstas para el docente.

Principios de diseño de los MEA's: El objetivo de las actividades MEA es que favorezcan la generación de modelos. Los principios de diseño coadyuban en este objetivo, de tal manera que, al realizar el diseño, se debe analizar que cumplan con los mismos.

Guía Instruccional: Es un documento que sirve al docente para llevar a cabo la implementación de la MEA, en ella se plasman diferentes elementos a tomar en cuenta para su ejecución.

Guía de dificultades previstas: En esta guía se definen algunas dificultades previstas durante la implementación de la MEA y se sugieren algunas indicaciones y preguntas guía para que el docente pueda afrontarlas.

Para la consecución del proyecto de intervención, se declara la metodología de Experimentos en el Aula de Steffe y Thompson. Esta se orienta en la compresión de las matemáticas de los estudiantes, situando los conocimientos, procesos e interacciones en el centro del diseño de la enseñanza. Los experimentos en el aula se dividen en dos momentos, dentro de los cuales puede existir uno o varios episodios de enseñanza.

7.3.1 Enseñanza Exploratoria

La enseñanza exploratoria se propone alcanzar múltiples objetivos. En primer lugar, busca introducir al docente/investigador al uso de la metodología de Experimentos en el aula. El segundo objetivo se centra en la observación de las prácticas de los estudiantes, esto implica un análisis de sus conocimientos previos, sus operaciones, estrategias de resolución de problemas, las interacciones sociales y uso de recursos disponibles. El tercer objetivo es verificar la generación de diversos modelos mediante actividades de modelación ya implementadas en entornos similares. Tras la enseñanza exploratoria, se realizará un análisis retrospectivo para verificar la generación de modelos y observar las prácticas matemáticas de los estudiantes. Estos resultados serán fundamentales para el planteamiento de hipótesis en el diseño de la enseñanza experimental, teniendo en cuenta elementos teóricos de alguna perspectiva teórica de modelación.

Con el fin de no centrase en las matemáticas del docente, para este momento se plantea la selección de una actividad ya implementada en condiciones similares a las del contexto educativo en el que se enmarca este proyecto, como menciona Steffe y Thompson (2000, pág. 274) "Los conceptos y operaciones matemáticas del investigador pueden ser orientativos, pero no deben considerarse, al menos inicialmente, como lo que los estudiantes deben aprender". En la selección de la actividad para la enseñanza exploratoria que favorece la generación de modelos (MEA) se tomaron en cuenta los siguientes aspectos:

- Una MEA que haya sido probada en educación media superior
- Una MEA que ha sido implementada en México
- Una MEA que se encuentre en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes
- Una MEA en la que se fomente la variación en un contexto cotidiano

Teniendo en cuenta los criterios descritos se selecciona la actividad del "*Hotel Histórico*", ya que fue implementada en un grupo de educación media superior en México. Los estudiantes que realizan la actividad estarán cursando el segundo semestre de bachillerato, por lo que estarán cursando Pensamiento Matemático 2 que corresponde al Pensamiento Algebraico (quedando dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes) y la actividad les solicita un procedimiento a utilizar cuando cambian algunas variables (Fomentando la variación en un contexto cotidano).

7.3.2 Enseñanza experimental

Las actividades se pretenden implementación, en al menos tres episodios de enseñanza, cada uno distribuidos en uno o varios momentos. Para la elaboración de las hipótesis se toman en cuenta los resultados del análisis retrospectivo de la enseñanza exploratoria y los principios de diseño. Es importante señalar que, para la ejecución de esta etapa se considera la presencia de un observador que pueda aportar otra visión de lo que pasa durante el experimento.

Episodios de enseñanza

En el primer episodio de enseñanza se pretende que los estudiantes puedan realizar la matematización de una situación experimental, al observar y generar datos a partir de las relaciones de covariación de un experimento físico en el contexto del tiro parabólico, en este caso el estudiante tendrá que ajustar algunas variables por medio de manipulables físicos para mejorar el resultado del experimento.

En el segundo episodio de enseñanza se aborda el concepto de la derivada, utilizando un contexto real sobre el tiro vertical por medio de un concurso de cohetes con una propulsión basada en agua y aire a presión, el cual el ganador será aquel equipo que logre la altura máxima, al igual que en el episodio anterior, el estudiante deberá ajustar las variables involucradas para tener un mejor desempeño. Se espera que los alumnos lleguen a la conclusión que la variable en la que deben incidir es la velocidad inicial, la cual proviene de la primera derivada de la posición con respecto al tiempo.

7.4 Valoración de la propuesta

Tal como lo menciona la metodología de Experimentos en el Aula, la valoración del diseño implica dos tipos de análisis, el primero sobre el análisis de las interacciones en el fenómeno del aprendizaje Tal como lo afirman los autores de la metodología:

> Cuando los investigadores reconocen que una interacción ha sido experimentada antes, al profesor-investigador se le pueden ocurrir interpretaciones pasadas de la actividad de los estudiantes que se hicieron sobre la marcha. Sin embargo, al ver las cintas de vídeo, el profesor-investigador tiene la ventaja de hacer un análisis histórico de las matemáticas de los estudiantes de forma retrospectiva y prospectiva, y ambas perspectivas proporcionan una idea de las acciones e interacciones de los estudiantes que no estaban disponibles para el profesor (Steffe & Thompson, 2000, pág. 292).

Sin embargo, no se pueden predecir todas las interacciones dentro de un episodio de enseñanza, por lo que en la metodología se menciona “esos casos inevitables en los que los investigadores no reconocen que una interacción se ha experimentado antes. En estos casos, el profesor-investigador puede hacer interpretaciones novedosas en términos de la evolución de su concepto de las matemáticas de los estudiantes” (Steffe & Thompson, 2000, pág. 293)

7.4.1 Análisis de las interacciones

Se llevará a cabo un análisis de las interacciones que se desarrollan durante los episodios de enseñanza, con énfasis en la fase exploratoria, aunque no exclusivamente. El objetivo principal es tomar conciencia de cómo estas interacciones impactan en el aprendizaje y el desarrollo de habilidades matemáticas de los estudiantes. Se prestará especial atención a la etapa exploratoria, ya que sirven de base para el diseño de la enseñanza experimental. Las dificultadas que se presentaron durante la enseñanza exploratoria se retoman para realizar hipótesis para la generación de la Guía de dificultades previstas. También tienen impacto en la formulación de la Guía instruccional, como en las rutas de solución anticipadas, prerrequisitos, tiempos estimados y los instrumentos de evaluación en proceso. Por otra parte, en la enseñanza experimental también se realiza un análisis de las interacciones, con el fin de valorar el diseño final, mediante la prueba de las hipótesis planteadas.

7.4.2 Desarrollo conceptual y habilidades de modelación

El segundo aspecto difiere de la referencia metodológica, ya que en este proyecto no se busca establecer modelos de aprendizaje, sino materiales didácticos que favorezcan el desarrollo conceptual y las habilidades de modelación. Los elementos de un modelo de aprendizaje que surjan serán sólo los necesarios para completar el diseño.

CRONOGRAMA

En el análisis preliminar de este proyecto de investigación, se presenta un cronograma detallado de las actividades planificadas. Estas actividades abarcan todas las fases previas a la selección, implementación, diseño y análisis de los productos de cada etapa. A continuación, se describe el contenido en la Tabla 8.1:

Actividades	**Semestres**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Análisis preliminar								
Selección de actividades de Enseñanza Exploratoria								
Enseñanza Exploratoria								
Análisis retrospectivo de la Enseñanza Exploratoria								
Diseño de enseñanza Experimental								
Enseñanza Experimental								
Análisis retrospectivo de la Enseñanza Experimental								

Tabla.8.1 Cronograma

REFERENCIAS

Aguilar, J. (2021). Modeling Through Model-Eliciting Activities: An Analysis of Models,Elements, And Strategies in High School. The Cases of Students with Different Level of Achievement. *MATHEMATICS TEACHING RESEARCH JOURNAL*, 13-1, 52-70.

Antonio, Z. R., Escudero, Á. D., & Flores, M. E. (2018). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática*, 258-280.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingeniería didáctica en la educación matemática.* (págs. 97-140). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Bermúdez, F. J., & Godoy., R. Á. (2015). Hacia una idoneidad didáctica en una clase de Física. *Latin-American Journal of Physics Education*, Vol. 9, 205-211.

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, Vol. 1, 1, pp 45-58.

Brahmia, S. W., Boudreaux, A., & Kanim, S. E. (2016). *Obstacles to mathematization in introductory physics.* Obtenido de Physics Education: http://api.semanticscholar.org/CorpusID:119200848

Bursic, K. M., Shuman, L. J., & Besterfield-Sacre, M. (2011). Improving Student Attainment of ABET Outcomes Using Model-Eliciting Activities (MEAs). *ASEE Annual Conference & Exposition, Vancouver, BC.*, 10.18260/1-2--18117.

Cabrera, L., & Zaldívar, J. D. (2021). Esquema del desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 189-199.

California Polytechnic State University, D. G. (2010). *City of San Luis Obispo Rainwater Catchment* . California Polytechnic State University.

Camarena, P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero. *REBCT 5(3)* , 1-10.

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., & Imaz, C. (1990). Cálculo-Análisis. Una revisión de la investigación educativa reciente en México. En F. C. R. Cantoral, *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (págs. 55-69). México: Centro de investigación y estudios avanzados IPN.

Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a Models and Modeling Perspective With Existing Research and Practice. En H. D. Richard Lesh, *Beyond Constructivism*

Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching (págs. 465-478). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Cauchy, A. (1821/1994). *Curso de Análisis (Jimenez, C. Trad).* CDMX: Servicios Editoriales de la facultad de ciencias UNAM (Obra original publicada en 1821).

Celi, R., Sarmiento, J., Boné, M., & Puyol, J. (2022). Programación con Matlab En La Enseñanza Del Cálculo Diferencial. *Revista científica Multidisciplinar G-ner@ndo*, 198-209.

De Villiers, L. (2018). *The concurrent development of mathematical modelling and Engineering technician competencies of first-year engineering technical students.* Durban, Sudafrica: Stellenbosch University.

Diefes-Dux, H., Hjalmarson, M., Zawojewski, J. S., & Bowman, K. (2006). Quantifying Aluminum Crystal Size. *Journal of STEM Education*, 1, 51-63.

Galilei, G. (1638). *Dialogues Concerning TWO NEW SCIENCES.* Leiden Italia.

Ganusov, V. V. (2016). *Physical and mathematical modeling in experimental papers: achieving robustness of mathematical modeling studies.* Obtenido de arXiv:1601.08121: https://doi.org/10.48550/arXiv.1601.08121

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación 37(1)*, 29-42.

Gascon, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Relime 6(1)*, 129-159.

Guidugli, S., Fernández Gauna, C., & Benegas, J. (2004). Aprendizaje activo de la cinemática lineal y su representación gráfica en la escuela secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 463-472.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, L., & Brilleslyper, M. (2008). Model-Eliciting Activities (MEAs) as a Bridge Between Engineering Education Research and Mathematics Education Research. *Advances in Engeeniring Education*, 1-25.

Huang, C.-H. (2012). Investigating engineering student's mathematical modeling from a modeling perspective. En T. Y. Tso, *the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 307-314). Taipei – Taiwan: Taiwan Association of Mathematics Education.

Kaiser, G. (2017). Mathematical Modelling and. En *Mathematical Modelling and Applications in Education* (págs. 396-404). Hamburgo, Alemania: Facultad de Educación, Universidad de Hamburgo.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En H. D. Lesh R, *Beyond*

Constructivism: Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem solving,Learning and teaching (págs. 3-33). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. London.

López R., T. O. (2012, 8-1). Las prácticas de laboratorio en la enseñanza de las cisencias naturales. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, 145-166.

Magiera, M. T. (2013). Model Eliciting Activities: A Home Run. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18, 6 pp 348-355.

Malaspina, U. (2007). Intuición, Rigor y Resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* , 10(3), 365-399.

Moreno, N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en Cálculo diferencial. *Revista internacional de investigación e innovación educativa*, 92, 60-75.

Newton, I. (1736). *The Method of Fluxions and infinite series; with its Application to the Geometry of curve-lines.* Londres: Printed by Henry Woodfall; and sold by John Nourse.

Newton, I. (1846). *Newton´s Principia The mathematical priciples of natural philosophy* . New York: Trnaslated into English By Andrew Motte Published by Daniel Adee.

Nielsen, L., & Pochulu, M. (2013). Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelación. En *Acta Latinoamericana de Matemática EducativaActa Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1387-1397). México DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Palmgren, E., & Rasa, T. (22 de 08 de 2022). *Modelling Roles of Mathematics in Physics.* Obtenido de Physics. Sci & Educ: https://doi.org/10.1007/s11191-022-00393-5

Plaza Gálvez, L. F., & Villa-Ochoa, J. A. (2019). Obstáculos matemáticos detectados en la formación de ingenieros. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 223-241.

Pollak, H. (1969). Who can we teach applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, Addresses of the First International Congress on Mathematical Education (Dec., 1969) 2(2)*, 393-404.

Salinas, A. P. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *DIDAC 56-57*, 62-69.

Sánchez, I. R. (2009). Propuesta de aprendizaje significativo a través de resolución de problemas por investigación. *Educere*, (13) 47, 947-959.

Sanchez, I., Moreira, M., & Caballero, C. (2009). Implementación de una propuesta de aprendizaje significativo de la cinemática a través de la resolución de problemas. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 27-41.

Sekerák, J. (2010). Phases of mathematical modelling and competence of High School Students. *The Teaching of Mathematics*, Vol XIII, PP 105-112.

SEMS. (2019). *Rediseño del marco curricular común de la educación media superior 2019-2022*. Obtenido de Documento base MCCEMS: https://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13516/1/images/Documento%20base%20MCCEMS.pdf

SEMS, S. d. (2023). *Programas de estudio DGB*. Obtenido de https://dgb.sep.gob.mx/storage/recursos/2023/08/M6KOOfdiIG-Calculo-Diferencial-1.pdf

SEMS, S. d. (2023). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático.* Obtenido de http://educacionmediasuperior.sep.gob.mx/work/models/sems/Resource/13634/1/images/Progresiones%20de%20aprendizaje%20-%20Pensamiento%20matematico(1).pdf

Shuman, L., Besterfield-Sacre, M., Pinar, T., & Sieworiek, N. (2010). MODEL ELICITING ACTIVITIES: EXPERIMENTS AND MIXED METHODS TO ASSESS STUDENT LEARNING. *American Society for Engineering Education*.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Research design in mathematics and science education*, 267-307.

Steffe, L. P., & Ulrich, C. (2014). Constructivist Teaching Experiment. *Encyclopedia of Mathematics Education, Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_32*, 102-109.

Suarez, M. (2008). *Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral Historia del Análisis Matemático.* Granada: Universidad de Granada.

Tall, D. (2019). The Evolution of Calculus: A Personal Experience 1956–2019. En J. Monaghan, E. Nardi, & T. Dreyfus, *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics* (págs. 18-37). Conference proceedings. Kristiansand, Norway: MatRIC.

Thompson J., B. B. (2006). Assessing Student Understanding of Partial Derivatives in Thermodynamics. *AIP Conference Proceedings*, 818, 77-80.

Thompson, P., & Carlson, M. (2017). Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically. *Compendium for research in mathematics education*, 421-456.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, Vol. 9,46 pp 75-87.

University California Polytechnic State. (2010). *Fluid Mechanics Experiment Design.* California Polytechnic State University, San Luis Obispo.

University of Pittsburgh, S. S. (2008). *Dams, Earthquakes and Budget Cuts.* Pittsburgh .

University of Pittsburgh, S. S. (2008). *Pilotless Airplane.* Pittsburgh.

University of Pittsburgh, S. S. (2008). *Trees and Road Safety.* Pittsburgh.

University of Pittsburgh, S. S. (2010). *Campus Lighting Economics.* Pittsburgh: University of Pittsburgh.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 9-25.

Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2009). Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. *Sociedad Argentina de Educación Matemática*, 129-138.

Yoon, C., & Dreyfus, T. (2010). How High is the Tramping Track? Mathematising and Applying in a Calculus Model-Eliciting Activity. *Mathematics Education Research Journal 22(1)*, 141-157.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Relime 10(1)*, 145-175.

ANEXOS

Anexo 1