UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

Desarrollo del Pensamiento Variacional en Profesores de Bachillerato

Documento predoctoral que presenta

Martha Cecilia Palafox Duarte

Directores de Tesis:

Dr. Agustín Grijalva Monteverde

Dr. Ramiro Ávila Godoy

Hermosillo, Sonora Noviembre, 2023

Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (Conahcyt) por el apoyo que ha brindado para mi formación, con la beca de número CVU 1183312

Contenido

1 INTRODUCCIÓN 1

2 ANTECEDENTES 3

2.1 Algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo..... 3

2.2 Una breve reseña histórica del estudio de los procesos del cambio 5

2.3 Marco Curricular Común y el Pensamiento Variacional..... 10

2.4 Desarrollo Profesional Docente..... 22

3 ESTADO DEL ARTE..... 25

3.1 Posturas sobre el pensamiento variacional..... 25

3.2 Trabajos relacionados con el pensamiento variacional 34

3.3 Trabajos relacionados con profesores 37

4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO 42

4.1 Enseñanza del Cálculo..... 42

4.2 El papel de los docentes en el MCC..... 43

4.3 Objetivos 47

4.3.1 Objetivo General..... 47

4.3.2 Objetivos Específicos 47

5 LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS 48

5.1 Tipo de propuesta de intervención y nivel educativo..... 48

5.2 Contenido Matemático..... 49

5.3 Fundamentación Teórica..... 50

5.4 Aspectos Metodológicos..... 50

5.5 Valoración de la Propuesta de intervención 56

6 ASPECTOS TEÓRICOS..... 57

6.1 Sistema de prácticas..... 57

6.2 Objetos y procesos matemáticos 60

6.2.1 Objetos matemáticos primarios..... 60

6.2.2 Procesos matemáticos..... 61

6.3 Configuraciones Ontosemióticas..... 64

6.4 Configuraciones y trayectorias didácticas..... 65

6.5 Criterios de Idoneidad Didáctica..66

6.6 Competencias y Conocimiento Didáctico-Matemático..68

7 ASPECTOS METODOLÓGICOS 73

7.1 Análisis a priori 73

7.2 Diseño...74

7.2.1 Selección de profesores en servicio de matemáticas...74

7.2.2 Protocolo de observación de las sesiones...75

7.2.3 Diseño de actividades tipo por parte del profesor/investigador..........................75

7.3 Implementación 76

7.3.1 Calendarización de sesiones de trabajo y Definición de los objetos matemáticos a tratar por sesión 76

7.3.2 Exposición de actividades Tipo y Resolución de la actividad tipo por parte de los docentes..77

7.3.3 Diseño de actividades por parte de los docentes 77

7.3.4 Retroalimentación por parte del profesor/investigador y del equipo de docentes .78

7.4 Análisis a posteriori...78

CRONOGRAMA...79

REFERENCIAS 81

ANEXOS 87

Anexo 1 89

Anexo 2 91

1 INTRODUCCIÓN

Los docentes son esenciales en el sistema escolar y su quehacer es de suma importancia en los procesos de enseñanza y de aprendizaje; La formación, tanto inicial como continua, de profesores es un elemento fundamental en los procesos educativos en general y, particularmente, en educación matemática. Este puede ser uno de los motivos por lo cual en los últimos años se está prestando atención al Desarrollo Profesional Docente (DPD), existen varias perspectivas respecto a éste y una de ellas se señala que se trata de que "los docentes aprendan, aprendan a aprender y transformen sus conocimientos en práctica en beneficio del crecimiento de sus estudiantes" (Ávalos, 2010, pág. 10).

Este documento inicia describiendo algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, ya que en su enseñanza se privilegian el formalismo y las técnicas, centrándose en los algoritmos o mecanizaciones, que, aunque son necesarios, lo recomendable es abordarlo mediante los problemas de variación y acumulación. Después se hace una breve reseña histórica del estudio de los procesos de estudio del cambio, la cual se inició con el estudio del movimiento de magnitudes variables, evolucionando hasta llegar a la definición de función de una manera formal y abstracta, privilegiando la relación conjuntista y estática de la misma, sin motivar el estudio dinámico de la relación entre magnitudes variables.

Los posteriores apartados están asociados con la nueva reforma en el sistema educativo mexicano y el desarrollo profesional docente (DPD) pues se considera que éste es una de las claves para el éxito de estos modelos educativos (Bautista & Ortega-Ruíz, 2015). La reforma entró en vigor en agosto del año 2023 y tiene un enfoque humanista, impulsando la construcción de una sociedad más justa y equitativa mediante una ciudadanía consciente de los problemas sociales, políticos, económicos y demás, de su entorno local, nacional y global, cuidando de su persona y de su medio ambiente; ya no sólo se pone el centro en la revisión de contenidos disciplinares sino en la formación de personas que se encuentren involucradas en la resolución de problemas en contextos diversos. En la Educación Media Superior (EMS) se presenta el Marco Curricular Común (MCC) donde se plantean tres diferentes tipos Pensamientos Matemáticos (PM) para la enseñanza de las matemáticas y este proyecto se interesa por el desarrollo del Pensamiento Variacional (PV) en los profesores.

Después, con el propósito de contar con un panorama general, se presentan varias perspectivas sobre el Pensamiento Variacional, y algunos trabajos con respecto a este tipo de pensamiento matemático en los diferentes niveles educativos. También, se abordan trabajos relacionados con profesores, ya sea en servicio o futuros maestros, así como, con el enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemática (EOS); siendo el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de educación media superior la motivación del proyecto.

Al implementarse un nuevo modelo educativo nace de manera razonable la capacitación del personal docente y, con ello, el desarrollo profesional docente (DPD) pues se pretende fomentar en los profesores de matemáticas ciertas competencias didáctico-matemático en su labor como profesionales de la educación. Cabe señalar que, además, se debe fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional en los profesores de matemáticas del bachillerato, pues las asignaturas de esta disciplina ahora se abordan mediante los pensamientos matemáticos. Por lo tanto, el objetivo es desarrollar actividades que permitan el mejoramiento del conocimiento didáctico-matemático respecto al desarrollo del pensamiento variacional de los profesores de Educación Media Superior.

Se utilizarán algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) para el diseño de actividades en el contexto del pensamiento variacional, las cuales se promoverán entre los profesores para fortalecer el estudio de la variación. Para fomentar las competencias del docente se usará el modelo de Competencias y Conocimientos didáctico-matemáticos (CCDM) del profesor de matemáticas, propuesto por Pino-Fan, Castro y Font (2022) que también se encuentra enmarcado en el EOS.

La metodología del proyecto de intervención didáctica se estará llevando a cabo a través de un análisis a priori, diseño, implementación y análisis a posteriori. El análisis a priori tiene dos finalidades, una es contar con un instrumento diagnóstico que permita tener evidencia empírica respecto a la necesidad del fortalecimiento del desarrollo del pensamiento variacional de los profesores de bachillerato y, segunda, identificar los niveles de logro de las competencias didácticas y matemáticas en lo referente al pensamiento variacional. Esto servirá de punto de partida para el diseño pues también cuenta con dos momentos, primero las actividades serán diseñadas por el profesor-investigador y, posteriormente, un grupo de profesores diseñará sus propias actividades para fomentar el desarrollo del pensamiento variacional. Finalmente, se valorará la propuesta con los criterios de idoneidad del EOS.

2 ANTECEDENTES

En este apartado se presentan algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo porque "es importante que los profesores conozcan los conceptos con los que los estudiantes tienen dificultades y las formas de superar los conceptos erróneos o malentendidos comunes" (Şen Zeytun, Çetinkaya, & Erbaş, 2010, pág. 1602).

También una breve reseña histórica del estudio de los procesos del cambio donde se exhibe la evolución del estudio de las magnitudes variables del movimiento hacia procesos más abstractos del concepto de función.

Asimismo, se presenta el Marco Curricular Común (MCC) y algunas características de este, así como lo referente al Desarrollo Profesional Docente (DPD).

2.1 Algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo

La educación es una actividad fundamental para el desarrollo de la sociedad. En la actualidad, con base en mi experiencia y establecido en documentos de algunos modelos educativos (MEN,2006; SEMS,2022), es posible observar que cada vez se pone mayor énfasis en fomentar que los aprendizajes escolares puedan vincularse con situaciones reales en la vida cotidiana. La matemática como ciencia que se interesa por entender el mundo que nos rodea puede abonar en ello y el cálculo como rama de las matemáticas que estudia el cambio y la variación nos permite contar con herramientas que favorecen la descripción y la modelación de fenómenos naturales, sociales, económicos y otros, para profundizar en las relaciones entre las magnitudes variables involucradas.

Además, es una de las grandes áreas de las matemáticas que se encuentra presente en distintos niveles educativos, diferentes disciplinas y carreras universitarias, tales como ingenierías, física, ciencias biológicas, económicas y sociales. Lo cual se afirma a continuación:

> El Cálculo es una rama de la matemática de mucha relevancia en la comprensión de los diferentes procesos de cambio y, además es un área fundamental en la cual se sustentan y nutren otras áreas de las matemáticas que desarrollan en el campo de las Ciencias Básicas- El Cálculo es un área obligatoria en la formación de habilidades cognitivas, procedimentales de los estudiantes de Ingeniería, Matemáticas, Físicas, Ciencias Económicas, entre otras (Mendoza & Cabezas, 2017, pág. 47).

Algunos investigadores afirman que "el aprendizaje del cálculo [tiene] que basarse en el estudio del cambio y la acumulación cuantificables y en la relación entre los dos" (Kaput, 1992; citado en Artigue, 1995, p. 119); sin embargo, gran parte de los cursos tradicionales del Cálculo no fomentan esto a pesar de que debiera ser la parte central en la que se sostenga la enseñanza de esta materia. En cambio, se imparte la asignatura de manera abstracta, enfocándose en algoritmos y mecanizaciones, sin darle importancia al carácter dinámico y al pensamiento variacional que se debe tener al momento de analizar las situaciones reales y las relaciones cuantitativas entre las magnitudes variables involucradas. Estas ideas se avalan al mencionar que:

> Los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa han mostrado que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar las ideas y conceptos del Cálculo, pero el actual discurso matemático escolar no propicia este desarrollo de ideas variacionales. Se fomenta el desarrollo de estrategias y conocimientos procedimentales y memorísticos que, aunque son necesarios, no dejan ver el carácter variacional del Cálculo, y no propician la construcción de una concepción rica en significados. Se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos dejando de lado la formación de ideas variacionales tan necesarias para la comprensión de las ideas del cálculo (Caballero & Cantoral, 2013, pág. 1585).

En los cursos de Cálculo tradicionales se han abordado las temáticas de interés a partir de la noción de función, presentada de una manera abstracta, oscureciendo el carácter variacional de la razón instantánea de cambio y de los procesos de acumulación, para dar pie a una preponderancia algorítmico-algebraica en el tratamiento de objetos como la derivada y la integral de una función, haciendo que parezca que lo más importante, por ejemplo, sea que el estudiante pueda decir que la derivada de $f(x) = \sin x$ es $f'(x) = \cos x$, o que la integral de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$, en lugar de abordar estos elementos mediante una interpretación de fenómenos de variación. Por lo anterior, existen propuestas diversas en matemática educativa que consideran necesario cambiar de enfoque en la enseñanza del cálculo, una manera pertinente es el de introducir el estudio de la relación entre las magnitudes variables por medio del pensamiento variacional.

Se recomienda promover el desarrollo del pensamiento variacional desde educación inicial, con el objetivo de ir creando esos procesos dinámicos en los estudiantes que permitan el aprendizaje matemático; como lo asegura Vasco “los alumnos y alumnas empiecen desde el preescolar y la primaria por vivenciar y ejercitar los procesos de matematización, por la modelación matemática y el pensamiento variacional”. (Vasco C. E., 2003, pág. 2)

> El estudio del cambio también se puede iniciar en la Educación Básica Primaria a través del análisis de fenómenos de variación (por ejemplo, el crecimiento de una planta durante un mes o el cambio de la temperatura durante el día o el flujo de vehículos frente a la institución durante una mañana) representados en gráficas y tablas. Esta manera de acercarse al pensamiento variacional está muy relacionada con el manejo de los sistemas de datos y sus representaciones. Por el análisis cuidadoso de esas representaciones se puede identificar la variación que ocurre y, en algunos casos, llegar a precisar la magnitud de los cambios y aun la tasa de cambio en relación con el tiempo (MEN, 2006, pág. 67).

Entonces se puede afirmar que el cálculo tiene un carácter más dinámico, menos estático y éste permite el desarrollo del pensamiento variacional ya que el cambio y la variación se encuentran presentes en la vida cotidiana de los individuos y esto ayuda a atender situaciones no escolares, lo cual es uno de los objetivos que persigue la educación en nuestros días, pues se pretende preparar personas para el ejercicio de la ciudadanía en la sociedad.

También, debido a la complejidad de sus objetos matemáticos ha sido un área de interés en el estudio, análisis y reflexión en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, lo que permite que se enuncien algunas de las dificultades epistemológicas en el aprendizaje del Cálculo, Artigue las agrupó en tres grandes categorías:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones) y al hecho de que estos objetos se conceptualizan plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que va a contribuir de forma fuerte a tal conceptualización.
- Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo.
- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo. (Artigue, 1995, pág. 107)

Por su parte, Sierpinska identificó algunos obstáculos epistemológicos asociados al concepto de función, en específico se muestran algunos relevantes para este trabajo, debido a que están relacionados con el estudio del cambio y la variación:

- Una filosofía de las matemáticas: La matemática no se preocupa por problemas prácticos (Sierpinska, 1992, pág. 31)
- Esquema inconsciente de pensamiento: Con respecto a los cambios como fenómenos; enfocándose en cómo las cosas cambian, ignorando qué cambia (Sierpinska, 1992, pág. 36).
- Un esquema inconsciente del pensamiento: las leyes de la física y las funciones de las matemáticas no tienen nada en común; pertenecen a diferentes dominios (compartimentos) del pensamiento (Sierpinska, 1992, pág. 42).

El Cálculo como asignatura debe interesarse por la resolución de problemas en situaciones del mundo que nos rodea, mediante la identificación de cambios observados en contextos reales, enfocándose en qué cambia, cómo y cuánto está cambiando (Caicedo, 2013), por medio del estudio de fenómenos donde se puedan relacionar las magnitudes físicas, como se muestra en el desarrollo histórico con los problemas que dieron origen a esta disciplina.

2.2 Una breve reseña histórica del estudio de los procesos del cambio

Un elemento fundamental que se debe considerar en la enseñanza y el aprendizaje es el desarrollo histórico-epistemológico de los conceptos matemáticos, debido a que las culturas y épocas influyen en su desarrollo. Tener claridad sobre estos procesos permitirá comprender, analizar y estudiar de una manera más favorable los objetos matemáticos.

> Es relevante mencionar que los elementos históricos del cálculo deben ampliar su visión sobre los propósitos de la matemática en la resolución de problemas de la vida real, así como brindarle elementos que favorezcan la labor de aula (Fonseca & Alfaro, 2018, pág. 13).

En este apartado, se presenta un breve análisis de la evolución del estudio de los procesos de cambio, observando la manera de cómo se ha perdido la naturaleza del Cálculo en lo que respecta al tipo de problemas que aborda, y se ha llevado a la variación a través del concepto de función de una manera abstracta, de forma estática y dejando de lado el carácter dinámico.

Se pueden interpretar las primeras nociones de función en los años 2000 a.C. – 600 a. C. con el registro de tablas y papiros en la época de los babilonios con información respecto al conocimiento matemático acerca del movimiento de los astros, "realizaron una compilación de las efemérides del sol, la luna y los planetas. Estudiaron problemas de variaciones continuas, tales como la luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales o los períodos de visibilidad de un planeta en relación con el ángulo que éste forma con el sol" (Ruíz Higuera, 1994, pág. 149).

En los filósofos griegos existía la idea del cambio y la relación entre magnitudes variables, sin embargo, en sus trabajos tales como los elementos de Euclides no se presentan estas relaciones de manera dinámica. "Esta filosofía 'estática' de la matemática fue la razón por la que, a lo largo de mucho tiempo, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables. Esto condujo a las proporciones y ecuaciones, y no a la noción de función" (Ruíz Higuera, 1994, págs. 151-152).

Fue hasta el año de 1361 que se presentaron las primeras representaciones gráficas de magnitudes variables con las ideas de Nicholas Oresme para representar como varía la velocidad de un objeto móvil con respecto al tiempo. En la figura 2.1, la línea horizontal representaba los instantes de tiempo, y la velocidad se mostraba con la altura de líneas verticales en cada instante de tiempo, formando así tres tipos de configuraciones: a) uniformemente uniformes, b) uniformemente deformes y c) deformemente deformes.

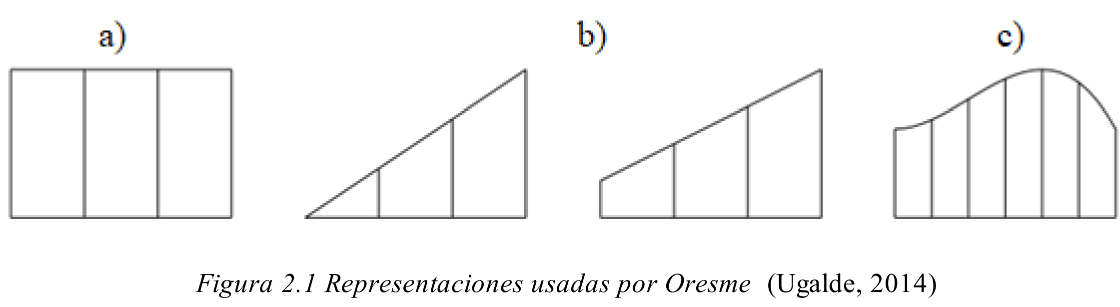


Figura 2.1 Representaciones usadas por Oresme (Ugalde, 2014)

En el año de 1638, Galileo con los estudios sobre el movimiento busca relacionar el tiempo con la distancia, la velocidad y la aceleración por medio de la experimentación; realiza representaciones gráficas a partir de sus observaciones y formula una serie de teoremas (Ruíz Higuera, 1994).

El álgebra permitió a Fermat (1601 - 1665) y a Descartes (1596 - 1650) "el descubrimiento de la 'representación analítica'. Comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas, de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas" (Ruíz Higuera, 1994, pág. 165). Con esto se introduce el plano cartesiano, que representa una gran herramienta en el desarrollo de la noción de función, donde se puede visualizar la relación de dependencia entre dos magnitudes variables, así como las ecuaciones para representar ciertas curvas, entre las cuales se encuentran la línea recta y algunas cónicas con centro en el origen.

Newton (1643-1727) en su método de fluxiones relacionó las variables que denominó fluentes, las cuales describían movimientos continuos en el tiempo y la razón de cambio instantánea (derivada) de las fluentes las nombró fluxiones. Utilizó "la palabra genita, que en latín significa generada o nacida, para referirse a expresiones de la forma Ax^n. Para varios autores, "genitum" surge como la primera expresión usada para referirse al concepto de función" (Ugalde, 2014, pág. 12).

En 1673, Leibniz en un manuscrito utiliza por primera vez la palabra función y la usó para referirse a "cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, tal como la longitud de la tangente, de la normal, de la subtangente y de la ordenada. Por ejemplo, Leibniz afirmaba que una tangente es una función de una curva" citado en (Parra, 2021, pág. 38). Sus trabajos fueron concebidos bajo una concepción geométrica.

La primera consideración de una función como expresión analítica se evidencia en el artículo de Jean Bernoulli de 1718: "Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes" (Bernoulli, 1718, citado en Boyer, 1986, p. 531). Es en este mismo artículo que Bernoulli propone "la letra griega φ para designar la 'característica' de una función (término basado en los trabajos de Leibniz), escribiendo el argumento sin paréntesis: φx" (Ruíz Higuera, 1994, pág. 174). De esta manera, la noción geométrica de función utilizada por Leibniz alcanza una forma más abstracta.

Leonard Euler (1707-1748) introduce el concepto de función en "Introductio in Analysis Infinitorum" como:

> Toda relación entre x y y tal como se representa en el plano mediante una curva trazada a mano libre. Luego escribe: Por lo tanto, cada expresión analítica, en la cual aparecen aparte de una cantidad variable "z", otras cantidades constantes que componen esta expresión, es una función de esta "z". Algunas de estas expresiones son, por ejemplo: $a + 3z$, ó $az - 4zz$, ó $az + baa - zz - c$. En el mismo trabajo aclara: Se acostumbra a denominar funciones a las cantidades dependientes de otras,

tal que, como consecuencia de la variación de la últimas cambian también las primeras. Citado en (Ugalde, 2014, pág. 13).

Cabe mencionar que para estos momentos no se tenía clara la idea del dominio de la función ni la relación entre variable dependiente e independiente. Euler en su documento "Additamentun" utiliza por primera vez el símbolo de $f(x)$. También, Euler en su obra "Instituciones Calculi Diferencials" se refiere a la función como "una expresión algebraica que puede ser anotada por una sola fórmula analítica tal como un polinomio, un seno, un coseno, un logaritmo o aún una integral de cualquiera de estas expresiones" (Citado en Ugalde, 2014, pág.14).

En su libro "Curso de Análisis", Augustin Louis Cauchy (1789-1857) define

> Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable (Citado en Ugalde, 2014, pág. 15).

Aquí se está mencionando la dependencia entre variables de tal modo que conociendo el valor de una de estas variables se puede encontrar la relación de dependencia de las otras en términos de esta que se puede considerar como independiente.

Gustav Dirichlet en 1837 proporciona una definición amplia del concepto de función, presentando dos enunciados:

> Una cantidad variable "y" se llama función de la cantidad variable " x" si a cada valor de " x" le corresponde un sólo y determinado valor de "y". Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x (Citado en Ugalde, 2014, pág.15).

También, presenta su ejemplo muy conocido de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional} \end{cases}$$

En 1858, Riemann asevera "se dirá que es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y" (Citado en Ruíz Higuera, 1994, pág.183).

En las matemáticas abstractas y estructuradas del siglo XX, en la definición de función se tiene un concepto matemático puro y formal enmarcado en la teoría de conjuntos con simbología y significado propio no necesariamente vinculado al movimiento o basado en cosas físicas.

A continuación, en la tabla 2.1 se presenta un breve resumen del desarrollo histórico de los procesos de cambio en el Cálculo, debido a que "la conceptualización de un objeto matemático no debe concebirse como un producto estático y acabado, por el contrario, su enseñanza debe orientarse hacia las concepciones y obstáculos que lo originaron y consolidaron a través de la historia" (Mesa & Villa Ochoa, 2009, pág. 1315).

Desarrollo histórico del estudio matemático de los procesos de cambio	
2000 a.C. – 600 a. C., babilonios	Se da con el registro de tablas y papiros con información respecto al conocimiento matemático acerca del movimiento de los astros.
Siglo IV-VII, Griegos	Existía la idea del cambio y la relación entre magnitudes variables, los matemáticos pensaron y hablaron en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables.
Siglo XIV, Nicholas Oresme	Se utilizaron las primeras representaciones gráficas de magnitudes variables para representar cómo varía la velocidad con respecto al tiempo.
Siglo XVII, Galileo Galilei	En los estudios sobre el movimiento busca relacionar el tiempo con la distancia, la velocidad y la aceleración por medio de la experimentación.
Siglo XVII, Fermat y Descartes	Creación de la representación analítica, se determina un método de expresión de las relaciones numéricas por el método de coordenadas.
Siglo XVII-XVIII, Newton	Relacionó las variables que denominó fluentes, las cuales describían movimientos continuos en el tiempo y la razón de cambio instantánea (fluxiones).
Siglo XVII-XVIII, Leibniz	Utilizó por primera vez la palabra función y la usó para referirse a "cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva".
Siglo XVIII-XX, Bernoulli, Cauchy, Dirichlet	Una cantidad variable "y" se llama función de la cantidad variable "x" si a cada valor de "x" le corresponde un solo y determinado valor de "y" . Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.

Tabla 2.1 Desarrollo histórico del estudio matemático de los procesos del cambio. Elaboración propia, adaptado de Ruíz Higuera (1994); Ugalde (2014) y Vega (2019)

Hasta el momento se presenta una versión simplificada y resumida del desarrollo histórico-epistemológico del estudio los procesos de cambio y cómo estos fueron evolucionando hasta llegar al concepto de función, presentándose cada vez más abstracto, de manera formal y alejándose de las magnitudes variables y sus relaciones, enfocándose en procesos algorítmicos y mecanizados que no dejan ver su carácter dinámico, lo que nos lleva a la importancia que tiene el fomentar o promover el desarrollo del pensamiento variacional.

En resumen, el desarrollo histórico del estudio de los procesos de cambio evolucionó a través del estudio de las magnitudes variables del movimiento hacia procesos abstractos, alejándose de sus orígenes en contextos dinámicos, lo que repercute en la enseñanza de los cursos actuales del Cálculo por medio de una definición de función más cercana a la relación abstracta entre elementos de dos conjuntos, que a la relación dinámica entre magnitudes variables, centrándose en lo formal y en su concepción conjuntista, donde predomina la memorización de ciertas condiciones que satisfacen las parejas ordenadas para cumplir con este concepto.

En ese sentido se manifiesta que, al no coincidir la forma tradicional en que se imparten los cursos de Cálculo con los problemas del desarrollo histórico que dieron origen al mismo, podría ser una de las dificultades en el aprendizaje de este y se recomienda que un primer curso de cálculo diferencial no debe basarse en la estructura formal de los números reales, ni del concepto de función, sino usar "ideas que provienen de la geometría o del estudio del movimiento" (Cuevas & Pluvinage, 2009, pág. 48).

2.3 Marco Curricular Común y el Pensamiento Variacional

Uno de los elementos fundamentales que contribuye al desarrollo de la sociedad es la educación, por eso es importante intentar resolver los retos que se presentan en ella. Una manera de lograrlo es a través de cambios en los modelos educativos, que permitan formar individuos competentes para intervenir favorablemente en la sociedad para hacer mejoras en la misma, que sean consciente del compromiso que tienen con su comunidad y que tengan respeto por su entorno social y cultural.

> La educación es la estrategia más eficaz con la que cuentan sociedades y gobiernos para cambiar la realidad imperante e impulsar un modelo de sociedad más equitativo y justo, respetuoso de la diversidad social y cultural, capaz de generar una ciudadanía consciente, que se asuma perteneciente a una comunidad local, nacional y global (SEMS, 2022, pág. 4).

El modelo educativo debe definir el funcionamiento de las escuelas públicas, los conocimientos, habilidades y saberes; así como el tipo los ciudadanos que se deben formar. Por lo que se puede considerar como un proyecto político-pedagógico, en donde se definen los contenidos, planes y programas de estudio, valores, relaciones entre todos los actores educativos y el papel que deben desempeñar cada uno.

Nuestro país ha tenido varias reformas en el sistema educativo nacional, sin embargo, en los últimos 30 años se puede considerar que el enfoque ha sido conductista, instrumental y fragmentado en cuanto a los contenidos disciplinares, dejando al estudiantado la tarea de la articulación de los saberes, careciendo de sentido para ellos el uso de los conocimientos desarrollados en el trayecto escolar para ser utilizados dentro de su comunidad.

Asimismo, da mayor importancia a las evaluaciones estandarizadas y sus resultados, prestando atención a indicadores como eficiencia terminal, permanencia, egreso y a instituciones educativas con insumos adecuados, en donde todo lo que requiera mejora se vincula a la idea de calidad. También, se observa la poca libertad y participación del personal docente, siendo vistos como técnicos que transmiten información e implementando una evaluación de los aprendizajes y del desempeño docente.

En México, en este ciclo escolar que inició en agosto de 2023, se está implementando la Nueva Escuela Mexicana (NEM) en todos los niveles educativos; en este contexto, en la Educación Media Superior (EMS), se ha creado un nuevo Marco Curricular Común (MCC) para los diferente sistemas y subsistemas de bachillerato, con la participación, por medio de foros de discusión, de la mayoría de los actores involucrados en este nivel educativo como los docentes, directivos, padres de familia y la comunidad. Se pretende eliminar el enfoque económico e ideológico en la educación que se fomentó en las reformas anteriores, buscando formar ciudadanos responsables involucrados en el reconocimiento y solución de problemas sociales, económicos y políticos de su comunidad, planteándose un enfoque integral que considera las componentes social y humanista.

Se puede considerar como un modelo educativo ambicioso, en el sentido de que se propone un enfoque humanista, con énfasis en la comunidad y en la intervención de todos los participantes, en el cual se concibe a la escuela como el centro de convergencia para el proceso de aprendizaje; asimismo recalca la importancia de una educación integral prestando atención a la vida saludable, inclusión, igualdad de género, el cuidado del medio ambiente, entre otros. En otras palabras, “constituir personas con responsabilidad social, conscientes de la importancia del cuidado físico y corporal y con una vida en bienestar emocional y afectivo” (SEMS, 2022, pág. 33).

Por lo que la NEM, tanto en la educación básica como en el nivel medio superior, pretende construir sociedades justas y equitativas, con jóvenes que puedan construir una mejor vida, involucrados en la sociedad y relacionando la comunidad, familia y todo su entorno. “La intención de la EMS es formar mujeres y hombres como ciudadanos con una preparación integral, que sean capaces de conducir su vida hacia su futuro de bienestar y satisfacción” (SEMS, 2022, pág. 19) .

En la actualidad se desea que los aprendizajes escolares puedan ser vinculados con la vida cotidiana dándole sentido a las problemáticas que se encuentran en su entorno, presentando situaciones en contextos reales que le permitan al estudiantado acercar su conocimiento a la realidad que se encuentra viviendo; "se contempla no solo como un sujeto que posee habilidades cognitivas para construir aprendizajes y aprender a solucionar problemas, sino también, como creador de múltiples interacciones sociales y cambios importantes en su vida personal y social" (SEMS, 2022, pág. 35).

En los inicios de la educación se consideraba que para el estudio de las matemáticas sólo se requerían conocimientos centrados en los objetos matemáticos, sus propiedades, axiomas, proposiciones, teoremas, procesos algebraicos y algorítmicos; sin embargo, la educación actual demanda nuevos retos locales, nacionales y globales para la formación de una ciudadanía responsable y comprometida con la problemática social, económica y política.

De tal manera que actualmente se puede mencionar que las matemáticas son el producto de la actividad de profesionales con conocimientos estructurados y justificados lógicamente, pero también son una actividad humana que permite plantear y resolver problemas, tanto intra-matemáticos como extra matemáticos (dentro de las matemáticas como fuera de estas), a través de técnicas o herramientas propias de la misma.

Con esto se puede comentar acerca de un conocimiento matemático formal pero también de uno práctico. En el primero se puede hacer referencia a lo teórico, en un proceso cognitivo, con el lenguaje propio de las matemáticas, sus diferentes registros de representaciones y un dominio procedimental y algorítmico. Para la práctica, se considera la resolución de problemas en su entorno, con contextos reales en su vida cotidiana, la relación con otras disciplinas y la propia matemática, lo cual le permita mejorar sus condiciones de vida y su desempeño como ciudadano.

Así que en la formación educativa se debe promover el conocimiento matemático indispensable para ejercer de manera crítica y participativa en todos los aspectos de su vida para la interpretación y toma de decisiones en diversos contextos con bases sólidas, cuantificables y con una mayor certeza, tal como se menciona en el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2006 … "conocimiento matemático imprescindible y necesario en todo ciudadano para desempeñarse en forma activa y crítica en su vida social y política y para interpretar la información necesaria en la toma de decisiones" (MEN, 2006, pág. 47).

Por lo anterior, se está poniendo énfasis en el pensamiento matemático (PM) debido a que en los cursos tradicionales de matemáticas se privilegia la cátedra de elementos abstractos y formales con el fin de cubrir un temario, sin tener en cuenta que no solamente se están formando personas para este campo de estudio, sino para el resto de las disciplinas. Se debe desarrollar un pensamiento crítico y reflexivo que apoye los elementos matemáticos y su aplicación en diversos contextos que sean de gran utilidad para la mayoría de los estudiantes.

> Se concibe al pensamiento matemático de manera amplia: la matemática deja de ser únicamente un conjunto de algoritmos que muchas veces son aplicados de manera mecánica y descontextualizada, para convertirse en un medio a través del cual el estudiantado pueda trabajar en la adquisición y mejoramiento de habilidades y destrezas del pensamiento tales como observar, intuir, conjeturar, argumentar, la capacidad para modelar y entender, a través de técnicas y lenguaje matemático, algunos fenómenos sociales, naturales e incluso de su vida personal (SEMS, 2023, pág. 4).

Sin embargo, el pensamiento matemático cuenta con poca presencia en el aula y se desaprovecha la posibilidad de promover habilidades vinculadas con este tipo de pensamiento, pues en la mayoría de los cursos de matemáticas se pone énfasis en la enseñanza de operaciones, donde en pocas ocasiones se muestran las relaciones entre sí y rara vez se presentan en contextos con la realidad.

Con respecto a las matemáticas, es no centrar ni dar prioridad solamente a la enseñanza memorística y mecanizada de los procesos algebraicos y algorítmicos, sin tener alguna contextualización que de significado a los conocimientos y saberes adquiridos. Asimismo, es relevante señalar la importancia que tienen estas técnicas y herramientas matemáticas ya que no se pueden dejar de lado para lograr el desarrollo del pensamiento matemático, tal como se señala en el documento de progresiones de aprendizaje de la Subsecretaria de Educación Media Superior (SEMS): “no es posible desarrollar el pensamiento matemático sin matemáticas” (SEMS, 2023, pág. 5).

También es importante señalar que los estudiantes del bachillerato deben recibir una enseñanza que les permita estar preparados para continuar con sus estudios del nivel superior o incorporarse al mundo laboral, independientemente de cuál sea su elección; por lo que se considera que mediante el desarrollo del pensamiento matemático se favorecerá esta situación.

Otra de las argumentaciones que se tienen para promover el desarrollo del pensamiento matemático, es el de dejar de lado la gran cantidad de contenidos, vistos de manera superficial, sin profundizar ni reflexionar en aspectos relevantes de los temas ni en el desarrollo de habilidades, pues sólo se tenía la finalidad de enseñar los tópicos para cumplir con la totalidad del temario y se dedicaba el tiempo en cubrir los programas saturados de contenidos.

Por otra parte, las pruebas estandarizadas internacionales del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) presentan resultados desfavorables en cuanto a los conocimientos matemáticos con “80 puntos por debajo del promedio de la OCDE” (SEMS, Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático, 2023, pág. 7); las evaluaciones nacionales como Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) tampoco muestran buen nivel argumentativo en el desempeño de las habilidades matemáticas.

Esto puede ser reflejo del poco tiempo que se dedica a reflexionar, argumentar o comparar diferentes métodos para la resolución de las distintas situaciones-problema, en otras palabras, se debe tener la oportunidad para contrastar o validar las soluciones obtenidas por uno u otro método, así como justificar y argumentar los resultados. Cabe señalar que estos son componentes esenciales del pensamiento matemático.

En cuanto al papel que desempeñan los docentes en una enseñanza tradicional es el de impartir las clases por medio de exposiciones donde sólo comunica información y el alumno debe guardar dicha. En lo referente a las matemáticas el docente realiza la explicación de algunos ejemplos y el rol del alumno es replicar posteriormente ejercicios similares sin entender los conceptos y procedimientos de éstos, pues sólo los realiza de manera mecánica y esto no le da sentido a su vida cotidiana, motivo por el cual no le parecen atractivas las matemáticas enseñadas.

De esta manera, se puede concluir que lo anterior es parte de algunos de los fundamentos del cambio y acerca de la necesidad que se tuvo de intervenir y plantear un nuevo modelo educativo en el sistema nacional. En lo relativo a las matemáticas, el enfoque mediante el pensamiento matemático es lo que se puede considerar idóneo, ya que:

> El pensamiento matemático tiene gran utilidad en la vida fuera de la escuela, particularmente en la toma de decisiones, ya que permite comprender las leyes de las ciencias que usualmente recurren al lenguaje de la matemática para expresarse; además facilita estructurar sus teorías y también aporta procedimientos válidos y aplicables a distintos objetos matemáticos y de la realidad cotidiana, a la explicación de fenómenos o a la solución de situaciones problema de otras áreas de conocimiento o en el ámbito artístico, deportivo, social e incluso emocional (SEMS, 2023, pág. 8).

Por este motivo, la EMS se está enfocando en este tipo de pensamiento, desarrollándolo sobre un cierto conjunto de contenidos, y no enfocarse solamente en el desarrollo de contenidos disciplinares específicos; además, abona a lo que se solicita internacionalmente de "fortalecer el pensamiento crítico, el aprendizaje holístico, no fragmentado y que las y los egresados sean capaces de pensar y resolver problemas" (SEMS, 2023, pág. 12).

> El pensamiento matemático es un recurso sociocognitivo que involucra diversas actividades, desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos, hasta los procesos mentales abstractos que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático, al resolver problemas, usar o crear modelos, y le dan la posibilidad de elaborar tanto conjeturas como argumentos; organizar, sustentar y comunicar sus ideas (SEMS, 2023, pág. 17).

Se pretende que el estudiantado del bachillerato con el PM pueda entender mejor otras áreas de conocimientos y la aplicación de éste, tomar decisiones razonadas y apreciar su utilidad para construir su proyecto de vida; de tal manera que pueda utilizar los conocimientos matemáticos en su vida cotidiana o profesional. Es decir, el conocimiento disciplinar matemático no sólo ayuda a comprender el funcionamiento del mundo físico, social, personal y demás, sino también a la adquisición de habilidades tanto intelectuales como emocionales.

> En general, el pensamiento matemático es un recurso en el que se integran de manera dinámica diversos procesos cognitivos que interactúan y se retroalimentan entre sí… involucra procesos de reflexión, abstracción y metacognición, cuya ejecución da al sujeto la posibilidad del autoaprendizaje, incidiendo en la formación integral de un ser humano (SEMS, 2023, pág. 13).

En el MCC de la EMS se cambia el trabajar por medio de competencias matemáticas a las progresiones de aprendizaje y las asignaturas por el pensamiento matemático mediante las categorías Procedural, Procesos de intuición y razonamiento, Solución de problemas y modelación, e Interacción y lenguaje matemático. Éste se abordará en los primeros tres semestres a través de las unidades de aprendizaje curricular: Pensamiento estadístico y probabilístico; Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico; Pensamiento variacional.

Es relevante enfatizar el cambio que el sistema educativo en México está implementando desde este ciclo escolar en la educación media superior, en el sentido que está centrando la atención del aprendizaje en el Pensamiento Matemático y no tanto en la disciplina a enseñar.

En el documento de Progresiones de aprendizaje en matemáticas se presenta la propuesta del pensamiento matemático de los tres primeros semestres para el bachillerato, con contenidos matemáticos primordiales, dejando para semestres posteriores otros tópicos y la forma de abordar la matemática, esto dependiendo de la necesidad de cada subsistema en la EMS.

En este trabajo se tiene interés por el pensamiento matemático 3, que corresponde al Pensamiento Variacional (PV), pues la variación y el cambio se encuentran presentes en nuestra vida cotidiana, como por ejemplo el crecimiento de una planta en un determinado periodo de tiempo, el cambio de temperatura durante todo el día, el consumo diario de agua, de energía eléctrica, el precio del dólar con respecto al peso, entre otros. Además, las herramientas del Cálculo son esenciales para el desarrollo de la ciencia y la tecnología, pues permiten representar y modelar situaciones y fenómenos físicos, biológicos, económicos, sociales, etc.

> Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (MEN, 2006, pág. 66).

Sin embargo, la enseñanza actual se aborda de una manera tradicional dando un tratamiento centrado en la estructura formal y abstracta del concepto de función y “aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático”. (Freudenthal, 1983, p.497; citado en (Ruíz Higuera, 1994, pág. 188)

Esto se puede observar en el modelo educativo de 2017 que se encuentra vigente en la Dirección General de Bachillerato (DGB), debido a que el MCC en la EMS a la fecha sólo se está aplicando por primera vez en el primer semestre del bachillerato, que en el caso que nos ocupa corresponde al trabajo del curso Pensamiento Matemático 1: Pensamiento Estadístico y probabilístico. A continuación, se presenta el programa para la asignatura de Matemáticas 4.

Bloque I. Relaciones y funciones

Bloque II. Funciones Polinomiales

Bloque III. Funciones Racionales

Bloque IV. Funciones trascendentes

Desde el título de cada uno de los bloques se puede apreciar que predomina el estudio de las funciones, y haciendo un análisis de las formas en que se presentan los contenidos en los planes y programas de estudio, las funciones se presentan y conciben de forma estática y abstracta, en términos de las relaciones entre conjuntos numéricos y parejas ordenadas que satisfacen ciertas condiciones, más que en el estudio de las magnitudes variables y sus relaciones, alejándose del estudio de la variación y el cambio.

> Pensar en forma variacional no es saberse una definición de función. Al contrario, las definiciones usuales de función son estáticas: conjuntos de parejas ordenadas que no actúan, no se mueven ni hacen nada… saberse las gráficas de las funciones usuales no lo es. Más bien se convierten en obstáculos epistemológicos y didácticos al dominio del pensamiento variacional (Vasco C. E., 2002, págs. 62-63).

Luego se presenta la siguiente información con el eje, componente, contenido central y su relación con los bloques. De primer momento, se puede observar que el Bloque I que corresponde a Relaciones y Funciones no se encuentra definido explícitamente en esta tabla 2.2 puesto que sólo aparecen los bloques II, III y IV, no se puede precisar el motivo de esto.

Eje	Componente	Contenido Central	Bloque
Pensamiento y lenguaje variacional.	Cambio y predicción: Elementos del Cálculo.	Conceptos básicos de sistemas de coordenadas, orientación y posición	II III IV
		Introducción a las funciones algebraicas y elementos de las funciones trascendentes elementales.	
		Usos de la derivada en diversas situaciones contextuales.	
		Tratamiento intuitivo: numérico, visual y algebraico de los límites	

		Tratamiento del cambio y la variación: estrategias variacionales.	
		Graficación de funciones por diversos métodos.	
		Introducción a las funciones continuas y a la derivada como una función.	
		Criterios de optimización: criterios de localización para máximos y mínimos de funciones.	

Tabla 2.2 Relación de los bloques del programa con los contenidos del nuevo modelo educativo de la asignatura de Matemáticas 4. Tomado de (Subsecretaría de Educación Media superior, 2017, pág. 12)

No obstante, puede parecer interesante el título del Eje: Pensamiento y lenguaje variacional y del Componente: Cambio y predicción: Elementos del Cálculo, en los cuales al analizar el Contenido Central parece que se vuelve a las prácticas tradicionales de enseñanza en cuanto al Cálculo. Esto debido a que el estudiantado ve a las funciones como simples objetos en los que van sustituyendo o reemplazando valores, que ellos mismos nombran fórmulas, y llegan a comentar que, al contar con ellas, ya sea porque se las proporciona el docente o la obtienen ellos mismos, ya se ha concluido el trabajo.

> Más aún, esos modelos, entendidos sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas, obstaculizan el pensamiento variacional, que primero trata de captar qué varía con qué y cómo, antes de escribir nada y, mucho menos, antes de memorizar fórmulas (Vasco C. E., 2002, pág. 62).

En cuanto a la graficación de funciones por diversos métodos, tampoco corresponde a la forma de pensar variacionalmente, "al contrario, las gráficas cartesianas paralizan la covariación, y distraen la atención de la covariación hacia la forma estática de la gráfica" (Vasco C. E., 2002, pág. 62).

En la tabla 2.3 se realiza una revisión a los conocimientos, habilidades y aprendizajes esperados que se promueven en cada uno de los bloques, donde nuevamente se puede observar que no se centran en aspectos del pensamiento variacional, pues se indica que determinen dominio y rango de funciones, reconocer la gráfica de la función, composición de funciones y funciones inversas, esto para cada tipo de funciones como las polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Sólo por mostrar un ejemplo:

> La parábola estática que se sitúa en el origen de las coordenadas cartesianas no deja ver lo principal de la variación cuadrática, que es que el cero y el uno se quedan quietos; que los reales negativos saltan al lado de los positivos; que los números mayores que uno se agrandan y que se agrandan cada vez más

drásticamente en la medida en que son más grandes; que los menores que uno se achican y que se achican cada vez más drásticamente en la medida en que son más pequeños. Eso sí sería pensamiento variacional (Vasco C. E., 2002, pág. 62).

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Bloque I</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propósito del bloque: Utiliza las funciones y relaciones de forma crítica y reflexiva para explicar el comportamiento de fenómenos presentes en su entorno.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades</td><td>Aprendizajes esperados</td></tr>
<tr><td>Inecuaciones.

Relaciones y funciones.
• Dominio y rango
• Imagen de una función.
• Regla de correspondencia.

Graficación de funciones.
• Funciones especiales.
• Función inversa.
• Funciones crecientes y decrecientes.

Transformaciones gráficas.

Composición de funciones.</td><td>• Contrasta entre funciones y relaciones.
• Distingue el dominio, rango, imagen y regla de correspondencia de funciones y relaciones.
• Reconoce la gráfica de la función de acuerdo a sus características.
• Representa gráficamente las funciones especiales de acuerdo a su modelo. Identifica el proceso para la composición de funciones y el cálculo de la función inversa.</td><td>Emplea las relaciones y las funciones que le permitan resolver de forma reflexiva problemas presentes en su entorno.

Utiliza el pensamiento crítico y reflexivo para resolver la composición de funciones, así como la función inversa llevándolas de situaciones aplicables a en su entorno.

Aplica la función compuesta e inversa de manera algebraica o gráfica promoviendo su creatividad para calcular problemas de su vida cotidiana.</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Bloque II</td></tr>
<tr><td colspan="3">Propósito del bloque: Aplica modelos algebraicos a situaciones habituales, reflexionando sobre su fiabilidad y su validez con el fin de fomentar su capacidad para resolver problemas en la cotidianidad de su entorno.</td></tr>
<tr><td>Conocimientos</td><td>Habilidades</td><td>Aprendizajes esperados</td></tr>
</table>

Modelo algebraico general de funciones polinomiales Función lineal • Modelo grafico • Modelo algebraico • Raíces Funciones cuadráticas. • Modelo gráfico. • Raíces y el discriminante. • Formas: estándar y factorizada. Funciones de grado superior. • Modelo gráfico. • Raíces: teorema del residuo, del factor y división sintética. • Tratamiento visual de máximos y mínimos.	• Distingue entre los términos de función y ecuación. • Representa gráficamente funciones algebraicas, considerando sus características. • Selecciona modelos matemáticos de funciones algebraicas. • Describe los efectos de los parámetros de una función algebraica expresada en sus distintas formas. • Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. • Afronta retos asumiendo la frustración como parte de un proceso. • Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado. • Externa un pensamiento crítico y reflexivo de manera solidaria.	Construye modelos gráficos, algebraico y numérico de funciones polinomiales favoreciendo el trabajo colaborativo en los problemas de su entorno. Utiliza modelos matemáticos de funciones algebraicas de forma crítica y reflexiva para realizar predicciones e interpretaciones matemáticas dentro de su contexto.
Bloque III		
Propósito del bloque: Utiliza funciones racionales para modelar diferentes fenómenos, favoreciendo un pensamiento crítico ante las acciones humanas de impacto en su entorno.		
Conocimientos	Habilidades	Aprendizajes esperados
Función racional. • Modelo algebraico general de una función racional. • Modelo Gráfico. • Asíntotas.	• Analiza funciones racionales considerando sus características. • Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función racional. • Selecciona modelos de funciones racionales.	Construye la gráfica y el modelo de funciones racionales, de manera colaborativa, representando fenómenos sociales o naturales de su contexto.

• Aproximación informal a los límites.		Emplea modelos de funciones racionales, favoreciendo el pensamiento crítico, para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones presentes en su entorno.
Bloque IV		
Propósito del bloque: Utiliza funciones trascendentes que le permitan modelar situaciones presentes en su entorno, favoreciendo su pensamiento crítico.		
Conocimientos	Habilidades	Aprendizajes esperados
Función exponencial: • Forma general de la función exponencial. • Modelo Gráfico. Función logarítmica • Forma general de la función logarítmica. • Modelo Gráfico. • Propiedades de los logaritmos. • Cambio de base. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas. Funciones trigonométricas. • Forma general y características de las funciones trigonométrica. • Modelo Gráfico.	• Distingue las características de las funciones trascendentes. • Representa gráficamente funciones trascendentes considerando sus características. • Explica las ecuaciones exponenciales y logarítmicas. • Analiza modelos matemáticos referentes a funciones trascendentes.	Desarrolla el proceso de modelación matemática de funciones trascendentes, favoreciendo su pensamiento crítico, para la resolución de problemas en su vida cotidiana. Resuelve ecuaciones exponenciales y logarítmicas mediante enfoques gráficos o analíticos, mostrando disposición al trabajo metódico y organizado, para la resolución de problemas en su entorno. Utiliza modelos de funciones trascendentes, afrontando retos y asumiendo la frustración como parte de un proceso, para realizar predicciones e interpretaciones de situaciones de su entorno.

Tabla 2.3 Bloques de aprendizaje. Adaptada de (Subsecretaría de Educación Media superior, 2017, págs. 14-20)

La definición de función actualmente utilizada es la propuesta por Dirichlet en términos de relaciones entre conjuntos y/o parejas ordenadas, dejando de lado el análisis de la variación y covariación, motivo por el cual algunos autores afirman que “El Cálculo requiere de una manera variacional de pensar; en cambio, la manera de pensar característica del Análisis Matemático es funcional" (Jímenez, Grijalva, Milner, Dávila y Romero, 2022).

Thompson y Carlson (2017): "la manera de pensar que exige el Cálculo es un ente complejo constituido por dos componentes: *razonamiento variacional y razonamiento covariacional".*

> Dirichlet ofreció la función f, definida sobre los números reales por la regla f(x) = 0 si x es irracional y f(x) = 1 si x es racional, para aclarar que una ley de correspondencia podría ser arbitraria y que las funciones podrían ser altamente discontinuo. La definición matemática de función actual sigue la definición de Dirichlet, pero se expresa en términos de productos cartesianos y pares ordenados. Las ideas de variación y covariación en los valores de las variables ya no se ajustan a la definición matemática actual de función (Thompson & Carlson, 2017, pág. 422).

Es importante mencionar la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento variacional en los currículos de todos los niveles escolares para fomentar el estudio del cálculo bajo este enfoque, lo cual puede proporcionar el análisis, descripción o modelación de fenómenos naturales, físicos, biológicos, económicos, sociales, entre otros, en contextos reales que presentan alguna situación de cambio y se pueda entender el carácter dinámico de la naturaleza y no solamente el uso simbólico, algebraico o mecanizado de los procesos matemáticos. Como se asevera "El estudio y la comprensión de la variación y el cambio cumplen un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento variacional en todos los niveles educativos en la educación matemática escolar" (Posso, 2020, pág. 32).

> El pensamiento variacional tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006, pág. 66).

Esto se puede interpretar como el surgimiento de una propuesta de enseñanza para el Cálculo que permita enfrentar el problema del aprendizaje y enseñanza del cambio y la variación. Sin embargo, considero que el verdadero reto al enseñar cualquier concepto u objeto matemático se encuentra en la forma de diseñar actividades o secuencias didácticas, para que los estudiantes descubran estos conceptos u objetos por sí mismos, y no por una simple exposición por parte del docente.

Respecto a esto, se puede mencionar que existe poco material en los libros de texto respecto a la promoción del pensamiento variacional y esto se puede verificar revisando el contenido de alguno de estos. De aquí que cae la responsabilidad del diseño de actividades en el docente, como se enfatiza en el MCC de la EMS que "se trata de un currículum donde se hace explícito el papel del docente como diseñador curricular y agente de transformación social" (SEMS, 2022, pág. 4), sin encontrarse capacitado para realizar esa labor con este nuevo enfoque.

Por lo anterior se tiene la necesidad de capacitación para el personal docente pues son ellos los que primero deben tener desarrollado el pensamiento variacional para poder fomentarlo en el estudiantado e incidir en su proceso de aprendizaje.

De esta manera, ante el compromiso tan relevante de la matemática educativa de colaborar, abonar o participar en el desarrollo de la sociedad, se puede reflexionar y cuestionar acerca de lo que debe enseñarse en la asignatura de Cálculo o cursos afines, y cuáles son las maneras más apropiadas que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes; así como las competencias, características o habilidades que deben tener los profesores y/o cómo deben capacitarse a los docentes de matemáticas que imparten en esta área.

2.4 Desarrollo Profesional Docente

En el sistema educativo, el papel del docente es muy importante en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, debido a que debe promover el desarrollo de ciertas habilidades y el uso de herramientas por parte de sus estudiantes, de acuerdo con sus contextos y necesidades sociales. Por tanto, se "requiere de personal docente de matemática altamente calificado, con sólidos conocimientos matemáticos y con herramientas pedagógicas y tecnológicas adecuadas, que permitan el desarrollo integral en sus estudiantes" (Fonseca & Alfaro, 2018, pág. 3).

> De esta manera, otro aspecto fundamental en la enseñanza del cálculo diferencial e integral es el personal docente de matemática. El profesorado puede manejar las ideas del cálculo; sin embargo, entenderlas, manejarlas, interpretarlas y enseñarlas son procesos diferentes y complejos. De este modo, en el salón de clases no necesariamente se construye conocimiento, sino que en ocasiones es el lugar en donde se desarrollan las creencias del personal docente, y esto coadyuva a obstaculizar el aprendizaje del estudiantado (Díaz, 2009, pág. 88).

Por eso, es importante tener dominio del conocimiento disciplinar que se imparte, pero no es suficiente, ya que además los profesores necesitan conocer las diferentes maneras o formas de enseñanza y los distintos significados de ciertos objetos matemáticos, el nivel o la profundidad con la que deben ser abordados, conocer el currículo, realizar el vínculo con otras disciplinas o grados anteriores y posteriores, entre otros, pues el profesor tiene el compromiso de brindar una educación de calidad, no sólo es transmitir información del contenido de la asignatura sino lograr el crecimiento de sus alumnos tanto en lo académico como en lo personal.

Lo anterior se puede considerar como una motivación, por lo cual en los últimos años se ha puesto énfasis, en las investigaciones de matemática educativa, a los aspectos relacionados con la práctica docente, pues "se reconoce que la formación didáctica de los profesores es un campo de investigación científica y tecnológica que reclama atención por parte de la Didáctica de la Matemática, pues el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas básicas de los alumnos depende, de manera esencial, de dicha formación" (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017, pág. 91).

También es conocida la relevancia y complejidad que tiene esta labor como profesional de la educación, pues es parte fundamental en la enseñanza de las matemáticas, ya que “una de las tareas principales del profesor de matemáticas es el diseño, implementación y evaluación de la práctica docente con la finalidad de favorecer el aprendizaje de los estudiantes” (Godino, Rivas, Castro, & Konic, 2012, pág. 1).

Entonces, son muchos los retos que debe enfrentar el profesor de matemáticas, ya que el objetivo va mucho más allá de que aprendan matemáticas, pues se pretende que los individuos se desarrollen como seres humanos, con ciertas características, que mejoren su condición de vida y se desempeñen mejor que generaciones pasadas, no sólo en el campo disciplinar. Esto permite preguntarse ¿Cuál es la matemática que se debe enseñar?, ¿Cómo se debe de enseñar?, ¿Por qué es tan importante la matemática que se debe estudiar en todos los niveles educativos?, ¿Qué beneficios les deja la matemática como seres humanos?, entre otras. Entonces, particularmente, se puede considerar que las matemáticas permiten desarrollar cierto tipo de pensamiento que ayuda a razonar y con ello resolver problemas que se presenten en la vida cotidiana, pues presenta ciertos procedimientos y herramientas que ayudan en ello.

De tal manera, que otro de los cuestionamientos por plantear es ¿Qué se entiende por desarrollo profesional docente? Se puede entender al Desarrollo Profesional Docente como la evolución y mejoramiento de los profesores, es decir docentes evolucionando o progresando en su actividad como profesionales de la educación, por lo que se puede hablar de la necesidad de fortalecer su conocimiento matemático, sus conocimientos de los procesos cognitivos, de sus formas de enseñanza y en general, reflexionar y cuestionar su propia práctica docente. A estas cuestiones algunos investigadores en educación han tratado de responder; sin duda que Shulman es uno de los investigadores precursores en la educación en poner hincapié dentro de sus investigaciones en estas temáticas que abordan los conocimientos, habilidades o competencias con los que pueden contar los docentes para favorecer su práctica profesional.

En un principio, en la educación se consideraba que sólo era suficiente contar con el conocimiento del contenido disciplinar a impartir por parte de los profesores, es decir sólo se ponía énfasis en la materia que se deseaba enseñar en cierto nivel escolar. Años más tarde, se pensaba que la parte central era el conocimiento pedagógico que tenía el docente; el gran mérito o la relevancia del trabajo de Shulman (1986) es vincular o asociar estos dos grandes conocimientos para dar pie al “Conocimiento Pedagógico del Contenido”, con esto, sustenta las bases para que la enseñanza de un docente pueda ser favorable y le permita promover el aprendizaje eficaz de algún contenido específico en sus alumnos.

A partir de lo anterior, se pone énfasis en la formación y desarrollo de los profesores de matemáticas (Cardeñoso, 2001; Geller, 2005; Gómez-Chacón, 2005; Chapman, 2009) como medida para mejorar las prácticas de enseñanza de las matemáticas en el aula, y se consideran dos perspectivas: una orientación profesional para mejorar su práctica, y la calidad de la enseñanza de las matemáticas en clase. También, se menciona que una de las tareas más importantes que debe asumir la Educación Matemática es el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, impulsar procesos formativos que lo potencien, diseñar estrategias de formación, contemplar las dimensiones y aspectos que las caracterizan.

De aquí que se presenten algunos modelos referentes a ciertos conocimientos que se deben considerar acerca de los profesores de matemáticas, como el "Conocimiento Matemático para la enseñanza" (MKT por sus siglas en inglés), "Teoría de la Proficiencia en la enseñanza" (Hill, Ball y Schilling, 2008; Shoenfeld y Kilpatrick, 2008), entre otros; luego, Godino (2009) afirma que estos modelos incluyen categorías muy generales y propone un modelo que permite un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas.

En estudios recientes se han incorporado algunas competencias con las que debe contar el profesor de matemáticas, proponiendo modelos que permitan una integración explícita entre las nociones de conocimiento y competencia docente (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Castro y Font, 2022). Aquí se destacan la caracterización y desarrollo de conocimientos didácticos-matemáticos que le permitan al docente favorecer el manejo de sus clases y las habilidades necesarias para el ejercicio profesional.

El modelo Competencias y Conocimientos Didácticos-Matemáticos (CCDM) propuesto en Pino-Fan, Castro y Font (2022) sugiere la necesidad de considerar dos grandes competencias para la actividad profesional del profesor de matemáticas: Competencia Matemática y Competencia de Análisis e Intervención Didáctica; cuando se refiere a la Competencia Matemática se parte del hecho que el docente ya tiene cierto dominio en la disciplina matemática, por lo que esta parte se está poniendo énfasis a la enseñanza de las matemáticas, es decir la forma en la que va a presentar o la habilidad de cátedra para mostrar el contenido matemático. En otras palabras, al quehacer como profesor de diseñar, implementar y evaluar procesos de enseñanza de las matemáticas pues los desafíos están relacionados con las tareas críticas para la actividad profesional del docente.

En el caso de la Competencia para el Análisis e Intervención Didáctica se pone en juego el conocimiento didáctico-matemático para analizar la actividad matemática, se propone impulsar conocimientos relacionados con aspectos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y los conocimientos que debe tener un profesor para la reflexión sobre su práctica docente.

3 ESTADO DEL ARTE

En esta sección se exploran varias posturas sobre el Pensamiento Variacional, para la mayoría de las cuales señalan la necesidad de vincular una forma de pensar dinámica, asociando la covariación de magnitudes variables. Algunos investigadores visualizan dos momentos en el Pensamiento Variacional como la identificación de variables y patrones de cambio, la covariación entre magnitudes variables; o bien, un razonamiento variaciacional y otro covariacional.

Para contar con un panorama general de lo trabajado en la comunidad sobre esta temática, se realiza una revisión bibliográfica sobre trabajos del Pensamiento Variacional, que incluye la propuesta de que los estudiantes deben iniciar desde educación primaria con el desarrollo de este tipo de pensamiento. En educación básica se promueve el pensamiento variacional por medio de la identificación de patrones con figuras geométricas, en secundaria se enfatiza representar la covariación por medio de tablas o gráficas. En bachillerato los estudiantes ya deben realizar transformaciones entre diferentes representaciones y abordan situaciones más complejas para su estudio.

Para finalizar, se presenta una revisión de la literatura sobre trabajos con profesores en servicio y en formación, destacando la necesidad de capacitación en el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático para fomentar un Pensamiento Variacional en los estudiantes.

3.1 Posturas sobre el pensamiento variacional

El Cálculo, considerado como la matemática de la variación y el cambio, ha sido tema de muchas investigaciones, sobre todo en lo referente a su enseñanza y aprendizaje. Algunos de los autores que han investigado sobre el pensamiento variacional son Thompson y Carlson (2017), Vasco (2002), Cantoral y Farfán (1998), Caballero y Cantoral (2013), Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila y Romero (2022), Mendoza y Cabezas (2017), Villa-Ochoa (2012), entre otros. En todos éstos se afirma que este tipo de pensamiento involucra la identificación de magnitudes variables en ciertos fenómenos de interés, la relación o covariación que existe entre éstas y el análisis de la situación dinámicamente, utilizando o presentando diferentes concepciones o posturas para este enfoque.

En un artículo de Vasco acerca del pensamiento variacional se presenta una descripción más completa de esta relevante manera matemática de pensar, menciona lo que es y lo que no es este tipo de pensamiento, así como identificar patrones que se manifiestan en la mente al razonar variacionalmente, y enuncia la siguiente definición:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que

> relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco C. E., 2002, pág. 63).

Manifiesta que existen varios momentos o etapas para poder desarrollar el pensamiento variacional: como primera instancia es la captación de lo que cambia, de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como el crecimiento de una planta en determinado momento, consumo de energía eléctrica o de agua según el volumen utilizado, entre otros.

En un segundo momento se tiene la producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar "modelos mentales"; luego tiene un momento de echar a andar o "correr" esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y si es el caso, tiene también el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo.

En resumen, se puede concluir que este proceso consta de cinco fases: 1) Identificación de magnitudes variables y patrones, 2) Creación de modelos mentales, 3) Implementar el modelo y observar resultados, 4) Verificar el modelo para comparar con el proceso que se desea modelar y 5) Mejorar el modelo o descartarlo.

Se puede observar cómo se intenta vincular lo que se está pensando de forma dinámica en la mente, y que esto se asocie a la covariación que se presenta con las magnitudes variables en la realidad. Es decir, lo que se tiene en la mente de forma no ostensiva se lleve a la realidad con representaciones o imágenes de manera ostensiva (materiales) y que se correspondan con el proceso que se desea analizar. En otras palabras, "el objeto del pensamiento variacional es pues la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo" (Vasco C. E., 2002, pág. 63).

En Mendoza y Cabezas (2017) se presentan ideas similares en cuanto a lo que se ha comentado referente al desarrollo del pensamiento variacional propuesto por Vasco; la diferencia radica en que estos autores distinguen sólo dos momentos: el primero, en donde identifican patrones de regularidad de los procesos con lo que cambia y lo que permanece constante; y un segundo momento, que requiere acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales para reproducir covariaciones entre magnitudes. Para estos autores, la cognición de cada sujeto ayuda a crear sistemas mentales, los que a su vez ejecuta, revisa, refina y, de ser necesario descarta.

> En esta última acción, se inicia un nuevo proceso de génesis de modelos. Desde esta mirada, los modelos mentales se afinan, y se convierten en representaciones mentales (Duval, 1999) los cuales son exteriorizados mediante representaciones semióticas que pueden ser palabras, dibujos, letras, números.

> Pensar variacionalmente desde este enfoque es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables involucradas, manifestada en algún tipo de soporte material (registro ostensivo) (Mendoza & Cabezas, 2017, pág. 51).

Existen otros investigadores que también han aportado ideas del pensamiento variacional como, Cantoral y Farfán, quienes presentan una línea de investigación denominada Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), en donde pretenden que los resultados de las investigaciones vayan de la mano con las prácticas sociales, pues sostienen que en los procesos de enseñanza y aprendizaje son estas las que permiten la existencia de la matemática de la variación y el cambio. Asimismo, coinciden con Vasco en el sentido de que, para acceder al pensamiento variacional, se requiere un análisis más detallado o profundo de las gráficas que sea rico en significados, y no solamente el estudio de éstas de una manera superficial.

> El pensamiento variacional es conceptualizado desde distintas perspectivas de acuerdo a ciertos elementos, su génesis intrapersonal o extra personal y los indicadores de su desarrollo. Una primera mirada afirma que uno de los propósitos del pensamiento variacional es articular la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 1998) y a situaciones que involucran variación en contextos; ya sean estos, realistas o fantasistas, intra o extramatemáticos. Desde esta mirada, un saber no se estudia únicamente desde lo cognitivo, ya que las creaciones humanas, las matemáticas en este caso, se han desarrollado en contextos históricos, culturales y sociales situados, y es a través de las prácticas sociales que los seres humanos le dan sentido a lo que hacen, comparten códigos, utilizan diferentes estructuras y lenguajes (Cantoral & Farfán, 2003).

Otra referencia teórica respecto al pensamiento variacional es la que presenta el Ministerio de Educación Nacional de Colombia, debido a que considera que juega un "papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas" (MEN, 2006, pág. 66).

De manera similar, se reconoce que para motivar la naturaleza dinámica del pensamiento variacional se requiere articular lo cognitivo con lo didáctico, lo cual va a favorecer su desarrollo y su potenciación; también que se encuentra vinculado con otros tipos de pensamientos matemáticos, como el numérico, métrico, espacial, probabilístico y estadístico, y con otras ciencias ya que permite adquirir habilidades para construir modelos matemáticos en distintos contextos: físicos, biológicos, económicos, sociales, entre otros.

Este tipo de pensamiento matemático se encuentra en conexión con otros pensamientos y como eje articulador de éstos ya que se considera al estudio de la variación como base fundamental para la identificación de las magnitudes variables, de las medidas de las cantidades asociadas a éstas y de los procesos de generalización referentes al contexto de la situación problema que se requiere resolver. Esto permite considerar que se encuentre presente en el currículo matemático.

También, se comenta que el desarrollo del pensamiento variacional es complejo y paulatino debido a sus características, pues se deben observar aspectos de lo que cambia y lo que permanece constante, las magnitudes variables que intervienen, la relación entre éstas, cómo y cuánto cambian, conjeturar o crear hipótesis sobre un posible modelo, argumentar y generalizar la propuesta mediante representaciones matemáticas como tablas, gráficas o expresiones algebraicas que permitan abordar situaciones de cambio y variación en la resolución de problemas.

En ideas similares referente al pensamiento variacional, Thompson caracterizó la covariación en términos de "conceptualizar los valores de cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como variables simultáneamente" (Thompson & Carlson, 2017, pág. 424). En este sentido, el razonamiento covariacional se entiende como observar que los valores de dos cantidades cambian y lo hagan simultáneamente.

Carlson y colaboradores definen el razonamiento covariacional como las "actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, pág. 124); sus investigaciones en trabajos con estudiantes universitarios permitieron construir un marco conceptual en donde se proporciona la descripción de cinco acciones mentales y niveles de razonamiento para la covariación.

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (ej., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se

		consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Tabla 3.1 Actividades cognitivas. Tabla tomada de Carlson (2003) pág. 128.

> Los comportamientos incluidos en la lista se han identificado previamente en estudiantes de pregrado mientras respondían a tareas que involucran la interpretación y representación de funciones asociadas a situaciones dinámicas (Carlson, 1998). Las acciones mentales del marco conceptual de la covariación proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación; sin embargo, la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, relativa a una tarea particular, se puede determinar sólo examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibido mientras responde a esa tarea (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003, pág. 127).

Para lograr alguno de los niveles propuestos respecto al razonamiento covariacional se tienen que alcanzar ciertas acciones mentales asociadas hasta ese nivel, por ejemplo, para que una persona se encuentre en el Nivel 5 que corresponde a la razón instantánea de cambio, se debe haber pasado por las cuatro acciones mentales presentadas previamente. Parece interesante esta propuesta, en el sentido de que presenta etapas bien estructuradas y observando la manera en que se va logrando la covariación gradualmente, pero con un enfoque más centrado en lo matemático que lo referente a los contextos de las situaciones reales. Nótese que no se está diciendo que sea incorrecta esta manera de abordarlo, sin embargo, en la actualidad se requiere vincular más directamente o de manera inmediata lo que sucede en los salones de clases con aprendizajes significativos para la vida cotidiana.

Niveles del razonamiento covariacional
El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). Coordinación
En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección
En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio
En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea
En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Tabla 3.2 Niveles de razonamiento covariacional. Tabla tomada de Carlson (2003) pág. 129

El desarrollo del pensamiento variacional ha conducido a la necesidad de concebir los cambios continuos de una magnitud variable con relación a los cambios continuos que sufre otra magnitud variable de la cual depende esta, esto es, "la manera de pensar que exige el Cálculo es un ente complejo constituido por dos componentes: *razonamiento variacional y razonamiento covariacional"* (Thompson & Carlson, 2017, pág. 456).

Razonamiento Variacional

Hablar de razonamiento variacional implica identificar la existencia de propiedades o características en un fenómeno natural que puedan ser medibles y que se encuentren presentes en situaciones de cambio. A estas cualidades se les denomina cantidades o magnitudes y pueden representarse con números.

En la literatura sobre el aprendizaje del Cálculo se afirman que existe una diferencia entre cantidad y número; se refiere a la cantidad como el resultado de mediciones de objetos o fenómenos físicos y los números son el valor de esta cantidad, aquí se puede reproducir el aforismo de Cauchy: "a los números se los ve nacer de la medición de las magnitudes".

Al pretender cuantificar una característica se deben tener en cuenta tres consideraciones: percibir al objeto, identificar la característica medible y concebir un método de medición para la característica. Existen tres tipos de magnitudes en una situación de cambio: **constante**, la cantidad tiene un valor que no varía nunca; **parámetro**, valor que puede cambiar de una situación a otra, pero que no varía dentro de una misma situación, y **variable**, es una cantidad que varía dentro de una misma situación (Thompson & Carlson, 2017).

> El razonamiento variacional tiene lugar al concebir que, en una situación de cambio, están presentes cantidades (magnitudes) cuyos valores cambian. En la situación a), lo que cambia es la distancia del corredor medida desde el punto de partida; en b), cambia la altura que alcanza el líquido en la copa, medida desde el fondo de ésta, entre muchas otras (Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila, & Romero, 2022, pág. 220).

Figura 3.1 Razonamiento variacional. Tomada de Jiménez y colaboradores, 2022, pág. 220

Entonces, en un primer momento se trata de *identificar las magnitudes variables*: donde se puede observar que la primera magnitud variable que se identifica es la distancia recorrida por el corredor desde el punto de partida y la altura del líquido en la copa al momento de llenarse. Una segunda magnitud variable que se encuentra presente es el tiempo. También, se puede apreciar que las primeras magnitudes variables (distancia y altura) están cambiando a medida que el tiempo también cambia.

> Así pues, este *primer momento*, caracterizado por el hecho de percibir o concebir, en una situación de cambio dada, la intervención de una, dos, tres, cuatro, etc., magnitudes variables (una de las cuales puede ser el tiempo), e indagar de qué manera cambian, de formarse imágenes mentales sobre dichas maneras de cambiar, de idear herramientas matemáticas para representar y cuantificar tales cambios, desarrollar un lenguaje apropiado para describir esos cambios, y mucho más, es lo que constituye la esencia del razonamiento variacional (Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila, & Romero, 2022, pág. 221).

Además, la distancia recorrida en cada momento y la altura del líquido en cada instante de tiempo es única, lo que permite visualizar que las magnitudes variables no pueden tomar diferentes valores en cada instante, es decir se cumple con el *principio de unicidad*.

El segundo momento es *distinguir la manera cómo estas magnitudes cambian*: en el caso de la distancia recorrida del corredor desde el punto de partida P hasta la meta M, es fácil notar que debe pasar por cada uno de los puntos intermedios entre P y M; de manera análoga, se presenta con la altura del líquido en el llenado de la copa, ya que al pasar de una altura inicial h_0 a una final h_f debe alcanzar todas las alturas intermedias entre h_0 y h_f. A esto se le conoce como el *principio de continuidad*.

Razonamiento Covariacional

Es un elemento fundamental dentro del pensamiento variacional ya que se trata de entender las relaciones que las magnitudes variables presentan en los fenómenos físicos, biológicos, económicos y demás, que nos ayuda a comprender el mundo que nos rodea. Al trabajar con este tipo de razonamiento se trata de identificar en el fenómeno al menos dos cantidades que están cambiando, las cuales están relacionadas de alguna forma y los valores numéricos que toman éstas varían simultáneamente.

Es relevante mencionar que en los fenómenos naturales se puede observar que unas magnitudes variables dependen de otras, por ejemplo, el índice de masa corporal depende del peso y estatura, el salario de un empleado depende de las horas trabajadas, el consumo de agua mensual depende del volumen de agua utilizado, entre otros. En estas situaciones se puede apreciar que sólo una de estas variables puede tomar valores arbitrariamente y que el conjunto de valores que puede tomar la otra magnitud estará condicionado al primero, es decir, sólo una de las magnitudes variables podrá tomar valores libremente, ya que la otra dependerá de ésta.

A la capacidad de coordinar el cambio continuo entre dichos valores numéricos de las magnitudes variables se le denomina *razonamiento covariacional* y lo caracterizan como el conjunto de todas "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se considera la forma en que cambian en relación mutua" (Carlson M. J., 2002, pág. 4) . Es decir, es imprescindible para el desarrollo del Cálculo ya que implica la relación entre las magnitudes variables que cambian de manera sincrónica y continua.

Según Thompson, Byerley y Hatfield (2013) citado en (Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila, & Romero, 2022, pág. 223), la covariación implica lo siguiente:

> a) La formación de una imagen del cambio para cada una de estas dos magnitudes variables (cada una de ellas cambia, esto es, toma distintos valores numéricos en diferentes momentos); b) La coordinación simultánea de estas dos imágenes (ambas magnitudes cambian de manera simultánea: cambia una de ellas, y la otra también cambia de inmediato); y c) La formación de una imagen de la covariación de estas dos magnitudes.

En la covariación se presenta la correlación entre dos magnitudes variables, una que depende de la otra, la variable que cambia de manera independiente se le conoce como *variable independiente o magnitud de referencia* y a la que varía en coordinación con la primera, se le llama *variable dependiente o magnitud de interés*.

De manera general, "la noción de covariación exige la coordinación de los valores numéricos de dos magnitudes variables que cambian simultáneamente, tomando en consideración la forma en que dichas magnitudes variables cambian una en relación de dependencia con la otra". (Carlson M. J., 2002, pág. 3)

Figura 3.2 Covariación. Tomada de Thompson y Carlson, 2017, pág. 426.

En las figuras se puede observar cómo la distancia recorrida por un corredor está variando a partir de un punto de referencia y lo hace simultáneamente en dependencia del tiempo transcurrido, entender estos procesos de cambio relacionados de manera conjunta es lo que se conoce como covariación.

> El razonamiento covariacional ocurre al coordinar los valores numéricos de dos magnitudes variables que cambian la una en dependencia de la otra y es mucho más complejo que el razonamiento variacional, y para desarrollar en el alumno la capacidad de razonar covariacionalmente, es deseable y necesario desarrollar previamente su capacidad más elemental de razonar de manera variacional, esto es, de razonar sobre una sola magnitud variable (Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila, & Romero, 2022, pág. 226).

En el siguiente esquema se puede observar un bosquejo general de las ideas presentadas hasta el momento en cuanto al pensamiento variacional de Jiménez y colaboradores

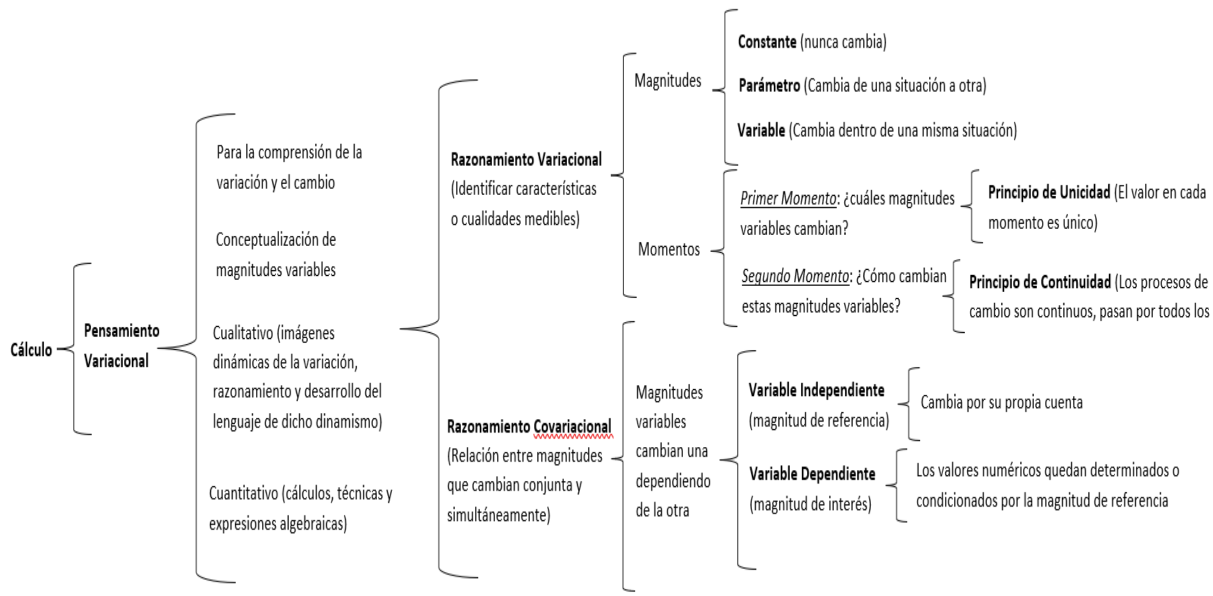


Figura 3.3 Esquema de pensamiento variacional. Elaboración propia, adaptado de (Jiménez, Grijalva, Milner, Dávila, & Romero, 2022).

3.2 Trabajos relacionados con el pensamiento variacional

Es importante fomentar el desarrollo del pensamiento variacional en el sistema educativo desde edades tempranas, con la finalidad de que los alumnos se vayan familiarizando con este tipo de pensamiento matemático, para ir construyendo en los estudiantes las ideas variacionales de naturaleza dinámica que permitan el aprendizaje matemático; como aseguran Carlson y Thompson, son “formas de pensar que culminan el aprendizaje que debe ocurrir en la escuela primaria y secundaria” (Thompson & Carlson, 2017, pág. 451).

Estos autores comentan que se necesitan al menos 12 años para aprender Cálculo, los cuales se puede asociar con la escolaridad de primaria, secundaria y bachillerato (educación media superior) del sistema educativo mexicano. Más aún, afirman que no todas las matemáticas escolares deben tener como objetivo preparar a los estudiantes para esta área; sin embargo, afirman que las ideas de esta rama de las matemáticas son base o parte del aprendizaje matemático que se requiere tengan los alumnos en la escuela.

Con el objetivo de contar con un panorama general acerca de investigaciones relacionadas con el pensamiento variacional, a continuación, se presentan algunos escritos desarrollados con este tipo de pensamiento matemático que se han encontrado hasta el momento, clasificándolos por nivel educativo.

La manera de introducir el pensamiento variacional en Paladinez (2018), Acosta, Jiménez y Villar (2015) y Maury, Palmezano y Cárcamo (2012) en el nivel básico, es mediante la identificación de patrones con figuras geométricas, aumentando en cada etapa el nivel de complejidad para poder llegar a la generalización de sucesiones, con apoyo en applets de GeoGebra. Es decir, se está fomentando el razonamiento variacional y se tiene un primer acercamiento a la covariación, al asociar las cantidades por medio de tablas.

En nivel de secundaria, como se señala en Dávila (2018), Posso (2020) y Caicedo (2013) se introduce el uso de las letras en diferentes contextos culminando con su empleo para representar magnitudes variables; se inicia con problemas en diferentes situaciones en contextos, dando énfasis a la comprensión de los problemas, analizando la relación entre las cantidades involucradas en diferentes registros; se apoyan en software dinámico. Aquí se desarrolla un pensamiento variacional más completo, en el sentido de que se motiva el razonamiento variacional al identificar en los problemas de contexto qué cambia, cómo cambia y cuánto está cambiando; haciendo hincapié en la covariación al observar la relación entre las variables involucradas presentadas en tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

En los trabajos de Posada y Villa (2006), Villa-Ochoa (2012) para estudiantes de bachillerato, se abordan situaciones más complejas o de mayor grado de dificultad, con diferentes representaciones semióticas para la misma situación problema ya sea en contexto escolar o cotidiano; las actividades se encuentran enfocadas a un solo tipo de variación como la lineal y cuadrática; esto último con el marco teórico de Carlson y colaboradores (2003) para el razonamiento covariacional. Además, se valoraron algunas evaluaciones externas en el contenido del pensamiento variacional y los resultados obtenidos por los estudiantes en éstas.

Lo que se puede destacar de estos últimos documentos es el nivel en donde se realizaron, ya que es el objetivo meta en cuanto al trabajo que deben realizar los profesores, y permitirá tener un estudio de referencia para el diseño de secuencias didácticas o actividades que éstos deberán promover en sus estudiantes respecto al pensamiento variacional.

En el artículo *Variational thinking in the academic performance of High School students*, los autores Giler-Medina y Alcívar-Castro, manifiestan que la problemática del proceso de enseñanza-aprendizaje del pensamiento variacional presenta diversas deficiencias que conducen a un bajo rendimiento académico, esto debido a que no se desarrollan de manera adecuada las habilidades didácticas ni el desarrollo de ejercicios matemáticos en pensamiento variacional y se observó la necesidad de mejorar las estrategias aplicadas por los docentes (Giler-Medina & Alcívar-Castro, 2022). Lo relevante para este trabajo es concientizar acerca de la importancia de la articulación del conocimiento disciplinar con el didáctico sobre el desarrollo del pensamiento variacional de los propios profesores y posteriormente al implementase en las aulas escolares (Giler-Medina & Alcívar-Castro, 2022).

En los estudios de Mendoza y Cabezas (2016, 2017) y de Vrancken y Engler (2014) referentes al nivel superior, se reportó el análisis del pensamiento variacional en estudiantes de los cursos iniciales de Cálculo en ingenierías, también la introducción de la derivada a través de este enfoque variacional. Este último, en la línea del Pensamiento Lenguaje y Variacional (Pylvar) en el contexto de una ingeniería didáctica, donde las actividades permitieron analizar diversos escenarios de variación (qué magnitudes cambian, cómo y cuánto cambian).

Lo relevante para esta tesis doctoral que se encuentra en desarrollo es que Mendoza y Cabezas realizan un análisis de las manifestaciones del pensamiento variacional de los alumnos en un primer curso de cálculo inicial en la Universidad de Maule, Chile con el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), fundamentos teóricos con lo que se estarán sustentando el mismo trabajo en proceso y el pensamiento matemático de interés, pero encaminado a docentes en servicio.

Esta revisión me permite coincidir con lo que se expone en el documento de la Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, Colombia, donde se reconocen tres ejes conceptuales asociados al pensamiento variacional, que orientan el desarrollo del currículo de la educación básica y media: “patrones y regularidades, procesos algebraicos y análisis de funciones” (Seduca, 2005, pág. 58). En este último agregaría un análisis detallado y profundo, de forma variacional y no estática.

Más aún, se puede comentar que en los trabajos examinados se hace hincapié en el uso de los diferentes registros de representaciones semióticas, y que los procesos de modelación son una parte fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional; además de apoyarse las actividades o secuencias didácticas en software dinámico.

En Thompson y Carlson (2017) se presenta un análisis sobre diferentes investigaciones acerca de las concepciones de función de estudiantes y docentes desde el punto de vista de la covariación; asimismo, siguen argumentando la necesidad de desarrollar el razonamiento cuantitativo, variacional y covariacional de los estudiantes; que estas formas de pensar son complejas y se dan durante un largo proceso escolar; además proporcionan un listado de futuras investigaciones entre las que se encuentra “Experiencias de profesores que no razonan covariacionalmente pero que sin embargo son llamados para ayudar a los estudiantes a aprenderlo con materiales didácticos diseñados para apoyarlos” (Thompson & Carlson, 2017, pág. 462).

Es interesante hacer notar cómo esa línea de investigación que se exhibió como futura, hace algunos años, ya se encuentra presente en el trabajo de nuestros días, pues algunos países, como México y Colombia ya incluyen el pensamiento variacional en sus modelos educativos, con ello, la necesidad de la capacitación docente en este tema o enfoque.

Cabe señalar que el interés que se persigue con este trabajo es el de colaborar con un grupo de profesores del bachillerato para fomentar, tener un acercamiento y desarrollar el pensamiento variacional con los docentes en la educación media superior que están impartiendo o han impartido cálculo, precálculo o asignaturas similares (matemáticas 4), y que se enfrentarán en las aulas con este tipo de pensamiento mediante el curso de pensamiento matemático 3 como lo indica el MCC en la Educación Media Superior en México. Sería ambicioso intentar considerar a todo el personal docente en todo el nivel medio superior ya que sólo será con algunos profesores del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Por este motivo, es importante tener una panorámica general de lo que se tiene hasta el momento en cuanto a actividades o propuestas para desarrollar el pensamiento variacional en todos los niveles educativos, y con los propios profesores, para poder diseñar secuencias didácticas que permitan desempeñar un buen papel o una educación de calidad en los salones de clases.

3.3 Trabajos relacionados con profesores

La labor o el rol que desempeñan los docentes es de suma importancia en las aulas escolares, pues de ellos depende, en gran medida, el aprendizaje de sus alumnos. De esta manera, nos dimos a la tarea de realizar algunas revisiones literarias en educación matemática en torno a profesores en general, es decir, en formación o en servicio, pero prestando atención a contextos vinculados con el pensamiento variacional o temas afines al Cálculo, como los conceptos de función, derivada, integral, entre otros.

En su trabajo *Mathematics Teachers' Covariational Reasoning Levels and Predictions about Students' Covariational Reasoning Abilities*, los autores Aysel ŞEN ZEYTUN, Bülent ÇETİNKAYA y Ayhan Kürşat ERBAŞ, tienen como propósito investigar el nivel de razonamiento covariacional de los profesores de matemáticas y las predicciones que tienen en cuanto a las habilidades de estudiantes con respecto a este tipo razonamiento; para el estudio, adoptan la postura de Carlson y colaboradores (2002), llegando a la conclusión que las habilidades respecto al razonamiento covariacional de los docentes son débiles y carentes de profundidad pues los resultados muestran a la función como correspondencia y no como covariación, por tanto, también las predicciones respecto a las habilidades de estudiantes (Şen Zeytun, Çetinkaya, & Erbaş, 2010).

Este documento es sumamente relevante pues cuenta con características esenciales para los fines de este proyecto en desarrollo como son los profesores en servicio, en el nivel medio superior que se puede asociar con el doceavo grado mencionado, el tópico de interés, identificar el desarrollo que los maestros tienen respecto a éste. La diferencia radica en la definición y elementos teóricos que adoptan pues para los fines de este trabajo se considera a Vasco (2003) y el enfoque Ontosemiótico (EOS) con el modelo CCDM (2022). También, en cuanto al objetivo que se persigue en este proyecto no es tan sólo identificar el nivel del pensamiento variacional que tienen los maestros, sino que además de ser capaces de resolver problemas en contextos de este tipo de pensamiento, los profesores deben poder proponer o plantear problemas matemáticos que permitan el desarrollo del pensamiento variacional, es decir, los profesores como diseñadores de tareas matemáticas.

En el artículo de Caballero y Cantoral acerca ***El desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional entre profesores de bachillerato*** se desea identificar las causas que originan dificultades en profesores para desarrollar un pensamiento variacional. Para ello se plantearon los siguientes objetivos: 1) caracterizar los elementos que conforman el pensamiento y lenguaje variacional, 2) diseñar actividades que involucren situaciones de variación y 3) identificar las estrategias empleadas por los profesores que son variacionales de las que no lo son, para verificar si su hipótesis es válida (Caballero & Cantoral, 2013). En éste se desarrollan los primeros dos objetivos y se da continuación con el tercero en el escrito ***Dificultades en el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de bachillerato***, donde aseveran que las dificultades para desarrollar el pensamiento variacional se encuentran en la centración de utilizar de forma mecánica o forzada algún conocimiento matemático cuyo uso garantiza poder dar respuesta a las actividades, siendo esta su hipótesis planteada, se apoyan en la teoría Socioepistemológica y se aplican las actividades a profesores de bachillerato que han impartido al menos un curso de Cálculo Diferencial o Integral, Pre-Cálculo, o asignaturas similares, entre 3 y 8 años de experiencia docente; se aplicaron dos actividades con gráficas que presentan comportamientos variacionales similares, se hicieron cuestionamientos y con el análisis de las respuestas de los profesores se concluyó que su hipótesis es válida (Caballero & Cantoral, 2013).

Caballero y Cantoral (2013) en la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar), “que estudia los saberes matemáticos propios de la variación y el cambio”, entendiendo por “cambio a la modificación de estado, apariencia, comportamiento o condición de un cuerpo, sistema u objeto, en tanto que la variación es entendida como una cuantificación de ese cambio” (Caballero & Cantoral, 2013, pág. 1588), en su trabajo con profesores de bachillerato caracterizaron los elementos del Pylvar: Situación Variacional, Argumentos Variacionales, Estrategia Variacional (comparación, seriación, predicción y estimación), Estructura Variacional Específica y Tareas Variacionales, con el objetivo de identificar las causas por las cuales el profesor de matemáticas presenta dificultades para desarrollar un pensamiento variacional.

Aun cuando estos documentos no asumen el marco teórico del EOS, son de gran utilidad pues muestran actividades con eventos variacionales en el nivel educativo deseado (medio superior), que permiten contar con un sistema de referencia al momento de diseñar secuencias didácticas. Además, presentan algunas dificultades que los docentes de matemáticas tienen al momento de realizar, es decir, al dar respuesta, a actividades con este tipo de pensamiento matemático, y comentan que en algunos casos son similares a las reportadas en estudiantes, pues no recurren a ideas variacionales para resolverlas.

Asimismo, Cantoral participó en la elaboración de materiales para la profesionalización docente en el campo de las matemáticas, en el marco del Plan Nacional que se dio en colaboración con el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) y la Subsecretaria de Educación Media Superior de la SEP en México. Además, de llevar a cabo mesas, foros, seminarios, cursos y diplomados. En particular, el Diplomado denominado “Desarrollo de Estrategias de Aprendizaje para las Matemáticas del Bachillerato: La “Transversalidad” Curricular de las Matemáticas”, específicamente en cuanto al pensamiento variacional se elaboró el libro ***Desarrollo del pensamiento y lenguaje***

variacional y el curso ***El estudio de la variación y el cambio en el desarrollo de saberes matemáticos*** en colaboración con su tesista de doctorado Luis Cabrera (Cantoral Uriza, 2013).

La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar de Evelia Reséndiz, es una investigación que se ocupa de analizar el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas, primer semestre de ingeniería, cuando la noción de variación está siendo usada por los profesores y cuando los estudiantes intervienen interactuando con dicha noción. En particular centraremos la atención en los conceptos de función y derivada, vistos en el escrito como modelos para el estudio de la variación. (Reséndiz, 2006)

Mario Caballero-Pérez y Gloria Moreno-Durazo, en su escrito *Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*, presentan las consideraciones teóricas que sustentan el diseño de una situación de aprendizaje con miras al desarrollo del pensamiento matemático asociado al estudio de comportamientos lineales en la teoría socioepistemológica y el uso de Pensamiento y Lenguaje Variacional. Las actividades están diseñadas considerando cuatro momentos; el primero se refiere al llenado de un recipiente cilíndrico a flujo constante, el segundo se trabaja el llenado de dos recipientes cilíndricos, el tercer momento se compara el llenado de dos recipientes desde un enfoque numérico y en el último momento se contrastan las gráficas del crecimiento de la altura de recipientes cilíndricos (a razón constante) con el llenado de recipientes de forma cónica, (Caballero-Pérez & Moreno-Durazo, 2017). Este diseño se utiliza en el documento Empoderamiento docente: Variación y predicción en matemáticas, Daniela Reyes-Gasperini, Leonardo Federico Palmeri y Ricardo Cantoral Uriza donde se hace énfasis en el poder que posee el docente para adecuar las actividades a su contexto y poder lograr el desarrollo de la variación lineal. Se presenta un análisis con base en una serie de resultados experimentales de una acción de intervención educativa (Reyes-Gasperini, Palmeri, & Cantoral, 2019).

Estos trabajos sirven de apoyo, porque al trabajar en escenarios dinámicos con eventos variacionales es de suma importancia considerar el llenado de recipientes, y esto da una panorámica de investigaciones ya realizadas en torno a esto.

Otro referente que se debe presentar al trabajar con profesores y con el Enfoque Onto semiótico es la tesis doctoral de María Belén Giacomone (2018) *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico (CCDM)*, donde presenta herramientas teórico-metodológico para la competencia global de análisis e intervención didáctica, y cinco competencias específicas que se centran el estudio onto semiótico de las prácticas matemáticas. El modelo que antecede a este es el de “Conocimiento Didáctico-Matemático” del profesor de matemáticas (CDM), propuesto por Godino y colaboradores (2009), y se ha ido refinando hasta llegar a este modelo CCDM.

En el artículo *Faceta epistémica de los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de secundaria sobre variación lineal* de Karina Herrera-García, Teresa Dávila-Araiza, Belén Giacomone, Pablo Beltrán-Pellicer se implementa una secuencia didáctica sobre la variación lineal, que se apoya en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática con el modelo Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemático (CCDM) del profesor de matemáticas. En este trabajo se presenta la Parte I de trabajo matemático y en las actividades se incluían applets en GeoGebra (Herrera-García, Dávila-Araiza, Giacomone, & Beltrán-Pellicer, 2020). Para el 2021, estos autores, en el texto *Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* ya reportan cada una de las actividades estructuradas en tres partes: I. Resolución de tareas matemáticas, II. Características de la variación lineal y III. Tareas didácticas para análisis de respuestas de estudiantes (Herrera-Garcia, Dávila-Araiza, Giacomone, & Beltrán-Pellicer, 2021)

Si bien este trabajo está presentando el quehacer de futuros profesores de matemáticas en nivel secundaria, que no es el punto de atención de esta tesis, debido a que el interés es con maestros de bachillerato en servicio; pero si muestra elementos como el estudio de la variación lineal en actividades en contextos reales, promoviendo diferentes significados de éste mediante el estudio en las variaciones de las magnitudes variable para favorecer la variación lineal con fundamentos teóricos en el EOS, así como, al desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemático, que son de afinidad con este trabajo en proceso.

La tesis *Conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores chilenos de enseñanza media sobre la noción de función: una experiencia en contextos de microenseñanza* de Yocelyn Parra Urrea, para obtener el grado de doctora en la Universidad de los Lagos en Chile se presenta una herramienta que constituye el conocimiento didáctico-matemático referencial para la enseñanza-aprendizaje de la noción de función en contextos de microenseñanza, usando el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) (Pino-Fan y Godino, 2015) y el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007); presenta distintas perspectivas y modelos del conocimiento del profesor, la problemática que subyace en la enseñanza-aprendizaje de las funciones, el origen y evolución de las funciones y las características de los contextos de microenseñanza (Parra, 2021).

Este último escrito se presenta ya que, aunque no aborda el pensamiento variacional como otros documentos expuestos, sí cumple con características del trabajo con profesores en la educación media superior mediante el modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemático (CCDM) del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), y se deseaba mostrar al menos uno con condiciones similares en la teoría que se pretende trabajar.

En la Tesis de Walmer Garcés Córdova (2021) *Criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería en el Perú: el caso de la derivada,* en el título se indica su objetivo y lo que abona o es afín para este proyecto de intervención didáctica es el trabajo con profesores con fundamentos del EOS.

Daniela Araya Bastias (2022), en su trabajo *Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable,* se implementa las tareas en un grupo de profesores en formación, en particular, estudia los significados personales desarrollados por los participantes mediante las nociones teórico-metodológicas de la configuración de objetos y/o procesos matemáticos y los componentes de la Idoneidad Didáctica que propone el Enfoque Ontosemiótico (EOS)

Nuevamente, lo que favorece el revisar estas tesis es el trabajo realizado con profesores, aunque no son del nivel educativo de interés, son con las herramientas del Enfoque Onto semiótico (EOS).

El modelo más reciente de Competencias y Conocimientos Didácticos-Matemáticos (CCDM) para profesores de matemáticas, propuesto en Pino-Fan, Castro y Font (2022), sugiere la necesidad de considerar dos grandes competencias para la actividad profesional del profesor de matemáticas: Competencia Matemática y Competencia de Análisis e Intervención Didáctica. En él se presenta la caracterización para cada una de estas y distintos niveles de logro.

Cuando se refiere a la Competencia Matemática, no implica solamente la parte disciplinar del conocimiento matemático, sino también lo didáctico-matemático, reconociendo que no se puede separar lo didáctico del conocimiento matemático, y para lograr dicha competencia proponen algunas categorías o elementos a tomar en cuenta, los cuales sirven como indicadores para no limitarse al planteamiento general como la resolución de tareas, planteamiento o proposición de problemas y el análisis de las respuestas a un problema planteado.

Asimismo, en el caso de la Competencia para el Análisis e Intervención Didáctica, se propone impulsar conocimientos relacionados con aspectos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y los conocimientos que debe tener un profesor para la reflexión sobre su práctica docente. Con el propósito de lograr esto, se desglosan una serie de subcompetencias: Análisis de la actividad matemática, Análisis y gestión de las interacciones, Uso y manejo de recursos, y Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica; además, se señalan niveles de logro para cada una de estas subcompetencias cuya conjunción se vuelve importante.

En general, se puede observar que en la literatura revisada se encuentra el común del desarrollo del pensamiento variacional o temas afines o relevantes (función, límites, derivada, entre otros) para el Cálculo, pero en gran parte el trabajo se enfoca con estudiantes de los diferentes niveles educativos; asimismo, se presentan documentos de trabajo con profesores y el Pylvar con la teoría Socioepistemológica. En cuanto a escritos que centran la atención bajo el enfoque variacional para profesores en bachillerato con el marco teórico EOS, considero que no existen suficientes, pero si hay una gran cantidad de trabajos con profesores de matemática mediante el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático CCDM (2018); sin embargo, el tratamiento que se le da a los tópicos de Cálculo es de la manera clásica o tradicional, dejando de lado las ideas variacionales.

4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS DEL PROYECTO

La enseñanza en los cursos actuales de Cálculo no necesariamente permite el desarrollo de las ideas de variación en su plenitud y se centra en la enseñanza de técnicas y algoritmos que no permiten visualizar el potencial del estudio de la variación

> Se reconoce que la enseñanza del Cálculo hoy está en crisis, esto sin importar a dónde dirija uno la mirada (país, ciudad, institución); por ello los investigadores del campo debemos mantenernos activos e inquietos en búsqueda de respuestas que coadyuven en la comprensión de los problemas y en la superación de sus dificultades (Parada, 2018, pág. 17).

Asimismo, se está implementando en nuestro país el modelo educativo de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), que para el caso de bachillerato se estable en el marco curricular común (MCC), con la enseñanza de las matemáticas por medio del desarrollo del pensamiento matemático (probabilistico y estadístico; aritmético, algebraico y geométrico; variacional). Con ello, nace de manera natural la necesidad de capacitación del personal docente.

El proyecto de intervención educativa que se está realizando, trata sobre el fortalecimiento del desarrollo del pensamiento variacional en profesores de matemáticas de Educación Media Superior; de tal manera que con las actividades que se diseñarán se plantearán situaciones en contextos donde puedan concebir la utilidad en el análisis de la variación y la covariación. Además, se promoverá el desarrollo de las competencias didácticas y matemáticas para el ejercicio de su labor profesional del modelo CCDM (2022).

4.1 Enseñanza del Cálculo

A fin de tener mayor claridad de la problemática alrededor de la enseñanza del Cálculo, en este documento se han presentado algunas dificultades (Artigue, 1995), obstáculos epistemológicos (Sierpinska, 1992) o características que se han detectado en algunos estudios de investigación en matemática educativa, pudiendo observarse que las propuestas de enseñanza siguen, con frecuencia, dos caminos principales, que en ocasiones se entremezclan entre sí; o se centran en las mecanizaciones y algoritmos, mientras que en otras se centran en la parte formal o abstracta a través de la demostración de los teoremas.

Fonseca y Alfaro (2018) mencionan que “una de las posibles causas del fracaso en el aprendizaje de esta disciplina es que su enseñanza es muy procedimental y basada en aspectos muy formales, que el énfasis se da al manejo algebraico, más que a lo visual y lo geométrico”.

Asimismo, se señala que existe un problema en el proceso de aprendizaje de los alumnos en los cursos de Cálculo, análisis denominado “Efecto frontera”; es decir, esto consiste en que el aprendizaje de esta disciplina se transforma en la manipulación simbólica-algebraica, siendo este el objetivo fundamental y desapareciendo el constructo de los conceptos básicos del Cálculo (Delgado, 2009, pág. 61).

De manera similar, Díaz (2009) afirma que en la enseñanza de los cursos de Cálculo prevalece una tendencia a centrarse en el desarrollo de habilidades en los aspectos mecánicos, así como en la memorización de algoritmos. También, considera no dar prioridad a la enseñanza a través de los teoremas y sus demostraciones, que, aunque son necesarias, en muchas ocasiones no contribuye a la comprensión de las ideas fundamentales de esta disciplina.

También, que en la mayoría de los cursos de Cálculo se presentan los objetos siguiendo una trayectoria epistémica que responde a la estructuración formal de algunas ideas de esta área de las matemáticas, sin atender a otras consideraciones como las relacionadas con el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Así, primero se presentan los números reales, después las funciones en una variable real, seguido por límites y continuidad, para seguir con los teoremas de derivación y dejando hasta el final los problemas de aplicación. Sin embargo, la actual forma en la que se presentan estos conceptos es muy diferente al proceso histórico de los mismos por lo que "al dejar de lado la historia del desarrollo del cálculo diferencial e integral, se pierde la gran oportunidad de explorar los problemas que le dieron origen" (Cuevas & Pluvinage, 2009).

Además, se presenta un breve análisis del desarrollo de los procesos de cambio, observando la manera de cómo se ha perdido la naturaleza de los problemas que dieron origen al Cálculo y se ha llevado a la variación a través del concepto de función de una manera abstracta, de forma estática y dejando de lado el carácter dinámico, lo cual repercute en la enseñanza de los cursos actuales del Cálculo.

En resumen, se puede observar cómo la enseñanza del Cálculo se presenta de forma estática cuando su esencia es el estudio de la variación (la rapidez del cambio y los procesos de acumulación); dando prioridad a los algoritmos, fórmulas, técnicas y elementos formales o abstractos sin dar un sentido dinámico que permitan potenciar su utilidad en diversos contextos.

4.2 El papel de los docentes en el MCC

Los profesores son actores relevantes que intervienen en el sistema educativo debido a que sus prácticas en el proceso de enseñanza inciden en el aprendizaje de los alumnos; cabe señalar que el conocimiento disciplinar es importante pero no es suficiente, ya que se debe complementar con otros aspectos como los pedagógicos. De aquí que en las últimas décadas las investigaciones en matemática educativa han puesto énfasis en el estudio de las características, habilidades y destrezas deseables en un docente de matemáticas para promover una educación de calidad.

De esta manera, el docente debe tener la capacidad para realizar un análisis en su práctica docente, es decir, reflexionar acerca de su conocimiento didáctico sin dejar de lado el conocimiento matemático para desempeñar su labor docente de la mejor manera posible, la cual permita incidir eficazmente en el aprendizaje de sus alumnos. Así, la problemática que pretende atender este trabajo es la promoción del desarrollo de la competencia didáctico-matemática para el análisis e intervención didáctica mediante contextos del pensamiento variacional para profesores del nivel medio superior.

Esto se encuentra en sintonía con el sistema educativo nacional pues, en México, se está implementando una reforma educativa llamada la Nueva Escuela Mexicana (NEM) en todos los niveles escolares básicos (nivel superior no), específicamente el MCC para la Educación Media Superior (EMS), por lo que surge, de manera natural, la necesidad de capacitación docente con el cambio de enfoque que se está presentando en el nuevo modelo. En el área de matemáticas se trabajará mediante el Pensamiento Matemático durante los primeros tres semestres del bachillerato con pensamiento probabilístico y estadístico, pensamiento aritmético, algebraico y geométrico, y el pensamiento variacional, que difiere en gran medida con el modelo educativo anterior que daba tratamiento por medio de las asignaturas de Aritmética, Álgebra, Geometría, Cálculo, entre otros.

Así, el proyecto de intervención educativa que se está realizando, tiene el propósito de fomentar el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de Educación Media Superior, ya que los cursos tradicionales de Cálculo no necesariamente permiten la construcción de las ideas de variación en su plenitud, y se centran en la enseñanza de técnicas y algoritmos que no facilitan visualizar el potencial del estudio de la variación; de tal manera que con las actividades que se desarrollarán se plantearán situaciones en contextos donde puedan concebir su utilidad en el análisis de los procesos variables, con apoyo de las nociones de variación y de covariación.

Para validar las ideas expuestas en cuanto a la necesidad de capacitación para el personal docente de matemáticas en lo referente al pensamiento variacional, se realizó un instrumento diagnóstico y se implementó con algunos profesores del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora en distintos planteles de Hermosillo; estos han impartido el curso de Cálculo, pre-Cálculo, matemáticas 4 o asignaturas afines, tienen diferente años en servicio en la institución y cuentan con al menos 10 años de experiencia docente.

También, esta prueba piloto se realizó con el propósito de evaluar el nivel de desarrollo del pensamiento variacional en docentes a través de una evaluación diagnóstica, la cual se diseñó de tal manera que abarcara problemas en distintos contextos que requieren la aplicación del pensamiento variacional. Se parte del hecho que los profesores conocen las herramientas fundamentales de Cálculo, por lo que es deseable que las utilicen para analizar y responder situaciones de la variación en problemas con contextos intramatemáticos o extramatemáticos.

Se efectuó un análisis preliminar de los resultados para obtener una visión general del desarrollo en el pensamiento variacional de los profesores. Este análisis exploratorio sirve como base para el diseño de actividades posteriores y también permitirá fortalecer la competencia didáctico-matemática de los profesores para su quehacer como profesionales. En el Anexo 1 se presenta la Evaluación diagnóstica.

En la pregunta 1 se les presenta una gráfica de la derivada de una función y se les pide que realicen un bosquejo de la gráfica de la función original. En este reactivo la mayoría de los profesores asumieron que la curva de la derivada de la función era de un polinomio de cuarto grado, por lo que la función de donde proviene debía ser de quinto grado; así tratan de dar una expresión algebraica de la derivada para luego presentar la antiderivada o geométricamente muestran el bosquejo de un polinomio de grado 5. Sin embargo, no se realizaron análisis de comportamientos variacionales, por ejemplo, identificar los intervalos en los cuales le derivada es positiva o negativa para conocer si la función original es creciente o decreciente. En la Figura 4.1 se muestran las respuestas de dos docentes.

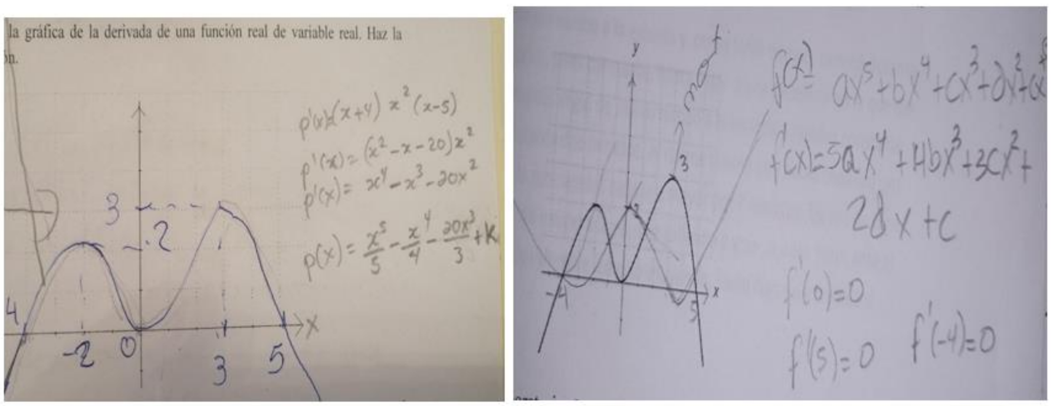


Figura 4.1 Respuestas a la pregunta 1 de dos docentes. Elaboración propia

En el reactivo 2, se le solicita que representen gráficamente una situación expresada en lenguaje escrito, en este reactivo en particular todos los profesores que participaron en la evaluación pudieron responder correctamente. En la pregunta 3 los docentes trataron de definir la función que podía representar la gráfica que se mostraba, pero ninguno dio un argumento para explicar al alumno por qué no se trataba de una situación de proporcionalidad directa.

En el reactivo 4 los docentes tuvieron muchas complicaciones para encontrar la velocidad y la aceleración del móvil, ya que no se encuentran familiarizados con los contextos de la Física, lo cual es un obstáculo para la resolución de este tipo de problemas. Cabe mencionar que al trabajar en contextos reales, lo que se tienen son datos de los fenómenos físicos, por eso la relevancia de ser capaz de elaborar un modelo para estas situaciones.

En la pregunta 5 algunos profesores realizaron su gráfica, pero en el momento de devolverse a casa ya no bajaba la trayectoria a $y = 0$. Además, tuvieron problemas para expresar gráficamente la rapidez constante, baja rapidez, rapidez cada vez mayor, gran rapidez, la rapidez iba disminuyendo. En la Figura 4.2 se muestran las gráficas elaboradas por dos docentes.

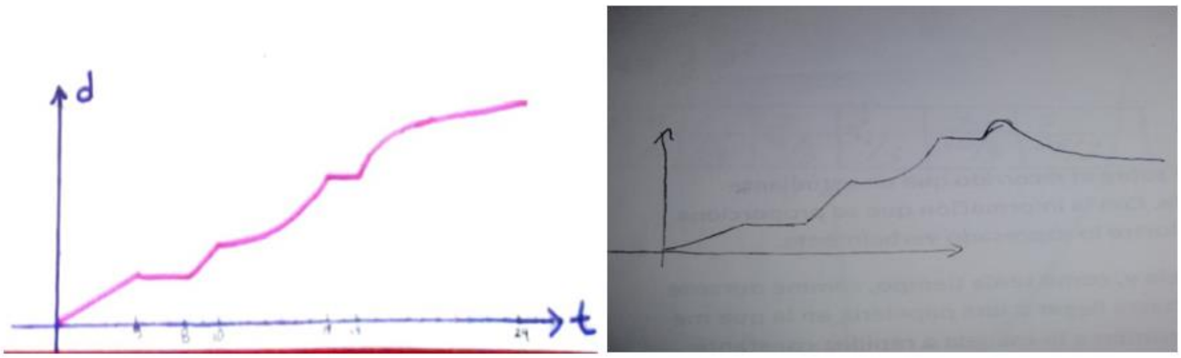


Figura 4.2 Gráfica de dos docentes en respuesta a la pregunta 5. Elaboración propia

En el reactivo 6, algunos docentes utilizaban el lenguaje formal para expresar la rapidez; sin embargo, no tenían claros los tipos de variación básicos en cuanto a detalles más finos, pues en ciertos casos confunden lo que es creciente con rapidez decreciente con lo que es creciente de rapidez creciente. En la pregunta número 7 todos los profesores realizaron un bosquejo diferente del recipiente que es llenado a un flujo constante. En la Figura 4.3 se muestran las respuestas de tres docentes en cuanto a la forma de los recipientes solicitados.

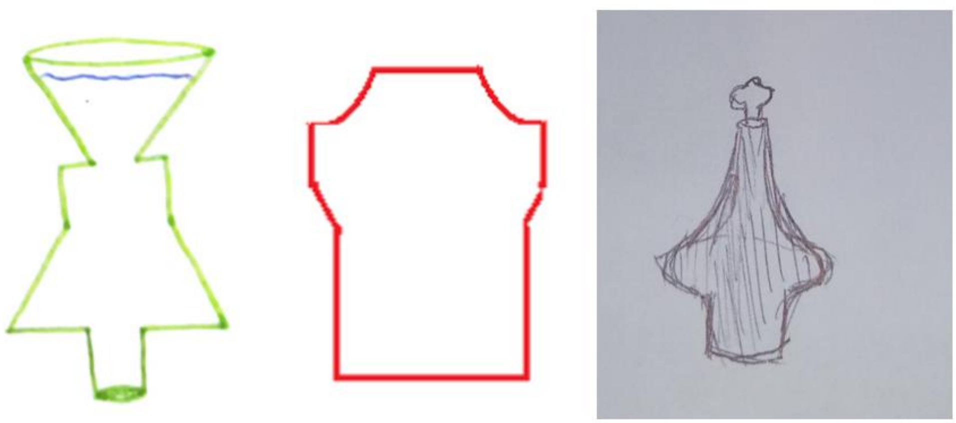


Figura 4.3 Respuestas de tres docentes a la pregunta 7. Elaboración propia

Los resultados preliminares indican que existe una dificultad generalizada entre los participantes para resolver problemas en contextos del pensamiento variacional. Existen limitaciones en cuanto a la resolución de problemas de Pensamiento Variacional ya que no pudieron identificar y manipular variables en contextos de variación. Los resultados indican una necesidad evidente de programas de desarrollo profesional docente, enfocados en el fortalecimiento del pensamiento variacional.

En una fase posterior se llevará a cabo un análisis más detallado de los resultados para identificar patrones específicos de dificultad y áreas de enfoque prioritario con apoyo de marco teórico EOS. La prueba piloto resalta la importancia de abordar las limitaciones en el pensamiento variacional entre los docentes.

4.3 Objetivos

En los procesos educativos en general, y particularmente en matemáticas, un elemento fundamental es la formación de profesores, tanto inicial como continua, por lo que este trabajo en proceso pretende proporcionar elementos que favorezcan la reflexión del docente en su labor, dentro de contextos sobre el pensamiento variacional. En lugar de diseñar actividades para un curso tradicional, centrarse en el llamado pensamiento variacional permite promover el carácter dinámico propio del Cálculo.

Con base en lo que se ha expuesto en los apartados anteriores, se pueden enunciar los siguientes objetivos que se pretende llevar a cabo con la realización de este trabajo.

4.3.1 Objetivo General

Desarrollar actividades para el mejoramiento del conocimiento didáctico-matemático respecto al desarrollo del pensamiento variacional en los profesores de educación media superior.

4.3.2 Objetivos Específicos

1. Diseñar e implementar un instrumento de diagnóstico para identificar el nivel de desarrollo que sobre el pensamiento variacional tienen los docentes en educación media superior.
2. Plantear e implementar actividades didácticas que permitan fomentar o que promuevan el desarrollo del pensamiento variacional en los profesores de educación media superior.
3. Diseñar actividades didácticas que promuevan el análisis de su práctica docente en contextos del pensamiento variacional.
4. Plantear actividades que promuevan el desarrollo de la competencia didáctica-matemática mediante contextos del pensamiento variacional para profesores del nivel medio superior.
5. Valorar la propuesta de diseño con los criterios de idoneidad del EOS-CCDM.

5 La propuesta y sus características

En las investigaciones en matemática educativa se está prestando cada vez mayor atención al Desarrollo Profesional Docente, esto se puede entender como el mejoramiento o evolución de profesores de matemáticas en sus actividades asociadas al quehacer como profesionales en la educación. El trabajo del docente es una pieza fundamental para el impulso de la educación y con ello para el progreso de una sociedad más justa y equitativa.

En la actualidad el desarrollo profesional docente se enmarca o contextualiza dentro de los profundos cambios que está sufriendo el sistema educativo mexicano con la implementación de un nuevo modelo educativo en todos los niveles escolares obligatorios (preescolar, primaria, secundaria, media superior) y por lo tanto emerge la necesidad de capacitación al personal docente. Particularmente, en el bachillerato se manifiesta la enseñanza de las matemáticas mediante el pensamiento matemático y el Marco Curricular Común (MCC) se encuentra en primer semestre con el curso de Pensamiento Matemático 1 y se continuará hasta llegar a tercer semestre con la asignatura de Pensamiento Matemático 3, que corresponde al Pensamiento Variacional, temática en la cual se está interesado.

5.1 Tipo de propuesta de intervención y nivel educativo

La presente propuesta de intervención educativa tiene como objetivo principal fomentar el desarrollo del pensamiento variacional en profesores de educación media superior, específicamente en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH). Asimismo, se estará motivando a promover la competencia matemática, del modelo CCDM (2022) que se refiere a tener conocimiento no sólo disciplinar matemático sino, también, didáctico mediante características como que el docente pueda resolver problemas matemáticos, analizar las respuestas a un problema planteado y tenga la capacidad de nuevos planteamientos de estos, es decir, el profesor como diseñador de tareas. Además, en la competencia para el análisis e intervención didáctica se consideran aspectos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje como el análisis de la actividad matemática, el manejo de las interacciones, el uso de materiales y tiempos, reflexionando sobre la práctica docente considerando en análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

El MCC en la EMS dicta la revalorización de los docentes, viéndolos como profesionales de la educación, motivándolos y, al reconocer sus capacidades para la elaboración de materiales didácticos, impulsa un mayor compromiso de estos, pues son los que se encuentran presentes en el aula y conocen su entorno escolar, lo que permitirá construir actividades adecuadas o a la medida en su contexto educativo. Esta exigencia de mayor involucramiento de los profesores nos condujo a considerar que en este trabajo es posible impulsar la formación de un grupo de profesores que trabajarán en colegiado para abonar con esto.

El enfoque se centrará en el trabajo colegiado entre docentes, pues permite trabajar con un grupo de personas que se encuentran interesadas en un tema en común, aportan sus conocimientos y habilidades para realizar algún producto conjuntamente, reflexionan sobre su práctica profesional, lo que les permite mejorar y, por tanto, a profesionalizarse; para ello, se pretende trabajar con un grupo pequeño de 4 o 5 profesores de la institución con el tema a discusión.

5.2 Contenido Matemático

Es relevante mencionar que algunas de las tareas que tienen los profesores de matemáticas son el diseño, la implementación y la evaluación en el proceso de enseñanza, motivo por el cual deben ser capaces de poder resolver los problemas matemáticos que van a implementar con sus alumnos, plantear problemas para el aprendizaje de éstos y analizar las respuestas brindadas por los estudiantes en la resolución a estos problemas.

Por lo que, la estrategia central será el trabajo colegiado entre profesores de COBACH, brindando un espacio colaborativo donde los docentes puedan diseñar actividades para abordar el pensamiento variacional y que se encuentren alineadas, en la medida de lo posible, con el marco curricular común de educación media superior; teniendo como punto de partida una presentación por parte del profesor-investigador referente al trabajo realizado hasta el momento respecto al pensamiento variacional.

Para garantizar la efectividad de las actividades se deben considerar ciertos elementos como el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas, tener en cuenta cómo aprenden las matemáticas los estudiantes y el progreso en su aprendizaje, la motivación intrínseca de las actividades, la definición clara de recursos, la especificación de interacciones y tiempos, la creación de situaciones estimulantes para los estudiantes, la promoción de objetos matemáticos vinculados al pensamiento variacional y la transversalidad con otras disciplinas. Se asegurará que las actividades sean:

- Motivadoras en cuanto a problemas en contextos reales.
- Definidas en cuanto a recursos utilizados.
- Con interacciones claramente definidas.
- Con tiempos establecidos para cada actividad.
- Con situaciones de interés para los estudiantes.
- Promotoras de objetos matemáticos inherentes al pensamiento variacional.
- Transversales con otras disciplinas.

Dado que el pensamiento variacional es el eje en el tercer semestre, se propone que las actividades diseñadas se centren en este aspecto, con contextos reales que reflejen la presencia de la variación en su vida cotidiana. Esto permitirá a los profesores desarrollar su propia competencia en la enseñanza de este tipo de pensamiento, fundamental para el desarrollo matemático de los estudiantes.

5.3 Fundamentación Teórica

Cabe mencionar que se parte del hecho de que los docentes cuentan con conocimiento disciplinar en matemáticas, por ello se considera que tienen dominio en cuanto a las herramientas del área, y también con cierto grado de nivel desarrollado referente al pensamiento variacional. La evaluación de mejora de los profesores se llevará a cabo utilizando la caracterización y los niveles de logro de las Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemático (CCDM) del profesor, modelo propuesto por Pino-Fan, Castro y Font (2022), basadas en el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática (EOS). Esto proporcionará una valoración integral que considera no sólo el conocimiento matemático, sino también la capacidad didáctica del docente en la promoción efectiva del pensamiento variacional.

La implementación de esta propuesta no sólo fortalecerá las habilidades docentes en el COBACH, sino que también impactará positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, promoviendo un enfoque matemático más profundo y significativo. La colaboración entre los profesores en el trabajo colegiado facilitará el intercambio de ideas y la mejora continua, contribuyendo así al desarrollo sostenible del pensamiento variacional en el contexto educativo de educación media superior. Esta propuesta se presenta como un paso fundamental hacia la mejora continua y el fortalecimiento de la calidad educativa en el COBACH, alineándose con los objetivos de desarrollo profesional docente y la excelencia académica.

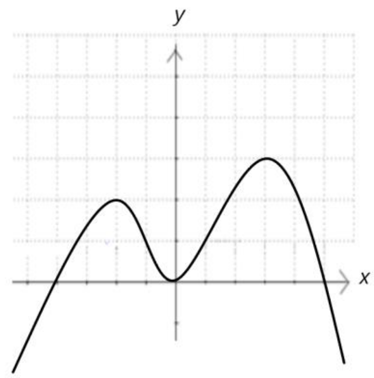
5.4 Aspectos Metodológicos

Para lograr el objetivo se implementarán algunas etapas como un análisis a priori (preliminar), diseño de actividades, implementación de estas actividades y análisis a posteriori para la valoración del proyecto de intervención didáctica. El resultado que se espera al llevar a cabo este proceso con las distintas fases es el del fortalecimiento de los profesores de bachillerato en referencia al desarrollo de pensamiento variacional, pero también, la promoción de la competencia matemática del CCDM (2022) que se refiere a tener un conocimiento didáctico-matemático en cuanto a la temática a tratar y la competencia para el análisis e intervención didáctica.

Así pues, se obtendrán como producto final el diseño de diversas actividades en contexto (intra o extramatemático) que permitan promover el estudio de la variación y, con ello, el desarrollo de este tipo de pensamiento. Estas serán elaboradas por los propios maestros del COBACH que conforman el grupo de profesores que trabajarán en colegiado y se desea que sean las que implementen con los alumnos el resto de los docentes en todos los planteles de la institución.

En el análisis a priori se elaboró una prueba diagnóstica para contar con un panorama general respecto al desarrollo del pensamiento variacional que tienen los docentes de matemáticas en el COBACH, con dos finalidades; la primera para tener evidencia empírica respecto a la necesidad del fortalecimiento del desarrollo del pensamiento variacional y, la segunda, para identificar los niveles de las competencias matemática y para el análisis e intervención didáctica. Se realizó con siete reactivos (Anexo 1) que motivaban el análisis por medio del estudio de la variación, por presentar algunos:

1.-La siguiente es la gráfica de la derivada de una función real de variable real. Haz un bosquejo de la gráfica de la función.



Aquí, se pretende que vean el comportamiento de la función derivada, en principio ubicando los intervalos en los cuales es negativa, positiva o cero. Para asociar la función derivada con la función original, respecto a los intervalos de crecimiento, decrecimiento o puntos extremos. De manera similar se espera realicen el análisis del resto de la gráfica.

Otro reactivo tipo es el que se presenta en el número 5 de la evaluación diagnóstica, en donde se presenta una situación en contexto real y se solicita realizar la gráfica de la posición con respecto al tiempo, por lo que para resolver debe tener en cuenta al menos los siete tipos básicos de variación.

5.-Hoy en la mañana salí rumbo a la escuela y, como tenía tiempo, caminé durante cinco minutos con baja rapidez, pero constante, hasta llegar a una papelería en la que me entretuve tres minutos. Después seguí de nuevo rumbo a la escuela a rapidez constante pero mayor a la anterior, durante dos minutos. Al darme cuenta de que había olvidado una tarea, me devolví caminando con rapidez cada vez mayor por 7 minutos. Estuve en casa dos minutos y después caminé rumbo a la escuela saliendo a gran rapidez, pero, ante el cansancio que tenía, la rapidez siempre iba disminuyendo, hasta llegar diez minutos después a la escuela.

Por último, se solicita el proceso inverso y, asimismo, dada la gráfica de un comportamiento variacional como el llenado de recipientes proporcionar una posible imagen de este. También se presentaron situaciones problemas con datos proporcionados de forma tabular y a través de representaciones algebraicas para tratar de abarcar gran parte de los registros de representaciones semióticas, se puede observar en el Anexo 1.

Se implementó el instrumento de evaluación diagnóstica exploratoria, con carácter preliminar, teniendo como meta dos finalidades. La primera es para conocer el grado de desarrollo en cuanto al pensamiento variacional poseen algunos de los profesores de matemáticas de COBACH; además, esto permite aportar elementos de justificación para la problemática en donde se verifica la necesidad de capacitación al personal docente que surge, de manera razonable, por la incorporación del marco curricular común y el tratamiento de las matemáticas a través del pensamiento matemático, en particular el variacional. La segunda finalidad para identificar, de forma preliminar, el nivel de la competencia didáctico-matemático en contextos del pensamiento variacional de una muestra de profesores de bachillerato.

Para la etapa de diseño, con base en los resultados del análisis a priori y utilizando los elementos teóricos del enfoque ontosemiótico, se realizará el diseño de algunas actividades para promover el desarrollo del pensamiento variacional, con ello fortalecer la competencia didáctico-matemático requerida por los docentes para este tipo de pensamiento matemático. En un primer momento, el profesor-investigador diseñará actividades que servirán como punto de partida o de referencia para el grupo de profesores que trabajarán en colegiado y que, posteriormente, en un segundo momento, se enfrentarán con la elaboración de otras tareas similares, para ello se tomará como la base los criterios de idoneidad didáctica, enfocándose en los elementos de diseño de actividades, que se muestra en la Tabla 5.1.

Criterios	**Elementos de diseño**
Epistémica	Tema matemático por abordar, definir los objetos matemáticos que intervienen y los que emergen de la práctica matemática.
Cognitiva	Que las actividades se encuentren dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes. Con base en conocimientos previos.
Interaccional	• Definir interacciones entre los participantes. • Dificultades que se puedan presentar y cómo resolverlas
Mediacional	Recursos disponibles: • Tiempo • Materiales • Recursos tecnológicos
Afectiva	Situaciones del pensamiento variacional: • Extramatemáticos o En contexto de su entorno local, nacional, global. o Problemas de su comunidad o entorno. • Intramatemáticos

Ecológica	• Que se encuentren con características y elementos enmarcados en el marco Curricular Común de la EMS. • Transversalidad con otras asignaturas

Tabla 5.1 Elementos de diseño de actividades. Elaboración propia

En la implementación, en un principio se presentarán algunas actividades diseñadas por el profesor-investigador a los docentes que forman parte del grupo seleccionado que estarán trabajando en colegiado, para que ellos las resuelvan (den respuesta a las actividades), pues se asume que conocen las herramientas fundamentales del Cálculo por lo que es deseable que sean capaces de analizar y responder situaciones ligadas al estudio de la variación. Esto permitirá conocer el nivel de logro en cuanto al pensamiento matemático variacional, con las herramientas del modelo CCDM en lo que se refiere a que los profesores como profesionales de la educación, deben ser capaces de resolver problemas y analizar las respuestas a un problema planteado.

En un segundo momento se enfocaría al diseño de actividades propias por parte de los profesores para fomentar el pensamiento variacional en estudiantes; con esto se daría pie al análisis de la segunda subcompetencia matemática del CCDM que corresponde al planteamiento de problemas y se enmarca al profesor como diseñador de tareas matemáticas. Cabe mencionar, que se estaría realizando, de manera gradual, en el grupo de profesores de la institución que trabajarán en colegiado.

Finalmente, en el análisis a posteriori se valorará la propuesta con los criterios de idoneidad del enfoque ontosemiótico, y la competencia didáctico-matemático de los profesores de matemáticas, así como, la competencia para el análisis e intervención didáctica, con las características y los niveles de logro brindados por el modelo CCDM. Esto debido a que se considera que un elemento esencial para el desarrollo profesional y el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es la reflexión del profesorado sobre su práctica docente. Tal como se afirma: “los criterios de idoneidad didáctica son poderosas herramientas para organizar la reflexión y evaluación de los procesos de instrucción tanto propios como ajenos” (Breda, Pino-Fan, & Font, 2017, pág. 1895).

A continuación, en la Tabla 5.2 se presenta un resumen de las ideas expuestas en este apartado, con la finalidad de tener en cuenta las acciones por realizar y los objetivos correspondientes en cada una de las fases o etapas de la propuesta de desarrollo profesional docente.

Etapas	**Acciones por realizar**	**Objetivos específicos**
Análisis a priori	• Diseño de instrumento diagnóstico con ejercicios que	• Diseñar e implementar un instrumento de diagnóstico para

	propician el estudio variacional. • Implementación de la prueba diagnóstica para identificar el nivel de desarrollo del pensamiento variacional que tienen los docentes de bachillerato. • Análisis exploratorio (preliminar) con los datos obtenidos en la aplicación de la evaluación diagnóstica. • Identificar el nivel de la competencia didáctico-matemático y la del análisis e intervención didáctica, en contextos del pensamiento variacional de una muestra de profesores de bachillerato.	identificar el nivel de desarrollo que sobre el pensamiento variacional tienen los docentes en educación media superior.
Diseño de las actividades	Diseñar actividades para fortalecer el desarrollo del pensamiento variación y, con ello, promover la competencia didáctica-matemática y el análisis e intervención didáctica en los docentes de nivel medio superior. Se llevará a cabo en dos momentos: • El primer momento, trata de la elaboración por parte del profesor-investigación, que sirvan como guías para el resto del grupo de maestros que trabajarán en colegiado y que posteriormente se encontrarán diseñando actividades similares. • En el segundo momento, los profesores diseñaran tareas	• Diseñar actividades didácticas que promuevan el análisis de su práctica docente en contextos del pensamiento variacional.

	matemáticas para fomentar el estudio mediante el pensamiento variacional en el curso de Pensamiento Matemático 3 de la educación media superior. En cada momento se deben considerar el uso y manejo adecuado de tiempo, materiales e interacciones entre los actores, así como la reflexión sobre la práctica docente.	
Implementación	En la implementación de las actividades, también se cuenta con dos momentos: • Aplicar las actividades propuestas por el profesor-investigador al grupo de docentes seleccionados para trabajar en colegiado. Esto abonaría a la Competencia Matemática del modelo CCDM en cuanto a que los profesores como profesionales de la educación deben ser capaces de resolver problemas y, por lo tanto, se conocería el grado que tienen los docentes de matemáticas con respecto a esta característica. Aquí se pueden plantear soluciones de estudiantes para valorar la competencia de análisis de las prácticas para resolver problemas. • El segundo momento nos lleva a otra de las subcompetencias de la Competencia Matemática del modelo CCDM que	• Plantear e implementar actividades didácticas que permitan fomentar o que promuevan el desarrollo del pensamiento variacional en los profesores de educación media superior. • Plantear actividades que promuevan el desarrollo de la competencia didáctica-matemática mediante contextos del pensamiento variacional para profesores del nivel medio superior.

	corresponde al profesor de matemáticas como diseñador de tareas o bien sea capaz de plantear problemas. Esto se podrá verificar en el momento en que los profesores participantes se encuentren diseñando las actividades para motivar la enseñanza mediante el pensamiento variacional en el curso que dicta el MCC como Pensamiento Matemático 3.	
Análisis a posteriori	• Mediante los criterios de idoneidad didáctica del EOS y la caracterización con niveles de logro de las competencias propuestas en el modelo CCDM, se podrá reflexionar y evaluar la propuesta de diseño.	• Valorar la propuesta de diseño con los criterios de idoneidad del EOS-CCDM.

Tabla 5.2 Etapas, acciones, objetivos de la propuesta. Elaboración propia

5.5 Valoración de la Propuesta de intervención

Para valorar la propuesta de desarrollo profesional docente, se emplearán los criterios de idoneidad didáctica del EOS y de las herramientas propuestas en el modelo CCDM (Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos) del profesor de matemáticas para las competencias profesionales. Se busca que los docentes hayan desarrollado habilidades específicas como las subcompetencias de resolución de problemas, análisis de las prácticas a un problema resuelto y planteamiento o proposición de problemas, es decir el profesor de matemáticas se concibe como diseñador de tareas; destacando su capacidad para diseñar actividades que fomenten el pensamiento variacional en el ámbito de las competencias: matemática y el análisis e intervención didáctica. Este desarrollo se espera lograr a través de la participación de cada uno de los profesores en el trabajo colegiado.

6 ASPECTOS TEÓRICOS

Para llevar a cabo este proyecto de intervención se utilizará el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Para el diseño de las actividades y el análisis de la intervención didáctica, el EOS es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje; tomando en cuenta las facetas de los procesos de instrucción, el análisis y la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En este trabajo se utilizarán algunos elementos de este enfoque teórico, en específico los siguientes:

- Sistemas de prácticas
- Configuraciones ontosemióticas
- Configuraciones y trayectorias didácticas
- Criterios de idoneidad didáctica
- Modelos de Competencias y Conocimientos Didactico-Matemático (Pino-Fan, Castro y Font, 2022)

6.1 Sistema de prácticas

Se considera *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Puede ser personal o institucional, entendiéndose que una institución está constituida por las personas involucradas en la resolución de una misma clase de situaciones problemas.

El sistema de prácticas que realiza una persona (conformaría el significado personal) o compartidas en el seno de una institución (refiere al significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problema en los cuales interviene el objeto matemático en cuestión. Los significados personales pueden ser: global, declarado y logrado; los significados institucionales: referencial, pretendido implementado y evaluado. En la Figura 6.1 se definen los diferentes tipos de significado.

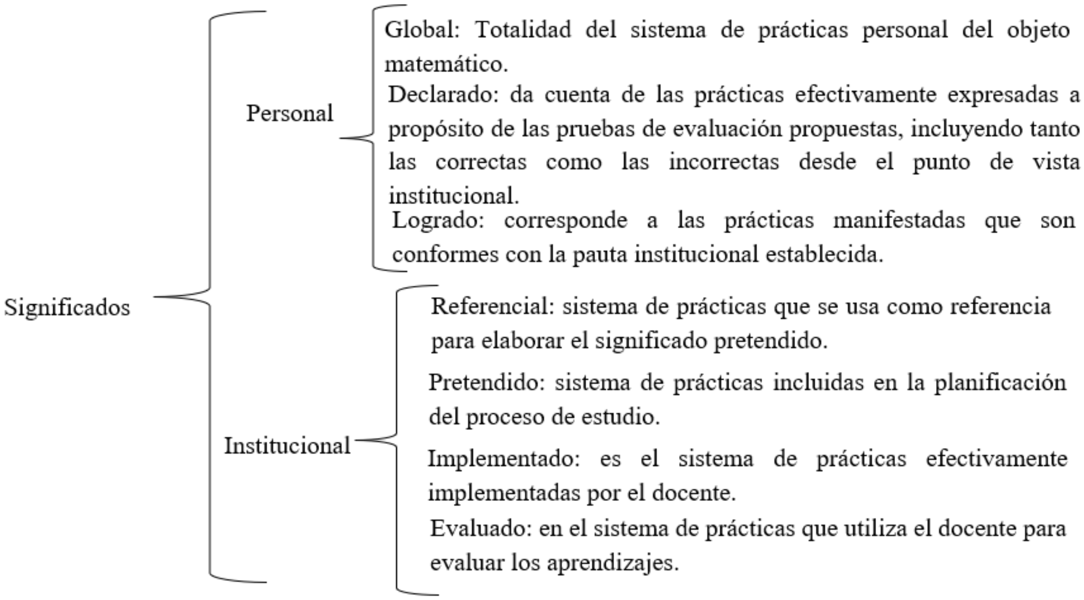


Figura 6.1 Tipos de significados según EOS, adaptado de (Godino, Batanero, & Font, 2008)

Para los fines de este trabajo, se adopta el significado institucional de referencia del Pensamiento Variacional (PV) propuesto por Vasco (2003):

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.
>
> El movimiento mental de este pensamiento tiene pues un momento de captación de lo que cambia y de lo que permanece constante y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de sistemas mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan con alguna aproximación las covariaciones detectadas, sistemas que podemos llamar “modelos mentales”; luego tiene un momento de echar a andar o “correr” esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, y si es el caso, tiene también el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo. (. . .) El objeto del pensamiento variacional es pues la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo (Vasco C. E., 2003, pág. 6).

En la Figura 6.2 se indica las relaciones dialécticas entre enseñanza y aprendizaje, que supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales.

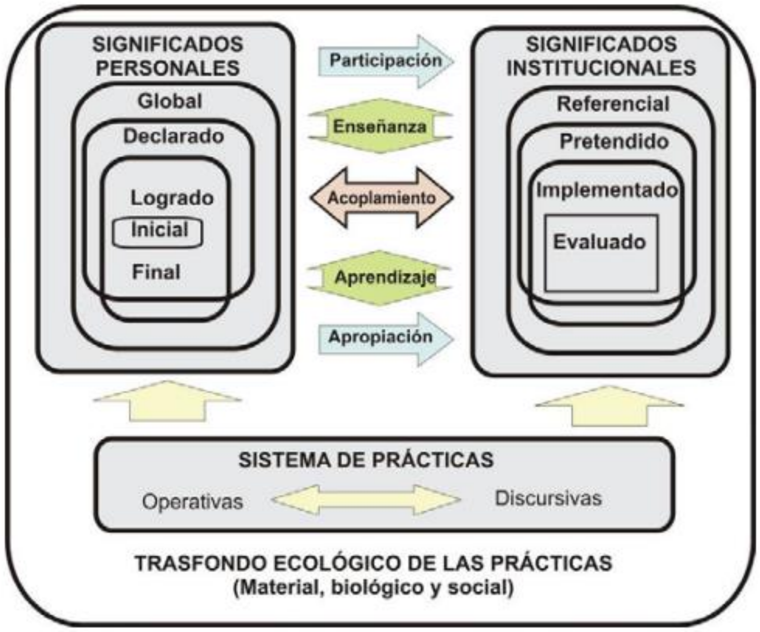
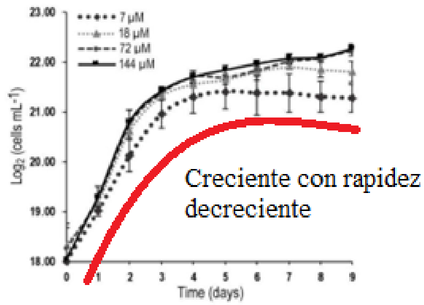


Figura 6.2 Tipos de significados institucionales y personales. Tomado de (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 6)

A continuación, en la tabla 6.1 se presenta un sistema de prácticas de la Actividad de Microalgas Chaetoceros muelleri (Anexo 1), en la que se analizan cuatro tratamientos de fósforo con el objetivo de analizar su crecimiento (Lovio Fragoso, Hayano Kanashiro, & López Elías, 2019).

Sistema de Prácticas
Se utiliza como significado institucional de referencia la definición de Vasco (2003) sobre el pensamiento variacional. 1. ¿Qué cambia? • Se identifican las magnitudes involucradas en el contexto. • Determinar las magnitudes variables y constantes En el ejemplo del crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri, algunas magnitudes involucradas son la cantidad de fósforo (constante para cada tratamiento), diversos nutrientes como nitratos, minerales, vitaminas y oligoelementos (constantes), el tiempo (variable), la cantidad de células por mililitro (variable). 2. ¿Cómo cambia? • Analizar la relación entre dos variables (Covariación). El crecimiento es la covariación entre la cantidad de células y el tiempo transcurrido. • Determinar el comportamiento creciente, decreciente o constante.



3. ¿Cuánto está cambiando?

- Determinar el comportamiento diario y en determinado periodo de tiempo.

$$cantidad\ de\ alga\ de\ un\ día\ determinado - cantidad\ de\ alga\ el\ día\ anterior$$

- Analizar la rapidez con la que está cambiando.

La razón media de cambio

$$\frac{C_f - C_i}{t_f - t_i}$$

- Tomar decisiones.

Se puede observar que no hubo crecimiento significativo con alguno de los cuatro tratamientos de fósforo, pues su comportamiento fue similar con cada uno de estos.

Tabla 6.1 Sistema de prácticas de actividad microalgas. Elaboración propia

6.2 Objetos y procesos matemáticos

En el EOS se considera que los objetos matemáticos se derivan de los sistemas de prácticas matemáticas, estos pueden ser intervinientes o emergentes, se puede hablar de un primer nivel al observar las entidades en un texto matemático como problemas, procedimientos, proposiciones, entre otras, y en un segundo nivel se tiene la tipología de las distintas maneras de operar los objetos primarios tales como personales o institucionales, ostensivo (visible) o no ostensivo (no perceptible), unitario-sistémico, ejemplar-tipo y expresión (representación) o contenido (significación). Además, al realizar una actividad matemática se emplean diferentes procesos matemáticos.

6.2.1 Objetos matemáticos primarios

Los objetos matemáticos intervinientes son los que se emplean al realizar las prácticas matemáticas; mientras que los objetos emergentes de los sistemas de prácticas son los que surgen al resolver y comunicar los resultados de alguna situación problema. En ambas situaciones, intervinientes o emergente, se pueden considerar a los objetos matemáticos primarios como las definiciones, proposiciones, ejercicios, procedimientos, entre otros.

Objetos Matemáticos Primarios

- **Situaciones-problemas** (tareas, ejercicios, problemas, intra o extra matemáticos)
- **Elementos Lingüísticos** (términos, expresiones, notaciones, gráficas, entre otros) en distintos registros.
- **Procedimientos** (algoritmos, operaciones, cálculos)
- **Proposiciones** (enunciados sobre conceptos)
- **Argumentos** (validación o explicación de procedimientos)
- **Conceptos-definiciones**

Al realizar y evaluar una práctica matemática se ponen en juego ciertos conocimientos que forman un conjunto de componentes, tales como que en una situación-problema se observa el uso de lenguajes, verbales y simbólicos, que son la parte ostensiva de los conceptos-definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias; todo esto se articula en la *configuración* presentada en la Figura 6.3.

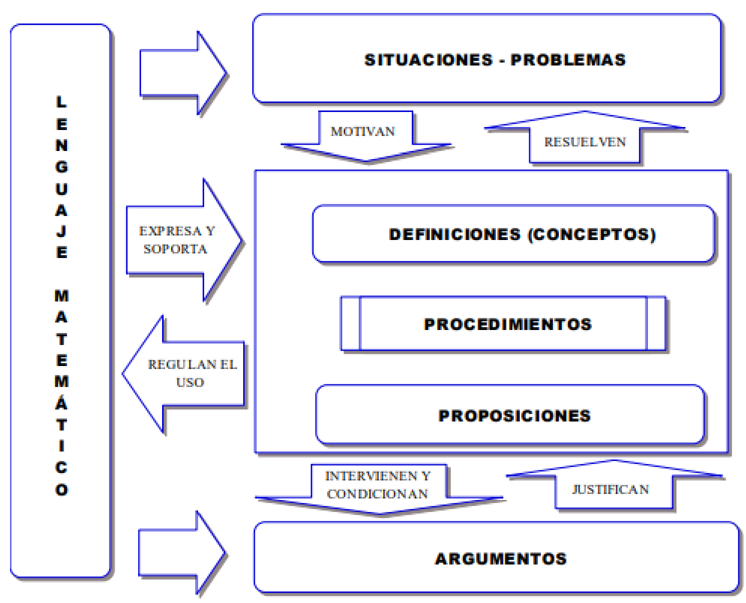


Figura 6.3 Configuración de objetos primarios. Tomada de (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 7)

6.2.2 Procesos matemáticos

En los procesos de resolución de problemas o situaciones problema, además de la emergencia de nuevos objetos matemáticos primarios, se emplean y emergen procesos matemáticos diversos. Los procesos matemáticos que se reconocen en el EOS, sin que se consideren exhaustivos, son los siguientes: problematización, definición, enunciación, representación, argumentación, idealización, generalización, entre otros, los cuales se presentan en la Figura 6.4.

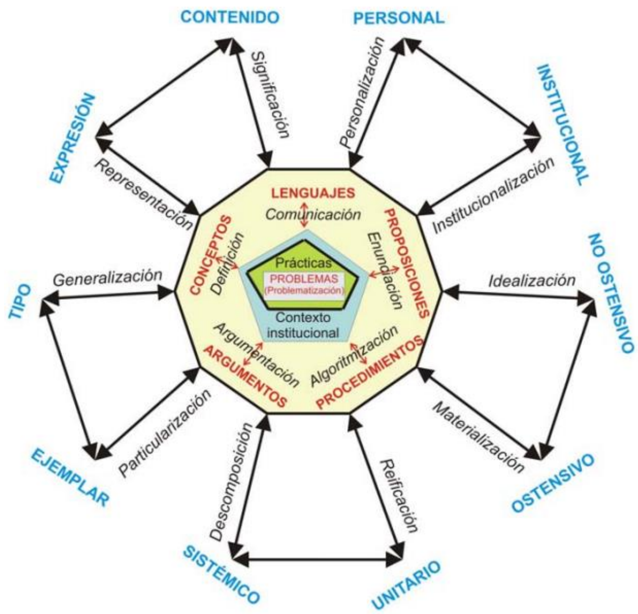
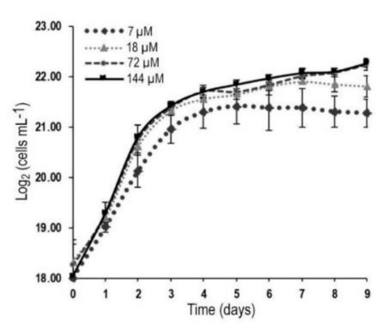
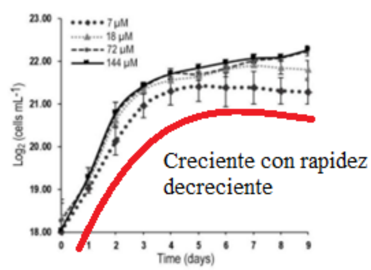


Figura 6.4 Prácticas, objetos y procesos matemáticos. Tomado de (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 10)

En la Tabla 6.2 se ejemplifican algunos de ellos, mediante la actividad de microalgas chaetoceros muelleri (Anexo 2), su uso y aplicación constituye un factor de primordial importancia en la realización de actividades matemáticas. En tal sentido, en los diseños de actividades didácticas es pertinente identificar los procesos que se consideran primordiales para el aprendizaje.

Procesos Matemáticos	**Ejemplificación**
Problematización	Analizar por medio del pensamiento variacional el crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri a diferentes concentraciones de fósforo (control, exceso y dos limitantes) 
Definición	"… el objeto del pensamiento variacional es el análisis de la covariación entre cantidades de magnitudes, principalmente las variaciones en el tiempo" (Vasco, 2003, pág. 6)
Enunciación	Se analiza la relación entre cantidades de magnitudes variables y cómo afecta el cambio de una respecto a la otra.

Comunicación	La curva está creciendo a medida que pasa el tiempo, primero rápidamente y después permanece constante.
Elaboración de procedimientos (algoritmización)	La razón media de cambio $\frac{C_f - C_i}{t_f - t_i}$
Argumentación	Para analizar el comportamiento se tienen que identificar las magnitudes variables y la manera como covarían entre sí, es decir, de manera general se observa que a medida que pasa el tiempo, la cantidad de células por mililitro aumenta. Sin embargo, al inicio se observa una mayor rapidez de crecimiento, luego es más lento y al final parece un ligero decrecimiento.
Institucionalización	Se analiza la covariación entre cantidades de magnitudes variables para determinar qué cambia, cómo cambia y cuánto está cambiando.
Personalización	
Generalización	Se identifican las magnitudes (constantes y variables) involucradas, se analiza el comportamiento creciente, decreciente o constante, la covariación entre magnitudes variables y la rapidez de cambio.
Particularización	En el ejemplo del crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri, algunas magnitudes involucradas son la cantidad de fósforo (constante para cada tratamiento), diversos nutrientes (constantes), el tiempo (variable), la cantidad de células por mililitro (variable). El crecimiento es la covariación entre la cantidad de células y el tiempo transcurrido.
Descomposición/análisis	En el estudio de $y = mx + b$ se pone énfasis en la pendiente m como la razón de cambio entre un desplazamiento vertical respecto a un desplazamiento horizontal, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, pues es uno de sus parámetros.
Reificación/síntesis	Al analizar el comportamiento de las curvas de crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri se utiliza la pendiente como un proceso unitario.
Materialización/concreción	Una función es creciente en x si $f'(x) > 0$ y decreciente si $f'(x) < 0$.

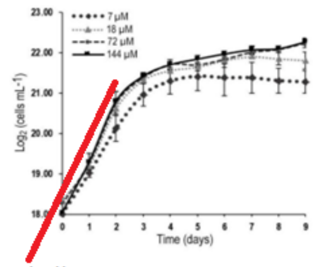
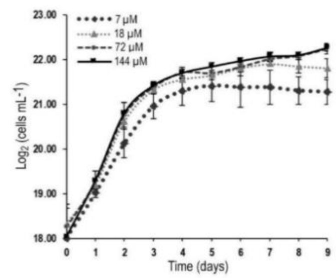
Idealización/abstracción	 Idealizar una recta En los primeros dos días se puede idealizar como una recta lo que nos lleva a observar un crecimiento con rapidez constante.
Significación	A medida que aumenta la variable independiente $x, x_1 < x_2$; aumenta la variable dependiente $y, f(x_1) < f(x_2)$.
Representación/expresión	

Tabla 6.2 Procesos matemáticos de actividad de microalgas. Elaboración propia

6.3 Configuraciones Ontosemióticas

Al relacionarse entre sí estos objetos primarios forman configuraciones, que pueden ser socio-epistémicas al tratarse de redes de objetos institucionales o cognitivas cuando son redes de objetos personales. Continuando con el ejemplo previo, donde se aborda la situación-problema de analizar por medio del pensamiento variacional, las distintas curvas del crecimiento de la microalga chaetoceros muelleri (Anexo 2) a diferentes concentraciones de fósforo (control, exceso y dos limitantes), en la Figura 6.5 se presenta la configuración ontosemiótica.

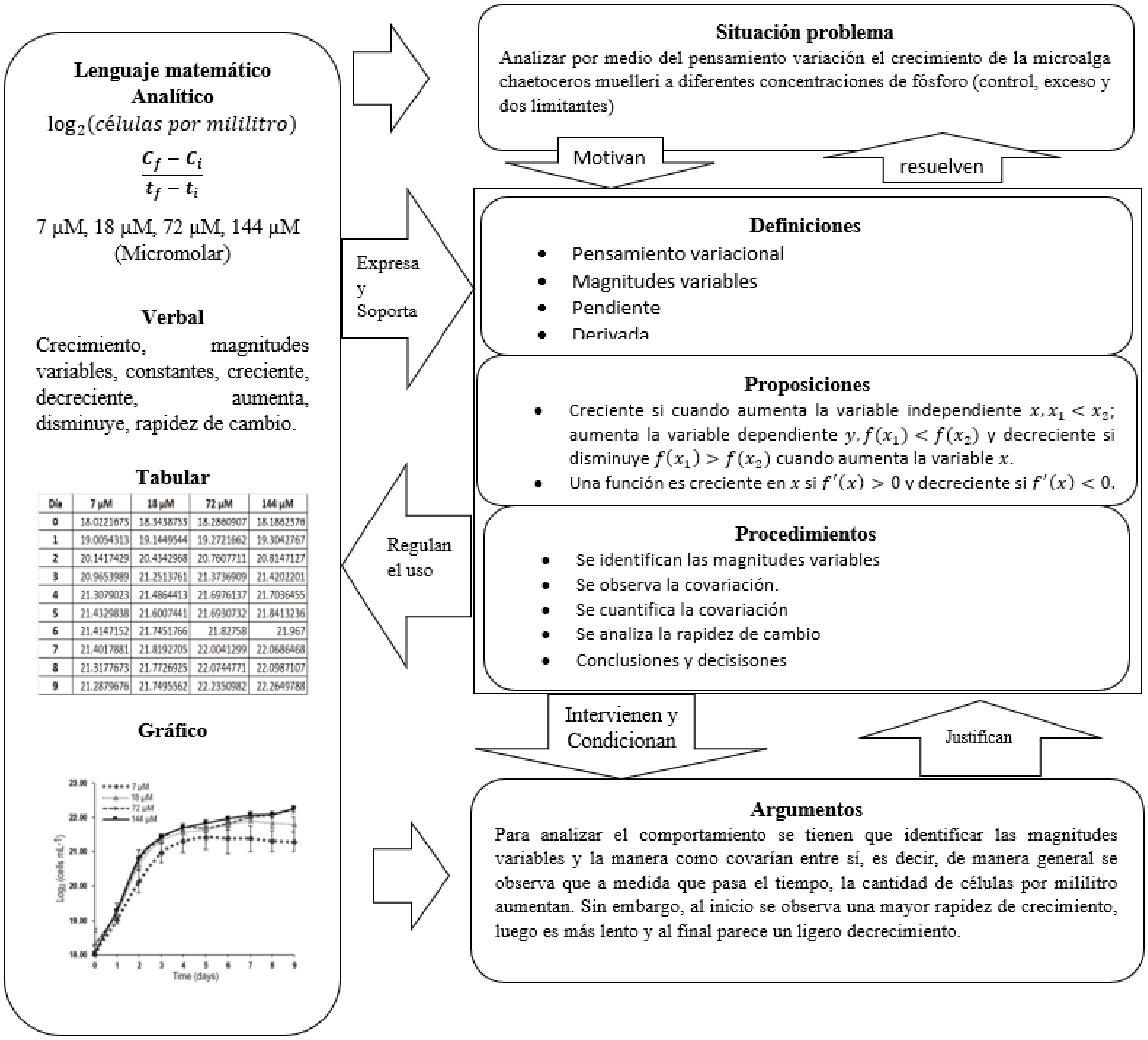


Figura 6.5 Configuración ontosemiótica de la actividad de la microalga. Elaboración propia.

6.4 Configuraciones y trayectorias didácticas

Para el análisis de los procesos instruccionales el EOS ha introducido la noción de configuración y trayectoria didáctica cuyos elementos constituyentes se resumen en la Figura 6.6.

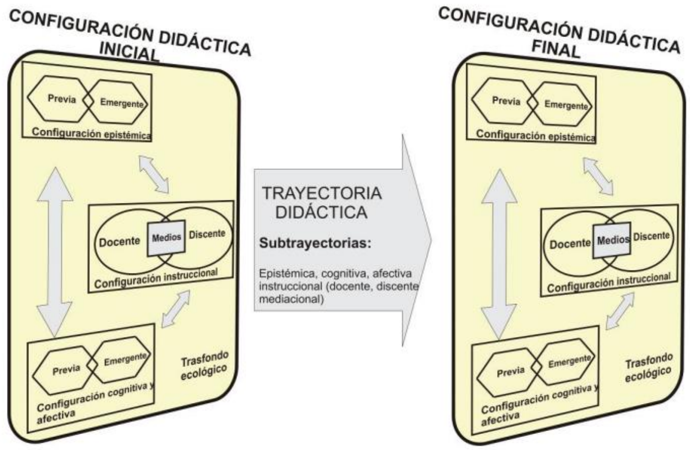


Figura 6.6 Configuraciones y trayectorias didácticas. Tomada de (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 13)

En el transcurso de una clase, el desarrollo de un tema o de todo un curso, en cada etapa se promueve el surgimiento de un procedimiento, de un lenguaje, de un concepto o de cualquier otro de los seis objetos matemáticos primarios, mediante la realización de un conjunto de acciones, conformando configuraciones ontosemióticas. Para el logro de los objetivos de mayor alcance estas configuraciones se entrelazan en una trayectoria ontosemiótica, de tal suerte que se puede planear la actividad matemática identificando las diferentes configuraciones ontosemióticas y su concatenación en trayectorias didácticas que nos conduzcan al logro de los objetivos proyectados.

6.5 Criterios de Idoneidad Didáctica

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción, ha sido introducida en el EOS (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. La figura 6.7 resume las principales características de dicha noción.

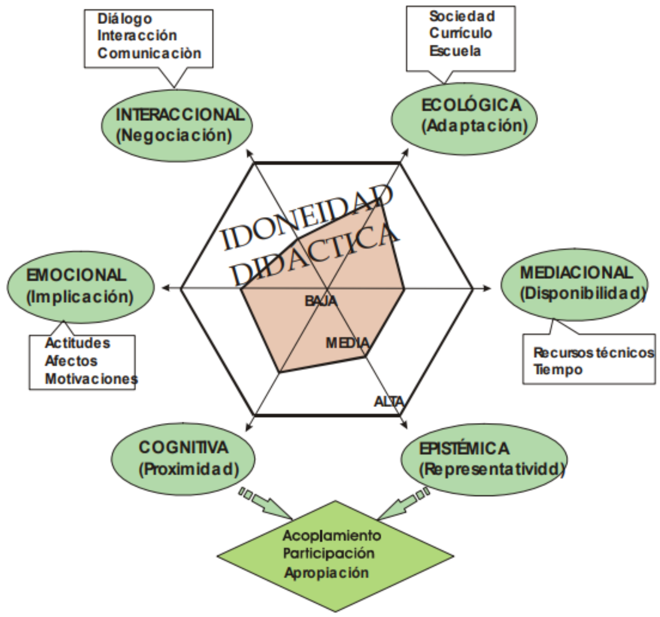


Figura 6.7 Idoneidad didáctica. Tomado de (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 16)

Idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática

- Idoneidad epistémica. Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva. Expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- Idoneidad interaccional. Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional. Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad afectiva. Grado de implicación (interés, motivación, entre otros) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
- Idoneidad ecológica. Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla (Godino, Batanero, & Font, 2008, pág. 16).

6.6 Competencias y Conocimiento Didáctico-Matemático

Inicialmente se consideraba que para impartir clases era suficiente con tener dominio del conocimiento disciplinar; actualmente, y con varias investigaciones realizadas, se concibe que es necesario, pero no es suficiente debido a que también se requiere tener conocimiento pedagógico y didáctico; además, es importante conocer diferentes maneras o formas de enseñanza y los distintos significados de ciertos objetos matemáticos, el nivel o la profundidad con la que deben ser abordados, conocer el currículo, realizar el vínculo con otras disciplinas o grados anteriores y posteriores.

> El estudio de los conocimientos y competencias didácticas-matemáticas que debe tener un docente para gestionar adecuadamente el aprendizaje de sus alumnos es un tema que ha sido ampliamente investigado, generándose diversas propuestas de modelos con los que caracterizar dichos conocimientos y competencias del docente (Breda, Pino-Fan, & Font, 2017, pág. 1893).

De esta manera, se está poniendo énfasis en el desarrollo profesional docente debido a que se “necesitan herramientas teóricas que permiten llamar su atención sobre aspectos importantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas” (Breda, Pino-Fan, & Font, 2017, pág. 1896), con el propósito de que el profesor de matemáticas pueda desempeñar favorablemente su profesión y esto se vea reflejado en el aula de clases.

También, “es necesario contar con herramientas especialmente diseñadas para abordar la complejidad de las matemáticas y la complejidad de los procesos de instrucción” (Breda, Pino-Fan, & Font, 2017, pág. 1897), lo que permitirá realizar análisis didácticos y que el docente pueda reflexionar acerca de su propia práctica docente.

El conocimiento didáctico-matemático (CDM) de los docentes puede organizarse o desarrollarse según tres dimensiones principales: matemática, didáctica y metadidáctico-matemática (Pino-Fan & Godino, 2015; Pino-Fan et al., 2015, 2018). La dimensión matemática se refiere al conocimiento de las matemáticas escolares a enseñar y sus vínculos con nociones previas y nociones posteriores. La didáctica es acerca del conocimiento sobre aspectos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, el conocimiento profundo de las matemáticas escolares y su interacción con aspectos cognitivos y afectivos de los estudiantes (cómo piensan, cómo aprenden, errores y dificultades en el contenido específico del estudio), recursos y medios, interacciones en el aula y características ecológicas (contexto político, económico, social, etc. que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje). La metadidáctico-matemática, alude a los conocimientos que debe tener un profesor para sistematizar la reflexión sobre su práctica y así emitir juicios sobre su práctica. En la Figura 6.8 se muestra un panorama general del CDM.

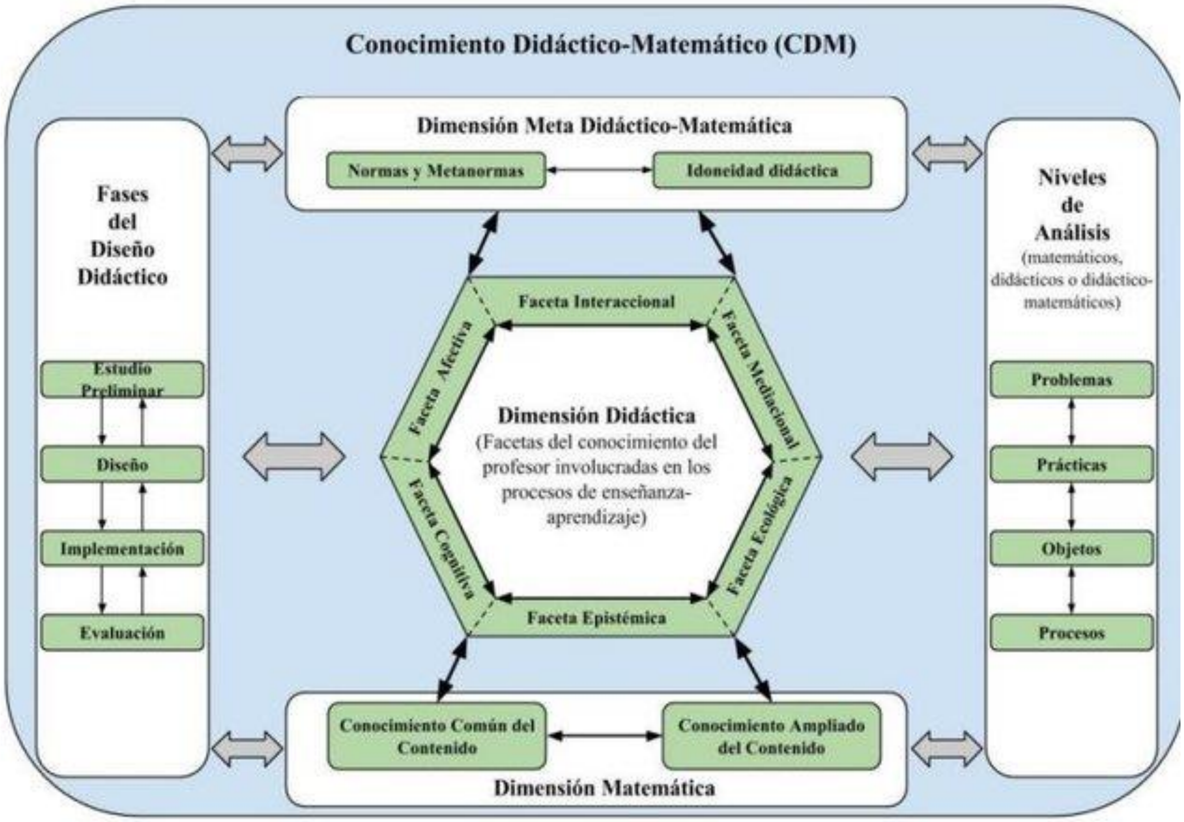


Figura 6.8 Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Tomado de (Pino-Fan, Castro, & Font, 2022, pág. 1409)

En estudios recientes se han incorporado las competencias entendiéndose como “el conjunto de conocimientos y disposiciones, que permite el desempeño efectivo dentro de contextos profesionales típicos” (Font, 2011; Pino-Fan et al., 2017); proponiendo modelos que permitan una integración explícita entre las nociones de conocimiento y competencia docente (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Castro y Font, 2022). Aquí se destacan la caracterización y desarrollo de conocimientos didácticos-matemáticos que le permitan al profesor favorecer el manejo de sus clases y las habilidades necesarias para el ejercicio profesional.

El modelo Competencias y Conocimientos Didácticos-Matemáticos (CCDM) presentado por Pino-Fan, Castro y Font (2022) propone dos competencias para la actividad profesional del profesor de matemáticas: Competencia Matemática y Competencia de Análisis e Intervención Didáctica; define las características, los niveles de logro y sirve como una herramienta de análisis para valorar los rasgos que deben tener los profesores de matemáticas para que su práctica docente sea favorable.

Cuando se refiere a la Competencia Matemática no implica solamente la parte disciplinar del conocimiento matemático sino lo didáctico-matemático, reconociendo que no se puede separar lo didáctico del conocimiento matemático, es decir, el profesor debe ser competente para atender las actividades propias de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tales como el diseño, la implementación y evaluación. Para lograr dicha competencia proponen algunos elementos a considerar como la resolución de tareas, planteamiento o proposición de problemas y el análisis de las respuestas a un problema planteado, los cuales sirven como indicadores para no quedarse en el planteamiento general.

En la resolución de problemas el docente debe ser capaz de resolver problemas adecuados al nivel educativo que imparte, identificando diferentes significados de un objeto matemático, sus distintas representaciones y utilizar varios procedimientos. En el planteamiento de problemas el profesor debe proponer tareas asociadas al tema matemático correspondiente al nivel educativo y considerando aspectos relacionados con el currículo, grados anteriores o posteriores, y el contexto adecuado a las características, intereses y necesidades de los estudiantes. Por último, en el análisis de las respuestas a un problema planteado el maestro valora aspectos matemáticos en las prácticas de sus estudiantes como respuestas correctas e incorrectas y lo ideal sería el utilizar alguna herramienta teórica-metodológica, como, por ejemplo, identificar los objetos matemáticos intervinientes y emergentes, algunos sistemas de prácticas y configuraciones ontosemióticas.

En el caso de la Competencia para el Análisis e Intervención Didáctica, la parte central es “Diseñar, aplicar y evaluar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de estado, para establecer ciclos de planificación, ejecución, evaluación y propuestas de mejora” (Breda et al., 2017, págs. 1897). Se propone impulsar conocimientos relacionados con aspectos que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y los conocimientos que debe tener un profesor para la reflexión sobre su práctica docente; con el propósito de lograr esto, se desglosan una serie de aspectos tales como: Análisis de la actividad matemática, Análisis y gestión de las interacciones, Uso y manejo de recursos, y Análisis y valoración de la idoneidad didáctica; además se señalan los niveles de logro y descripciones para cada una de estas subcompetencias cuya conjunción se vuelve importante.

El Análisis de la actividad matemática promueve e identifica procesos matemáticos y cognitivos relevantes para la actividad matemática, reconoce errores y ambigüedades matemáticas y puede reflexionar acerca del quehacer docente; el Análisis y gestión de las interacciones se puede asociar con la faceta interaccional, promueve el dialogo, comunicación y la interacción entre alumnos, su autonomía, es decir utiliza dinámicas interaccionales adecuadas para mejorar las características de los estudiantes; Para el Uso y manejo de recursos se entiende como el empleo adecuado de diversos recursos como softwares dinámicos, calculadoras y manipulables, pero no sólo recursos tecnológicos sino materiales como libros de texto, pizarrón, entre otros y el tiempo destinada para cada actividad o tarea con la finalidad de que su implementación sea adecuada para la enseñanza y favorable en el aprendizaje de los alumnos; finalmente, el Análisis y valoración de la idoneidad didáctica requiere de todas las competencias previas, es la más compleja y permite reflexionar sobre la práctica docente en cada momento del proceso, buscando mejorar la enseñanza. Se consideran seis idoneidades didácticas (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica) y se refiere al grado en que dicho método incluye características ideales para lograr la adecuación entre los significados de los estudiantes (aprendizaje) y los fines institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), considerando las circunstancias. y recursos disponibles (ambiente).

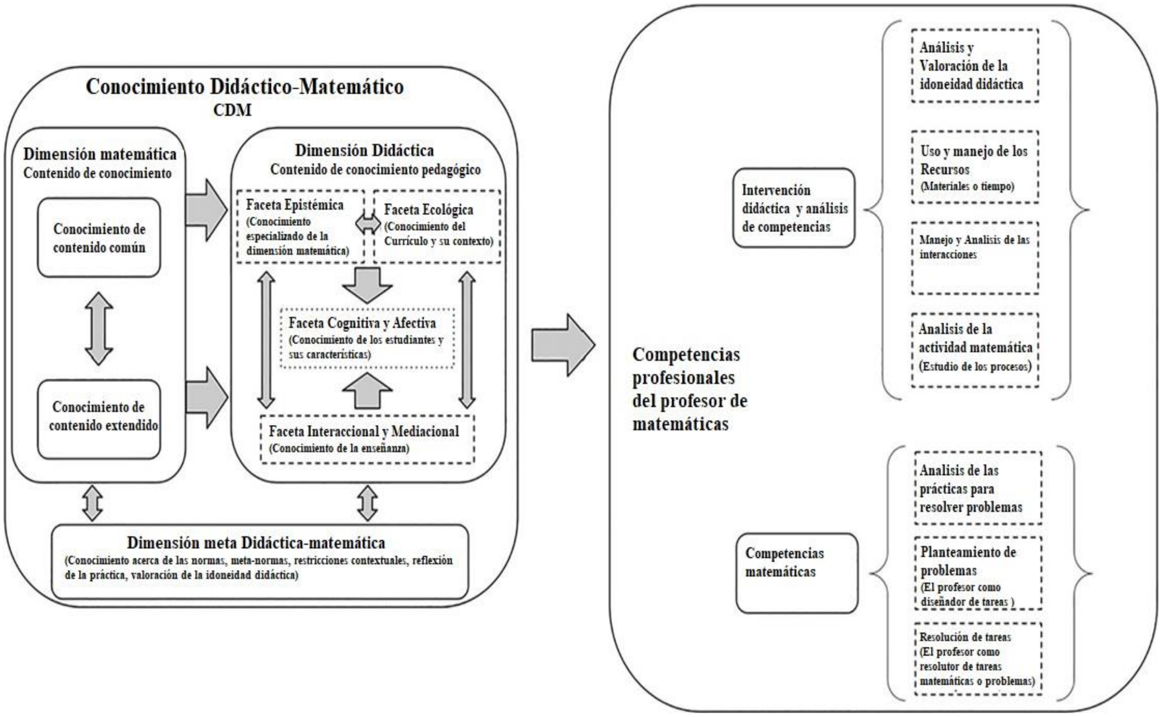
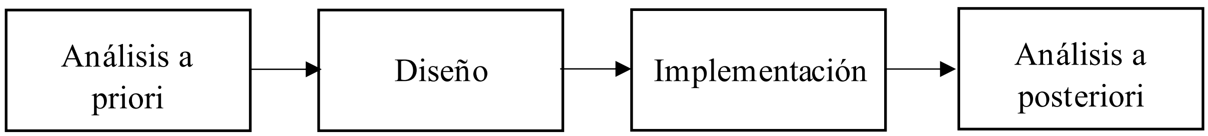


Figura 6.9 Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM) Tomado de (Pino-Fan, Castro, & Font, 2022, pág. 1413)

7 ASPECTOS METODOLÓGICOS

En esta sección se presentan los aspectos metodológicos del proyecto de intervención didáctica que se implementarán. Esto se realiza una vez planteada la problemática, su justificación y el enfoque teórico a utilizar. En este apartado se presentan los procedimientos y acciones para lograr los objetivos planteados, con este fin se han determinado las siguientes etapas metodológicas:



7.1 Análisis a priori

La primera etapa para desarrollar es un estudio previo, donde se determina el contenido matemático a abordar, que en este caso es el desarrollo del pensamiento variacional, para ello se toma en cuenta el significado institucional de referencia que proviene de la definición de Vasco. En esta definición se hace explícito cómo se desarrolla este tipo de pensamiento, porque habla de un proceso cognitivo al referirse a una manera de pensar dinámica, que trata de llevar lo no ostensivo a una representación ostensiva que muestre la covariación entre las magnitudes involucradas. También, se expone que hay un momento de identificar lo que cambia y lo que permanece constante, así como, los patrones que se repiten; construir modelos, verificar los resultados de estos y, en caso de ser necesario, descartarlos. En resumen, se puede asociar con los cuestionamientos ¿qué está cambiando?, ¿cómo está cambiando? y ¿cuánto está cambiando?

Este estudio se lleva a cabo con profesores que imparten o han impartido clases de los cursos de Cálculo, pre-Cálculo, matemáticas 4 o asignatura afín, en el bachillerato de algún subsistema de educación media superior, en particular, en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Se realiza un análisis para diagnosticar el nivel de logro que tienen los docentes de matemáticas, en cuanto a las subcompetencias de resolución de problemas, planteamiento de problemas y análisis de las prácticas para resolver los problemas que corresponden a la competencia matemática propuestas en el modelo CCDM (Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor), expuesto por Pino-Fan, Castro y Font (2022), la cual sirve como una herramienta de análisis tanto para identificar el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático como para el proceso de instrucción didáctica.

En cuanto a la competencia para el análisis e intervención didáctica se consideran el análisis de la actividad matemática, manejo de los recursos (materiales y temporales) e interacciones y valoración de la idoneidad didáctica. Aquí se espera que se utilice el conocimiento didáctico-matemático (competencias anteriores); lo idóneo es realizar el análisis mediante alguna herramienta teórico-metodológica anticipando errores o conflictos en las soluciones de los estudiantes, promoviendo diferentes representaciones para el objeto matemático, presentando adecuadamente el tema, favoreciendo el dialogo y comunicación entre todos los actores y reflexionando sobre su propia práctica docente o de otro.

El instrumento diagnóstico consta de dos etapas, una primera de carácter inicial con el propósito de obtener evidencia empírica sobre las necesidades de fortalecimiento del desarrollo del pensamiento variacional de los profesores, y una segunda etapa que permita ubicar los niveles de desarrollo de las competencias matemáticas y didácticas de los profesores en lo referente al pensamiento variacional. Para realizar el análisis preliminar se cuenta con una evaluación de siete reactivos en distintos contextos que abordan el pensamiento variacional (Anexo 1), el cual es diseñado considerando los criterios de idoneidad didáctica, así como el significado institucional de referencia del pensamiento variacional (Vasco, 2003) y los objetos matemáticos primarios.

Una vez aplicada la prueba diagnóstica, se realiza un análisis exploratorio de los resultados en dos sentidos: el primero para identificar el nivel de logro referente al desarrollo del pensamiento variacional y, el segundo, en cuanto a la competencia didáctico-matemática, necesaria para fortalecer su propio desarrollo con este tipo de pensamiento y que le permitirá promoverlo en el estudiantado.

7.2 Diseño

Para el desarrollo del proyecto de intervención didáctica se trabaja en colegiado con docentes de diferentes planteles del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. Para el trabajo colegiado se establece el diseño de los criterios para el desarrollo y la implementación de la intervención didáctica, a continuación, se mencionan cada uno de ellos.

- Selección de profesores en servicio de matemáticas
- Protocolo de observación de las sesiones
- Diseño de actividades tipo por parte del profesor/investigador

7.2.1 Selección de profesores en servicio de matemáticas

En este proyecto de intervención se realiza por medio del trabajo colegiado, en el cual se realiza una selección de docentes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, incluyendo al profesor/investigador, cuyo tema a tratar es el Pensamiento variacional, por lo que se han definido los siguientes elementos para la conformación del equipo de docentes.

- Que pertenezcan al Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
- Que sea personal docente en servicio.

- Que impartan las asignaturas de Matemáticas 4, Precálculo o Cálculo Diferencial o asignatura similar.
- Que sean candidatos para impartir el curso de Pensamiento Matemático 3, que corresponde al Pensamiento Variacional.
-

7.2.2 Protocolo de observación de las sesiones

Durante las sesiones del equipo de trabajo se definen los tiempos para cada una de las actividades:

- Exposición de actividades tipo por parte del docente investigador: 20 minutos
- Resolución de las actividades por parte de los docentes: 40 minutos
- Explicación del formato de diseño de actividades para el docente: 30 minutos
- Discusión acerca del objeto matemático a abordar para proponer ideas sobre situaciones de interés: 30 minutos
- Receso: 30 minutos
- Diseño de actividades por parte de los docentes: 180 minutos
- Retroalimentación del docente/investigador:60 minutos
- Receso: 30 minutos
- Retroalimentación del equipo de trabajo sobre actividades de diseño: 60 minutos

Durante cada una de las actividades a realizar tomará video, para tener una perspectiva general de las interacciones, los modos de operar, ideas y concepciones de los docentes sobre el desarrollo del Pensamiento Variacional.

7.2.3 Diseño de actividades tipo por parte del profesor/investigador

Para el diseño de las actividades Tipo, propuestas por el docente/investigador, se toman en cuenta algunos elementos del EOS, tales como el significado institucional de referencia, las configuraciones ontosemióticas y los criterios de idoneidad didáctica, con el fin de elaborar actividades que promuevan el desarrollo del pensamiento variacional enfatizando ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto está cambiando?

Un ejemplo de este tipo de actividades es la del contexto de crecimiento de la microalga Chaetoceros muelleri, que se encuentra en el Anexo 2 y ha servido también para ejemplificar algunos elementos teóricos expuestos previamente. Esta actividad es relevante en el sentido que atiende características expuestas en el MCC de la EMS pues el contexto se enmarca en un problema local en Bahía de Kino, que puede ser tratado mediante el pensamiento variacional; situaciones similares (entorno real) son las que se pretenden presentar en cada una de las actividades por diseñar para motivar y se tenga interés por resolverlas, y con ello desarrollar este tipo de pensamiento matemático.

Cabe mencionar que, aunque se tratará de dar prioridad a diseñar actividades extramatemáticas con contextos reales, también se van a considerar situaciones propias de la matemática. También, que además de fomentar el desarrollo del pensamiento variacional, se van a considerar fortalecer las competencias (competencia matemática y competencia para el análisis e intervención didáctica) expuestas en el modelo CCDM.

7.3 Implementación

Para la implementación del proyecto de intervención se realiza una calendarización de las sesiones presenciales y virtuales, con el fin de presentar y elaborar materiales que fomenten el desarrollo del Pensamiento Variacional. El docente/investigador expone las actividades tipo con el fin de que los profesores las respondan y, así, valorar el nivel de logro que tienen los docentes en la subcompetencia de resolución de problemas en cuanto al pensamiento variacional. También, aquí se puede valorar un poco acerca del análisis de las prácticas para resolver problemas pues, si bien no se trabajará con alumnos ni observando a los profesores dentro del aula, si se pueden brindar situaciones hipotéticas con posibles soluciones por parte de los alumnos para su análisis.

Después se presenta un formato para que el diseño de las actividades cumpla con los criterios de idoneidad didáctica propuestas por el EOS en contextos del Pensamiento Variacional. Aquí se fomenta la subcompetencia de planteamiento de problemas por parte del docente. Para finalizar esta actividad se realiza una retroalimentación de los diseños en colegiado, destacando fortalezas y posibles mejoras en cada uno de los diseños de los docentes.

En cuanto a la competencia para el análisis e intervención didáctica se puede observar que al diseñar o planificar una tarea matemática es deseable considerar diferentes registros de representaciones para motivar el estudio mediante la variación, uso adecuado de tiempos, materiales (libros de texto, calculadora, computadora, software dinámico) e interacciones entre los participantes, así como la reflexión sobre la práctica docente con los criterios de idoneidad didáctica. Algunas competencias tendrán mayor nivel de profundidad que otras por la misma naturaleza de éstas.

7.3.1 Calendarización de sesiones de trabajo y Definición de los objetos matemáticos a tratar por sesión

La calendarización de las sesiones del trabajo en colegiado con el grupo pequeño de profesores de COBACH, se llevará a cabo en el semestre PAR (enero-junio) del ciclo escolar 2023-2024 durante cada uno de los tres periodos de evaluación parcial, de manera presencial (cada cinco semanas aproximadamente), que se encuentran indicado en el calendario oficial de COBACH, y virtualmente cada dos semanas. En estas, se abordarán temáticas relacionadas, por ejemplo, a los siete tipos diferentes de variación básicas y a contextos que involucren el pensamiento variacional para el diseño de actividades, que servirán como producto para que ellos las implementen en el siguiente semestre NON (agosto-diciembre) del ciclo escolar 2024-2025, que se estará impartiendo el curso de pensamiento matemático 3, correspondiente al variacional.

7.3.2 Exposición de actividades Tipo y Resolución de la actividad tipo por parte de los docentes

Se presentan las actividades Tipo diseñadas por el docente, con la finalidad de que se resuelvan de manera individual par parte de cada profesor, para posteriormente, generar discusión grupal y retroalimentación. Además, se utilizará el CCDM para valorar el desarrollo de las subcompetencias matemáticas-didácticas como Resolución de Problemas y Análisis de las prácticas para resolver problemas. Esta estará a cargo del docente investigador, quien conducirá las sesiones utilizando hojas de trabajo para la recopilación de los datos.

7.3.3 Diseño de actividades por parte de los docentes

Para fomentar el desarrollo de la subcomptencia de Planteamiento de problemas, se utiliza un formato (el cual se adapta de los criterios de Idoneidad Didáctica), donde se describen de manera detallada los elementos de diseño con los que debe cumplir cada una de las actividades por diseñar por parte de los docentes, en la Tabla 7.1 se presenta dicho formato.

Criterios	**Elementos de diseño**
Epistémico	Tema matemático por abordar, definir los objetos matemáticos que intervienen y los que emergen de la práctica matemática.
Cognitivo	Que las actividades se encuentren dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes. Con base en conocimientos previos.
Interaccional	• Definir interacciones entre los participantes. Dificultades que se puedan presentar y cómo resolverlas
Mediacional	Recursos disponibles: • Tiempo • Materiales Recursos tecnológicos
Afectiva	Situaciones del pensamiento variacional: • Extramatemáticos o En contexto de su entorno local, nacional, global.

	o Problemas de su comunidad. Intramatemáticos
Ecológica	• Que se encuentren con características y elementos enmarcados en el marco Curricular Común de la EMS. Transversalidad con otras asignaturas

Tabla 7.1 Criterios y elementos de diseño. Elaboración propia

7.3.4 Retroalimentación por parte del profesor/investigador y del equipo de docentes

Al término del diseño de actividades por parte de los docentes, se plantea un foro grupal en donde cada uno de los docentes presenten su actividad, con el fin de mejorar el diseño de este, es necesario que se destaquen las cualidades de las actividades y se presente el formato de diseño para valorar si se cumple con los criterios descritos. Los docentes realizan críticas constructivas para el diseño en términos de los criterios.

7.4 Análisis a posteriori

En esta última etapa de análisis retrospectivo se hace una valoración de las respuestas y de los diseños brindados por los profesores de bachillerato que estuvieron trabajando en colegiado, mediante los elementos del Enfoque Ontosemiótico en donde se contrasta el significado institucional de referencia (del pensamiento variacional) con el significado personal; los criterios de idoneidad aportan para la reflexión en las distintas etapas del proceso de estudio y el CCDM proporciona una herramienta para caracterizar y valorar los conocimientos didácticos-matemáticos (Competencia Matemática), mediante el desarrollo de las subcompetencias de resolución y planteamiento de problemas, así como, análisis de las prácticas a un problema resuelto; Asimismo, la competencia para el análisis e intervención didáctica, con el uso y manejos de materiales, tiempo e interacciones, reflexión para la práctica docente con las idoneidades didácticas. Esta es presentada a través de tablas indicando los niveles de logro y descriptores para cada una de ellas, donde se desglosan de las prácticas como profesionales en la docencia.

CRONOGRAMA

Actividades	Semestres							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Análisis preliminar								
Aplicación de prueba diagnóstica								
Análisis de prueba diagnóstica								
Diseño de elementos para grupo de trabajo en colegiado								
Establecimiento del grupo de trabajo en colegiado								
Diseño de materiales por parte de docentes								
Análisis de materiales propuestos por docentes								

REFERENCIAS

Acosta, D., Jiménez, I., & Villar, B. (2015). *Actividad para desarrollar el Pensamiento Variacional en Primaria.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Araya, B. D. (2022). *Diseño de tareas sobre los significados parciales de la noción de límite en funciones de una variable.* [Tesis doctoral,Universidad de los Lagos]. Osorno, Chile.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, & L. Moreno, *Ingeniería Didáctica en Eduación Matemática* (págs. 97-140). Bogota: Grupo Editorial Iberoamerica.

Ávalos, B. (2010). Teacher professional development in Teaching and Teacher Education over ten years. *Teaching and Teacher Education*, 10-20.

Bautista, A., & Ortega-Ruíz, R. (2015). Desarrollo Profesional Docente: Perspectivas y Enfoques Internacionales. *Psychology, Society, & Education*, Vol. 7(3), págs. 343-355.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 1893-1918.

Caballero, P. M., & Cantoral, U. R. (2013). Difilcultades en el desarrollo del Pensamiento Variacional en Profesores de Bachillerato. *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, págs. 274-281.

Caballero, P. M., & Cantoral, U. R. (2013). El desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional entre Profesores de Bachillerato. *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa*, Vol 26, págs. 1585-1593.

Caballero, P. M., & Cantoral, U. R. (2013). El Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional entre Profesores de Bachillerato. *Acta Latinoamericano de Matemática Educativa*, Vol 26, págs. 1585-1593.

Caballero-Pérez, M., & Moreno-Durazo, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Capitulo 3, págs. 1066-1074.

Caicedo, Z. J. (2013). *Pensamiento variacional de estudiantes de grado noveno de Educación Básica aplicado en el proceso de resolucion de situaciones problema que se pueden modelar con una función cuadrática.* [Tesis Doctoral, Universidad del Tolima-Rudecolombia]. Colombia.

Cantoral Uriza, R. (2013). *Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública,.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Relime*, Vol.6, Núm. 1, pp. 27-40.

Carlson, M. J. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 352-378.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento Covaracional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *REVISTA EMA*, VOL. 8, Nº 2, 121-156.

Cuevas, V. C., & Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología . *El Cálculo y su Enseñanza, Cinvestav del Instituto Politécnico* , 45-60.

Dávila, O. W. (2018). *Desarrollo de Pensamiento Variacional en Estudiantes de Secundaria, mediado por GeoGebra [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia].* Manizales, Colombia.

Delgado, P. M. (2009). Matemática visual: simulaciones relativas al teorema fundamental del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, Año 1. Vol.1 No1., págs. 61-74.

Díaz, C. M. (2009). Conocimientos de los profesores preuniversitarios de Cálculo acerca del significado y las interpretaciones de la derivada. *El Cálculo y su Enseñanza. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.*, 75-90.

Fonseca, C. J., & Alfaro, C. C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. *Revista Educación, vol. 42, núm. 2*, 1-15.

Gárces-Córdova, W. (2021). *Criterios que orientan la práctiac del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería en el Perú: el caso de la derivada.* [Tesis dosctoral, Universitat de Barcelona]. Barcelona.

Giacomone, M. B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Granada.

Giler-Medina, P. X., & Alcívar-Castro, E. J. (2022). Variational thinking in the academic performance of High School students . *International Journal of Health Sciences*, 666-678.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, Rio Claro*, v. 31, n. 57, 90 - 113,.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322*, 1-21.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.* Obtenido de Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Herrera-Garcia, K., Dávila-Araiza, M. T., Giacomone, B., & Beltrán-Pellicer, P. (2021). Una propuesta de secuencia didáctica sobre variación lineal para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Números*, vol. 108 263-289.

Herrera-García, K., Dávila-Araiza, T., Giacomone, B., & Beltrán-Pellicer, P. (2020). Faceta Epistémica de los Conocimientos Didáctico-Metemáticos de futuros Profesores de Secundaria sobre variación lineal . *Avances en Matemática Educativa. Teorías Diversas*, No. 8, págs. 1-20.

Jiménez, J. R., Grijalva, A., Milner, F., Dávila, T., & Romero, C. (2022). *Reconceptualización Didáctica del Cálculo.* Hermosillo: Universidad de Sonora.

Lovio Fragoso, J. P., Hayano Kanashiro, C., & López Elías, J. A. (2019). Effect of different phosphorus concentrations on growth and biochemical composition of Chaetoceros muelleri. *Latin American Journal of Aquatic Research*, 47(2): 361-366.

Maury, E., Palmezano, G., & Cárcamo, S. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios* , Vol. 10, No. 1, págs. 7-16.

MEN, M. d. (2006). Estándares básicos de competencias matemáticas. En M. d. MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (págs. 46-95). Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Mendoza, M., & Cabezas, C. (2017). Manifestaciones emergentes del pensamiento variacional en estudiantes de cálculo inicial. *Revista Portal de la Ciencia*, No.13, págs. 45-65.

Mesa, Y. M., & Villa Ochoa, J. A. (2009). El papel de Galileo Galilei en la construcción histórica del concepto de función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 22 págs. 1315-1323.

Paladinez, S. D. (2018). *Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Primaria, a través de Actividades de Aprendizaje basadas en problemas [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia].* Manizales, Colombia.

Parada, R. S. (2018). Caracterización de habilidades del Pensamiento Variacional. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 10-18.

Parra, U. Y. (2021). *Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros Profesores Chilenos de Enseñanza Media sobre la noción de función: una experienciaen contextos de microenseñanza.* [Tesis dosctoral, Universidad de los Lagos]. Osorno, Chile.

Pino-Fan, L., Castro, W., & Font, V. (2022). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 1407–1432.

Posada, B. F., & Villa, O. J. (2006). *Propuesta Didáctica de Aproximación al Concepto de Función Lineal desde una perspectiva Variacional [Tesis de Maestría, Universidad de Antioquia].* Medellín, Colombia.

Posada, F., & Villa-Ochoa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F. Posada, *Modulo 2 Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (págs. 127-164). Medellín, Colombia: Artes y Letras Ltda.

Posada, F., Villa-Ochoa, J. A., & Obando, G. (2005). El concepto de función lineal desde una persepectiva variacional. *Memorias Séptimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 101-104.

Posso, T. J. (2020). *Aspectos característicos del pensamiento variacional en la modelación de fenómenos a través de la función cuadrática [Tesis de Maestría, Universidad del Valle].* Colombia.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *RELIME*, vol. 9, núm. 3, págs. 435-458.

Reyes-Gasperini, D., Palmeri, L. F., & Cantoral, U. R. (2019). Empoderamiento docente: Variación y predicción en matemáticas. *La matematica e la sua didattica*, Vol. 27, no. 2, págs. 141-159.

Ruíz Higuera, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico.* [Tesis doctoral, Universida de Granada]. Granada.

Seduca. (2005). *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticos* . Colombia: Gobierno de Antioquia.

SEMS, S. d. (2022). Obtenido de Rediseño del Marco Curricular Común de la Eduación Media Superior 2019-2022: http://desarrolloprofesionaldocente.sems.gob.mx/

SEMS, S. d. (2023). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo Pensamiento Matemático.* Ciudad de México: Secretaría de educación Pública.

Şen Zeytun, A., Çetinkaya, B., & Erbaş, A. K. (2010). Mathematics Teachers' Covariational Reasoning Levels and Predictions about Students' Covariational Reasoning Abilities. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 1601-1612.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky, *The concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy* (págs. págs. 25-58.). USA: Mathematical Association of America.

Subsecretaría de Educación Media superior, S. (2017). *Programa de Estudios Matemáticas 4.* Obtenido de https://dgb.sep.gob.mx/storage/recursos/2023/08/vzodYfeSus-Matematicas-IV.pdf

Tamayo, C. J. (2016). *Desarrollo de pensamiento variacional a través de la letra en la iniciación al álgebra.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). *Variation, Covariation, and Functions: Foundational Ways of Thinking Mathematically.* Tempe, Arizona: Arizona State University.

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, Educación e Internet*, Vol. 14 No. 1 págs. 1-48.

Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Memorias del Congreso Internacional de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*, 61-70.

Vasco, C. E. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Obtenido de Obtenido de https://www.studocu.com/es-mx/document/universidad-de-mexicali/quimica/carlos-e-vasco-pensamento-variacional-y-la-modelacion-matematica/13026673 el 8 de octubre de 2023.

Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *TEA Tecné, Episteme y Didaxis*, No. 31, págs. 9-25.

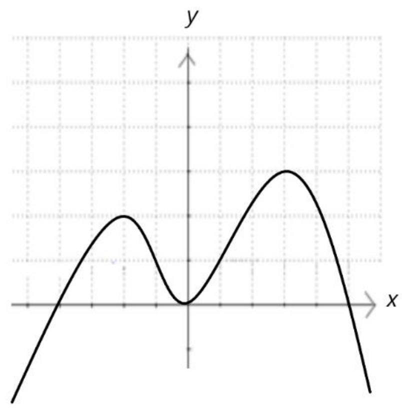
Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema, Rio Claro (SP)*, v. 28, n. 48, p. 449-468.

ANEXOS

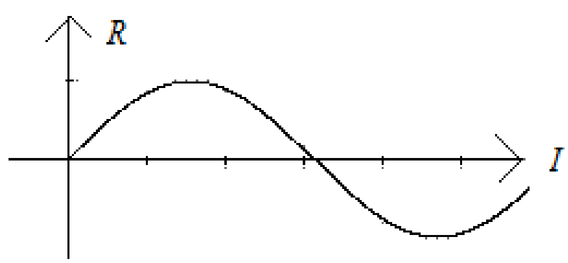
Anexo 1

Evaluación diagnóstica de Pensamiento Variacional

1. La siguiente es la gráfica de la derivada de una función real de variable real. Haz un bosquejo de la gráfica de la función.



2. En un experimento de laboratorio, Juan Antonio Silva determinó que la viscosidad v de un líquido es directamente proporcional al cuadrado de su densidad d, con una constante de proporcionalidad igual a $\frac{1}{3}$. Tomando en cuenta que los análisis teóricos muestran que si la densidad de una sustancia fuera cero, su viscosidad sería cero, representa mediante una gráfica de viscosidad contra densidad los resultados de Juan Antonio.
3. Al observar la gráfica siguiente, Ana María planteó que la variable R era directamente proporcional a I, pero que le resultaba difícil determinar el valor de la constante de proporcionalidad. ¿Cómo podrías ayudarla a clarificar sus ideas?

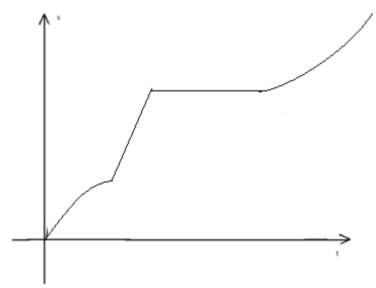


4. Los datos siguientes representan la posición en determinados momentos, de un móvil que se mueve en línea recta. Con base en ellos, determina:
   a) La velocidad del móvil al cabo de 4 segundos.
   b) La aceleración del móvil en el instante $t = 5\ seg$.

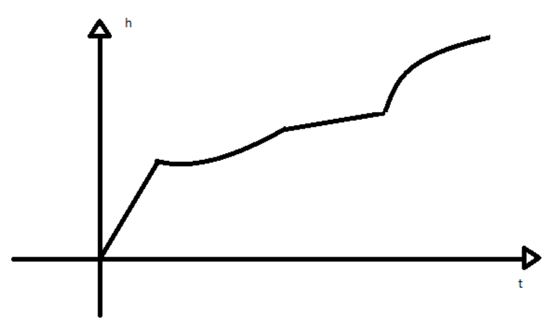
t (s)	0	1	2	3	4	5	6
s (m)	2	11/4	8	89/4	50	383/4	164

5. En las siguientes líneas se plantea una situación sobre el recorrido que un estudiante realiza para trasladarse entre su casa y la escuela. Con la información que se proporciona haz una gráfica de posición contra tiempo, que ilustre lo expresado verbalmente.
   Hoy en la mañana salí rumbo a la escuela y, como tenía tiempo, caminé durante cinco minutos con baja rapidez, pero constante, hasta llegar a una papelería en la que me entretuve tres minutos. Después seguí de nuevo rumbo a la escuela a rapidez constante pero mayor a la anterior, durante dos minutos. Al darme cuenta de que había olvidado una tarea, me devolví caminando con rapidez cada vez mayor por 7 minutos. Estuve en casa dos minutos y después caminé rumbo a la escuela saliendo a gran rapidez, pero, ante el cansancio que tenía, la rapidez siempre iba disminuyendo, hasta llegar diez minutos después a la escuela.

6. La siguiente gráfica representa la posición del recorrido de un estudiante entre su casa y su escuela, en ambos sentidos. La posición cero corresponde a la ubicación de su casa. Haz una descripción, similar a la del punto anterior, que describa la situación.



7. Conforme un recipiente se fue llenando de agua a flujo constante, la altura del mismo se fue modificando de acuerdo a lo que muestra la siguiente gráfica.



   Haz un bosquejo de la forma del recipiente.

Anexo 2

Actividad: Efecto de diferentes concentraciones de fósforo sobre el crecimiento y composición bioquímica de Chaetoceros muelleri

La Chaetoceros muelleri es una de las especies de microalgas más utilizadas en la acuicultura en el noroeste de México como alimento para peces y crustáceos. Su importancia se debe a su rápido crecimiento, calidad nutricional y acumulación de lípidos en condiciones de limitación de nutrientes. Sin embargo, los mecanismos bioquímicos y moleculares de la absorción de fósforo (P) en condiciones limitantes para esta especie aún se desconocen. Este estudio tuvo como objetivo analizar el crecimiento y la composición bioquímica de Chaetoceros muelleri en respuesta a diferentes concentraciones de fósforo.

La cepa de C. muelleri utilizada en este estudio se aisló en Bahía de Kino (Sonora, México) y se mantuvo en la colección de algas del Departamento de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Universidad de Sonora, México. Se probaron cultivos discontinuos axénicos de C. muelleri (matraces de vidrio Erlenmeyer de 1 L) usando medio F (Guillard & Ryther, 1962), con concentraciones de fosfato modificadas. En este estudio se utilizaron cuatro tratamientos de fósforo, que incluye control (fosfato: 72 μM), exceso (fosfato: 144 μM) y dos tratamientos con limitación de fósforo, que para efectos prácticos se asignará como limitado A (fosfato: 18 μM). M) y B limitado (fosfato: 7 μM).

Cada tratamiento se realizó por cuadruplicado y las concentraciones de los demás nutrientes (nitratos, minerales, vitaminas y oligoelementos) se mantuvieron constantes, según el medio F, se debe tener en cuenta que el tratamiento de control se encuentra en condiciones naturales por lo que agregar o disminuir la concentración de Fosforo incurre en un costo adicional. Los resultados se presentan en el siguiente gráfico:

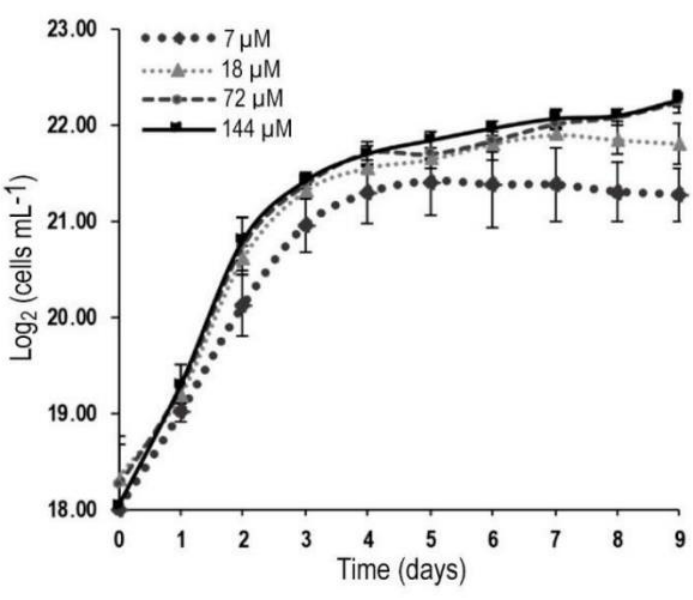


Figura 1. Curvas de crecimiento de Chaetoceros muelleri a diferentes concentraciones de Fósforo (P), (Lovio Fragoso, Hayano Kanashiro, & López Elías, 2019)

1. ¿Qué magnitudes se encuentran presentes en el contexto?
2. Estas magnitudes, ¿son constantes o son variables?
3. En el caso de las magnitudes variables, al modificar el valor de alguna de ellas ¿Eso implica la modificación del valor de alguna otra variable?
4. Describir de manera general el comportamiento que se observa en la gráfica
5. Menciona como varía el crecimiento en los primeros tres días para cada uno de los tratamientos.
6. ¿Cómo es el crecimiento del día 4 al día 6 respecto a los primeros tres días en cada tratamiento?
7. ¿Cómo crece del día 7 al 9, en relación con los días anteriores?
8. ¿El crecimiento es similar en cada periodo de tiempo?
9. ¿Por qué la cantidad de microalgas inicia alrededor de 18 células por mililitro?
10. Determina una expresión analítica para cuantificar el crecimiento diario

$$cantidad\ de\ alga\ de\ un\ día\ determinado - cantidad\ de\ alga\ el\ día\ anterior$$

11. Determinar una expresión analítica para cuantificar el crecimiento en cualquier periodo de tiempo
$$\frac{cantidad\ de\ alga\ final - cantidad\ de\ alga\ inicial}{t_f - t_i}$$
12. Elabora una tabla de valores para cada tratamiento donde representes su crecimiento diario.
13. ¿Cuánto creció diariamente? Comparación a través del cociente o diferencia o ambas son iguales en cada
14. ¿Para qué concentraciones de Fósforo, el crecimiento fue significativamente menor?
15. ¿Cuál es la concentración de Fósforo que tiene el mayor crecimiento de las microalgas en 9 días?
16. ¿Qué concentración de Fósforo recomiendas utilizar? Justifica tu respuesta
17. ¿De qué depende que crezca la cantidad de microalga?