# UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

**Introducción de la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones bajo el enfoque infinitesimal en los cursos de Cálculo diferencial y Cálculo Integral para estudiantes de ingeniería**

Documento predoctoral que presenta

**Daniel Rubal Valencia**

Directora(s) o director(es) de Tesis:

José Ramón Jiménez Rodríguez

Fabio Augusto Milner

Hermosillo, Sonora. Noviembre, 2023

*Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (Conahcyt) por el apoyo que ha brindado para mi formación, con la beca de número* **816229**.

# ÍNDICE

# 1 INTRODUCCIÓN

En este reporte, se presentan los avances que se han logrado hasta el momento en el proyecto de tesis, consistentes en la presentación de los antecedentes sobre la noción de ecuación diferencial ordinaria, la problemática alrededor de ésta y la justificación del enfoque que se busca promover, los que a su vez llevan al planteamiento de los objetivos. A partir de esto, se presentan los elementos teóricos que sustentan al proyecto y la metodología que se sigue para el diseño, puesta en escena y análisis de la propuesta.

En el apartado de antecedentes se profundiza sobre los elementos que dieron origen a las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), resaltando la noción de diferencial y la modelación de fenómenos de la realidad como elementos clave para su desarrollo. Lo anterior se complementa con una revisión bibliográfica sobre estudios desarrollados bajo la perspectiva del enfoque infinitesimal (Dray y Manogue, 2010; Imaz y Moreno, 2010; Ely, 2020; Ely y Samuels, 2021; Verón et al., 2022; Jiménez et al, 2023) y sobre las EDO, en un ambiente donde se promueve la modelación y el uso de la tecnología (Dullius, 2009; Perdomo, 2010; Rodríguez y Quiroz, 2016; Carranza, 2019; Nápoles y Rojas, 2020).

A partir del análisis histórico-epistemológico que se presenta, se esclarece la problemática detectada, la cual esencialmente está centrada en la pérdida de las nociones intuitivas establecidas bajo el enfoque infinitesimal por Newton y Leibniz, en los enfoques que se promueven hoy en día en los cursos de Cálculo para las Ingenierías. Se profundiza sobre este problema, prestando atención a la débil relación existente los cursos de Cálculo Diferencial y Ecuaciones Diferenciales, detectando que la falta de tratamiento que se tiene sobre la noción de diferencial repercute en esa relación y que, por tanto, es necesario considerarla como un elemento esencial en la formación de un puente conceptual entre los cursos. Además, otro elemento que es necesario para atender el problema está asociado con la solución de las EDO, y que con las herramientas que brinda el Cálculo Integral se puede construir un puente procedimental entre este curso y el de Ecuaciones Diferenciales.

Algunos de los elementos que se rescatan en los antecedentes, sobre todo en lo que concierne al análisis de fenómenos de la realidad, están enfocados en el proceso de modelación matemática y el uso de recursos tecnológicos, por lo tanto, es importante tenerlos en consideración como elementos que requieren una justificación sobre su aportación en el proyecto. En el caso de la modelación, se tiene considerado seguir el ciclo de modelación desarrollado por Rodríguez y Quiroz (2016), en el cual partiendo de un fenómeno de la realidad se centran en el desarrollo de un modelo pseudo-concreto, uno físico y uno matemático, cada uno con su respectiva solución e interpretación y la relación que guarda con el otro. Para el uso de la tecnología, se considera lo hecho por Alexopoulos (1999) para desarrollar una función de usuario en la calculadora CAS Voyage200 y un applet de GeoGebra, los cuales serán de utilidad para el cálculo de diferenciales.

A partir de la problemática detectada y los elementos de justificación planteados, se presentan los objetivos del proyecto, partiendo de un objetivo general que engloba todos los elementos a considerar. De ese objetivo se desprenden algunos objetivos específicos que permitirán el logro del que se ha planteado como general.

Con todo lo anterior en mente, se realizó la búsqueda de un marco teórico que sustentara y proveyera elementos que estuvieran orientados hacia las intenciones que se tienen en el proyecto. Primeramente, que se consideraran importante los aspectos históricos-epistemológicos que estuvieran involucrados alrededor del objeto matemático de estudio, en este caso, las EDO. Otro aspecto importante, era que consideraran el factor social como un elemento clave para el desarrollo del aprendizaje. Finalmente, como un aspecto que surgió más del interés propio para ser considerado en el proyecto, era el aspecto cultural y como esto está involucrado en lo que se enmarca en la Matemática Educativa. Todo esto se pudo encontrar en lo que enmarca la Teoría de la Objetivación (TO) desarrollada por Luis Radford.

Para el desarrollo de la propuesta, se presenta la metodología que se tiene contemplado seguir, la cual incluye los elementos a considerar para el diseño de las actividades, las consideraciones para la primera puesta en escena y una breve descripción del análisis. En este apartado, se ha considerado solo cubrir una primera parte de las actividades, debido a que los tiempos estaban limitados. Aun así, para los fines del proyecto era importante implementar esa parte, para poner a prueba si las actividades son pertinentes para el trabajo con el enfoque infinitesimal y la Teoría de la Objetivación.

Finalmente, en el cronograma se agrega lo que se ha desarrollado hasta el momento del proyecto y las intenciones que se tienen a futuro sobre el mismo. También, se menciona el grado de avance que se tiene, respecto al diseño y la implementación de las actividades, lo cual se complementará con un anexo que incluya las actividades desarrolladas.

# 2 ANTECEDENTES

Como profesor participante en la formación de ingenieros, una de las inquietudes que se ha tenido en el proceso de aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales es la forma en cómo son presentadas a los estudiantes, en los cursos en las cuales se introducen y los conocimientos previos que les son exigidos para ello. Entre esas exigencias se les pide a los estudiantes que tengan conocimientos asociados al Cálculo, pero se encuentran con un gran problema, el enfoque que se promueve en la introducción al curso de Ecuaciones Diferenciales no es el mismo enfoque con el que fueron enseñados en sus cursos previos. Particularmente, en el planteamiento de una ecuación diferencial, la cual se representa como un cociente de diferenciales, se les exige que conciban al diferencial como una cantidad que puede ser manipulada y que permite modelar fenómenos asociados con la realidad, y que, esa misma manipulación permite darles solución. Esto rompe totalmente con la concepción que pudieron haberse formado sobre el diferencial, cuando en un curso de Cálculo Diferencial se les ha presentado como un cociente que está restringido a ser un límite, y que, por tanto, no puede ser manipulado como se les exige.

Lo anterior, permite suponer que existe una problemática en la concepción del diferencial. Con la intención de tener un panorama más amplio respecto a esta noción, se presenta un análisis histórico-epistemológico de las Ecuaciones Diferenciales, de manera particular de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), poniendo el foco de atención en su origen, con el fin de determinar la importancia que tuvo la noción de diferencial en su desarrollo y como fue perdiendo relevancia conforme se construían cuestiones teóricas alrededor del Cálculo.

Para complementar lo hecho en el análisis histórico-epistemológico, se presenta un estado del arte, en el que se analizan diversos artículos asociados con la noción de EDO y sus diversas problemáticas. Otro enfoque de búsqueda de información se centra en la noción de diferencial, ya que por lo mencionado previamente es una noción fundamental para los fines de este proyecto. Además, en cada uno de los trabajos considerados se presta atención a los recursos tecnológicos en los que se apoyan y los procesos de modelación que siguen, con el propósito de mostrar lo que se ha desarrollado desde esta perspectiva entorno al diferencial y las EDO, y cuál es el aporte que brindan para el proyecto.

## 2.1 ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LAS EDO

Al considerar que el enfoque que se promueve en los cursos actuales de Cálculo no permite establecer una conexión con el curso de Ecuaciones Diferenciales, es importante visualizar el desarrollo histórico-epistemológico que tuvo la noción de EDO, ya que este permitirá tener elementos específicos que habrá que tomar en cuenta a lo largo del proyecto. Para ello, se consideraron algunos de los planteamientos hechos por diversos matemáticos en los siglos XVII y XVIII, tales como Sir Isaac Newton (1643–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Johann Bernoulli (1667-1748), Jakob Bernoulli (1655-1705), Leonhard Euler (1707-1783) y Augustin Louis Cauchy (1789-1857), con el fin de esclarecer y diferenciar esos momentos en los cuales, por un lado permitieron el desarrollo de la noción de EDO y por otro lado se fue dirigiendo al enfoque que se promueve hoy en día.

En el libro de Jiménez et al. (2022) se pueden encontrar con detalle y profundidad los planteamientos históricos sobre la noción de infinitesimal, donde señalan inicia con los griegos de los años 300 a. C., la cual se retomó dos mil años después en Italia e Inglaterra en el siglo XVI, lo que provocó una disputa entre los jesuitas y los galileanos en la primera, mientras que en la segunda hubo una confrontación entre el filósofo Thomas Hobbes (1588–1679) y el matemático John Wallis (1616–1703). Además, los autores mencionan que la disputa señalada generó que los infinitesimales fueran un tema controvertido y a la par de interés para muchos, en particular para Newton, uno de los desarrolladores del cálculo, el cual formuló basado en las ideas de Wallis, a las que incorporó un formalismo para los indivisibles [1] desarrollados por Bonaventura Cavalieri (1598-1647), lo cual lo llevó a transformar el problema geométrico de encontrar cuadraturas, en un problema analítico de calcular áreas bajo una curva.

Se puede decir que el surgimiento de las ecuaciones diferenciales se dio a la par que el cálculo (Nápoles, 1998), de tal forma que podemos encontrar en los planteamientos realizados por Newton y Leibniz, razonamientos en los cuales estaba implícita una ecuación diferencial, particularmente en aquellos problemas en los cuales era necesario determinar ciertas cuadraturas. Esto se hace evidente en diversos problemas, los cuales en su mayoría se asociaban a la física, cuyos resultados fueron presentados en las *Acta Eroditorum* que se publicaron a finales del siglo XVII y principios del siglo XVIII. Particularmente, los razonamientos de Newton y Leibniz, que se acercaban al planteamiento de ecuaciones diferenciales, estaban asociados con los diferenciales, Nápoles (1998) menciona que el "término *aequatio differentialis* fue primero usado por Leibniz (en un sentido bastante restringido) en 1676" (p. 56). Además, agrega que fue Newton el primero que clasificó las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, estableciendo la relación entre el cociente de diferenciales con una de las variables, que convencionalmente en la actualidad

[1] Jiménez et al (2022) señalan que "indivisible es un término especialmente acuñado por los geómetras del siglo XVII para designar, suponiendo que tal cosa existe, a un objeto geométrico infinitamente pequeño en algún sentido, que se precisa a partir del contexto en que se le aplica" (p. 131)

representamos como $\frac{dy}{dx} = f(x)$, relación que en su momento fue planteada por Newton en términos de fluentes (cantidades acumuladas) y fluxiones (tasas a las que se acumulan), de la forma $\dot{x} = x(t)$.

Aún y cuando se podría decir que Newton y Leibniz desarrollaron los primeros razonamientos asociados a las ecuaciones diferenciales, en la tesis de Henao (2016) se afirma que los principios del surgimiento de las ecuaciones diferenciales, los podemos relacionar con las ideas formuladas por Christiaan Huygens (1629-1695) en 1673, en su obra *Horologium oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae*[2], en la que presenta una demostración geométrica del problema de la curva isócrona asociado con la construcción de un reloj isócrono. En esta obra se puede ver que las estrategias empleadas por Huygens no estaban demasiado alejadas de cómo se conciben hoy en día las ecuaciones diferenciales, de tal forma que podríamos asociarlo a un planteamiento y solución fortuita de una ecuación diferencial en una representación geométrica. Huygens buscaba la forma de una curva que permitiera la construcción de un reloj cuyo péndulo tuviera un periodo de oscilación independiente de la amplitud, encontrando en la cicloide su respuesta, la cual era una curva muy estudiada en esos momentos. Más adelante se desarrolló y presentó una versión analítica, la cual fue establecida por Jakob Bernoulli.

Con la intención de establecer estrategias para el análisis, planteamiento y resolución de diversos problemas de la física, podemos encontrar los primeros acercamientos entre los infinitesimales y las ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, Recalde y Henao (2018) analizan las primeras estrategias en las cuales se emplearon los infinitesimales como herramienta para plantear ecuaciones diferenciales en problemas asociados a la física, tales como la curva isócrona, la tractriz, la catenaria y la braquistócrona. Particularmente, es el problema de la curva isócrona en el que se obtiene por primera vez una solución con el uso de los infinitesimales en términos de como los plantearon Newton y Leibniz. Esta solución fue desarrollada por Jakob Bernoulli, quien fue estudiante de Leibniz, y sus estrategias se basaban en los desarrollos de su mentor, de tal forma que podemos ver en el *Acta Eroditorum* de 1690 una prueba analítica del planteamiento y solución de una ecuación diferencial ordinaria para el caso de la isócrona. Sabiendo que existía una demostración geométrica para este problema, establecida por Huygens, de manera analítica y con el sustento del cálculo recién desarrollado (en particular, las ideas de Leibniz), Jakob Bernoulli formuló un planteamiento geométrico del problema, como se puede observar en la Figura 1, pero desarrollando un análisis algebraico, proponiendo la ecuación diferencial $dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}$, en donde $a$ y $b$ son consideradas como constantes.

Fue en esa ecuación diferencial en la cual Bernoulli desarrolló la estrategia que hoy en día conocemos como el *método de separación de variables* (Bernoulli, 1690), el cual se puede

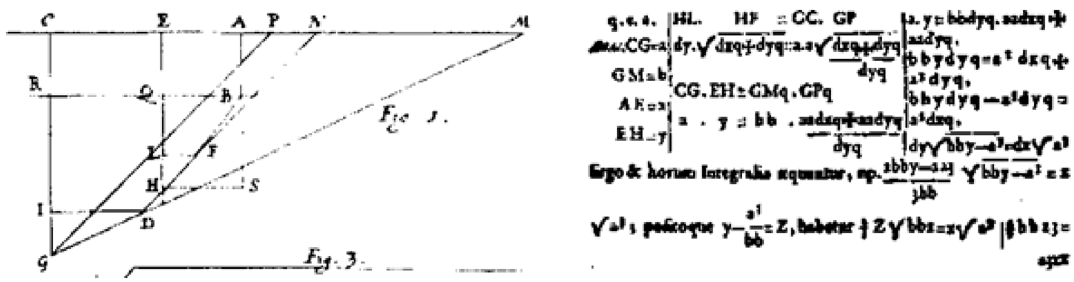
---

[2] Traducción al español: *El reloj de péndulo: o demostraciones geométricas relativas al movimiento de los péndulos aplicadas a los relojes*

visualizar en la segunda imagen de la Figura 1. Además, se señala que fue en ese proceso donde por primera vez se utilizó el término *integrar* en una publicación (Nápoles, 1998). La solución coincide con lo planteado por Huygens, es decir, es efectivamente una cicloide, en este caso, representada por la ecuación algebraica $\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}a^3\sqrt{b^2y-a^3}=x\sqrt{a^3}$. Respecto a ello, Kline (1992) señala que Leibniz realizó una prueba para este problema, aunque no reporta la estrategia que éste empleó en algún documento.

**Figura 1.**

*Representación geométrica del planteamiento para la curva isócrona y prueba algebraica desarrolladas por Jakob Bernoulli.*



Nota: estas representaciones fueron extraídas del documento de Bernoulli (1690).

Para el problema de la tractriz que se aborda con más detalle en Henao (2016), Leibniz plantea una solución utilizando las estrategias geométricas empleadas previamente y apoyándose en semejanza de triángulos, la cual involucra el uso de infinitesimales. En este problema se buscaba determinar la curva que recorría cierto objeto al ser arrastrado por encima de un plano horizontal mediante una cuerda con longitud constante, de tal manera que el extremo libre de la cuerda se mueve sobre una línea recta sobre el plano. A partir de una curva dada, la cual será denotada por $C$, y una recta tangente $r$ a esta curva en un punto específico $P$, y trazando paralelas a los ejes, Leibniz consideraba un triángulo rectángulo generado a partir de la tangente y de la paralela al eje vertical, en el cual se genera en su interior un triángulo rectángulo semejante que involucraba a los diferenciales $dx$ y $dy$ como sus catetos, considerados a su vez como cantidades infinitamente pequeñas. En la Figura 2 se muestra un bosquejo de este planteamiento.

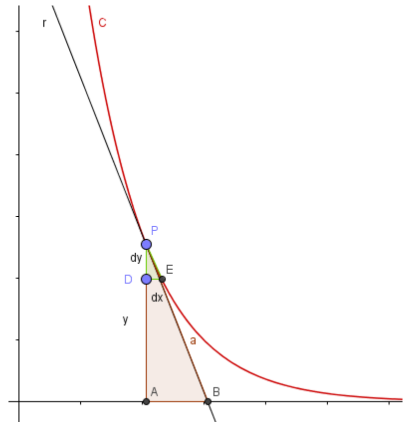
Utilizando semejanza de triángulos es como se llega al planteamiento de una ecuación diferencial, dado que el triángulo ABP es semejante al triángulo DEP, por lo tanto, si contemplamos la semejanza de los catetos, tendríamos que

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

lo cual representa una ecuación diferencial ordinaria, la cual de igual forma que en el caso de la curva isócrona, se puede resolver mediante el uso del método variables separables.

**Figura 2.**

*Planteamiento geométrico de Leibniz.*




Nota: En este gráfico, se ha exagerado la elaboración del triángulo con los difrenciales para hacerlo visible y entender de donde proviene el modelo algebraico propuesto por Leibniz, ya que corresponde a un triángulo infinitesimal.

Para entender a qué se hace referencia cuando se habla del método de separación de variables se presenta a continuación el desarrollo para la ecuación diferencial planteada por Leibniz, cuya finalidad es poner en contexto el proceso que ayudará a comprender cuando se hace la aseveración a la concepción de los diferenciales como cantidades manipulables.

La separación de variables consiste en representar en cada lado de la igualdad una variable distinta. Aprovechando que, en el enfoque infinitesimal el diferencial es una cantidad, se pueden usar las reglas algebraicas de despeje en ella. En la ecuación anterior, ésto quedaría representado de la siguiente forma

$$\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = -dx$$

Para la solución, se tienen que emplear las herramientas que provee el Cálculo Integral.

Otros dos problemas que fueron abordados por Newton, Leibniz y los hermanos Bernoulli, fueron el de la catenaria y el de la braquistócrona, los cuales se detallan en Henao (2016). La autora señala que el primero de ellos, también denominado *el problema del cable colgante*, fue planteado por Jakob Bernoulli a los otros matemáticos, y consistía en encontrar una curva que modelara el comportamiento de una cuerda flexible e inextensible sujeta rígidamente por sus dos extremos. Respecto a ello, Kline (1992) menciona que Leibniz, Huygens y Johann Bernoulli resolvieron este problema, solo que la solución de Huygens era geométrica y confusa, mientras que la de Bernoulli es la que podemos encontrar hoy en día en los textos de mecánica y estaba basada en el cálculo infinitesimal, conduciendo a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$$

donde $s$ es la longitud del arco comprendido entre dos puntos de la curva generada por el cable, y $c$ depende del peso por unidad de longitud de la cuerda. Lo cual lleva a la solución conocida $y = c\cosh\left(\frac{x}{c}\right)$, a la cual Leibniz también llegó utilizando una estrategia similar al problema de la tractriz.

El segundo problema, el de la braquistócrona, fue propuesto por Johann Bernoulli en 1696 en el *Acta Eroditorum* como un reto, que consistía en determinar la curva por la cual un móvil a partir de su propio peso se desplace de un punto a otro en el menor tiempo posible. En este caso, como se menciona en Sánchez y Valdés (2008) fue Leibniz el único en plantear una solución, pero él mismo solicitó a Bernoulli que ampliara el plazo para dar a otros la oportunidad de resolver el problema, lo cual permitió que Jaques Bernoulli, L'Hopital y un autor inglés (el cual Bernoulli no dudó en señalar que era Newton), dieran respuesta a este problema. Respecto a ello, Henao (2016) menciona que "Bernoulli llega a la conclusión que la ecuación diferencial que rige este tipo de movimiento es $dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$" (p. 48), la cual se puede resolver mediante el método de separación de variables y llegar a la conclusión que la curva buscada es la cicloide.

Recalde y Henao (2018) consideran como un obstáculo epistemológico[3] a esta forma de trabajar la modelación sin un sustento teórico, ya que los resultados obtenidos se justificaban solamente por el hecho de que funcionaban, pero no tenían un argumento riguroso que afianzara las ideas planteadas por los diversos matemáticos.

En Nápoles (1998) se señala que Johann Bernoulli en 1692 encontró otro método que en la actualidad sigue vigente, el del *factor integrante*, el cual desarrolló a partir del hecho de que no podía aplicar por completo el método de separación de variables para la ecuación diferencial $\alpha x dy - y dx = 0$, en la cual se consigue separar las variables, pero no se podía integrar debido a que aún no se introducían los logaritmos.

Kline (1992), señala que para 1740 ya se habían establecido todos los métodos conocidos para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden, pese a lo cual Nápoles y Negrón (2002) mencionan que "los métodos eran incompletos y la teoría general de las ecuaciones diferenciales, a comienzos del siglo XVIII no podía ser propuesta" (p. 37). Lo cual coincide con lo mencionado previamente por Recalde y Henao (2018), respecto a que esa falta de un desarrollo teórico pudiera considerarse como un obstáculo epistemológico. Respecto a ello, se menciona que Euler en su obra "*Intitutiones Calculi Integralis*[4]", sistematiza todo lo desarrollado previamente, de tal forma que se puede encontrar lo que sería la primera teoría relacionada con las ecuaciones diferenciales ordinarias (Nápoles y Negrón, 2002). Los autores argumentan que en esta obra se pueden encontrar los contenidos que hoy en día se

[3] Los autores señalan que "en este artículo se toma como referencia la noción de obstáculo epistemológico expuesta por Guy Brousseau en (Brousseau, 1998)" p. (66).
[4] Traducción al español: Fundamentos del cálculo integral

consignan usualmente en un primer curso de Ecuaciones Diferenciales, comenzando con ecuaciones diferenciales de primer orden y los diferentes métodos para resolverlas, así como los métodos de variables separables, exactas, etc., para después pasar a las ecuaciones diferenciales de orden superior. Además, uno de los elementos que destacan Nápoles y Negrón (2002) en este texto es la "forma de conceptualizar las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la expresión $\frac{dy}{dx}$ significa para Euler un cociente entre diferenciales y no nuestra derivada actual" (p. 37); como se puede ver, Euler concibe el cociente de la misma forma en la que Newton y Leibniz lo hacían.

Con todo el desarrollo formulado previamente, se agrega en Nápoles y Negrón (2002) que el concepto de ecuación diferencial se mantiene relacionado con el concepto de diferencial hasta alrededor de 1821, cuando Cauchy le asigna el nombre de *derivada*. En los libros de textos actuales se mantiene vigente esta versión establecida por Cauchy, "aunque cuando se exponen los métodos de resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden se usa la primera concepción sin explicitarla (es decir, la derivada ya no es la derivada, sino un cociente entre diferenciales)" (p. 47). En ese sentido, podemos notar dificultades asociadas a la noción de diferencial en la incorporación de estas dos versiones en los libros de texto, y por tanto en cómo se presenta la idea de diferencial a los estudiantes en distintos cursos universitarios, tal como lo mencionan Recalde y Henao (2018), quienes sostienen que es común que un curso asociado a matemáticas se presenta la versión establecida por Cauchy, pero en cursos que se relacionan con la física se suele trabajar con las estrategias infinitesimales planteadas por Newton y Leibniz.

Por último, al referirse a las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, Nápoles y Negrón (2002) mencionan que se han dado en tres escenarios, el algebraico, el numérico y el geométrico, donde cada uno tiene sus propios procedimientos. Para ello, agregan que es habitual que, de los tres, el que suele aparecer en los libros de texto es el algebraico, mientras que el numérico solo aparece en los cursos de Análisis Numérico, y que el caso de las soluciones geométricas, a pesar de ser uno de los sustentos a los que más se recurría en sus inicios y tener más de 100 años de antigüedad, solo se retoma en el tratamiento de isoclinas y el campo de pendientes. Respecto a ello, los autores señalan que, al presentar las soluciones de forma aislada en diferentes cursos, los estudiantes presenten dificultades para establecer conexiones entre estos tres escenarios.

Con lo desarrollado aquí, se puede percibir que hay dos elementos fundamentales en el planteamiento y desarrollo de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

a) El primero de ellos es el surgimiento de la geometría analítica establecida por Descartes, ya que en los problemas físicos que se abordaron en los siglos XVI y XVII, ésta era una representación de suma importancia para poder plantear y dar respuesta a esos problemas.
b) El otro elemento importante fue el trabajo con los infinitesimales, en particular con el uso de diferenciales, lo cual permitió traducir los problemas físicos del contexto

real a un contexto puramente matemático, donde la modelación algebraica fue esencial, de tal forma que podemos ver la importancia de comprender la noción de diferencial y el planteamiento de problemas en una representación geométrica, con el fin de promover el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Con lo anterior, la orientación de los cursos previos a Ecuaciones Diferenciales, como los de Cálculo, deberían promover la relevancia del planteamiento geométrico para la modelación de problemas de la realidad y la comprensión de una noción tan importante como la de diferencial. En ese sentido, Recalde y Henao (2018) mencionan que “el planteamiento de problemas de la física y su posterior modelación y solución exige que los estudiantes hagan uso de la intuición y de estrategias heurísticas en las que se privilegia el razonamiento inductivo” (p. 68), por lo cual agregan que el surgimiento de las técnicas de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias proviene de la modelación de problemas. Además, agregan que “la enseñanza de las ecuaciones diferenciales debería incluir la reflexión y discusión del concepto de diferencial” (p. 68), añadiendo que usualmente en los cursos de Cálculo y de Ecuaciones Diferenciales no se estudia este concepto. Con ésto, se concluye el análisis histórico-epistemológico asociado con el surgimiento de las ecuaciones diferenciales ordinarias y su relación con los infinitesimales.

## 2.2 ESTADO DEL ARTE

Aquí se profundizará sobre diversos artículos que analizan temáticas similares a las que se desarrollan en este proyecto, tales como infinitesimales, ecuaciones diferenciales ordinarias, modelación, uso de tecnología y medios semióticos, los cuales en cierta medida fueron considerados en el análisis histórico-epistemológico presentado en el apartado anterior. En ese sentido, lo primero que se podrá observar es que no hay artículos desarrollados sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de los diferenciales desde la perspectiva de la Matemática Educativa, por lo cual se considera que este proyecto puede aportar en esa dirección.

Sabiendo lo anterior, se concentran los esfuerzos de presentar artículos que involucran la noción de diferencial desde la perspectiva del cálculo y en el caso de las EDO, se centrará en los diversos trabajos que se han desarrollado, resaltando la importancia de la profundidad de esta noción matemática desde un punto de vista educativo, sobre todo aquellos realizados en los últimos años y en los cuales se involucren la importancia de la modelación matemática y del uso de la tecnología, debido a que al considerar el desarrollo de las EDO se puede observar que la modelación matemática de fenómenos de la realidad fue un proceso fundamental para su desarrollo y relación el diferencial, y que el uso de tecnología puede proveer una herramienta que ayude a establecer esta relación.

### 2.2.1 Sobre las EDO

En esta sección, se resumen algunas ideas de artículos asociados con la noción de ecuación diferencial ordinaria, para los cuales se han considerado aquellos que tienen una relación más cercana con la intervención que aquí se desarrollará (Nápoles, 2003; Camacho, Perdomo y Santos-Trigo, 2009; Dullius, 2009; Hernández, 2009; Imaz y Moreno, 2010; Perdomo, 2010; Barrera, Tellez, León y Amaya, 2012; Rodríguez y Quiroz, 2016; Carranza, 2019; Nápoles y Rojas, 2020), considerando la importancia de la modelación matemática, el uso de la tecnología y el trabajo con diferentes medios semióticos, como medios de apoyo para motivar la comprensión de la noción de ecuación diferencial ordinaria.

Entre los problemas asociados a la comprensión de las ecuaciones diferenciales, se pueden encontrar los que mencionan que, en el trabajo en los cursos de Ecuaciones Diferenciales, se promueve el desarrollo a partir de lo analítico. Nápoles (2003) menciona que los conceptos que están alrededor de las EDO se presentan y disfrazan con una fórmula o algoritmo, lo cual dificulta la comprensión de éstos. Además, Rodríguez y Quiroz (2016) señalan que "la enseñanza usual de un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) se limita a la presentación de una serie de procedimientos analíticos que den respuesta a problemas matemáticos sin contexto" (p. 101). Podría decirse que darle ese protagonismo a lo analítico, incide en los problemas que pueden tener los estudiantes en el trabajo con otros tipos de representación, de tal forma que como señala Hernández (2009), aunque los estudiantes pueden ser conscientes de lo que realizan algebraicamente, cuando se presenta la representación geométrica, en particular en las soluciones de las EDO, no son capaces de comprender el comportamiento gráfico. Incluso, Perdomo (2010) agrega que cuando se les plantea un problema que requiere un planteamiento gráfico, los estudiantes suelen mostrar rechazo, sobre todo cuando se les introduce un nuevo concepto relacionado con las EDO.

Una relación que resulta problemática en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias es la que se éstas tienen con el concepto de derivada, de tal forma que es necesario que se tenga claridad en este último para poder generar un puente conceptual entre estas nociones. Camacho, Perdomo y Santos Trigo (2009) hacen una aseveración a lo anterior, para lo cual agregan que es importante que se comprenda el concepto de derivada y aprovechar los distintos tipos de representación de éstas, para establecer una relación con las EDO. Además, Perdomo (2010) reporta que los estudiantes tienen dificultades para relacionar la noción de EDO con la de derivada, sobre todo si se trabaja con un recurso tecnológico. De igual forma, en el trabajo realizado en Rubal (2018) se pudo constatar que los estudiantes presentan dificultades para poder realizar una conexión entre la noción de derivada y de las EDO, lo que, a su vez generaba que tuvieran problemas para trabajar con distintos tipos de representación. Carranza (2019) amplía aún más el foco hacia esta problemática, realizando un análisis entre el curso de Cálculo 1 y el de Ecuaciones Diferenciales e incluso el curso de Física 1, señalando que lo que se presenta en Cálculo I no tiene relación con lo presentado en los otros dos cursos, pues mientras en este curso la parte de derivadas suele presentarse en las últimas unidades, el de Física I trabaja en sus primeras unidades con nociones que están directamente relacionadas con la derivada, y que incluso la forma de trabajar en Física I podría estar más relacionada con un curso de Ecuaciones Diferenciales que de Cálculo I.

El protagonismo de lo analítico y la desconexión entre la noción de derivada y de EDO, son dos problemas que los señala Dullius (2009) mencionando que en los cursos de Ecuaciones Diferenciales se le ha dado una mayor importancia a la representación algebraica, lo que provoca que los estudiantes lleguen a dominar los métodos que se les presentan, pero no las concepciones que hay detrás de ellos. En ese sentido, la autora señala que los estudiantes pueden evidenciar que las EDO están relacionadas con las derivadas e integrales, pero no logran establecer una relación conceptual.

Aun con las problemáticas señaladas, un elemento que se destaca en algunos de los trabajos que se presentan (Dullius, 2009; Perdomo, 2010; Rodríguez y Quiroz, 2016; Nápoles y Rojas, 2020), es el uso de tecnología como un recurso de apoyo que permite introducir la noción de EDO y ayuda a facilitar su aprendizaje. En Rubal (2018) se concluye que el uso de la tecnología, en particular de applets de GeoGebra, potencializa el aprendizaje de los estudiantes, al manipular las herramientas del software y visualizar el comportamiento gráfico de las EDO. Además, utilizar herramientas tecnológicas como GeoGebra, ayuda a analizar las ecuaciones diferenciales y sus soluciones, lo cual facilita el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Perdomo, 2010). En su trabajo, Dullius (2019) señala que el uso de la tecnología como recurso, ayudó a los estudiantes a tener una mayor comprensión sobre las ecuaciones diferenciales. Siendo un poco más generales por el desarrollo de su trabajo, Rodríguez y Quiroz (2016) añaden que “la tecnología proporciona un apoyo para la vivencia de experiencias de trabajo en contextos de áreas ingenieriles diversos donde se aplican ecuaciones diferenciales en el mismo salón de clase” (p. 119), lo cual a su vez resulta de motivación para los estudiantes.

Aun con lo anterior, Barrera, Tellez, León y Amaya, (2012), señalan que, aunque los estudiantes reflexionan en lo que realizan con el uso de recursos tecnológicos en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, muestran dificultades para manipular la misma herramienta, la mayoría de ellas asociadas a las mismas características del recurso. Agregan que, el uso de la tecnología permite que los estudiantes puedan conectar dos representaciones, en este caso, la gráfica y tabular, aunque lo hacen de forma inconsciente.

Otro elemento que ha sido importante en varias de las referencias consideradas, es la modelación como un proceso importante para la asociación entre las EDO y los fenómenos de la realidad. Rodríguez y Quiroz (2016) conciben la modelación matemática como “un proceso cíclico que vincula el dominio real con el matemático” (p. 104). En el desarrollo de su propio ciclo de modelación, las autoras involucran un modelo pseudo-concreto, uno físico y uno matemático, el cual aplican para el diseño de una situación para el estudio de la carga y descarga de un capacitor en un circuito RC, enfocada en estudiantes de ingeniería, en ella aparece la modelación de esta situación a partir de una EDO y su respectiva solución. En cambio, Nápoles y Rojas (2020) consideran la modelación que promueve la Educación Matemática Realista (EMR), la cual se basa en un proceso de matematización progresiva donde encontramos la matematización horizontal que está basada en el análisis del fenómeno de estudio y la matematización vertical en la cual se introduce y trabaja dentro de lo matemático. Particularmente, los autores plantean una actividad asociada con el COVID-19, en la cual se considera el modelo establecido para las personas susceptibles a infectarse, los infectados y los recuperados (SIR). Por su parte, Carranza (2019) utiliza la modelación de un fenómeno en movimiento, con la cual analiza si este fenómeno es útil para identificar la noción de variación en las ecuaciones diferenciales.

Pero, no siempre se puede promover el trabajo con algún tipo de modelación matemática, ya que, en algunos casos el no tener algún contexto asociado a la realidad puede causar dificultades. Respecto a ello, Hernández (2009) agrega que los problemas que suelen tener los estudiantes en el trabajo con diferentes tipos de representación podrían deberse a la descontextualización que se tiene en el curso de Ecuaciones Diferenciales.

Un proyecto que ha considerado importante abordar todos los elementos que previamente se han mencionado es el Inquiry-Oriented Differential Equations (IODE), desarrollado por varios autores y colaboradores, que pueden ser identificados en el artículo de Rasmussen y Kwon (2007). Hoy en día cuentan con una página específica (https://iode.sdsu.edu/) a la cual se puede ingresar para conocer más de lo que ellos desarrollan. Basados en las ideas constructivistas de la Educación Matemática Realista (EMR) desarrollada por Hans Freudenthal, contemplan los siguientes objetivos:

- Que los estudiantes reinventen muchas de las ideas y métodos matemáticos fundamentales para analizar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.
- Buscan tareas desafiantes, que reflejen situaciones reales, que sirvan de punto de partida para que los estudiantes comiencen a indagar.
- Debe existir un balance entre el tratamiento de los enfoques analítico, numérico y gráfico. Estos enfoques deben surgir de forma más o menos simultánea en las realizaciones de los estudiantes. (Perdomo, 2010)

Particularmente, están enfocados en el desarrollo de un curso de Ecuaciones Diferenciales que considere estos elementos mencionados como parte fundamental del desarrollo del aprendizaje que debe promover el curso. Para más detalles se puede consultar la tesis Rubal (2018), en la cual se detallan más elementos importantes sobre este proyecto.

Una coincidencia que podemos encontrar en las conclusiones de la mayoría de los trabajos revisados, es la importancia que tiene el uso de tecnología y la modelación en el trabajo con las EDO. Nápoles y Rojas (2020) concluyen que el proceso de enseñanza y el de aprendizaje de la "resolución de problemas intramatemáticos o extramatemáticos (con modelos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias) se perfecciona y se enriquece con los aportes que brinda la integración de la modelación, las TIC, la visualización matemática y la Educación Matemática Realista" (p. 12). Además, Rodríguez y Quiroz (2016) concluyen que utilizar como estrategia didáctica la modelación matemática "permitió el acercamiento de los alumnos a problemas en contexto donde es posible la utilización de las matemáticas para dar respuesta a fenómenos propios de la ingeniería" (p. 119) y que, utilizar diversos recursos tecnológicos potencializa el proceso de modelación. Finalmente, Carranza (2019) rescata la importancia de analizar la relación entre los distintos cursos alrededor de las ecuaciones diferenciales, y de cómo proponer una articulación, a partir del análisis de un fenómeno de movimiento, con el apoyo de la modelación matemática y la experimentación digital.

Además, otro elemento que es señalado por diversos autores (Perdomo, 2010; Rodríguez y Quiroz, 2016; Nápoles y Rojas, 2020), como un factor importante en el aprendizaje de los estudiantes de ingeniería, es la situación real con la que trabajan, ya que la intención de la intervención a desarrollar es llevar situaciones con las cuales se sientan identificados, y que a su vez estén apegadas a sus campos de estudio, de tal forma que se refuerce la relación de la matemática con su entorno más próximo.

Es importante señalar que, en todas las revisiones bibliográficas que se presentan en este apartado se promueve el trabajo con el enfoque de enseñanza tradicional del cálculo, que es el de límites, y por tanto, las problemáticas asociadas con la relación entre el cálculo y las ecuaciones diferenciales, podrían deberse por promover este enfoque. Es decir, en ningún momento se hace referencia al diferencial como una noción fundamental para la introducción de las EDO y la modelación de situaciones de la realidad con éstas. En el siguiente apartado, se profundiza sobre la importancia de la noción de diferencial, realizando una documentación de trabajos que van sobre el enfoque en el que se asentará la propuesta, el enfoque infinitesimal.

### 2.2.2 Sobre los infinitesimales

Se han seleccionado varios artículos relacionados con la noción de diferencial, con el fin de rescatar la importancia del trabajo con esta noción y lo que permitiría desarrollar si en el aula se profundizara sobre ella. Algunos trabajos que presentan los infinitesimales con un enfoque similar al que se utilizará en este proyecto, son los libros desarrollados por Imaz y Moreno (2010) y Jiménez et al (2022), y los artículos de Dray y Manogue (2010), Ely (2020), Ely y Samuels (2021) y Verón et al. (2022).

Un elemento importante que se llega a mencionar en la mayoría de estos trabajos es que el enfoque infinitesimal puede considerarse como una ruta alternativa para el desarrollo del cálculo. Particularmente, Imaz y Moreno (2010) desarrollan un libro en el cual se presenta un análisis exhaustivo sobre el desarrollo del cálculo, enfocado principalmente sobre la noción de infinitesimales. Los autores se basan mayormente en las ideas establecidas por Leibniz, que retoma Euler, respecto al uso de los infinitesimales en el tratamiento de la derivada y la integral. Además, la intención de la reconceptualización de la enseñanza del cálculo es posible si el enfoque que se promueve es uno distinto del tradicional, por ejemplo, el enfoque infinitesimal, donde el diferencial es considerado como una cantidad manipulable, y que juega un papel primordial en el desarrollo de ideas de este enfoque (Jiménez et al, 2022).

En Ely (2020) se retoma lo anterior, ya que señala que en el cálculo diferencial el objeto de estudio fundamental debería ser el diferencial, no la derivada. A partir de esto, el autor presenta algunas ideas de cómo los diferenciales pudieran ser considerados para el caso de las derivadas y de las integrales, considerando para las primeras, cambios infinitamente pequeños sobre una variable específica. Mientras que, en el caso de las integrales, se les considera como la suma de todas las diferencias para un intervalo específico. Con esto, el autor señala que esta visión permitiría establecer una relación entre las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones acumuladas a partir de los diferenciales y, por otro lado, que el trabajo con la regla de la cadena y la derivación implícita surja de forma natural.

Uno de los problemas que se señala en estas publicaciones, es que se confunde lo que se presenta en un curso de Cálculo, con el que se consideraría como uno de Análisis, sobre todo por la formalidad que se asume en el primero y sobre el que se desarrollan las nociones involucradas y en el que además, el enfoque infinitesimal ya no tiene relevancia. Imaz y Moreno (2010) señalan que Cauchy introdujo el rigor al Cálculo con el fin de asentar bases teóricas al desarrollo establecido con el enfoque infinitesimal, todo esto lográndolo mediante la definición de límite. Los autores argumentan que a partir de estas ideas establecidas por Cauchy, se fueron dejando de lado las versiones preliminares asociadas a los infinitesimales, de tal manera que ellos los asocian con distintos síndromes, en particular el de Klein y el de Cantor, el primero asociado a "excesos de rigor debido a una confusión contagiosa entre el Cálculo y el Análisis" (p. 59) y el segundo la definen como un rechazo hacia los infinitesimales, de tal forma que mencionan que Cantor los nombra como "bacilos coléricos de la matemática".

Algunos de estos artículos, retoman la importancia de la formación de ingenieros y consideran que, formarse una concepción adecuada de los diferenciales podría convertirse en una herramienta útil para los estudiantes en los cursos de Cálculo y los cursos prácticos que están asociados a sus campos de estudio. El poder trabajar con los diferenciales de tal forma que los estudiantes puedan concebirlos como cantidades manipulables, les podría ser de utilidad para desarrollar habilidades asociadas con la modelación y que podrían aplicar en fenómenos de estudio que sean de su interés o el de su ingeniería. En ese sentido, Ely y Samuels (2021) señalan que "es perfectamente confiable manipular los diferenciales algebraicamente como si fueran cantidades, un hecho que no es un secreto para los ingenieros y científicos, ni para varios siglos de generaciones de practicantes del Cálculo diferencial" (op. cit., p. 2). Por su parte, Dray y Manogue (2010) enfatizan el hecho de que "manipulaciones como éstas son típicas de la forma en que los científicos e ingenieros usan el Cálculo en la práctica, pero rara vez se las enseña en los cursos..." (p. 2).

Verón et al (2022) presentan una investigación en la cual hacen varios cuestionamientos a estudiantes de ingeniería, éstos estaban asociados con el diferencial de la masa de un fenómeno de la realidad, con la intención de poder analizar a cuál de los conceptos del diferencial pueden estar relacionados. Particularmente, en el estudio consideran la versión de diferencial establecida por Leibniz, Cauchy, Frechet y la del análisis no estándar. Los autores señalan que, las respuestas que obtuvieron, en su mayoría se podían asociar con la concepción establecida por Leibniz, en la cual el elemento central es el diferencial como cantidad infinitesimal; en menor medida sus respuestas se asemejan a la establecida por Cauchy, donde el diferencial está restringido a un cociente de diferenciales; mientras que, en un solo caso a la versión de Frechet y ninguna a la del análisis no estándar. Respecto a lo que presentan en su artículo, los autores concluyen que "los resultados motivan a pensar que el formador de ingenieros debe ser capaz de crear oportunidades para que los estudiantes movilicen los distintos significados parciales del concepto de diferencial y sus interconexiones" (p. 93).

Algunos de los artículos (Dray y Manogue, 2010; Imaz y Moreno, 2010; Ely, 2020) muestran que tanto los cursos de Cálculo Diferencial como el de Cálculo Integral para ingenieros, podrían desarrollarse a partir del enfoque infinitesimal, y que particularmente, la versión de Leibniz sería ideal para ello (Verón et al, 2022). En ese sentido, este proyecto tiene la intención de seguir una ruta didáctica en la cual el enfoque infinitesimal establecido por Leibniz sea el que permita introducir la noción de EDO, a partir del trabajo matemático con los diferenciales. Esta visión de los autores abre una brecha a la que muchos se han resistido a lo largo del tiempo, sobre todo basados en lo que denominan como el síndrome de Cantor, es por ello que sus argumentos, aunados a los que se han planteado aquí previamente en el análisis histórico-epistemológico, nos muestran la importancia de invertir tiempo en esa visión que tenían Newton, Leibniz, Euler y otros autores respecto a los infinitesimales, sobre todo si pensamos en el hecho de que muchos de los estudiantes que llevan sus cursos de matemáticas son de ingeniería, los que a su vez son el objetivo de este proyecto, y quienes ocupan la matemática a un nivel más práctico que teórico, justamente en la visión representada en sus inicios por Newton y Leibniz y retomada más adelante por Euler, y no tanto la visión de Cauchy, la cual será considerada pero sin convertirla en el enfoque dominante.

Es importante señalar que, las ideas desarrolladas en la cual el diferencial se asume como una cantidad infinitamente pequeña, se retoma de las ideas de Robinson (1974) sobre los números hiperreales. Particularmente, Imaz y Moreno (2010) profundizan sobre estas ideas, de tal forma que definen sus características y como se conformarían actualmente si los consideráramos de esa forma, argumentando con nociones importantes del cálculo como la continuidad, la derivada y la integral de una función.

Podemos ver que existen trabajos que tienen la intención de promover la noción de diferencial, y que, aunque en algunos casos no muestran intención de centrarse específicamente en el enfoque infinitesimal propuesto por Leibniz, se puede conjeturar que éste pudiera ser un enfoque para considerar en el aprendizaje de los estudiantes. Además, en pocos de los trabajos presentados aparece la noción de ecuación diferencial ordinaria, solo se señala como en Ely (2020).

Con esto, se puede concluir que de la revisión bibliográfica sobre las EDO arroja que el diferencial no está siendo considerado como una noción importante en su introducción y desarrollo. Por otro lado, en la documentación sobre el diferencial no se señala con debida profundidad sobre las EDO. Por tanto, es importante establecer una relación entre estas dos nociones, debido a que, como pudimos ver en el apartado histórico-epistemológico es fundamental, sobre todo para el surgimiento de las EDO, en ese sentido este proyecto se orientará hacia esa dirección.

# 3 PROBLEMÁTICA Y JUSTIFICACIÓN

En este apartado, se profundiza sobre la problemática detectada, considerando los elementos fundamentales que inciden sobre ella. Primeramente, la atención se dirigirá a la débil relación que existe hoy en día entre los cursos de Cálculo Diferencial y el de Ecuaciones Diferenciales, y cómo es que hay una diferencia notoria sobre la forma en que se abordan. Lo anterior nos lleva a notar la escasa participación de una noción fundamental en el surgimiento de las EDO, el diferencial, una noción que puede ayudar a generar un puente conceptual entre dichos cursos. Además, es importante considerar el elemento que cierra este puente conceptual y permite construir un puente procedimental que nos lleva a encontrar soluciones para las EDO, la integral, en la cual el diferencial sólo es presentado en los cursos de Cálculo Integral como un factor que determina sobre qué variable se debe integrar y no en términos de su origen fenomenológico.

Para abordar esta problemática, se consideran aquellos elementos fundamentales que permitirán introducir la noción de EDO bajo el enfoque infinitesimal. En el desarrollo histórico-epistemológico de las EDO, los contextos extra-matemáticos fueron fundamentales, por lo tanto, es importante considerar situaciones en las cuales estén involucradas varias magnitudes variables en el contexto de las ingenierías. Una vez realizado este proceso, la identificación y clasificación de las distintas magnitudes asociadas al contexto permitirá llegar a otro momento que será de gran importancia en el proceso de conectar el cálculo y las ecuaciones diferenciales, la modelación matemática, para la cual el diferencial tendrá gran relevancia. Además, se considera que un factor fundamental para que todo este proceso se lleve a cabo de una forma en la que los estudiantes siempre estén inmersos es la experimentación, para la cual será necesario el uso de recursos tecnológicos que permitan a los estudiantes poder realizar una toma de datos reales, que a su vez con apoyo de tecnología digital puedan analizar y reflexionar para poder plantear una EDO que modele el fenómeno analizado, y que en ese mismo proceso sea resuelta.

## 3.1 EL PROBLEMA

### 3.1.1 El cálculo y las ecuaciones diferenciales, tan cerca y tan lejos

El desarrollo histórico de las EDO permite evidenciar que la forma en la que éstas surgieron fue a partir de fenómenos asociados a la realidad, y que el análisis geométrico fue el que permitió plantearlas y solucionarlas. Lo anterior se contrapone con lo que hoy en día se presenta en los cursos "tradicionales" de Ecuaciones Diferenciales para ingeniería, ya que como menciona Carranza (2019) al analizar los planes de estudio y a la bibliografía que en ellos se presenta, podemos encontrar que se promueve en una primera instancia el trabajar con los métodos algebraicos, y una vez que éstos son desarrollados en el aula es cuando se empieza a trabajar con fenómenos de la realidad, lo cual predetermina el hecho de que las aplicaciones estén influenciadas por las estrategias seguidas en la presentación metódica de las EDO. Incluso si consultamos un poco más atrás en el currículo y planes de estudio, donde en teoría (aunque no explícitamente) aparecen primeramente las ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, en un curso de Cálculo Diferencial es evidente que por la versión (de Cauchy) en la que se presenta la derivada, a partir de límites, es difícil el que las EDO puedan ser introducidas, ya que este enfoque restringe la manipulación de los diferenciales.

Con lo anterior, y por lo que se puede ver en los planes de estudio de física, podría decirse que las EDO tienen una relación más próxima con ésta, que propiamente en donde deberían ser presentadas, es decir, el cálculo. Esto concuerda con lo que señala Carranza (2019), respecto a que es usual que en los inicios de un primer curso de física (el cual suele llevarse a la par del primer curso de cálculo) se trabaje con las definiciones de velocidad y aceleración, las cuales parten de la concepción de diferencial, en términos de cómo lo plantearon Newton y Leibniz, y donde podría decirse que se considera,n las EDO con condiciones iniciales, mientras que en un curso de cálculo la derivada suele ser presentada más tarde en la versión más formal establecida por Cauchy.

Siguiendo con la idea anterior, parecería contradictorio el hecho de que en un curso de Cálculo Diferencial sea presentada la derivada a partir de límites, la cual tiene fuertes restricciones sobre la manipulación de los diferenciales, y que en un curso de Ecuaciones Diferenciales, en las primeras unidades donde se presentan los métodos de solución, los diferenciales se manipulen operativamente, lo que incluso es la esencia del primero de los métodos presentados en el curso y el primero de los surgidos en la historia, el de separación de variables, tal como lo mencionan Nápoles y Negrón (2002).

Con esto, queda clara la necesidad de establecer un puente conceptual sólido entre los cursos de Cálculo Diferencial y el de Ecuaciones Diferenciales, a propósito del concepto de diferencial de tal forma que esto permita a los estudiantes establecer una relación entre dichos cursos, entendiendo que el cálculo, visto bajo el enfoque infinitesimal donde el diferencial tiene un rol fundamental, brinda las herramientas que permiten modelar situaciones de la realidad planteando una ecuación diferencial ordinaria.

#### 3.1.2 El diferencial sin el protagonismo que tuvo en el surgimiento de las EDO

A partir de lo anterior, es notorio que un elemento primordial en el desarrollo de las EDO es el concepto de diferencial, pues está directamente involucrado en el planteamiento y soluciones de las EDO, en términos de cómo lo planteaban Newton y Leibniz, es decir, de forma operativa. Respecto a ello, es importante que tanto en los cursos de Cálculo como en los de Ecuaciones Diferenciales se profundice sobre la definición de diferencial, tal como lo mencionan Recalde y Henao (2018), es decir, que se promueva la reflexión y discusión en torno al significado fenomenológico de este concepto dentro de las aulas, ya que esto permitiría que la traducción del lenguaje físico al matemático de las EDO sea más comprensible para los estudiantes.

La aparición de los diferenciales en el enfoque de límites se podría calificar como un componente de la "inversión copernicana[5]" (Imaz y Moreno, 2010) realizada al cálculo por Cauchy, Weirstrass y Cantor. Mientras que en el cálculo primigenio la derivada $\frac{dy}{dx}$ se obtenía después y como consecuencia de haber determinado las diferenciales individuales $dx$ y $dy$, simplemente dividiéndolas, en el cálculo weirstrassiano la diferencial $dy$ se define formalmente a partir de la derivada ($dy = f'(x)dx$), quedando por lo tanto relegada a un segundo plano: el papel protagónico se le otorga a la derivada.

Es claro que la versión de la derivada a partir de límites es inadecuada para darle al diferencial el papel relevante que jugó durante el surgimiento de las EDO. Por tanto, se podría decir que se les está privando a los estudiantes de ingeniería la posibilidad de profundizar en un concepto que podría ser fundamental (Recalde y Henao, 2018), sobre todo para modelar situaciones de la realidad más próxima a ellos en términos matemáticos, y que a partir de ahí puedan pensar en estrategias plausibles de solución. La experimentación dentro de un contexto extra-matemático donde estén involucrados los diferenciales, y su manipulación algebraica, podría resultar en un camino que les ayude a reflexionar y comprender todo el proceso de la modelación matemática y a su vez, ver la utilidad de la derivada en sus propias prácticas.

Como se pudo ver previamente (Ely, 2020; Verón et al. 2022), la versión de los diferenciales establecida por Leibniz podría ayudar a los estudiantes a comprender nociones que les resultan complejas. Se menciona en Verón et al. (2022) que las estrategias empleadas por los estudiantes para responder a los cuestionamientos asociados con los diferenciales se pueden relacionar con el enfoque establecido por Leibniz, lo que refuerza el hecho de promover sus planteamientos en este proyecto. Como señala Ely (2020), la flexibilidad de trabajar con los diferenciales permitiría encontrar una ecuación diferencial, que a su vez permita responder varios cuestionamientos sobre la situación que se esté desarrollando, entre ellos, los asociados a sus soluciones para las cuales tiene un papel fundamental la integral, interpretada desde la perspectiva del enfoque infinitesimal.

### 3.1.3 El cálculo integral como una herramienta para resolver EDO

Otro elemento que es importante considerar en todo este proceso en el cual están involucradas las EDO, son las soluciones, las cuales en sus orígenes se apegaban fuertemente a la intuición y el planteamiento geométrico de un problema de la realidad (Recalde y Henao, 2018), pero

[5] "La diferencia esencial entre el Cálculo y el Análisis es precisamente lo que expresa esto que hemos llamado la inversión copernicana del Cálculo." (p. 42)

que de a poco, las herramientas analíticas que se desarrollaron con el surgimiento de la integral permitieron que surgieran diferentes métodos para resolver las EDO (Kline, 1992).

En ese proceso de solución de las EDO, el diferencial jugaba un papel fundamental, ya que en esos momentos se concebía a la integral como la suma de todas las diferencias, lo que refuerza el planteamiento del Teorema Fundamental del Cálculo, que en ese momento era visto por Newton y Leibniz como una herramienta algorítmica poderosa para realizar cálculos sistematizados, lo que a su vez, le da sentido a que en una EDO se tenga la posibilidad de considerar una familia de soluciones:

$$\int_a^x f(z)dz = F(x) - F(a),$$

permite determinar lo que hoy en día se establece como la solución de una EDO con condiciones iniciales, ya que, la solución a este problema lo podríamos plantear de la siguiente forma

$$F(x) = \int_a^x f(z)dz + F(a),$$

donde $F(x)$ representa la familia de soluciones de la EDO, la integral representa la suma de todos los diferenciales (Ely, 2020) en un intervalo de una función $f(x)$ y $F(a)$ representa la condición inicial. Esto se contrapone con lo que hoy en día se presenta en los cursos de Cálculo Integral, en el cual el diferencial sólo es presentado como un factor que determina sobre qué variable se debe integrar, y no en esta visión que permite darle solidez a la noción de diferencial.

Con lo mencionado en cada punto anterior, se considera como una posibilidad el concebir otra ruta didáctica que aporte al enriquecimiento de los cursos de Cálculo y el de Ecuaciones Diferenciales. Esta otra posibilidad consiste en basar los cursos en las concepciones infinitesimales de Newton, Leibniz y Euler, que otorgan un papel preponderante a las cantidades infinitesimales y los diferenciales, como herramientas matemáticas para modelar situaciones de la realidad. Bajo este enfoque, la derivada es vista como un cociente de diferenciales, tal como lo concebía Euler (Nápoles y Negrón, 2002) y éstos a su vez adquieren un significado fenomenológico como cambios infinitesimales en las magnitudes variables de interés. De esta manera es posible introducir la noción de ecuación diferencial y su papel como importante herramienta matemática de modelación, desde el curso mismo de Cálculo Diferencial. Este es el puente conceptual al que nos hemos venido refiriendo, y que es necesario y posible construir desde el curso de Cálculo Diferencial. El puente procedimental se establece en el curso de Cálculo Integral, visto éste desde el enfoque infinitesimal.

## 3.2 JUSTIFICACIÓN DE ELEMENTOS CLAVE

### 3.2.1 La coherencia conceptual y procedimental entre el Cálculo y las EDO

El desarrollo histórico de las EDO permite constatar que el diferencial era una noción sobre la que estaban asentadas las bases de la modelación y solución de una EDO, ésto se puede visualizar en las construcciones desarrolladas por Bernoulli, Leibniz y Euler, quienes concebían esta noción como una cantidad y les permitía modelar situaciones asociadas a la cinemática y darles solución solo considerando como el centro de este proceso al diferencial, basados en argumentaciones geométricas y algebraicas del mismo.

En ese sentido, lo que establecen autores como Ely (2020) y Dray y Manogue (2010) permite concebir la idea de que es posible que, a partir del enfoque infinitesimal se pueden desarrollar las ideas asociadas al cálculo e introducir de forma natural las EDO. No se puede olvidar, que en el desarrollo del cálculo antes de que se asentara una teoría basada en límites, se utilizaba un cálculo que funcionaba y con el que se estuvo trabajando por alrededor de 150 años, en ese tiempo la noción de diferencial era parte fundamental. En la actualidad, cuesta trabajo pensar que la noción de diferencial no forma parte de algunos de los libros de texto que suelen estar en el entorno de desarrollo de un ingeniero y cuando esta presente solo se aborda de forma superficial (Dray y Manogue, 2010)

En términos del puente procedimental que se busca construir en este proyecto entre el Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, es fundamental que el diferencial sea ese pilar que permita la conexión entre ambas ramas de la Matemática. En ese sentido, Dray y Manogue (2010) señalan que "los diferenciales de Leibniz capturan la esencia del Cálculo y deben conformar el núcleo de sus cursos introductorios" (p. 91).

Al promover que los estudiantes trabajen bajo las ideas de un curso tradicional de Cálculo, los forzamos a trabajar bajo ciertas restricciones en la manipulación de variables. Específicamente, una limitante que se tiene en este enfoque es que las funciones los obliga a trabajar con una sola variable independiente, lo cual genera que cuando se les presentan expresiones de la forma $x^3 + y^3$, los estudiantes inmediatamente suelen cometer lo que se considera un error frecuente en el cálculo de su derivada, ya que el resultado inmediato para ellos es $3x^2 + 3y^2$. Pero, como lo explican Dray y Manogue (2010) con los diferenciales esto tiene totalmente sentido, ya que no se limita a los estudiantes a que trabajen bajo la influencia de solo una variable independiente, de tal manera que el cálculo del diferencial de la expresión anterior sería correcto: $d(x^3 + y^3) = 3x^2dx + 3y^2dy$. Esto resulta beneficioso cuando se está estudiando algún fenómeno de estudio, ya que, en la realidad, suelen estar involucradas distintas magnitudes variables que pueden estar relacionadas y que, a la hora de modelar situaciones asociadas con su comportamiento y el cambio de éste, el diferencial puede jugar un papel fundamental.

### 3.2.2 La importancia de la modelación matemática en los cursos de Cálculo y Ecuaciones Diferenciales para ingenieros.

Es importante mencionar que la modelación matemática es un elemento que desde el surgimiento de las EDO ha estado presente. Es por ello, que para el desarrollo del proyecto se tiene considerado que sea una parte importante para el diseño y desarrollo de las actividades, sobre todo pensando en lo que menciona Ely (2020) acerca del papel de los diferenciales en el proceso de modelación. Hasta el momento no hay una decisión tomada respecto al tipo de modelación que será considerado, pero un buen ejemplo que se considera como un punto de partida para las ideas que se tienen planteadas, es el enfoque de modelación matemática desarrollado por Rodríguez y Quiroz (2016), en el cual se considera la experimentación como un proceso fundamental dentro del ciclo de modelación, además de ligarlo no solo a un modelo matemático, sino también a un modelo físico, de los cuales se tienen resultados los cuales a su vez son interpretados hasta llegar a la confrontación del modelo con la situación real, es decir, la validación de todo el proceso.

Se considera que un elemento que puede proporcionar herramientas que deriven en la modelación matemática de las EDO, puede provenir de la experimentación con los diversos fenómenos que sean planteados, proceso en el que el estudiante será considerado un participante fundamental y activo en el desarrollo del modelo, para lo cual probablemente tendrá que pasar por un proceso de manipulación de ciertas tecnologías, que a su vez le permitan generar conjeturas respecto a la formulación de un modelo matemático que esté asociado con las EDO y a su vez, le permita brindar una respuesta intuitiva al fenómeno analizado, y que en actividades planeadas para más adelante sus razonamientos se apeguen a lo desarrollado en un curso de Cálculo Integral, particularmente apegándose al Teorema Fundamental del Cálculo.

### 3.2.3 La experimentación apoyada por recursos tecnológicos

Otro elemento que será fundamental para el desarrollo y planteamiento de las EDO es la experimentación. Se tiene la intención de que al ser estudiantes de ingeniería con quienes se trabajará, éstos pasen por este proceso, en el cual por medio de manipulables o directamente con ayuda de una tecnología digital puedan manipular operativamente los diferenciales y recabar datos asociados a fenómenos de la realidad, con la intención de que los analicen y formulen conjeturas asociadas a las EDO, lo cual pueda permitirles plantearlas y resolverlas. Respecto a ello, Rodríguez y Quiroz (2016) señalan que “el uso de diverso material tecnológico ha posibilitado que los alumnos experimenten fenómenos eléctricos en el aula” (p. 96), lo que a su vez les permitió realizar conjeturas respecto al planteamiento y solución de una EDO.

Las tecnologías previstas a ser utilizadas son Tracker y GeoGebra, los cuales tienen la virtud de ser gratuitos y de fácil acceso para todos. La primera de éstas permite indagar y experimentar con un fenómeno de la realidad, por medio del análisis de un video, en el cual los estudiantes pueden generar automáticamente la captura de datos sobre las magnitudes variables de interés, los cuales ayuden a modelar y darle una posible solución al fenómeno. En el caso de GeoGebra, se plantea trabajar con los datos que Tracker proporcione, de tal forma que pueden generarse gráficas a partir de un ajuste de curvas, o la representación gráfica de las diferencias que puedan ayudar a generar de forma intuitiva el modelo de las EDO y también su solución. A partir de esto, Carranza (2019) menciona que “la propia naturaleza dinámica de la variación en la ecuación diferencial se encuentra intrínsecamente relacionada con las representaciones dinámicas que permite un software de matemática dinámica, como es el caso del software libre GeoGebra” (p. 160). Otra posibilidad es aprovechar las funciones que la herramienta tiene, con el fin de desarrollar applets que sirvan para agilizar procesos que podrían llevar tiempo en caso de que se dejara que los estudiantes los desarrollen.

Además, es importante tener en consideración que la manipulación algebraica de los diferenciales será un factor fundamental sobre todo cuando se piense en las soluciones de las EDO. Por lo tanto, se tiene estipulado que se cuente con el apoyo de algún recurso tecnológico que permita tal manejo de los diferenciales. Hasta el momento se tiene considerada la propuesta de Alexopoulos (1999), quien presenta una versión del trabajo operativo con los diferenciales para el tema de derivación implícita, desarrollado específicamente con la calculadora CAS TI-92+.

El sistema CAS Voyage 200 no cuenta con comandos que permitan el cálculo directo de diferenciales de expresiones algebraicas, solamente cuenta con comandos para calcular derivadas ordinarias y de orden superior. En cambio, cuenta con un lenguaje de programación que permite desarrollar funciones de usuario. Aprovechamos este hecho para resolver el problema técnico de contar con el apoyo de un sistema CAS para el cálculo algebraico de diferenciales de expresiones algebraicas que involucran magnitudes variables.

El problema que nuestra función de usuario debe resolver es el siguiente:

> Dada la relación
>
> $$f(w,x,y,z) = g(w,x,y,z)\ ,$$
>
> donde en particular $g(w,x,y,z)$ puede ser igual a cero o a una constante numérica, calcular el diferencial de esta expresión algebraica, considerando que $w, x, y$ y $z$ son variables, es decir, representan magnitudes variables.

En resumen, desde el punto de vista técnico (esto es, desde el punto de vista de la programación en el sistema CAS), la estrategia de solución de este problema consta de los siguientes pasos:

1. Convertir la expresión algebraica de entrada, $f(w,x,y,z) = g(w,x,y,z)$ , en una cadena de caracteres.

2. Sustituir en esta cadena cada ocurrencia de $w, x, y$ y $z$ por las subcadenas u(x), v(x), α(x) y β(x), respectivamente.

3. Convertir esta nueva cadena en una expresión algebraica.

4. Calcular la derivada de esta expresión algebraica, considerada como función compuesta.

5. Convertir esta derivada en una cadena de caracteres.

6. Sustituir en dicha cadena cada ocurrencia de $u'(x)$, $v'(x)$, $\propto '(x)$ y $\beta'(x)$ por dw, dx, dy y dz, respectivamente.

7. En esta última cadena reformada, sustituir cada ocurrencia de $u(x)$, $v(x)$, $\propto (x)$ y $\beta(x)$ por $w, x, y$ y $z$, respectivamente.

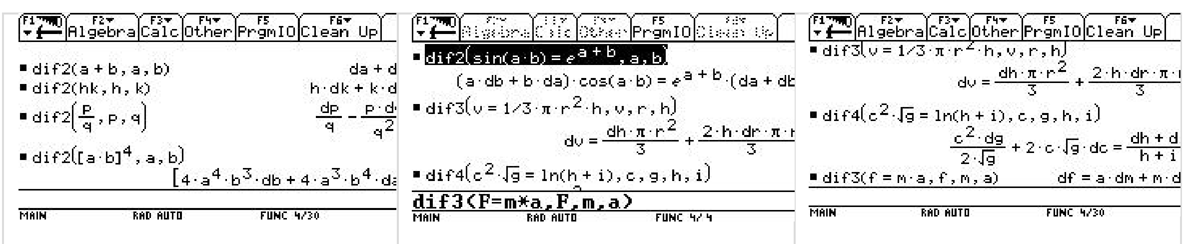
8. Convertir esta última cadena en expresión algebraica.

9. Mostrar como salida dicha expresión algebraica.

En la Figura 3, se muestran ejemplos del cálculo de diferenciales en la calculadora CAS Voyage200, con fines de mostrar el potencial de la función de usuario se muestran casos con diferentes niveles de dificultad. Para diferenciar el cálculo de diferenciales, se les ha asignado el nombre Dif2, Dif3 y Dif4, dependiendo la cantidad de magnitudes variables a emplear, por tanto, una vez que se haga la selección del caso, se pide al usuario que escriba la expresión o ecuación, seguido y separado por comas de las magnitudes variables.

**Figura 3.**

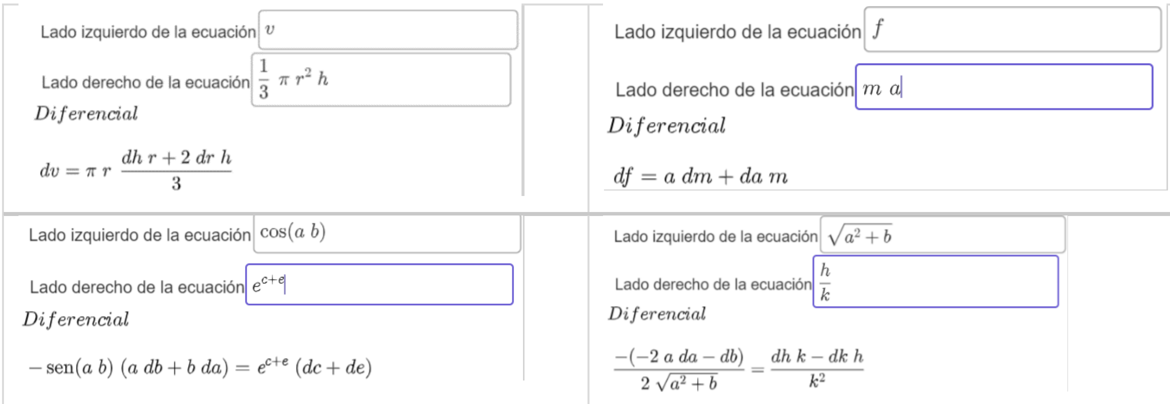
*Cálculo de diferenciales en la calculadora CAS Voyage200*




En el caso del applet de GeoGebra, no se tienen restricciones sobre la cantidad de magnitudes variables a utilizar. En la Figura 4, se muestran ejemplos para el cálculo de diferenciales, en el cual se le pide al usuario ingresar una ecuación diferenciando el lado izquierdo del derecho de ésta, una vez introducida, se procede al cálculo del diferencial.

**Figura 4.**

*Cálculo de diferenciales en un applet de GeoGebra*




Por tanto, se consideran importantes para el proyecto la modelación matemática de fenómenos de la realidad asociados a diversas ingenierías y el empleo de recursos tecnológicos en el proceso de experimentación de los estudiantes, y aunque a estas alturas no se cuenta con elementos específicos sobre estos aspectos, es importante tenerlos en consideración, sobre todo en el planteamiento de los objetivos de este trabajo.

# 4 OBJETIVOS

Como se pudo ver en el apartado anterior, es posible y probablemente necesario que las EDO sean introducidas desde etapas tempranas en los cursos previos al de Ecuaciones Diferenciales, es decir, en el de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral, ya que ambos aportan elementos fundamentales para el planteamiento y solución de las EDO, lo cual permitiría establecer un puente conceptual y procedimental entre estos cursos. Con lo anterior, se considera que el enfoque infinitesimal propuesto por Leibniz y desarrollada por Euler proporciona las herramientas que permitirán la generación de estos puentes, dentro de estas herramientas se encuentra el diferencial, el cual podría ser un factor fundamental para la modelación de fenómenos de la realidad. Dicho esto, se considera que existen argumentos sólidos sobre los cuales plantear los objetivos del proyecto.

## 4.1 OBJETIVO GENERAL

A partir de la problemática detectada y de los elementos fundamentales presentados previamente, el objetivo general se declara de la siguiente forma:

*Diseñar actividades de aprendizaje para introducir la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones bajo el enfoque infinitesimal en los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral para ingenieros, a partir de la modelación matemática de fenómenos de la realidad y la experimentación con el uso de recursos tecnológicos.*

## 4.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

A partir del objetivo general planteado, es evidente que habrá que tener en cuenta objetivos específicos que permitan lograrlo. Para ello, se presentan a continuación cada uno de estos objetivos:

1. Elaborar (o buscar) posibles estrategias didácticas y cognitivas que promuevan la conceptualización y manipulación de los diferenciales para la modelación matemática de fenómenos de la realidad.
2. Diseñar actividades de aprendizaje específicas que promuevan la modelación matemática de situaciones contextuales de ingeniería mediante las EDO, a partir de las herramientas que brinda el cálculo diferencial bajo el enfoque infinitesimal.
3. Diseñar actividades de aprendizaje específicas que promuevan el planteamiento de estrategias y métodos de solución de las EDO, a partir de las herramientas que brinda el cálculo integral.

4. Elaborar sugerencias y recomendaciones metodológicas para establecer vínculos sólidos entre los cursos de Cálculo (Diferencial e Integral) y Ecuaciones Diferenciales bajo el enfoque infinitesimal.

Con estos objetivos en mente, se presentan a continuación varios prototipos de la propuesta que se pretende desarrollar, en la cual se resalta la manipulación operativa de los diferenciales para la modelación de fenómenos de la realidad mediante las EDO y su posterior solución.

# 5 ELEMENTOS TEÓRICOS

Una vez planteados los objetivos, el siguiente paso del proyecto de intervención consiste en fundamentarlo con base en alguna teoría de la Matemática Educativa. Teniendo en cuenta que las ideas infinitesimales de Leibniz emergieron en el contexto de una cultura matemática que hacía énfasis en los procesos de modelación y resolución de fenómenos asociados a la cinemática, además de asentar las bases lógicas para el Cálculo primigenio, se buscó sustentar el proyecto a partir de una teoría que tomara como relevante para el aprendizaje el hecho de que el conocimiento matemático ya está constituido histórica y culturalmente, y que no se trata de reinventar o construir de nuevo tal conocimiento. Por tanto, y teniendo como trasfondo el análisis de diversos enfoques teóricos sobre el aprendizaje (Radford, 2003, 2005, 2008, 2010, 2018, 2020, 2020b, 2021, 2023), se vio en la Teoría de la Objetivación (TO) desarrollada por Luis Radford, un acercamiento al aprendizaje que hace hincapié en el carácter histórico-cultural y social del conocimiento matemático.

Es un hecho histórico incuestionable y abundantemente documentado que la noción de diferencial ha sido problemática (Dray y Manogue, 2010; Imaz y Moreno, 2010; Ely, 2020; Ely y Samuels, 2021), ya que a pesar de los admirables esfuerzos de varias y notables generaciones de matemáticos, fueron necesarios más de doscientos años para poderle asentar sobre bases lógicas, las cuales se concretan en la fundamentación de Robinson (1974) para el Cálculo Hiperreal. El tiempo requerido y la complejidad de las ideas que subyacen al desarrollo de un cuerpo teórico detrás de los diferenciales, descartó de inmediato el considerar como posible fundamentación del proyecto a las teorías constructivistas ya que, por una parte, conciben al aprendizaje como un desarrollo individual del estudiante y, por la otra, como menciona Radford (2020b), le confieren al individuo el papel protagónico de ese proceso, realizando actividades de reinvención guiada, en las cuales la mayor responsabilidad le corresponde al estudiante como generador de su propio conocimiento; aún y cuando se considere a la interacción como un factor fundamental en el proceso, se sigue concibiendo al conocimiento como un producto individual. No parece plausible asumir como hipótesis de partida para el proyecto el que un concepto matemático tan complejo y problemático, como el de diferencial, pueda ser "construido" por los estudiantes en un lapso breve de actividad escolar.

En cambio, en la TO el desarrollo del aprendizaje se concibe como resultado de procesos colectivos que, como lo enfatiza Radford (2020b), "están arraigados en lo social, cultural y histórico" (p. 17). Para reforzar las diferencias entre la TO y otros enfoques teóricos, Radford (2023) señala que "el saber no es algo que el profesor transmite al niño. Tampoco el saber es algo que el niño construye por sí solo" (p. 16). Agrega que en la TO se considera que el saber matemático ya existe, que está arraigado en los contextos históricos y culturales de donde se ha constituido, y que más bien deben buscarse las formas de organizar el encuentro del estudiante con dicho saber en el aula, vistas éstas como procesos de enseñanza y de aprendizaje. Dicho esto, lo que se busca en este proyecto es que el encuentro del estudiante con la noción de diferencial se haga a partir de lo que históricamente le dio origen, así como de los contextos y fenómenos que permitieron su introducción y desarrollo. Por lo mismo, se considera enriquecedor el hecho de que la TO sea una teoría social, según la cual los estudiantes y el profesor, al asumir el compromiso ante la actividad, sean capaces de capitalizar este encuentro, tratando de que sea natural, no uno problemático ni mucho menos traumático.

En la Figura 5, Radford (2020b) resume algunas diferencias generales entre la TO y las teorías constructivistas y conductistas; esto lo hace desde la perspectiva de dos elementos que son fundamentales para el aprendizaje: la *actividad* y la *ética*. En el caso del constructivismo, Radford señala que la actividad es concebida de forma individualista, de modo que la historia y la cultura no son consideradas como parte importante del aprendizaje de los estudiantes. Por otra parte, la ética está restringida a una concepción personal de la misma, en la cual cada individuo es libre de tomar decisiones respecto a lo que hace en la actividad con los otros. En el caso del conductismo, Radford menciona que la actividad y la labor con los otros se circunscribe a un proceso en el cual no existe un fin colectivo, sino uno individualista; la ética se restringe al poder que tiene el profesor como transmisor de conocimiento y a la obediencia por parte de los estudiantes, bajo la cual cada uno codifica la información que el profesor le proporciona.

En cambio, en la TO la actividad es considerada como una labor conjunta, colectiva, en la cual todos los estudiantes y el profesor son participes activos, con el fin de lograr el encuentro productivo con aquello que se les resiste en el proceso de aprendizaje. Respecto a la ética, es importante la relación que se establece con el otro, a la que Radford concibe como *ética comunitaria*, en la cual son importantes la responsabilidad, el compromiso y el cuidado del otro, durante la actividad. Sobre estos elementos se profundizará más adelante.

**Figura 5**

*Tipos de actividades, modelo didáctico y ética correspondiente*.

| | *Aktivität* (Actividad orientada a la satisfacción personal) | | *Tätigkeit* (Actividad orientada a la satisfacción colectiva) |
|---|---|---|---|
| Constructivismo | Actividad individualista que aliena al sujeto de la historia y la cultura. Ética de la autonomía y la libertad del sujeto. | | |
| Enseñanza tradicional | | Labor con otros de naturaleza alienante. Ética del poder y sumisión. | |
| TO y su modelo de enseñanza-aprendizaje | | | Labor conjunta de profesor y estudiantes. Ética comunitaria. |

Nota: Tabla extraída de Radford (2020b).

Asumiendo una posición dialéctico-materialista sobre el conocimiento, y teniendo en cuenta las ideas desarrolladas por Marx respecto a la actividad, Radford (2016) contrasta la TO con otros enfoques socioculturales. Al respecto, señala que se puede encontrar una diferencia en la interpretación que se hace de la actividad, a la cual la TO "reconceptualiza como trabajo conjunto para poner de relieve la importancia ontológica y epistemológica de la actividad como forma de vida" (p. 202). Además, señala que los procesos de enseñanza y de aprendizaje están enmarcados dentro de un fenómeno que está constituido histórica y culturalmente, y que también es de naturaleza ética.

Respecto al término de objetivación, Radford (2023) toma en cuenta los elementos de la fenomenología desarrollados por Hegel, de tal forma que puntualiza que la objetivación es el encuentro con el saber, con aquello que objeta al estudiante, que le opone resistencia en ese encuentro: por tanto, para que éste sea productivo es necesario realizar acciones que son llevadas a cabo en una serie de procesos, que más adelante se definen como de *objetivación* y *subjetivación*.

Con esto en mente, una de las primeras inquietudes consistió en esclarecer en qué medida la TO permitiría la construcción y armonización de los puentes conceptual y procedimental entre los cursos de Cálculo (Diferencial e Integral) y el de Ecuaciones Diferenciales. Para ello ha sido necesario profundizar sobre la pertinencia de diseñar un proyecto de intervención bajo el punto de vista de la TO (sobre todo teniendo en cuenta el hecho de que solo ha sido utilizada para proyectos de investigación). Al respecto, Radford (2023) señala que en la educación es importante propiciar condiciones óptimas para que el encuentro con el saber sea lo más rico posible. Siendo el enfoque infinitesimal distinto del que se promueve tradicionalmente en el aula, para hablar del éxito de este enfoque, o de que pueda ser considerado como una ruta viable en el aprendizaje del Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, es importante que a partir de la labor conjunta los estudiantes sean precisos en sus argumentaciones verbales y gestuales sobre las nociones que se estén abordando. En ese sentido, la TO considera la precisión como un aspecto fundamental; Radford señala que para lograr el encuentro con el saber (objetivación), el estudiante debe ser preciso en sus formas de expresarse.

En el siguiente apartado se profundizará sobre algunos de los elementos mencionados previamente, se dirigirá la atención sobre aquellos que inciden en el proceso de aprendizaje, y que influirán de manera importante en el diseño de la propuesta de intervención didáctica.

## 5.1 TEORÍA DE LA OBJETIVACIÓN

La teoría de la objetivación es una teoría sociocultural de la enseñanza y el aprendizaje, basada en el materialismo dialéctico y la escuela psicológica de Vygotsky (Radford, 2018). Respecto al materialismo dialéctico, Radford (2020b) ha retomado varios términos asociados a este enfoque, que le han ayudado a reorientar la noción de aprendizaje comúnmente asociada con la Matemática Educativa. Uno que es de gran importancia para el desarrollo de este trabajo es el de *labor conjunta*, proveniente de las ideas de Marx sobre el concepto de actividad, el cual se detalló previamente en la Figura 5, y cuyo significado corresponde con el que este término tiene tanto en la lengua alemana (tätigkeit) como en la rusa (deyatel'nost), en los que expresa una connotación de actividad colectiva, deslindado de la interpretación asociada a un ser individual que tiene ese término en nuestro lenguaje. En ese sentido, la labor conjunta se considera como un factor fundamental para que los estudiantes se adentren en las nociones y la terminología propia del enfoque infinitesimal, y eso permitirá que la introducción de la noción de ecuación diferencial ordinaria se realice de forma natural, y que los estudiantes la puedan asociar con las demás nociones matemáticas que hayan asimilado.

Para que ese encuentro se dé con naturalidad, es necesario considerar todos los elementos en los que se puedan apoyar los estudiantes para lograrlo. En ese sentido, la TO retoma de la escuela de pensamiento de Vygotsky algunas consideraciones asociadas con la semiótica. Si bien Radford y Sabena (2015) señalan que ésta por sí sola no puede considerarse como una teoría ni de la enseñanza ni del aprendizaje, si ayuda en cambio a responder cuestionamientos asociados a estos procesos. En este caso, el proyecto se enfoca en el proceso de aprendizaje, para el cual los autores mencionan que puede definirse como un proceso semiótico social que está siempre en desarrollo, que es inestable e indeterminable y que, para entender este proceso, en la TO se considera el concepto vygostkiano de signo:

> …Vygotsky no recurre a una idea representacional de los signos. Su concepto de signo se sitúa más bien dentro de su trabajo en educación especial: un signo es un medio auxiliar para organizar nuestro comportamiento. Los signos son herramientas de reflexión que permiten a los individuos planificar acciones… El concepto vygotskiano de signo nos proporciona pistas para comprender los procesos actuales de enseñanza y aprendizaje (p. 162).

Radford (2020) retoma esta noción de signo para el desarrollo del aprendizaje, postulando que éste se desarrolla por medio de dos procesos: el de objetivación (formación del saber) y el de subjetivación (formación del ser), los que, a su vez, están constituidos por uno o varios procesos internos. Para el proyecto, en una primera instancia se tiene contemplado centrarse sólo en los procesos de objetivación, los cuales Radford (2021) señala que "son aquellos procesos que intentan aprehender algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia no de forma pasiva, sino por medio de la actividad corporal, sensible, afectiva, emocional, artefactual, semiótica y creativa de los individuos" (p. 9). Con esto se puede evidenciar que el trabajo a desarrollar en estos procesos es bastante amplio si consideramos los elementos que están inmersos, pero no significa que se descarten los procesos de subjetivación, dado que una vez que se realice una primera puesta en escena del diseño, se considerará la pertinencia de tomarlos en cuenta.

En términos del conocimiento matemático, para la TO éste ya está constituido histórica y culturalmente; por tanto, es por medio de la labor conjunta, para la cual Radford (2020a) señala que “es una labor en el que ambos, profesores y estudiantes, se afirman en su producción y se realizan como seres humanos en lo que hacen” (p. 28), el cómo se da el encuentro de los estudiantes con el objeto matemático de estudio, encuentro que a su vez se logra por medio de los procesos de objetivación. En el aspecto matemático estos procesos estarían enmarcados por lo que se consigna en los planes y programa de estudio de cada nivel educativo; particularmente, en el proyecto de intervención que se está realizando sería lo que se consigna en los cursos de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. Al plantear un enfoque distinto al tradicional, se considera que los tipos de actividad que sean promovidos en los procesos de objetivación, serán fundamentales para que sean introducidas las nociones de diferencial y de ecuación diferencial ordinaria.

Es justamente en los procesos de objetivación, donde Radford (2003, 2005, 2008, 2010) involucra fuertemente la semiótica de Vygotsky. Particularmente, las acciones que se desarrollan en los procesos de objetivación, y en particular en las actividades que se promuevan en la propuesta, están asociadas con *medios semióticos*, para los cuales Radford (2003) señala que

> hace referencia a los objetos, herramientas, dispositivos lingüísticos y signos que los individuos intencionalmente utilizan en los procesos de creación de significados sociales para lograr una forma estable de la conciencia, a poner de manifiesto sus intenciones, y para llevar a cabo sus acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (p. 5).

Tales medios son empleados por los estudiantes para expresarse o dar a entender ciertas ideas. Apoyándose en la labor conjunta, en la cual deberán estar involucrados como participantes activos junto al docente, y donde se generan discusiones en varias direcciones, estos medios van refinándose y conectando entre ellos para el surgimiento de lo que Radford (2005) define como *nodos semióticos*, los cuales son “una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, el gesto, la palabra, la fórmula) trabajan juntos para lograr la objetivación del saber” (p. 2). Por tanto, en la TO son considerados como un paso previo al logro de la objetivación; la intención de estos nodos debe ser que los estudiantes vayan encaminándose a una forma precisa de expresarse y argumentar, a partir del empleo de una menor cantidad de medios semióticos. A esa reducción de medios semióticos, la cual se compensa con la concentración de significados para expresar sus ideas, es a lo que Radford (2010) denomina *contracción semiótica*. Además, cuando los estudiantes emplean sus experiencias previas para orientar sus acciones en una nueva situación para lograr el encuentro con el saber, se le denomina *iconicidad* (Radford, 2008).

A partir de lo anterior, se han planteado una serie de procesos de objetivación, los cuales tienen la intención de generar una ruta de aprendizaje que, por un lado, lleve a los estudiantes a concebir la noción de diferencial como un elemento fundamental en el proceso de modelación matemática de fenómenos físicos y que, a la vez, esto ayude a introducir la noción de EDO y encontrar sus soluciones, en alusión a lo que señala Radford (2023) sobre que un proceso de objetivación puede ayudar a desarrollar otros procesos. Hasta el momento, se tiene contemplado el desarrollo de los siguientes procesos de objetivación para la construcción del puente procedimental:

- PO1: Diferencial del tiempo como magnitud variable independiente. Diferencial de una magnitud variable independiente distinta del tiempo.
- PO2: Diferencial de la magnitud variable dependiente (para este caso es necesario que se conciba este diferencial como uno distinto y dependiente del de la magnitud variable independiente).
- PO3: Cálculo y manipulación de los diferenciales (Que sean concebidos como cantidades).
- PO4: Reglas matemáticas para el cálculo y manipulación de diferenciales.
- PO5: Cociente de diferenciales como razón instantánea de cambio (Esto permitirá relacionar el cociente entre cantidades con el cambio instantáneo, y a la vez, a la introducción de la noción de EDO).
- PO6: Modelación matemática de un fenómeno de la realidad con una EDO.
- PO7: Soluciones intuitivas de las EDO.

Algunas de las características que tendrán estos procesos de objetivación son:

1. Cada proceso de objetivación contará con sus propias actividades; es decir, para algunos procesos quizás una actividad sea suficiente, pero para otros sean necesarias varias actividades (Radford, 2023).
2. La intención es que, lograda la objetivación en cada proceso, ésta sea importante para desarrollar las siguientes.
3. Los primeros siete procesos de objetivación estarán enfocados en construir un puente conceptual entre el cálculo y las ecuaciones diferenciales (un mismo significado para los diferenciales), e incidirán en un curso de Cálculo Diferencial. Los siguientes procesos que aún no están definidos, llevarán la intención de construir un puente procedimental u operacional (una misma manera de operar con los diferenciales), en un curso de Cálculo Integral.
4. En el proceso de manipulación de diferenciales se hará uso de una función de la calculadora Voyage200 (o GeoGebra o Maple), diseñada para calcular diferenciales.

En el caso de la calculadora, el diseño se realizó con base en las ideas de Alexopoulos (1999), el cual desarrolló una función de usuario para ejecutar la derivación implícita, y en la cual involucró los diferenciales.

5. En el proceso de modelación matemática se aplicará el modelo desarrollado por Rodríguez y Quiroz (2016), considerando los elementos mencionados con anterioridad. De acuerdo con este enfoque es importante considerar tres clases: un modelo pseudo-concreto, un modelo físico y un modelo matemático del fenómeno de estudio, así como sus respectivas respuestas e interpretaciones. Es importante señalar que aún no se ha trabajado en el proceso de objetivación que involucra la modelación, por tanto, falta especificar la compatibilidad que tendrá con la TO.

6. Hasta el momento, se tiene contemplado que todas las actividades sean desarrolladas con base en el análisis de algunos fenómenos físicos (puente colgante, llenado de recipiente cónico y descarga de un condensador), que se tienen considerados hasta el momento.

Respecto a los posibles medios semióticos que pudieran emplear los estudiantes en cada proceso y los nodos semióticos que deriven a partir de ellos, se tiene la intención de considerar a priori aquellos que se considere que podrían ser normales o frecuentes. Para ello, se ha revisado el trabajo de Herbert y Pierce (2006), en el cual se estudian cuatro tipos de gestos que emplean los estudiantes al abordar la noción de razón de cambio con ayuda de un recurso tecnológico; algunos de los que reportan como frecuentes son: a) los gestos *deícticos*, en los cuales los estudiantes señalan la pantalla para hacer referencia o explicar algunas de sus ideas; b) los gestos *icónicos*, los cuales a su vez pueden ser físicos, representacionales o simbólicos, haciendo referencia a que los estudiantes usan sus gestos para explicar el comportamiento de un fenómeno físico, sobre una representación matemática en particular o sobre una expresión matemática escrita de forma simbólica. Esto da algunas pistas sobre los tipos de gestos que podrían emplear los estudiantes al momento de trabajar en las actividades que se propongan. De igual forma, se pondrá atención a las expresiones verbales que los estudiantes empleen para sus argumentaciones, de tal forma que sean precisos en ellas. Para ello, será importante que se familiaricen con el lenguaje

En el caso de los nodos semióticos, hasta el momento se ha pensado en que probablemente uno que con frecuencia surja a partir de la movilización de distintos medios semióticos esté asociado con el concebir a los diferenciales como cantidades que pueden ser manipuladas, ya que este momento podría ser clave como paso previo a lograr la objetivación en diferentes procesos.

Para el caso de las puestas en escena y la valoración de la pertinencia del diseño, se tiene contemplado considerar las fases de labor conjunta que señala Radford (2020a), en las cuales se considera: la presentación de la actividad por parte del docente, el trabajo en pequeños grupos y después la discusión en diferentes direcciones, el docente con los grupos, entre los grupos y un debate general. También, se ha indagado sobre lo que Radford (2023) señala en relación con las virtudes que deben tener los estudiantes ante la actividad, las cuales son: compromiso, cuidado por el otro y responsabilidad. Más adelante se profundizará sobre estos aspectos.

# 6 METODOLOGÍA

Teniendo como referencia la Teoría de la Objetivación, se han identificado algunos elementos que aportan a la formulación de la metodología a seguir para el diseño de las actividades, cuya intención es introducir la noción de EDO, a partir del enfoque infinitesimal. Considerando que la primera parte de la propuesta está enfocada en la construcción del puente conceptual entre el Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, ésta se aplicará en un momento avanzado del curso de Cálculo Diferencial. Se tendrá como referencia el trabajo previo a este curso que han desarrollado los estudiantes, sobre todo las asociadas al pensamiento algebraico; así como las herramientas que han generado en las primeras unidades del curso, bajo el enfoque infinitesimal. Por lo tanto, el lenguaje que se promoverá en el diseño de las actividades considerará esa experiencia como un elemento importante. También, será de importancia el trabajo previo de análisis y reflexión que han tenido los estudiantes sobre fenómenos asociados a la realidad, con el fin de que aquellos que se propongan en las actividades diseñadas no requieran de un nivel de profundidad amplió en las nociones involucradas, más bien, se busca que el centro de atención de las actividades este orientado en las nociones específicas que serán útiles para la introducción de las EDO, como por ejemplo, la de diferencial, que se aborda de diferente manera en todos los procesos de objetivación.

Una vez que se tenga una primera versión del diseño, lo siguiente es realizar una puesta en escena de la propuesta, la cual se trabajaría con un grupo que este llevando el curso de Cálculo 1 en el primer semestre de alguna Ingeniería en la Universidad de Sonora. Es importante señalar que, si en el curso se promueve el trabajo con el enfoque infinitesimal se buscará aprovechar esa experiencia para centrarse en las nociones que son fundamentales para la propuesta. Para ello, es importante contar con instrumentos para la recopilación de información, los cuales se tiene considerado que sean: hojas de trabajo, videograbación y notas escritas de un observador.

Para organizar las actividades que se llevarán a cabo en el aula, se tienen contempladas las fases de labor conjunta propuestas por Radford (2020), las cuales permitirán llevar un orden en el desarrollo del trabajo. En ese sentido, el profesor será parte importante en los procesos de objetivación y en la intención de que los estudiantes tengan ese encuentro con el saber, tiene que ser un participe activo dentro de las actividades que se promuevan en el aula, ya que además de ser quien presenta la actividad en el aula, tiene que estar en constante comunicación con los equipos de trabajo que se generen. Como señala Radford (2021), no es un transmisor de conocimiento, ni un guía, es un participante que tiene aportaciones en pro de la actividad y del encuentro de los estudiantes con lo que hasta ese momento para ellos era desconocido.

Recordando que la población objetivo está conformada por estudiantes de alguna ingeniería, hay un elemento en la TO que permite afianzar su formación, ese elemento es lo que Radford

(2013) describe como *ética comunitaria*. Hay que recordar que en la teoría también es importante la formación del ser (procesos de subjetivación). En ese sentido, se considera que promover el enfoque infinitesimal entre los estudiantes de ingeniería, puede ayudarlos a cumplir ciertas exigencias que se les pide en su formación. Particularmente, que asuman el *compromiso* de involucrarse en la actividad y de ser partícipes activos; ser *responsables* en su accionar ante la actividad y sobre el trabajo de otros; así como, el *cuidado del otro* al intentar entender y complementar lo que sus compañeros y el profesor expresen. Se espera que en el transcurso de la actividad los estudiantes vayan adquiriendo un lenguaje que sea cada vez más preciso, y que les permita comunicarse con claridad en términos de las exigencias que la misma Ingeniería como campo requiere.

En los siguientes apartados, se hace una descripción más detallada de cada uno de los elementos considerados en la metodología que envuelve a la propuesta y que tiene como referente a la TO.

## 6.1 CONSIDERACIONES PARA EL DISEÑO DE LA PROPUESTA

Como se mencionó en el apartado teórico, la TO es una teoría donde todos sus trabajos están enfocados en la investigación, y aunque ya se declaró que hay elementos que permiten pensar en la posibilidad de un diseño bajo este enfoque, queda claro que aún con eso, será necesario tener en consideración lo pragmático, es decir, apegarse a la experiencia del trabajo previo que se ha tenido con estudiantes de ingeniería, para que las actividades permitan que desarrollen el lenguaje que se les exige.

En la etapa de diseño, se tiene la consideración de los procesos de objetivación señalados previamente, de tal forma que cada proceso estará constituido por una o más actividades dependiendo de las consideraciones a priori que se tengan (Radford y Sabena, 2015). Para ello, algunos cuestionamientos que orientarán el diseño y permitirán entrelazar lo pragmático con lo teórico serán:

¿Qué medios semióticos emplean los estudiantes en cada proceso de objetivación?

¿Qué nodos semióticos podrían surgir a partir de los medios semióticos empleados?

¿Qué contracción semiótica podría surgir a partir de los nodos semióticos identificados?

La intención es que estos cuestionamientos se tengan en consideración para el diseño de la propuesta, de tal manera que aquellos que sean propios de las actividades promuevan que los estudiantes empleen varios medios semióticos en sus argumentaciones, que en la labor conjunta surjan nodos semióticos que los aproximen a la objetivación en cada uno de los procesos propuestos, y que, el compartir de argumentaciones entre equipos de trabajo, permita realizar una contracción semiótica.

Previo a las actividades, se tiene considerado que los estudiantes realicen lecturas asociadas al enfoque infinitesimal, con el fin de que se vayan familiarizando con el lenguaje que se promueve en el mismo. Por tanto, se han diseñado lecturas retomando algunas de las ideas desarrolladas por varios autores sobre la definición de diferencial (Bezout, 1770; Dray y Manogue, 2010; Ely y Samuels, 2021).

Cada una de las actividades que se diseñe, tendrán en consideración fenómenos asociados a la realidad. Hasta ahora los fenómenos considerados son: el llenado de un recipiente cónico, el puente colgante y la descarga de un condensador.

Es importante señalar que, las actividades están pensadas en aplicarse en dos momentos distintos, el primero de ellos está asociado con los primeros siete procesos de objetivación para que se apliquen en el curso de Cálculo Diferencial, y el segundo momento con los restantes procesos de objetivación, con la intención de ser aplicados en el curso de Cálculo Integral. Se tiene contemplado que los primeros siete procesos de objetivación estén enfocados en la construcción del puente conceptual entre el Cálculo y las Ecuaciones Diferenciales, y se aplicarán a un grupo de estudiantes que se encuentren llevando un curso inicial de Cálculo. Mientras que, los siguientes procesos de objetivación estarán enfocados en la construcción del puente procedimental, en el cual se tiene contemplado aplicar a un grupo que este llevando su segundo curso de Cálculo.

Con lo anterior, es de suponer que al incidir en dos cursos distintos y pensando que la población en la Universidad de Sonora es variable, es decir, los grupos no suelen ser siempre los mismos, sobre todo en ingenierías donde hay una mayor cantidad de estudiantes y, por tanto, de grupos. Con esto, es muy probable que los estudiantes en los cuales se busque la construcción de un puente conceptual no sean los mismos estudiantes en los cuales se promueva la construcción del puente procedimental.

### 6.1.1 Análisis a priori para el diseño de la propuesta

Teniendo en cuenta que un elemento importante para el diseño de actividades es la realización de un análisis a priori (Radford, 2023), se consideró que ese análisis estuviera centrado en los elementos de la semiótica que podrían ser recurrentes en los diferentes procesos de objetivación. Particularmente, se han identificado aquellos medios semióticos que podrían surgir en cada uno de los procesos, así como los posibles nodos semióticos que se pongan en juego a partir de la labor conjunta, para finalmente llegar a la contracción semiótica, lo cual constituiría en cada proceso de objetivación, el encuentro con el saber (objetivación).

Teniendo en cuenta que esta es una primera versión, solo se ha realizado el análisis para los primeros tres procesos de objetivación, que serán para los cuales se hará una primera experimentación en el aula. A continuación, se presenta el análisis a priori realizado para cada uno de esos procesos.

Para el PO1, se considera que se utilizarán de forma recurrente (aunque quizás imprecisas) las expresiones verbales propias del enfoque infinitesimal, pensando en que los estudiantes contarán con experiencia previa del curso asociada a éste. Sabiendo que los estudiantes partirán de analizar lecturas que estarán enfocadas en la introducción de la noción de diferencial, es de esperarse que sus primeras argumentaciones ronden sobre como la conciben e intentan asociarla a algo conocido para ellos. Particularmente, al ser las primeras aproximaciones con esta noción, podría pasar que las gesticulaciones de los estudiantes estén asociadas al asombro o sorpresa al tratar de entender dicha noción, o incluso que sean de incertidumbre o frustración al no poder asociar dicha noción a algo que para ellos sea tangible. Otros gestos que probablemente aparezcan en este proceso de objetivación son los gestos deícticos, que son los asociados a señalar específicamente algún lugar en el cual se puede visualizar lo que quieren explicar, como su cuaderno o sus hojas de trabajo. Además, otro tipo de gestos que se considera que podrían aparecer en las argumentaciones de los estudiantes son los icónico-físico que están asociados a un fenómeno en específico, por ejemplo, en el caso de llenado de un recipiente cónico, los estudiantes pueden usar sus manos para representar el crecimiento de la altura del llenado del líquido o para representar el decrecimiento de la altura de la parte no mojada.

Lo anterior, permite pensar que habrá nodos semióticos que circulen dentro del aula en las argumentaciones que utilicen los estudiantes en sus interacciones. De tal forma, que se considera como un nodo importante el concebir a los diferenciales como una cantidad que puede ser manipulada, de tal forma que esto permita realizar y desarrollar cálculos en procesos futuros. Además, un nodo semiótico que será fundamental para poder llegar a la objetivación en el PO1 es el de identificar el diferencial de una magnitud variable independiente. En ese sentido, será importante que los estudiantes puedan comprender para algunas de las magnitudes variables independientes presentes en los fenómenos de estudio, lo que representa su diferencial.

Finalmente, se logrará la objetivación en este PO1 cuando los estudiantes argumenten con precisión y con la menor cantidad de medios semióticos, la noción de diferencial asociada a las magnitudes variables independientes. La intención es que la labor conjunta entre estudiantes y profesor, así como la discusión grupal, permitan que, en sus expresiones verbales y gesticulaciones, los estudiantes puedan tener en este proceso el encuentro con el saber. A continuación, se presenta un esquema que resume todas las consideraciones semióticas presentes en la teoría de la objetivación y que específicamente se considera que formará parte del primer proceso de objetivación.

**Proceso de objetivación 1.** Diferencial de una magnitud variable independiente

Medios semióticos:

- Expresiones verbales
- Gestos de sorpresa, incertidumbre, etc.

- Gestos deícticos
- Gestos icónico-físico

Nodos semióticos:

- Concebir los diferenciales como cantidades
- Identificar el diferencial de una magnitud variable independiente

Contracción semiótica:

- Identificar y expresar de forma precisa ¿qué es el diferencial? para una magnitud variable independiente de estudio en el fenómeno

En el PO2, se considera que algunos de los medios semióticos que formarán parte de las argumentaciones de los estudiantes, son las expresiones verbales, las ecuaciones algebraicas asociadas a fenómenos de la realidad y diferentes tipos de gestos. A diferencia del PO1, aquí las argumentaciones deben estar asociadas a la relación existente entre las magnitudes variables independientes y la dependiente, por lo cual, es importante que los estudiantes expresen las distintas relaciones entre magnitudes y puedan representar algebraicamente su diferencial a partir de su cálculo con alguno de los tres esquemas que se le presentaran en la actividad. Se tiene en cuenta que los gestos de sorpresa o incertidumbre en esta ocasión estarán asociados a esa relación y sus posibles complicaciones. Mientras que los gestos icónicos-físicos ahora deberán evidenciar esa relación, por ejemplo, en el caso del llenado de un recipiente cónico, que los estudiantes puedan asociar el crecimiento del volumen de llenado con el crecimiento de la altura y el radio. Además, podría presentarse un nuevo tipo de gesto, el icónico-simbólico que está asociado con la remembranza de una relación matemática que puede serles de utilidad para los fines de la actividad, en este caso, podría asociarse a la relación algebraica entre el volumen, la altura y el radio del llenado del recipiente.

Los nodos semióticos para el PO2, se espera que surjan en la labor conjunta que haya entre los estudiantes y el profesor. De tal forma, que un primer nodo que debería estar presente en esa interacción es el de concebir los diferenciales como cantidades, que como se mencionó en el PO1, es un nodo que será importante en la mayoría de los procesos de objetivación considerados. Otro nodo que se espera que aparezca en esas interacciones, está asociado con identificar el diferencial de la magnitud variable dependiente. En este caso, se espera que los estudiantes puedan identificar este diferencial, a partir de las relaciones que distinga entre la magnitud variable independiente y la dependiente.

Por último, lo deseable es que la contracción semiótica aparezca cuando los estudiantes en sus argumentaciones relacionen el diferencial de la magnitud variable independiente objetivado en el PO1 con la magnitud variable dependiente, y que lo hagan con argumentos que demuestren solidez en la comprensión de esta relación. Con esto, se podrá señalar entonces que los estudiantes han logrado la objetivación del segundo proceso de objetivación. A continuación, se presenta un esquema que resume todo lo señalado con anterioridad.

**Proceso de objetivación 2.** Diferencial de una magnitud variable dependiente

Medios semióticos:

- Expresiones verbales
- Gestos de sorpresa, incertidumbre, etc.
- Gestos deícticos
- Gestos icónico-físico
- Gestos icónico-simbólico

Nodos semióticos:

- Concebir los diferenciales como cantidades
- Identificar el diferencial de una magnitud variable dependiente

Contracción semiótica:

- Identificar y expresar de forma precisa ¿qué es el diferencial? para una magnitud variable dependiente de estudio en el fenómeno

Los medios semióticos para el PO3 están asociados con los que fueron utilizados en los procesos de objetivación anteriores, pero existen algunas diferencias, las cuales están asociadas con el desarrollo en la representación algebraica entre la relación entre las magnitudes. En ese sentido, los gestos de sorpresa e incertidumbre pueden estar asociados a notar que específicamente los cambios en una magnitud variable independiente repercuten en la magnitud variable dependiente. En esta ocasión, al agregar en este proceso de objetivación el uso de recursos tecnológicos, los gestos deícticos aparte de señalar sus hojas de trabajo, también se podrán identificar en la señalización de las pantallas de la calculadora Voyage200 o sus celulares y/o computadores en el uso del applet de GeoGebra diferenciales.ggb. Los gestos icónico-físico en esta ocasión estarán en la percepción de los diferenciales en la relación entre magnitudes, de tal manera que los estudiantes relacionaran como el diferencial de una magnitud variable independiente influye en el diferencial de una magnitud variable dependiente, en el ejemplo del llenado del recipiente cónico, la intención es que los estudiantes perciban como el diferencial de la altura y el radio, influyen en el diferencial del volumen. Respecto a los gestos icónico-simbólico, se espera que los estudiantes puedan trabajar con las diferentes relaciones establecidas en un fenómeno y que, a partir de su experiencia previa, puedan poner en juego algunas de ellas.

Se espera que los nodos semióticos emerjan en el PO3, a partir de la labor conjunta. Particularmente, sigue siendo el concebir al diferencial como una cantidad el nodo que es considerado el parteaguas para el desarrollo de los otros posibles nodos que pueden surgir en las argumentaciones de los estudiantes. En ese sentido, se espera que un nodo importante que debe estar presente en el discurso de los estudiantes es el de concebir las reglas operativas de los diferenciales, a partir del trabajo realizado a lápiz y papel y de las funciones de usuario de la calculadora Voyage200 o el applet de GeoGebra, la intención es que este nodo sea el que permita que las relaciones entre magnitudes variables puedan llegar a un desarrollo algebraico avanzado. Siguiendo esta idea, lo deseable es que se pusiera en juego un siguiente nodo, el cual consiste en emplear las reglas operativas de los diferenciales y generalizarlas, de tal forma que los estudiantes puedan trabajar con las relaciones entre las magnitudes, a lápiz y papel, y corroborarlo con el uso de los recursos tecnológicos para un fenómeno asociado con la realidad.

La contracción semiótica, se daría cuando los estudiantes puedan realizar y expresar de forma precisa lo que han trabajado al establecer las relaciones entre magnitudes variables y el uso de las reglas operativas, tanto a lápiz y papel como en los recursos tecnológicos. De tal manera, que pueda relacionar lo hecho con ambos recursos y que argumente con solidez las relaciones del diferencial de las magnitudes variables involucradas en algún fenómeno de la realidad.

**Proceso de objetivación 3.** Cálculo y manipulación de diferenciales

Medios semióticos:

- Expresiones verbales
- Gestos de sorpresa, incertidumbre, etc.
- Gestos deícticos
- Gestos icónico-físico
- Gestos icónico-simbólico

Nodos semióticos:

- Concebir los diferenciales como cantidades
- Concebir las reglas operativas con los diferenciales a partir de las funciones de usuario de la calculadora Voyage200
- Emplear las reglas operativas de los diferenciales y generalizarlas

Contracción semiótica:

- Realizar y expresar de forma precisa lo hecho a lápiz y papel, y relacionarlo con lo hecho en los recursos tecnológicos

Una vez que se tengan las ideas desarrolladas de los siguientes procesos de objetivación, la intención es realizar un análisis similar a los presentados con anterioridad.

### 6.1.2 Descripción y desarrollo del diseño de actividades

A partir del análisis a priori realizado, se presentan los detalles de las actividades concernientes a los primeros tres procesos de objetivación. Es importante señalar, que la mayoría de las actividades tendrán asociada una o varias lecturas introductorias con el fin de que los estudiantes se familiaricen y utilicen el lenguaje empleado en el enfoque infinitesimal. Se les solicitará a los estudiantes que fuera del horario de clase consulten las lecturas, para promover en el aula la labor conjunta, donde se comience por la presentación de la actividad y se continúe con una discusión entre equipos y consultas con el profesor, y después una discusión grupal de los aspectos más importantes de las lecturas.

**Proceso de Objetivación 1.** Diferencial de una magnitud variable independiente

Para este proceso, se han diseñado dos actividades (consultar anexo), las cuales provienen de tres lecturas introductorias sobre la noción de diferencial. La intención es que los estudiantes pasen de realizar un análisis macro en sus antecedentes de trabajo con las magnitudes variables involucradas en algún fenómeno de estudio para el curso, a centrarse en estas lecturas a realizar un análisis micro de estas magnitudes, es decir, centrarse en la importancia de prestar atención a los cambios infinitesimales, lo cual permitirá la introducción de la noción de diferencial. Este análisis se propone en una primera instancia que sea llevado a cabo con el tiempo como magnitud variable independiente, de tal forma que esto permita que las características asociadas al cambio en el tiempo hagan más accesible que los estudiantes puedan concebir que el diferencial de esta magnitud sea suave, continuo y con crecimiento uniforme. Una vez realizado esto, se generaliza para el caso de cualquier magnitud variable independiente, resaltando el hecho de que la suma de todos los diferenciales de la magnitud, tiene como resultado el instante actual de ésta.

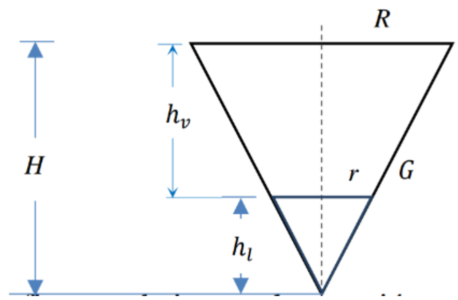
Con estas lecturas, se considera que los estudiantes estarán listos para el trabajo con las actividades diseñadas. La Actividad 1 denominada "*El uso de la notación de Leibniz para representar matemáticamente las variaciones infinitesimales de magnitudes variables*", está asociada con la identificación del diferencial de las magnitudes variables involucradas en el fenómeno del llenado del recipiente cónico y su respectivo significado fenomenológico. Se espera que esta actividad ayude a los estudiantes a darle un significado a la noción de diferencial de las magnitudes variables, particularmente que conciban con precisión el diferencial de una magnitud variable independiente. En la Actividad 2 nombrada "*La variación infinitesimal de una magnitud constante*", se tiene la intención de que los estudiantes puedan cuantificar el diferencial de las magnitudes constantes, de tal forma que, al relacionarlo con el fenómeno del llenado de un recipiente cónico, puedan comprender que estas magnitudes no tienen variación y, por tanto, su diferencial es cero. A continuación, se presentan los detalles de cada una de las actividades.

**Actividad 1.** El uso de la notación de Leibniz para representar matemáticamente las variaciones infinitesimales de magnitudes variables

Se comienza la actividad con la presentación de una imagen asociada con el fenómeno del llenado de un recipiente cónico (Figura 6), en el que se pueden distinguir varias de las magnitudes involucradas en el fenómeno y con el cual se esperaría que los estudiantes ya han tenido experiencias previas.

**Figura 6**

*Representación geométrica plana del llenado del recipiente cónico en la Actividad 1.*




Al tener el antecedente del diferencial del tiempo con su respectivo significado fenomenológico por las lecturas previas, se espera que los estudiantes puedan aprovechar esta experiencia para representar algebraicamente el diferencial de cualquier magnitud variable y describir su significado en términos del fenómeno de estudio, llenando las tablas solicitadas en la actividad (Figura 7).

**Figura 7**

*Ejemplo del llenado de información en la Actividad 1.*

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $H$ |
| Descripción | Altura del recipiente cónico, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

Se tiene considerado que esta actividad dure una hora de clase, comenzando con la presentación de la actividad por parte del profesor, para después pasar a una discusión en cada uno de los equipos. A cada equipo se le dará solo un juego de las hojas de trabajo, con la intención de que lleguen a un consenso que les permita plantear una sola respuesta. Con esto, se busca que los estudiantes sean participes activos en la actividad y que se comprometan a aportar en cada apartado solicitado. Se espera que los estudiantes empiecen a realizar conjeturas asociadas al diferencial, para cada magnitud variable y que describan su significado fenomenológico. A partir de este trabajo en equipos, se espera que circule entre los estudiantes la noción precisa del diferencial, como ese cambio infinitamente pequeño que puede sufrir cualquier magnitud variable. En ese sentido, la idea es que ellos puedan representar algebraicamente (por ejemplo, para el diferencial del radio del área mojada $dr$), ese cambio que es imperceptible pero que está asociado a una cantidad infinitesimal.

En las descripciones se espera que los estudiantes, puedan expresar de forma precisa a lo que cada diferencial haría referencia, sobre todo apegándose a su significado fenomenológico. Por ejemplo, es importante que el diferencial de la altura del recipiente $(H)$ lo conciban como un cambio infinitamente pequeño en la altura la cual es medida en centímetros, pero más allá de eso que consideren el hecho de que, en este caso particular al ser una magnitud constante, entonces no tendrá variación y, por tanto, su diferencial es cero, lo cual harán específico en la siguiente actividad.

En el transcurso de esta actividad, se considera que los estudiantes pondrán en juego los medios semióticos mencionados en el análisis a priori. En particular, se espera que las expresiones verbales y los gestos utilizados al inicio de la actividad asociados con la noción de diferencial, se vayan refinando con el paso de las fases de labor conjunta, esperando que cuando se llegue el momento de la discusión grupal las argumentaciones de los estudiantes puedan tener la precisión que permita aproximarlos a la objetivación de este primer proceso.

Con esto, podría resultar que los estudiantes queden convencidos de que el diferencial de una magnitud variable es una cantidad importante, el cual podría ser estudiado en cualquier fenómeno asociado a la realidad en el que incida.

**Actividad 2.** La variación infinitesimal de una magnitud constante

Esta actividad, se comienza con la presentación de las magnitudes constantes identificadas en el fenómeno del llenado de un recipiente cónico (Figura 8).

**Figura 8**

*Presentación de las magnitudes constantes del fenómeno del llenado de un recipiente cónico.*

| **Constantes y parámetros** |
|---|
| $R$ : el radio del recipiente cónico;<br>$H$ : la altura del recipiente cónico;<br>$G$ : la generatriz del recipiente cónico;<br>$A_l$ : el área lateral del recipiente cónico;<br>$A_s$ : el área de la superficie circular del recipiente cónico (el área "superior");<br>$A$: área total del recipiente cónico (la suma de las áreas lateral y superficial del cono);<br>$\tau$ : el tiempo de llenado o vaciado del recipiente cónico;<br>$F$ : el flujo del líquido hacia o desde el recipiente cónico. |

Para este momento, los estudiantes ya deberían en algún momento de su curso haber identificado las magnitudes constantes de algún fenómeno, en este caso, se esta considerando el del llenado de un recipiente cónico.

Inmediato a esto, se les realiza a los estudiantes un cuestionamiento asociado con el cálculo del diferencial, específicamente se les cuestiona *"¿A cuánto es igual la variación infinitesimal de estas magnitudes físicas?"*, para ello se les solicita que llenen la información presente en la Figura 9.

**Figura 9**

*Cálculo del diferencial de las magnitudes constantes del fenómeno del llenado de un recipiente cónico.*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{dR} &= \quad , \\
\boldsymbol{dH} &= \quad , \\
\boldsymbol{dA_s} &= \quad , \\
\boldsymbol{dA_l} &= \quad , \\
\boldsymbol{dV} &= \quad , \\
\boldsymbol{d\tau} &= \quad , \\
\boldsymbol{dF} &= \quad , \\
\boldsymbol{dG} &= \quad , \\
\boldsymbol{dA} &= \quad .
\end{aligned}
$$

En este caso, el diferencial de estas magnitudes es cero. La intención de promover que los estudiantes calculen el diferencial de las magnitudes que se mantienen constantes en el fenómeno, es que puedan establecer una distinción entre éstas y aquellas magnitudes que son variables, reforzando el hecho de que el diferencial de una magnitud variable independiente es distinto de cero

Inicialmente, teniendo en cuenta las fases de labor conjunta señalada por Radford (2020) y que la intención es que este proceso se lleve a cabo en a lo más 1 hora, se les pediría a los estudiantes discutan con sus equipos de trabajo para que propongan una respuesta conjunta para cada uno de estos diferenciales, basados en argumentaciones solidas de la misma.

Una vez que se desarrolle este trabajo en equipos, se pasará a una discusión general que permita a los estudiantes expresarse de forma precisa con la menor cantidad de medios semióticos para lograr la objetivación del diferencial de una magnitud variable independiente, según lo señalado por Radford (2010) cuando hace referencia a la contracción semiótica. Se considera que los estudiantes habrán logrado la objetivación (el encuentro con el saber), si expresan alguna de las siguientes definiciones recopiladas por Dray y Manogue (2010) sobre los diferenciales:

- cambios arbitrariamente pequeños en las cantidades dadas;
- una notación abreviada para ciertos límites;
- formas diferenciales (véase, por ejemplo, [**10**]);
- los infinitesimales de los números hiperreales (análisis no estándar, véase, por ejemplo, [**14**]);
- todo lo anterior.

**Proceso de Objetivación 2.** Diferencial de una magnitud variable dependiente

Para este proceso de objetivación, se tienen tres actividades diseñadas en una fase preliminar, de tal forma que se espera que éstas sean suficiente para poder lograr el encuentro de los estudiantes con la noción del diferencial de una magnitud variable dependiente. Considerando como un elemento fundamental en este proceso la objetivación desarrollada en el PO1, de tal forma que, con ello logren identificar la relación que se tendrá entre la magnitud variable independiente y la dependiente. En el siguiente apartado se desarrollan con mayor detalle las actividades consideradas en este proceso.

**Actividad 1.** El cálculo algebraico de las variaciones infinitesimales de una magnitud variable dependiente.

Esta actividad, se inicia con una cita de Bezout (1770) que dice lo siguiente

> Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta como más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente; entonces, la diferencia de estos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama diferencial de esa cantidad. (p. 14)

La intención es que los estudiantes la lean detenidamente, de tal forma que puedan formarse una primera concepción del diferencial de una magnitud variable dependiente. Para ello, se espera que discutan con sus compañeros de equipo sobre la cita anterior y que lleguen a un consenso para atender la primera solicitud de la actividad, que consiste en que redacten el significado matemático que tiene el diferencial de una magnitud variable dependiente.

Una vez que se cumpla con este primer requisito, inmediatamente se les solicita a los estudiantes que planteen, aunque sea en palabras el procedimiento descrito por Bezout para calcular el diferencial de una magnitud variable dependiente. Con esto, se espera que puedan comprender que el diferencial de una magnitud variable dependiente estará asociado con el diferencial de una magnitud variable independiente, es decir, que el cambio infinitamente pequeño que tenga esta última repercute en la variación infinitesimal de la magnitud variable dependiente.

Finalmente, se concluye esta primera actividad solicitando a los estudiantes que representen algebraicamente este diferencial escrito con palabras con anterioridad, de tal forma que se pide que lo realicen para dos magnitudes variables genéricas, una independiente que se denominó $z$ y para una dependiente llamada $u$. Con esto, se espera que los equipos al compartir sus ideas con los otros en una discusión grupal puedan representar de forma precisa, la relación de entre magnitudes variables con la cual puedan calcular el diferencial de cualquier magnitud variable dependiente, esta es $du = u(z + dz) - u(z)$.

Se espera que esta actividad tenga duración de una hora, esperando que sea suficiente para que los estudiantes vayan encaminados a la objetivación del diferencial de una magnitud variable dependiente.

**Actividad 2.** El cálculo algebraico de las variaciones infinitesimales de una magnitud variable dependiente. Caso 2.

Aprovechando lo hecho en la actividad anterior del PO2, se inicia esta actividad planteando los tres posibles escenarios para realizar el cálculo del diferencial de una magnitud variable dependiente (Arcos, 2004), estos son:

$$du = u(z + dz) - u(z)$$

$$du = u(z) - (z - dz)$$

$$du = \frac{u(z + dz) - u(z - dz)}{2}$$

Para mostrar la importancia de considerar cualquiera de estas tres relaciones en el cálculo del diferencial de una magnitud variable independiente, se presenta el siguiente ejemplo: si queremos calcular el diferencial de la relación $u(z) = z^2$

Con esta estrategia podríamos calcularla en cualquiera de las siguientes formas:

a) $du = u(z + dz) - u(z)$

$$du = (z + dz)^2 - z^2$$

$$du = z^2 + 2zdz + dz^2 - z^2$$

$$du = 2zdz$$

b) $du = u(z) - u(z - dz)$

$$du = z^2 - (z - dz)^2$$

$$du = z^2 - z^2 + 2zdz - dz^2$$

$$du = 2zdz$$

c) $du = \frac{u(z+dz)-u(z-dz)}{2}$

$$du = \frac{(z + dz)^2 - (z - dz)^2}{2}$$

$$du = \frac{z^2 + 2zdz + dz^2 - z^2 + 2zdz - dz^2}{2}$$

$$du = \frac{4zdz}{2} = 2zdz$$

Una práctica similar a ésta se realiza en un curso de Análisis Numérico, cuando se aborda el tema de diferenciación.

En el caso de la actividad, se propone que se trabaje con las relaciones establecidas previamente en el curso, sobre el fenómeno del llenado de un recipiente cónico. Particularmente, se les pide que trabajen con el cálculo del diferencial de las relaciones de proporcionalidad directa encontradas en el fenómeno. A manera de ejemplo, se muestra el caso de la relación entre el radio y la altura del líquido de la superficie circular:

$$h_l = \frac{H}{R} r \,.$$

$$0 \leq r \leq R \;, \quad 0 \leq h_l \leq H \;.$$

Su diferencial, podría calcularse con cualquiera de los tres escenarios anteriores, en particular se hace para el segundo caso.

$$\text{b)}\;\; dh_l = h_l(r) - h_l(r - dr)$$

$$dh_l = \frac{H}{R} r - \frac{H}{R}(r - dr)$$

$$dh_l = \frac{H}{R} r - \frac{H}{R} r + \frac{H}{R} dr$$

$$dh_l = \frac{H}{R} dr$$

Lo anterior, tiene la intención de ir acercando indirectamente a los estudiantes a la aplicación de las reglas operativas de los diferenciales, la cual se profundizará con mayor detalle en el siguiente proceso de objetivación. Además, se les pide que realicen este cálculo para otras cinco relaciones, para lo cual se espera que en el trabajo primero en equipos y luego grupal, permita calcular de forma precisa cada uno de esos diferenciales, esperando que utilicen de manera indistinta los tres escenarios anteriores. Lo deseable es que esta actividad sea llevada a cabo en a lo más una hora de clase.

**Actividad 3.** El cálculo algebraico de las variaciones infinitesimales de una magnitud variable dependiente. Caso 3.

Esta actividad es una continuación de la anterior, solo que en este caso las relaciones entre magnitudes se centran en aquellas que contienen una ley de conservación aditiva. Por ejemplo, para el caso de la altura total del recipiente se sabe que es igual a la suma de la altura del líquido y de la parte vacía, es decir, $H = h_l + h_v$. En todos estos casos, está involucrada una magnitud constante, de tal forma que los estudiantes tendrán que poner en práctica lo aprendido en actividades anteriores acerca del diferencial.

Para el caso anterior, el diferencial se calcularía de la siguiente forma:

$$dH = (h_l + dh_l) - h_l + (h_v + dh_v) - h_v$$

$$0 = dH = dh_l + dh_v$$

Con esto, se espera que los estudiantes empiecen a concebir el diferencial de la relación entre distintos tipos de magnitud. Además, se espera que con esta actividad se fortalezca el hecho de que los estudiantes puedan expresarse con precisión acerca de la noción del diferencial de una magnitud variable dependiente. A estas alturas se tiene una versión en borrador de las actividades 2 y 3, el caso de la Actividad 1 para este proceso de objetivación se incluye en los anexos.

**Proceso de Objetivación 3.** Cálculo y manipulación de diferenciales

En este proceso de objetivación, será importante considerar las objetivaciones que los estudiantes han desarrollado en los procesos previos. Por lo tanto, esa experiencia anterior les permitirá centrarse en este proceso en la relación entre magnitudes variables que se busca objetivar. Para eso, se ha dividido este proceso en dos actividades, esperando que en la primera de ellas los estudiantes puedan desarrollar y manipular las reglas operativas que se tendrá para los diferenciales. Con lo anterior, los estudiantes deberán reconocer de forma instantánea la relación existente entre los diferenciales de las magnitudes presentes en cada caso. Para la segunda actividad, se espera que los estudiantes empleen estas reglas operativas, de tal forma que les permita calcular el diferencial para los fenómenos asociados a la realidad que le sean planteados, y que, a partir de ello, puedan comprender la relación existente entre el diferencial de las magnitudes involucradas en cada uno de esos fenómenos.

Hasta este momento, aún no están diseñadas las actividades consideradas para este proceso de objetivación, pero en la parte inferior se bosquejan las intenciones que se tendrían en cada una de éstas.

**Actividad 1.** Definición de las reglas operativas de los diferenciales

Para este proceso, se busca lograr la objetivación del cálculo y la manipulación de los diferenciales considerando éste un paso fundamental para llegar posteriormente a la modelación matemática de fenómenos de la física con las EDO. A partir de la labor conjunta, los estudiantes ya habrán logrado la objetivación de los diferenciales de las magnitudes variables independiente y dependiente, respectivamente. Con esto, será necesario definir las reglas operativas de los diferenciales, las cuales para estas instancias se practicarán en un primer momento a lápiz y papel, y después con el uso de la tecnología.

Para ello, es importante señalar que los diferenciales al ser cantidades infinitamente pequeñas cumplen con las siguientes condiciones:

i. $dx > 0$, para cualquier magnitud variable $x$
ii. $dx^n = 0$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

iii. $dx * dy = 0$, para $x \neq y$

A partir de lo anterior, las reglas operativas quedarían definidas de la siguiente manera:

- ❖ Suma y resta

$$d(x \pm y) = dx \pm dy$$

- ❖ Multiplicación

$$d(x * y) = ydx + xdy$$

- ❖ División

$$v = \frac{x}{y}$$

$$v + dv = \frac{x + dx}{y + dy}\left(\frac{y - dy}{y - dy}\right)$$

$$v + dv = \frac{xy - xdy + ydx - \cancelto{0}{dxdy}}{y^2 - \cancel{ydy} + \cancel{ydy} - \cancelto{0}{dy^2}}$$

$$v + dv = \frac{xy - xdy + ydx}{y^2}$$

$$\boxed{v} + dv = \boxed{\frac{xy}{y^2}} + \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$dv = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

A continuación, con el fin de poner en práctica las reglas previamente señaladas se presentan una serie de ejemplos que están planteados para dos magnitudes variables. Estos ejemplos son solo ilustrativos, y el fin más importante en este momento es que se vea reflejado el potencial del programa diseñado en la calculadora Voyage200, ya que se tiene conciencia de que usualmente el planteamiento algebraico de los fenómenos físicos, en su mayoría, no suele tener un nivel de exigencia elevado en cuestiones de cálculo de diferenciales.

**Ejemplos:**

Calcule los diferenciales de las siguientes ecuaciones, considerando cada literal como una magnitud variable.

1) $4a - 2b = a^2b$

$$4da - 2db = 2abda + a^2db$$

2) $uv = 4$

$$vdu + udv = 0$$

3) $\frac{h}{i} = 2i + 4$

$$\frac{idh - hdi}{i^2} = 2di$$

4) $F = ma$

$$dF = mda + adm$$

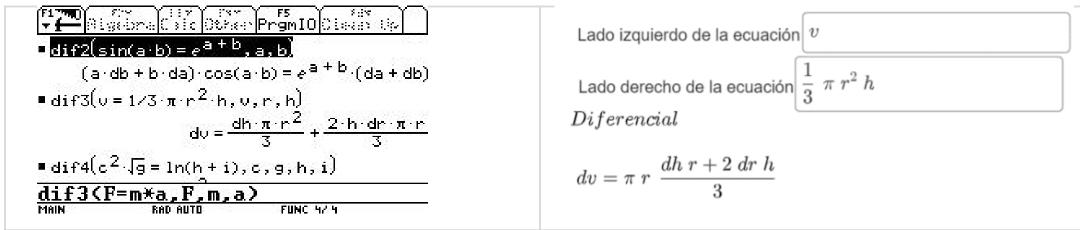
A estas alturas se introducirá el uso de la calculadora Voyage200 para la manipulación de los diferenciales, en el programa diseñado se les pide a los estudiantes que introduzcan las magnitudes variables a utilizar (a estas alturas solo se ha realizado para dos magnitudes) y finalmente la expresión a la que se le realizará el cálculo de los diferenciales

Abordar el uso de tecnología a partir de lo que se plantea en la TO es algo que se tiene contemplado, uno de los aspectos importantes a mencionar es que en la teoría los recursos tecnológicos son considerados como artefactos, para los cuales Radford (2006) señala que "no son meras ayudas al pensamiento ni simples amplificadores, sino partes constitutivas y consustanciales de éste" (p. 107). Aunado a ello, se agrega en la teoría que en el territorio de los artefactos (término acuñado en la teoría de las ideas de Voloshinov (1973)) es donde los procesos de subjetivación y de objetivación se acoplan. Justamente, uno de los elementos de la teoría que será fundamental para el proyecto son los procesos de objetivación, los cuales son parte del desarrollo del aprendizaje, de estos Radford (2020) menciona que "son aquellos procesos de notar algo culturalmente significativo, algo que se revela a la conciencia no pasivamente sino por medio de la actividad corpórea, sensible, afectiva, emocional, artefactual y semiótica" (p. 20). En el caso particular del proyecto que se está realizando, se están proponiendo varios procesos de objetivación, entre los cuales los primeros de ellos están basados en la introducción y conocimiento de la noción de diferencial de magnitudes variables, los siguientes están enfocados en la manipulación de los diferenciales y más adelante el surgimiento del modelo matemático con una EDO y su posterior solución. Particularmente, se tiene considerado que sea en este proceso de objetivación, denominado cálculo y manipulación de los diferenciales en el cual sea introducido el uso de tecnología.

Por tanto, si retomamos los ejemplos anteriores, entonces podemos calcular en la función de usuario y el applet de GeoGebra los resultados:

**Figura 10.**

*Cálculo de diferenciales en la calculadora CAS Voyage200 y el applet de GeoGebra*

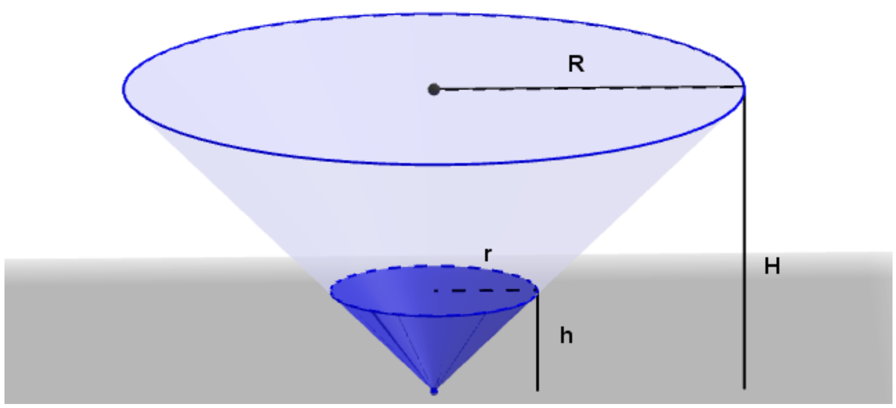



**Actividad 2.** Aplicación de las reglas operativas en fenómenos asociados a la realidad

Es importante señalar que la intención es que se retomen los fenómenos físicos que se han planteado previamente (puente colgante, llenado de recipiente cónico y descarga de condensador), y que a partir de ellos se haga el cálculo y la manipulación de los diferenciales, pero al no tener todavía el programa con al menos 3 magnitudes variables, solo se ha prestado atención a mostrar ejemplos con dos magnitudes variables, pero para ejemplificar lo que se realizaría en esta etapa para los fenómenos, se presenta a continuación el caso del llenado de un recipiente cónico:

**Figura 11.**

*Llenado de recipiente cónico.*




Para esta etapa, los estudiantes debieron identificar adecuadamente cuales son las magnitudes variables que están siendo consideradas en el fenómeno, por tanto, no debería ser complejo para ellos advertir que una ecuación que podría ser útil para determinar esas magnitudes es la asociada con el cálculo del volumen, la cual se representa a continuación:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

Si buscamos el cálculo de los diferenciales de las magnitudes, tendríamos de manera simplificada que

$$dV = \frac{1}{3}(2\pi r dr h + \pi r^2 dh).$$

Esto mismo, debería poder replicarse en el programa de la calculadora Voyage200, pero como se señaló previamente, el programa solo se ha realizado contemplando dos magnitudes variables.

Al igual que en el proceso de objetivación 2, falta considerar los tiempos de duración que se tienen contemplados en cada actividad, así como los cuestionamientos que se contemplarán en el desarrollo de éstas.

**Proceso de Objetivación 4.** Manipulación y cálculo del diferencial en fórmulas matemáticas.

A parte de las reglas operativas, es importante presentar a los estudiantes aquellos casos más representativos en el cálculo de diferenciales, como:

Potencias

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx$$

Trigonométricas

$$d\big(sen(x)\big) = \cos(x)dx$$

$$d\big(cos(x)\big) = -\text{sen}(x)dx$$

Exponenciales

$$d(e^x) = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}dx$$

Logarítmicas

$$d\big(ln(x)\big) = \frac{1}{\mathrm{x}}dx$$

Incluso, la regla de la cadena

$$u = (\underbrace{x^2 + 2x}_{})^2$$

$$v = x^2 + 2x$$

$$dv = (2x + 2)dx$$

$$u = v^2$$

$$u + du = (v + dv)^2$$

$$u + du = v^2 + 2vdv + \cancel{dv^2}$$

$$u + du = (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x)(2x + 2)dx$$

$$du = 2(x^2 + 2x)(2x + 2)dx$$

$$d[(x^2 + 2x)^2] = 2(x^2 + 2x)(2x + 2)dx$$

(NOTA: Claramente falta precisar las formas en las cuales serán introducidas estas reglas que tendrán que ver con el desarrollo de los procesos de objetivación previos a este).

## 6.2 CONSIDERACIONES PARA UNA PRIMERA PUESTA EN ESCENA

Para la puesta en escena, hay factores que serán importantes tomarlos en cuenta debido a la teoría que se está utilizando y al enfoque que se está proponiendo. Al considerar los medios semióticos que empleen los estudiantes como parte fundamental de la objetivación, es importante que se realice una captura de esos momentos, por tanto, la videograbación es una de las cosas que hasta este momento se pretende realizar. Otro elemento que hay que tener en mente, es que el enfoque que se promueve no es el tradicional, lo cual limita las posibilidades de quien sea la persona que lleve a cabo la implementación, que hasta ahora se tiene en consideración a que sea el autor del proyecto o una persona conocedora de este enfoque, la persona que se encargue de ello.

Es importante señalar que, para la primera experimentación, se trabajará con 28 estudiantes de Ingeniería Industrial, que cursan la materia de Cálculo Diferencial e Integral 1 en el primer semestre y que ya llevan un avance significativo en el curso, en el cual han trabajado bajo el enfoque infinitesimal. Los estudiantes serán llevados a un aula que permite tener un espacio adecuado de trabajo, y donde además se encuentran las calculadoras Voyage200, las cuales serán útiles para el cálculo de diferenciales a partir del proceso de objetivación 3. La intención es que se formen equipos de tres personas y que uno de ellos se encargue de grabar lo que hagan sus otros compañeros, con el fin de recopilar la mayoría de las acciones que se lleven a cabo en el aula por parte de los estudiantes.

Además, es de resaltar que al estar trabajando con un grupo al cual se le ha promovido el enfoque infinitesimal desde el inicio del curso de Cálculo Diferencial e Integral 1, entonces las actividades se han adaptado al ritmo de trabajo que los estudiantes tenían. Por tanto, las actividades forman parte de la continuidad del curso y estarán siendo consideradas como parte fundamental para la evaluación de los estudiantes, con lo cual se espera que éstos asuman el compromiso, la responsabilidad y el cuidado por el otro, en el desenvolvimiento que se tenga en el aula.

Para el desarrollo de las actividades en el aula, se tienen consideradas las fases de labor conjunta que señala Radford (2020), las cuales son: presentación de la actividad por el profesor(a), trabajo en pequeños grupos, discusiones profesor(a)-estudiante, discusiones entre grupos y discusión general. En ese sentido, la intención en este punto es que tanto profesor como alumnos deben ser partícipes activos a lo largo de la actividad.

En la presentación de la actividad, se espera que el profesor comparta todos los detalles involucrados en la actividad. Particularmente, les pedirá a los estudiantes que previo a trabajar con la actividad y fuera del horario de clases, realicen una lectura que se les brindará como apoyo para que se familiaricen con el lenguaje utilizado, en busca de que se basen en él para las argumentaciones que ellos utilicen en la actividad dentro del aula.

En el trabajo en pequeños grupos, se espera que los estudiantes realicen comentarios sobre la lectura que les solicitó el docente, de tal forma que distingan aquellos elementos importantes que han identificado, y que a su vez les permita trabajar con la actividad solicitada. En ese sentido, aunque en un inicio lo más seguro es que no sean muy precisos en su forma de expresarse, se espera que los estudiantes empiecen a utilizar algunas argumentaciones que se puedan asociar con el enfoque infinitesimal, y particularmente, con los diferenciales. Podría ser un poco ambicioso pensarlo, pero quizás desde este momento se puedan detectar los nodos semióticos que se han propuesto en el análisis a priori, sobre todo, sabiendo que los estudiantes ya han trabajado previamente con el enfoque infinitesimal, y que eso les permita pensar en el diferencial como una cantidad manipulable.

Se espera que, en ese trabajo entre equipos, el profesor circule por donde se encuentran cada uno de ellos, con el fin de atender aquellas dificultades que presenten los estudiantes para comprender la actividad. La intención es que su ayuda, les sea de utilidad a los equipos para reorientar la actividad hacia el objetivo deseado de la misma, es a esta parte que en la TO se le denomina interacción profesor-estudiante. En este caso, al estar trabajando con varios equipos, será importante que se cuente con ayuda, por lo cual se tiene considerado ser dos los profesores que estén en el aula interactuando con los estudiantes. Además, se ha pensado en contar con un observador que ayude a recopilar información que, quizás pueda pasar desapercibida para los profesores y sea relevante en la experimentación. En este momento, se esperaría que la actividad vaya encaminada a la detección de varios medios semióticos y el refinamiento de éstos para la identificación de algunos nodos semióticos.

Se busca que a partir del trabajo que se haya realizado en cada equipo y de la interacción con el profesor, se realice una discusión entre los equipos que permita hacer circular los nodos semióticos identificados. Es importante señalar, que esta fase quizás no sea llevada a cabo y que se pase directamente a la discusión grupal, tal como se señala en la TO. Lo anterior, se tiene considerado que suceda cuando el tiempo en clase este muy limitado. A pesar de ello, la intención es que en esta parte se refuerce y clarifiquen los nodos semióticos que estén presentes en cada proceso de objetivación, con el fin de ir encaminados a que en la discusión grupal se llegue a una precisión en la argumentación de los estudiantes y sus formas de expresarse.

Para cerrar cada proceso de objetivación la intención es que, en la discusión general, los estudiantes puedan expresarse con precisión en la comunicación que tengan con el resto del grupo. Lo deseable es que los estudiantes puedan argumentar sus ideas no solo de forma verbal, si no también gestual, es decir, que coordinen adecuadamente lo que expresan con sus palabras con lo que gesticulan con los brazos o su rostro. Particularmente, en términos de la TO estaríamos diciendo que en este momento se tendría una contracción semiótica, y en consecuencia, los estudiantes tendrían el encuentro con el saber (objetivación).

La intención es que una vez que se culmine con estas fases de labor conjunta, los estudiantes entreguen sus hojas de trabajo y que compartan las videograbaciones que se tengan sobre el desarrollo de las actividades. Para ello, se les pedirá que esas filmaciones las suban al portal de la plataforma Microsoft Teams que su profesor a cargo a creado para el curso. Finalmente, se busca que el observador entregue un reporte al final de cada sesión y que se comente con él, las cosas que hayan llamado la atención en este proceso. El fin de esto, es tener la mayor cantidad de evidencia que permita realizar un análisis detallado para la distinción de los recursos semióticos empleados por los estudiantes, los nodos semióticos surgidos en las interacciones y la contracción semiótica a la cual podrían llegar. Además, esa recopilación permitirá identificar la pertinencia del enfoque promovido y sobre todo de las actividades diseñadas.

## 6.3 ELEMENTOS DE ANÁLISIS PARA LA PROPUESTA

Para el análisis, será importante que al contar con una gran cantidad de estudiantes y por tanto muchas hojas de trabajo, el discriminar entre ellas. Para ello, será importante considerar lo que Radford (2013) señala como las virtudes que deben tener los estudiantes ante la actividad: compromiso, responsabilidad y cuidado por el otro.

En el caso del compromiso, para que los procesos de objetivación puedan ser promovidos es importante que los estudiantes sean participes activos, es decir, que asuman un papel activo en el desarrollo de los procesos de objetivación y que formen parte de las interacciones que se lleven a cabo en el aula. Respecto a la responsabilidad, es importante que cada estudiante se haga responsable no solo de la entrega oportuna de cada actividad, sino también de cada actuar que éste tenga en el aula. En el cuidado con el otro, los estudiantes deben sensibilizarse respecto a las respuestas que sus compañeros brinden a cada actividad, con ello, se desea que los estudiantes intenten comprender y complementar las argumentaciones que el resto de sus compañeros realicen.

Al no tener certeza sobre si los elementos anteriores serán suficientes para poder realizar una selección adecuada de la información, se considerará importante el desempeño académico que hayan tenido los estudiantes en el trabajo previo que han desarrollado en el curso.

Se considera que hacer una discriminación entre la recopilación de información, será fundamental para poder analizar los medios semióticos empleados, los nodos semióticos surgidos y finalmente la contracción semiótica establecida, para lograr la objetivación en cada uno de los procesos planteados. Pero, sobre todo, la intención es que se pueda analizar la pertinencia de las actividades diseñadas y del enfoque promovido.

Se tiene pensado realizar un proceso de seguimiento de los estudiantes con los que se trabaje en los cursos de Cálculo, con el fin de ver si las herramientas que adquirieron a partir de las actividades promovidas en la propuesta le fueron de utilidad en su curso de Ecuaciones Diferenciales.

# 7 CONCLUSIONES

Lo presentado aquí es el avance logrado hasta el momento. La intención que se tiene es tratar de reflejar la pertinencia del proyecto de intervención, debido a que se está trabajando con un enfoque que no es el que usualmente se presenta en las aulas, el cual es el enfoque infinitesimal, y por tanto, uno de los aspectos importantes a desarrollar en la propuesta es convencer de que justamente se puede aplicar éste a fenómenos asociados de la realidad y sobre todo, contrastarlo con la forma en la que tradicionalmente estos son presentados en las aulas. Esto permitirá, que lo que se reporta en varios documentos (Imaz y Moreno, 2010; Dray y Manogue, 2010; Ely, 2020; Ely y Samuel, 2021), sobre el diferencial como una noción fundamental en este enfoque, pueda ser profundizada a tal grado que la introducción de la noción de ecuación diferencial ordinaria podría surgir de forma natural, a partir de las ideas construidas en el proceso previo sobre la conceptualización precisa del diferencial.

Por otro lado, está el trabajar en la pertinencia de que la Teoría de la Objetivación es la adecuada para el proyecto y aunque ha tomado tiempo el que se viera reflejado que había elementos que por un lado permitían desarrollar un proyecto de intervención, y por otro, ponerlo en escena y analizarlo, se considera que ya se dio un paso adelante. Pero, todavía existe un gran trabajo por hacer respecto a lo que permitirá la teoría respecto al diseño de la intervención, profundizar sobre los elementos que están presentes dentro de la misma teoría, como los asociados a la semiótica y evidenciar de forma clara la pertinencia de trabajar con esta teoría en un proyecto de intervención, lo cual quizás se logre cuando se tenga un primer bosquejo completo de los procesos de objetivación y de las actividades que se desarrollaran en cada uno de ellos. Además, será importante el tener un análisis a priori de los posibles medios semióticos y nodos que pudieran surgir en cada una de ellas, para finalmente plantear la contracción semiótica en cada proceso.

En este momento, se está trabajando en el apartado que consiste en la propuesta, pero al estar en una fase inicial no se agregó a este documento. Se tienen desarrolladas cinco actividades que serán contempladas, de las cuales:

- La Actividad 1, que tiene el nombre "*El uso de la notación de Leibniz para representar matemáticamente las variaciones infinitesimales de magnitudes variables*" y la Actividad 2, "*La variación infinitesimal de una magnitud constante*", están consideradas dentro del proceso de objetivación 1, cuya intención es que los estudiantes puedan tener el encuentro con la noción de diferencial de una magnitud variable independiente.
- La Actividad 1, "*El cálculo algebraico de las variaciones infinitesimales de una magnitud variable dependiente*", la Actividad 2, "*El cálculo algebraico de las variaciones infinitesimales de una magnitud variable dependiente. Caso 2*" y la Actividad 3, "*El cálculo algebraico de las variaciones infinitesimales de una magnitud variable dependiente. Caso 3*", están consideradas dentro del proceso de

objetivación 2, cuya intención es que los estudiantes puedan tener el encuentro con la noción de diferencial de una magnitud variable dependiente.

Además, se está realizando una primera puesta en escena de las primeras actividades con el grupo de Ingeniería Industrial, lo cual se reporta con mayor detalle en el apartado de Metodología. Aunque no se tenga el apartado de la propuesta desarrollado, se puede consultar en el apartado de anexos un avance de las primeras tres actividades que se señalaron previamente.

Es importante mencionar que estas actividades tienen una o varias lecturas previas asignadas, con la intención de que el lenguaje empleado en sus argumentaciones se asocie con el enfoque infinitesimal. Estas lecturas fueron propuestas por el profesor a cargo, debido a que esa era la forma de trabajar que tenía con el grupo y, sobre todo, a la experiencia que éste tiene con promover el enfoque infinitesimal en sus cursos de Cálculo. Sabiendo esto, para tener continuidad en el curso en el cual se está trabajando, se adecuaron las actividades a la experiencia que tenían los estudiantes con este enfoque y a las lecturas propuestas.

En esta parte de diseño, aún queda trabajo por hacer en los siguientes procesos de objetivación. Aunque ya se tienen ideas pensadas sobre los elementos que se consideraran en cada actividad a diseñar, no se han capitalizado en hojas de trabajo. Se considera que el proceso de objetivación que podría llevar más tiempo de realizar es el PO6 denominado "Modelación matemática de un fenómeno de la realidad con una EDO", ya que en este se introducirá el ciclo de modelación propuesto por Rodríguez y Quiroz (2016), y será necesario cuidar los detalles en la conexión que tendrá éste, respecto al enfoque infinitesimal y la Teoría de la Objetivación. Cabe recordar, que se busca construir el puente conceptual entre el curso de Cálculo Diferencial y el de Ecuaciones Diferenciales con estos siete procesos de objetivación. Para el puente procedimental, aún no se tiene claro cuántos procesos de objetivación se consideran en el diseño, y que, aunque se sabe que se trabajara con la acumulación y con el teorema fundamental del cálculo como elementos centrales para el desarrollo de las soluciones de las EDO, no se tiene claro que tanta profundidad se le dará a la conexión entre el Cálculo Integral y las Ecuaciones Diferenciales.

Además, se tiene la intención de que el siguiente semestre se realice una nueva puesta en escena en la cual se puedan considerar más actividades y más procesos de objetivación, respecto a los que se tienen hasta el momento, y de ser posible se aprovechará que el siguiente semestre se impartirá el curso de Cálculo Integral en la Universidad de Sonora, para poder diseñar y aplicar los procesos de objetivación asociados con el puente procedimental. También, se valorará la importancia de la implementación que se lleva a cabo en estos momentos, para realizar los ajustes necesarios para las posteriores experimentaciones, de tal forma que todo lo que concierne a la Teoría de la Objetivación, como medios semióticos, nodos semióticos y la contracción semiótica, se analizará con detalle.

Finalmente, se tiene la intención de indagar más sobre los elementos que se podrán considerar para el análisis y valoración de la propuesta, a partir de lo que los estudiantes realicen en las hojas de trabajo y en las videograbaciones que se registren.

# CRONOGRAMA

En este apartado, se presenta el cronograma de los avances que se han tenido en el proyecto y las proyecciones futuras que se tienen para los siguientes semestres.

| | Semestre 1 | Semestre 2 | Semestre 3 | Semestre 4 | Semestre 5 | Semestre 6 | Semestre 7 | Semestre 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Antecedentes | | | | | | | | |
| Problemática | | | | | | | | |
| Justificación | | | | | | | | |
| Objetivos | | | | | | | | |
| Elementos teóricos | | | | | | | | |
| Metodología | | | | | | | | |
| Diseño | | | | | | | | |
| Puesta en escena | | | | | | | | |
| Valoración | | | | | | | | |

Se espera que en los años restantes del Posgrado se tengan más participaciones en eventos de Matemática Educativa, así como publicaciones en revistas importantes. También, se espera realizar una estancia que permita realizar consideraciones importantes. Todo esto, tiene con la intención de dar a conocer el trabajo que se está realizando, sobre todo por la importancia de promover un enfoque de enseñanza distinto al que se presenta en las aulas.

# REFERENCIAS

Alexopoulos, J. (1999). Implicit differentiation on the TI-92+ calculator as an illustration of some powerful programming features. Electronic Proceedings of ICTCM-12, San Francisco, CA. Disponible en línea en http://202.38.126.65/mirror/archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-12/C16/paper/paper.pdf

Arcos, J. (2004). Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las Matemáticas: el caso del cálculo infinitesimal. Tiempo de educar, 5(10), 77-110.

Barrera, J., Téllez, P., León, I. y Amaya, T. (2012). Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con Derive: de la solución algebraica a la solución gráfica. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 25, pp. 1425-1433.

Bernoulli, J. (1690). "Analysis problematis antehac propositi, de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibu aequalibus aequales altitudines ematiatur: et alterius cujusdam problematis propositio." Acta Eruditorum, May 1690, 217-219.

Bezout, E. (1770), Cálculo infinitesimal, Limusa-IPN, México.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.). PNA 3(3), pp. 123-133.

Carranza, B. (2019). Estrategias dinámicas para la introducción de la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con perspectiva de género. Un caso de simulación digital del fenómeno de caída libre. *(Tesis de Maestría inédita). México: CINVESTAV.*

Dray, T. & Manogue, C. (2010). Putting differentials back into calculus. *College Mathematics Journal, 41*, 90-100.

Dullius, M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico (Tesis inédita de Doctorado). Universidad de Burgos, España.

Ely, R. (2020). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. ZDM (2021) 53:591–604.

Ely, R. & Samuels, J. (2021). Differentials as quantities in calculus. PME-NA 2021 working group Didactic Contrasts Between Calculus and Analysis

Henao, S. (2016). *La constitución de las Ecuaciones diferenciales ordinarias como disciplina matemática. Un análisis histórico-epistemológico.* Universidad Autónoma de Guerrero, Maestría en Educación Matemática. México: Universidad Autónoma de Guerrero.

Huygens. (1673). *Horologium Oscillatorium sive motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometricae.* Apud F. Muguet, regis & illustrissimi archiepiscopi typographum, viâ Cithæ, ad insigne trium Regum. Paris.

Ímaz, C. & L. Moreno (2010). La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor. México, Trillas.

Jiménez, J., Grijalva, A., Milner, F., Dávila, M. & Romero, C. (2023). Reconceptualización Didáctica del Cálculo. Editorial de la Universidad de Sonora

Kline, M. (1992). Las ecuaciones diferenciales ordinarias en el siglo XVIII. En: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Vol. II, págs. 622-665). Madrid, España: Alianza.

L'Hospital (1696), "Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes.", Paris, L'Imprimerie Royale.

Nápoles, J. (1998). El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias, consideraciones (auto) criticas. Boletín de matemáticas, 5, 53-79.

Nápoles, J., & Negrón, C. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. *Revista electrónica de didáctica de las matemáticas, 3*(2), 33-57.

Nápoles, J., & Rojas, O. (2020). Las ecuaciones diferenciales ordinarias en un contexto realista. *Paradigma, 41*(1).

Perdomo, J. (2010). Construcción del concepto de ecuación diferencial ordinaria en escenarios de resolución de problemas (Tesis inédita de Doctorado). Universidad de la Laguna, España.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. Mathematical Thinking and Learning, 5(1), 37-70

Radford, L. (2005). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Australia, Vol. 1, pp. 143-145.

Radford, L. (2006) Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Relime, Número especial, p. 103-129.

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. ZDM – The International Journal on Mathematics Education. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Radford, L. (2010). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello, F. (Eds.), Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education (CERME 6) (pp. XXXIII – LIII). Université Claude Bernard, Lyon, France.

Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramirez y Y. Morales (Eds). Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana, November 6-8, 2013. Plenary Lecture.

Radford, L. & Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C., & Presmeg, N. (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education (pp. 157-182). New York: Springer.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, 12(2), 61-80

Radford, L. (2020a). Un recorrido a través de la teoría de la objetivación [A journey through the theory of objectification]. In S. Takeco Gobara & L. Radford (Eds.), *Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática* (pp. 15-42). São Paulo, Brazil: Livraria da Física.

Radford, L. (2020b). ¿Cómo sería una actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta en la teoría de la objetivación [What would an emancipatory teaching-learning activity look like? Joint labour in the theory of objectivation]. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, RECME, Número especial de la Teoría de la Objetivación*, 5(2), 15-31.

Radford, L. (2021). Aspectos conceituais e práticos da teoria da objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural (pp. 35-56). São Paulo: Livraria da Física.

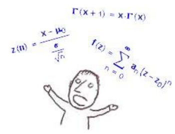
Radford, L. (2023). ¿Qué significa aprendizaje colectivo? ¿Cómo lograrlo en la clase de matemáticas? [What does collective learning mean? How to achieve it in the mathematics classroom?]. Revista Μαθηματικά: epistemologia e educação.

Recalde, L. & Henao, S. (2018). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Revista EIA*, 15(29), enero-junio, pp. 59-70. [Online]. Disponible en: https://doi.org/10.24050/reia.v15i29.1140

Rodríguez, R. & Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *19*(1), 99-124. https://doi.org/10.12802/relime.13.1914

Rubal, D. (2018). Secuencia de actividades didácticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria y sus soluciones. Tesis de Maestría. México: Universidad de Sonora.

Verón, M., Giacomone, B. & Benítez, M. (2022). Significados que los estudiantes de ingeniería otorgan al concepto de diferencial. *Advances in Engineering and Innovation* Vol. 7, No. 15, pp. 86-94, Julio - Diciembre 2022



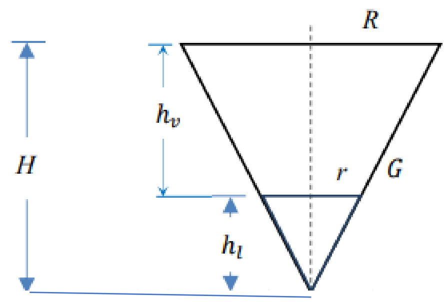
TEMA 6

*Diferenciales*

## ACTIVIDAD 1

## *El uso de la notación de Leibniz para representar matemáticamente las variaciones infinitesimales de magnitudes variables.*

**ACTIVIDAD**. De nuevo, utilizaremos como ejemplo concreto el conjunto de magnitudes físicas, tanto constantes como variables, que figuran en el proceso dinámico de llenado o vaciado del recipiente cónico.




En cada una de las tablas que figuran abajo, usa la notación propuesta por Leibniz para representar matemáticamente el diferencial de la magnitud variable. Llena en cada tabla los espacios vacíos con las inscripciones y descripciones (significados) adecuadas.

**1**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $R$ |
| Descripción | Radio del recipiente cónico, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**2**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $H$ |
| Descripción | Altura del recipiente cónico, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**3**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $G$ |
| Descripción | Generatriz del recipiente cónico, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**4**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $A_l$ |
| Descripción | Área lateral del recipiente cónico, $cm^2$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**5**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $A_s$ |
| Descripción | Área de la superficie circular del recipiente cónico, $cm^2$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**6**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $V$ |
| Descripción | Volumen del recipiente cónico, $cm^3$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**7**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $\tau$ |
| Descripción | Tiempo de llenado o vaciado del recipiente cónico, s |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**8**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $F$ |
| Descripción | Flujo del líquido hacia o desde el recipiente cónico, $cm^3/s$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

| | |
|---|---|
| | |

**9**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $t$ |
| Descripción | Tiempo transcurrido desde el inicio del llenado o vaciado del recipiente cónico, s |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**10**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $h_l$ |
| Descripción | Altura del líquido en el recipiente cónico, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**11**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $h_v$ |
| Descripción | Altura del espacio vacío en el recipiente cónico, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**12**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $g$ |
| Descripción | Generatriz del cono líquido formado en el recipiente, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**13**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $l$ |
| Descripción | Generatriz del espacio vacío en el recipiente, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**14**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $r$ |
| Descripción | Radio de la superficie circular del líquido, cm |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**15**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $a_s$ |
| Descripción | Área de la superficie circular del líquido, $cm^2$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**16**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $a_m$ |
| Descripción | Área lateral del cono líquido, $cm^2$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**17**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $a_n$ |
| Descripción | Área lateral no mojada por el líquido, $cm^2$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

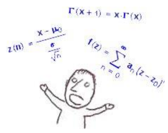
**18**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $V_l$ |
| Descripción | Volumen del líquido en el recipiente cónico, $cm^3$ |
| Diferencial | |
| Descripción | |

**19**

| | |
|---|---|
| Magnitud variable | $V_n$ |
| Descripción | Volumen del espacio vacío en el recipiente cónico, $cm^3$ |

| | |
|---|---|
| Diferencial | |
| Descripción | |



TEMA 6
*Diferenciales*

# ACTIVIDAD 2
## *La variación infinitesimal de una magnitud constante.*

**ACTIVIDAD**. Una vez más, nos referiremos al conjunto de magnitudes físicas que intervienen en el proceso dinámico de llenado o vaciado del recipiente cónico. Entre ellas se encuentra el siguiente subrupo, formado por aquellas magnitudes físicas que, en el proceso dinámico de llenado/vaciado del recipiente cónico, no cambian su valor numérico, es decir, permanecen *constantes*.

| **Constantes y parámetros** |
|---|
| $R$ : el radio del recipiente cónico; |
| $H$ : la altura del recipiente cónico; |
| $G$ : la generatriz del recipiente cónico; |
| $A_l$ : el área lateral del recipiente cónico; |
| $A_s$ : el área de la superficie circular del recipiente cónico (el área “superior”); |
| $A$: área total del recipiente cónico (la suma de las áreas lateral y superficial del cono); |
| $\tau$ : el tiempo de llenado o vaciado del recipiente cónico; |
| $F$ : el flujo del líquido hacia o desde el recipiente cónico. |

**1.** ¿A cuánto es igual la variación infinitesimal de estas magnitudes físicas? Además de proporcionar un argumento sólido, consigna tu respuesta completando las expresiones algebraicas que se enlistan a continuación.

$$\boldsymbol{dR} = \quad ,$$

$$\boldsymbol{dH} = \quad ,$$

$$\boldsymbol{dA_s} = \quad ,$$

$$\boldsymbol{dA_l} = \quad ,$$

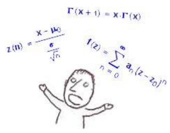
$$\boldsymbol{dV} = \quad ,$$

$$\boldsymbol{d\tau} = \quad ,$$

$$\boldsymbol{dF} = \quad ,$$

$$\boldsymbol{dG} = \quad ,$$

$$\boldsymbol{dA} = \quad .$$



TEMA 6
*Diferenciales*

# ACTIVIDAD 1
## *El cálculo algebraico de las variaciones infinitesimales de una magnitud variable dependiente.*

Lee con atención el siguiente fragmento de un antiguo libro de texto de Cálculo escrito por el matemático francés Etienne Bezout (1730-1783) en 1760, y titulado *Cálculo Infinitesimal*.

> *Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta como más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente; entonces, la diferencia de estos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama* ***diferencial*** *de esa cantidad.*

1. Una vez que hayas leído detenida y atentamente este fragmento, discute con tus compañeros de equipo el significado matemático del diferencial de una magnitud variable dependiente, según Bezout. Escribe en el espacio inmediatamente abajo las conclusiones formuladas en el equipo.

2. Discute con tus compañeros el procedimiento descrito por Bezout para calcular la variación infinitesimal (o diferencial) de una magnitud variable dependiente. Enlista enseguida los tres pasos de este procedimiento, describiéndolos con palabras.

1.

2.

3.

3. Discute con tus compañeros de equipo la forma correcta de expresar (representar) algebraicamente el procedimiento descrito por Bezout para calcular algebraicamente el diferencial de una magnitud variable dependiente $u$, que covaría con la magnitud variable independiente $z$. Escribe enseguida dicha representación algebraica, según lo consensado en el equipo