



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con especialidad en Matemática Educativa

DISEÑO DE ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA CON TEMAS DE CINEMÁTICA Y ENFOQUE STEM

Documento predoctoral que presenta

DIANA VARELA ZAMORANO

Directores de Tesis:

JOSÉ LUIS SOTO MUNGUÍA

FERNANDO HITT ESPINOSA



Posgrado en
Matemática
EDUCATIVA
Universidad de Sonora

Hermosillo, Sonora

Noviembre, 2023

*Agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (Conahcyt)
por el apoyo que ha brindado para mi formación, con la beca de número 813258*

CONTENIDO

CONTENIDO.....	ii
1 INTRODUCCIÓN.....	1
2 ANTECEDENTES.....	3
2.1 Introducción histórica de la Modelación y Modelos Matemáticos	4
2.2 La Modelación Matemática en la educación.....	7
2.2.1 Dificultad en el aprendizaje de la Modelación Matemática.....	8
2.2.2 Dificultad en la Modelación Físico-Matemática.....	9
2.2.3 Dificultad en la enseñanza de la Modelación Matemática	10
2.3 Noción de variable en la educación secundaria.....	11
2.3.1 La construcción de la noción de variable desde el punto de vista covariacional en secundaria.....	11
2.4 El uso de Tecnología Digital en el aula de Matemáticas	12
2.5 STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) integrado y educación.....	13
2.6 Marco Curricular.....	15
2.6.1 Importancia de la Modelación Matemática en educación básica.....	17
3 ESTADO DEL ARTE DE LA MODELACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA	19
3.1 Diferentes perspectivas teóricas de la Modelación Matemática.....	19
3.1.1 Perspectiva de Modelación de Chevallard.....	19
3.1.2 Perspectiva de Modelación de Lesh & Doerr.....	22
3.1.3 La perspectiva de la Matemática Realista de la Modelación Matemática..	25
3.1.4 Perspectiva de Modelación de Blum-Leiss.....	27
3.2 La Modelación Matemática con experimentación en contextos de física como herramienta didáctica.....	30
3.3 La Modelación Matemática en entornos Tecnológicos en clases de Matemáticas	31
3.4 Experiencias de enseñanza de Modelación Matemática con enfoque STEM en secundaria	33

3.5 La Modelación en los libros de texto de Matemáticas de secundaria	34
4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS.....	39
4.1 Descripción de la problemática.....	39
4.2 Objetivos.....	41
4.2.1 Objetivo General	41
4.2.2 Objetivos Específicos.....	41
5 LA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EDUCATIVA Y SUS CARACTERÍSTICAS	43
5.1 Medio sociocultural de aprendizaje.....	43
5.2 Método de enseñanza ACODESA.....	44
5.3 Actividades eslabonadas de descubrimiento guiado	44
5.4 Desarrollo de competencias en la MM.....	45
5.5 Ejemplo de una actividad.....	46
6 ELEMENTOS TEÓRICOS	51
7 ASPECTOS METODOLÓGICOS.....	59
8 CRONOGRAMA.....	67
9 BIBLIOGRAFÍA.....	70
ANEXO 1	78

1 INTRODUCCIÓN

Sin duda, uno de los fines de la Matemática Educativa es encontrar herramientas didácticas y crear intervenciones didácticas que ayuden a mejorar los procesos de aprendizaje de los estudiantes sobre los objetos matemáticos. Además, y muy importante, que sean capaces de integrar estos conocimientos en su vida.

La Modelación Matemática es una herramienta que permite el análisis de fenómenos naturales, y su producto, el modelo matemático, permite explicar el fenómeno desde un punto de vista científico. Los procesos de modelación matemática deben promoverse a través de contextos adecuados, para que los estudiantes se motiven, sientan curiosidad y le encuentren utilidad. Interesados en promover en nuestros estudiantes conocimientos matemáticos en ambientes tecnológicos, nos hemos inclinado por la corriente STEM¹ (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Nuestro proyecto de intervención toma en consideración los componentes antes señalados.

En este documento, nos centraremos en los requerimientos propios para un examen Pre-Doctoral, la propuesta de trabajo de tesis está encaminada a diseñar actividades en el contexto de la corriente STEM.

La literatura ha mostrado la gran dificultad de la unificación de las diferentes ramas científicas relativas al programa STEM (Keller & Knowls, 2019). Por lo que, queremos poner en relieve la importancia de la modelación matemática como elemento fundamental en esta unificación.

El presente trabajo se centra en la aplicación de la Modelación Matemática con enfoque STEM en el nivel secundaria, la cual se enmarcará en un contenido ligado a cinemática en un contexto tecnológico. Estamos interesados en desarrollar en los estudiantes una estructura cognitiva dinámica, ligada a los procesos de Modelación Matemática centrada en la acción (Leontiev, 1975).

De manera consensuada, la comunidad de Matemática Educativa le concede una atención especial al desarrollo de competencias a través de los procesos de la modelación y su aplicación, apareciendo la necesidad de trabajar con problemas contextualizados para mostrar el vínculo que tiene la matemática con la realidad (Aparisi & Pochulu, 2013). A pesar de este consenso, la literatura nos muestra los obstáculos cognitivos de los alumnos para esta integración, abriendo un debate sobre cómo integrar la Modelación Matemática al proceso de enseñanza- aprendizaje (Kaiser, 2020). No obstante que el programa STEM lleva más de 20 años desarrollándose en Australia y que cuenta con varias generaciones de ingenieros

¹ Proyecto que emergió en la década de los 90s en Estados Unidos de Norteamérica y que está repercutiendo en los programas de estudio en muchos países.

STEM, la matemática tiene un uso utilitario y restringido en la formación de ingenieros y el rol de la matemática se ha empobrecido (English, 2015), y surge la pregunta, ¿cómo podría evitar que pase esto en México, o ya está pasando? En la actualidad, se observa en la integración de las cuatro disciplinas STEM que normalmente destaca el papel de la ingeniería mientras que la forma de integrarlos es por medio de contextos reales y los propios de la tecnología como los virtuales (Martín, Aguilera, Perales, & Vilchez, 2019).

Como ya lo hemos dicho, el propósito de este trabajo es el de crear actividades de intervención didáctica que desarrollen en los estudiantes la habilidad para aplicar las matemáticas a problemas de su mundo, llevar las matemáticas más allá del salón de clases (Galbraith, Stillman, & Brown, 2013), en el contexto de la cinemática y con el uso de tecnología.

La organización del presente trabajo se ha estructurado de la siguiente manera:

En la segunda sección se presentan los antecedentes de los elementos que componen la propuesta: la Modelación Matemática en la educación, el uso de la tecnología en el aula de matemáticas y sobre una descripción del enfoque STEM.

La tercera sección, contiene un estado del arte en relación con la Modelación Matemática, además de reportar trabajos previos sobre la Modelación Matemática. Además, se reportan trabajos previos sobre la Modelación Matemática con experimentación, modelación en entornos tecnológicos bajo un enfoque STEM, en educación básica, específicamente en nivel secundaria y, finalmente, se muestran actividades de Modelación Matemática que se presentan en los libros de texto gratuito vigentes de tercer grado de secundaria.

La descripción de la problemática que se desea abordar y los objetivos del proyecto de intervención educativa se encuentran dentro de la cuarta sección.

En la quinta sección se describen las características de las actividades que conforman el proyecto de intervención educativa.

La sexta sección aborda los aspectos teóricos con los cuales se desarrolló un marco conceptual para presentar un proceso de Modelación Matemática.

Los aspectos metodológicos se encuentran englobados en la séptima sección, incluye además la planeación de la experimentación de la primera actividad para validar el trabajo.

En la última sección se presenta un cronograma, donde se resumen los avances del proyecto y la distribución de los tiempos en los que se concluirán todas las actividades programadas para la conclusión de la tesis.

2 ANTECEDENTES

La Modelación Matemática y sus aplicaciones ha sido tema de discusión en Matemática Educativa en las últimas décadas, debido a la creciente relevancia a nivel mundial del uso de las matemáticas en la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana. Cada vez se extiende más la idea que la Modelación Matemática debería desempeñar un papel importante en la educación; esta situación de cambio en las escuelas y universidades se promueve lentamente a la inclusión de aspectos del mundo real, donde frecuentemente se resuelven problemas con modelación. Ante la disminución en casi todos los países de estudiantes interesados en matemáticas y ciencias, es esencial promover posibles cambios en la educación matemática en la escuela y la educación, que nos mueva hacia la inclusión de ejemplos del mundo real y el desarrollo de las competencias matemáticas a utilizar, para resolver problemas del mundo real (Stillman, Kaiser, & Lampen, 2020).

Por lo anterior, es importante hacer un recuento sobre las diferentes maneras de concebir la Modelación Matemática comenzando con las diferentes maneras como se ha definido. En esta sección se hará una breve introducción histórica de la modelación, se mostrarán algunas dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la Modelación Matemática. Además, se presentarán algunos elementos que se consideran importantes como son: la noción de variable en nivel secundaria, el uso de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas, actividades con enfoque STEM y el marco curricular de la Modelación Matemática.

La Modelación Matemática se define de diferentes maneras en Matemática Educativa según la perspectiva teórica adoptada. A continuación, se exponen definiciones de varios investigadores. En la sección 3, dedicada al estado del arte, se describirán diferentes perspectivas de la modelación, incluyendo el ciclo de modelado, así como un ejemplo de una actividad que caracterice cada uno.

Chevallard (1989) define a la Modelación Matemática, (a partir de ahora la designaremos como MM), como el proceso en el cual se analiza una situación y se explica en términos científicos; como resultado, se genera un modelo matemático que permite el estudio de procesos y fenómenos tales como sistemas extramatemáticos e intramatemáticos utilizando métodos e instrumentos matemáticos.

Debemos señalar que la definición de Chevallard fue presentada en la época que la matemática en contexto apenas estaba llegando a las aulas (p.ej. Freudenthal, 1991) rompiendo con una enseñanza desvinculada de contextos reales, en esa época el registro que se priorizaba era el algebraico. En este sentido, la enseñanza de las matemáticas se tiene una visión “aplicacionista” donde primeramente las nociones matemáticas son introducidas para después resolver problemas en contexto (Barquero, Bosch, & Gascón, 2019).

Para Lesh y Doerr (2003) la MM está más ligada a una matemática en contexto en la resolución de situaciones de la vida real, para ellos la MM es un proceso en el que los sistemas

y modelos conceptuales existentes se utilizan para crear y desarrollar nuevos modelos en nuevos contextos. Estos modelos proveen una aproximación del sistema real y se utilizan para entender e interpretar sistemas complejos de la naturaleza.

Los modelos son sistemas conceptuales (elementos, relaciones, operaciones, y reglas que gobiernan las interacciones) que se expresan usando sistemas de notación externa, y que se usan para construir, describir o explicar los comportamientos de otro(s) sistema(s), quizá para que el otro sistema pueda manipularse o hacer predicciones científicamente fundamentadas.

2.1 Introducción histórica de la Modelación y Modelos Matemáticos

La historia de la modelación nos muestra que los científicos en la antigüedad generaron modelos para poder entender el mundo que los rodeaba, por lo que los procesos de la modelación y la generación de modelos en la antigüedad han tenido un alto impacto en las ciencias. La MM ha sido una herramienta muy importante para el ser humano, para el desarrollo de las Matemáticas y de las ciencias como la Física, la Biología, la Astronomía, etc. Por ejemplo, la evolución de los modelos cosmológicos de Ptolomeo, Copérnico y Galileo son una muestra de los instrumentos materiales e intelectuales desarrollados con la MM (D'Ambrosio, 2009).

Según Israel (1996, como se citó en Trigueros, 2009) la historia de los modelos matemáticos para describir el mundo se divide en cuatro etapas: la primera en la Grecia antigua en la época Pitagórica donde se consideraba a los números la forma perfecta de describir al Universo, la segunda etapa es la revolución de Galileo en la que se partía de que las leyes de la naturaleza estaban escritas en un lenguaje matemático. En la tercera etapa las matemáticas se desprenden de la naturaleza y están en ella, existe una creencia que las distintas teorías científicas son una construcción unitaria y la mecánica tiene un papel principal. Y en la cuarta etapa se habla de modelos matemáticos o matemáticas aplicadas, se deja de hablar de modelos de tipo mecánico, en cambio, se describen fenómenos a partir de analogías de estructuras matemáticas que los representan (Trigueros, 2009).

Mesa y Villa-Ochoa (2011) afirman que uno de los periodos más fecundos de las matemáticas se ubica en los siglos XVI y XVII, periodo en el que las relaciones entre las matemáticas y el entorno estaban en correspondencia, de tal manera que las matemáticas traducen la naturaleza y la naturaleza obedece a leyes matemáticas.

Antes que la didáctica de las matemáticas, ya establecida como ciencia independiente, publicitara la necesidad de poner atención a la modelación, los científicos de la antigüedad ya utilizaban modelos matemáticos.

Para ejemplificar el desarrollo de los modelos matemáticos tomaremos el concepto de velocidad, debido a que nuestra propuesta está integrada por actividades de MM en el

contexto de la cinemática. Galileo Galilei² fue uno de los primeros que reconoció la necesidad de simplificar la realidad para poder describirla con herramientas matemáticas, escogió cantidades medibles sustanciales para describir procesos reales y construyó relaciones matemáticas que imitaban sus observaciones, es decir, modeló.

Si indagamos sobre la historia del proceso de modelación del concepto de velocidad, este surgió a la par con el de movimiento, con los filósofos griegos. Aristóteles (384–322 a.C.) distinguió tres tipos de movimiento el de orden imperturbable, como el de las esferas celestes, el movimiento “terrestre” de los objetos que suben y bajan y el violento de los cuerpos que necesitan un impulso, aunque sus comentarios abordaron el fenómeno de la velocidad, se demostró más adelante, que sus concepciones eran erróneas.

Antes que Galileo, como lo mencionamos en el pie de página 2, Nicole de Oresme (1330-1382) usó una representación gráfica de las cualidades de los fenómenos. Moviéndose hacia una terminología funcional de la velocidad, Oresme buscó la ayuda de experimentos para asignar una tasa de cambio a ciertas intensidades y concluyó “Todas las cosas son medibles a excepción de los números”.

El trabajo de Galilei puede entenderse como al límite de la visión aristotélica de naturaleza, llegando al entendimiento de que uno no siempre puede referirse a conclusiones intuitivas basadas en la observación inmediata porque a veces son engañosas. Más tarde, Galilei usó experimentos para argumentar a favor de la afirmación que existe una dependencia cuadrática entre la distancia recorrida y el tiempo de caída de un objeto (Moeller, 2017).

En el libro de las Dos Ciencias de Galileo (1638) en el capítulo que se tituló Tercer día habla sobre el cambio de posición, el capítulo lo introduce con la definición de movimiento uniforme:

“Por movimiento constante o uniforme, me refiero a uno en el que la distancia recorrida por la partícula en movimiento durante intervalos de tiempo iguales, son ellas mismas iguales”.

Seguido a esta definición enumera a cuatro Axiomas:

“Axioma I: En el caso del mismo movimiento uniforme, la distancia recorrida durante un mayor intervalo de tiempo es mayor que la distancia recorrida durante un intervalo menor de tiempo.”

“Axioma II: En el caso del mismo movimiento uniforme, el tiempo requerido para recorrer una distancia mayor, es mayor que el tiempo requerido para una distancia menor” (p.154).

² Si bien el trabajo de Nicole de Oresme (1328-1383), es quien introdujo el modelo gráfico de la representación de variables (tiempo y velocidad) en su *Tractatus de Latitudine Formarum* (ver Hitt, Soto, Romero y Ávila, 2022).

Si nos enfocamos en el movimiento uniforme Galileo en el Axioma I establece la relación entre las distancias recorridas en intervalos desiguales de tiempo. Y en el Axioma II establece la relación entre los tiempos necesarios para recorrer distancias desiguales.

Y es hasta los Axioma III y IV que introduce el concepto de velocidad. En el Axioma III compara las distancias recorridas a velocidades distintas en el mismo intervalo de tiempo y en el IV compara las velocidades requeridas para recorrer distancias distintas en el mismo tiempo. Lo anterior es importante resaltarlo debido a que la velocidad es una magnitud compuesta de dos elementos, de la relación que existe entre la distancia recorrida y el intervalo de tiempo que a la partícula le tomó realizarlo, que corresponde a una magnitud física comprendida tanto por dimensión y valores medibles; por lo que la dificultad de asimilarla es más compleja que la distancia recorrida y el tiempo que son medidas simples. Galileo (1638) escribe estos axiomas de la siguiente manera:

“Axioma III: En un mismo intervalo de tiempo, la distancia recorrida a una velocidad mayor es mayor que la distancia recorrida a una velocidad menor.”

“Axioma IV: La velocidad requerida para recorrer una distancia mayor es mayor que la requerida para recorrer una distancia menor durante el mismo intervalo de tiempo ” (p. 155).

Posteriormente, Isaac Newton (1642-1727) definió la velocidad en su Principia Matemática utilizando el concepto de fuerza que inicia el movimiento. Formuló el principio de inercia como: “Todo cuerpo se conserva en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que se vea obligado a cambiar ese estado por fuerzas impresas en él”.

. El concepto de velocidad se construyó hace mucho tiempo, como producto de un proceso de modelado entre la realidad y el involucrar a dos ciencias, las matemáticas y la física (en la antigüedad se le llamaba filosofía natural). Hay que percatarse de la influencia para el desarrollo científico y reflexionar sobre el impacto en las clases de matemáticas. En la escuela, no se profundiza mucho en la enseñanza de este concepto, ni en las clases de matemáticas ni de física. En clases de física, uno espera las cantidades, duración y tiempo y el concepto de función para introducir la fórmula $v = s/t$ desde el principio sin mucha experimentación. En las clases de matemáticas del nivel secundaria, el contenido matemático está en el centro y los problemas de velocidad se consideran aplicaciones puras. Por lo que no se le ha dado la importancia que merece la historia del concepto de velocidad, ni bajo el aspecto de modelado y ni en las posibilidades de aplicarlo en materiales educativos (Moeller, 2017).

En los libros de texto de educación básica se observa que el primer acercamiento que los alumnos tienen con el concepto de velocidad es cuando se muestran imágenes de objetos en movimiento con leyendas donde se muestran las velocidades y la actividad consiste en llenar tablas con distancias correspondientes a diferentes tiempos. En resumen, el enfoque proporcionado al concepto es el de cuantificar, con poco sentido para el estudiante.

La génesis del concepto de velocidad estuvo influenciada por su carácter interdisciplinario por siglos. El desarrollo posterior de Leibniz usando variables en fórmulas influyó, en siglos posteriores, en nuestro aprendizaje en las clases de matemáticas y física. Teniendo esto en cuenta, la educación matemática no debe descuidar el papel que las matemáticas han jugado dando forma a la explicación del mundo de la física de hoy. Es una cuestión de epistemología del conocimiento y, en consecuencia, la enseñanza de la velocidad no puede limitarse a establecer una fórmula y luego calcular los valores que toma una variable cuando se dan valores a las otras. En matemáticas, la enseñanza del concepto de velocidad posee un gran potencial con varios puntos importantes a discutir por ser una concepción de influencia histórica relevante, por lo que no es necesario utilizar tablas, materiales didácticos o dispositivos para encontrar las respuestas rápidamente, en su lugar, se pueden utilizar las experiencias cotidianas de los alumnos. Esto pone sus experiencias al centro del proceso enseñanza y aprendizaje. Al hacer esto, hay una alta motivación para que los estudiantes reflexionen en ello. Es necesario tomarse el tiempo para que los estudiantes verbalicen su comprensión del movimiento, de la rapidez y luego de la velocidad. El concepto de velocidad es un excelente ejemplo de modelado matemático de los fenómenos cotidianos de los movimientos que pueden ser cuantificados, permitiendo mediciones y cálculos (Moeller, 2017). Se debe fomentar la experimentación, la reflexión en el aula e ir introduciendo el concepto a lo largo de la educación básica por niveles con la finalidad de evitar la “algoritmización” o caer en el “reduccionismo didáctico” citando a Reyes et al (2017).

2.2 La Modelación Matemática en la educación

Si bien la evolución que se ha tenido en el proceso de transición de las matemáticas desde un enfoque puramente algebraico (sin sentido para los estudiantes, según Freudenthal, 1973, 1991, y Kline, 1985), hacia las matemáticas en contexto en los niveles de secundaria, preparatoria y profesional, no ha sido fácil. Para Stillman, Kaiser y Lampen (2020) dar sentido en una clase de matemáticas, como extraer sentido de una situación del mundo real para ser modelada, o dar sentido a un contexto de la realidad que podría describirse en el texto de una tarea de modelado presentada a los estudiantes, parecen ser fundamentales para que los diseñadores los realicen en contextos educativos y, por lo tanto, como foco de investigación. Ya que el razonamiento y el dar sentido son hábitos del pensamiento que deben ser inherentes a cualquier actividad matemática.

Instituciones de renombre a nivel internacional como la Fundación Nacional de Ciencias (NSF, por sus siglas en inglés) en Estados Unidos de América, promoviendo el proyecto STEM (en la década de los 90) y posteriormente en Europa con el proyecto Promoción de la Investigación en la Enseñanza de las Matemáticas y las Ciencias (PRIMAS, por sus siglas en inglés) se preocuparon por la integración de las ciencias, donde estos últimos pusieron de manifiesto que la MM debería estar en el núcleo de la integración.

En este siglo, no solo la matemática en contexto ha sido relevante, sino también la modelación de situaciones complejas. Esto ha promovido una reflexión sobre el rol de la MM en esta era. Así, la modelación no es un campo particular de investigación en educación matemática, sino un tema central en la identificación de los fenómenos y problemas educativos y en sus posibles soluciones (Bosch, García, Gascón, & Ruiz, 2006). La incorporación de la MM en la educación matemática lleva a crear un ambiente de aprendizaje, requiriendo un replanteamiento de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas.

La inserción de la MM como estrategia de aprendizaje trae consigo diferentes dificultades, que a continuación se detallan.

2.2.1 Dificultad en el aprendizaje de la Modelación Matemática

La literatura en didáctica de las matemáticas (Carlson, 2002), ha puesto de manifiesto los problemas de aprendizaje de estudiantes universitarios con respecto a los procesos de MM en contextos ligados a la cinemática. En investigaciones reportadas por Hernández (2009) se describen dificultades en la modelación de temas de la cinemática como el movimiento rectilíneo, el movimiento acelerado y en fluidos y calor (como la conducción del calor) cuando se trata de representar mediante un modelo un fenómeno de la física como los antes mencionados, las dificultades aparecen cuando el estudiante trata de encontrar el modelo matemático que le permitirá describir el fenómeno en términos científicos. Esta investigación señala que los estudiantes realizaron fácilmente la enumeración de diferentes variables que intervinieron en el fenómeno, pero, les ha resultado difícil aislar esas variables y jerarquizarlas en orden de importancia y encontrar la covariación entre las variables citadas para proponer un modelo adecuado.

Trigueros (2006) reporta en su investigación, sobre la modelación del movimiento de un péndulo, que en varias tareas realizadas por los estudiantes presentan una deficiencia al relacionar con las matemáticas, lo que se conoce de la física. Además, señala que los estudiantes presentan deficiencias cognitivas al no poder asociar ideas entre la física y las matemáticas, dificultades para modelar utilizando la idea de variación, ya que la variación lineal es tan fuerte en ellos, que no conciben otro tipo.

Si bien, por un lado, estudios empíricos han demostrado que cada paso del proceso de modelación es una barrera potencial cognitiva, se reportan bloqueos cognitivos o situaciones de alerta. Por lo que es de suma importancia la actividad de reflexión metacognitiva, sobre todo durante las fases de transición a través del ciclo de modelado, por lo que el papel del docente es fundamental.

Por otro lado, el rol del docente no se ha investigado lo suficiente, ya que no existe evidencia empírica sólida donde se muestre cómo el docente pueda proporcionar al estudiante un soporte para hacerlo independiente en el proceso de modelado, y así, ayudarlos a superar ese obstáculo epistemológico. Existe un consenso que, dentro de actividades de

modelación, la guía del maestro debe permanecer en un balance entre la mínima guía del maestro y la máxima independencia del alumno (Hitt & Quiroz (2019); Kaiser (2020)).

2.2.2 Dificultad en la Modelación Físico-Matemática

Se podría pensar que la modelación matemática es un problema exclusivo de los estudiantes de matemáticas. Sin embargo, Handika, Istiantara y Astuti (2018), nos muestran las dificultades que tienen los estudiantes universitarios de física para interpretar gráficas de tiempo contra posición y su interpretación ligada a la velocidad. Un hecho interesante que muestra el trabajo de Handhika et al. (2018) es que, una vez realizadas las tareas en forma individual, se les solicitó a los estudiantes trabajar en equipo; esto promovió un aumento considerable en la tasa de éxito. Analizando este tipo de fenómenos con respecto a la enseñanza, precisamente en el apartado 2.3.3, discutiremos nuestro modelo de enseñanza basado en un trabajo en colaboración.

La relación entre la Física y las Matemáticas, específicamente la Modelación Físico-Matemática, se caracteriza por una compleja interacción de sintaxis y semántica; por lo que se requiere del estudiante y del docente habilidades técnicas y estructurales. Como las habilidades estructurales están conectadas a la comprensión conceptual tanto de las matemáticas como de la física, los estudiantes suelen mostrar grandes dificultades, más de lo habitual, en los procesos de modelación (Pospiech & Fischer, 2021). Por su formación relativa a las matemáticas y no a las ciencias, los docentes tienen las mismas dificultades cognitivas que los estudiantes. Ya que nuestro interés se centra en los estudiantes, nos enfocamos en ellos.

Pospiech y Fisher (2021) afirman que hay pocos reportes sobre las dificultades de los estudiantes en la Modelación Físico-Matemática sobre la resolución de problemas. En un estudio de física realizado para examinar las dificultades específicas de la Modelación Físico-Matemática, se desarrollaron tareas para garantizar que los estudiantes no solo usen sus procedimientos de rutina para resolverlos, dichas tareas indujeron a los estudiantes a encontrar su propia estrategia integrando conceptos físicos y matemáticos.

Los resultados de dicha investigación mostraron cinco áreas principales de dificultades de los estudiantes: (1) dificultades para comprender las funciones físicas y ecuaciones, (2) se observó que los estudiantes tratan de resolver tareas utilizando un enfoque esquemático y recurriendo superficialmente al conocimiento memorizado, (3) interferencias con la experiencia cotidiana de los estudiantes, (4) conocimiento inestable de conceptos básicos de física y matemáticas y (5) la confusión entre la definición del concepto frente a la imagen conceptual (Vinner, 1983) que muestra una concepción de los estudiantes, que contradice la definición del concepto de física enseñado en la escuela.

Un ejemplo simple es la velocidad negativa. Al lanzar un objeto al aire, por convención, la velocidad del objeto hacia arriba es positiva y si cae se denota como negativa. Esta

convención va en contra de las ideas intuitivas de los alumnos (Hitt, Soto, Romero, & Dávila, 2022).

Los cinco obstáculos cognitivos arriba mencionados indican que hay confusión en los estudiantes durante el proceso de resolución de problemas relacionados con la interacción entre la física y las matemáticas. Si las operaciones matemáticas no se relacionan correctamente con los conceptos físicos requeridos para la tarea, los cálculos obtenidos no se interpretarán adecuadamente o se cuestionarán de una manera crítica.

Aunque las dificultades de los estudiantes en la MM son importantes para tener un panorama del problema de la MM, tienen el mismo peso que las dificultades de la enseñanza de la MM.

2.2.3 Dificultad en la enseñanza de la Modelación Matemática

Dentro de la enseñanza de la MM podemos encontrar dos obstáculos principales, el primero está relacionado con el ambiente de aprendizaje creado ya que, cuando se solicita un proceso de MM, es una forma de práctica de “aula abierta” donde normalmente tienen respuesta abierta o pueden ofrecer múltiples soluciones, esto no es muy común para el docente de matemáticas, por lo que puede presentársele un obstáculo. Además, si los estudiantes trabajan en grupos, esto lleva a la segunda dificultad, ya que tanto en los grupos de trabajo de la escuela como los profesionales se tienen diferentes percepciones de una misma situación (D’Ambrosio, 2009). En general, en un proceso de modelación, se genera un pensamiento diversificado en los alumnos que no es fácil gestionar en el aula (Hitt & Quiroz-Rivera, 2017) esto se convierte en un problema para el docente, ya que el reto aquí es explorar dinámicas que lleven de diferentes perspectivas y estrategias, a una estrategia grupal.

La situación por modelar promueve primero un pensamiento divergente (que se puede traducir en diferentes ideas en el aula), y hay que encontrar una estrategia didáctica que promueva el pensamiento convergente para dar una respuesta o varias, a la situación solicitada.

Además de los obstáculos presentados anteriormente, encontramos dificultades que experimentan los docentes de matemáticas en sus aulas, uno de ellos ha sido reportado por Aparici y Pochulu (2013) donde los resultados obtenidos de su investigación empírica muestra que los profesores al momento de llevar al aula actividades de modelación tienen dificultades al seleccionar objetos claves de la situación problema, para adecuar situaciones que permitan analizar relaciones, búsqueda de patrones, así como las características para la formulación matemática del modelo.

En la enseñanza de la MM sin contexto, puede generar un obstáculo cognitivo en los estudiantes (llamado obstáculo didáctico), esto se presenta en un proceso de “transposición didáctica” de conocimientos matemáticos, el contexto es desvinculado, esto provoca

dificultades en los estudiantes cuando tratan de modelar fenómenos de la realidad (Hernández, 2009).

2.3 Noción de variable en la educación secundaria

La comprensión del concepto de variable es central en el desarrollo de habilidades algebraicas en los estudiantes de secundaria y absolutamente necesaria para estudiar matemáticas avanzadas (Schoenfeld & Arcavi, 1988). La mayoría de los libros de texto introducen el concepto de variable por medio de signos, esperando que, por medio del trabajo realizado como la manipulación de estos, el alumno directamente comprenda el concepto de variable.

Kuchemann (1978) realizó estudios (con una población de 3000 alumnos en Inglaterra) sobre la noción de variable, donde reporta que los estudiantes tienen una diversidad de ideas sobre variable, y que algunas distan de ser aceptables, además señala que estos significados de los estudiantes se convierten en obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática de la variación y el cambio.

Por otro lado, en un estudio exploratorio realizado por Schoenfeld y Arcavi (1988) reportan diez definiciones del término variable en diferentes disciplinas, esto demuestra lo multifacético que resulta este término, lo complejo que es su comprensión por el aspecto simbólico que implica y los diferentes contextos en los que se aplica.

2.3.1 La construcción de la noción de variable desde el punto de vista covariacional en secundaria

El razonamiento covariacional se refiere a las actividades cognitivas involucradas al coordinar dos magnitudes variables, prestando atención a la forma en que cambian entre sí. Esta capacidad de razonamiento es necesaria para interpretar y representar relaciones covariantes (Carlson, 2002). Este concepto preliminar de covariación en los estudiantes de secundaria es importante que se desarrolle antes de abordar el concepto de función, y resulta fundamental en la MM.

Carlson (2002) señala cinco etapas en las acciones mentales en el concepto de covariación asociada a acciones, de las cuales: (1) correlacionar el valor de una variable con cambios en la otra, (2) correlacionar la dirección del cambio con cambios en la otra variable, (3) correlacionar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable, (4) correlacionar la razón de cambio promedio de una función con los incrementos uniformes de cambio en la variable de entrada, y (5) correlacionar la razón de cambio instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función. Las tres primeras acciones mentales corresponden a la educación secundaria.

Nuestra propuesta en un proceso de Modelación Matemática, donde el estudiante primero debe identificar las variables en un fenómeno, promueve el planteamiento de relaciones entre ellas con la intención de desarrollar el pensamiento covariacional, esto se llevará a cabo con uso de imágenes dinámicas del contexto de la cinemática, donde el estudiante primeramente tenga experiencias en la observación de patrones y haga generalizaciones antes de utilizar las variables a través de sus representaciones espontáneas (Schoenfeld & Arcavi, 1988; Carlson, 2002). Enseguida, creando un ambiente de trabajo en colaboración se busca promover una evolución de las representaciones espontáneas.

2.4 El uso de Tecnología Digital en el aula de Matemáticas

Un tema que ha causado mucha discusión en Matemática Educativa es el uso de tecnología digital en el aula, Drijvers (2015) afirma que su utilización no implica automáticamente una mejora en el proceso de enseñanza. Además, él señala que se deben tomar en cuenta las creencias y la estrategia didáctica que el profesor adopta. Por lo que la selección de software y el diseño de actividades deben ser cuidados para lograr los objetivos de aprendizaje. Artigue (2012) afirma que los resultados de diversas investigaciones evidencian que, en muchas ocasiones, la tecnología se utiliza para mostrar cosas al estudiante o para realizar actividades pseudo-experimentales donde los estudiantes son guiados paso por paso, por medio de hojas de trabajo. En consecuencia, podemos afirmar que, un uso inadecuado de la tecnología perjudica a la promoción de la MM, en donde la creatividad es primordial.

Por otro lado, Tall (2002) habla sobre el uso de ambientes computacionales en el aula de matemáticas para proporcionar un soporte a los estudiantes y disminuir ciertas dificultades. El software debe estar diseñado para cumplir con ciertos procesos, dejando al estudiante concentrarse en otros más complejos, en los que el estudiante debe prestar su atención.

Varios resultados de investigaciones reportan una lenta integración de las tecnologías digitales en las aulas de matemáticas en contraste con las grandes expectativas generadas sobre una rápida integración. Esto se da a pesar de que el acceso a las tecnologías digitales se ha vuelto cada vez mayor en las escuelas, por otra parte, las creencias y concepciones de los docentes hacia las tecnologías digitales han resultado factores primordiales en esta lenta integración (Lavicza, 2010). Algunas investigaciones se han centrado en encontrar posibles beneficios en el uso de la tecnología digital en las clases de matemáticas, metodologías y entornos de interactivos que se traduzcan en mejoras para los procesos de enseñanza y aprendizaje (García-Cuéllar, 2018).

Hitt (2016; 2022) hace una propuesta de actividad de MM con uso de tecnología, utilizando una nueva perspectiva del proceso de modelación adaptado a la teoría local de representaciones y análisis de videos con Tracker. Este paquete de cómputo de libre acceso se utiliza para analizar datos de fenómenos físicos y con la ayuda del paquete GeoGebra se

puede potenciar el tratamiento de los datos obtenidos. Concluye que, con esta tendencia hacia la MM, el uso de la tecnología en el aula de matemáticas sería un soporte importante.

Aunque Tracker fue diseñado inicialmente para los cursos de física, en clases de matemáticas, bajo la óptica STEM, suele ser muy útil debido a la toma de datos para representarlos gráficamente. El paso a GeoGebra pretende facilitar una modelación algebraica y su representación gráfica. Así, de la tabla de datos obtenida del análisis de un video con Tracker, se copian los datos a GeoGebra y bajo un proceso de búsqueda de una curva de regresión, se obtiene un modelo algebraico, así como su representación gráfica, por lo que se tendrían finalmente los tres tipos de representaciones: gráfica, tabular y algebraica. Ello permite proporcionar una explicación del fenómeno de estudio a través de tres modelos.

2.5 STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) integrado y educación

El término “STEM” (por sus siglas en inglés: Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) fue utilizado por primera vez en el año 2001 por Judith A. Ramaley, directora de la División de Educación y Humanidades de la NSF en Estados Unidos de América, haciendo referencia al currículo de las disciplinas involucradas. Y desde entonces, ha ganado importancia tanto en un nivel político como educacional, además, ha adoptado diferentes significados, dependiendo del sector que nos encontremos. Algunos autores consideran STEM como un término ambiguo debido a que se distinguen tres tipos de conceptualizaciones: educacional, político-social y personal (Aguilera, Lupiáñez, Vílchez-González, & Perales-Palacios, 2021).

Existen estudios que se preguntan ¿de qué estamos hablando cuando hablamos de educación STEM? Los resultados concluyen que no existe un criterio consolidado cuando nos referimos a educación STEM, la investigación ha evidenciado que el término se usa de manera indistinta para planteamientos educativos que: (1) se enfocan solamente en una disciplina, (2) se producen combinaciones sin llegar a integrar las cuatro disciplinas del acrónimo, (3) integran las cuatro disciplinas en una sola actividad didáctica. En consecuencia, los docentes adquieren diferentes conceptualizaciones sobre educación STEM y esto les genera un estado de ansiedad e inseguridad y en algunos casos rechazan la implementación en el aula de esta perspectiva educativa (Aguilera, Lupiáñez, Vílchez-González, & Perales-Palacios, 2021).

La MM dentro de la perspectiva STEM es uno de los elementos de nuestro proyecto de intervención educativa; la literatura nos muestra que la educación STEM, surgida a finales del siglo XX, estuvo ligada al boom tecnológico y a la problemática de la integración de las ciencias, juega en este siglo un rol importante en la formación del desarrollo cultural y económico. El acercamiento STEM estimula la innovación y la creatividad en la resolución de problemas en contextos de la vida real. En el ciclo de un proyecto STEM, cuyo propósito

principal es apoyar los procesos matemáticos y cuantitativos en las ciencias, las matemáticas y la ingeniería, se enfatiza el razonamiento matemático. Si bien la tecnología proporciona herramientas para realizar cálculos de manera más eficiente o para producir herramientas de visualización alternativas a resultados experimentales (Tezer, 2019) los problemas de la integración STEM en el aula emergen día a día (Hitt, Soto, Romero, & Dávila, 2022; Kelley & Knowles, 2016).

Como se había mencionado antes, el tema de cómo integrar las cuatro ramas de STEM sigue siendo discutido, y su utilización con diferentes significados en el sector educativo ha generado desconcierto. A la discusión antes señalada se añade una nueva tendencia llamada STEAM, que se agrega la A de Artes en el proceso enseñanza-aprendizaje como una variante de educación STEM, que tiene el propósito, entre otros, de mejorar la creatividad de los estudiantes.

Ni STEM ni STEAM se pueden considerar una metodología, es más bien una gama de herramientas tecnológicas, perspectivas pedagógicas y enfoques metodológicos (Couso, 2017). English (2015) muestra la necesidad que existe de integrar las matemáticas y su didáctica a este enfoque, de aquí la pertinencia del presente trabajo.

Tezer (2019) integra las características comunes de los procesos de modelación como los de Blum-Leiss (2007) y Lesh & Doerr (2003), en un esquema de un ciclo de un proyecto STEM (ver Diagrama 1), cuyo propósito principal es apoyar los procesos matemáticos y cuantitativos en la ciencia, matemáticas e ingeniería, aumentando así el razonamiento matemático. La tecnología proporciona herramientas para realizar cálculos cuantitativos de manera más eficiente o para producir herramientas alternativas de visualización a resultados experimentales. La MM es importante en la producción de herramientas para hacer predicciones en métodos de cuantificación, en nuevos diseños y en el comportamiento de nuevas situaciones. Tezer (2019) afirma que considerando los diferentes marcos teóricos y enfoques de MM revela una estructura compleja del proceso. Por esto, se observa que los estudios relacionados con el proceso de MM, teniendo en cuenta los diferentes efectos que el uso de tecnología digital combinada con el enfoque STEM conduce al surgimiento de procesos cognitivos y metacognitivos más ricos.

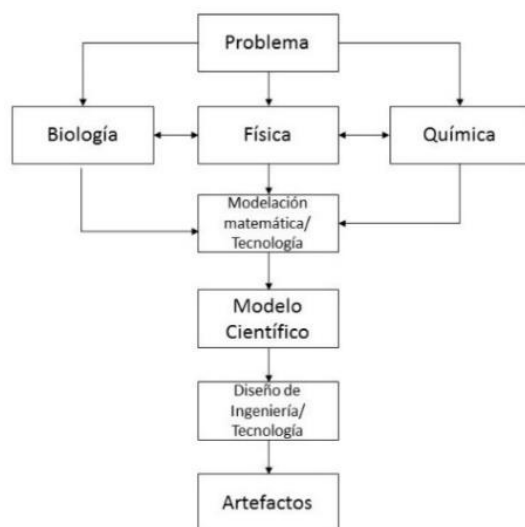


Diagrama 1 Ciclo de proyecto STEM tomado de Tezer (2019, p.159)

En el Diagrama 1, se muestra un ciclo de proyecto STEM podemos ver que después de la fase de la obtención del modelo científico, aparecen dos fases más que son diseño de ingeniería/tecnología y artefactos, lo que nos interesa para nuestro trabajo, desde el punto de vista de la Matemática Educativa, es llegar al modelo científico, pero no involucrarnos en las dos últimas fases.

2.6 Marco Curricular

El nivel básico de educación en México comprende los niveles de preescolar, primaria y secundaria. Este trabajo se ubica en nivel secundaria que comprende tres grados escolares, donde las edades de los estudiantes oscilan entre 12 y 15 años; al terminar, el siguiente nivel es el medio Superior, llamada comúnmente Preparatoria o Bachillerato.

El programa de estudios Aprendizajes Clave para la Educación Integral, que es el documento base del modelo educativo que entró en vigor el año 2017, en la materia de matemáticas a nivel secundaria, manifiesta que la educación matemática básica tiene como propósito que los estudiantes, identifiquen, planteen, resuelvan problemas y estudien fenómenos y analicen situaciones y modelos en varios contextos. Las matemáticas se deben concebir como una construcción social, adquirir actitudes positivas y críticas hacia las matemáticas y desarrollar habilidades matemáticas que les permitan resolver problemas para tomar decisiones al abordar actividades no rutinarias (SEP, 2017).

Dentro del enfoque pedagógico, la SEP plantea un ambiente en el aula en el cual se contemple una actitud positiva hacia el estudio de las matemáticas, que las actividades planteadas por el profesor tengan sentido para el estudiante, que se interesen y disfruten haciendo matemáticas, que estas no solo sirvan para aplicar conceptos, métodos, etc. Para

lograr esto, tanto la modelación matemática como la utilización de contextos auténticos, por ejemplo, los relacionados con las ciencias naturales, son de suma importancia; además del trabajo colaborativo entre los estudiantes, la introducción de proyectos transversales para la resolución de problemas y el uso de herramientas tecnológicas para promover la exploración de ideas, conceptos matemáticos, análisis y modelación de fenómenos y situaciones problema.

La ubicación curricular de la modelación matemática se encuentra dentro del eje temático Número, Álgebra y Variación en el tema de funciones en los tres grados de secundaria, en la siguiente tabla se muestran los aprendizajes claves correspondientes.

APRENDIZAJES CLAVE. MATEMÁTICAS SECUNDARIA				
Eje	Tema	1° Secundaria	2° Secundaria	3° Secundaria
NÚMERO, ÁLGEBRA Y	FUNCIONES	<p>Analiza y compara situaciones de variación lineal a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.</p> <p>Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación.</p>	<p>Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.</p> <p>Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.</p>	<p>Analiza y compara diversos tipos de variación a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica, que resultan de modelar situaciones y fenómenos de la física y de otros contextos.</p>

Tabla 1. Información recuperada de Aprendizajes clave Educación Básica (SEP, 2017, p. 175)

En la Nueva Escuela Mexicana, el programa de estudios que entró en vigor este año, se prioriza la solución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas, las matemáticas interactúan con las ciencias y la tecnología para propiciar el estudio integral de los fenómenos y procesos naturales.

El pensamiento científico se articula con el desarrollo del pensamiento matemático, abrir paso a organizar la ciencia/matemática escolar desde la interpretación de fenómenos y la resolución de problemas complejos.

Contenido	Procesos de desarrollo de aprendizaje		
	1° grado	2° grado	3° grado
Funciones	<p>Relaciona e interpreta relaciones proporcionales y no proporcionales a partir de su representación tabular, gráfica y con diagramas.</p> <p>Modela y resuelve diversas situaciones a través de ecuaciones proporcionales con constante positiva y negativa.</p>	<p>Relaciona e interpreta la proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades, además usa una tabla, gráfica o representación algebraica en diversos contextos.</p>	<p>Relaciona e interpreta la variación de dos cantidades a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica.</p> <p>Explora diversos procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional.</p>

Tabla 2. Información recuperada de Avance del contenido del Programa sintético, fase 6 (SEP S. d., 2022, p. 57)

Si bien en ambos programas de estudio se plantea la modelación matemática a partir de fenómenos y procesos naturales, cuestión que no difiere en ambos modelos educativos, la Nueva Escuela Mexicana sugiere que los docentes de Ciencias y Matemáticas trabajen de manera colegiada para desarrollar los aprendizajes con base en el planteamiento de situaciones problemáticas. Este análisis es necesario para determinar el contenido matemático de este trabajo, las situaciones problemas que se modelarán matemáticamente están delimitados por las matemáticas que el currículo señala. La Tabla 1 enuncia en primer año de secundaria la resolución de problemas que modelan situaciones de variación lineal, en segundo año modelación de variación lineal y proporcionalidad inversa, en tercer año modelación de diversos tipos de variación, incluyendo contextos de fenómenos de la física, dicha tabla está alineada con los contenidos de la Nueva Escuela Mexicana expuestos en el avance del contenido del Programa sintético de la fase 6 la cual se muestra en la Tabla 2.

2.6.1 Importancia de la Modelación Matemática en educación básica

Diversas investigaciones de Matemática Educativa señalan la importancia de introducir la MM a la educación en todos los niveles, ya que es un apoyo en el aprendizaje de las matemáticas y establece la relación entre el mundo real y las matemáticas, pues los modelos matemáticos permiten a los alumnos utilizar las matemáticas que han aprendido, en situaciones extramatemáticas (Blum & Mogens, 2020), por otro lado, se señala que

modelando, los estudiantes aprenden significativamente y los alumnos muestran mayor interés en resolver problemas de su entorno próximo (Trigueros, 2009).

La modelación dentro de la clase de matemáticas es un aspecto aún pendiente, esta ausencia se debe a la falta de recursos y apoyo a los maestros (Ortega & Puig, 2017). Como matemáticos educativos debemos encargarnos de crear estos recursos, por lo que la selección de los temas y/o situaciones es vital para el diseño de materiales didácticos.

3 ESTADO DEL ARTE DE LA MODELACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

El título de este apartado sugiere una investigación exhaustiva sobre la MM en la educación, pero no es el caso en este documento, porque las especificaciones por parte del programa del posgrado, especifica que el propósito de éste es mostrar aportaciones previas, intentando formar una panorámica de las contribuciones sobre el tema, que puede recuperarse de esas aportaciones en el trabajo y hacia dónde pretende dirigirlo. De esta manera, se describen varios procesos de MM con diferentes perspectivas, algunos trabajos en México sobre clases de matemáticas diseñadas en contextos de la física, con entornos tecnológicos, tipos de actividades de MM propuestas en los libros de texto gratuito en educación básica de México y de manera general actividades de MM con enfoque STEM.

La MM es uno de los conceptos en Matemática Educativa que presenta dificultad al establecer un consenso entre diferentes comunidades y escuelas con respecto a su definición general y que dé respuesta a diferentes concepciones. Sriraman y Kaiser (2006) señalan que la noción de MM se define de diferentes maneras en Matemática Educativa, según la perspectiva teórica adoptada: *“no existe un entendimiento homogéneo de la modelación y sus antecedentes epistemológicos dentro de la discusión internacional sobre modelación y aplicaciones”* (Sriraman & Kaiser, 2006).

3.1 Diferentes perspectivas teóricas de la Modelación Matemática

Para ilustrar los diferentes significados asociados a la MM en el contexto del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, en esta sección se describirán tres perspectivas sobre la MM según Chevallard (1989), Perspectiva de Modelos y Modelación de Lesh & Doerr (2003), la MM de la Matemática Realista (1991) y el ciclo de modelación de Blum-Leiss (2007), en cada perspectiva se agrega una situación de MM para ejemplificarlas.

3.1.1 Perspectiva de Modelación de Chevallard

Chevallard (1989) introduce un diagrama simplificado, pero muy útil para entender la modelación, primero divide los sistemas en matemáticos y no matemáticos, el nombre de MM se lo atribuye al estudio matemático de sistemas no matemáticos. Chevallard, al hablar de sistemas no matemáticos, se refiere al análisis de un fenómeno desde una perspectiva formal de la matemática, como puede ser un sistema matemático, aritmético, algebraico, etc.

Divide el modelado matemático en tres etapas, en la primera se define el sistema que se pretende estudiar definiendo el conjunto de variables que se observan en la realidad. En la segunda etapa se construye el modelo estableciendo relaciones entre las variables que se

definieron en la primera, es importante resaltar que el conjunto de relaciones es el modelo por estudiar. La tercera etapa es propiamente la matemática para obtener conocimientos del sistema de estudio (ver Diagrama 2). La primera y segunda etapa caen en el dominio de la realidad al que se supone pertenece el sistema.

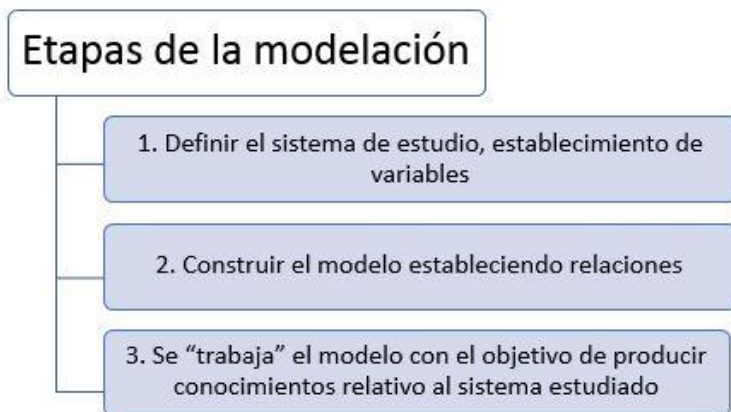


Diagrama 2 Elaborado con base en Chevallard (1989, p. 53-54)

Las aportaciones de Chevallard al aprendizaje de las matemáticas fueron muy importantes ya que se produjeron en una época donde la didáctica de las matemáticas apenas empezaba, estas aportaciones estaban relacionadas con fenómenos ligados al aprendizaje.

Con el propósito de ejemplificar lo planteado por Chevallard, se toma el problema del Tangram de Brousseau (1987). Donde el profesor muestra un Tangram cuadrado de 11 cm de lado (Figura 1) que permite realizar diferentes configuraciones. La instrucción es que deben construir un Tangram semejante pero más grande. Así que, si el lado de una pieza mide 4 cm en el nuevo Tangram, medirá 7 cm. Con la condición de poder hacer las mismas figuras con el Tangram grande que con el original.

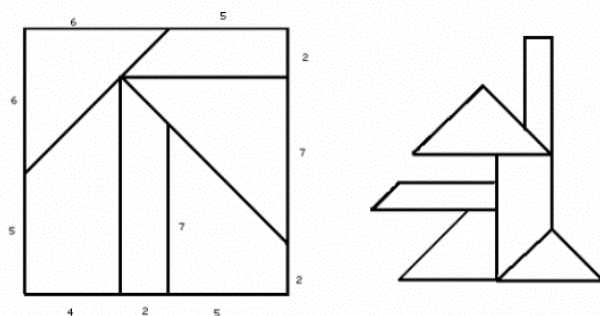


Figura 1 Tangram (Brousseau & Brousseau, 1987, p. 137)

De acuerdo con el proceso de modelación de Chevallard para la resolución de esta situación, en la primera etapa se define al Tangram como sistema de estudio, las medidas de

los lados de las figuras geométricas del Tangram se identifican como los datos proporcionados por la situación.

En la segunda etapa se deben establecer las relaciones de los lados del tangram original y el nuevo Tangram, es decir, la razón de 4:7 entre los lados de la figura original y los lados de la nueva figura.

Es importante mencionar que una cualidad destacable de esta actividad es que la situación planteada permite al alumno validar si los procedimientos utilizados fueron correctos o no, esto es, si al construir el nuevo Tangram las piezas embonan o no. La cualidad que tiene esta actividad se diferencia de otras situaciones donde los estudiantes la resuelven sin saber si es correcto o no. Esta validación promueve la discusión entre estudiantes, incluso con el maestro (Balbuena & Block, ¿Qué significa multiplicar por $7/4$?, 1996).

En la tercera etapa del proceso de modelación se generan las medidas del modelo, se construye la nueva figura comparándola con el Tangram original, los alumnos corroboran que la figura generada es semejante a la original.

Las investigaciones sobre la implementación de esta actividad muestran que la principal dificultad que tienen los estudiantes para resolver esta situación problema es la construcción de un modelo que genere el Tangram semejante, ya que inmediatamente aumentan a cada lado de cada figura tres centímetros, lo que ocasiona que no puedan armar la figura aumentada, en este momento la contradicción es inminente. Esta dificultad está ligada a un obstáculo epistemológico asociado al modelo aditivo para resolver un problema de proporcionalidad en lugar de un modelo multiplicativo.

Bachelard fue el primero en referirse a la noción de obstáculo epistemológico ligado a las ciencias, afirma que los entorpecimientos o confusiones que comete un alumno en sus procedimientos hacia la búsqueda de una construcción de conocimiento real son obstáculos epistemológicos que determinan simplemente lo “incompleto” del conocimiento del alumno, pero no necesariamente ausencia de conocimiento (Bachelard, 1948).

Brousseau, en el contexto de la didáctica de las matemáticas, se basa en la idea de Bachelard al acercarse a las causas que conducen a errores y conceptualiza obstáculo epistemológico afirmando lo siguiente: “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, sino que es el efecto de un conocimiento anterior, que, a pesar de su interés o éxito, ahora se revela falso o simplemente inadecuado” (Brousseau G. , 1998).

Para Brousseau un obstáculo de este tipo no se puede evitar, considera que es necesario enfrentarlo, precisamente; la actividad del Tangram proporciona herramientas al alumno que le permiten superar el obstáculo. En la actividad del Tangram se les brinda la posibilidad de manipulación de las piezas, así cuando los alumnos siguen el camino de un modelo aditivo, caen en una situación de contradicción visualmente evidente ya que las piezas del Tangram no embonarán. Una vez que el obstáculo es sobrepasado, el modelo multiplicativo es aplicado y la noción de proporcionalidad emergerá.

Una característica de esta situación problema es que el único medio para resolverla es usando la noción de proporcionalidad. En esta situación, los estudiantes constatan el éxito o fracaso de sus intentos, adquiriendo autonomía en el proceso de modelación, que es fundamental en la MM. Si fracasan, deberán volver al establecimiento de la relación entre las variables para obtener un nuevo modelo.

3.1.2 Perspectiva de Modelación de Lesh & Doerr

En esta perspectiva, la modelación es un proceso de desarrollo de descripciones representacionales para propósitos específicos de ciertas situaciones. Usualmente, implica una serie iterativa de pruebas y ciclos de revisión donde las interpretaciones, descripciones y explicaciones de los ensayos son gradualmente revisados, refinados o rechazados. Los modelos matemáticos son sistemas conceptuales que: (a) se expresan para algún propósito específico, y (b) expresado usando algunas representaciones (ver Diagrama 3). Es decir, los modelos matemáticos son descripciones o explicaciones intencionadas que se enfocan en patrones, regularidades y otras características sistémicas estructuralmente significativas (Lesh & Lehrer, 2003). Su propósito involucra construir, manipular, o predecir los sistemas que se están modelando; y, el proceso de desarrollo de modelos es suficientemente útil para un propósito específico, donde generalmente implica una serie de pruebas iterativas y ciclos de revisión (Lesh & Doerr, 2003).



Diagrama 3 Ciclo de modelación (Lesh & Doerr, 2003, p.112)

Cuando los estudiantes pasan por ciclos de modelado durante una actividad determinada, se espera que observen sistemas, desarrollen formas de pensar sobre la naturaleza de los objetos, identifiquen relaciones, operaciones y patrones o regularidades en la resolución de situación problema.

Es importante señalar que en el proceso de modelación de Lesh y Doerr se enfatiza la importancia de la noción de representación, noción que Chevallard no aborda explícitamente.

Lesh y Doerr mencionan un desarrollo mucho más completo del proceso de modelación. En el caso de Chevallard, su modelo es lineal, directo.

Una de las actividades generadoras de modelos (MEA's model eliciting activities) que presentan Lesh y su equipo es la del Pie Grande, es una versión para escuela secundaria de un estudio de caso (simulación de una situación de resolución de problemas de la vida real). La idea matemática central que los estudiantes deben usar en el problema implica alguna forma de razonamiento proporcional, que puede ser basado en relaciones lineales tales como $Y = S \cdot X$ (donde S es el factor de escala).

Como preparación para el problema, se introduce a los estudiantes al contexto e información relevante leyendo y discutiendo un escrito sobre Tom Brown, que vive en los pinares de New Jersey y que trabaja con la policía para ayudarlos a encontrar personas extraviadas o criminales prófugos. Tom aprendió habilidades de rastreo de su abuelo apache, quien también le mostró cómo vivir en un país salvaje, sin herramientas ni alimentos, excepto los que podía elaborar él mismo, utilizando materiales que podía encontrar. Entonces, Tom se ha vuelto como el famoso detective Sherlock Holmes. Puede ver huellas donde otras personas no pueden ver, y, con solo mirar las huellas, a menudo es capaz de hacer sorprendentes estimaciones muy precisas sobre las personas a las que pertenecen estas huellas: qué tan altas son, cuánto pesan, si son hombres o mujeres, y qué tan rápido están corriendo o caminando.

Para que los estudiantes comiencen a trabajar en los problemas de Pie Grande, después de discutir el escrito sobre Tom Brown, y después de haber leído el enunciado del problema que se proporciona a continuación, a los estudiantes se les muestra una caja plana (con dimensión de 2 pies) que contiene una enorme huella en una capa de 1 pulgada de lodo seco, como se muestra en Figura 2 (Lesh & Doerr, 2003).

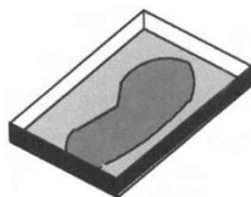


Figura 2 Problema Pie Grande (Lesh & Doerr, 2003, p.6)

En el problema de Pie Grande, las investigaciones hechas por Lesh y su equipo muestran las soluciones de múltiples ciclos de modelación típicos, en los que los estudiantes trabajan en una sesión de una hora. Primer ciclo, en los primeros 8 minutos de trabajo los estudiantes solo realizan juicios cualitativos de qué tan grandes deben ser las personas con esas huellas, sobre el tipo de calzado, sexo de la persona, etc.

El segundo ciclo de la solución del problema es el razonamiento aditivo, los alumnos colocan su pie a lado de la huella y usan dos dedos para marcar la distancia entre el dedo de su pie y el dedo de la huella, para después hacer lo mismo con su altura agregando la distancia

que le hace falta, este es el mismo obstáculo descrito en el ejemplo del Tangram de Brousseau en el apartado anterior. En el tercer ciclo, el razonamiento de los estudiantes se basa en “el doble de grande”, en el cual concluyen que, si la huella es el doble de grande que mi pie, entonces la altura debe ser el doble también.

En el cuarto ciclo, los estudiantes se centran en las tendencias a través de una secuencia de mediciones, las comparaciones de ambas huellas son usadas para estimar la relación entre las alturas. Esta manera de visualizar está basada en que se asume implícitamente que la relación es lineal, esta relación resulta relevante porque automáticamente es tratada como un modelo multiplicativo (ver Figura 3).

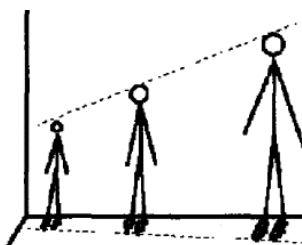


Figura 3 Interpretación 4 (Lesh & Doerr, 2003, p.21)

El quinto ciclo es donde los estudiantes serán muy explícitos al hacer comparaciones de la huella con su pie, por ejemplo: “La altura de la persona se estima al ser seis veces el tamaño de su huella del pie”.

Los ciclos de modelado por los que pasan los estudiantes son sorprendentemente similares a las etapas de desarrollo por las que pasan los niños durante la evolución de su pensamiento proporcional y que han sido observadas por psicólogos y educadores.

En las actividades generadoras de modelos, propuestas por Lesh y su equipo, los estudiantes producen herramientas conceptuales que incluyen sistemas descriptivos o explicativos, que funcionan como modelos y que revelan aspectos importantes sobre cómo los estudiantes están interpretando la solución a la situación problema. A diferencia de los sistemas planteados por Chevallard que se reducen a los matemáticos y no matemáticos, Lesh y Doerr incluyen sistemas explicativos, como la lengua natural.

En el caso del proceso de modelación de Lesh y Doerr, su modelo es cíclico, esto es de gran importancia ya que es posible que no se obtenga un modelo adecuado por los estudiantes en su primer intento. Al comparar los procesos de modelación de Chevallard y el de Lesh Doerr, el último está más ligado a lo que sucede en el aula. Sin embargo, la actividad de MM bajo la perspectiva de Lesh y Doerr puede presentar mayor dificultad para los estudiantes, ya que, si cometen errores, la actividad misma no proporciona una retroalimentación inmediata, carece de esta cualidad que tienen las actividades de Brousseau.

3.1.3 La perspectiva de la Matemática Realista de la Modelación Matemática

Freudenthal quien se oponía a la llamada “Reforma de las matemáticas modernas” (periodo de 1960-1970), pensaba que los estudiantes no podían ser considerados como receptores pasivos de matemáticas prefabricadas; más bien, la educación debería guiar a los estudiantes a reinventar las matemáticas por ellos mismos. Aunque no es fácil proporcionar una definición clara de la Educación Matemática Realista (RME por sus siglas en inglés), las siguientes características ligadas a la RME son cruciales para su función en este estudio: la reinención guiada y matematización progresiva, fenomenología didáctica, la matematización horizontal y vertical y la modelación emergente. En el principio de reinención, los estudiantes deben tener la oportunidad de experimentar un proceso similar al que se desarrolló durante la invención de un concepto matemático dado; por lo tanto, se debe diseñar una ruta que permita a los estudiantes desarrollar “sus propias” matemáticas. La fenomenología didáctica sirve como una heurística para diseñar actividades que animan a los estudiantes a desarrollar sus estrategias (Drijvers P. , 2003).

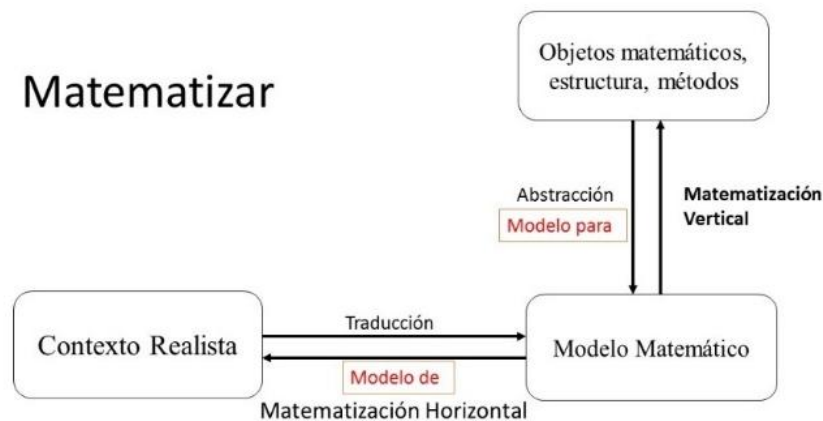


Diagrama 4 Drijvers (2003, p.54)

De acuerdo con Freudenthal (1991) la actividad matemática se divide en dos partes: La primera parte es matematización horizontal, conduce del mundo de la “vida” al mundo de los “símbolos”. En el mundo de la vida uno vive, actúa (y sufre) y en la segunda parte, en el que los símbolos son moldeados, reformados y manipulados, mecánica, comprensiva y reflexivamente, se considera el de la matematización vertical.

Este proceso de modelación tiene una característica importante que es la distinción entre una matemática emergente (horizontal) que promueve la matematización de una situación (matemática vertical). Este modelo podría ser complementado por el modelo de Mason (1996), que propone un aprendizaje en espiral, para expresar la generalidad en un proceso que se corresponde con una espiral continua de acciones denominadas manipular, obtener sentido de y articular. La manipulación (sea de objetos físicos, mentales o simbólicos) permite apreciar lo que está sucediendo y detectar patrones, relaciones,

generalidades, etc. Detectar lo que está sucediendo permite obtener sentido de alguna característica o propiedad de los objetos que se están manipulando, lo que da lugar a articular la estructura que conlleva a la generalización. Cuando esto ocurre, la expresión de la generalización se convierte en una entidad que puede ser manipulada y usada para encontrar otras propiedades, lo que permite continuar de forma ascendente en la espiral, empezando un nuevo ciclo de acciones.

En la reinención las situaciones problema juegan un papel primordial, al seleccionar una buena situación problema conduce al estudiante a desarrollar modelos informales (como veremos más adelante, clasificado por Gravemeijer como “modelo de”) de un contexto específico y de estrategias de solución. Estos procedimientos informales posteriormente se vuelven objeto de formalización y generalización para constituir un proceso de mayor abstracción, en RME denominado como: matematización progresiva (Doorman & Gravemeijer, 2009).

Anteriormente, se describió la matematización progresiva como la formalización y esquematización de estrategias informales de resolución de problemas. Se hizo la distinción entre la matematización horizontal y vertical como medio de apoyo al proceso de matematización progresiva en el que se desarrolla una nueva realidad matemática, Gravemeijer (1999) propone un diseño instruccional heurístico de modelación emergente. De acuerdo con este enfoque, el modelo puede jugar diferentes roles durante diferentes niveles de actividades. El modelo se desarrolla y cambia tanto la representación real, y su significado. Incluso si el modelo no es inventado por los estudiantes, se tiene mucho cuidado para aproximar las invenciones de los estudiantes lo más cerca posible, eligiendo modelos que se vinculan con su razonamiento actual. El cambio de modelos de situaciones realistas a modelos para el razonamiento matemático coincide con un cambio en la forma como el alumno piensa en el modelo, a partir de modelos que derivan su significado a partir de la situación de contexto modelada, pensando en las relaciones matemáticas. En este contexto, el concepto de modelo debe entenderse de una manera más amplia. No es solamente una representación física, sino todo lo que viene con ello. La idea es que, durante la actividad, el modelo y la situación que ha sido modelada co-evolucionen (Doorman & Gravemeijer, 2009).

Para ilustrar este ciclo de modelación, se presenta un problema “Si quiero ir de un lugar a otro en la ciudad utilizando mi teléfono celular como guía ¿qué es lo que hace el celular?, una de las respuestas esperadas es que se haga alusión al GPS; este es un contexto realista, se plantea la pregunta ¿cómo funciona el GPS? Después de la discusión, se espera que una respuesta sea que funciona mediante satélites, que la señal viaja a una velocidad constante y a partir de la fórmula de la velocidad= distancia/tiempo (dentro de un modelo físico), el satélite obtiene la distancia. Al satélite, lo único que le es posible calcular, es la distancia. Al no conocer la posición, el satélite solo puede deducir que el objeto está en una esfera con un radio igual a la distancia encontrada. Es necesario otro satélite, para poder determinar la

intersección o no de las dos esferas, que proporcionan un círculo o en el caso ideal un punto. Si la intersección de las dos esferas proporciona un círculo, es necesario un tercer satélite para determinar una intersección en un punto, como se muestra en la Figura 4. El modelo inicial, aplicando conceptos de la física, permitió pasar a un modelo geométrico. El modelo geométrico permite una interpretación para la construcción de un modelo algebraico que es la solución a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, al proporcionar un sistema coordinado en tres dimensiones. Podemos apreciar que se ha pasado de diferentes modelos para poder resolver la situación.

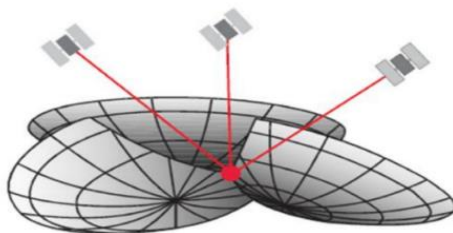


Figura 4 ¿Cómo funciona el GPS? (Leica Geosystems, 1999, p.11)

Esto ejemplifica, precisamente un modelo que podemos interpretar como Freudenthal (1991)-Mason (1996) de modelación en espiral.

Interpretando el modelo de Freudenthal (1991) en el sentido que en una matemática horizontal se producen fenómenos de visualización matemática, predicción, conjetura y validación preliminar, ello proporciona una herramienta rica para desarrollar en el aula de matemáticas. Interpretando de esta manera el modelo de Freudenthal, también podemos añadir la importancia de los procesos de formación de representaciones y su impacto en una modelación en espiral, así como sacar provecho de caer en una contradicción y superarla.

3.1.4 Perspectiva de Modelación de Blum-Leiss

El ciclo de modelado Blum-Leiss (2007) tácitamente opera con la presencia de una tarea de modelado dada al modelador (ver Diagrama 5), lo que sugiere un contexto escolar en el que un profesor asigna tareas a los alumnos. El Diagrama 5 presta especial atención a la necesidad del modelador de comprender la tarea antes de simplificar y de estructurar, primero el “modelo de la situación” por ejemplo una imagen mental de las características fundamentales de la situación y sus elementos esenciales y después un “modelo real”, estos son procesos cognitivos relacionados con el dominio de la realidad. Finalmente, lo interesante de la tarea vista desde el exterior se amplifica con la presencia del último paso en el ciclo, “presentar” el trabajo a una audiencia o un destinatario, por ejemplo, una clase o un maestro.

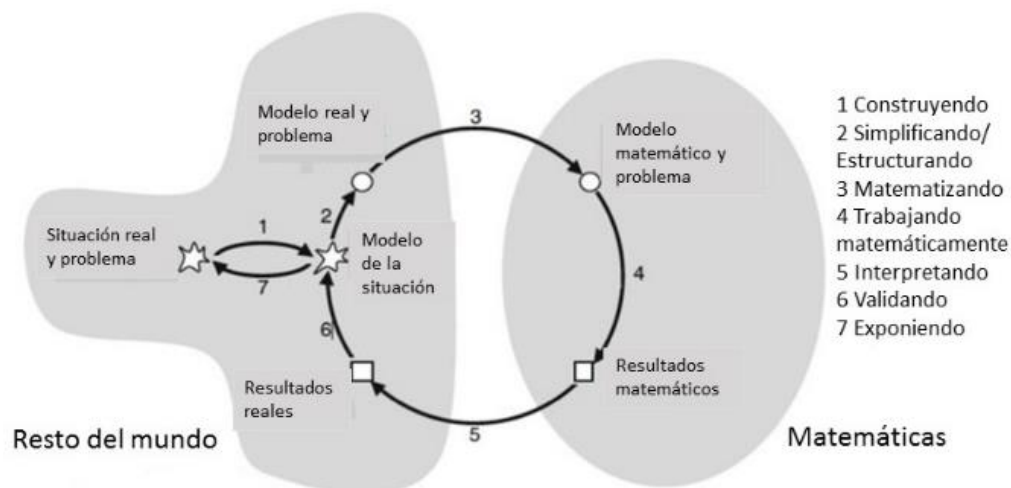


Diagrama 5 Ciclo de modelado de Blum-Leiss (Blum & Leiss, 2007, p. 225)

Bajo esta perspectiva el análisis cognitivo se sitúa en el primer plano incluyendo un paso adicional dentro del proceso de modelado, la comprensión de la situación por los estudiantes al desarrollar un “modelo de la situación”, que luego se traduce al modelo real (Kaiser, 2020).

Para ejemplificar el ciclo de modelación de Blum-Leiss se plantea la situación real llamada “el problema del gigante”, en donde la pregunta es ¿cuánto mide la altura del Gigante? Primero se muestra la imagen a los estudiantes (ver Figura 5).

Construyen su primer modelo a partir de las medidas de la altura y longitud del pie de la persona parada a un lado del pie del gigante que se puede ver en la Figura 5, esto, en el ciclo de modelación corresponde a la matematización, ya que se obtiene la razón de proporcionalidad y luego se aplica esa razón a la longitud del pie del gigante, finalmente, se obtienen los resultados matemáticos y estos se presentan contextualizándolos a la situación problema.



Figura 5 ¿Cuánto mide la altura del Gigante? (Foto: Camelot Theme Park)

Este ejemplo muestra la utilización de la escala en la modelación básica y tomarla como punto de partida para validar el modelo obtenido y evaluarlo en la situación problema. Indica

cómo las medidas no conocidas emergen a partir de las medidas estimadas en el resultado final.

Al presentar estos diferentes procesos de modelación, según la situación problema planteada, se quiere mostrar cómo cada uno se adapta a las necesidades de la MM, y del tipo de trabajo que se requiere de los estudiantes.

Por ejemplo, en el proceso de modelación de Chevallard, la situación del Tangram requiere de la visualización, manipulación de materiales y del trabajo en el registro aritmético y enseguida, según el nivel de los alumnos, en el algebraico. El ejemplo de Pie Grande brinda la necesidad de representaciones espontáneas de los estudiantes durante el ciclo del proceso de modelación en la resolución del problema, mientras el ciclo de modelación de Chevallard se centra en las representaciones institucionales (registros o sistemas matemáticos de signos) y no se mencionan las representaciones espontáneas.

En el proceso de modelado de la Matemática Realista, vemos que además de la representación algebraica, se debe promover la representación geométrica, por ejemplo, la complejidad que conlleva modelar la situación del funcionamiento del GPS lo requiere, para que el modelo matemático obtenido sea el adecuado. En el proceso de modelado Blum-Leiss no está claro el papel de las representaciones.

La importancia de la actividad de Tangram de Brousseau estriba en la cualidad especial de una retroalimentación instantánea para el estudiante, en la que ellos pueden validar si los procedimientos fueron correctos o no.

Por lo que la selección del proceso de modelado en el presente trabajo dependerá de las situaciones problema que se propondrán, de las representaciones que se promuevan, incluyendo las espontáneas, donde se fomente el uso de la tecnología para desarrollar la visualización matemática y que sea adecuado para el nivel secundaria, al cual está dirigido este proyecto. Considerando que los procesos de MM son complejos bajo la perspectiva de la integración STEM, y bajo el ángulo de la matemática horizontal y vertical, la red conceptual con la que se quiere trabajar está relacionada con la visualización matemática, la anticipación, la predicción, la conjetura, la sensibilidad a la contradicción, la validación y el ir más lejos en procesos de generalización, de allí la complejidad de generar esta red conceptual en los estudiantes en el aula de matemáticas.

Además de la selección de las situaciones problema, otro aspecto importante, que se revisa en el siguiente apartado, son las investigaciones donde se han utilizado herramientas didácticas como el caso de la experimentación en contextos de física.

3.2 La Modelación Matemática con experimentación en contextos de física como herramienta didáctica

Uno de los fines de la Matemática Educativa es buscar herramientas didácticas que hagan que los estudiantes encuentren sentido a los contenidos matemáticos, una de ellas es la experimentación y/o el uso de simuladores de diversos fenómenos de la física, que, junto con la MM, favorece la construcción, interpretación y validación de los modelos matemáticos en los estudiantes.

Tal es el caso que reportan Rodríguez y Quiroz (2016) en un grupo de 46 estudiantes, que cursan la materia de Ecuaciones Diferenciales, en el segundo año de diversas ramas de la ingeniería, en el Tecnológico de Monterrey, una universidad privada del noreste de México. La actividad consiste en introducir un método analítico para la resolución de una ecuación diferencial de primer orden, donde modelarán matemáticamente un fenómeno eléctrico el cual se busca conocer el cambio respecto al tiempo de la carga de un capacitor (C) de un Circuito Eléctrico Resistencia-Capacitor. Los alumnos arman un circuito y se les pide la generación de gráficas que se forman por la carga y descarga del capacitor con apoyo de un sensor de voltaje conectado a un software en la computadora.

El objetivo general de esta investigación consistió en determinar el rol de la experimentación en el armado y construcción del modelo matemático en un curso de Ecuaciones Diferenciales basado en la MM. Además, tenían el interés de definir el rol de la experimentación en la secuencia didáctica que diseñaron, así como los retos que implicó su ejecución en el aula.

Las investigadoras llegaron a la conclusión de que la experimentación jugó dos roles importantes. El primero fue la manipulación que los estudiantes tuvieron del circuito, vivenciaron un acercamiento hacia el fenómeno que pocos habían podido tener. El segundo rol fue permitir a los estudiantes una mejor comprensión y asimilación de los conceptos matemáticos en juego.

Esta investigación muestra cómo la experimentación no solamente tiene cabida en una clase de matemáticas, sobre todo si está basada en MM, sino que además es determinante en el proceso de dotar de nuevo significado a los estudiantes sobre las nociones matemáticas en juego.

Finalmente, señalan que es necesario reconocer la labor del docente en la elección, diseño o adaptación y puesta en escena de actividades experimentales en el aula. Por tanto, la preparación de los docentes es un aspecto primordial si se busca promover este tipo de actividades en las aulas de clase. Investigaciones recientes han mostrado metodologías que combinan el trabajo investigador-docente y cuyos resultados pudieran tomarse en cuenta para el seguimiento del estudio de la experimentación en matemáticas.

Otro aspecto que conforma nuestra propuesta es el entorno tecnológico, por lo que a continuación se presentan dos proyectos que incluyeron el uso de tecnología digital en la MM en México.

3.3 La Modelación Matemática en entornos Tecnológicos en clases de Matemáticas

Como antecedente a la implementación de la MM en un entorno tecnológico se encuentra el proyecto de innovación educativa desarrollado en México por iniciativa de la Secretaría de Educación Pública y encabezado por Rojano y colaboradores (2003). El proyecto llamado Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología (EFIT-EMAT), tuvo como uno de los objetivos generales, la incorporación sistemática y gradual del uso de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) en la enseñanza de las Matemáticas y la Física en la escuela secundaria pública.

Las actividades se diseñaron mediante un tratamiento fenomenológico de los conceptos que se enseñan. El modelo EMAT (enseñanza de las matemáticas con tecnología) contempla el uso de herramientas tecnológicas digitales (software especializado y calculadoras gráficas) relacionadas con la didáctica de la geometría, el álgebra, la aritmética, la resolución de problemas y la modelación.

Utilizaron varios programas, entre ellos el *SimCalc Math Worlds* y *Cabri Géomètre II* para la simulación y la representación de fenómenos de movimiento para la enseñanza de la matemática de los conceptos de variación y cambio; y el paquete de cómputo *Stella* para la modelación, este paquete permite a los alumnos acercarse a ideas importantes en matemáticas a través de un ambiente de modelación. Los responsables del proyecto señalan que la modelación no era un tema que apareciera en el currículo en ese tiempo.

Como parte del proyecto, se evaluó un programa piloto en varias escuelas secundarias públicas del territorio nacional, los resultados de la investigación mostraron un avance sobre el uso del lenguaje simbólico, reportando una mejoría en el nivel de abstracción con el que se usaba este lenguaje. El trabajo con las actividades de modelación fueron las que representaron mayor dificultad para los alumnos que los otros entornos de trabajo. Sin embargo, al final programa piloto los estudiantes logran un mejor análisis de los fenómenos de movimiento en sus versiones gráfica y numérica.

Finalmente, se informó que este proyecto tuvo implicaciones para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en el sistema de educación básica. La investigación concluye que los alumnos participantes en el plan piloto fueron beneficiados en cuanto a conceptualización y desarrollo de habilidades de exploración, elaboración/verificación de conjeturas, resolución de problemas, modelación de fenómenos del mundo físico, y expresión en lenguaje matemático y científico en el aula.

En la actualidad, en la Universidad de Guadalajara, Pantoja y su equipo (2017) han trabajado, con alumnos de educación superior, en la MM de situaciones en contextos cinemáticos, creados con personas, vehículos y objetos en movimiento. Para la toma de datos de las situaciones problema utilizaron el programa Tracker, así que los estudiantes graban en video los movimientos, dependiendo de la situación problema, con la finalidad de usar esta tecnología para modelar las situaciones problemas videograbadas.

El programa Tracker se convierte en la interfase entre lo real y lo modelado, que genera a partir del video, datos numéricos, gráficas y un conjunto restringido de funciones. Pantoja y su equipo utilizaron el método de enseñanza ACODESA para el diseño de las actividades, donde los estudiantes trabajan en colaboración analizando la situación problema, discutiéndola y relacionándola con el modelo. Al final elaboraron un reporte y lo presentaron para su discusión en sesión plenaria.

La experimentación se planeó en las siguientes fases: primera, explicación del funcionamiento de Tracker mediante el análisis de un video digital del lanzamiento de un balón de basquetbol. Segunda, organización de los alumnos en equipos de trabajo y selección de las situaciones problema con intención de modelar su movimiento. Tercera, selección de las situaciones problema, con la intención de modelar diversas variantes de movimiento, a saber: movimiento parabólico, movimiento circular uniforme, movimiento armónico, movimiento uniforme y uniformemente acelerado y vaciado de recipientes. Cuarta, planeación de la fase de grabación de video. En esta etapa se captura el movimiento del objeto en video digital, para posteriormente reproducirlo y obtener datos numéricos, analíticos y gráficos con Tracker. Quinta, articulación de los datos que proporciona el software con el fenómeno a partir de la discusión por equipo. Última fase, generación de un discurso plenario acerca de dos situaciones, a partir de la exposición del trabajo de cada equipo y la generación de un debate grupal.

En las conclusiones de la experimentación reportan cuatro aspectos. El primero está relacionado con la elección de los estudiantes de la situación problema, los autores explican que esto genera ventajas para el estudiante debido a que se le enfrenta a un contexto cercano a ellos lo que los motiva a aprender matemáticas de manera lúdica y toman un rol activo, ya que a través de su experiencia construyen conceptos y desarrollan habilidades, mediadas por la interacción con otros estudiantes, permitiéndose el enriquecimiento y fortalecimiento de las ideas, los conocimientos y los argumentos que cada uno muestra para defender sus puntos de vista, esto último está relacionado con el segundo aspecto que es el trabajo en colaboración. El segundo aspecto es que el trabajo en colaboración favorece la creatividad, la reflexión y la habilidad para tomar decisiones. Además, el trabajo en colaboración les permite discutir ideas, establecer acuerdos a través del diálogo basado en la argumentación, experiencias y conocimientos previos, que potencialmente se convierte en aprendizaje.

El tercer aspecto se relaciona con el empleo de tecnología, la cual motiva a los estudiantes a descubrir y construir el conocimiento y propicia la reflexión sobre los

procedimientos empleados y los resultados obtenidos. El programa Tracker es un recurso tecnológico que permite a los estudiantes la manipulación de videos digitales a partir de situaciones problema con medidas reales en tiempo real. Sobre la MM, informan que el alumno puede desechar ideas erróneas para la situación en cuestión, discute, expone y aclara ideas en un proceso de colaboración. Aclara que la MM no es una tarea fácil, pero planteando tareas de MM en colaboración con el uso de tecnología y en contextos que involucran al estudiante, este se motiva y le encuentran la utilidad a los conceptos y algoritmos matemáticos que antes no tenían sentido para ellos.

Las tecnologías digitales se pueden incorporar de dos maneras: el uso de enfoques basados en la investigación, el diseño y los desafíos para enseñar el área de aprendizaje de la tecnología digital y el uso de recursos digitales para apoyar enfoques innovadores contemporáneos de las matemáticas y las ciencias que reflejan prácticas disciplinarias (Hobbs, Clark, & Plant, 2018). En este segundo uso se ubican las investigaciones reportadas en esta sección y también el enfoque con el que se usan en STEM, en el siguiente apartado describiremos algunas experiencias que encontramos en investigaciones con alumnos de nivel secundaria que han sido elaboradas con el enfoque STEM.

3.4 Experiencias de enseñanza de Modelación Matemática con enfoque STEM en secundaria

Como ya se ha dicho, la MM no es una tarea fácil, existen investigaciones que han demostrado que los estudiantes de secundaria pueden desarrollar modelos con éxito. English y Mousolides (2011) realizaron el estudio de una Actividad Generadora de Modelos Ingenieriles (EngMEA por sus siglas en inglés) en el contexto del consumo y producción de Gas Natural, a los estudiantes se les brindaban los datos sobre el consumo medio anual durante 15 años de gas natural y tenían que predecir cuándo se acabarían las reservas.

El estudio se hizo con 20 estudiantes sobresalientes de 12 años. Estos estudiantes son parte de un estudio longitudinal de 3 años de modelación matemática y pensamiento ingenieril. Se llevó a cabo en el área urbana de Nicosia, Chipre.

Los resultados de la investigación mostraron que cuatro de seis grupos de estudiantes de 12 años, desarrollaron modelos apropiados para resolver el problema. Dos grupos fracasaron comprender el concepto de promedio y utilizarlo efectivamente en sus modelos. En sus conclusiones, los investigadores plantean la necesidad de proponer problemas EngMEA's para abordar temas que requieran que los estudiantes desarrollen un modelo que integre las características estructurales del problema de ingeniería que se está abordando. Enfatizan la importancia de que los estudiantes documenten las construcciones de modelos para que su pensamiento y razonamiento se pueda externalizar en varias formas, incluidas tablas, listas, gráficas y diagramas. Enfatizan también la necesidad de que los estudiantes

puedan describir y explicar con detalle, los pasos dados durante la construcción del modelo. Y finalmente señalan que es imperativo que los modelos que crean los estudiantes deben ser aplicables a otros problemas relacionados con la ingeniería.

English (2015) señala la oportunidad para que la Matemática Educativa aumente las experiencias de matemáticas en las actividades STEM, en aplicar el diseño de ingeniería para mejorar la resolución e investigación de problemas matemáticos. Con el rápido aumento de la educación en ingeniería basada en gran medida en el currículo de las Ciencias, es imperativo que las matemáticas no se conviertan en un pariente lejano. Mi objetivo, dice English, es ejercer mayor presión sobre la comunidad internacional para que nuestro campo sea un actor central en el avance de STEM. Es necesario elevar las matemáticas a la cima de la montaña STEM, y debemos asegurarnos de que permanezca allí con sus aportes.

En los modelos educativos del 2017 y en el actual 2023 de México, se sugiere el enfoque STEM para el aprendizaje de las matemáticas. En la siguiente sección se muestran algunas actividades de los temas de variación y covariación que se encontraron en los libros de texto gratuito, que ilustran la manera como se propone abordar la MM en estos textos.

3.5 La Modelación en los libros de texto de Matemáticas de secundaria

En el documento titulado Programa de Estudios Aprendizajes Clave para la Educación Integral (SEP, 2017) se propone promover el aprendizaje de la matemática escolar en contextos del mundo real, como fenómenos de la física u otras ciencias, para involucrar más a los estudiantes y darles mayor sentido a las tareas y actividades matemáticas.

Aunque en su enfoque didáctico afirma que la MM debe ser introducida como una herramienta didáctica, en los libros de texto de CONALITEG, el libro titulado Conecta Más (Balbuena, Block, García, Mendoza, & García, 2021) de matemáticas de tercero de secundaria, en el contenido de covariación aparecen diferentes contextos en los cuales los alumnos analizan gráficas y/o tablas de datos donde deben responder algunas preguntas sobre la covariación de las variables y relacionar las gráficas de los fenómenos con la tabla numérica correspondiente, en una de las actividades se obtiene la expresión algebraica.

En una primera actividad se invita al estudiante a revisar sus conocimientos previos sobre la lectura de gráficas e introducirlos al contenido de variación (ver Figura 6).

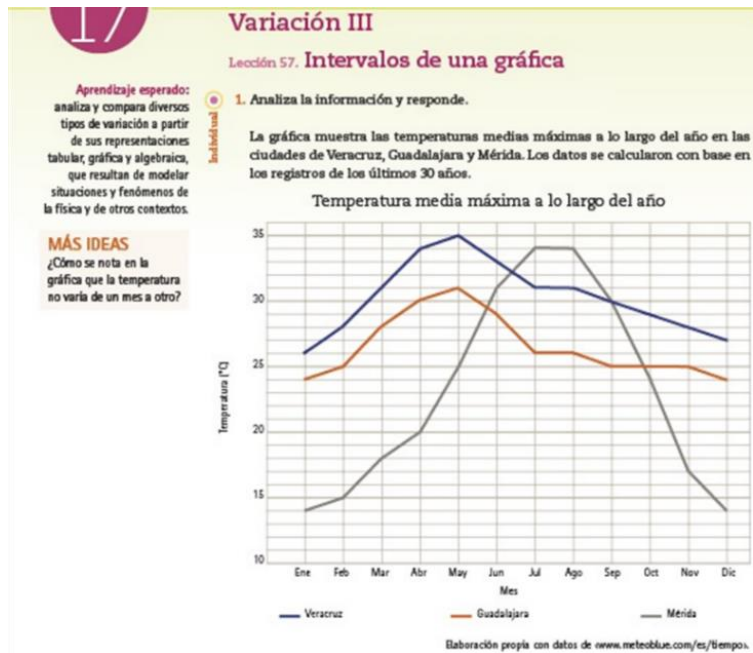


Figura 6 Actividad libro Conecta Más. Matemáticas 3. Secundaria (Balbuena, Block, García, Mendoza, & García, 2021, p.124)

Posteriormente en la misma secuencia se presenta una actividad de llenado de recipientes, se muestran imágenes de diferentes recipientes que se deben relacionar con su gráfica. Se puede observar que la actividad de este libro proporciona respuestas a la situación problema que no les promueven en los estudiantes elaboraciones propias (ver Figura 7).

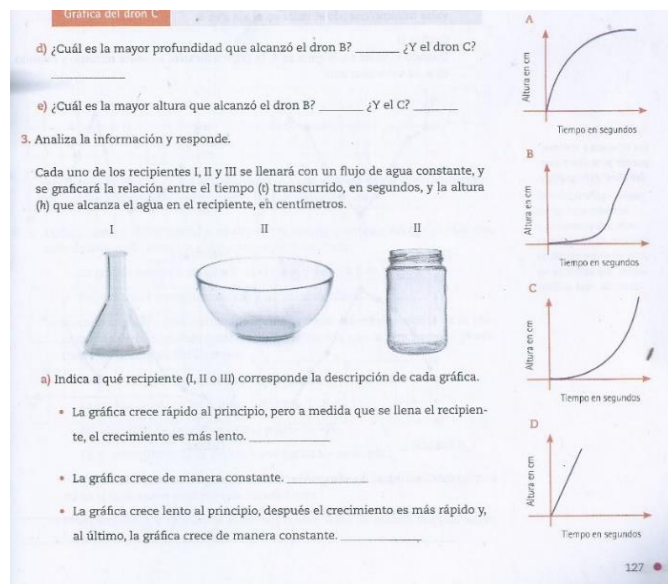


Figura 7 Actividad libro Conecta Más Matemáticas 3. Secundaria (Balbuena, Block, García, Mendoza, & García, 2021, p. 127)

En lo referente al Nuevo Modelo Educativo llamado La Nueva Escuela Mexicana, que entró en vigor en agosto del 2023, se inspeccionó la página de CONALITEG de los nuevos

libros de texto gratuitos, el libro titulado Saberes y pensamiento científico de tercer grado de secundaria (Educativos, 2023) al observar el mismo contenido matemático sobre covariación de variables, se encontraron actividades similares a las encontradas en los libros del programa de estudios del 2017.

En esta situación, las variables son el volumen del agua en la cubeta y el tiempo que tarda en llenarse. El volumen se mide en litros (l) y el tiempo en segundos (s). La razón de cambio es de 0.5 litros por segundo (l/s), lo que corresponde a la razón constante dada. En el primer segundo entran 0.5 l, en el segundo siguiente se completa 1 l, en el tercero 1.5 l. La tabla reúne la información de las variaciones.

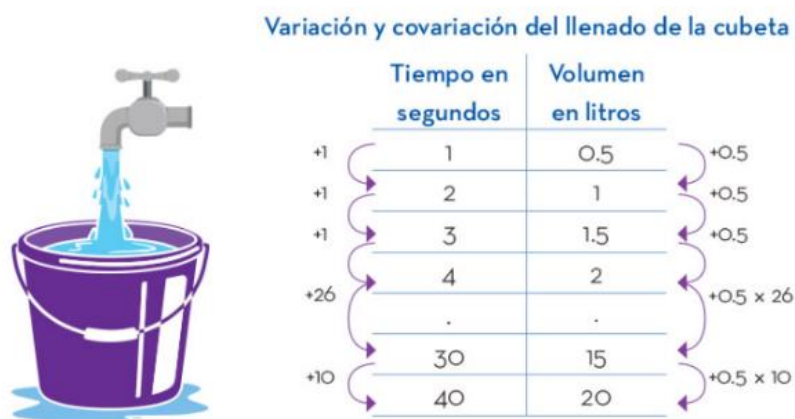


Figura 8 Actividad de libro titulado Saberes y pensamiento científico. Tercer grado (Educativos, 2023,p.72)

Aunque la Nueva Escuela Mexicana apuesta por actividades STEM de MM, se encontró una actividad de un contexto de llenado de recipientes, la cual inicia con una imagen del fenómeno y una tabla numérica donde presentan las cantidades de tiempo y volumen (ver Figura 8). El estudiante debe llenar una tabla numérica, con las operaciones que se indican en la misma, en la sección que llaman representación algebraica, se les explica cómo se obtuvo la expresión algebraica (ver Figura 9), en lugar de que el estudiante deduzca a partir de sus propias representaciones. Lo que la SEP está proponiendo es una matemática ya hecha que no brinda posibilidad al alumno de construirla. Brousseau (1998) considera que cuando se proporciona un algoritmo al estudiante, se anula el proceso de aprendizaje. Señala que los algoritmos están hechos para ser eficaces y no para aprender.

Representación algebraica

Las relaciones entre las variables se pueden representar mediante expresiones algebraicas. Para este propósito, en el ejemplo 1, ahora el volumen (V) se expresa con la letra y , y el tiempo t por x ; la tabla siguiente muestra los valores de y en una disposición donde se puede apreciar un patrón o una regularidad, y se obtiene multiplicando el valor de x por la constante 0.5; por tanto, la relación entre y y x puede expresarse mediante la expresión $y=0.5x$. Esta expresión algebraica indica que el volumen es 0.5 veces el tiempo.

Evidencia de la relación entre el volumen y el tiempo

x	1	2	3	...	40	x
y	0.5	1	1.5	...	20	y
y	$(0.5)(1) = 0.5$	$(0.5)(2) = 1$	$(0.5)(3) = 1.5$...	$(0.5)(40) = 20$	$0.5x = y$

Mediante la expresión $y=0.5x$ se pueden generar todos los valores que se deseen, si $x = 1$, $y = (0.5)(1) = 0.5$; si $x = 10$, $y = (0.5)(10) = 5$; si $x = 100$, $y = (0.5)(100) = 50$, de ahí se pueden generar las parejas de la forma (x, y) : $(1, 0.5)$; $(10, 5)$; $(100, 50)$. Para efectos de la covariación la expresión $y = 0.5x$ permite:

Figura 9 Actividad libro titulado Saberes y pensamiento científico. Tercer grado (Educativos, 2023, p. 73)

Como hemos dicho anteriormente, el diseño de actividades de MM no es fácil, por lo que tanto los contextos como el ciclo de modelación deben ser cuidadosamente diseñados y respaldados por un proceso de modelación según la perspectiva que se quiera abordar. De aquí la pertinencia de este trabajo, porque, después de hacer la revisión en los libros de texto podemos afirmar que existe un descuido de la MM en ellos.

Este descuido de la MM en los libros de texto y la incongruencia de lo que plantean el modelo educativo en México, y además las investigaciones de matemática educativa, nos hace reconocer la problemática que se declara en la siguiente sección.

4 PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS

En esta sección se muestra la descripción de la problemática que se quiere abordar con este proyecto de intervención educativa, articulando elementos que se han mencionado anteriormente y que se describirán con más detalle en las secciones siguientes. Después, se presenta el objetivo del proyecto de intervención educativa y los objetivos específicos que darán forma al trabajo.

4.1 Descripción de la problemática

Diferentes investigaciones han develado que los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes se reducen a un conjunto desarticulado de técnicas más o menos algorítmicas, sin que los estudiantes le proporcionen un sentido conceptual. En las aulas de matemáticas de todos los niveles educativos, se privilegia una visión en la enseñanza de las matemáticas de corte procedimental, la cual se le ha llamado “aplicacionista”. En ella las nociones de los conceptos matemáticos son primeramente introducidas, sin contexto, y posteriormente se espera que los alumnos puedan “aplicar” estos conocimientos matemáticos en las Ciencias Naturales o cualquier otro dominio científico, lo cual ha implicado, una visión limitada de la MM en el aula. Así, la aplicación de un conocimiento matemático aprendido por los estudiantes en situaciones reales, para mostrar su utilidad, no los motiva a profundizar en matemáticas. Sin embargo, desde la investigación en Matemática Educativa, la MM se considera en un sentido más rico y que puede explorarse más (Barquero, Bosch, & Gascón, 2019), induciendo en los estudiantes un mejor aprendizaje.

En esta visión “aplicacionista”, los contenidos matemáticos son considerados y enseñados independientemente de cualquier problema o contexto científico. Como se mencionó antes en este documento, la desvinculación entre la matemática y la ciencia causa dificultades en los estudiantes en la articulación del conocimiento matemático con el específico ligado a la ciencia, restringiendo los conceptos a expresiones algebraicas ligadas al concepto, que deben memorizarse. Así, la matemática solo es vista como una herramienta para cuantificar, el aprendizaje de la matemática desvinculada de la ciencia ocasiona que los estudiantes vean a la matemática como algo “aparte”, no encuentran su relación con las demás ciencias (Flores, y otros, 2008).

Lo anterior, limita a un carácter propedéutico de la matemática, donde los conocimientos se restringen a técnicas aisladas y rígidas, algoritmos y métodos matemáticos descontextualizados, donde no se logra el desarrollo de las competencias matemáticas en los estudiantes. Por esto es imperante la necesidad de plantear problemas abiertos a los estudiantes, relacionados con hechos concretos de la vida real, que permitan hacer vivir la

relación de las matemáticas con las ciencias experimentales, y con la tecnología. (Trigueros, 2006).

En el ciclo escolar 2023-2024 de la Educación Básica de México (que comprenden los niveles: preescolar, primaria y secundaria) se produjeron los libros de texto gratuitos de matemáticas, como parte de la implementación del nuevo modelo educativo: La Nueva Escuela Mexicana, que entró en vigor en agosto del presente año.

Un ejemplo de las actividades, sobre la MM de fenómenos, así como la variación y covariación, se presentó en este documento, en el apartado que corresponde al estado del arte en la sección 3.5 las Figuras 8 y 9, correspondientes al libro de texto de matemáticas de tercero de secundaria, el contexto de la actividad es llenado de recipientes donde se observa una matemática acabada, los alumnos no construyen sus propias respuestas, ni se promueve que el alumno identifique las variables involucradas en el ciclo de tiempo y volumen del agua. Esto puede tener como resultado que los estudiantes no puedan desarrollar las competencias básicas de MM anteriormente descritas, debido a que es una actividad que sólo solicita la aplicación directa de conocimientos (como una matemática utilitaria).

No existe una congruencia de estos materiales con lo propuesto en el documento rector del nuevo modelo educativo. En el que se plantean proyectos donde la modelación matemática de fenómenos de la ciencia promueve el proceso de enseñanza y aprendizaje; para los docentes esto es nuevo, por lo que quedan desprotegidos sin los materiales adecuados para la implementación en las clases de matemáticas.

Otro aspecto importante a resaltar es el uso de la tecnología en el aula, las investigaciones muestran a nivel internacional una integración lenta, en el caso de México esta integración es casi nula, y la poca tecnología que se utiliza en las clases de matemáticas funge como un apoyo para el maestro donde se utilizan para presentaciones, para que los alumnos realicen investigaciones y en algunos casos utilizan graficadores, aunque en los enfoques pedagógicos se sugiere el uso de la tecnología, ésta no está integrada a las actividades o secuencias didácticas como por ejemplo para promover la visualización matemática.

La experimentación en las clases de matemáticas de secundaria es inexistente por la desarticulación de la matemática y la ciencia, así como el uso de tecnología, por ejemplo, sensores para tomar datos, como en la cinemática, sobre el movimiento de objetos. Así, a través de la experimentación, con el uso de tecnología, los estudiantes podrían modelar matemáticamente fenómenos con datos lo más aproximados a la realidad.

Las actividades con enfoque STEM en nivel secundaria o diversas actividades curriculares y extracurriculares que fomentan la ciencia y la tecnología; ha movilizó a instituciones para realizar convenios con empresas como LEGO, por mencionar alguna, que cuenta con programas como el de “LEGO Education Robotix” para facilitar a los docentes el uso de la robótica como recurso didáctico. Esta propuesta promueve la integración de

diferentes materias en el currículo. La escuela, una vez inscrita en el programa, compra paquetes con los componentes y las instrucciones necesarias para armar robots. Incluso, los docentes de la institución pueden tomar cursos a distancia donde pueden certificarse en la Metodología LEGO® Education y los alumnos aprenden a través de la experimentación construyendo y programando robots para hacer determinadas tareas. Posteriormente, a los alumnos, los ponen a competir en concursos u olimpiadas, ya sea dentro del mismo centro educativo o en competencias nacionales e internacionales (Fernández, 2019). En esta perspectiva de STEM se priorizan los aspectos tecnológicos, dejando de lado otros aspectos primordiales de la MM. Las actividades con enfoque STEM para modelar matemáticamente, no se promueven de manera eficiente en las escuelas secundarias.

Los elementos descritos en este apartado se articularán para proponer una intervención educativa en la cual el núcleo integrador sea la MM con enfoque STEM, donde el uso de la tecnología esté presente dentro de actividades de experimentación.

4.2 Objetivos

Para atender la problemática expuesta en este documento, en esta sección se presenta el objetivo general y los objetivos específicos de este proyecto de intervención educativa.

4.2.1 Objetivo General

Por lo expuesto anteriormente nos hemos propuesto el siguiente objetivo general:

Diseñar una propuesta de enseñanza basada en la Modelación Matemática de fenómenos cinemáticos, para nivel secundaria, con enfoque STEM.

4.2.2 Objetivos Específicos

Debido a la naturaleza de la MM y del enfoque STEM se considera el uso de tecnología digital para el desarrollo de esta propuesta de enseñanza ligada a conceptos de la cinemática, como una manera de integrar cada elemento en ella.

Con la finalidad de lograr el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Integrar un proceso de Modelación Matemática.
- Plantear las características de la intervención didáctica con la integración de manera articulada de STEM, la modelación matemática, uso de tecnología digital y la cinemática.
- Diseñar actividades didácticas acordes con el marco teórico y las características señaladas en el segundo objetivo específico.

- Analizar la puesta en escena de las actividades didácticas.

En los siguientes apartados se plantearán elementos en los cuales está enmarcado este trabajo, además de la planeación de acciones que se llevarán a cabo para llevarlo a cabo.

5 LA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EDUCATIVA Y SUS CARACTERÍSTICAS

El objetivo de este trabajo es apoyar el aprendizaje de la MM mediante el planteamiento de situaciones en contexto, la propuesta de enseñanza contará con actividades eslabonadas aportando materiales y estrategias didácticas a los docentes de matemáticas de secundaria. En la propuesta se articulan varios elementos, el núcleo en nuestra propuesta, es la MM como estrategia didáctica para el aprendizaje de las matemáticas donde se vincula con la realidad de los estudiantes. Para tal fin, se incorporan los contextos de la cinemática a partir de la experimentación con simulación digital o con objetos reales.



Figura 10 Elementos articulados en la propuesta de enseñanza.

En la Figura 10 se muestran características diferenciadoras propuestas para diseñar actividades didácticas, donde la MM se encuentra en el centro, como núcleo integrador, y alrededor el enfoque STEM, el ambiente tecnológico y el medio sociocultural del aprendizaje. Estos elementos tienen como función promover la motivación del estudiante y a mitigar el estrés que se pueda presentar en la experimentación.

5.1 Medio sociocultural de aprendizaje

La elección de un medio sociocultural del aprendizaje para la resolución de situaciones en contexto pretende promover la interacción social y el trabajo en colaboración. El entorno sociocultural proporciona la oportunidad de compartir y construir conocimiento matemático en conjunto. El trabajo en colaboración promueve la discusión de problemas y la resolución conjunta de situaciones matemáticas fomentando la comprensión profunda y la aplicación práctica de los conceptos (Hitt & Quiroz, 2019).

El aprendizaje de las matemáticas en un entorno sociocultural fomenta el desarrollo de habilidades cognitivas y metacognitivas. La resolución de problemas matemáticos requiere un pensamiento crítico, razonamiento lógico, habilidades de comunicación y capacidad para pensar de manera abstracta. Además, el entorno sociocultural propicia oportunidades para que los estudiantes reflexionen sobre su propio proceso de aprendizaje, identifiquen estrategias efectivas y desarrollen la capacidad de autorregulación y metacognición (D'Amore, Radford, & Bagni, 2007). De acuerdo con nuestro modelo de aprendizaje, el trabajo en colaboración pretende promover una matemática vertical en el sentido de Freudenthal (1991).

5.2 Método de enseñanza ACODESA

Se utilizará el método de enseñanza ACODESA (Por sus siglas en francés Aprendizaje colaborativo, Debate científico y Autorreflexión) para el diseño de las actividades. Este método busca que los estudiantes, frente a la resolución de una situación problema, transiten en un proceso de MM; durante este proceso los estudiantes generan representaciones funcionales espontáneas y éstas evolucionan a través del proceso de comunicación en un trabajo en colaboración. Así, los estudiantes a través del diálogo y reflexionando constantemente, dentro de sus equipos de trabajo, y también en un debate de ideas con todo el grupo logran que sus acciones se conviertan en operaciones, sistematizando las actividades que están realizando para la resolución de la situación problema (Hitt & Quiroz-Rivera, 2017).

A diferencia de una clase tradicional, cuando una actividad es diseñada con el método de enseñanza ACODESA, el rol del profesor es clave para el desarrollo de la clase. La actividad en el aula deberá enriquecerse con orientaciones pedagógicas, el docente debe conocer su rol durante toda la actividad, dar sugerencias sin proporcionar respuestas, y promover la reflexión, durante el proceso de modelación de los estudiantes.

5.3 Actividades eslabonadas de descubrimiento guiado

Las actividades eslabonadas tienen la finalidad de promover el descubrimiento guiado (Freudenthal, 1991), donde se fomente la creatividad de los estudiantes en la resolución de la situación problema, dichas actividades deberán cumplir con características singulares tales como:

- a) Proponer una situación problema o de investigación para la creatividad y el pensamiento divergente,
- b) Proponer problemas alrededor del mismo contenido matemático para promover un pensamiento convergente,

- c) Proponer ejercicios sobre el mismo contenido para fortalecer el conocimiento adquirido y hacerlo eficaz,
- d) Proponer situaciones de aprendizaje y evaluación para medir la competencia matemática en cuestión.

5.4 Desarrollo de competencias en la MM

Las habilidades que se quieren desarrollar en los estudiantes están determinadas por las competencias de modelación que a su vez están relacionada con el proceso de MM. Maaß (2006) enlista estas competencias donde las primeras están relacionadas con comprender la situación problema y establecimiento de un modelo. Estas son:

- hacer suposiciones para el problema y simplificar la situación;
- reconocer cantidades que influyen en la situación, nombrar e identificar las variables clave;
- construir relaciones entre las variables;
- buscar información disponible y diferenciar lo relevante de lo irrelevante;

Las competencias que se desarrollan cuando se genera el modelo del fenómeno son:

- matematizar cantidades relevantes y sus relaciones
- simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones, si es necesario y reducir su número y complejidad;
- elegir matemáticas apropiadas y notaciones para representar situaciones gráficamente.

Además, están las competencias para resolver cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático que son:

- utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, establecer relaciones a problemas similares o análogos, reformular el problema viendo el problema de una forma diferente, variando las cantidades o los disponibles datos, etc.;
- utilizar conocimientos matemáticos para resolver el problema.

Competencias desarrolladas para interpretar resultados matemáticos en una situación real:

- interpretar resultados matemáticos en contextos extramatemáticos;
- generalizar las soluciones que fueron desarrolladas para una situación especial;
- ver soluciones a un problema utilizando el lenguaje matemático apropiado y/o comunicar sobre las soluciones.

Y finalmente las competencias para validar la solución:

- comprobar y reflexionar críticamente sobre las soluciones encontradas;
- revisar algunas partes del modelo o realizar otro ciclo de modelación, si las soluciones no se adaptan a la situación;

- reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o si se pueden desarrollar soluciones diferentes;
- cuestionar en general el modelo.

Para el desarrollo de estas competencias se desarrolló un marco conceptual donde se describe un proceso de MM donde aspectos relevantes de la modelación se coordinan con los elementos que conforman las características de nuestro trabajo, que se presentarán en la siguiente sección.

5.5 Ejemplo de una actividad

Para ejemplificar las características de la propuesta, se presenta una situación problema de una de las actividades diseñadas, la propuesta de situación problema es “llenado de recipientes” acorde con lo planteado por la Nueva Escuela Mexicana. Se plantea una situación práctica de un fenómeno de la cinemática, donde las matemáticas interactúan con la tecnología.

Primeramente, de manera virtual, se presenta un applet (o aplicación) en GeoGebra, sobre el llenado de varios recipientes con diferentes formas. En esta etapa, se pretende que el alumno pueda manipular el recipiente, así como su llenado para que identifique las variables involucradas, así como la relación entre las variables ligadas al fenómeno. A manera de ejemplo, se muestra la Figura 11 un tipo de recipiente. Cabe mencionar que los recipientes se muestran en dos y tres dimensiones para que el estudiante pueda analizar detenidamente, arrastrando la figura hacia todas direcciones, el llenado o vaciado del recipiente moviendo arriba y abajo el punto H que señala la altura del líquido. Se decidió utilizar un applet que muestra los recipientes en tres dimensiones dado que es difícil, para un estudiante, comprender sólo en dos dimensiones una situación que es en tres.

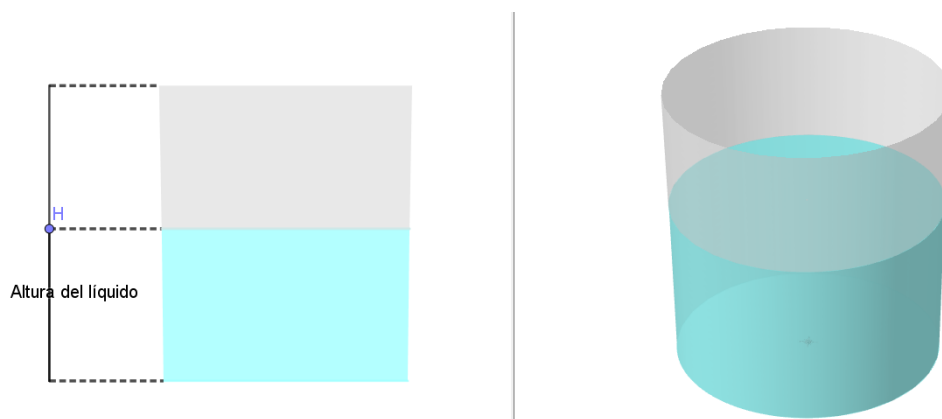


Figura 11

Con el análisis de los estudiantes de los diferentes tipos de recipiente en esta etapa de la actividad se pretende promover el pensamiento divergente, esto es a través de llenados de

recipientes de diferentes formas, el objetivo de esta etapa de la actividad, además de identificar las variables involucradas como sus relaciones, es que identifiquen qué es lo que varía y qué permanece constante. En esta parte, los estudiantes deben identificar las variables que intervienen en este fenómeno como son: la altura del líquido, la superficie del líquido conforme sube la altura del líquido, el volumen, etc. Una vez identificadas las variables, se determinan las relaciones funcionales entre las variables como, por ejemplo: el área de la superficie del líquido en función de la altura; el volumen del líquido en función de la altura; la altura del líquido en función del volumen. Cada una de estas relaciones funcionales promueve un proceso de modelado diferente, de allí la promoción de un pensamiento divergente en los estudiantes.

En otra etapa de la actividad se analizan videos del fenómeno de llenado de recipientes. Para esto, se utiliza el software Tracker como medio en la obtención de datos, como se muestra en la Figura 12, el software permite medir la altura del agua mientras se llena el recipiente y proporciona los datos obtenidos en la tabla correspondiente (ver Figura 13). La variable posición (“x”) no es relevante en esta toma de datos.

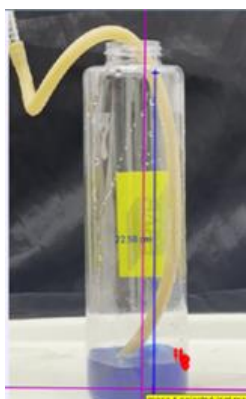


Figura 12 Preparación de la toma de datos con Tracker

t (s)	x (cm)	y (cm)	area
0.000	2.976	1.306	27.82
0.033	2.971	1.342	27.72
0.067	2.970	1.398	27.69
0.100	2.973	1.425	27.76
0.133	2.973	1.456	27.74
0.167	2.973	1.468	27.75
0.200	2.968	1.470	27.67
0.234	2.970	1.464	27.70
0.267	2.971	1.478	27.71
0.300	2.974	1.474	27.77
0.334	2.970	1.493	27.70
0.367	2.968	1.537	27.66
0.400	2.968	1.604	27.67
0.434	2.943	1.658	27.19
0.467	2.928	1.670	27.14

Figura 13 Tabla de valores proporcionada por Tracker al analizar el video

Posteriormente los datos relevantes se copian y se pegan en una hoja de cálculo en el software GeoGebra (ver Figura 14) y los estudiantes deberán, con ayuda del software, graficar la nube de puntos, para luego ajustarlos a una curva, así obtener un modelo gráfico y un modelo algebraico del fenómeno estudiado (ver Figura 15). Los dos paquetes en conjunto promueven el pensamiento convergente, porque se está dirigiendo el análisis de un tipo de recipiente hasta la obtención de los modelos numérico, gráfico y algebraico relativos al fenómeno de estudio.

Hoja de Cálculo		
	A	B
1	masaA	
2	t	x
3		0 0.17
4	0.03	0.14
5	0.06	0.13
6	0.09	0.16
7	0.13	0.19
8	0.16	0.22
9	0.19	0.25
10	0.22	0.27
11	0.25	0.3
12	0.28	0.32
13	0.31	0.34
14	0.34	0.36
15	0.38	0.38
16	0.41	0.39
17	0.44	0.41
18	0.47	0.42
19	0.5	0.43
20	0.53	0.44
21	0.56	0.45
22	0.59	0.45
23	0.63	0.45
24	0.66	0.46

Figura 14 Datos transferidos de Tracker a GeoGebra

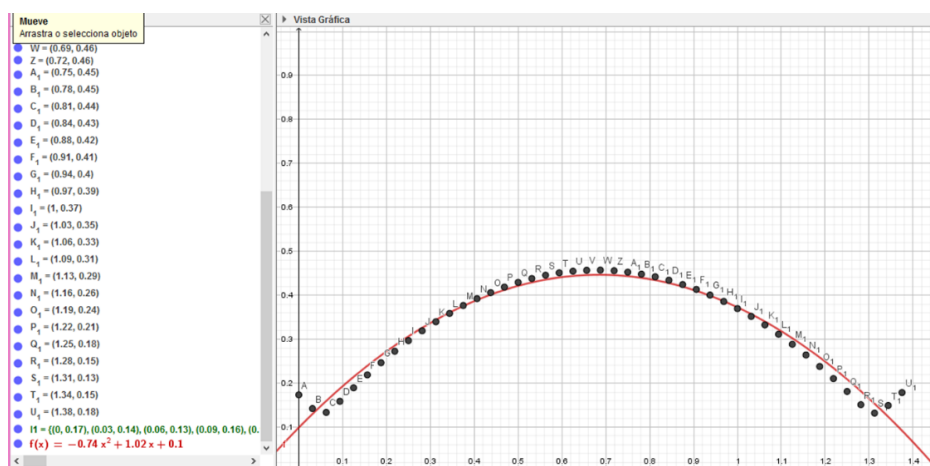


Figura 15 Representación de la nube de puntos, su representación gráfica y modelo algebraico

En el proceso de reinención guiada, se promueve que los estudiantes puedan experimentar un proceso similar al proceso por el cual las matemáticas se inventaron y crearon (Freudenthal, 1991). La reinención guiada posibilita a quien aprende encontrar su

propio nivel explorando los caminos y recibiendo un soporte por parte de los miembros de su equipo, y del profesor según el caso. Se trata de reinventar, es decir, importa el proceso de matematizar más que el contenido matemático; el abstraer más que la abstracción, etc. Además, esta perspectiva considera que el descubrimiento personal y en equipo, refuerza la motivación.

Nuestra propuesta de enseñanza está enfocada en el nivel secundaria de educación básica de México, específicamente en tercer grado, donde se modelarán fenómenos de variación en contexto ligado a la cinemática. Los tipos de variación que se abordarán son variación lineal y variación cuadrática, las cuales se encuentran ubicadas en el currículo de matemáticas de tercero de secundaria.

Dentro del currículo mexicano de tercero de secundaria el contenido matemático a abordar se localiza en funciones donde el proceso de desarrollo de aprendizaje se describe como relacionar e interpretar la variación de dos cantidades a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica. Como se mencionó anteriormente, en la sección de antecedentes, el modelo educativo mexicano señala que la modelación matemática de fenómenos de la realidad del estudiante debe estar presente, lo que concuerda con nuestro trabajo de intervención educativa.

Para que lo expuesto en este apartado tenga un sustento teórico, en la siguiente sección se presenta un proceso de MM donde se considerarán diferentes elementos importantes y estos están coordinados con las características de las actividades propuestas.

6 ELEMENTOS TEÓRICOS

En esta sección se presentan elementos teóricos que forman parte de un proceso de MM en el aula de matemáticas. La integración de los elementos teóricos de este modelo es de contribución propia. En esta propuesta de modelo, se consideraron importantes conceptos que deben estar presentes durante el proceso de modelación. Estos elementos no están presentes en los procesos de MM revisados en la literatura de Matemática Educativa. Más adelante se mostrarán y se explicará la forma de cómo se incorporaron en el diagrama propuesto.

Esta manera de modelar muestra interés en la construcción de una estructura cognitiva ligada a la acción como lo plantea Leóntiev (1975) donde la estructura cognitiva del estudiante se construye a través de su participación en actividades orientadas (descubrimiento guiado según Freudenthal, 1991), y el conocimiento se adquiere y se desarrolla mediante la interacción entre el individuo y su entorno, con la ayuda de herramientas digitales y en un medio sociocultural, promoviendo el aprendizaje en espiral (según Mason, 1996).

Esta propuesta de enseñanza promueve el aprendizaje en un medio tecnológico, para esto, se utilizará la teoría de la instrumentación de Rabardel (1995), que traduce la idea de que un artefacto informático se convierte en un instrumento para un individuo a través de los procesos de instrumentalización e instrumentación. Rabardel define un artefacto como “una cosa que habrá sufrido una transformación de origen humano”. Instrumento es lo que el sujeto construye a partir del artefacto (García-Cuéllar, 2018). Al proceso de conversión, en manos de un estudiante, del artefacto a instrumento le llaman Génesis Instrumental, este proceso es complejo y el estudiante necesita tiempo para relacionar a las características del artefacto con la actividad del sujeto, en otras palabras, el usuario a partir del artefacto construye un instrumento en un entorno determinado para una tarea determinada. Esta génesis contiene dos entidades la instrumentalización, que se refiere a la apropiación del artefacto y sus propiedades, y la instrumentación, que se refiere a la construcción de esquemas de uso (Del Castillo & Montiel, 2009). Si además a este proceso se le añade el componente del trabajo en equipo (en un acercamiento sociocultural del aprendizaje), la construcción conceptual es más rica (ver el apartado sobre los elementos metodológicos).

Nuestra propuesta de MM parte del modelo de Freudenthal (1991) y Mason (1996) que trata sobre los procesos de una matemática horizontal y sus implicaciones hacia una matemática vertical y como consecuencia un aprendizaje en espiral. La matemática horizontal se refiere a la forma en que se enseñan y se organizan los temas matemáticos frente a una actividad. Freudenthal propuso que los conceptos matemáticos deben presentarse de manera gradual, comenzando por situaciones concretas y luego llevando a los estudiantes a conceptos más abstractos a medida que sus procesos de comprensión avanzan. Se trata de promover los conceptos matemáticos de una manera progresiva (en espiral).

La matemática vertical se refiere a la forma en que se encadenan los conceptos matemáticos a una propuesta más general que la de la matemática horizontal. Freudenthal habla que los conceptos matemáticos deben enseñarse de manera coherente y progresiva, de manera que los estudiantes puedan construir una base sólida de conocimiento matemático. Esto implica que los conceptos matemáticos deben presentarse de manera conectada, de modo que los estudiantes puedan comprender la relación entre los diferentes conceptos y aplicar lo que han aprendido en situaciones nuevas.

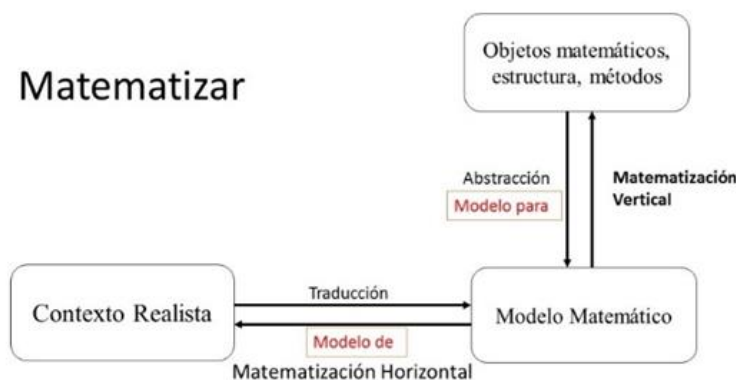


Diagrama 6 Proceso de MM Matemática Realista. Drijvers (2003) p. 54

A partir del Diagrama 6, propuesto por Drijvers sobre la matemática horizontal y vertical, planteamos un proceso similar donde, a diferencia del diagrama de Drijvers, es un proceso cíclico, para permitir un aprendizaje en espiral, por esta razón las flechas tienen dos sentidos (ver Diagrama 7). Por ejemplo, en todo proceso de MM, se parte de una situación problema, donde los estudiantes después de refinar sus representaciones espontáneas obtienen un modelo, pero, si el modelo matemático no corresponde con el fenómeno físico que se quiere modelar, ellos tienen que regresar a refinar su modelo. Otro aspecto importante, es la caracterización de lo que representa una matemática horizontal y una matemática vertical. Como veremos enseguida, los avances en didáctica de las matemáticas nos han permitido realizar esta caracterización.

El Proceso de Modelación que se muestra en el Diagrama 7 consta de cuatro puntos principales interconectados entre sí, se inicia con una tarea o situación problema que está relacionada con la producción de representaciones espontáneas, esto corresponde a lo que Freudenthal (1991) llama la matemática horizontal, la cual conduce del “mundo real” al mundo de los símbolos, se sustenta con actividades como: identificar las matemáticas que pueden ser relevantes, respecto a la situación problema o tarea, representar la situación de modo diferente, comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal, encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación, traducir el problema a un modelo matemático y utilizar herramientas y recursos adecuados, entre otras (Gómez & Maestre, 2008).

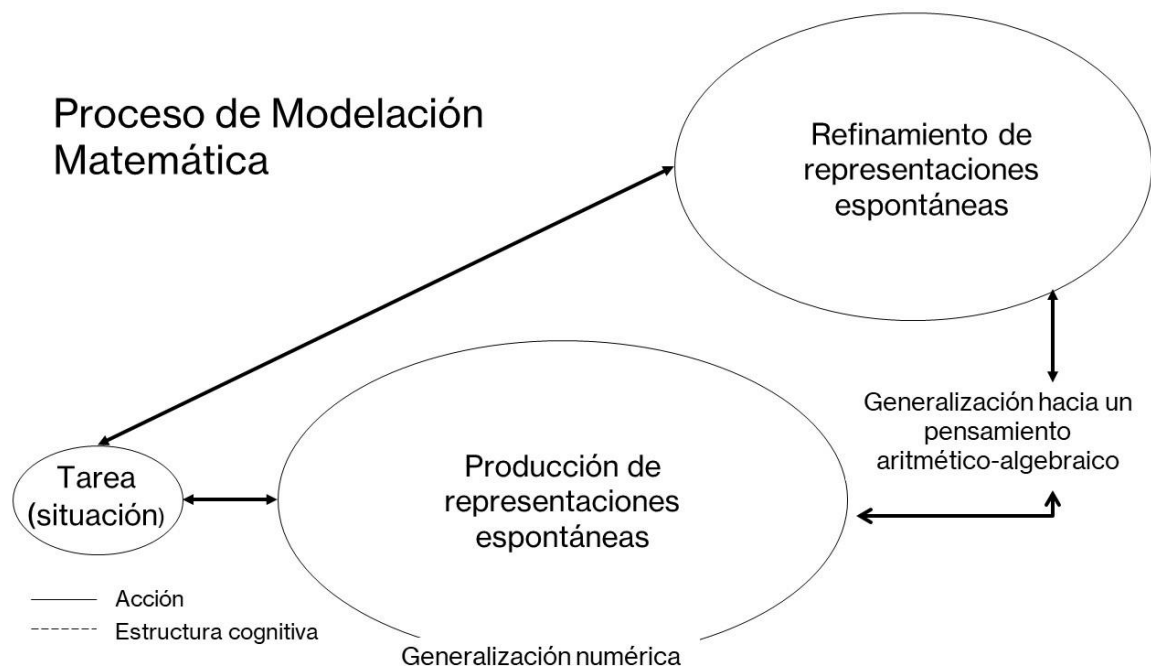


Diagrama 7 Construcción del proceso de Modelación Matemática, fase 1

Al finalizar esta etapa, los estudiantes deberán obtener una generalización numérica, y se conecta con el tercer punto donde se promueve el pensamiento aritmético-algebraico, aunque en el currículo clásico de matemáticas se distingue la aritmética y el álgebra, en este modelo se promueve, mediante la MM, la articulación entre ambas conectándolas mediante registros de representación en ambos dominios. El desarrollo de esta estructura cognitiva se lleva a cabo mediante la producción y articulación entre representaciones (Cortés, Hitt, & Saboya, 2016).

Y finalmente conectamos la cuarta etapa, que corresponde a la matemática vertical que es donde los símbolos son moldeados, reformados y manipulados, mecánica, comprensiva y reflexivamente (Freudenthal, 1991). La matematización vertical incluye acciones como utilizar diferentes representaciones y modelos, usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones, refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos, argumentar y generalizar. En este último punto los estudiantes deberán refinar sus representaciones espontáneas donde se espera que el modelo matemático construido, proporcione una respuesta al problema planteado.

Para promover las representaciones espontáneas en los estudiantes se consideran fundamentales en la MM los siguientes elementos (ver Diagrama 8):

- Producción de Representaciones espontáneas (Hitt & Gonzalez, 2015; Hitt & Quiroz, 2017).
- Visualización Matemática (Zimmerman & Cunningham, 1991; Hitt & Gonzalez, 2015).

Una de las funciones de las matemáticas es permitir la anticipación de los resultados de una acción, en ese momento se produce un proceso de abstracción (Margolinas, 1992) Margolinas define anticipación como la acción de predecir, de suponer lo que va a pasar, además señala que encierra un doble movimiento: la predicción, y la garantía de la validez de la predicción. El proceso de visualización permite al estudiante a hacer anticipaciones y conjeturas.

En el cuarto punto, se incorporan elementos para el refinamiento de las representaciones espontáneas unos de carácter cognitivo y otros de acción (ver Diagrama 9):

- Control de la actividad matemática (Schoenfeld, 1985; Saboya et al 2015).
- Sensibilidad a la contradicción (Hitt, 2020).
- Validación (Joubert, 2013).
- Ir más allá en la investigación (Perkins & Simmons, 1988).

En el Diagrama 9 se muestra el proceso de MM donde se incorpora, dentro del refinamiento de las representaciones espontáneas, un proceso donde intervienen varios elementos. En primera instancia se encuentran los de carácter cognitivo como la anticipación y conjetura, control sobre la actividad matemática y la sensibilidad a la contradicción. La interacción entre estos elementos, durante el proceso de resolución de la actividad, llevará al estudiante a la concepción de un modelo (numérico, gráfico y/o algebraico), que los estudiantes tendrán que validar. La validación abre la posibilidad a un pensamiento más sofisticado, ligado a la actividad de buscar y de ir más allá de la situación planteada, dando pie a una investigación más avanzada.

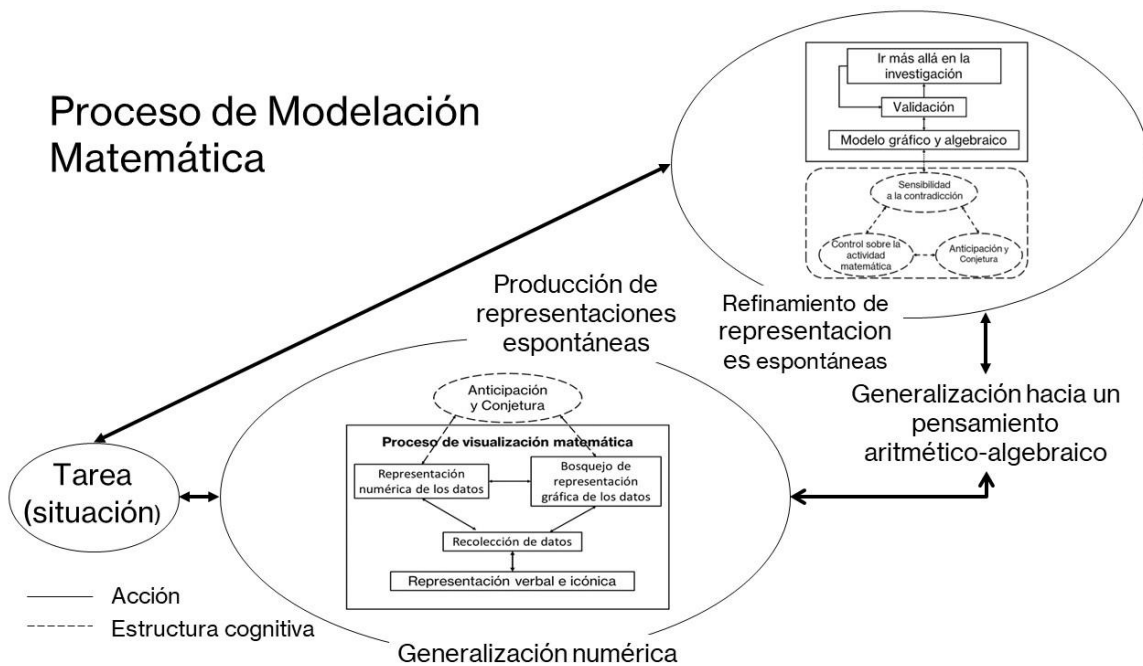


Diagrama 9 Proceso de Modelación Matemática

En esta etapa es fundamental el control de la actividad matemática relacionada con la sensibilidad a la contradicción, anticipación y conjetura. Entendiéndose por control sobre la actividad matemática, como la acción que permite decidir si la acción es relevante o no y de validar procesos complejos (con ejemplos, pequeños números, etc.) en la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985; Saboya, Bednardz, & Hitt, 2015). Esta categoría de comportamiento se ocupa de cómo los individuos usan la información potencialmente a su disposición. Se enfoca en decisiones mayores sobre qué hacer en un problema, decisiones que “hacen o rompen” un intento de resolver el problema. Los comportamientos de interés incluyen elaboración de planes, la selección de objetivos, el seguimiento de subobjetivos en la evaluación de las soluciones a medida que evolucionan. Las características definitorias de acción en el nivel de control son las que deben tener consecuencias globales en la evolución de un proceso de resolución. Son decisiones sobre qué camino tomar y cual abandonar. Estas decisiones los llevan a dejar de lado opciones que puedan llevarlos a nuevas posibilidades, pero al hacerlo corren el riesgo de reducir los esfuerzos que pudieran haberlo llevado al éxito (Schoenfeld, 1985).

Tener el control se traduce, para varios autores, en anticipación y esto es antes de cualquier resolución. Se trata, pues, de poner una condición para la validez del resultado antes de saberlo. Esta anticipación conducirá a menudo a una verificación posterior (con respecto a estas condiciones de validez del resultado establecidas a priori) (Saboya, Bednardz, & Hitt, 2015).

Debido a la dificultad a la que se enfrentan los estudiantes, puede emerger una situación contradictoria y la posibilidad de una sensibilidad a la contradicción. Los alumnos expresan un sentimiento de malestar ante un resultado inesperado, contradictorio. El individuo da marcha atrás para encontrar el error y sentirse cómodo (Hitt, 2004), desde un punto de vista cognitivo, la sensibilidad a la contradicción es la toma de conciencia de la existencia de una contradicción, acompañada de un sentimiento de malestar, y al momento de la resolución del problema o situación, el malestar se transforma en un sentimiento de bienestar (Hitt, 2020). Es importante en el diseño de actividades plantear preguntas que proporcionen al estudiante la oportunidad de salir del error, del obstáculo epistemológico que se pueda presentar según el contenido matemático que se esté trabajando.

A partir del proceso cognitivo de sensibilidad a la contradicción, control de la actividad matemática, anticipación y conjetura emerge el modelo numérico, gráfico y/o algebraico de la situación problema. La intención de este proceso cognitivo por medio de la actividad, dentro de un ambiente de aprendizaje sociocultural, promueve en los estudiantes, la emergencia de conceptos como el de variable y el de la covariación entre variables.

Un aspecto importante para considerar en el diseño de tareas es la validación, ya que dentro del control de la actividad matemática debe existir la validación de procesos. La validación es el proceso de verificación intuitiva, con ejemplos o con pequeños números que permitan validar una respuesta o una solución. La validación ocurre cuando una interacción

intencionada incluye un elemento de prueba, teorema o explicación y es tratada así por el interlocutor (Joubert, 2013). Tanto para los matemáticos como para diseñador de actividades, el término validación evoca a menudo el problema de la demostración. Para Margolinas (1992) este término es más amplio y abarca, en particular, la prueba y la verificación.

Una vez validada la solución del problema o situación problema, se busca que el estudiante vaya más allá de la investigación. En este proceso, se está formando una estructura cognitiva que incluye: el dominio específico, creencias generales y estrategias que funcionan para extender y retar el conocimiento con un dominio particular, la acción característica es el pensamiento crítico y creativo. Al diseñar la actividad, deben estar presentes elementos donde se pueda mejorar un proceso o generalizar un resultado. Sin duda, el enfoque de ir más allá de la investigación es ambicioso y es el más difícil de cultivar a través de la educación matemática (Perkins & Simmons, 1988).

7 ASPECTOS METODOLÓGICOS

En el apartado correspondiente a la problemática se plantearon algunas dificultades relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles, un problema central que se señaló, se refiere a la enseñanza de tipo procedimental, donde las nociones y conceptos matemáticos son introducidos sin contexto, para que después, los alumnos “apliquen” estos conocimientos en contextos científicos. Este problema, es compartido por investigadores en Matemática Educativa.

En el objetivo general de nuestro trabajo se está proponiendo el diseño de una propuesta de enseñanza basada en la MM, para darle concreción, se seguirá una metodología, la cual estamos dividiendo en etapas, éstas se relacionan con los objetivos específicos del trabajo.

La primera etapa consistió en el desarrollo de un marco conceptual, se generó un diagrama con un proceso de MM de contribución propia. Para la realización de este se hizo una revisión de la literatura sobre la MM, la cual proporcionó un panorama general de lo que se ha trabajado y/o investigado sobre MM en Matemática Educativa. Se realizó una investigación de las diferentes perspectivas de la MM, así como el uso de la tecnología en el aula de matemáticas, el enfoque STEM integrado, y los diferentes procesos de MM según la perspectiva y el objetivo que se persigue, en el siguiente apartado, se presenta un cronograma, en donde se detalla cada acción realizada en los primeros tres semestres correspondientes a esta primera etapa.

En la segunda etapa se diseñó una actividad, con la que se planea una experimentación para validar la propuesta de enseñanza. Para el diseño de las actividades de la intervención utilizará el método de enseñanza ACODESA, este método de enseñanza considera primordial la noción de representaciones funcionales espontáneas y la posibilidad de su evolución dentro de una comunidad en un trabajo en colaboración en el aula de matemáticas (Hitt & Quiroz-Rivera, 2017), ya que se incluyen actividades para el trabajo individual y colaborativo, el debate y la institucionalización como estrategia para propiciar el aprendizaje y favorecer la formación de estudiantes capaces de plantear y resolver problemas en distintos contextos (Hitt & González-Martín, 2015).

Con la articulación de estos elementos, se presentó un modelo particular de MM con un respaldo teórico sólido que servirá de base para el diseño de la intervención educativa, que, junto con los aspectos metodológicos describirán en el siguiente apartado, formarán el presente trabajo.

En este trabajo se está promoviendo la resolución de situaciones problema utilizando a la MM como estrategia didáctica, tradicionalmente en el aula de matemáticas encontramos tareas que se les presentan a los estudiantes como problemas y/o ejercicios, pero ¿qué es una

situación problema? ¿Existen diferencias entre ejercicio, problema y situación problema? Para poder responder estas preguntas se muestran las definiciones de cada una.

Si el enunciado matemático inmediatamente sugiere un procedimiento a seguir, se puede decir que la actividad es un ejercicio. Si al leer el enunciado matemático no induce al lector, de inmediato a seguir un procedimiento y requiere, transformar el enunciado y/o utilizar representaciones institucionales y/o producir representaciones espontáneas para entender y avanzar en la tarea, se le llama problema. En cambio, si la lectura del enunciado matemático, como el caso de un problema, no proporciona un procedimiento a seguir, sino que se debe construir un modelo (posiblemente que no sea único), donde se necesita interpretar el fenómeno ligado al enunciado, entonces se dice que, es una situación problema (Hitt, Saboya, & Cortés, 2017). La importancia de esta diferenciación de las tareas matemáticas radica en los aspectos relacionados con el diseño de actividades de MM en donde las situaciones problema están ligadas a contextos, principalmente, científicos.

La dinámica en un aula de matemáticas, donde se plantea un problema de MM, no es igual a una clase de matemáticas tradicional, aquí se promueve en los estudiantes un pensamiento diverso, donde el docente debe estar pendiente de que los estudiantes propongan diferentes soluciones, utilicen representaciones espontáneas, es decir, que desarrollen su creatividad para obtener el modelo estudiado. Por lo que nuestra siguiente discusión, se toma hacia cómo diseñar situaciones problema que promuevan el pensamiento divergente, el cual está ligado a la creatividad, y el pensamiento convergente, ligado a estabilizar el conocimiento.

Según Hitt y Dufour (2021), la intención detrás de plantear situaciones problema en las clases de matemáticas, es promover un pensamiento divergente que se relaciona con la creatividad, para después plantear al estudiante resolución de problemas y ejercicios, del mismo contenido matemático, para promover un pensamiento convergente.

Guilford (1967, como se citó en Razumnikova (2013)), creó los términos pensamiento divergente y convergente, para designar las operaciones psicológicas involucradas en la resolución de problemas. Razumnikova (2013) resume ambas definiciones de la siguiente manera, el pensamiento divergente se define como la producción de diversas respuestas apropiadas a una tarea o pregunta abierta, en la cual el producto no está determinado por la información. Por lo que, el pensamiento divergente se concentra en generar un gran número de respuestas alternativas, incluyendo las originales, inusuales o inesperadas. Por lo tanto, el pensamiento divergente está relacionado con la creatividad.

El pensamiento convergente implica encontrar solamente una respuesta correcta y convencional, para un problema bien definido. Se examinan muchos hechos o ideas mediante el pensamiento convergente, por su validez lógica o en las cuales se sigue un grupo de reglas. El pensamiento convergente se enfoca en alcanzar la solución de un problema mediante el reconocimiento y expresión de criterios establecidos. Se cree que los exámenes

estandarizados de inteligencia miden el pensamiento convergente. Bajo ese criterio, estando dentro de la rama de la didáctica de las matemáticas, y siguiendo las indicaciones de Guilford (1967, como se citó en Razumnikova (2013)), es importante comenzar una actividad ligada al pensamiento divergente (situación problema) y luego, promover el pensamiento convergente (problemas y ejercicios).

El método de enseñanza ACODESA otorga gran importancia a la evolución de las representaciones espontáneas en la resolución de una situación problema, al introducir conceptos matemáticos, fomentando el pensamiento diversificado en los estudiantes, y así, estimulando la generación de las representaciones espontáneas. Durante el proceso de resolución de la situación problema el docente, no debe proporcionar soluciones o pistas a los estudiantes, por el contrario, debe observar el trabajo individual del estudiante y apoyar a un rico intercambio de ideas, dentro de un proceso comunicación sociocultural (Hitt & González-Martín, 2015).

Las representaciones espontáneas del estudiante podrán evolucionar a una representación grupal, frente a una tarea que demanda trabajo en equipo, y ésta, se somete un proceso de discusión, comunicación, argumentación, comparación y validación (Hitt & Quiroz, 2019). El trabajo en equipo posterior a la producción de representaciones funcionales espontáneas se rige por el seguimiento de las etapas de ACODESA, que se presentan a continuación.

En ACODESA se distinguen cinco etapas diferentes que constituyen el método de enseñanza (ver Diagrama 10), cada una se ejemplificará con una parte de la actividad propuesta. Esta actividad se encuentra en etapa de diseño, en términos del proceso de MM, solo abarca la matemática horizontal (la actividad se encuentra como anexo al final del documento) que está relacionada con la producción de representaciones espontáneas mediante la visualización matemática. Para el semestre V se tiene programado terminar la actividad incluyendo la matemática vertical y todos los elementos que la conforman (ver Tabla 5 en la sección de Cronograma).

Trabajo individual. Durante esta etapa los estudiantes se enfrentan a una actividad no rutinaria, construyendo representaciones funcionales espontáneas y produciendo representaciones externas (sobre papel o pantalla de computadora). Cuando se les presenta el problema, se inicia el trabajo individual, permite al estudiante prepararse para la discusión, con el resto de su equipo, mediante representaciones espontáneas, que surgen de manera natural.

Esta actividad comienza con una lectura del contexto de la situación problema que es el llenado de recipientes de diferentes formas, para promover el pensamiento divergente, que, mediante un applet de GeoGebra se hace una simulación del fenómeno. En las primeras preguntas invitan al estudiante realizar un dibujo de la situación problema posteriormente deberán expresar con palabras las magnitudes que están señalando en el dibujo (ver Figuras

17, 18 y 19). En el trabajo individual el estudiante primero interioriza la representación de la situación mediante el uso del applet de GeoGebra que debe manipular, para después exteriorizarlo en el dibujo y de manera verbal. En el proceso de MM esta fase corresponde al proceso de visualización matemática donde se inicia con la representaciones verbales e icónicas.

Actividad 1

Trabajo individual

Recipiente 1. Abre la siguiente liga [Recipiente 1](#) la aplicación de GeoGebra te mostrará la simulación del llenado de un recipiente. Mueve el punto H (en la imagen de la izquierda) hacia arriba y hacia abajo, para simular “llenar o vaciar” el recipiente, además puedes mover el recipiente en 3D (de la derecha) hacia todos los lados y observar de diferentes ángulos la imagen, mantén la imagen de GeoGebra abierta para contestar las preguntas de la actividad:

1. ¿Qué forma geométrica tiene el recipiente?

Figura 16

2. Realiza un dibujo del llenado del recipiente donde señales sus magnitudes.

Figura 17

3. Explica cuáles son las magnitudes que señalaste en el dibujo anterior:

Figura 18

Trabajo en equipo. En esta etapa los estudiantes trabajaran en la misma tarea, pero en equipos de trabajo, en esta etapa se espera que se presenten procesos de discusión y validación. Se espera que, a través del trabajo en colaboración, haya un refinamiento de las representaciones funcionales espontáneas, que surgieron durante la etapa individual.

En la actividad analizan el fenómeno de llenado de recipientes de tres formas diferentes, por lo que, una vez terminado el primer recipiente de forma individual, trabajan en equipo en el primer recipiente. Al terminar, vuelven al trabajo individual, para analizar el segundo recipiente, para posteriormente trabajar en equipo el segundo recipiente y el mismo procedimiento sucederá con el tercer recipiente. Una vez que el cuestionario de los tres recipientes fue resuelto, los estudiantes trabajan con su equipo, para que, en conjunto, transiten por las diferentes representaciones: gráfica, tabular y algebraica (ver Figuras 20, 21 y 22). En el diagrama de MM esta parte de la actividad corresponde al proceso de visualización matemática donde se realiza una representación numérica y un bosquejo de la representación gráfica de los datos, con lo que se espera que emerjan la anticipación y conjetura.

Trabajo en equipo

- 8. Compara y discute con el resto del equipo tus respuestas a las preguntas 1-7.
- 9. Investiga en internet:
 - a) ¿Cómo calcular el volumen de este recipiente?

Figura 19

Trabajo en equipo

- 1. En el **Recipiente 1** ¿Cómo calcularías la superficie del agua conforme va cambiado la altura del agua?

Figura 20

- 2. ¿Qué medidas de la superficie le corresponden a cada altura del agua? Anota los datos en la siguiente tabla.

Altura					
Superficie					

- 3. Dibuja la gráfica del cambio de la superficie con respecto a la altura del **Recipiente 1**.

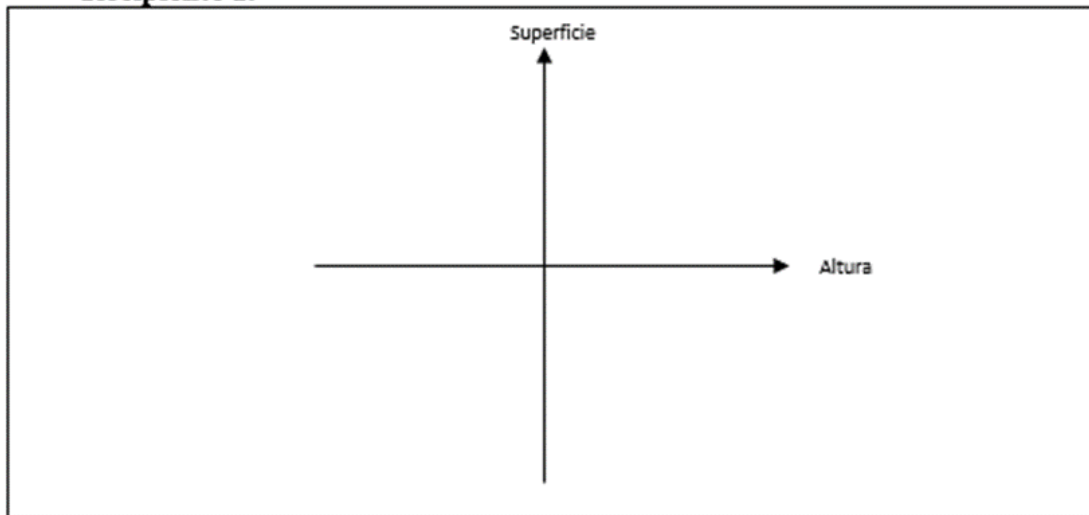


Figura 21

Discusión. Al concluir el trabajo en equipo, los estudiantes se preparan para participar en los procesos de discusión y validación (refinamiento de representaciones). Cada equipo propone sus resultados y los pone a consideración de toda la clase. Una vez más las

representaciones funcionales espontáneas pasan por otra etapa de refinamiento. Es importante llegar a un acuerdo en el grupo

Para llevar a cabo la discusión los estudiantes deberán de presentar frente al grupo los resultados que su equipo obtuvo (ver Figura 23). La discusión no es fácil de dirigir, el docente debe tener claro cuáles son las representaciones espontáneas por refinar. Debe de crear un ambiente de debate científico, en donde la validación sea un elemento central, de manera que se favorezca un aprendizaje equitativo (Hitt & Quiroz, 2019). El proceso de MM en esta parte de la actividad se ubica en la generalización numérica y la generalización del pensamiento aritmético algebraico, esto prepara al estudiantes para el siguiente paso que es la matemática horizontal.

Presentación. Trabajo en equipo
Preparen una presentación para el resto del grupo, donde expliquen los diferentes aspectos: <ul style="list-style-type: none">• Un dibujo de las magnitudes de los tres recipientes• Relaciones entre las magnitudes de los tres recipientes• Gráfica Volumen-altura del líquido de los recipientes 1 y 2• Diferencias o similitudes entre la forma y las gráficas volumen – altura del líquido de los recipientes 1 y 2.

Figura 22

Autorreflexión. El trabajo en la autorreflexión es individual en un proceso de reconstrucción. Esta etapa permite a los estudiantes reconstruir individualmente lo que se hizo en el trabajo en grupo y con ello se fortalece el conocimiento. Esta etapa es crucial en la metodología ACODESA ya que todo el trabajo individual y en equipo una vez pasado el consenso se puede olvidar rápidamente. La estabilidad del conocimiento adquirido en las etapas anteriores no podrá alcanzarse si no se pasa por un periodo de reconstrucción (autorreflexión) de lo realizado (Hitt & Quiroz, 2019).

Para la autorreflexión se les entregará un nuevo cuestionario que contestarán individualmente. Las preguntas se diseñarán, cambiando el ritmo del cuestionario inicial, con la finalidad de, en forma resumida, medir el avance de los alumnos.

Proceso de institucionalización. Se propicia cuando el docente presenta a los estudiantes los resultados de las actividades desarrolladas y los procesos institucionales de resolución de la situación. En esta etapa el maestro resume los resultados de los equipos, muestra la evolución de las representaciones espontáneas que emergieron en las etapas anteriores y discute su eficacia antes de introducir las representaciones institucionales y los procesos correctos.

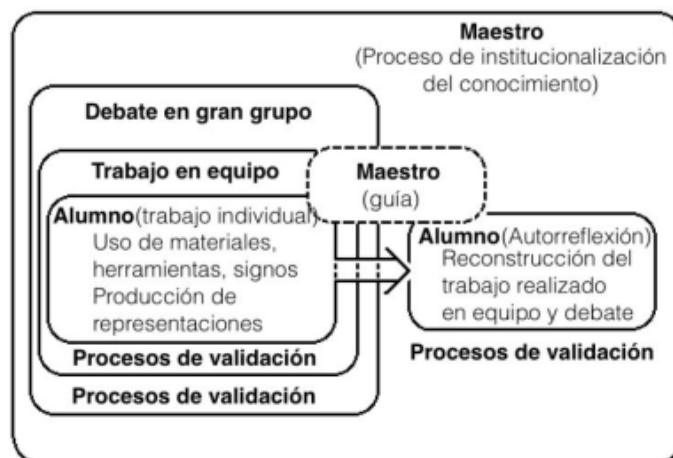


Diagrama 10. Metodología ACODESA (Hitt & González-Martín, 2015) p. 207

Una vez terminado el diseño de la actividad se procederá a la etapa III del trabajo. Con el objetivo de evaluar la pertinencia del proyecto de intervención educativa se realizará una experimentación piloto, la cual se planeó como a continuación se describe.

La experimentación piloto se llevará a cabo bajo la modalidad sincrónica y presencial. Debido a que se está proponiendo un medio de aprendizaje sociocultural, es importante los tipos de interacciones que se presenten durante la actividad, es necesario la observación y el registro de estas interacciones.

Las características de la población que se escogerá para la experimentación son estudiantes de tercer año de secundaria en México. Debido al medio de aprendizaje sociocultural y las etapas del método de enseñanza ACODESA, se tendrán tres equipos de trabajo, por lo que la cantidad de estudiantes que se necesita para la experimentación es de seis a ocho estudiantes.

Para llevar a cabo la observación de la experimentación se necesitan una persona como conductor de la actividad (docente) y un observador. Se tendrá una sesión previa con la persona que llevará a cabo el rol de docente, para que conozca la actividad. El docente tendrá que hacer la actividad en papel, respondiendo cada una de las preguntas que se hacen en ella. Además, deberá conocer el tipo y calidad de las intervenciones que tendrá a lo largo de la actividad de modelación, el tipo de preguntas que debe hacer en dado caso que los alumnos tengan bloqueos y cómo serán sus intervenciones en las diferentes etapas del método de enseñanza ACODESA. Una vez que la actividad haya sido resuelta, habrá una discusión entre el docente y el observador para determinar aspectos puntuales de lo que se debe observar, así como aspectos generales de las instrucciones.

Con el grupo de estudiantes se llevará a cabo una sesión de entrenamiento previo para uso de GeoGebra y Tracker en el uso de las herramientas del software que se utilizarán en la

actividad experimental. Los estudiantes deben conocer las herramientas de cada software que se van a utilizar, por lo que la finalidad de esta sesión será que tengan un recorrido por estas herramientas con videos, en el caso de Tracker, que se le proveerán para la toma de datos, y estos mismos datos se utilizarán en GeoGebra. El tiempo estimado para esta sesión es de dos horas.

Una vez realizada la sesión de entrenamiento, se aplicará la actividad en cinco sesiones en días consecutivos con una duración de una hora cada una.

Los instrumentos de recolección de información que se recuperarán son: las respuestas de las hojas de trabajo, además de la videograbación de uno de los equipos, se tendrán los archivos de Tracker y GeoGebra, además de un formato de observación con los registros de las interacciones. Esta información será analizada, para refinar la actividad y realizar los cambios pertinentes en el diagrama de MM.

Finalmente se trabajará en la etapa IV del trabajo de intervención educativa. En esta etapa final, se realizará la experimentación definitiva con la cual se recabará información que servirá para realizar el reporte del análisis de resultados y elaboración del documento correspondiente.

Todas las acciones descritas anteriormente se encuentran en la siguiente sección en forma de cronograma y distribuidas en los ocho semestres del posgrado.

8 CRONOGRAMA

Con la intención de organizar las acciones que se han hecho en los primeros cuatro semestres del posgrado y que se planean hacer en los próximos cuatro semestres, se presenta un cronograma con un listado de acciones para concluir el trabajo, los rectángulos sombreados corresponden a los meses que se trabajó o se trabajará en cada acción.

	Acciones	Semestre I						Semestre II					
		2022											
		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
1	Revisión de literatura sobre Modelación Matemática en Matemática Educativa												
2	Escrito preliminar de los antecedentes												
3	Revisión de la literatura sobre las diferentes perspectivas de Modelación Matemática en la educación												
4	Revisión de literatura sobre el uso de la tecnología en Matemática Educativa												
5	Revisión de literatura sobre enfoque STEM en Matemática Educativa												

Tabla 3 Cronograma correspondiente al tercer y cuarto semestre

	Acciones	Semestre III							Semestre IV				
		2023											
		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
5	Revisión de literatura sobre enfoque STEM en Matemática Educativa												
6	El planteamiento de la problemática a abordar y objetivos del proyecto de intervención												
7	Desarrollo de un marco conceptual el cual es un proceso de MM												
8	Diseño de actividad para pilotaje												
9	Planeación de la experimentación												
10	Versión definitiva de la introducción y antecedentes para el documento predoctoral												
11	Versión definitiva del estado del arte para el documento predoctoral												
12	Versión definitiva de la problemática y objetivos para el documento predoctoral												
13	Versión definitiva de las características del proyecto de intervención educativa para el documento predoctoral												
14	Versión definitiva de los elementos teóricos para el documento predoctoral												
15	Versión definitiva de los elementos metodológicos para el documento predoctoral												
16	Envío del documento del examen predoctoral												
17	Examen predoctoral												

Tabla 4 Cronograma correspondiente al quinto y sexto semestre

	Acciones	Semestre V					Semestre VI						
		2024											
		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
1	Pilotaje de primera actividad												
2	Análisis preliminar de datos												
3	Refinamiento de resultados												
4	Diseño(s) de Actividad(es) completa(s)												
5	Implementación, experimentación definitiva												

Tabla 5 Cronograma correspondiente al séptimo y octavo semestre

	Acciones	Semestre VII					Semestre VIII					2026			
		2025													2026
		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic	Feb	
7	Procesamiento de datos														
8	Análisis de datos implementación definitiva														
9	Versión definitiva del estado del arte														
10	Versión definitiva de problemática y objetivos														
11	Versión definitiva de Aspectos Teóricos														
12	Versión definitiva de Aspectos Metodológicos														
13	Versión definitiva de la Tesis														
14	Presentación del examen														

9 BIBLIOGRAFÍA

- Aguilera, D., Lupiáñez, J. L., Vilchez-González, J. M., & Perales-Palacios, F. J. (2021). In Search of a Long-Awaited Consensus on Disciplinary Integration in STEM Education. *Mathematics*, 9(6), 597. doi:<http://dx.doi.org/10.3390/math90>
- Aparisi, L. A., & Pochulu, M. D. (2013). Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.* (págs. 1387-1397). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Artigue, M., & Baptist, P. (2012). *Inquiry in Mathematics Education*. Fibonacci Project.
- Bachelard, G. (1948). La noción de obstáculo epistemológico. En G. Bachelard, *La formación del espíritu científico* (págs. 15-26). Ciudad de México: Siglo veintiuno editores S.A. de C.V.
- Balbuena, H., & Block, D. (1996). ¿Qué significa multiplicar por $7/4$? En H. Balbuena, D. Block, M. Dávila, Schulmaister, V. García, & E. Moreno, *La enseñanza de las matemáticas en escuela primaria* (págs. 177-191). Ciudad de México: SEP.
- Balbuena, H., Block, D., García, S., Mendoza, T., & García, J. C. (2021). *Conecta Más secundaria. Matemáticas 3*. Ciudad de México: SM de ediciones S.A. de C.V. Recuperado el 13 de marzo de 2023, de <https://guiasdigitales.gruposm.com.mx/sites/default/files/guias/206514/index.html>
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). The unit of analysis in the formulation of research problems: the case of mathematical modelling at university level. *Research in Mathematics Education*, 2-17.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan, *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (págs. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.
- Blum, W., & Mogens, N. (2020). *The learning and teaching of mathematical model*. New York, NY, USA: Routledge.
- Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006). Reformulating “Mathematical Modelling” in the framework of the antropological theory of didactics. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 209-216). Prague: Charles University in Prague Faculty of Education.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. *Grenoble: La Pensée Sauvage*, 1-56.

- Brousseau, G., & Brousseau, N. (1987). Agrandissement du Puzzle. En G. Brousseau, & N. Brousseau, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* (págs. 137-151). IREM de Bourdeux.
- Carlson, M. P. (2002). Physical Enactment: A Powerful Representational Tool for Understanding the Nature of Covarying Relationships? *Representations and Mathematics Visualization*, 63-77.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *IREM de Grenoble*, 45-75.
- Cortés, J. C., Hitt, F., & Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. (Bolema, Ed.) *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 30(54), 240–264. doi:<https://doi.org/10.1590/1980-441>
- Couso, D. (2017). Per a què estem en STEM? Un intent de definir l'alfabetització STEM per a tothom i amb valors. *Revista Ciències* 34, 22-30.
- D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. (2007). Obstáculos epistemológicos y perspectiva sociocultural de la matemática. *Cuadernos del Seminario en Educación*, 167-193.
- D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 89-98.
- Del Castillo, A., & Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o Instrumento? Esa es la pregunta. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (págs. 459-468).
- Doorman, L., & Gravemeijer, K. (2009). Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education*, 199-211.
- Drijvers, P. (2003). RME and the learning of algebra. En P. Drijvers, *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter* (págs. 51-56). Utrecht: CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education.
- Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why it works (Or Doesn't). En S. J. (Ed.), *Selected regular lectures from 12th International Congress on Mathematical Education* (págs. 135-151). Switzerland: Springer International Publishing.
- Educativos, D. G. (2023). *Saberes y Pensamiento Científico. Tercer grado*. Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública. Obtenido de <https://www.conaliteg.sep.gob.mx/2023/S3SAA.htm#page/1>

- English, L. D. (2015). STEM: Challenges and opportunities for mathematics education. 3-18, Proceedings of 39th Psychology of Mathematics Education conference.
- Fernández, M. d. (2019). Hacia una educación STEM en las secundaria públicas de México. *EPIKEIA. Revista del Departamento de Ciencias Sociales y Humanidades.*, 1-11.
- Flores, S., Chávez, J. E., Luna, J., Gonzalez, M., M.V., G., & Hernández, A. A. (2008). El aprendizaje de la física y las matemáticas en contexto. *CULCyT*, 19-24.
- Freudenthal, H. (1991). Mathematising -- horizontally and vertically. En H. Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education* (págs. 30-44). DORDRECHT: KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS.
- Freudenthal, H. (1991). Mathematising -- horizontally and vertically. En H. Freudenthal, *Revisiting Mathematics Education* (págs. 30-44). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Galbraith, P. L., Stillman, G., & Brown, J. (2013). Turning Ideas into Modeling Problems. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford, *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (págs. 133-144). New York, NY: Springer.
- Galilei, G. (1638). *Dialogues concerning Two New Sciences*. (H. Crew, & A. De Salvio, Trads.) New York, USA: The McMillan Company. Recuperado el 1914
- García-Cuéllar, D. J. (2018). Enfoques Teóricos en investigación con tecnología en Matemática Educativa. *Propuestas para la enseñanza de las matemáticas* (págs. 1402-1409). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.
- García-Cuéllar, D. J. (2018). ENFOQUES TEÓRICOS EN INVESTIGACIÓN CON TECNOLOGÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA. *Propuestas para la enseñanza de las matemáticas* (págs. 1402-1409). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.
- Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, 155-177.
- Handhika, J., Istantara, D. T., & Astuti, S. W. (2018). Using graphical representation to reveals the student's conception of kinematics. *Journal of Physics: Conference Series*, 1321(032064). doi:10.1088/1742-6596/1321/3/03206
- Hernández Rodríguez, M. A. (2009). Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme. *Tesis Maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa*. Instituto Politécnico Nacional, CICATA, Unidad Legaria.
- Hernández, M. A. (2009). Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme. *Tesis Maestría en Ciencias*

con especialidad en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional, CICATA, Unidad Legaria.

- Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 329-354. doi:10.7202/012672ar
- Hitt, F. (2016). El Aprendizaje del cálculo y nuevas tendencias en su enseñanza en el aula de matemáticas. *La Educación Matemática como Herramienta en el Desempeño Profesional Docente*, 6-15.
- Hitt, F. (2020). Approach, Construction of Arithmetic-Algebraic Thinking in a Socio-Cultural Instructional. (A. Sacristán, J. Cortés-Zavala, & P. Ruiz-Arias, Edits.) *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 120-142. doi:https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020
- Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: Representations and actions by students in action. *ZDM Mathematics Education*, 635-647. doi:https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x
- Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educ Stud Math*(88), 201–219.
- Hitt, F., & Quiroz, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 75-106.
- Hitt, F., & Quiroz, S. (2019). La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Núñez, J. L. Soto, M. Saboya, & [Eds], *Investigaciones Teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (págs. 11-29). México: AMIUTEM.
- Hitt, F., & Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación en un medio sociocultural. *Revista Colombiana de educación*, 153-177.
- Hitt, F., & Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación en un medio sociocultural. *Revista Colombiana de educación*, 153-177.
- Hitt, F., Cortés, C., & Saboya, M. (2017). Integrating Arithmetic and Algebra in a Collaborative Learning and Computational Environment Using ACODESA. En G. A. (eds.), *Mathematics and Technology, Advances in Mathematics Education* (págs. 285-311). AG: Springer Internacional Publishing.
- Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. En

- G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, & U. Gellert, *Mathematics and technology. A C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (págs. 57-74). Cham: Springer.
- Hitt, F., Soto, J. L., Romero, C. F., & Dávila, M. T. (2022). Reflection on the STEM integration between concepts of kinematics and calculus. *Far East Journal of Mathematics Education*, 23, 57-96. doi:<http://dx.doi.org/10.17654/0973563122013>
- Hobbs, L., Clark, J. C., & Plant, B. (2018). Successful Students – STEM Program Teacher Learning Through a Multifaceted Vision for STEM Education. En K. L. R. Jorgensen, *STEM Education in the Junior Secondary* (págs. 133-168). Singapore. doi:DOI 10.1007/978-981-10-5448-8_8
- Joubert, M. (2013). Using computers in classroom mathematical tasks: revisiting theory to develop recommendations for the design of tasks. *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, 69-77.
- Kaiser, G. (2020). Mathematical Modelling and Applications in Education. En *Encyclopedia*.
- Kelley, T. R., & Knowles, J. G. (2016). A Conceptual Framework for Integrating STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3-11. doi:<https://doi.org/10.1186/s40594-016-0046-z>
- Kline, M. (1985). *Matemáticas. La perdida de la certidumbre*. México, D.F.: Siglo veintiuno editores, s.a. de c.v.
- Küchemann, D. (septiembre de 1978). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, 7(4), 23-26.
- Lavicza, Z. (2010). Integrating technology into mathematics teaching at the university level. *ZDM Mathematics Education*, 109-115.
- Leica Geosystems, A. (1999). *Introducción al Sistema GPS*. Heerburg, Suiza: Leica.
- Leontiev, A. (1975). Sign and Activity. *Journal of Russian & East European Psychology*, 44(3), 17-29. doi:<https://doi.org/10.2753/RPO10610405440302>
- Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and Modelling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, 109-129.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 113-142.
- Margolinas, C. (1992). Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 113-158. Obtenido de <https://shs.hal.science/halshs-00458309>

- Martín, T., Aguilera, D., Perales, F. J., & Vilchez, J. M. (2019). What are we talking about when we talk about STEM education? A review of literature. *Science Education*, 1-24.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednardz, C. Kieran, & L. Lee, *Approches to algebra. Perspective for research and teaching* (págs. 65-86). Montréal, Canada: Kluwer Academic Publishers.
- Mesa, Y. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2011). Modelación Matemática en la Historia de las Matemáticas. Una mirada al concepto de Función Cuadrática. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (págs. 1-10). Recife, Brasil: CIAEM.
- Moeller, R. D. (2017). The Velocity Concept: The History of Its Modelling Development. En M. M. Applications, *Stillman, Gloria Ann; Blum, Werner; Kaiser, Gabrielle* (págs. 433-442). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.
- Mousoulides, N., & English, L. D. (2011). Engineering Model Eliciting Activities for Elementary School Students. En G. e. Kaiser, *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (págs. 221-230). Dordrecht Heidelberg London New York: Springer. doi:10.1007/978-94-007-0910-2_23
- Ortega, M., & Puig, L. (2017). Using Modelling and Tablets in the Classroom to Learn Quadratic Functions. En G. A. Stillman, B. Werner, & G. E. Kaiser, *Mathematical Modelling and Applications* (págs. 565-575). Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.
- Pantoja, R., Nesterova, E., & Guerrero, M. d. (2017). La Modelación Matemática en situaciones problema de la vida cotidiana. *Revista electrónica AMIUTEM*, 5(1), 165-182.
- Perkins, D., & Simmons, R. (1988). Patterns of Misunderstanding: An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*, 58(3), 303-326. Obtenido de <https://www.jstor.org/stable/1170257>
- Pospiech, G., & Fischer, H. E. (2021). Physical–Mathematical Modelling and Its role in learning Physics. En H. E. Fischer, & R. E. Girwidz, *Physics Education* (págs. 201-229). Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Razumnikova, O. M. (2013). Divergent versus convergent thinking. En E. G. Carayannis, *Encyclopedia of creativity, invention, innovation and entrepreneurship* (págs. 759-765). Cham: Springer.
- Reyes-Rodríguez, A. V., Rondero-Guerrero, C., Acosta-Hernández, J. A., Campos-Nava, M., & Torres-Rodríguez, A. A. (2017). Reduccionismo Didáctico y Creencias de

- Profesores acerca del Teorema de Pitágoras. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 968-983.
- Rodríguez, R., & Quiroz, S. (3 de diciembre de 2016). El Rol de la Experimentación en la Modelación Matemática. *Educación Matemática*, 28(3), 91-110.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en Matemáticas y Ciencias en escuelas secundarias públicas en México. *Revista Iberoamericana de educación*(33), 135-165.
- Saboya, M., Bednarcz, N., & Hitt, F. (2015). Le controle exerce en algebre: conceptualisation et analyses en resolution de problemes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 61-96.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press, Inc.
- Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (septiembre de 1988). On the Meaning of Variable. *The Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.
- SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral*. Ciudad de México: Secretaria de Educación Pública.
- SEP, S. d. (2022). *Avance del contenido del Programa sintético fase 6*. (M. e. construcción, Ed.) Obtenido de Educación básica Consejo Técnico: <https://educacionbasica.sep.gob.mx/>
- Sriraman, B., & Kaiser, G. (2006). Theory usage and theoretical trends in Europe: A survey and preliminary analysis of CERME4 research reports. *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME4* (págs. 45-47). ZDM.
- Stillman, G. A., Kaiser, G., & Lampen, C. E. (2020). *Mathematical Modelling Education and Sense-making*. Cham, Switzerland: Springer Nature.
- Tall, D. (2002). Computer environments for the Learning of Mathematics. En R. Biehler, R. W. Sholz, R. Strasser, & B. Winkelmann, *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (págs. 189-199). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Tezer, M. (2019). The Role of Mathematical Modeling in STEM Integration and Education. En K. G. Fomunyan, *Theorizing STEM Education in the 21st Century*. IntechOpen. doi:<https://doi.org/10.5772/intechopen.88615>
- Trigueros, M. (octubre-diciembre de 2006). Ideas acerca del movimiento del péndulo. Un estudio desde una perspectiva de modelación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(31), 1207-1240.
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 75-87.

- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 293-305.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What Is Mathematical Visualization? En W. Zimmermann, & S. Cunningham Eds., *Visualization in Teaching and Learning* (págs. 1-7). WaEds.

ANEXO 1

Parte 1. Actividad “Llenado de recipientes”

Nombre del alumno:

Nombre de los integrantes del equipo:

1.

2.

3.

Situación:

Ahorrar agua en casa es una responsabilidad que tenemos todos. A menudo damos por hecho que tenemos un suministro constante de agua limpia, sin embargo, este es un privilegio del cual muy pocos gozan.

El 22 de marzo de cada año se conmemora el día Internacional del Agua, para recordarnos qué tan importante es tener acceso a agua que sea segura para beber. ¡Todos los seres vivos necesitamos agua limpia y segura!

México es un país con desigualdades sociales y económicas, por lo que hay familias que no cuentan con agua potable para hacer sus actividades diarias en casa y tienen que recurrir a la renta de pipas de agua o ir por agua a otros lugares. Por lo que es muy importante aprender sobre el llenado de cisternas, tinacos y otras formas de almacenamiento de agua para uso doméstico.

En esta actividad estudiaremos el llenado de recipientes desde la perspectiva matemática, en cada actividad se te plantearán retos a resolver sobre recipientes de diferentes formas.

Actividad 1

Trabajo individual

Recipiente 1. Abre la aplicación de GeoGebra con nombre Recipiente 1 te mostrará la simulación del llenado de un recipiente. Mueve el punto H (en la imagen de la izquierda) hacia arriba y hacia abajo, para simular “llenar o vaciar” el recipiente, además puedes mover el recipiente en 3D (de la derecha) hacia todos los lados y observar de diferentes ángulos la imagen, mantén la imagen de GeoGebra abierta para contestar las preguntas de la actividad:

1. ¿Qué forma geométrica tiene el recipiente?

2. Realiza un dibujo del llenado del recipiente donde señales sus magnitudes.

3. Explica cuáles son las magnitudes que señalaste en el dibujo anterior:

4. Cuando subes el nivel del agua del recipiente, ¿cuáles magnitudes cambian y cuáles permanecen constantes?

Magnitudes constantes	Magnitudes que cambian

5. Haz una lista con las parejas de magnitudes que consideres que están relacionadas entre sí.

6. ¿Cómo están relacionadas entre sí, las magnitudes de cada pareja?

7. Si encuentras una relación entre dos magnitudes, ¿qué magnitud depende de la otra?

Trabajo en equipo

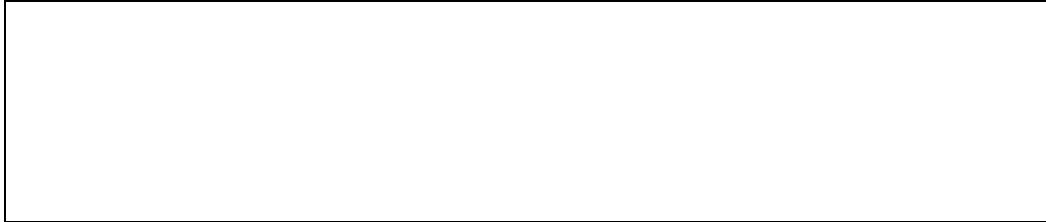
8. Compara y discute con el resto del equipo tus respuestas a las preguntas 1-7.

9. Investiga en internet:

a) ¿Cómo calcular el volumen de este recipiente?

b) ¿Cómo se relacionan las magnitudes en el llenado de este recipiente?

c) ¿Cómo calcularías el volumen ocupado por el líquido?



Trabajo individual

Recipiente 2. De la misma forma abre la aplicación de GeoGebra con nombre Recipiente 2, te mostrará la simulación del llenado de un recipiente. Mueve el punto H (en la imagen de la izquierda) hacia arriba y hacia abajo, para simular “llenar o vaciar” el recipiente, además puedes mover el recipiente en 3D (de la derecha) hacia todos los lados y observar de diferentes ángulos la imagen, en cualquier momento puedes volver aquí para contestar las preguntas de la actividad:

10. ¿Qué forma geométrica tiene el recipiente?

11. Realiza un dibujo del llenado del recipiente donde señales sus magnitudes.

12. Explica cuáles son las magnitudes que señalaste en el dibujo anterior:

13. Cuando subes el nivel del agua del recipiente ¿Cuáles magnitudes cambian y cuales permanece constante?

Magnitudes constantes	Magnitudes que cambian

14. Haz una lista con las parejas de magnitudes que consideres que están relacionadas entre sí.

15. ¿Cómo están relacionadas entre sí, las magnitudes de cada pareja?

16. Si encuentras una relación entre dos magnitudes, ¿qué magnitud depende de la otra?

Trabajo en equipo

17. Compara y discute con el resto del equipo tus respuestas a las preguntas 10-16.

18. Investiga en internet:

a) ¿Cómo calcular el volumen de este recipiente?

b) ¿Cómo se relacionan las magnitudes en el llenado de este recipiente?

c) ¿Cómo calcularías el volumen ocupado por el líquido?

Trabajo individual

Recipiente 3. Abre la aplicación de GeoGebra nombre Recipiente 3 te mostrará la simulación del llenado de un recipiente. Mueve el punto H (en la imagen de la izquierda) hacia arriba y hacia abajo, para simular “llenar o vaciar” el recipiente, además puedes mover el recipiente en 3D (de la derecha) hacia todos los lados y observar de diferentes ángulos la imagen, mantén la imagen de GeoGebra abierta para contestar las preguntas de la actividad:

19. ¿Qué forma geométrica tiene el recipiente?

20. Realiza un dibujo del llenado del recipiente donde señales sus magnitudes.



21. Explica cuáles son las magnitudes que señalaste en el dibujo anterior:



22. Cuando subes el nivel del agua del recipiente, ¿cuáles magnitudes cambian y cuáles permanecen constantes?

Magnitudes constantes	Magnitudes que cambian

23. Haz una lista con las parejas de magnitudes que consideres que están relacionadas entre sí.



24. ¿Cómo están relacionadas entre sí, las magnitudes de cada pareja?

25. Si encuentras una relación entre dos magnitudes, ¿qué magnitud depende de la otra?

Trabajo en equipo

26. Compara y discute con el resto del equipo tus respuestas a las preguntas 19-25.

27. Investiga en internet:

a) ¿Cómo calcular el volumen de este recipiente?

b) ¿Cómo se relacionan las magnitudes en el llenado de este recipiente?

--

c) ¿Cómo calcularías el volumen ocupado por el líquido?

--

28. Ya que analizaron los tres recipientes, ¿qué similitudes y diferencias encuentran de lo que cambia y de lo que permanece constante entre los tres recipientes?

--

Parte 2 Actividad “Llenado de recipientes”

Nombre de los integrantes del equipo:

- 1.
- 2.
- 3.

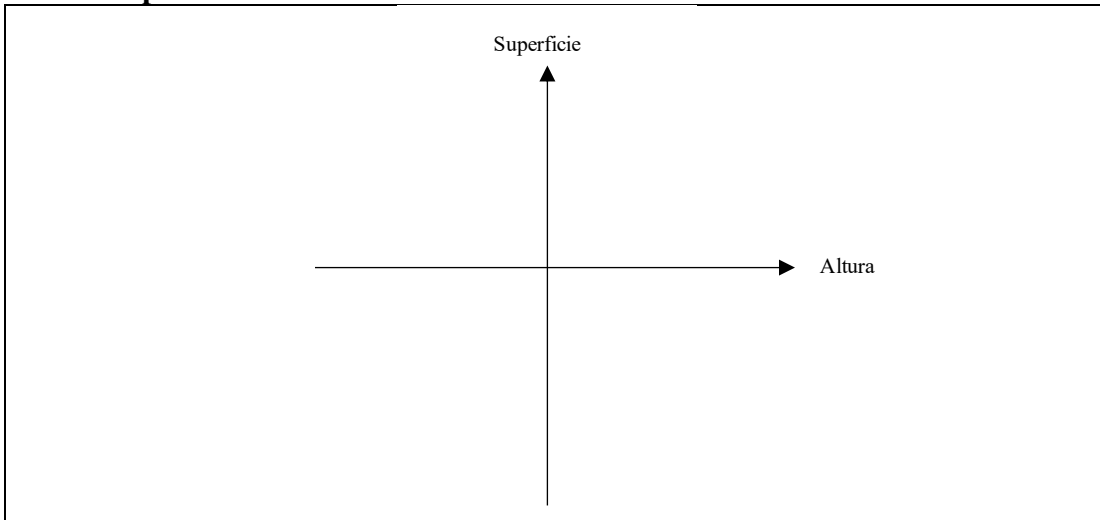
Trabajo en equipo

1. En el **Recipiente 1** ¿Cómo calcularías la superficie del agua conforme va cambiado la altura del agua?

2. ¿Qué medidas de la superficie le corresponden a cada altura del agua? Anota los datos en la siguiente tabla.

Altura					
Superficie					

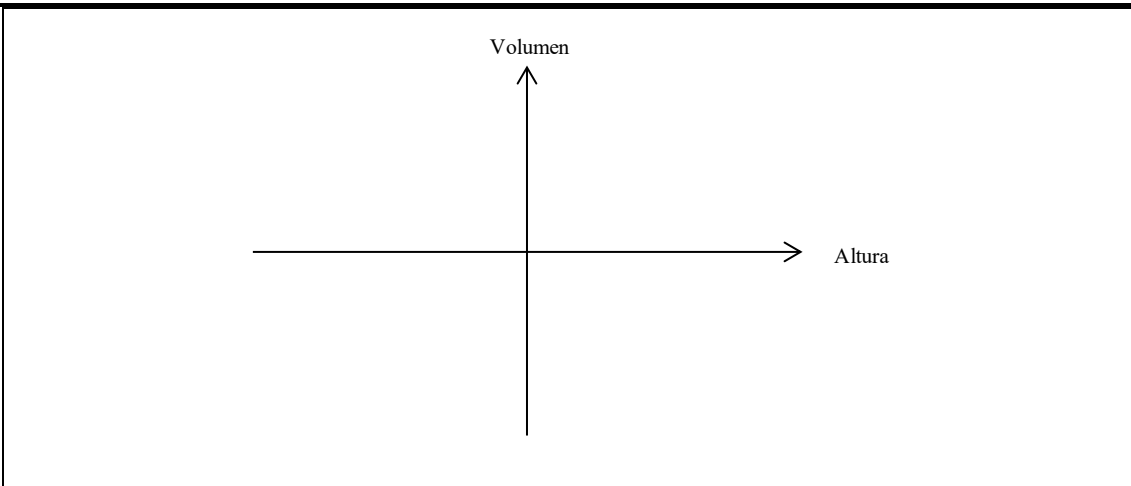
3. Dibuja la gráfica del cambio de la superficie con respecto a la altura del **Recipiente 1**.



4. ¿Qué medidas de volumen le corresponden a cada altura del agua? Anota los datos en la siguiente tabla.

Altura					
Volumen					

5. Ahora dibuja la gráfica del volumen del **Recipiente 1** con respecto de la altura del agua.



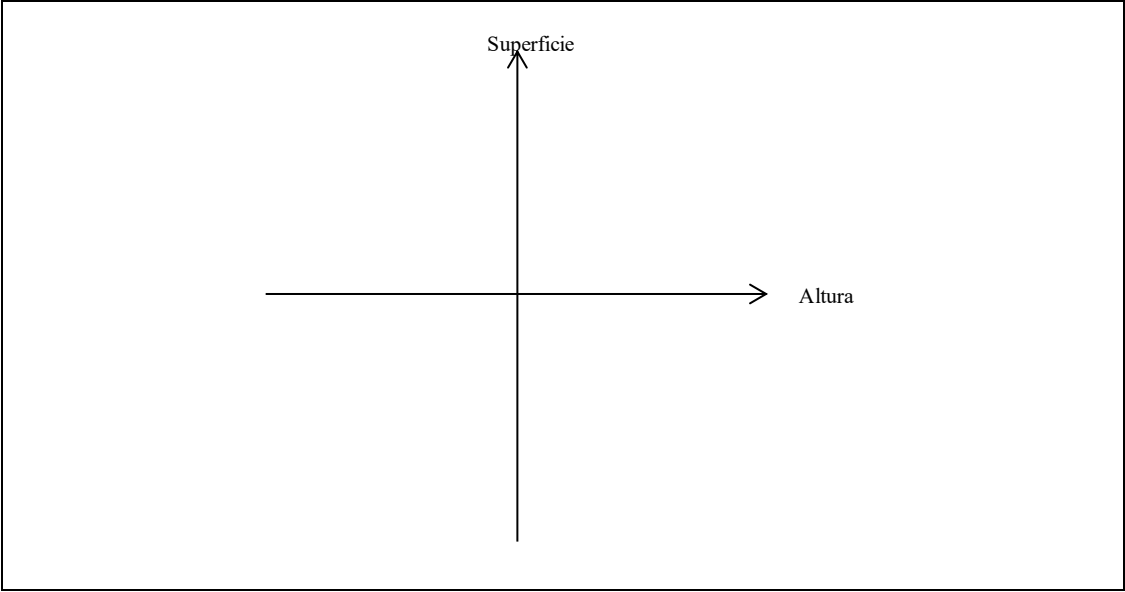
6. ¿Cuáles son las diferencias que encuentran en ambas gráficas?

7. En el **Recipiente 2** ¿Cómo calcularías la superficie del agua conforme va cambiado la altura del agua?

8. ¿Qué medidas de la superficie le corresponden a cada altura del agua? Anota los datos en la siguiente tabla.

Altura					
Superficie					

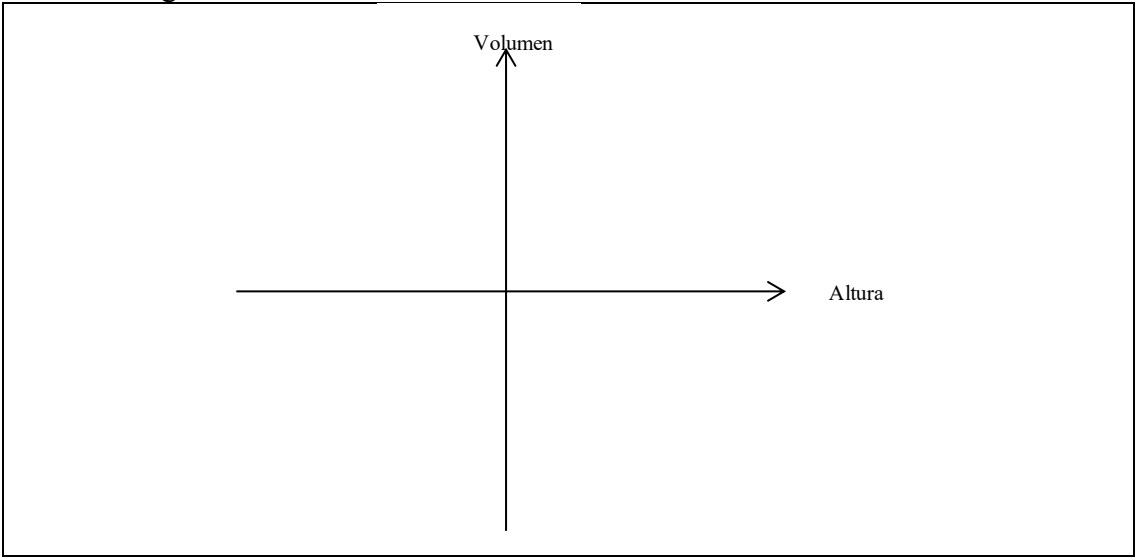
9. Dibuja la gráfica del cambio de la superficie con respecto a la altura del **Recipiente 2**.



10. ¿Qué medidas de volumen le corresponden a cada altura del agua? Anota los datos en la siguiente tabla.

Altura					
Volumen					

11. Ahora dibuja la gráfica del volumen del **Recipiente 2** con respecto de la altura del agua.



12. ¿Qué similitudes encuentras en las gráficas de volumen con respecto a la altura de los recipientes 1 y 2?

13. ¿Qué diferencias encuentras entre las gráficas de volumen con respecto a la altura de los recipientes 1 y 2?

Presentación. Trabajo en equipo

Preparen una presentación para el resto del grupo, donde expliquen los diferentes aspectos:

- Un dibujo de las magnitudes de los tres recipientes
- Relaciones entre las magnitudes de los tres recipientes
- Gráfica Volumen-altura del líquido de los recipientes 1 y 2
- Diferencias o similitudes entre la forma y las gráficas volumen – altura del líquido de los recipientes 1 y 2.