



"El saber de mis hijos  
hará mi grandeza"

# UNIVERSIDAD DE SONORA

## Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias con especialidad en  
Matemática Educativa

**DESARROLLO DEL PENSAMIENTO VARIACIONAL  
MEDIANTE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA SOBRE LA  
COVARIACIÓN EXPONENCIAL CONTINUA**

Documento predoctoral que presenta  
**LUIS MIGUEL AMADOR SILVA**

Director de Tesis:

Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez





## *Agradecimientos*

*Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo brindado para mi formación, con la beca de número 4020695.*

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el campo de Educación Matemática ha experimentado un aumento notable en el interés por la investigación educativa y en el diseño de propuestas de enseñanza. Estas importantes líneas de trabajo se han centrado en el desarrollo de estrategias que puedan abordar de forma reflexiva las dificultades de aprendizaje que los estudiantes experimentan en el área de Matemáticas. En este sentido, se ha observado un impulso fundamental hacia la elaboración y evaluación de proyectos de intervención educativa, que tienen como objetivo apoyar la práctica docente, reconociendo su papel crucial en la enseñanza y el aprendizaje. La premisa es que, al implementar estrategias de enseñanza novedosas y ajustadas a las necesidades individuales de los estudiantes, se pueda propiciar la comprensión y dominio de conceptos matemáticos y, principalmente, su aplicación en situaciones de la realidad.

El presente trabajo se enmarca en esta perspectiva y surgió debido a la identificación de dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de nociones relacionadas con una clase específica de covariación; la covariación exponencial continua. Estas dificultades nos han llevado a cuestionar por qué los estudiantes tienen problemas para entender estos conceptos y su aplicación en situaciones del mundo real. Esto nos motivó a realizar una revisión al estado actual de la enseñanza del Cálculo, rama fundamental de las Matemáticas para estudiar, analizar, entender y modelar fenómenos de variación y cambio, pero en muchos casos se aborda desde un enfoque centrado en rutinas procedimentales y en el tratamiento de nociones estáticas y formales.

En este contexto, el propósito de este trabajo es desarrollar una propuesta didáctica orientada a favorecer el pensamiento variacional de los estudiantes a través del estudio de nociones dinámicas vinculadas con la covariación exponencial continua. Esta propuesta buscará proporcionar a los estudiantes herramientas conceptuales que permitan articular las ideas de variación continua y cambio en progreso desde la perspectiva de un enfoque variacional y el uso de cantidades infinitesimales. Con ello, se pretende ofrecer una alternativa al enfoque formal y tradicional, centrado en nociones estáticas como funciones numéricas, límites y variación discreta, a fin de propiciar una comprensión dinámica de los fenómenos de variación.

El documento se estructura en seis apartados. En el primer apartado se presentan los antecedentes, donde se analizan las dificultades de enseñanza y aprendizaje reportados en la literatura, así como el marco curricular y epistemológico del tema. Posteriormente, en el segundo apartado, se expone el estado del arte, que recupera aportaciones previas de investigación en Matemática Educativa que han abordado problemáticas similares afines a nuestros propósitos. En el tercer apartado se plantea la problemática de interés, justificación y objetivos del proyecto. En el cuarto apartado se describe la propuesta didáctica y sus características, mientras que en el quinto apartado se presentan los aspectos teóricos que fundamentan nuestra propuesta didáctica. Luego, en el sexto apartado se describen los aspectos metodológicos, y finalmente, se presentan las conclusiones, anexos y el cronograma de trabajo, que resume la planeación y los tiempos previstos para la realización del proyecto.

# Contenido

<b>1 ANTECEDENTES.....</b>	<b>1</b>
1.1 Indagando acerca de la ley exponencial y las cantidades infinitesimales.....	2
1.1.1 Primeras formulaciones: explorando el legado de Arquímedes en la Antigua Grecia .....	2
1.1.2 Un acercamiento a las cantidades infinitesimales.....	5
1.1.3 Diferenciales de las cantidades exponenciales.....	8
1.1.4 Formulaciones matemáticas del siglo XVIII: un vistazo a algunas aplicaciones de procesos dinámicos .....	11
1.2 Continuidad exponencial: dificultades en el estudio de la covariación en procesos dinámicos .....	13
1.2.1 Desafíos en la visualización de la covariación continua y suave.....	13
1.2.2 Obstáculos en la comprensión del comportamiento exponencial y la razón instantánea de cambio .....	15
<b>2 ESTADO DEL ARTE .....</b>	<b>17</b>
2.1 Investigaciones sobre la formación de imágenes mentales de covariación en procesos dinámicos.....	17
2.2 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional, razonamiento variacional y razonamiento covariacional.....	19
2.3 Propuestas didácticas relacionadas con el estudio de cantidades infinitesimales y procesos de covariación.....	20
2.3.1 El Proyecto DIRACC: una propuesta innovadora para la enseñanza del Cálculo. 20	
2.3.2 Estrategias didácticas enfocadas hacia la enseñanza-aprendizaje de procesos de covariación .....	21
2.4 Enfoques didácticos sobre el modelo matemático para la covariación exponencial .....	23
2.4.1 Enfoques para estudiar la función exponencial.....	23
2.4.2 Continuo físico vs continuo matemático.....	24
<b>3 PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS .....</b>	<b>26</b>
3.1 El aprendizaje de nociones dinámicas del Cálculo por estudiantes de Ingeniería.....	27
3.1.1 Desconexión entre la teoría y la práctica .....	29
3.1.2 Falta de visualización relativa a los fenómenos dinámicos .....	31
3.1.3 Comprensión fragmentada del cambio continuo.....	32

3.1.4 Limitaciones del enfoque formal en la comprensión de fenómenos de variación y cambio .....	33
3.2 Justificación .....	34
3.2.1 Necesidad de un enfoque de carácter variacional y práctico .....	35
3.2.2 Las cantidades infinitesimales como puente entre el mundo real y el mundo ideal	37
3.2.3 El uso de la tecnología como herramienta para comprender fenómenos variacionales .....	39
3.3 Objetivos .....	41
<b>4 LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS .....</b>	<b>42</b>
4.1 Características generales .....	42
4.2 Características específicas .....	42
4.2.1 Propósitos generales de la propuesta didáctica .....	43
4.3 Características del tema matemático de interés .....	43
4.4 Características del lenguaje variacional a promover en la propuesta de enseñanza .....	44
<b>5 MARCO TEÓRICO Y EXPLICATIVO .....</b>	<b>47</b>
5.1 Pensamiento matemático según Guershon Harel.....	48
5.1.1 El aprendizaje y la enseñanza desde la perspectiva del modelo DNR.....	49
5.2 Enfoque del pensamiento variacional .....	51
5.2.1 Características esenciales del pensamiento variacional .....	53
5.3 Estructura operativa para el desarrollo del pensamiento variacional .....	58
5.3.1 Maneras Variacionales de Entender y Maneras Variacionales de Pensar.....	59
5.3.2 Implicaciones metodológico-didácticas para el diseño de tareas variacionales.....	64
<b>6 METODOLOGÍA.....</b>	<b>69</b>
6.1 Fase 1: Del prediseño.....	69
6.2 Fase 2: Del diseño y análisis a priori .....	70
6.3 Fase 3: De la puesta en escena.....	72
6.4 Fase 4: Del análisis a posteriori y valoración .....	72
<b>CONCLUSIONES .....</b>	<b>75</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>77</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>85</b>
<b>CRONOGRAMA .....</b>	<b>85</b>

# 1 ANTECEDENTES

La comprensión de los conceptos matemáticos requiere, en gran medida, reconocer sus raíces y las condiciones que motivaron su desarrollo. La gran mayoría de nociones surgen como una respuesta a problemas de la realidad, a patrones observados en el mundo o a necesidades prácticas de distintas civilizaciones. La noción exponencial es un ejemplo emblemático, su origen se remonta a antiguas observaciones sobre crecimiento y decaimiento que seguían regularidades consistentes. A lo largo de los siglos, estas regularidades se formalizaron matemáticamente, dando paso a ideas fundamentales que hoy siguen siendo esenciales no solo en matemáticas, sino también en ciencias naturales, sociales, la economía, la ingeniería y diversas disciplinas que estudian procesos dinámicos.

En la enseñanza tradicional, la covariación exponencial, junto con otras nociones como la razón de cambio y acumulación, suelen abordarse desde enfoques tradicionales centrados en la memorización y aplicación mecanizada de procedimientos formales (Pinilla et al., 2024; Retana, 2013; Salinas y Alanís, 2009). Este tratamiento, predominantemente algebraico y geométrico, coloca en segundo o tercer plano los procesos dinámicos que históricamente dieron sentido a estas nociones. Como señalan Khanh et al. (2020), existe una transformación pedagógica importante en comparación con el desarrollo histórico de la noción exponencial y la manera en que se presenta en los libros de texto. Esta transformación a menudo ignora la secuencia temporal del desarrollo histórico, lo que ha llevado a una simplificación del conocimiento sobre lo exponencial enseñado desde la escuela secundaria hasta la universidad. Esta simplificación puede generar una visión reducida del concepto exponencial, al desvincular su enseñanza de los procesos históricos y epistemológicos que dieron lugar a su desarrollo.

Hoy en día, existe una familiaridad general con la “ley exponencial” (Curtis, 1978), en parte debido al amplio interés en la radioactividad. Sin embargo, la desintegración radioactiva se descubrió hasta 1900, mucho después de que los conceptos de crecimiento y decrecimiento exponencial hubieran sido formulados matemáticamente. Esto refuerza la importancia de reconocer que el concepto exponencial se gestó a lo largo de siglos de reflexión matemática. Reconocer este desfase histórico es fundamental para comprender que las ideas actuales no surgieron de manera natural del fenómeno que hoy se usa como ejemplo paradigmático.

Así mismo, el estudio moderno de la covariación exponencial se realiza a partir de la noción formal de función y la definición rigurosa de límite, que no existía cuando se gestaron las ideas fundamentales del Cálculo. Históricamente, el desarrollo conceptual estuvo anclado a la noción de diferencial y al uso de cantidades infinitesimales, herramientas matemáticas que permitían describir procesos dinámicos de variación continua de una manera intuitiva y directamente vinculada con los fenómenos de la realidad. Sin embargo, en la enseñanza actual, los significados infinitesimales y fenomenológicos han sido sustituidos casi por completo por significados geométricos y formales, donde la derivada se introduce como la pendiente de la recta tangente y la integral como el área bajo la curva.

Si bien las interpretaciones descritas anteriormente tienen bases históricas y utilidad conceptual intramatemática, su predominio en la enseñanza resulta limitado para comprender fenómenos reales en los que las cantidades no poseen naturaleza geométrica. En muchos contextos científicos e ingenieriles no existen pendientes ni áreas bajo la curva que interpretar; lo que se requiere es comprender razones instantáneas de cambio y acumulaciones de pequeños cambios. Estas interpretaciones, esencialmente variacionales, suelen diluirse en los enfoques tradicionales centrados en la definición moderna de función y límites, lo que separa al estudiante de los significados fenomenológicos que dieron origen al Cálculo.

Como resultado, los significados dinámicos y fenomenológicos que sustentan la matemática de la variación y el cambio, y que son esenciales para comprender la covariación exponencial y otros tipos de covariaciones, quedan relegados frente a rutinas procedimentales y tratamientos geométricos que no reflejan la naturaleza dinámica de los fenómenos. Esta desvinculación entre la evolución histórica del conocimiento, los significados fundamentales de los conceptos y su enseñanza escolar constituye un área de oportunidad que motiva el presente proyecto de intervención propuesto en esta tesis. Recuperar los significados que permitan a los estudiantes razonar sobre procesos dinámicos se vuelve indispensable para favorecer el desarrollo de ideas variacionales, y promover una comprensión aplicada y coherente hacia los fenómenos reales que se buscan modelar.

### **1.1 Indagando acerca de la ley exponencial y las cantidades infinitesimales**

Curtis (1978), en su concepción de la *ley exponencial* previa a 1900, expuso los primeros indicios de la variación exponencial que han existido desde civilizaciones antiguas. Señaló que los ejemplos físicos de crecimiento y decrecimiento exponenciales se fundamentan en conceptos simples. Esta ley puede entenderse mejor como una correspondencia uno a uno entre dos tipos de progresiones numéricas: la aritmética, donde la diferencia entre términos sucesivos es constante y se logra mediante la repetición aditiva de una cantidad, y la geométrica, donde la relación entre términos sucesivos se mantiene fija y se logra mediante la multiplicación repetida por una cantidad fija.

Curtis señala que muchas características de la progresión geométrica ya estaban presentes en registros anteriores a los trabajos de Arquímedes, entre ellos, papiros egipcios y tablas cuneiformes sumerias. Por ejemplo, los egipcios antiguos eran expertos en progresiones geométricas y basaban su sistema aritmético en ellas.

#### **1.1.1 Primeras formulaciones: explorando el legado de Arquímedes en la Antigua Grecia**

Arquímedes, conocido por sus contribuciones a la geometría y la física, también exploró conceptos matemáticos relacionados con el crecimiento y la transformación de las cantidades a lo largo del tiempo. Sin embargo, aunque sus investigaciones no se centraron específicamente en lo

exponencial, sus ideas y métodos de razonamiento influyeron en el desarrollo posterior de este campo.

El concepto de exponente encuentra sus raíces en las ideas planteadas por Arquímedes en la Antigua Grecia. Sus exploraciones matemáticas sentaron las bases para comprender la relación entre la magnitud de un fenómeno y el tiempo en el que se desarrolla, un principio esencial en el estudio de lo exponencial. Además, señala una propiedad fundamental de las progresiones geométricas. Esta propiedad puede expresarse en términos contemporáneos de la siguiente manera: cuando se multiplica un término en una posición determinada  $m$  por otro término en la posición  $n$ , el resultado es un término en una posición diferente, específicamente, la suma de los rangos de los términos originales  $m + n$ . Este postulado es equivalente a la identidad  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ . Distintos fenómenos modelados con sucesiones aritméticas y geométricas cumplen esta relación cuantitativa.

Para ejemplificar esta propiedad fundamental tomemos los valores numéricos de las siguientes dos sucesiones numéricas, los de la fila superior corresponden a los valores numéricos de una progresión aritmética (formada por la repetición sucesiva de la adición de 1) y los de la fila inferior corresponden a los valores numéricos de una progresión geométrica (formados por la repetición sucesiva de la multiplicación por 2, teniendo como razón común este número).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Para obtener  $16 \times 64$  debemos hacer lo siguiente, en la fila superior nos ubicamos en el número 4 y avanzamos hasta el sexto valor (10) y debajo del 10 tiene el valor 1024, es decir, al sumar  $4 + 6 = 10$  obtenemos el producto  $16 \times 64 = 1024$ .

Curtis enfatiza la importancia de diferenciar entre la ley exponencial y la ley potencia debido a sus características distintas en fenómenos físicos, lo cual puede resultar confuso para los estudiantes. La ley potencia, en particular, se define por una correspondencia uno a uno entre los valores numéricos de una progresión aritmética y una secuencia de valores numéricos como 1, 4, 9, 16, ..., que se forma cuando los términos de una progresión aritmética se elevan a una potencia fija.

### ***2.1.2 Formulaciones del siglo XVII: un vistazo al surgimiento de las representaciones simbólica y gráfica de la noción exponencial***

Curtis (1978) señala que, a pesar de que el siglo XVII introdujo las notaciones y representaciones gráficas que son fundamentales para el pensamiento cuantitativo actual, el desarrollo de los logaritmos, publicados por John Napier en 1614, precedió y fue independiente de este avance, siendo impulsado por necesidades prácticas de cálculo aritmético. Aunque los logaritmos facilitaron las formulaciones posteriores de lo exponencial, sus creadores no contaban con el concepto de exponencial. La elaboración de una tabla de logaritmos requería el cálculo de conjuntos de progresiones aritméticas y geométricas, así como el entendimiento de sus operaciones combinadas de suma y multiplicación.

En “La Geometrie” de 1637, Descartes introdujo el uso de un superíndice para representar la multiplicación repetida, lo que popularizó el término “exponencial” relacionado con la palabra francesa “exposant” o “exponente”. Además, Curtis (1978) menciona que esta notación mejoró las previas empleadas por Nicole Oresme, Nicolás Chuquet, Michael Stifel, Simón Stevin y otros.

El desarrollo de modelos matemáticos exponenciales y logarítmicos se debió a consideraciones geométricas relacionadas con representaciones gráficas. Descartes discutió la espiral logarítmica en una carta de 1638, mientras que otra carta en la misma época solicitaba el área bajo una curva sujeta a una relación específica entre la ordenada y la subtangente. Aunque Descartes conocía algunas propiedades de la curva exponencial, no la nombró ni mencionó el término logaritmo. Torricelli, alrededor de 1644, estudió las propiedades geométricas de esta curva, aunque el término “exponencial” se le asoció mucho después. Propuso dos nombres para esta curva, “hemihyperbola” y “línea logarithmica sive Neperiana”. La última se abrevió a “logarithmica” y fue el nombre aceptado para el logaritmo inverso hasta el siglo XVIII. Algunos historiadores malinterpretaron “logarithmica” como “logaritmo”, subestimando la comprensión de estas nociones matemáticas en el siglo XVII. Torricelli demostró que la subtangente de esta curva era constante y, al aproximarla con rectángulos, mostró sus propiedades diferenciales e integrales en términos geométricos.

Christiaan Huygens extendió y promovió los descubrimientos de Torricelli entre 1661 y 1690. Aunque no mencionó directamente a Torricelli, Huygens adoptó su terminología, refiriéndose a la curva como “logarithmica” en latín y “logarithmique” en francés. En un manuscrito de 1661, Huygens utilizó una progresión geométrica interpolada con los logaritmos en base decimal de Briggs para construir la logarithmica (ver Figura 1), y examinó sus propiedades geométricas.

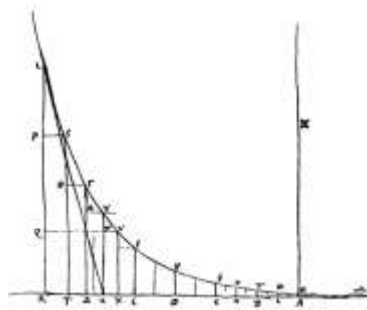


Figura 1 Construcción de la curva exponencial a partir de un manuscrito de 1661 de Christiaan Huygens. Tomado de Curtis (1978)

En conjunto, los avances del siglo XVII evidencian un proceso progresivo de la noción exponencial, en el que se desarrollaron nuevas formas de notaciones, estudios geométricos y primeras representaciones gráficas. Este panorama histórico ofrece un punto de referencia esencial para situar la evolución de la covariación exponencial en la enseñanza actual.

### **1.1.2 Un acercamiento a las cantidades infinitesimales**

El Cálculo moderno o Análisis Matemático descansa sobre tres fundamentos: los números reales, las funciones y los límites, entre otros (Jiménez et al., 2022). Sin embargo, ninguno de estos conceptos estaba completamente desarrollado a principios del siglo XVIII. Por ejemplo, los números reales no fueron completamente sistematizados hasta 1872, cuando Dedekind y Cantor presentaron construcciones independientes de ellos. La noción moderna de función como una correspondencia (valor de entrada-valor de salida) no se definió claramente hasta 1837 por Dirichlet, aunque Euler ya la había introducido en el siglo anterior como una expresión analítica de una variable. Asimismo, el concepto de límite fue clarificado en 1821 por Cauchy y formalizado por Weierstrass hacia 1872, durante sus cursos en la Universidad de Berlín.

A pesar de que aún no surgían estos conceptos, el Cálculo fue desarrollado a lo largo del siglo XVII, los sistematizadores de esta nueva rama de las matemáticas fueron Sir Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. Más tarde, Leonard Euler también contribuyó significativamente en este campo. Newton, cuyo descubrimiento del Cálculo se puede situar alrededor de 1665, dos siglos antes de que los conceptos de función y límite estuvieran disponibles en su forma actual, logró avanzar en este campo. Los matemáticos del siglo XVII no utilizaron formalmente las nociones modernas, apoyándose en cambio en profundas intuiciones, se enfocaron en tres ideas fundamentales: la noción de cantidad continua, la comprensión de la cantidad variable y el manejo de lo infinitamente pequeño. Estas ideas clave permitieron a los matemáticos de esa época desarrollar el Cálculo, incluso en ausencia de la formalización y rigurosidad que caracterizan su estudio en la actualidad.

En el siglo XVII, los matemáticos se educaban a partir de los textos clásicos griegos de Euclides y Arquímedes. La solución de los griegos a los diversos problemas que se enfrentaban se basaba en la idea de la continuidad de las cantidades, derivada de la percepción del espacio como continuo, como más tarde afirmaría Leibniz con la frase "*Natura non facit saltus*" [La naturaleza no da saltos] se refería a la idea de que los cambios en la naturaleza se pueden considerar de manera gradual y continua, en lugar de ser bruscos o discontinuos o por porciones, la continuidad deja implícito lo discreto, pero no viceversa. Este significado, desde el punto de vista del Cálculo, se relaciona directamente con la noción de continuidad en matemáticas, y es esencial para el estudio de fenómenos de la naturaleza correspondiente al continuo físico; más adelante se retomará esta idea. De acuerdo con Castillo-Garsow et al. (2013) Nicole Oresme exploró la variación en la intensidad del cambio utilizando imágenes de variación suave, identificando tres tipos: cambio constante, cambio regularmente creciente o decreciente, y cambio irregular. Estos tipos sugieren diferentes tasas de cambio, tanto constantes como variables. Su trabajo influyó en Leibniz, quien desarrolló representaciones simbólicas de la tasa de cambio instantánea, dando origen al Cálculo basado en imágenes de variación suave (Edwards, 1979).

Los griegos diferenciaban entre números y cantidades: los números surgían del contar y eran objeto de estudio de la aritmética, mientras que las cantidades, resultado del proceso continuo de medir, eran tratadas por la geometría. Algunas cantidades podían expresarse como proporciones

numéricas, pero otras no, como se demostró con el descubrimiento de las cantidades inconmensurables, lo que llevó a considerar la geometría como una ciencia más amplia que la aritmética.

Por consiguiente, los razonamientos aritméticos fueron reemplazados por razonamientos geométricos durante casi dos mil años en Europa. La noción de cantidad variable o magnitud variable se originó en el movimiento, y la relación entre las variables se entendió como curva o superficie. El Cálculo del siglo XVII estuvo estrechamente ligado a la investigación sobre curvas, aunque con una concepción diferente de las mismas en comparación con los griegos: una curva se percibía como la trayectoria seguida por un punto móvil que cambia continuamente de dirección. La idea del infinito se ocultaba en esta época, ya que los matemáticos griegos lo consideraban problemático, y la noción de límite, fundamental en el Cálculo moderno o Análisis Matemático, aún no había sido desarrollada completamente. En su lugar, el paso al límite se abordaba mediante un razonamiento apagógico, un tipo de razonamiento indirecto basado en la contradicción, que se aplicaba específicamente a través del método de exhaución o método de agotamiento, atribuido al geómetra y filósofo griego Eudoxo de Cnido (390–340 a.C.). Este método consiste en un procedimiento geométrico que permite calcular áreas y volúmenes de forma aproximada utilizando elementos de área o volumen “muy pequeños”, y la precisión de la aproximación mejora significativamente a medida que estos elementos se hacen cada vez “más y más pequeños”.



Figura 2 El método de exhaución de Eudoxo aplicado a la cuadratura del círculo. Adaptado de totumat [Fotografía] por Arias-García (2020), <https://totumat.com/2020/05/15/la-integral-definida/>

Arquímedes (287–212 a.C.), llevó el método de exhaución a su máximo desarrollo en la antigüedad. Utilizó este método para calcular áreas y volúmenes de figuras y cuerpos irregulares.

El estudio de cantidades infinitesimales destaca la capacidad de modelar matemáticamente la variación o el cambio en las magnitudes a través de sus diferenciales, cuyos valores varían a lo largo de intervalos de tamaño específico. Esto se logra de una manera más dinámica sin necesidad de abordar el tema desde la perspectiva rigurosa y formal del Análisis Matemático o Cálculo moderno.

Euler concebía el Cálculo como “método para determinar cocientes de incrementos infinitesimales, obtenidos de ciertas funciones cuando la variable de la que dependen experimenta un incremento infinitesimal”. Desde esta perspectiva, se considera que el enfoque infinitesimal del Cálculo resulta más intuitivo que el basado en límites. En otras palabras, “la noción principal del Cálculo no es el límite, sino el diferencial. El concepto de límite es esencial en el Análisis Matemático” (Jiménez et al., 2022, p. 325).

Jiménez et al. (2022) plantean la siguiente pregunta: *¿Qué es entonces el diferencial de una magnitud variable?* Responden a esta interrogante explicando que, para Leibniz, los diferenciales  $dx$  y  $dy$  son cantidades fijas, pero infinitamente pequeñas en comparación con los valores numéricos de la magnitud variable independiente,  $x$  y los valores numéricos de la magnitud variable dependiente,  $y$ . En el contexto geométrico,  $dx$  representa la diferencia infinitesimal entre dos abscisas consecutivas, mientras que  $dy$  corresponde a la diferencia infinitesimal entre dos ordenadas consecutivas. El cociente  $\frac{dy}{dx}$  describe la pendiente de la tangente a la curva en un punto. Desde esta perspectiva intuitiva entonces, la derivada  $y'$  se entiende como el cociente de estos diferenciales  $\frac{dy}{dx}$ .

Por su parte, Ímaz y Moreno (2010) mencionan que, en el trabajo de Leibniz, se destacan dos principios fundamentales, según Guillaume de L'Hôpital (1661-1704), quien los adoptó como axiomas en su libro sobre el Análisis de los infinitesimales en 1691. Estos principios son:

1. Toda curva puede considerarse como un polígono que tiene una infinidad de lados. Cada lado es un segmento infinitesimal.
2. Si  $A$  es una cantidad finita y  $\alpha$  es un infinitesimal (cuando se la compara con  $A$ ) entonces,  $A + \alpha$  puede sustituirse por  $A$  en los cálculos. (p. 23)

A continuación describiremos, utilizando los principios de Leibniz sobre los infinitesimales, cómo se puede calcular la diferencial de un producto de dos magnitudes variables, en este caso,  $xy$ . Como se muestra en Ímaz y Moreno (2010):

La diferencial de  $xy$ ,  $d(xy)$ , se define como la diferencia entre el valor de  $xy$  en un punto y el valor de  $xy$  en otro punto infinitesimalmente cercano. Es decir, se calcula como:

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy,$$

Aquí,  $dx$  y  $dy$  representan cambios infinitesimales en las variables  $x$  e  $y$ , respectivamente. Al multiplicar los binomios  $(x + dx)$  y  $(y + dy)$ , obtenemos:

$$(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy,$$

Esto es, la expresión se desglosa en varios términos:

$xy$ : el valor original del producto  $xy$ .

$xdy$ : el cambio en  $y$ , multiplicado por el valor original de  $x$ .

$ydx$ : el cambio en  $x$ , multiplicado por el valor original de  $y$ .

$dxdy$ : el producto de los cambios infinitesimales  $dx$  y  $dy$ .

Según el segundo axioma de Leibniz, el producto de los infinitesimales  $dx$  y  $dy$  (es decir,  $dxdy$  es tan pequeño en comparación con los otros términos, que puede ser despreciado. En otras palabras,  $dxdy$  es un término “infinitesimal de segundo orden”, que es casi nulo en comparación con los otros términos, por lo que se elimina de la expresión. Esto deja:

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

De este modo, la diferencial del producto de dos variables es la suma de los productos de cada variable por el cambio infinitesimal de la otra. El resultado muestra que el cambio infinitesimal en el producto  $xy$  (denotado por  $d(xy)$ ) depende del cambio en  $x$  multiplicado por el valor de  $y$ , y del cambio en  $y$  multiplicado por el valor de  $x$ . Este resultado es intuitivo, ya que el cambio en el producto se ve afectado por cómo cambian tanto  $x$  como  $y$ .

Este es un ejemplo clásico de cómo los diferenciales (cantidades infinitesimales) permiten aproximar y entender el comportamiento de magnitudes variables en momentos muy cercanos, especialmente útil para el cálculo de tasas de cambio instantáneas. Es importante señalar que las operaciones para obtener la diferencial  $d(xy)$  involucran sumas y productos entre cantidades finitas e infinitesimales, lo que implica que estamos trabajando en un dominio numérico extendido que incluye números infinitesimales.

Leibniz consideraba a los infinitesimales como herramientas conceptuales análogas a los números imaginarios, que se emplean para facilitar los cálculos con cantidades finitas. Así como los números imaginarios se introducen para resolver ecuaciones que no tienen soluciones racionales, los infinitesimales proporcionan un método eficiente para manejar cantidades extremadamente pequeñas en el contexto del cálculo diferencial e integral. Leibniz veía en los infinitesimales un recurso útil para describir y analizar fenómenos de cambio continuo, permitiendo el cálculo de derivadas y la determinación de áreas y volúmenes en situaciones donde los métodos clásicos no eran efectivos.

Leibniz también destacaba la utilidad de los infinitesimales como una extensión del análisis matemático más allá de lo que es directamente perceptible o medible en el mundo físico. Aunque los infinitesimales no tienen una existencia tangible como los números reales, su valor radica en la capacidad de representar cambios imperceptibles en magnitudes, lo que en última instancia ayuda a resolver problemas complejos relacionados con el movimiento, el crecimiento y la variación continua. De este modo, los infinitesimales no solo se convierten en una abstracción matemática poderosa, sino también en una base conceptual para el desarrollo de los principios fundamentales del cálculo.

### **1.1.3 Diferenciales de las cantidades exponenciales**

A las cantidades de la forma  $2^y$ ,  $\pi^z$ ,  $e^x$ , es decir, expresiones cuyos exponentes son variables, se les denominan exponenciales. El estudio de sus diferenciales tiene su origen en el análisis infinitesimal, que surgió como respuesta a la necesidad de describir fenómenos de crecimiento y decrecimiento continuo. En el caso de la exponencial  $e^x$ , Leonhard Euler mostró que su comportamiento diferencial es único; su razón instantánea de cambio es exactamente igual a la misma cantidad, es decir:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

Este resultado es fundamental en el estudio de cantidades que crecen o decrecen de manera exponencial, es decir, aquellas cuya variación en cada instante es directamente proporcional a su propio valor. Dicho de otro modo, el cambio infinitesimal de  $e^x$  respecto a  $x$  se expresa como:

$$de^x = e^x dx.$$

Para justificar este resultado, Euler y los matemáticos posteriores utilizaron el desarrollo en potencias de  $e^x$ , que permite descomponer a  $e^x$  en una suma infinita de términos polinómicos. Esta suma se escribe como:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Si se aplica un pequeño incremento  $dx$  a  $x$ , se obtiene:

$$e^{x+dx} = e^x \cdot e^{dx} = e^x \left( 1 + dx + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \frac{dx^4}{4!} + \dots \right).$$

El diferencial de  $e^x$  se expresa como:

$$d(e^x) = e^{x+dx} - e^x = e^x \cdot e^{dx} - e^x = e^x (e^{dx} - 1) = \dots = e^x \left( dx + \frac{dx^2}{2!} + \frac{dx^3}{3!} + \dots \right).$$

Sin embargo, los términos que incluyen  $dx^2$ ,  $dx^3$ , etc., son infinitesimales de orden superior y, por lo tanto, insignificantes en comparación con  $dx$ . Aplicando el segundo axioma de L'Hôpital, estos términos se pueden omitir, simplificando la expresión a:

$$de^x = e^x dx.$$

Euler fue uno de los primeros en sistematizar el uso de cantidades infinitesimales para estudiar el comportamiento de funciones exponenciales. En este contexto, las cantidades infinitesimales se tratan como números muy pequeños que, aunque no sean exactamente cero, tienden a serlo. Estas ideas se consolidan en el análisis moderno con el uso de hiperreales, lo que permite tratar formalmente los diferenciales en el contexto de cantidades infinitesimales.

Este razonamiento prueba que el diferencial de la exponencial es directamente proporcional a sí misma, sin recurrir a conceptos rigurosos como el de límite. Al descomponer  $e^x$  en una suma infinita de términos polinómicos y aplicar las reglas del Cálculo primigenio, se observa que su comportamiento es único en comparación con el diferencial de otras cantidades: el cambio infinitesimal en  $e^x$  no solo es proporcional a ella misma, sino que la tasa de variación instantánea en cualquier punto es igual al valor de  $e^x$  en ese mismo punto. Geométricamente esto significa que, independientemente del valor de  $x$ , la pendiente de la curva de  $e^x$  en un punto es siempre igual a la altura de la curva en ese punto.

Es importante destacar que en las aplicaciones reales el modelo exponencial que se emplea no corresponde a  $f(x) = e^x$ . Para los fenómenos concretos del mundo físico, químico, económico o biológico, el modelo adecuado más simple es:

$$f(x) = Ae^{kx}.$$

Pues incorpora aspectos esenciales que permiten ajustarlo a la realidad:

- **Constante inicial  $A$ :** representa el valor de la magnitud dependiente en el instante inicial. Para asegurar la congruencia dimensional,  $A$  debe portar las unidades de la magnitud dependiente (miembro izquierdo de la igualdad), permitiendo que el modelo se ajuste a las condiciones específicas del fenómeno que se estudia.
- **Parámetro  $k$ :** determina la naturaleza del cambio ( $k > 0$  creciente exponencial;  $k < 0$  decreciente exponencial) y, desde el punto de vista dimensional, debe tener las unidades inversas de la magnitud independiente  $x$  para que el producto  $kx$  sea adimensional. Solo en este caso la operación de exponenciación en  $e^{kx}$  está bien definida (no se puede elevar  $e$  a una cantidad con unidades).

A continuación se muestra cómo se obtiene la razón instantánea de cambio que rige al modelo exponencial simple:

$$f(x) = Ae^{kx}.$$

Aquí  $f$  es la magnitud dependiente (con sus unidades),  $A$  es su valor inicial (mismas unidades que  $f$ ) y  $k$  posee unidades inversas a  $x$  para que  $kx$  sea adimensional.

Se considera un pequeño incremento  $dx$  en la variable independiente y se define el diferencial:

$$df = f(x + dx) - f(x).$$

Sustituyendo  $f(x + dx)$  tenemos:

$$f(x + dx) = Ae^{k(x+dx)}.$$

Usando  $e^{k(x+dx)} = e^{kx+kdx} = e^{kx} \cdot e^{kdx}$ :

$$df = Ae^{k(x+dx)} - Ae^{kx},$$

$$df = Ae^{kx} \cdot e^{kdx} - Ae^{kx}.$$

Factorizando  $Ae^{kx}$ :

$$df = Ae^{kx} \cdot (e^{kdx} - 1).$$

Dividiendo entre  $dx$  obtenemos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{Ae^{kx} \cdot (e^{kdx} - 1)}{dx}.$$

Para  $dx$  infinitesimal, el desarrollo en suma infinita de términos polinómicos de  $e^{kdx}$  es:

$$e^{kdx} = 1 + kdx + \frac{(kdx)^2}{2!} + \frac{(kdx)^3}{3!} + \frac{(kdx)^4}{4!} + \dots$$

Sustituyendo en el cociente diferencial y simplificando el numerador:

$$\frac{df}{dx} = \frac{Ae^{kx} \cdot \left( \cancel{1} + kdx + \frac{(kdx)^2}{2!} + \frac{(kdx)^3}{3!} + \frac{(kdx)^4}{4!} + \dots - \cancel{1} \right)}{dx},$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{Ae^{kx} \cdot (kdx + \frac{(kdx)^2}{2!} + \frac{(kdx)^3}{3!} + \frac{(kdx)^4}{4!} + \dots)}{dx}.$$

Los términos con  $dx^2, dx^3, \dots$  son infinitesimales de orden superior respecto de  $dx$  y, por tanto, se desprecia su contribución:

$$\frac{df}{dx} = \frac{Ae^{kx} \cdot \left( \cancel{kdx} + \frac{\cancel{(kdx)^2}}{2!} + \frac{\cancel{(kdx)^3}}{3!} + \frac{\cancel{(kdx)^4}}{4!} + \dots \right)}{dx}.$$

Entonces obtenemos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{Ae^{kx} \cdot (kdx)}{dx}.$$

Simplificado  $dx$ :

$$\frac{df}{dx} = \frac{Ae^{kx} \cdot \cancel{kdx}}{\cancel{dx}},$$

$$\frac{df}{dx} = Ae^{kx} \cdot (k),$$

$$\frac{df}{dx} = k \cdot Ae^{kx}.$$

Dado que  $f(x) = Ae^{kx}$ , se obtiene:

$$\frac{df}{dx} = k \cdot f(x).$$

El miembro izquierdo  $df/dx$  tiene las mismas unidades de  $f/x$ . El miembro derecho  $k \cdot f(x)$  tiene las mismas unidades que  $k \cdot f$ . La igualdad exige que  $k$  porte unidades inversas a las de  $x$  y solo de esa manera  $kx$  sería adimensional. Imponer  $f(0) = A$  (con las unidades de  $f$ ) selecciona, entre todas las soluciones de  $\frac{df}{dx} = kf(x)$ , precisamente  $f(x) = Ae^{kx}$ . Esta condición ancla el modelo a los datos del fenómeno (punto de partida del contexto).

Esta propiedad, característica exclusiva de las magnitudes variables de comportamiento exponencial, modeladas con funciones exponenciales, es lo que las hace tan especiales. Permite modelar procesos de crecimiento o decaimiento exponencial, donde la velocidad del cambio es directamente proporcional al valor actual de la cantidad en cuestión, como ocurre en fenómenos naturales como el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, la eliminación de contaminantes del combustible o de una droga en el organismo. De esta manera, el diferencial de  $Ae^{kx}$ , al ser proporcional a la misma, refuerza su papel central en el Cálculo y las aplicaciones científicas, ya que es capaz de describir cambios dinámicos con una simplicidad matemática elegante.

#### 1.1.4 Formulaciones matemáticas del siglo XVIII: un vistazo a algunas aplicaciones de procesos dinámicos

De acuerdo con Curtis (1978), la formulación matemática de la noción de exponencial en el siglo XVII no solo permitió identificar y cuantificar los procesos exponenciales en la naturaleza y sus razones de cambio, sino que también sentó las bases para una amplia gama de aplicaciones en el siglo XVIII y posteriores.

Algunos de estos procesos exponenciales se encuentran en fenómenos que fueron estudiados históricamente antes del descubrimiento de la radioactividad en 1900. Por ejemplo: en 1701, la formulación de la ley de enfriamiento de Newton; en 1729, el desarrollo de la ley de absorción de Bouguer, coincidiendo con la época en que Euler propuso el exponencial complejo, facilitando la descripción matemática del movimiento armónico amortiguado. La concepción de Euler y el término “exponencial” fueron rápidamente adoptados, suplantando los términos anteriores como “*logarithmique*” y “*subtangente*”. Posteriormente, Johannes Lambert revisó y amplió el trabajo de Bouguer en 1760 utilizando la notación euleriana  $e^{ax}$ , la cual fue revisada nuevamente por August Beer en 1851 (Curtis, 1978).

Estos desarrollos se refieren a fenómenos concretos que muestran la aplicabilidad de las nociones relacionadas con la covariación exponencial. Por ejemplo, según Maor (2006):

- Cuando un objeto con una temperatura inicial  $T_0$  se coloca en un entorno con una temperatura constante  $T_1$ , experimenta un enfriamiento a una tasa que es proporcional a la diferencia entre su temperatura  $T$  y la temperatura del entorno  $T_1$ ,  $T - T_1$ , proceso representado por la ecuación diferencial  $\frac{dT}{dt} = -a(T - T_1)$ . Esta es comúnmente conocida como la ley de enfriamiento de Newton. La solución de esta ecuación diferencial es  $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-at}$ , lo que indica que la temperatura del objeto gradualmente se acerca a  $T_1$ , pero nunca la alcanza por completo.
- Cuando las ondas de sonido se propagan a través de un medio como el aire, su intensidad está determinada por una ecuación diferencial  $\frac{dI}{dx} = -aI$ , donde  $x$  representa la distancia recorrida por las ondas. La solución de esta ecuación es  $I = I_0e^{-ax}$ ,  $I_0$  es la intensidad de la fuente sonora, lo que indica que la intensidad disminuye exponencialmente a medida que la distancia aumenta por las ondas. Esta relación es similar a la ley de Bouguer-Lambert-Beer.

Estos fenómenos o procesos dinámicos muestran que el estudio de la covariación exponencial es accesible para su comprensión tanto en el ámbito académico como en el cotidiano, al analizar las magnitudes físicas involucradas, sin necesidad de mucha sofisticación matemática. Su relevancia trasciende la desintegración radioactiva, que es solo un caso particular de su alcance y originalidad.

Desde el punto de vista dinámico, a diferencia de otras covariaciones, una magnitud de comportamiento exponencial que está presente en fenómenos o procesos de la realidad, como los ejemplos anteriores, tiene la siguiente propiedad o característica cuantificable importante para su estudio y reflexión:

- Se trata de una magnitud covariante cuya razón instantánea de cambio es proporcional al valor actual de dicha magnitud. En otras palabras, la variación infinitesimal de la magnitud variable de interés es directamente proporcional a su valor actual,  $dy = kydx$ , y por lo tanto, la razón instantánea de cambio es directamente proporcional al valor de la magnitud,  $\frac{dy}{dx} = ky$ .

Partiremos de este contexto histórico-epistemológico, que muestra que los procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial son, en esencia, fenómenos cuantitativos de naturaleza dinámica. No obstante, pese a que la noción exponencial tiene raíces profundas y numerosos ejemplos históricos, su enseñanza ha tendido a centrarse en procedimientos algebraicos, dejando de lado la interpretación dinámica y la conexión con fenómenos continuos.

Comprender la covariación exponencial no solo implica manipular fórmulas, sino sobre todo razonar sobre cambios, interpretar las propiedades cuantitativas de los fenómenos y relacionarlas conceptualmente. Sin embargo, la literatura especializada en el área de Matemática Educativa ha identificado dificultades de enseñanza y aprendizaje en este tema, como la visualización de la variación continua, la interpretación de la razón de cambio proporcional y la aplicación a fenómenos reales. A continuación se presentan algunas de estas dificultades, que justifican la necesidad de estrategias didácticas innovadoras para promover la comprensión dinámica de los fenómenos exponenciales.

## **1.2 Continuidad exponencial: dificultades en el estudio de la covariación en procesos dinámicos**

Carlson et al. (2003) y Jiménez et al. (2022) sostienen que la noción de covariación implica la coordinación de los valores numéricos de dos magnitudes variables que experimentan cambios simultáneos, teniendo en cuenta cómo estas magnitudes cambian en relación una con otra. En este contexto, la covariación implica que las magnitudes variables no solo cambian al mismo tiempo, sino que también lo hacen de manera interdependiente, en lugar de independiente. Sin embargo, el proceso de asimilar estas ideas puede presentar desafíos, especialmente en lo que respecta a la formación de imágenes mentales de la variación y covariación continua y suave, de acuerdo con Yu (2024) “una posible razón para esto es que los estudiantes no están coordinando cómo covarían los valores de dos cantidades” (p. 9).

A continuación se presentan algunos desafíos relacionados con la visualización de la covariación continua y suave por parte de los estudiantes, así como obstáculos en la comprensión del comportamiento exponencial y su razón de cambio. Todo esto está relacionado con el aprendizaje de la percepción cuantitativa de crecimiento y decrecimiento exponenciales en los estudiantes.

### **1.2.1 Desafíos en la visualización de la covariación continua y suave**

En la matemática del cambio, la comprensión de la covariación y la continuidad en procesos dinámicos es esencial para diversas disciplinas, desde las ciencias naturales hasta las ciencias

sociales, la economía y la ingeniería (Hodaňová y Nocar, 2016; Kaput y Roschelle, 2013; Thompson y Carlson, 2017). Estos conceptos son fundamentales no solo para la predicción de fenómenos naturales y científicos, sino también para el desarrollo de habilidades cognitivas y analíticas en los estudiantes.

Particularmente, los procesos de comportamiento exponencial, matematizados mediante modelos exponenciales, son de gran importancia en muchos campos. Se utilizan para resolver problemas en ciencia y tecnología, como en arqueología, finanzas y fenómenos de crecimiento y decrecimiento natural (Khanh et al., 2020). Estos modelos se basan en la noción de que las magnitudes variables en ciertos fenómenos muestran un comportamiento continuo y suave a lo largo del tiempo o el espacio, sin saltos abruptos ni interrupciones.

Sin embargo, los estudiantes pueden enfrentar varias dificultades al formarse imágenes mentales de variación continua y suave, Carlson et al. (2003), Castillo-Garsow et al. (2013), así como Thompson y Carlson (2017), han señalado una serie de obstáculos que los estudiantes enfrentan al intentar formar ese tipo de imágenes mentales. Entre estas dificultades se encuentran las siguientes. En primer lugar, los estudiantes tienden a simplificar las relaciones de covariación continua y suave, tendiendo a buscar patrones lineales o discretos, en lugar de reconocer la variación continua entre las variables. Además, pueden experimentar limitaciones en la percepción de patrones complejos de covariación, especialmente aquellos que no siguen una tendencia lineal evidente. Esta ausencia de percepción puede deberse a la falta de experiencia o familiaridad con estrategias didácticas que exhiban apropiadamente a la variación continua y suave.

Un desafío adicional surge debido a la ausencia de herramientas conceptuales apropiadas y estrategias de visualización efectivas. Esta carencia dificulta la capacidad de formar imágenes mentales precisas de la variación continua y suave, que implica concebir una variable como siempre tomando valores en un flujo continuo y experiencial a lo largo del tiempo (Castillo-Garsow et al., 2013, p.34). Los estudiantes pueden encontrarse sin estrategias de razonamiento adecuadas para representar y comprender la relación entre variables en contextos no lineales (Campo-Meneses y García-García, 2020; Sureda y Otero, 2013). Esta falta de herramientas conceptuales y estrategias de visualización limita su capacidad para abordar eficazmente problemas que requieren variación no lineal, lo que a su vez dificulta su comprensión y resolución de problemas relacionados con fenómenos en este contexto.

Según Johnson y McClintock (2018) y Saldanha y Thompson (1998), la comprensión y la interpretación de gráficas como representaciones de un continuo plantea desafíos para los estudiantes. Esta dificultad se manifiesta con mayor claridad cuando los estudiantes recurren a la técnica de punteo para analizar las gráficas, es decir, trazar algunos puntos sobre la gráfica para inferir su comportamiento general, y luego conectar estos puntos para formar la curva. Si bien esta técnica es comúnmente empleada para graficar funciones numéricas, puede llevar a los estudiantes a percibir la gráfica covariacional como una representación estática de una relación entre cantidades, pasando por alto su naturaleza dinámica y continua.

### **1.2.2 Obstáculos en la comprensión del comportamiento exponencial y la razón instantánea de cambio**

Los estudiantes pueden enfrentar diversos obstáculos al intentar comprender la percepción cuantitativa de los procesos exponenciales, tanto en términos de crecimiento como de decrecimiento, así como en la comprensión de las nociones dinámicas que se relacionan con ella, por ejemplo: la razón instantánea de cambio, entre otros. Una de las dificultades principales radica en la conceptualización no intuitiva de esta noción. Para muchos estudiantes, acostumbrados a pensar en cambios lineales y predecibles, la naturaleza exponencial del crecimiento y decrecimiento resulta confusa (Davis, 2009; Presmeg y Nenduradu, 2005). La idea de que las cantidades aumenten o disminuyan de manera exponencial, es decir, en proporción a su valor actual resulta difícil de asimilar. De esta forma, Castillo-Garsow (2012) propone que la capacidad de pensar el cambio de manera continua, lo que denomina razonamiento suave, es un factor fundamental para comprender la naturaleza del crecimiento exponencial, ya que implica concebir que los valores numéricos de la magnitud cambian en todo momento.

Un desafío adicional radica en la dificultad para visualizar y argumentar el cambio exponencial. Ärlebäck et al. (2013) señalan que la combinación de lenguaje coloquial y terminología matemática a menudo oscurece la claridad y precisión de lo que los estudiantes intentan comunicar. Por lo tanto, la capacidad de imaginar cómo los valores numéricos de una magnitud cambian exponencialmente a lo largo del tiempo resulta ser complicada para los estudiantes. Esta dificultad se refleja en la descripción e interpretación de la estructura matemática, dado que las ambigüedades léxicas y las frases largas y complejas en matemáticas pueden dificultar la comprensión de los conceptos o provocar ideas erróneas (Avgerinos y Remoundou, 2021). Así mismo, la comprensión del tipo de comportamiento de las magnitudes presentes en los fenómenos implica un desafío y provoca dificultades para muchos de los estudiantes.

Además, los estudiantes pueden tener dificultades para vincular el crecimiento y el decrecimiento exponencial con situaciones del mundo real, debido a la forma en que estos temas se abordan en el aula. Khanh et al. (2020), quienes analizaron el enfoque de enseñanza de las nociones exponenciales en libros de texto, mencionan que estos tienden a seguir un patrón similar al siguiente proceso: primero se define el concepto, luego se presentan ejemplos prácticos, y finalmente se plantean problemas de aplicación. De este modo, destacan que ha habido una transformación pedagógica en el proceso de desarrollo de las nociones exponenciales, en comparación con su surgimiento y evolución histórico-epistemológica. Esta transformación pasa por alto la secuencia temporal del desarrollo exponencial.

Finalmente, la noción de razón instantánea de cambio puede resultar especialmente desafiante para algunos estudiantes. La investigación sobre la comprensión de los estudiantes acerca de la razón de cambio ha revelado dificultades en la conceptualización de la tasa y su interpretación en los fenómenos físicos y sociales (Avgerinos y Remoundou, 2021; Yu, 2024). Por lo que la comprensión de este concepto es fundamental para entender el comportamiento de las magnitudes que intervienen en procesos exponenciales. Estos obstáculos pueden dificultar la

capacidad de los estudiantes para desarrollar una comprensión completa y profunda del comportamiento exponencial y sus aplicaciones en el mundo real.

Varios estudios (Bressoud et al., 2016; Larsen et al., 2017; Thompson y Harel, 2021) han recurrido al trabajo pionero de Orton (1983) para resaltar las dificultades de los estudiantes en la comprensión del significado cuantitativo, tanto de la razón de cambio promedio, como de la razón instantánea de cambio. Orton señala que estas dificultades surgen de una comprensión deficiente del concepto de razón como una relación multiplicativa. Estas investigaciones subrayan la importancia de fortalecer la comprensión temprana de conceptos fundamentales como la razón, ya que sientan las bases para el éxito en Cálculo y otras áreas de las matemáticas.

Thompson y Harel (2021) señalan que una fuente más elemental de las dificultades de los estudiantes con el concepto de razón instantánea de cambio se relaciona con la poca coordinación de las relaciones cuantitativas entre covariaciones. En lugar de concentrarse en las relaciones cuantitativas entre los valores numéricos de las magnitudes, usualmente se presta más atención a la pendiente de las rectas secante y tangente, así como los valores de entrada de la función. Este enfoque hace que los estudiantes no comprendan la fenomenología dinámica de la razón de cambio (Yu, 2024), en particular, su vinculación con procesos exponenciales debido a la desconexión entre los conceptos matemáticos y las aplicaciones reales (Khanh et al. (2020); Presmeg y Nenduradu, 2005).

El recorrido histórico y epistemológico muestra que las nociones que sustentan la covariación exponencial surgieron a partir de la necesidad de describir fenómenos dinámicos mediante cantidades variables y cambios infinitesimales. Sin embargo, su enseñanza se ha distanciado de estos significados fundamentales, privilegiando enfoques formales que limitan la comprensión de los fenómenos de comportamiento exponencial. Esta brecha entre el desarrollo histórico del conocimiento y su tratamiento escolar evidencia la necesidad de recuperar significados dinámicos, fenomenológicos y variacionales que permitan al estudiante interpretar el cambio continuo en contextos reales. En este sentido, los antecedentes expuestos justifican la pertinencia del proyecto de intervención que se espera desarrollar en esta tesis, cuyo propósito es reorientar la enseñanza hacia representaciones, actividades y experiencias que promuevan una comprensión dinámica, intuitiva y coherente de la covariación exponencial continua.

A partir de los antecedentes expuestos se perfila la problemática de interés, lo que hace necesario indagar en trabajos relacionados con los propósitos del proyecto. El estado del arte permite reconocer que las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de las nociones vinculadas con la covariación y específicamente la de tipo exponencial no son nuevas, sino que han sido abordadas desde distintas perspectivas en el campo de Matemática Educativa. En esta sección se recuperan y organizan dichas aportaciones para identificar qué se ha investigado sobre el tema, qué elementos resultan pertinentes para orientar el desarrollo del pensamiento variacional y qué vacíos o necesidades persisten, con el fin de trazar con mayor precisión la dirección del presente proyecto de intervención.

## 2 ESTADO DEL ARTE

En la literatura de investigación en Matemática Educativa no es difícil detectar que el pensamiento variacional ha sido interpretado desde diversas perspectivas, las cuales se pueden clasificar en dos categorías. En la primera categoría se encuentran las posturas que relacionan el pensamiento variacional con el estudio de variables y funciones como entidades abstractas, enfocándose en el análisis de las funciones, sus propiedades y operaciones a partir de definiciones formales, en el espíritu del Análisis Matemático. Según este enfoque, los fenómenos de la realidad, junto con las magnitudes asociadas, se consideran ejemplos ilustrativos o aplicaciones secundarias de las funciones. Por otro lado, en la segunda categoría se encuentran aquellas posturas que lo ven como un tipo de pensamiento matemático que se centra en el análisis y la matematización o modelación de magnitudes variables presentes en fenómenos y procesos, ya sean físicos o sociales, en el espíritu del Cálculo primigenio. Estas interpretaciones enfocan sus realizaciones didácticas en la introducción del concepto de magnitud física y en la representación matemática de su comportamiento, utilizando el concepto de magnitud variable como esencial.

Particularmente, en este proyecto se pretende abordar didácticamente las dificultades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con las nociones dinámicas asociadas con la covariación exponencial continua desde la perspectiva del pensamiento variacional. Dicho esto, nos alineamos con la postura que considera al pensamiento variacional como un tipo de pensamiento matemático que requiere una manera dinámica de pensar, lo que nos lleva a situarnos en la segunda categoría mencionada anteriormente. Por lo tanto, a continuación se describen aportaciones de la literatura de Matemática Educativa que nos encaminan hacia ese fin.

### **2.1 Investigaciones sobre la formación de imágenes mentales de covariación en procesos dinámicos**

Castillo-Garsow et al. (2013) señalan que entender la variación implica crear imágenes mentales, y con esto se refieren a los procesos u operaciones mentales que un individuo lleva a cabo en una actividad matemática. Los autores utilizan el término “*imagen*” para describir la dinámica de esas operaciones mentales, las cuales definen como una actividad cognitiva que se puede llevar a cabo sin necesidad de realizar una acción visible. Así, postulan que diferentes imágenes mentales de cambio están asociadas con distintas actividades cognitivas, lo que influye en la comprensión de la variación.

Castillo-Garsow et al. (2013) describen dos tipos de imágenes de variación, la primera es; *imagen de variación suave* y la segunda es; *imagen de variación por porciones o unidades*. La primera se genera al conceptualizar que una magnitud variable siempre adquiere valores en el flujo continuo, es decir, varía continuamente. La segunda implica imaginar que la variación ocurre de forma discreta. Cuando se planifican actividades didácticas para fomentar estos tipos de imágenes de variación en los estudiantes, es crucial proceder con precaución, dado que cada una de estas imágenes conduce a la formación de diferentes conceptos matemáticos.

De acuerdo con Castillo-Garsow et al. (2013), el razonamiento suave se refiere a concebir el cambio como un proceso continuo y fluido, en el que una magnitud varía sin interrupciones. Por el contrario, el razonamiento fragmentado describe el cambio en términos de paquetes discretos o por porciones, donde se observa cómo una magnitud cambia “de un valor a otro” en intervalos definidos. Los autores argumentan que las imágenes de variación suave son más poderosas que las imágenes de variación por porciones, ya que los estudiantes que razonan en términos discretos o por porciones suelen enfrentar mayores dificultades al intentar comprender los procesos como un cambio continuo, mientras que aquellos que emplean el razonamiento suave logran superar estas limitaciones. Además, sostienen que el razonamiento suave constituye una raíz cognitiva para el razonamiento por porciones, es decir, que es posible desarrollar imágenes de variación por porciones a partir de una concepción continua, pero no es posible construir un entendimiento de lo continuo desde una visión por porciones.

Thompson y Carlson (2017) describen a la variación continua y suave como el tipo de imagen que implica pensar en la variación del valor de una cantidad a medida que su magnitud aumenta en bits, y al mismo tiempo anticipar que dentro de cada bit el valor varía suavemente. Por lo tanto, las imágenes que se espera promover en este proyecto son imágenes de variación continua y suave, para que los estudiantes logren asimilar las propiedades cuantitativas de la covariación exponencial continua, por medio del análisis de fenómenos de comportamiento exponencial. Sin embargo, resulta claro que existen diferencias entre el continuo físico y el continuo matemático. Mientras que en los fenómenos de la realidad el continuo físico se presenta de manera discreta, el continuo matemático lo modela de manera continua; más adelante retomaremos este punto. Por consiguiente, en este trabajo, al abordar la covariación continua, se asume la continuidad en el sentido matemático, para ello se consideran las concepciones de Ely y Ellis (2018), que se describen a continuación.

Ely y Ellis (2018) proponen un nuevo modo de razonamiento variacional y covariacional llamado *razonamiento continuo a cualquier escala*. Este modo de razonamiento se fundamenta en los conceptos de incrementos e infinitesimales de Leibniz, en lugar de basarse en imágenes de movimiento. En consecuencia, los autores sugieren que esto implica tres actividades cognitivas: en primer lugar, visualizar una magnitud variable que adquiera todos los valores del continuo en cualquier escala; en segundo lugar, comprender que no hay una escala en la que el continuo se vuelva discreto; y, por último, reescalar o hacer “zoom” a cualquier incremento arbitrario pequeño para la magnitud variable independiente y coordinar esa escala con los valores correspondientes de la magnitud variable dependiente. Por lo tanto, los autores sugieren que este nuevo modo de razonamiento, al que denominan el escalamiento de la variación continua como forma de razonamiento covariacional puede respaldar una comprensión más sólida de los conceptos fundamentales del Cálculo.

Por lo tanto, para que los estudiantes puedan imaginar apropiadamente una variación continua y suave, es necesario pensar en la covariación continua simultánea de dos magnitudes variables a cualquier escala. Alternativamente, la tecnología, como se mencionará más adelante,

puede ayudar a los estudiantes a construir esa imagen de covariación continua y suave. Estas dos soluciones no son incompatibles, y es posible que una combinación de ambas sea lo que mejor permita a los estudiantes construir el tipo de imagen de covariación requerido para comprender los fenómenos de la realidad.

## **2.2 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional, razonamiento variacional y razonamiento covariacional**

Jiménez et al. (2022) realizaron una investigación para analizar la enseñanza de conceptos variacionales, centrándose en ideas tanto dinámicas como estáticas. Se enfocaron en diferenciar el uso de magnitudes variables y funciones, y en los desafíos de su enseñanza. Destacan que, al estudiar y modelar procesos o fenómenos de la realidad, se requieren de conceptos como magnitudes variables, que son cualidades cuantitativas de los procesos dinámicos. Argumentan que las funciones son una de las herramientas para matematizar estas magnitudes y que sus propiedades están relacionadas con las características de las magnitudes.

Jiménez et al. (2022), así como Jiménez (2020) interpretan al “pensamiento variacional” como la forma matemática de pensar necesaria para entender la variación y el cambio en progreso (Thompson et al., 2019) en los distintos fenómenos. Thompson y Carlson (2017) argumentan que este tipo de pensamiento está constituido por dos componentes: *razonamiento variacional* y *razonamiento covariacional*. El razonamiento variacional implica comprender el cambio suave y continuo de una sola magnitud, y el razonamiento covariacional, implica entender cómo dos magnitudes cambian simultáneamente y están relacionadas entre sí. Proponen que desarrollar la habilidad de razonar variacionalmente es crucial antes de desarrollar el razonamiento covariacional en los estudiantes, y que este proceso se puede llevar a cabo desde la secundaria y el bachillerato. Describen siete comportamientos variacionales y covariacionales básicos, y sugieren el uso de herramientas tecnológicas para iniciar el desarrollo del razonamiento sobre magnitudes variables en los estudiantes.

En este proyecto se analizarán dos tipos de procesos de la covariación exponencial continua: el crecimiento covariacional acelerado y el decrecimiento covariacional desacelerado (ver Figura 3). Jiménez et al. (2022) argumentan que “el principal significado de la derivada, para el Cálculo, no es el de pendiente de la recta; es el de razón instantánea de cambio” (p. 338). Y describen ideas variacionales detrás de la interpretación de esta noción dinámica, como se muestra a continuación:



Figura 3 Dos de los comportamientos covariacionales básicos. Tomado de Jiménez et al. (2022)

La primera de ellas (ver Figura 3a) es la forma gráfica elemental asociada con el crecimiento covariacional acelerado, se refiere a un comportamiento en el que los valores de la magnitud variable independiente aumentan de forma uniforme, mientras que los respectivos valores de la

magnitud variable dependiente aumentan cada vez más. Gráficamente, este comportamiento se representa mediante una curva ascendente con concavidad positiva en el plano cartesiano. Por lo que toca a la razón instantánea de cambio, esta “es positiva (la magnitud variable dependiente crece) y creciente (crece cada vez más)” (Jiménez et al. 2022, p. 307).

La segunda de ellas (ver Figura 3b) es la forma gráfica elemental asociada con el decrecimiento covariacional desacelerado, comportamiento en el que los valores de la magnitud variable independiente aumentan de manera uniforme, mientras que los valores de la magnitud variable dependiente disminuyen cada vez menos. Gráficamente, este comportamiento se representa mediante una curva descendente con concavidad positiva en el plano cartesiano. “Por lo que toca a la razón instantánea de cambio, ésta es negativa (ya que la magnitud variable dependiente decrece) y creciente (puesto que decrece cada vez menos)” (Jiménez et al. 2022, p. 307).

En su estudio, Carlson et al. (2003) afirman que el *razonamiento covariacional* implica coordinar dos cantidades que cambian simultáneamente y observar cómo cada una varía en relación con la otra. Identifican cinco acciones mentales asociadas con este tipo de razonamiento:

1. Coordinar el valor de una variable con los cambios en la otra.
2. Coordinar la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra.
3. Coordinar la cantidad de cambio en una variable con los cambios en la otra variable.
4. Coordinar la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.
5. Coordinar la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente, para todo el dominio de la función.

Estas acciones mentales representan procesos cognitivos fundamentales que los estudiantes necesitan emplear para entender cómo dos variables están relacionadas y cómo cambian juntas. Identificar y describir estas acciones es crucial para comprender el razonamiento covariacional y cómo los estudiantes llegan a conclusiones en procesos dinámicos. Además, describen cinco niveles (N1, N2, N3, N4 y N5), de desarrollo de las imágenes de la covariación basados en estas acciones mentales para cada imagen. Por otra parte, Jiménez (2020) sostiene que, para que los estudiantes puedan adquirir la habilidad de razonar de manera covariacional, es esencial desde el punto de vista cognitivo desarrollar primero la capacidad de razonar variacionalmente, es decir, de razonar sobre una sola magnitud variable. El autor se refiere a esta etapa como el nivel cero (N0) del desarrollo del razonamiento covariacional, ya que debe anteceder a los cinco niveles descritos por Carlson et al. (2003).

## **2.3 Propuestas didácticas relacionadas con el estudio de cantidades infinitesimales y procesos de covariación**

### **2.3.1 El Proyecto DIRACC: una propuesta innovadora para la enseñanza del Cálculo**

El proyecto DIRACC, desarrollado por Thompson et al. (2019), representa un enfoque innovador en la enseñanza del Cálculo, con el objetivo de que los estudiantes construyan una comprensión reflexiva entre los conceptos de acumulación y razón de cambio, simbolicen esa

relación y luego la extiendan para que tenga un alcance más amplio. Este enfoque aborda los dos problemas fundamentales del Cálculo, los cuales son descritos de la siguiente manera:

Sabemos qué tan rápido varía cierta cantidad en cada momento, y queremos saber cuánto de ella hay en cada momento.

Sabemos qué tanto de cierta cantidad hay en cada momento, y queremos saber qué tan rápido ella varía en cada momento. (Thompson et al., 2019)

Para facilitar este proceso, el proyecto emplea un software propuesto por los autores, una calculadora gráfica, que ayuda en la representación visual, la comprensión de registros de representación y otras reflexiones dinámicas.

Entre las características principales del enfoque, se destaca que siempre se hace referencia a los valores de las variables, las cuales están en constante variación. El término “cambio” implica un proceso dinámico de variación en curso, lo que requiere una percepción activa de que las magnitudes están experimentando un “*cambio en progreso*” en ese momento. El concepto central del proyecto es el de “diferencial”, que representa una variable cuyo valor varía a lo largo de intervalos de tamaño específico. Se enfatiza la importancia de la “razón de cambio” en lugar del tradicional concepto de “pendiente”. Además, se desarrollan conceptos como la función exacta y aproximada de razón de cambio, entre otras características fundamentales relacionadas con las cantidades infinitesimales.

### **2.3.2 Estrategias didácticas enfocadas hacia la enseñanza-aprendizaje de procesos de covariación**

En su estudio, Arzarello (2019) introduce la noción de covariación instrumentada, considerando la covariación como una forma más amplia de pensamiento o razonamiento. Tras examinar detenidamente la literatura, señala que este tipo de razonamiento surge como una búsqueda de relaciones entre variables concretas, dinámicas y continuas, para representar el cambio y los fenómenos de movimiento. Sugiere que la covariación instrumentada puede ser útil para los profesores al diseñar situaciones didácticas que introduzcan a los estudiantes al razonamiento covariacional en contextos de geometría dinámica, es decir, utilizando herramientas tecnológicas para abordar situaciones de covariación.

Basándose en la idea de que la covariación puede ser enseñada con éxito desde los primeros años de la escuela mediante el uso de tecnología, Arzarello destaca que el uso de artefactos permite visualizar las características matemáticas de los fenómenos, alejándose del análisis de objetos estáticos como las funciones conjuntistas. Considera que el entorno de geometría dinámica actúa como un artefacto que potencia las características observables de los fenómenos dependientes de la formulación del problema y permite su instrumentación. Destaca que la coordinación de múltiples artefactos puede facilitar el aprendizaje mediante una planificación didáctica cuidadosa.

Para respaldar estas conclusiones, Arzarello lleva a cabo un experimento de enseñanza en el cual los estudiantes deben analizar el famoso experimento de Galileo Galilei del plano inclinado,

identificando la covariación entre las magnitudes involucradas. Coordina la instrumentación usando tres artefactos: un video profesional del fenómeno, una simulación en GeoGebra de este y una tabla en la pizarra, donde se registran los argumentos de los estudiantes. Destaca que estos artefactos, de naturaleza diferente, ayudan a los estudiantes a comprender el fenómeno físico en cuestión, lo que resulta en un enfoque más comprensivo y enriquecedor del aprendizaje.

Harel (2008), en su visión del pensamiento matemático propone que la enseñanza de las matemáticas no debe limitarse a aspectos formales como definiciones, demostraciones y problemas, sino que sobre todo debe centrarse en el desarrollo de herramientas cognitivas conceptuales. Él describe las matemáticas como dos conjuntos complementarios: *maneras de entender* y *maneras de pensar*, que están relacionadas con acciones mentales. Estos procesos incluyen varios actos mentales como interpretar y decodificar problemas matemáticos, lo que produce maneras de entender, que pueden ser correctas o incorrectas, dependiendo de la experiencia y conocimiento previo del estudiante. A las maneras de entender las define como el producto cognitivo de un acto mental. Además, Harel introduce el concepto de maneras de pensar, que se desarrollan a partir de las maneras de entender a través de observaciones repetidas de los actos mentales, y a estas las define como las características cognitivas de esos actos mentales. Estos conceptos permiten a los profesores inferir el conocimiento de los estudiantes y diseñar actividades de aprendizaje para desarrollar formas deseables de entender y pensar en matemáticas.

Amador y Jiménez (2023) conciben al pensamiento variacional como el tipo de pensamiento matemático que requiere una manera de pensar dinámica que está estrechamente vinculado al estudio de las magnitudes variables. Definen a las magnitudes variables como “aquellas propiedades o cualidades perceptibles y cuantificables en los fenómenos y procesos de la realidad, que por su naturaleza intrínseca son dinámicas”. Siguiendo la visión de pensamiento matemático de Harel (2008), los autores proponen dos constructos teóricos para el desarrollo del pensamiento variacional: *Maneras Variacionales de Entender* y *Maneras Variacionales de Pensar*, cada uno de ellos relacionado con las propiedades cuantitativas de las magnitudes variables. Estos criterios operativos les ayudaron a elaborar y evaluar una secuencia de actividades didácticas destinada a promover el pensamiento variacional en los estudiantes. La realización didáctica propuesta por los autores se centraba en el estudio de la covariación exponencial simple, desde el punto de vista de las sucesiones numéricas.

Para el diseño de las actividades didácticas los autores identificaron y caracterizaron una serie de Maneras Variacionales de Entender y Maneras Variacionales de Pensar, referidas a cualquier proceso de variación y a partir de ellas, identificaron y caracterizaron un conjunto de maneras variacionales de entender más específicas, relacionadas con los procesos de covariación exponencial simple, y ellas guiaron el desarrollo de su propuesta de actividades didácticas para que los estudiantes desarrollaran un conjunto de imágenes, ideas y herramientas variacionales.

## **2.4 Enfoques didácticos sobre el modelo matemático para la covariación exponencial**

### **2.4.1 Enfoques para estudiar la función exponencial**

Foti (2021), en su investigación, realiza un trabajo sistematizado en el que describe diversos enfoques de enseñanza de la función exponencial, centrándose en el tratamiento formal de la función. Aunque nuestro trabajo no se basa en el enfoque funcional, sino en el enfoque variacional, es posible trasladar las ideas rescatadas por Foti al contexto de la modelación a través de funciones que describen relaciones cuantitativas entre magnitudes variables. Este enfoque variacional permite razonar sobre magnitudes cuya naturaleza intrínseca es dinámica (Amador y Jiménez, 2023), lo que proporciona una perspectiva más acorde con el tratamiento de la covariación y el cambio continuo entre dichas magnitudes; más adelante retomaremos este punto. A continuación, se presenta una descripción de los siete enfoques de enseñanza de la función exponencial, consignados por Foti (2021):

El primer enfoque de enseñanza de la función exponencial que analiza Foti se basa en la construcción de la función exponencial mediante la prolongación de las propiedades de las potencias. En este enfoque, se extienden las propiedades de las potencias con exponentes enteros a exponentes reales, permitiendo así definir la función exponencial para todo número real. Esta estrategia parte de la familiaridad del alumno con las reglas de las potencias y busca generalizar esos conceptos para abarcar exponentes más allá de los números naturales y enteros.

El segundo enfoque que analiza Foti consiste en estudiar la función exponencial a partir de una sucesión geométrica. Para ello, primero se define una sucesión de números reales, donde cada término se obtiene multiplicando el anterior por una constante fija (la razón de la sucesión). A través de esta sucesión, se busca entender el comportamiento de la función exponencial como el límite de las potencias sucesivas de un número base, lo que conecta la idea de crecimiento multiplicativo con el concepto de función exponencial.

El tercer enfoque que Foti presenta para enseñar la función exponencial es estudiarla como la inversa de la función logarítmica. En este enfoque, se parte de la comprensión de las funciones logarítmicas y se explora cómo la función exponencial puede considerarse su inversa. Es decir, si la función logaritmo responde a la pregunta “¿a qué potencia debo elevar la base para obtener un número?”, la función exponencial responde a “¿qué número produce una potencia dada?”. Este método permite vincular las propiedades de ambas funciones y desarrollar una comprensión más profunda de su relación.

El cuarto enfoque que Foti reseña para enseñar la función exponencial es buscar una función continua cuyo factor de incremento entre  $x$  y  $x + h$  sea independiente de  $x$ . En este enfoque, se busca una función  $f(x)$  que cumpla con la propiedad de que el cociente  $\frac{f(x+h)}{f(x)}$  sea una función únicamente de  $h$ , es decir,  $g(h)$ , que depende solo del incremento y no de  $x$ . Esta característica es fundamental para la definición de la función exponencial, ya que refleja el comportamiento de

crecimiento constante en relación con el incremento  $h$ , independientemente del valor de  $x$ . Es decir  $\frac{f(x+h)}{f(x)} = g(h)$ .

El quinto enfoque matemático que Foti presenta consiste en buscar una función continua cuya tasa de incremento relativo entre  $x$  y  $x + h$  sea independiente de  $x$ . En este caso, se busca una función  $f(x)$  que cumpla con la propiedad de que el cociente  $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$  dependa únicamente de  $h$ , es decir,  $g(h)$ , y no de  $x$ . Este enfoque pone énfasis en la idea de que el cambio relativo de la función en cualquier intervalo  $h$  debe ser constante, una característica clave de la función exponencial. Es decir  $\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)} = g(h)$ .

El sexto enfoque que Foti analiza se basa en buscar una función derivable que modele la evolución de una magnitud cuya tasa de incremento es proporcional a la magnitud misma, es decir, se describe mediante la ecuación diferencial  $y' = ky$ , donde  $y'$  es la derivada de  $y$  respecto a  $x$ , y  $k$  es una constante de proporcionalidad. Este enfoque destaca la relación entre la tasa de cambio de una magnitud y su valor actual, lo que lleva a la definición de la función exponencial como la solución de esta ecuación diferencial, con lo cual se modela un crecimiento continuo y proporcional.

El séptimo enfoque que Foti consigna consiste en ver la función exponencial como una función continua que transforma las sumas en productos, es decir, cumple con la ecuación funcional  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ . Esta relación resalta una propiedad clave de la función exponencial: al sumar dos valores de  $x$  y  $y$ , el valor de la función en  $(x + y)$  es igual al producto de sus valores en  $x$  e  $y$ . Esta característica es fundamental para la construcción de la función exponencial y para su interpretación en términos de crecimiento multiplicativo.

Como observamos, los enfoques identificados por Foti se sitúan en donde las funciones y relaciones se tratan en un contexto ideal continuo, sin interrupciones ni saltos. Esto permite explorar la función exponencial desde un enfoque teórico, destacando propiedades como la continuidad, la derivabilidad y las transformaciones funcionales. No obstante, al operar en este marco ideal, los significados pueden desconectarse de las experiencias reales y dinámicas que los estudiantes tienen con las magnitudes variables, lo que demanda un esfuerzo adicional para vincular estos conceptos con aplicaciones prácticas, donde estas aplicaciones son de naturaleza discreta.

A pesar de esta limitación, cada enfoque proporciona una manera de abordar la función exponencial, resaltando diferentes aspectos esenciales para su comprensión. Desde la extensión de las potencias hasta la resolución de ecuaciones diferenciales, esta diversidad de enfoques ofrece flexibilidad en la enseñanza, permitiendo que los estudiantes accedan al concepto exponencial de acuerdo con su nivel de comprensión y habilidades previas.

#### 2.4.2 Continuo físico vs continuo matemático

La noción de continuo en la modelación de los fenómenos de la realidad es diferente a la modelación matemática, tiene limitaciones. Todos los fenómenos de la realidad material tienen un límite en cuanto a las cantidades que pueden manejarse. Por ejemplo, a escala subatómica, la física clásica deja de ser aplicable, y las leyes de la mecánica cuántica toman su lugar. Además, a escalas cotidianas, la materia está compuesta por unidades discretas: átomos y moléculas. Menos de un átomo o molécula de una sustancia no puede existir.

Un ejemplo simple es el llenado de un recipiente con agua. La cantidad mínima de agua que se puede agregar es una molécula, porque menos de eso implicaría tener dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno separados, lo cual ya no constituye agua, pues no tiene sus propiedades químicas. Aunque, desde un punto de vista práctico, parezca que el llenado es un proceso continuo, en términos matemáticos no lo es, ya que la unidad mínima es una molécula. Modelar este proceso molécula por molécula sería extremadamente complejo, por lo que resulta más conveniente considerarlo como una variación continua en la matemática.

Otro ejemplo es la corriente eléctrica, que es el flujo de electrones en un conductor. Los electrones, al moverse de un átomo a otro, generan dicho flujo. Cada electrón siempre está completo en su desplazamiento. Sin embargo, desde un punto de vista macroscópico, parece que los electrones fluyen continuamente. En realidad, la corriente mínima la genera un solo electrón, ya que no existen “medios” ni “cuartos” de electrón. Aunque la corriente es un fenómeno discreto, debido a que un electrón tiene una carga extremadamente pequeña, no existe instrumento que pueda registrar su movimiento de manera individual. Por ello, el fenómeno se modela como un flujo continuo.

La constante de Planck también ilustra este punto: si intentamos medir distancias menores que esta constante, entramos en el mundo cuántico, donde rigen otras leyes distintas a las de la física clásica. El continuo físico no tiene las mismas propiedades que el continuo matemático. En el continuo matemático, se puede tomar una cantidad y hacerla tan pequeña como se quiera, pero en la realidad física hay límites. Para la distancia, este límite es la constante de Planck. *¿Existen números menores que este valor?* Sí, una infinidad de ellos, todos mayores que cero, pero no tienen una correspondencia física directa.

Un ejemplo adicional es la sal de mesa, que está compuesta de un átomo de sodio y uno de cloro. Separados, el sodio es corrosivo y el cloro es un gas tóxico. Sin embargo, cuando se combinan, forman una molécula de sal (cloruro de sodio), que no tiene las propiedades dañinas de sus componentes individuales. Desde un punto de vista práctico, al igual que no es sencillo detectar una molécula aislada de agua, tampoco es sencillo medir la corriente eléctrica generada por un solo electrón.

A pesar de que la realidad física es discreta, modelar fenómenos como si fueran continuos resulta satisfactorio en términos prácticos, ya que las soluciones obtenidas con modelos matemáticos continuos son suficientemente precisas para resolver problemas reales con un margen de error aceptable. En la matemática se trabaja con un modelo ideal continuo, donde se estudian

fenómenos, se resuelven situaciones, y luego se aplica ese conocimiento a la realidad, donde las soluciones siguen siendo útiles y aplicables.

Este enfoque matemático es posible gracias a la abstracción de la realidad, aun reconociendo que el continuo físico es distinto del continuo matemático. En el continuo físico, hay un límite más allá del cual cambian las reglas y entran en juego otros principios. A pesar de que los fenómenos de la realidad son discretos, el cálculo permite modelarlos como si fueran continuos, lo cual es extremadamente útil.

Retomando los aportes de Castillo-Garsow et al. (2013) sobre las imágenes de variación suave y por porciones, la imagen de variación suave corresponde al continuo matemático, y este enfoque acepta la covariación discreta sin contradicciones. Sin embargo, desde el punto de vista cognitivo, si alguien tiene una imagen mental de covariación discreta, le resultará difícil comprender la modelación a través del continuo matemático, es decir, mediante la abstracción.

En síntesis, la literatura revisada muestra que la comprensión de la covariación exponencial continua enfrenta obstáculos tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Estas dificultades se relacionan principalmente por la falta de imágenes mentales de variación continua y suave, la escasa atención a las magnitudes variables y la prevalencia de enfoques centrados en funciones estáticas, reglas operativas o definiciones formales que poco se vinculan con los procesos dinámicos que modelan los fenómenos exponenciales.

Los estudios revisados evidencian la necesidad de propuestas didácticas que promuevan maneras de entender y pensar variacionalmente, apoyadas en tecnologías que permitan visualizar el cambio en progreso, coordinar magnitudes a cualquier escala y construir significados vinculados con la razón instantánea de cambio, este panorama no solo delimita las bases teóricas para nuestro proyecto, sino que también deja en claro los retos que aún persisten.

Con base en ello, a continuación se presenta la problemática que da origen al presente proyecto de intervención, junto con su justificación y los objetivos que guían el diseño didáctico orientado al desarrollo del pensamiento variacional mediante el estudio de la covariación exponencial continua.

### **3 PROBLEMÁTICA, JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS**

En este apartado se describe la problemática que constituye la base de la intervención planteada en este proyecto. Tal problemática surge de la identificación de diversas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de nociones relacionadas con la covariación exponencial continua. En el aula, su tratamiento suele reducirse a procedimientos mecanizados y estáticos de carácter algorítmico, lo que impide a los estudiantes construir una comprensión profunda de estos conceptos y plasmarlos en situaciones del mundo real. Estas dificultades, descritas en apartados anteriores, nos han motivado a cuestionar por qué los estudiantes presentan obstáculos para comprender y aplicar estas nociones en contextos de la realidad. Frente a este panorama, se hizo necesario examinar críticamente el estado actual de la enseñanza del Cálculo, rama fundamental de las matemáticas que permite estudiar, analizar y modelar fenómenos de variación y cambio.

Específicamente en la formación de los futuros ingenieros, el aprendizaje del Cálculo es una de las áreas fundamentales en su preparación académica, ya que proporciona herramientas poderosas para comprender y abordar los fenómenos de la realidad. Sin embargo, la enseñanza en el currículo universitario evidencia un desajuste entre los objetivos formativos y las necesidades prácticas de estos estudiantes. Por un lado, gran parte de la estructura teórica de los programas de asignatura están diseñados para fomentar el pensamiento lógico y abstracto desde un enfoque formal, característico del Análisis Matemático. Por otro lado, los estudiantes de ingeniería, y en general aquellos que no se especializan en matemáticas, requieren herramientas que les permitan interpretar, modelar y resolver situaciones vinculadas con los procesos físicos y tecnológicos de su campo profesional. Esta discrepancia entre lo que se enseña y lo que se demanda en la práctica genera un escenario conflictivo que afecta la motivación, la permanencia y el rendimiento académico de los estudiantes en los cursos de Cálculo, evidenciando la necesidad de replantear estrategias de aprendizaje que favorezcan una comprensión más cercana a las necesidades de su práctica profesional.

En este sentido, diversos autores han señalado que la enseñanza tradicional limita la comprensión de los conceptos dinámicos del Cálculo. Hace tiempo, Zieldóvich y Yaglóm (1970) plantearon que las matemáticas deben enseñarse en función del propósito que se les quiere otorgar: ya sea formar el pensamiento lógico, preparar para la aprobación de exámenes o, en el caso de los ingenieros, brindar herramientas cognitivas para abordar problemas reales de la tecnología, la ingeniería y el entorno físico. Esta reflexión pone de relieve la necesidad de repensar los propósitos y enfoques de enseñanza del Cálculo, orientándolos hacia las demandas contemporáneas de la formación profesional en ingeniería.

De manera complementaria, Redish y Smith (2008) enfatizan que la formación de los ingenieros debe orientarse al desarrollo de una *experticia adaptativa*, entendida como la capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos de manera flexible a situaciones novedosas, recurriendo a la modelación y la innovación como recursos para la resolución de problemas vinculados a su desarrollo profesional. No obstante, esta visión contrasta con la realidad de los cursos de Cálculo, en los que predomina un enfoque abstracto, formal y riguroso que, en la práctica, dificulta el desarrollo de habilidades de aplicación de ideas y técnicas para comprender los fenómenos con los cuales los estudiantes se enfrentarán en su vida laboral.

### **3.1 El aprendizaje de nociones dinámicas del Cálculo por estudiantes de Ingeniería**

El estudio del Cálculo como herramienta para entender y cuantificar el entorno se constituye como uno de los pilares de aprendizaje en la educación de los futuros ingenieros. Por tanto, resultará crucial que ellos logren desarrollar habilidades para innovar y argumentar de forma adecuada, a fin de solventar las dificultades dentro de sus campos de estudio. Estos jóvenes necesitarán adquirir competencias matemáticas que les permitan comprender, interpretar y reflexionar sobre los fenómenos del mundo real, y plasmarlos en un lenguaje matemático (Capote et al., 2016; Sharhorodska et al., 2018).

Sin embargo, el aprendizaje de esta disciplina aún se ve influenciado por enfoques pedagógicos convencionales y/o tradiciones que priorizan los conceptos abstractos, la memorización de fórmulas y la ejecución de procesos algebraicos formales. En consecuencia, el estudio de funciones numéricas, el cálculo de límites y la aplicación mecánica de reglas de derivación e integración se convierten en los objetos matemáticos principales, relegando el análisis de los fenómenos de variación y cambio que dieron origen al Cálculo. Esta situación se encuentra directamente asociada con los planteamientos curriculares que organizan los programas de estudio y orientan las prácticas docentes.

En la Tabla 1 se muestra el contenido sintético del programa vigente de asignatura para el curso de Cálculo Diferencial e Integral I (6881) de las carreras de Ingeniería que ofrece la Universidad de Sonora (UNISON). Este programa no difiere mucho de otros, y mantiene casi la misma estructura que los libros de texto del Cálculo moderno. En esta dirección, Bianchini et al., (2024) advierten que los textos de Cálculo, en su mayoría, reproducen un enfoque centrado en la promoción de técnicas formales y procedimientos algebraicos, lo que limita el desarrollo de competencias vinculadas con la comprensión dinámica de la variación y el cambio. En el caso particular del tratamiento didáctico de fenómenos de comportamiento exponencial, Khanh et al. (2020), señalan que los libros de texto suelen organizar los contenidos siguiendo un patrón similar al siguiente proceso: primero se introduce la definición formal del concepto, luego se presentan ejemplos, y al final se plantean problemas de aplicación. Este orden provoca que las aplicaciones queden en un segundo o tercer plano, tratadas como problemas finales y no como situaciones centrales de aprendizaje.

En esta organización, tanto en lo macro (programas curriculares) como en lo micro (desarrollo del tema), ha habido una transformación pedagógica en la enseñanza del Cálculo que contrasta con su evolución histórico-epistemológica. En el caso de las nociones exponenciales, esta transformación ha derivado en un distanciamiento respecto a la secuencia temporal que caracteriza el surgimiento y desarrollo de tales nociones matemáticas (Khanh et al., 2020). Mientras que en sus orígenes las ideas de variación fueron el foco central para el desarrollo conceptual, en la práctica educativa actual estas nociones suelen quedar relegadas, cediendo espacio a un énfasis en procedimientos formales que privilegian el dominio técnico por encima de la comprensión dinámica.

Tabla 1 Programa vigente de asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I para Ingeniería

<b>PROGRAMA DE ASIGNATURA</b>	
<b>NOMBRE</b>	(6881) CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
<b>OBJETIVO GENERAL</b>	Analizar problemas relativos a funciones reales de variable real, modelar fenómenos físicos, geométricos y de la Ingeniería, y resolver problemas no matemáticos utilizando conceptos y técnicas del Cálculo Diferencial.
<b>CONTENIDO</b>	
<b>1. Funciones</b>	1.1 Definición, dominio y rango. 1.2 Desigualdades lineales, cuadráticas y con valor absoluto. 1.3 Gráficas de funciones. 1.4 Problemas de

	optimización modelados con funciones cuadráticas. 1.5 Funciones inyectivas, suprayectivas y su caracterización geométrica. 1.6 La función inversa. 1.7 Álgebra de funciones. 1.8 La función composición. 1.9 Funciones polinomiales, racionales, trigonométricas, valor absoluto, exponenciales, logarítmicas.
<b>2. Sucesiones y convergencia</b>	2.1 Definición de sucesión. 2.2 Definición de convergencia de una sucesión. 2.3 Teoremas sobre límites.
<b>3. Límites y continuidad</b>	3.1 Definición de límite de una función en un punto dado, utilizando sucesiones. 3.2 Teoremas sobre límites. 3.3 Límites infinitos, al infinito y asíntotas. 3.4 Definición de continuidad en un conjunto.
<b>4. Derivación</b>	4.1 Introducción al concepto de derivada. 4.3 Reglas de derivación: suma, producto, cociente. 4.4 La regla de la cadena. 4.5 La derivada de la función inversa. 4.6 Derivación implícita. 4.7 Razones de cambio con variables relacionadas. 4.8 Teoremas sobre derivadas. 4.9 Derivadas de orden superior. 4.5 Criterios de máximos y mínimos. 4.6 Monotonía, concavidad, puntos de inflexión. 4.7 Aplicaciones de máximos y mínimos en problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería.
<b>5. Diferenciación</b>	5.1 Introducción al concepto de diferencial. 5.2 Interpretación geométrica del diferencial. 5.3 Aplicaciones del diferencial.

*Fuente:* Elaborada a partir del programa de asignatura proporcionado por el Departamento de Matemática, <https://www.mat.uson.mx/web/index.php/docencia/fi-de-ingenieria/>.

Los temas presentados anteriormente son interesantes desde un punto de vista teórico, pero poco prácticos en la realidad; dificultan la comprensión de conceptos dinámicos como la noción de variación, covariación, razón instantánea de cambio, entre otros (Vasco, 2003; Thompson y Harel, 2021), ya que la mayoría de tales temas, por su formalidad matemática, necesariamente no están ligados con procesos de la realidad. Esta estructura de enseñanza no compensa totalmente el desarrollo de habilidades necesarias para abordar los desafíos que los futuros ingenieros enfrentarán en su carrera profesional, dado que transforma “ideas y conceptos intuitivos y accesibles a la mayoría, en formalismos y teorías inaccesibles y no tan intuitivas” (Jiménez et al., 2022), lo que dificulta a los estudiantes relacionar las herramientas del Cálculo con la vida real.

Para seguir profundizando con esta problemática, a continuación, se ha trazado un camino que nos da un poco más de claridad sobre las acciones educativas que se llevan a cabo actualmente para estudiar los fenómenos de variación y cambio. En especial, para comprender y abordar didácticamente las dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar los fenómenos de comportamiento exponencial y las nociones matemáticas que surgen naturalmente de su estudio.

### **3.1.1 Desconexión entre la teoría y la práctica**

En la enseñanza tradicional del Cálculo se observan ciertas divergencias entre la teoría matemática y su aplicación práctica en ingeniería. Esta situación se debe en gran medida al enfoque formal de enseñanza (Artigue, 1995; Herrera et al., 2024; Salinas y Alanís, 2009), que se centra en la demostración de teoremas, la memorización de fórmulas y ejecución de procedimientos

algebraicos formales, en lugar de fomentar una comprensión profunda de los conceptos dinámicos del Cálculo y su conexión realista.

El concepto de razón instantánea de cambio, por ejemplo, juega un papel crucial en el ámbito del Cálculo aplicado. Según Thompson (1994), “la comprensión de la razón de cambio es una parte fundamental del Cálculo Diferencial que nos permite interpretar de forma matemática la tasa a la que cambian los fenómenos naturales y tecnológicos” (p. 233). A pesar de esto, generalmente se le presenta de manera abstracta a través de la definición formal de límite, mediante la cual se examina cómo se comporta localmente una función. Sin embargo, la idea de límite en sí misma no está vinculada a la representación de una realidad física, y es una abstracción pura sin conexión directa con ella. Aunque la formalización es necesaria para que los futuros matemáticos comprendan los conceptos rigurosamente, muchos estudiantes que no seguirán esta trayectoria profesional encuentran difícil visualizar su aplicación en situaciones reales. Como resultado, perciban estos conceptos como distantes y alejados de la vida cotidiana (García, 2013; Moreno, 2005).

Además, la enseñanza tradicional del Cálculo se centra en resolución mecánica de problemas de manera repetitiva a través del formalismo estipulado. Los estudiantes adquieren habilidades para calcular derivadas y límites mediante la ejecución de reglas y la manipulación de fórmulas, pero a menudo sin comprender el significado abstracto de estos conceptos. Este enfoque promueve un proceso instruccional en el que los estudiantes aprenden a resolver problemas rutinarios, pero no logran capturar el razonamiento detrás de las fórmulas o modelos matemáticos, ni cómo aplicarlos en situaciones reales (Pérez, 2023).

Esta orientación hacia la ejecución mecánica de procedimientos contribuye a la conocida brecha entre teoría y práctica, pues rara vez los estudiantes se enfrentan a problemas que les permitan interpretar y modelar fenómenos reales. El estudio de Valencia y Valenzuela (2017), quienes analizaron los tipos de problemas matemáticos a los que se exponen los estudiantes en libros de texto de Cálculo, proporciona evidencia de esta situación: entre el 65% y el 87% de los ejemplos y ejercicios corresponden a problemas convencionales, caracterizados por estar situados en contextos matemáticos cerrados y que requieren la aplicación directa de fórmulas. En contraste, los problemas que implican modelación matemática, es decir, aquellos que exigen representar fenómenos reales mediante modelos matemáticos, representan apenas entre el 1% y el 2% del total. Esta evidencia subraya la limitada exposición de los estudiantes a situaciones que conecten la teoría matemática con aplicaciones prácticas.

Las implicaciones de esta falta de conexión se hacen evidentes cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones prácticas, como analizar el enfriamiento de un objeto o el flujo de electricidad en un circuito, donde la comprensión profunda del cambio continuo y la modelación son fundamentales para una adecuada solución (Tall, 1991). En tales casos, las definiciones matemáticas convencionales resultan insuficientes para comprender la dinámica de las magnitudes involucradas en los fenómenos observados. Esta desconexión entre la teoría y la práctica crea un vacío en el aprendizaje, que dificulta que los estudiantes logren integrar los conceptos matemáticos

aplicados a situaciones específicas y especialmente en campos como la ingeniería (Bingolbali, 2007).

La formación enfocada en algoritmos y procedimientos hace que sea difícil para los futuros ingenieros emplear el Cálculo de manera efectiva para analizar y resolver problemas en su campo laboral; lo cual limita su habilidad para trasladar el conocimiento teórico y abstracto a situaciones prácticas.

### **3.1.2 Falta de visualización relativa a los fenómenos dinámicos**

Uno de los grandes retos en la enseñanza del Cálculo es la carencia de un enfoque que favorezca la visualización de los fenómenos dinámicos. Tradicionalmente se enseña el Cálculo de manera estática, priorizando las funciones numéricas, las reglas de derivación e integración y los límites, sin establecer conexiones entre estos conceptos y situaciones cotidianas, como se mencionó en la sección previa. Este enfoque centrado en seguir pasos algorítmicos busca encontrar respuestas numéricas, sin fomentar en los estudiantes la habilidad de comprender cómo cambian y se relacionan las magnitudes variables en los fenómenos naturales, ni cómo se conectan entre sí; además, por su naturaleza, los objetos matemáticos que utiliza no siempre están directamente relacionados con una aplicación práctica real.

En el ámbito de la ingeniería se presentan situaciones dinámicas, como el enfriamiento de un objeto o la descarga de un capacitor, que requieren una representación visual para observar cómo varían las magnitudes en relación con el tiempo. Cuando a los estudiantes les falta la oportunidad de visualizar estos cambios dinámicos, les resulta complicado comprender el concepto de razón de cambio y su correlación directa con las variaciones instantáneas de las magnitudes (diferenciales), lo cual dificulta su comprensión y capacidad para modelar el mundo real. La razón instantánea de cambio es un concepto complicado para muchos estudiantes cuando se trata de fenómenos exponenciales. En estos casos, la rapidez varía según el estado actual del sistema y no es constante como en otros casos más simples (Thompson y Harel, 2021).

Según Gatica y Ares (2012), la visualización desempeña un papel crucial en el aprendizaje de conceptos matemáticos dinámicos, ya que una representación gráfica adecuada de un proceso covariacional permite a los estudiantes adquirir una comprensión intuitiva de cómo los valores numéricos de las magnitudes variables cambian efectivamente a lo largo del tiempo o el espacio. Sin embargo, en la enseñanza habitual, los estudiantes suelen aprender a realizar operaciones entre funciones numéricas y crear gráficas sin entender realmente su significado en contextos reales. Esta forma de aprendizaje restringe su capacidad para comprender los fenómenos de la realidad y analizar los conceptos cambiantes que se presentan en esas situaciones prácticas. Además, dado que los valores numéricos empleados en las funciones numéricas se derivan de conjuntos numéricos, carecen de conexión directa con los fenómenos reales que se deberían estudiar.

La complejidad se hace evidente en el campo de la ingeniería ambiental, por ejemplo, al intentar predecir el crecimiento de una población bacteriana en un entorno controlado. Este crecimiento sigue una ley exponencial que se puede expresar mediante el modelo  $P(t) = P_0 e^{rt}$ ,

donde  $P(t)$  representa la cantidad de bacterias en el tiempo  $t$  y  $r$  es la tasa de crecimiento asociada al fenómeno estudiado. A pesar de que este modelo matemático describe adecuadamente el comportamiento del sistema biológico en estudio, suele ocurrir que muchos alumnos se centran únicamente en encontrar la derivada de dichas funciones, sin comprender cabalmente cómo esta noción refleja precisamente la intensidad del crecimiento bacteriano en cualquier momento. La ausencia de representación visual de este crecimiento exponencial mediante gráficos interactivos dificulta la comprensión intuitiva de cómo evoluciona la población a lo largo del tiempo, y cómo se vincula la intensidad de cambio al tamaño de la población (Campo-Meneses y García-García, 2020; Sureda y Otero, 2013).

#### 3.1.3 Comprensión fragmentada del cambio continuo

Además de la falta de conexión entre la teoría y la práctica, en la enseñanza formal del Cálculo surge otro inconveniente relevante: tiende a fomentar un razonamiento fragmentado o por porciones en los estudiantes. En lugar de desarrollar una comprensión profunda sobre cómo aplicar estos procedimientos a la resolución de problemas, se les enseña a resolverlos siguiendo pasos preestablecidos, como si fueran recetas. En contraste, Díaz Godino et al., (2004) señalan que el aprendizaje de las matemáticas deber ser un proceso activo, en el que los estudiantes construyan el conocimiento a partir de sus experiencias previas y de la interacción con nuevos conceptos.

Como consecuencia, la comprensión fragmentada lleva a los estudiantes a centrarse en la ejecución mecánica de los procedimientos y no en reflexionar sobre cómo las magnitudes variables interactúan entre sí en contextos reales, especialmente porque estos temas son tratados al final de los cursos tradicionales de Cálculo (Khanh et al., 2020). En este sentido, Jiménez et al., (2022), enfatizan que los problemas fundamentales que motivaron el desarrollo del Cálculo están vinculados, entre otras situaciones, con la determinación de la razón instantánea de cambio entre dos magnitudes variables y la resolución de problemas de optimización. Por tanto, otorgar mayor relevancia a este tipo de problemas dentro de los cursos de Cálculo podría favorecer una comprensión más integrada y dinámica de los conceptos matemáticos.

En el campo de la ingeniería, los fenómenos frecuentemente involucran múltiples variables que cambian simultáneamente. Por ejemplo, en el análisis de un sistema de control, como el comportamiento de un brazo robótico, por decir alguno, es necesario tener en cuenta factores como la velocidad, la posición y la aceleración, los cuales se encuentran interrelacionados (Ogata, 2010). Los estudiantes que adoptan un razonamiento fragmentado suelen tener dificultades para integrar estas variables en un solo modelo. Cuando los estudiantes se centran en memorizar procedimientos, desarrollan una visión fragmentada de los conceptos (Castillo-Garsow, 2012), lo que impide que perciban la naturaleza continua de los fenómenos y reduce la capacidad de aplicar eficientemente conceptos matemáticos a diferentes problemas.

Un caso clásico, en cursos después del Cálculo Diferencial, es resolver ecuaciones diferenciales; esto implica conectar varias razones de cambio y representarlas de forma dinámica, lo que resulta un desafío para los estudiantes que intentan comprenderlo. Según Vorhölter et al.

(2021), la enseñanza convencional del Cálculo y de la modelación matemática no siempre promueven un enfoque integral. A menudo resulta complicado para los estudiantes establecer relaciones entre los conceptos abstractos y las situaciones prácticas reales, lo que les dificulta abordar de manera sistemática los desafíos y comprender de forma profunda los fenómenos dinámicos. Por ello, introducir un enfoque integral en el salón de clases podría ser más efectivo para fomentar habilidades en el ámbito de la modelación y fomentar la comprensión profunda de dichos fenómenos.

### **3.1.4 Limitaciones del enfoque formal en la comprensión de fenómenos de variación y cambio**

El enfoque convencional y formal, que se centra en el uso de cálculos automatizados, promueve la resolución de ejercicios habituales mediante la aplicación de fórmulas; no obstante, no estimula la comprensión conceptual de los procesos dinámicos en su totalidad. Es posible que los estudiantes adquieran habilidades para calcular derivadas o resolver límites; sin embargo, esto no garantiza que comprendan a cabalidad la naturaleza y significado detrás de tales operaciones, más allá de sus aplicaciones geométricas específicas. La razón instantánea de cambio que está estrechamente vinculada a la intensidad o rapidez de cambio en procesos como el crecimiento de poblaciones o la desintegración radiactiva; es un concepto fundamental que requiere una comprensión intuitiva más profunda a través de otro tratamiento didáctico.

Una crítica fundamental al enfoque tradicional y formal del Cálculo que se imparte actualmente es que el énfasis en el cálculo de límites y derivadas a través de fórmulas no permite a los estudiantes comprender cómo estos conceptos se aplican en situaciones reales. En lugar de facilitar a los estudiantes la comprensión de cómo diferentes magnitudes interactúan en escenarios dinámicos, la enseñanza tradicional se centra mayormente en la memorización de reglas, y como consecuencia directa, los estudiantes tienden a percibir esta disciplina matemática como una tarea mecánica, donde se abordan problemas de forma individual, sin comprender el entorno en el cual los fenómenos tienen lugar.

Desde esta perspectiva, Jiménez et al. (2022) señalan que el principal significado de la derivada para el Cálculo no radica en la pendiente de la recta tangente, como tradicionalmente se ha enseñado, sino en su carácter de razón instantánea de cambio. Sin embargo, la enseñanza formal prioriza interpretaciones geométricas y procedimientos algorítmicos, dejando de lado la construcción de significados relacionados con la variación y covariación continua de magnitudes. Complementariamente, Yu (2019) evidencia que los estudiantes tienden a concebir a la derivada de manera estática y procedimental, la primera hace referencia a un significado centrado en un solo instante o un valor puntual, y de manera procedimental, que hace referencia a la aplicación de reglas algebraicas o de cálculo (como la definición de límite junto con el cociente de diferencias), sin reconocer su naturaleza dinámica ni su vínculo con fenómenos reales. La convergencia de estas perspectivas refuerza la crítica de que el enfoque formal limita el desarrollo de comprensiones

profundas y dinámicas sobre la razón instantánea de cambio, reduciéndola a un proceso técnico desprovisto de significado fenomenológico.

Para Artigue (2009), las estrategias educativas que se centran en la formalización y la rigurosidad matemática pueden confundir a los estudiantes cuando intentan aplicar esos conocimientos en situaciones reales. Al no vincular los conceptos matemáticos a escenarios del mundo real o laboral, los estudiantes tienden a memorizar en lugar de comprender profundamente los problemas, lo que les dificulta adaptarse y resolver problemas reales en el campo de la ingeniería. Kaput (1994) sugiere que “la enseñanza del cálculo diferencial debe ir más allá de algoritmos estáticos, permitiendo que los estudiantes exploren la dinámica de los sistemas a través de la experimentación y la simulación” (p. 110), enfatizando la necesidad de experiencias que conecten conceptos matemáticos con fenómenos dinámicos observables.

En síntesis, la evidencia revisada muestra que el predominio del enfoque formal en la enseñanza del Cálculo limita la comprensión de los fenómenos de variación y cambio, reduce a la derivada y la integral a un procedimiento algorítmico y obstaculiza la construcción de significados relacionados con la dinámica de las magnitudes variables. Estas limitaciones generan un aprendizaje desarticulado, donde los estudiantes adquieren habilidades mecánicas sin desarrollar una comprensión conceptual y aplicable. Por tanto, resulta pertinente plantear un enfoque de enseñanza alternativo, basado en la exploración de la variación y covariación continua, que permita a los estudiantes interpretar y modelar fenómenos dinámicos de manera integral y contextualizada.

## 3.2 Justificación

A partir de lo expuesto en secciones previas, se reconoce una problemática central en el currículo actual para la enseñanza del Cálculo para estudiantes de ingeniería. Dicho currículo se orienta principalmente hacia el tratamiento de conceptos abstractos que son propios del Análisis Matemático, como los números reales, las funciones numéricas, límites, derivadas e integrales, los cuales son fundamentales para la solidez matemática y están ligados a la formalización abstracta. No obstante, este enfoque desplaza a un segundo plano las dos ideas principales del Cálculo que resultan ser esenciales para los ingenieros: que la variación en los fenómenos da lugar a la necesidad de abordarlo mediante conceptos como la razón de cambio y la acumulación, entendidas como herramientas para comprender, modelar y resolver problemas derivados de situaciones prácticas.

Esta orientación del currículo, como señalan diversos estudios, constituye un desafío para que los estudiantes adquieran las habilidades necesarias para aplicar conocimientos en situaciones prácticas relevantes a sus futuras profesiones. Por tal razón, Dray y Manogue (2010) sugieren que la enseñanza del Cálculo debería priorizar la introducción de nociones que capturen su esencia intuitiva, nociones que sean fácilmente comprensibles y coherentes para los estudiantes. Una aproximación de este tipo facilitaría la conexión entre los conceptos matemáticos y su ejecución práctica en la resolución de problemas de ingeniería.

En contraste con la orientación abstracta, resulta esclarecedor recordar los orígenes históricos del pensamiento variacional. Durante la Edad Media, en las escuelas de filosofía de Oxford y París, los pensadores se interesaron por comprender fenómenos de cambio, en especial el movimiento no uniforme, e intentaron describirlos cuantitativamente mediante la noción de “grados de intensidad” de ciertas cualidades como el calor, la iluminación o la velocidad, en relación con el tiempo o el espacio. Posteriormente, Galileo Galilei dio un paso decisivo al estudiar de forma matemática el movimiento no uniforme, introduciendo dos principios básicos de la variación: el de continuidad, según el cual todo objeto en movimiento no uniforme recorre sin interrupciones todos los grados de velocidad posibles; y el de unicidad, que establece que a cada grado de velocidad corresponde un único instante (Crosby, 1998). Estas ideas marcaron un punto de inflexión, pues sentaron las bases para la matematización de la variación continua y, con ello, para el surgimiento del Cálculo Infinitesimal.

Así, el origen histórico del término *variación* está estrechamente ligado a la necesidad de describir matemáticamente magnitudes en cambio continuo y fenómenos dinámicos de la realidad. Newton y Leibniz formalizaron posteriormente estas ideas con el cálculo de variaciones infinitesimales, dando lugar a una nueva manera de pensar que es esencialmente dinámica y continua (Kleiner, 2001).

Con base en esta perspectiva, el presente proyecto sostiene que la enseñanza del Cálculo debe recuperar su carácter práctico y variacional, centrado en el análisis de situaciones reales y en el desarrollo de un pensamiento matemático que permita a los estudiantes comprender y calcular variaciones infinitesimales en magnitudes variables que intervienen en los fenómenos de la realidad.

### **3.2.1 Necesidad de un enfoque de carácter variacional y práctico**

Para comprender los desafíos actuales en la enseñanza del Cálculo resulta imprescindible examinar de manera crítica no solo las investigaciones académicas y los planes de estudio vigentes, sino también el contexto histórico y educativo en que esta disciplina se gestó. Este análisis permite reconocer que el Cálculo no fue concebido como un cuerpo abstracto destinado a complicar la labor de los científicos, sino como una herramienta matemática para dar respuesta a problemas prácticos vinculados con la variación y los fenómenos dinámicos de la naturaleza.

Sin embargo, en gran parte de los enfoques curriculares contemporáneos, así como en numerosos textos de Cálculo, se ha diluido el sentido original de esta rama de las matemáticas. El término mismo de *Cálculo* muchas veces se conserva más por tradición que por su asociación con los problemas reales que le dieron origen. Esta desvinculación entre el propósito histórico y la práctica educativa actual contribuye a que los estudiantes perciban el Cálculo como un conjunto de técnicas abstractas, más cercano a la manipulación algebraica que a la comprensión profunda de fenómenos de cambio.

Quizás el problema de la identidad del Cálculo surgió a medida que esta disciplina evolucionaba hasta convertirse en la materia que es hoy en día, debido a las diversas perspectivas

que han surgido a lo largo de los años. Esta diversidad de enfoques ha generado en confusión los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que cada libro o curso adopta posturas distintas y no siempre queda claro cuáles son los elementos realmente fundamentales para comprender el Cálculo. En muchos casos se suele confundir el Cálculo y el Análisis Matemático, causando desconcierto entre estudiantes y profesores por igual. A pesar de esto, es claro que comprender los conceptos dinámicos del Cálculo requiere que los estudiantes desarrollen un pensamiento variacional. Sin embargo, como advertía Vasco (2003), aún persiste la falta de claridad sobre qué es pensamiento variacional y sobre todo como promoverlo en la enseñanza. Esto ha dado lugar a dificultades tanto teóricas; en la comunicación entre investigadores y en la delimitación del objeto de estudio (¿estamos o no hablando de lo mismo?, ¿estamos investigando la misma fenomenología?), como prácticas; en el diseño e implementación de propuestas en el aula (¿estamos o no proponiendo realizaciones didácticas análogas o compatibles?).

De manera simplificada, pueden reconocerse dos interpretaciones teóricas del pensamiento variacional. Por un lado, aquellas que lo conciben como el tipo de pensamiento matemático orientado al estudio y la matematización de las magnitudes variables que intervienen en fenómenos de la realidad, sea esta física o social. En este caso, las propuestas didácticas se centran en introducir el concepto de magnitud física y, en consecuencia, matematizar su comportamiento utilizando como modelo matemático la noción de magnitud variable. Por otro lado, se encuentran las posturas que asocian el pensamiento variacional con el estudio de las variables y funciones como objetos abstractos, y asumen que el núcleo de las realizaciones didácticas para el desarrollo de este tipo de pensamiento reside en el estudio de las funciones y sus propiedades, a partir de una definición formal. Bajo esta perspectiva, los fenómenos de la realidad (y con ellos, las magnitudes variables) quedan en un segundo o tercer plano, utilizados solo como simples ejemplos ilustrativos o aplicaciones de las funciones.

Frente a esta tensión, Jiménez et al. (2022), subrayan que “el objeto de estudio del Cálculo no son las funciones, sino las magnitudes variables. Las funciones son uno de los principales objetos de estudio del Análisis Matemático”. La noción fundamental del Cálculo Diferencial no es la derivada ni el límite, es el *diferencial*, que representa una diferencia o variación infinitesimal entre los valores numéricos de una magnitud variable (Ely, 2021; Jiménez et al., 2022). Esta distinción es fundamental para orientar la enseñanza hacia un enfoque más intuitivo y dinámico, centrado en el análisis de magnitudes variables y sus variaciones continuas e infinitesimales, en lugar de reducirlas al estudio formal de los límites y las funciones numéricas.

Adoptar un enfoque variacional anclado al dinamismo de las magnitudes variables permitiría a los estudiantes reflexionar sobre la aplicación de los conceptos matemáticos y su relación con fenómenos reales, promoviendo así un aprendizaje más conectado con la realidad. Ello implica que, en lugar de centrarse en las manipulaciones algebraicas formales, los estudiantes deben aprender a analizar cómo los valores numéricos de las magnitudes variables cambian a lo largo del tiempo o con respecto a otras magnitudes, cómo se relacionan entre sí y cómo pueden modelarse en términos de relaciones cuantitativas y dinámicas.

Este enfoque no necesariamente se relaciona de manera directa con la aplicación de reglas de derivación y límites, porque estas nociones requieren el trabajo matemático sobre funciones numéricas. Sí debe integrar la variedad de representaciones (numéricas, gráficas y algebraicas, entre otras) que utiliza el Cálculo para analizar y modelar el comportamiento de las magnitudes variables y así permitir a los estudiantes visualizar cómo tales magnitudes varían (Jiménez et al., 2022). Además, a través de herramientas como simulaciones, gráficos interactivos y otras, los estudiantes pueden observar en tiempo real cómo cambian las magnitudes variables involucradas en los fenómenos concretos, como por ejemplo la purificación de combustibles o el restablecimiento del ritmo cardíaco, y comprender la esencia y el significado dinámico de la razón instantánea de cambio a partir del análisis de los diferenciales de las magnitudes variables.

De este modo, resulta crucial que los estudiantes puedan elaborar y validar modelos matemáticos que describan cuantitativamente fenómenos dinámicos. La capacidad de modelar y analizar tales fenómenos y aplicar ideas variacionales es una destreza fundamental para los ingenieros, quienes en su ejercicio profesional deben predecir, controlar y optimizar el comportamiento de sistemas complejos.

Por tanto, integrar la enseñanza del Cálculo bajo un enfoque de carácter variacional y práctico se convierte en una necesidad. Este tipo de aproximación posibilita que los estudiantes comprendan cómo cambian las magnitudes variables en el tiempo, que visualicen dichas variaciones a través de diferentes representaciones, y que modelen fenómenos reales con mayor pertinencia. Un enfoque de esta naturaleza no solo fortalece la comprensión de conceptos como la covariación o la razón instantánea de cambio, sino que también potencia el desarrollo de habilidades de modelación matemática que son fundamentales en el campo de la ingeniería (Capote et al., 2016; Jiménez et al., 2022; Sharhorodska et al., 2018).

### **3.2.2 Las cantidades infinitesimales como puente entre el mundo real y el mundo ideal**

En el presente proyecto interesa promover que los estudiantes desarrollen un conjunto de ideas matemáticas que les permitan conectar el arsenal del Cálculo con la realidad al modelarla. De tal forma que el estudiante pueda ver el conocimiento matemático como parte y producto de una modelación o una idealización del mundo real.

Sin embargo, como se ha venido reiterando, uno de desafíos que enfrentan los estudiantes de ingeniería es comprender cómo los conceptos abstractos de las matemáticas emergen de los fenómenos reales, y permiten modelarlos, sobre todo aquellos que se relacionan con su campo profesional. En particular, las herramientas intuitivas proporcionadas por el Cálculo primigenio, entre ellas las cantidades infinitesimales, juegan un papel crucial al conectar el mundo real, representado por fenómenos físicos, con el mundo ideal o abstracto de las matemáticas.

El Cálculo Infinitesimal, que se enfoca en el uso de cantidades infinitesimales (es decir valores extremadamente pequeños, pero no nulos, y valores extremadamente grandes), actúa como un puente entre el continuo físico (el mundo real en el que los ingenieros aplican sus conocimientos) y el continuo matemático (el mundo ideal de las matemáticas). Esta distinción entre

ambos “continuos” resulta crucial para comprender la relación existente entre las matemáticas y los fenómenos físicos (ver Figura 4).

El continuo físico que experimentamos se manifiesta de forma fragmentada o discreta, modelarlo como si fuera continuo resulta satisfactorio en términos prácticos. Por ejemplo, en la realidad muchos fenómenos como el movimiento de fluidos, la propagación del calor o la deformación de materiales son aparentemente continuos, en la práctica solo podemos medir ciertos momentos discretos de esos fenómenos, debido a las limitaciones tecnológicas y de precisión. Esto implica que, en muchos casos, las cantidades involucradas en estos fenómenos son infinitamente pequeñas, es decir, están fragmentados en función de los sistemas de medición y observación disponibles.

Por el contrario, el continuo matemático es representado de forma idealizada. Las funciones matemáticas y los modelos de cálculo asumen que los números forman un continuo, esto significa que cualquier pequeña variación en una cantidad puede ser descrita de manera infinitamente amplificable y sin interrupción alguna. Usando la abstracción matemática podemos describir estos cambios de forma precisa y sin las limitaciones propias del mundo físico.

A pesar de que la realidad física se considera discreta en su naturaleza fundamentalmente cuántica, resulta práctico modelar los fenómenos como si fueran continuos, a fin de obtener soluciones que sean lo suficientemente precisas y efectivas en la resolución de problemas reales, dentro de un margen de error aceptable en el mundo real. En el ámbito matemático se suele trabajar utilizando un modelo ideal continuo bajo el cual son estudiados los fenómenos, y se resuelven las situaciones planteadas, dando lugar a un conocimiento que puede ser aplicado a la vida real de manera efectiva.

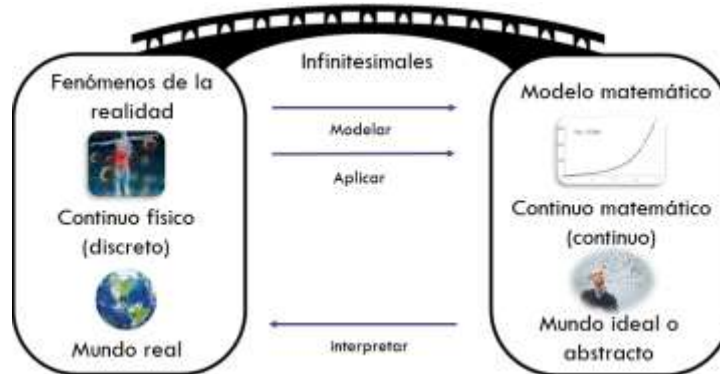


Figura 4 Versión propia del proceso de modelación

Este enfoque matemático es viable gracias a la abstracción de la realidad; aunque sabemos que el continuo físico difiere del continuo matemático. En el continuo físico existe un punto crítico en el que las normativas cambian y entran en acción otras reglas. Aunque los fenómenos de la vida real son discretos, la abstracción matemática permite modelarlos como si fueran continuos, lo cual resulta extremadamente útil.

En este proyecto se retoman los hallazgos de Castillo-Garsow et al., (2013), referentes a las imágenes de variación suave y por porciones o fragmentada; la imagen de variación suave corresponde al continuo matemático y este enfoque acepta la covariación discreta sin conflictos aparentes en términos cognitivos. Sin embargo y desde una perspectiva cognitiva, aquellos estudiantes que se forman una representación mental de covariación discreta encontrarán difícil comprender la modelación a través del continuo matemático, es decir, mediante la abstracción.

Tomaremos entonces a las cantidades infinitamente pequeñas como el puente entre estos dos continuos, descritos como el mundo real y el mundo abstracto o ideal. Al hacer uso de cantidades muy pequeñas, el acercamiento al continuo matemático no es total porque este continuo es infinitamente amplificable, llega un momento cuando el valor de  $dx$ , se mantiene fijo, muy pequeña pero fijo, y en realidad lo que los diferenciales modelan es una variación con saltos infinitesimales tal que, si se retira el zoom, en términos de Ely y Ellis (2018), aparecen como continuos. En este sentido, el aparato de las cantidades infinitesimales está a medio camino entre la realidad que es discreta y el continuo matemático que es un continuo infinitamente amplificable. Sí hay brincos, pero son muy pequeños, a tal grado que se puede apreciar como si el fenómeno fuera continuo.

### **3.2.3 El uso de la tecnología como herramienta para comprender fenómenos variacionales**

La incorporación de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas no puede entenderse como un mero accesorio moderno, sino como un medio que posibilita nuevas formas de interacción con los conceptos matemáticos y los fenómenos de la realidad. En el contexto de este proyecto, la tecnología desempeña un papel importante como recurso complementario que favorece el pensar y actuar matemáticamente. Su incorporación didáctica tiene la finalidad de ofrecer retroalimentación inmediata a las tareas de los estudiantes y de potenciar su proceso de aprendizaje.

Ahora bien, es importante reconocer que las herramientas tecnológicas permiten una presentación dinámica de información, pero este dinamismo no debe confundirse con la mentalidad dinámica que caracteriza al pensamiento variacional. Mientras que la primera se refiere a la capacidad técnica de mostrar transformaciones gráficas o animaciones, lo segundo implica una disposición cognitiva para comprender y modelar la variación y el cambio continuo y conjunto de magnitudes variables presentes en los procesos de la realidad. Por tanto, la tecnología no constituye un fin en sí mismo, sino un medio para estimular procesos de construcción de significado.

En este sentido, Arzarello (2019), a través de su propuesta de covariación instrumentada, subraya que los artefactos tecnológicos no deben ser considerados únicamente como medios de representación, sino como instrumentos que amplifican y hacen visibles las características matemáticas de los fenómenos. A diferencia de un enfoque basado en funciones estáticas y conjuntistas, el uso de entornos de geometría dinámica y de herramientas tecnológicas permite que los estudiantes interactúen con magnitudes en transformación, favoreciendo así la construcción de imágenes variacionales.

Además, Arzarello también advierte que no todas las aulas de clases cuentan con tecnología de punta, lo cual exige repensar la manera en que se articulan los recursos didácticos. De ahí su propuesta de enfatizar la combinación de artefactos tradicionales (pizarrón, manipulables) con recursos modernos (software, simulaciones, videos). En sus estudios muestra evidencia de que la integración orgánica de recursos tradicionales y digitales conduce a un aprendizaje más profundo, que el uso exclusivo de herramientas modernas.

Siguiendo estas consideraciones, el presente proyecto propone un uso intencional y planificado de distintos recursos tecnológicos y manipulativos que permiten a los estudiantes visualizar, explorar y analizar fenómenos de variación de manera interactiva. Estos recursos, que se detallan en la Tabla 2, están orientados a la construcción de nociones dinámicas de la covariación y a la formación de imágenes variacionales que serán esenciales para el desarrollo y fortalecimiento del pensamiento variacional.

Tabla 2 Recursos tecnológicos que se esperan utilizar en el proyecto

Recursos tecnológicos	Descripción	Relevancia en el aprendizaje
<b>Material manipulable</b>	Artefactos físicos que permiten representar situaciones dinámicas de manera tangible.	Facilitan el tránsito de lo concreto a lo abstracto y promueven conexiones cognitivas con los artefactos digitales.
<b>GeoGebra</b>	Software matemático interactivo que permite el diseño de gráficos dinámicos y manipulación en tiempo real de parámetros mediante applets.	Favorece la exploración y visualización de conceptos matemáticos, promoviendo un aprendizaje personalizado y el desarrollo de ideas variacionales. Permite a los estudiantes interactuar con magnitudes variables y generar y fortalecer imágenes dinámicas.
<b>Videoclips</b>	Recurso audiovisual singular que presenta fenómenos reales, permite su análisis en un entorno seguro y controlado.	Facilita la comprensión mediante la visualización repetida de fenómenos. Evita accidentes, errores asociados a la experimentación directa y permite un análisis detallado de situaciones dinámicas.

En síntesis, el uso didáctico de la tecnología en este proyecto no se reduce a una modernización superficial de la enseñanza del Cálculo. Por el contrario, responde a la necesidad de generar experiencias de aprendizaje que acerquen a los estudiantes a la esencia del pensamiento variacional: la comprensión del cambio continuo y de la interdependencia entre magnitudes variables. Así, la tecnología se concibe como un medio para articular lo visual, lo dinámico y lo conceptual, reforzando la pertinencia de la intervención propuesta en este proyecto y su potencial

para transformar la manera en que los estudiantes de ingeniería se apropian de los conceptos fundamentales del Cálculo.

A raíz de lo mencionado anteriormente, y debido a la escasez en la literatura revisada de trabajos que abordan el desarrollo de imágenes, ideas y herramientas variacionales, se considera necesario elaborar un diseño de enseñanza destinado a promover el desarrollo y fortalecimiento del pensamiento variacional en los estudiantes durante el estudio de fenómenos de comportamiento exponencial. Por lo tanto, nos planteamos los siguientes objetivos.

### 3.3 Objetivos

Considerando la problemática y justificación presentados previamente, se formulan a continuación los objetivos que servirán de orientación para el proyecto de intervención.

#### 3.3.1 Objetivo general

*Diseñar y validar una propuesta de actividades didácticas para el estudio de la covariación exponencial continua orientada al desarrollo del pensamiento variacional por estudiantes del curso de “Cálculo Diferencial e Integral” en el área de ingeniería.*

Con el fin de lograr este objetivo general, se plantean los siguientes **objetivos específicos**:

- OE1.** Precisar la nomenclatura y caracterización de las maneras variacionales de entender involucradas en la covariación exponencial continua.
- OE2.** Identificar, seleccionar y/o adaptar fenómenos de la realidad de diferentes contextos relacionados con la covariación exponencial que se modelan como si fueran continuos, que sean relevantes para los estudiantes y abordables con sus conocimientos previos.
- OE3.** Incorporar recursos tecnológicos digitales, como applets de simulaciones y representaciones geométricas dinámicas, entre otros, que faciliten la visualización y comprensión de las propiedades cuantitativas de los fenómenos de covariación seleccionados.
- OE4.** Valorar la pertinencia de la propuesta didáctica mediante el logro alcanzado de desarrollo del pensamiento variacional por los estudiantes.

En este apartado hemos identificado una problemática asociada al análisis matemático de los fenómenos de covariación exponencial continua. Parece que esta problemática tiene como fuente de sus dificultades el enfoque didáctico predominante en la enseñanza del Cálculo, que en términos generales privilegia el estudio de conceptos propios del Análisis Matemático, y de manera particular, centra su atención en el estudio de las funciones exponenciales, en lugar de los propios fenómenos de covariación exponencial. En nuestra opinión, el estudio matemático de las funciones no tiene mucho que ver con el pensamiento variacional, a diferencia del estudio de los fenómenos de covariación exponencial, que requiere inherentemente un tipo de pensamiento variacional.

Después de un análisis y una discusión exhaustiva en este proyecto, hemos llegado a la conclusión de que la visión actual utilizada para fomentar el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes no es propicia para favorecer este tipo de pensamiento matemático, y hemos

optado por una perspectiva diferente. Los detalles de esta discusión se abordan en el apartado de elementos teóricos. A continuación, se presentarán las características de la propuesta de intervención, tomando como base los objetivos enunciados en este apartado.

## 4 LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

La propuesta que se espera desarrollar en este proyecto se centra en el diseño, implementación y validación de una serie de actividades didácticas orientadas a atender las dificultades previamente descritas sobre la enseñanza del Cálculo Diferencial, específicamente en el aprendizaje de la covariación exponencial continua.

Esta propuesta está dirigida a estudiantes de ingeniería de la UNISON que cursan la materia de Cálculo Diferencial e Integral I, con el objetivo de promover un enfoque de enseñanza de carácter variacional y práctico mediante el análisis de magnitudes variables y el uso de cantidades infinitesimales. Se busca que los estudiantes comprendan cómo dos magnitudes varían conjuntamente en fenómenos de comportamiento exponencial y desarrollen la capacidad de modelar matemáticamente las relaciones cuantitativas a las que dichas magnitudes están sujetas.

El sustento teórico de la propuesta se apoya en el Modelo de Enseñanza de las Matemáticas basado en DNR (Harel, 2008), con especial atención a la concreción de nociones variacionales adaptadas a este proyecto, así como en el estudio de fenómenos reales como el punto de partida para la construcción de conceptos matemáticos. A continuación se presentarán más detalles.

### 4.1 Características generales

- Título de la propuesta: “Propuesta de enseñanza de la covariación exponencial continua bajo el enfoque del pensamiento variacional”
- La propuesta está dirigida a estudiantes del área de ingeniería de la Universidad de Sonora que estén cursando la materia de primer semestre: Cálculo Diferencial e Integral I.
- El sustento teórico tiene que ver con las herramientas del Modelo de Enseñanza de las Matemáticas basada en DNR de Harel (2008), adaptado hacia la concreción del pensamiento matemático de tipo variacional por los autores de este proyecto.
- Se propone un uso estratégico de recursos tecnológicos que apoyan el aprendizaje de nociones ligadas con la variación y covariación. Entre ellos: materiales manipulables, permiten el tránsito de lo concreto a lo abstracto; GeoGebra ofrece un espacio interactivo para visualizar y experimentar con las magnitudes variables y construir representaciones dinámicas; y los videoclips facilitan la observación segura y repetida de situaciones dinámicas del mundo real, evitando las limitaciones prácticas de la experimentación directa.

### 4.2 Características específicas

- La intención principal de nuestro trabajo es desarrollar un acercamiento didáctico para la enseñanza del Cálculo Diferencial dirigido a estudiantes de ingeniería, desde una perspectiva variacional y dinámica mediante el uso de cantidades infinitesimales.

- El núcleo del proyecto se centra en abordar las dificultades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con la covariación exponencial continua, promoviendo que los estudiantes comprendan su carácter dinámico en lugar de reducirla al uso de reglas de cálculo.
- La propuesta didáctica se organizará en una serie de actividades cuidadosamente diseñadas y/o adaptadas, partiendo del estudio de fenómenos dinámicos o en contextos de la ingeniería, para posteriormente que desarrollen ideas matemáticas relacionadas con la covariación exponencial continua.
- El proceso de enseñanza y aprendizaje se concibe de lo concreto a lo abstracto: primero se analizan fenómenos que presentan un comportamiento exponencial, identificando sus propiedades cuantitativas esenciales de variación, y luego se formaliza dicho análisis en el modelo matemático de la función exponencial. De esta manera, la función no se introduce como un objeto aislado, sino como una de las posibles representaciones de la covariación entre magnitudes variables en fenómenos reales.

#### **4.2.1 Propósitos generales de la propuesta didáctica**

- Formar en los estudiantes una imagen adecuada de la covariación continua y suave, que les permita comprender, razonar y representar de manera dinámica la relación entre magnitudes que varían conjuntamente en fenómenos de cambio.
- Promover la apropiación del lenguaje y de las herramientas propias del pensamiento variacional, a fin de que los estudiantes logren matematizar y comprender el comportamiento de las magnitudes variables en diferentes contextos.
- Favorecer el desarrollo de maneras variacionales de pensar, enmarcadas en el estudio de la covariación exponencial continua, con el propósito de fortalecer la capacidad de los estudiantes para analizar procesos dinámicos.
- Preparar a los estudiantes con herramientas cognitivas que les permitan interpretar a la expresión analítica exponencial como modelo de la covariación exponencial continua, partiendo de situaciones realistas que los conduzcan a construir y validar modelos matemáticos vinculados con fenómenos de la realidad.

### **4.3 Características del tema matemático de interés**

El tema matemático que constituye el eje de esta propuesta es la covariación exponencial continua, abordada desde nociones dinámicas centrales como la razón de cambio promedio y la razón instantánea de cambio. Estos conceptos permiten comprender cómo se modifican dos magnitudes que varían conjuntamente en fenómenos que presentan un comportamiento exponencial, superando la visión estática y meramente algorítmica que predomina en la enseñanza tradicional.

Para estudiantes de ingeniería, el estudio de estas nociones resulta fundamental, pues les posibilita apropiarse de las herramientas que el Cálculo Diferencial ofrece para analizar, modelar e interpretar situaciones en su campo profesional. En este sentido, fenómenos como la eliminación de contaminantes, la desintegración radiactiva, la depreciación de activos o el crecimiento poblacional pueden ser comprendidos de manera más profunda al analizar las tasas de cambio que

subyacen en su comportamiento. De este modo, el estudio de la razón de cambio promedio y de la razón de cambio instantánea en contextos exponenciales brinda un escenario que favorece el desarrollo del pensamiento variacional y la construcción de modelos matemáticos vinculados con la realidad ingenieril.

De este modo, el estudio de la covariación exponencial continua no se limita a procedimientos algorítmicos, sino que requiere un lenguaje variacional que permita interpretar, expresar y comunicar las relaciones cuantitativas dinámicas entre magnitudes variables. La siguiente sección describe algunas de las características de este lenguaje y su papel en el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes de ingeniería.

#### **4.4 Características del lenguaje variacional a promover en la propuesta de enseñanza**

El lenguaje variacional constituye un recurso fundamental para la comprensión matemática por los estudiantes, ya que permite formular descripciones dinámicas precisas sobre el comportamiento de magnitudes variables. Este lenguaje no solo facilita la comunicación de ideas, sino que también habilita la utilización de herramientas variacionales, que permiten comprender de qué manera una magnitud variable puede cambiar, ya que es esencial determinar el grado y la naturaleza de ese cambio, lo que implica cuantificarlo. Su promoción en el aula brinda la posibilidad de emplear la notación funcional como representación analítica para expresar matemáticamente las relaciones covariacionales entre magnitudes variables, con el propósito de traducir situaciones de cambio matemáticamente.

En el contexto de esta presentación, se describirá un primer acercamiento al significado de la derivada desde un enfoque variacional, distinto a su significado geométrico, es decir, el de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto. En el estudio y matematización de las magnitudes covariantes, el significado de la derivada emerge de manera natural del comportamiento de las magnitudes, y se articula en torno a tres ideas íntimamente relacionadas: rapidez promedio, densidad promedio y razón promedio.

Los fenómenos de comportamiento exponencial son situaciones covariacionales no uniformes, por lo que la primera y más sencilla herramienta matemática que desarrolla el Cálculo para describir dicha situación lo constituyen los cambios promedio o razones promedio de cambio  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . De forma general, para cualquier proceso de variación: la razón promedio de cambio de una magnitud variable dependiente, con respecto al incremento uniforme de su variable independiente, es la razón constante de cambio de un proceso uniforme imaginario (ideal) que permitiría pasar del estado inicial al estado final del proceso real no uniforme.

En el caso particular de una magnitud de comportamiento exponencial, la razón promedio de cambio relativa, para incrementos iguales de la magnitud variable independiente, es igual a una constante numérica no nula. Algebraicamente, si consideramos el modelo de covariación exponencial:

$$x(t) = Ae^{kt}, \text{ con:}$$

$t$  es el valor actual de la magnitud variable independiente.

$x$  es el valor actual de la magnitud variable dependiente.

$x(t)$  es la representación algebraica del valor actual de la magnitud variable dependiente, en la notación de funciones.

La razón promedio de cambio relativa en el intervalo actual  $\Delta t$  se expresa como:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{Ae^{k(t+\Delta t)} - Ae^{kt}}{\Delta t}.$$

La expresión:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Ae^{k(t+\Delta t)} - Ae^{kt}}{\Delta t},$$

Representa la razón de cambio promedio de la magnitud variable  $x$  en el intervalo actual  $\Delta t$ , donde  $\Delta t$  es el incremento de  $t$ .

Propiedad de la covariación exponencial:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Ae^{k(t+\Delta t)} - Ae^{kt}}{\Delta t},$$

Factorizamos  $Ae^{kt}$ :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Ae^{k(t+\Delta t)} - Ae^{kt}}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Ae^{kt+k\Delta t} - Ae^{kt}}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Ae^{kt}e^{k\Delta t} - Ae^{kt}}{\Delta t},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{Ae^{kt}(e^{k\Delta t} - 1)}{\Delta t}.$$

Vemos que la razón promedio de cambio relativa depende de:

$Ae^{kt}$  : el valor actual de la magnitud variable dependiente.

$e^{k\Delta t} - 1$  : un factor que depende solo de  $k$  y del incremento  $\Delta t$ .

Esto significa que:

- La magnitud variable dependiente no cambia de manera uniforme como el caso lineal.
- Los incrementos iguales en la variable independiente generan cambios proporcionales en la variable dependiente.
- El cambio es multiplicativo y no aditivo, lo que explica el comportamiento característico de fenómenos de esta naturaleza.

### Interpretación variacional de la razón de cambio promedio relativa

La razón de cambio promedio mide cómo cambia la magnitud  $x$  cuando la magnitud variable independiente  $t$  se incrementa en  $\Delta t$ .

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = Ae^{kt} \cdot \frac{(e^{k\Delta t} - 1)}{\Delta t}.$$

- El cambio depende del valor actual de la magnitud variable dependiente y del incremento  $\Delta t$ , pero siempre mantiene una proporción constante relativa a  $x$ .
- La magnitud variable dependiente cambia en proporción a su valor actual. Esto significa que para cada incremento igual en la magnitud variable independiente  $t$ , la magnitud variable dependiente  $x$  aumenta en la misma proporción con respecto a su estado actual.
- La razón de cambio promedio relativa solo depende de  $\Delta t$ , no de  $t$ . El término  $\frac{(e^{k\Delta t} - 1)}{\Delta t}$  es constante si  $\Delta t$  es fijo.

Esta interpretación variacional de la razón de cambio promedio relativa permite que los estudiantes comprendan que, para cada incremento igual en la magnitud independiente  $t$ , la magnitud dependiente  $x$  aumenta proporcionalmente a su estado actual, capturando así la esencia de los fenómenos de covariación exponencial continua.

En conclusión, la promoción de un lenguaje variacional y herramientas variacionales dentro de esta propuesta no solo facilitará la comprensión de nociones fundamentales del Cálculo Diferencial, sino que también preparará a los estudiantes a modelar fenómenos reales de manera dinámica y precisa. El enfoque permite trascender la manipulación algebraica y fomenta la construcción de imágenes mentales e interpretaciones cuantitativas sobre variaciones infinitesimales, constituyendo un pilar central para el desarrollo del pensamiento variacional en ingeniería.

En el siguiente apartado se desarrollan los aspectos teóricos que sustentan este proyecto de intervención, con el propósito de clarificar las nociones, enfoques y fundamentos que orientan el estudio de la covariación exponencial continua y el desarrollo del pensamiento variacional. En él se articulan las perspectivas conceptuales sobre las maneras de entender y las maneras de pensar, los principios que guían el diseño de tareas matemáticas y tecnológicas, así como los elementos cognitivos implicados en la coordinación de magnitudes variables. Este marco no solo organiza las ideas que fundamentan la propuesta didáctica, sino que también ofrece los criterios necesarios para analizar los procesos de aprendizaje y justificar las decisiones metodológicas adaptadas en el proyecto.

## 5 MARCO TEÓRICO Y EXPLICATIVO

En este apartado se presentan las consideraciones teóricas que a nuestro criterio son compatibles con los objetivos del proyecto. Tales consideraciones se fundamentan, en primer lugar, en las reflexiones realizadas por Guershon Harel (2008, 2008a, 2008b) en torno a la caracterización pedagógica del conocimiento matemático. El autor establece una concepción pragmática del término “pensamiento matemático” y propone una estructuración fundamental de la enseñanza de las matemáticas a la que denomina “enseñanza basada en DNR”, la cual orienta la comprensión del aprendizaje matemático desde una perspectiva cognitiva y didáctica.

En segundo lugar, se incorpora un análisis de la literatura especializada en el área, con la intención de establecer una interpretación y caracterización, coherente con su surgimiento y evolución, de la manera matemática de pensar denominada “pensamiento variacional”.

Estos aspectos nos permiten reconocer y establecer constructos teóricos y metodológicos que ofrecen directrices para favorecer el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático por parte de los estudiantes, especialmente en contextos donde la comprensión de la variación y covariación constituye un eje central de aprendizaje.

A partir de las consideraciones previas, el presente marco local, denominado *Marco Teórico y Explicativo para el desarrollo del pensamiento variacional*, se organiza en tres componentes:

- Componente 1: La visión del pensamiento matemático según Guershon Harel
- Componente 2: Un enfoque del pensamiento variacional
- Componente 3: Una estructura operativa que define las implicaciones metodológico-didácticas para el desarrollo del pensamiento variacional

Con la finalidad de complementar y fortalecer las herramientas de diseño de tareas de aprendizaje para promover el desarrollo del pensamiento variacional por los estudiantes, se consideran dos subcomponentes esenciales que concretan la dimensión operativa de este marco: los principios de diseño de tareas matemáticas (Barzel et al., 2013) y los principios de diseño de tareas tecnológicas (Swidan et al., 2019).

Por lo tanto, a fin de contextualizar los componentes que integran este marco teórico y explicativo, resulta pertinente iniciar con una reflexión sobre el significado del término *pensamiento matemático*. Dado que el desarrollo del pensamiento variacional se concibe en este trabajo como una forma particular de dicho pensamiento, es necesario esclarecer primero qué se entiende por él. Comprender cómo se ha concebido este término en la literatura educativa permite situar con mayor precisión el sentido de los aspectos teóricos que sustentan este proyecto y, al mismo tiempo, fundamentar la elección del enfoque adoptado en este estudio.

### **Introducción**

El término “pensamiento matemático” ha sido utilizado de diferentes maneras en el ámbito educativo y académico, por ejemplo, algunos autores lo utilizan como sinónimo de “cultura

matemática”. Desde este punto de vista, los docentes (especialmente en educación básica) probablemente asuman que fomentar el pensamiento matemático implica únicamente ampliar el conocimiento sobre conceptos y resultados de la disciplina. Otra parte de los docentes lo identifican como pensamiento lógico, entendiendo que su desarrollo consiste en enseñar a los estudiantes a razonar. Sin embargo, esta interpretación es limitada, ya que el pensamiento lógico no es exclusivo de la matemática y no abarca toda la complejidad del pensamiento matemático.

El pensamiento lógico se centra en el uso correcto del lenguaje y en la coherencia de las expresiones, lo que influye en la capacidad de los estudiantes para comprender ideas matemáticas. Sin embargo, el pensamiento matemático va más allá de la lógica y se manifiesta en múltiples situaciones de la actividad humana, lo que justifica su presencia como asignatura obligatoria en la educación básica.

A pesar de la importancia del concepto, no existe una definición clara y ampliamente aceptada de pensamiento matemático. Se han propuesto algunas descripciones, como aquella que lo vincula más con la actividad matemática que con la memorización de fórmulas y procedimientos. También se ha diferenciado entre el pensamiento matemático elemental (relacionado con la educación preuniversitaria) y el pensamiento matemático avanzado (propio del nivel universitario y de posgrado). En cambio, estudios como los de Selden y Selden (2013) y Sternberg (1996) han señalado la ambigüedad del término, y revisiones recientes, como la de Van Schendel (2019), concluyen que no se ha logrado establecer una definición clara y aplicable de pensamiento matemático.

Este problema tiene repercusiones en tres niveles, enfocándonos en el ámbito educativo y académico. Primero, los docentes suelen tener una concepción poco precisa de “pensamiento matemático”, asociándolo con la enculturación matemática o con el pensamiento lógico. Segundo, los documentos curriculares oficiales no ofrecen explicaciones concretas ni ejemplos ilustrativos que permitan a los docentes comprender el concepto de manera clara. Tercero, en el ámbito académico, las teorías sobre pensamiento matemático son variadas y no necesariamente concordantes, aunque no se contradigan.

Ante la dificultad de definir el término “pensamiento matemático” de manera rigurosa, la alternativa consiste en “establecer la concepción semántica y operativa” de dicho término, es decir, explicar su significado y su aplicación en contextos educativos específicos (Camarena et al., 2022, p. 52). Por estos motivos, en este trabajo intentamos apoyarnos en la concepción de pensamiento matemático propuesta por Harel (2008, 2008a, 2008b) como una base para diseñar estrategias de enseñanza dirigidas a estudiantes que no han elegido formarse como matemáticos, sino como ingenieros o científicos naturales (físicos, químicos, biólogos, geólogos, etc.), con el fin de favorecer la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos en sus respectivos campos.

### **5.1 Pensamiento matemático según Guershon Harel**

Harel (2008, 2008a, 2008b, 2021), afirma que el propósito fundamental de la educación matemática consiste en desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes. Dicho

pensamiento lo concibe como un conjunto de maneras matemáticas de entender y maneras matemáticas de pensar. El autor define a las maneras de entender como el producto cognitivo particular de un acto mental realizado por una persona, y a las maneras de pensar como las características cognitivas de un acto mental realizado por una persona, las cuales pueden inferirse a partir de las acciones repetidas de sus maneras de entender.

Esta profunda reflexión realizada por Harel en torno a la caracterización del conocimiento matemático y del propósito fundamental de la enseñanza de las Matemáticas, y promovida por él activamente durante los años recientes, le ha llevado a formular un esquema metodológico para alcanzar tal propósito. Dicho esquema lo ha denominado “la enseñanza basada en DNR”. El acróstico en la denominación proviene de los tres principios fundamentales en los que se sustenta dicho esquema; el principio de Dualidad (D), el principio de Necesidad intelectual (N), y el principio del Razonamiento reiterado (R).

El principio de Dualidad establece que los estudiantes desarrollan maneras de pensar solo mediante la construcción de maneras de entender, y las maneras de entender que producen están determinadas por las maneras de pensar que ya poseen (Harel, 2008, p. 19). Este principio afirma que las maneras de entender (conceptos y habilidades) y las maneras de pensar (prácticas, disposiciones y creencias) son interdependientes: entre ellas existe una relación bidireccional.

Por su parte, el principio de Necesidad establece que para que los estudiantes aprendan lo que nos proponemos enseñarles, deben tener una necesidad de ello, donde “necesidad” se refiere a una Necesidad intelectual, no a una necesidad social o económica (Harel, 2008, p. 20). El término Necesidad intelectual al que apela Harel se refiere a la natural y espontánea inclinación del ser humano hacia la curiosidad, a esa tendencia inquisidora a entender el porqué de las cosas. Es la tendencia natural de un espíritu racional. En este sentido, la enseñanza debe diseñarse de modo que despierte en los estudiantes el deseo de comprender, más que la obligación de memorizar.

Finalmente, el principio de Razonamiento reiterado destaca que los estudiantes deben practicar de manera reiterada el razonamiento para internalizar, organizar y retener las maneras de entender y las maneras de pensar (Harel, 2008, p. 21). La experiencia repetida (no la mecanización) es la clave para la consolidación y profundización de las maneras matemáticas de entender y de pensar. “La secuencia de problemas debe provocar continuamente el razonamiento a través de las situaciones y de las soluciones, y debe responder a las cambiantes necesidades intelectuales de los estudiantes” (Harel, 2008, p. 21).

### **5.1.1 El aprendizaje y la enseñanza desde la perspectiva del modelo DNR**

Harel (2021) plantea una profunda crítica a los enfoques tradicionales de enseñanza de las matemáticas, señalando que estos suelen alinearse con lo que Greeno (1992) denomina la filosofía de “pensar con lo básico”. Desde esta perspectiva, se asume que la comprensión matemática emerge únicamente después de que el estudiante ha adquirido una cantidad suficiente de hechos, procedimientos y conocimientos elementales; es decir; primero debe “aprender lo básico” para poder pensar. En contraste, tanto Greeno como Harel defienden una filosofía de “pensar es básico”, según la cual el entendimiento y el pensamiento se desarrollan mediante una progresión de

actividades intelectuales desafiantes desde el inicio del aprendizaje, en lugar de posponer la oportunidad de pensar hasta después de dominar un conjunto de contenidos previos.

Desde la perspectiva del modelo DNR (Dualidad, Necesidad intelectual y Razonamiento reiterado), las matemáticas, tanto en su dimensión institucional como en la cognitiva del estudiante, se componen de dos categorías complementarias de conocimiento; maneras de entender y maneras de pensar. El conocimiento matemático institucionalizado a lo largo de la historia puede concebirse como un conjunto que incluye axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones, problemas y soluciones, todos ellos productos de determinadas maneras de pensar que han sido validadas socialmente por la comunidad de matemáticos (Harel, 2008). A su vez, en el proceso individual de aprendizaje, las maneras matemáticas de entender y pensar se encuentran estrechamente vinculadas, de modo que la enseñanza basada en DNR busca crear las condiciones para que los estudiantes desarrollen ambas de forma articulada.

En términos instructivos, esta perspectiva implica diseñar experiencias que despierten la necesidad intelectual de aprender, favorezcan la construcción activa de ideas y prácticas matemáticas, y promuevan su internalización, organización y retención a largo plazo (Harel, 2008b). Para el autor, la práctica deliberada y reiterada del razonamiento, es decir, intencional y reflexiva, desempeña un papel decisivo en tres procesos cognitivos fundamentales: (a) la internalización del conocimiento, evidenciada en la capacidad de aplicarlo de forma autónoma; (b) la organización y reorganización del conocimiento, manifestada en la formación de redes conceptuales jerárquicas, y; (c) la retención del conocimiento, observable en la conservación de lo aprendido a lo largo del tiempo.

De acuerdo con el principio de Razonamiento reiterado, los estudiantes deben enfrentarse sistemáticamente a situaciones problema que los impulsen a reconstruir o reorganizar su entendimiento. Este principio reconoce que el razonamiento sostenido y deliberado es el medio por el cual las maneras de entender se fortalecen y evolucionan hacia maneras de pensar sofisticadas. En este sentido, las maneras de pensar que los estudiantes adquieren en el presente determinan la calidad de los conceptos y las habilidades que podrán desarrollar en el futuro, pues constituyen la base cognitiva desde la cual se construyen nuevas comprensiones matemáticas.

La perspectiva de aprendizaje del DNR se apoya, además, en la idea que aprender implica necesariamente una serie de perturbaciones intelectuales, sociales y afectivas, que no son obstáculos, sino componentes esenciales del conocimiento construido (Harel, 2013). En muchos casos se suele asociar la Necesidad intelectual con la aplicación. En este contexto, la Necesidad intelectual aborda el aspecto motivacional y cognitivo del aprendizaje, al postular que las nuevas comprensiones deben emerger de problemas matemáticos que el estudiante perciba como auténticamente relevantes. Mientras que el término aplicación se refiere, dentro del DNR, a situaciones que consolidan conocimientos ya adquiridos, la Necesidad intelectual se asocia con la búsqueda de conocimientos aún no poseídos, impulsando la creación de nuevas estructuras conceptuales.

En lo que respecta a la enseñanza, Harel (2008b) sostiene que el conocimiento del profesor debe organizarse en tres componentes interrelacionados:

1. El conocimiento matemático, referido a las maneras de entender y pensar deseables que posee el profesor.
2. El conocimiento del aprendizaje de los estudiantes, que implica la comprensión de los procesos cognitivos y epistemológicos involucrados en el desarrollo de determinadas maneras matemáticas de entender y de pensar.
3. El conocimiento pedagógico, relacionado con las prácticas y estrategias de enseñanza que facilitan dicho desarrollo.

Estos tres componentes conforman la base para que el profesor pueda diseñar y gestionar entornos de aprendizaje que fomenten la construcción de conocimiento matemático por parte de sus estudiantes.

Metodológicamente, Harel (2008a) resalta que los constructos teóricos “acto mental”, “manera de entender” y “manera de pensar” ofrecen una estructura operativa con implicaciones didácticas para la enseñanza y la investigación educativa. En este marco, el profesor debe: (a) identificar, determinar y describir los actos mentales de interés; (b) identificar los productos cognitivos de dichos actos (estas son las maneras de entender); (c) inferir las características cognitivas de los actos mentales (estas son maneras de pensar identificadas en los estudiantes).

En síntesis, los principios y constructos del modelo DNR proporcionan un marco sólido para repensar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, al situar el desarrollo del pensamiento matemático como eje central del proceso educativo. Desde esta perspectiva, en este proyecto retomamos las aportaciones de Harel para proponer dos constructos teóricos derivados y específicos del pensamiento variacional; las *Maneras Variacionales de Entender (MVdE)* y las *Maneras Variacionales de Pensar (MVdP)*, que se presentan como una concreción de los planteamientos del DNR, principalmente del principio de Dualidad, y serán analizados más adelante en este apartado.

Cabe señalar que estas aportaciones teóricas se originan en un estudio anterior desarrollado por los autores de este trabajo (Amador y Jiménez, 2023), en el cual se fundamentó, diseñó y validó una intervención didáctica orientada a promover el desarrollo del pensamiento variacional por estudiantes, desde un enfoque de carácter variacional y dinámico. Dicho trabajo constituyó una primera versión en esta línea, como resultado de un esfuerzo de clarificación teórica y práctica en torno al uso de estos constructos teóricos. Tal trabajo se abordó por medio de un análisis crítico y sistemático, orientado desde una perspectiva cognitiva, del contenido matemático relacionando con la covariación exponencial simple. El presente estudio, en consecuencia, da continuidad a esa propuesta inicial, profundizando en los fundamentos teóricos y ampliando el alcance desde el punto de vista práctico de los constructos formulados.

## **5.2 Enfoque del pensamiento variacional**

El pensamiento variacional constituye una forma particular de pensamiento matemático que permite comprender los fenómenos del mundo desde una perspectiva centrada en la variación y el cambio. Este enfoque permite analizar cómo ciertas propiedades de los fenómenos se relacionan a lo largo del tiempo o el espacio y entre sí, ofreciendo una visión dinámica de los procesos naturales

y sociales. En este sentido, las matemáticas desempeñan un papel fundamental, ya que proporcionan herramientas y métodos necesarios para modelar, representar y explicar estos fenómenos.

Desde esta perspectiva, este tipo de pensamiento matemático requiere una reconceptualización en la forma en que se concibe actualmente la actividad matemática en el ámbito escolar, desplazando la atención de los objetos estáticos y rutinas procedimentales, hacia una comprensión dinámica que privilegia los procesos y las interacciones entre magnitudes en términos de relaciones cuantitativas y sus diversas representaciones. En consecuencia, el estudio de la variación invita a reconsiderar los fundamentos mismos de la práctica matemática, situando en el centro los procesos o fenómenos de la realidad.

Esta visión dinámica del pensamiento variacional conduce de manera natural a preguntarse sobre qué entidades opera dicho pensamiento. Como resultado del análisis crítico de la literatura especializada sobre el tema, hemos llegado a concebir que el pensamiento variacional exige una manera dinámica de pensar (Vasco, 2003), y que está directamente relacionado con el estudio de las magnitudes variables. Concebimos a las *magnitudes variables* como aquellas propiedades o cualidades perceptibles y cuantificables en los fenómenos y procesos de la realidad, que por su naturaleza intrínseca son dinámicos. Las magnitudes variables realmente varían. Están por doquier presentes en los así llamados fenómenos o procesos de variación y cambio. En el pensamiento variacional el papel protagónico lo desempeñan las magnitudes variables, que son objetos matemáticos de una naturaleza esencialmente distinta a la de las funciones, mientras que éstas figuran sólo como actores secundarios, como una de las varias herramientas emergentes para la matematización de las magnitudes variables y de los procesos en que ellas intervienen (Jiménez et al., 2022).

Al estudiar el cambio nos referimos en la manera en cómo una magnitud variable cambia o varía con respecto a otra. Thompson et al. (2019) consideran que el uso que se le da a este término resulta ser ambiguo en contextos matemáticos. Afirman que la manera adecuada de interpretarlo consiste en concebir que el cambio que experimentan las magnitudes variables en procesos o fenómenos de variación está sucediendo de manera progresiva en ese momento, es decir, que tiene la connotación de “cambio en progreso”. Las magnitudes variables varían teniendo inevitablemente un trasfondo temporal, aun y cuando el tiempo no sea una variable relevante. Esta manera de concebir los fenómenos de variación hace imprescindible recurrir al uso de herramientas tecnológicas para su estudio en el salón de clase.

En el estudio presentado por Thompson y Carlson (2017), así como por Jiménez et al. (2022), los autores conciben que el pensamiento variacional está constituido por dos fases: el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, ambos tienen que ver con la conceptualización matemática de las magnitudes variables. En el primer caso, se despliega el razonamiento y trabajo matemático sobre una sola magnitud variable en la recta numérica, y en el segundo, el razonamiento simultáneo y el trabajo matemático sobre dos magnitudes variables en el plano cartesiano.

Con el objetivo de profundizar en la pertinencia de este enfoque, describiremos sus características fundamentales. Consideremos que esta concepción permite vincular al pensamiento variacional con la realidad, al entenderlo no como una manifestación de las funciones, sino como las matemáticas de las magnitudes variables. Por su naturaleza, las funciones numéricas no exigen necesariamente una conexión con fenómenos reales, ya que su definición las sitúa como relaciones particulares que operan entre conjuntos de números; estos y otros aspectos serán abordados a continuación.

### **5.2.1 Características esenciales del pensamiento variacional**

Para promover el tipo de pensamiento matemático que está directamente relacionado con la matemática de la variación y el cambio es necesario precisar su objeto de estudio y características que lo definen. El enfoque que se establece en este estudio se distingue por resaltar una forma dinámica de razonar sobre las ideas fundamentales que permitieron a los matemáticos desarrollar el Cálculo en su época; la noción de cantidad continua, la comprensión de la cantidad variable y el manejo de lo infinitamente pequeño. En lo que sigue, se describen los aspectos que definen este tipo de pensamiento, comenzando por su objeto de estudio: las magnitudes variables.

#### *a) El objeto de estudio del pensamiento variacional son las magnitudes variables*

En diversos fenómenos naturales y sociales se manifiestan magnitudes que varían a lo largo del tiempo o el espacio. Por su naturaleza estas magnitudes variables reflejan el dinamismo propio de los procesos de la realidad y constituyen, por tanto, el objeto central del pensamiento variacional. Ejemplos de tales magnitudes son el tiempo, la temperatura, la presión o la velocidad, entre otras, todas ellas susceptibles de medirse o ser cuantificadas usando la unidad o patrón y el instrumento correspondiente, es decir, las magnitudes variables tienen unidades de medida (Jiménez et al., 2022).

El pensamiento variacional se interesa en comprender y matematizar el comportamiento de estas magnitudes, analizando cómo cambian, se relacionan y qué patrones se derivan de su evolución. En este sentido Jiménez et al. (2022) identifican cuatro características esenciales de las magnitudes variables:

1. El símbolo que las representa alude, en primera instancia, a la cualidad cuantificable (temperatura, presión, tiempo, densidad, etc.)
2. Dicho símbolo también representa todos y cada uno de los valores numéricos que la magnitud puede asumir en el fenómeno.
3. Estos valores numéricos no cambian de manera aleatoria, sino que siguen una secuencia temporal o espacial coherente.
4. Tal secuencia de valores numéricos puede ser continua o discreta, aunque el pensamiento variacional se enfoca particularmente en la continuidad del cambio.

En cambio, el trabajo matemático centrado en las funciones numéricas se caracteriza por su tratamiento abstracto de carácter estático. Por su naturaleza una función real de una variable real

se concibe como una relación de correspondencia entre dos conjuntos numéricos, sin requerir necesariamente una referencia a fenómenos reales. Así lo expresan Larson y Edwards (2016):

Sean  $X$  y  $Y$  conjuntos de números reales. Una función real  $f$  de una variable real  $x$  de  $X$  a  $Y$  es una regla de correspondencia que asigna a cada número  $x$  en  $X$  exactamente un número  $y$  de  $Y$ . El dominio de  $f$  es el conjunto  $X$ . El número  $y$  es la imagen de  $x$  bajo  $f$  y se denota mediante  $f(x)$ , a lo cual se llama el valor de  $f$  en  $x$ . El rango de  $f$  se define como el subconjunto de  $Y$  formado por todas las imágenes de los números en  $X$ . (p. 19)

Esta definición pone de manifiesto el carácter puramente abstracto, numérico y estático de las funciones. Las variables numéricas que intervienen en ellas representan simplemente elementos de conjuntos, sin necesidad de estar ligados a mediciones o a la cuantificación de fenómenos de la realidad. Mientras que los valores numéricos asociados a magnitudes variables conservan un vínculo intrínseco con el fenómeno que las origina y están inquebrantablemente asociados a una dimensión temporal. En contraste, los de las variables numéricas son seleccionados de manera arbitraria y carecen de una relación temporal significativa, ya que, en los conjuntos numéricos, el orden en el que se toman sus elementos no tiene mayor importancia.

De esta manera, el foco de atención del pensamiento variacional se sitúa en las magnitudes variables, su significado físico y respectivas unidades de medida, entre otros aspectos, pues estas expresan el cambio como un proceso genuinamente dinámico, incluso en situaciones donde el tiempo no sea una variable relevante. En síntesis, mientras las funciones numéricas abstraen relaciones estáticas entre números, el pensamiento variacional busca comprender cómo y por qué varían las magnitudes en los fenómenos reales, atendiendo a su naturaleza continua y cambiante.

*b) El trabajo matemático con las magnitudes variables requiere de una manera variacional de pensar*

El estudio y análisis de las magnitudes variables que intervienen en los fenómenos de la realidad exigen un tipo de razonamiento distinto al requerido para las funciones numéricas. Este razonamiento, denominado pensamiento variacional, busca comprender el cambio en progreso de los valores numéricos de las magnitudes variables y cómo cambian en relación con diversos factores (Jiménez et al., 2022).

Dicho pensamiento combina aspectos cualitativos (como la construcción de imágenes mentales dinámicas del cambio), y aspectos cuantitativos (como el uso de técnicas, expresiones algebraicas y cálculos numéricos) como implicación del trabajo matemático con las magnitudes variables. En su estructura interna, el pensamiento variacional se compone de dos tipos de razonamientos interrelacionados (Thompson y Carlson, 2017; Jiménez et al., 2022):

- Razonamiento variacional: centrado en la comprensión del cambio en progreso de una sola magnitud variable, teniendo esta un trasfondo temporal y permitiendo su estudio matemático en la recta numérica.

- Razonamiento covariacional: enfocado en el cambio conjunto y simultáneo de dos magnitudes variables, permitiendo su estudio matemático en el plano cartesiano.

El desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes requiere avanzar progresivamente del razonamiento variacional hacia el razonamiento covariacional, transitando del análisis del cambio de una sola magnitud a la comprensión de la interdependencia entre dos o más magnitudes (Jiménez, 2020).

En síntesis, esta característica subraya que el trabajo matemático con magnitudes variables exige una forma particular de razonar, orientada a comprender el cambio como proceso dinámico. Desde esta perspectiva, el pensamiento variacional articula lo cualitativo y cuantitativo, promoviendo en los estudiantes la capacidad de visualizar, representar y anticipar el comportamiento de las magnitudes en fenómenos reales.

*c) El lenguaje empleado en el trabajo matemático con las magnitudes variables es de carácter variacional*

El lenguaje empleado en el trabajo matemático con magnitudes variables es, ante todo, variacional: está diseñado para describir la variación y el cambio en progreso de los valores numéricos de las magnitudes variables a lo largo del tiempo o en diferentes situaciones, y que por lo mismo deben presentar dinamismo en su descripción. Este lenguaje combina expresiones coloquiales con notación simbólica, y refleja la naturaleza dinámica de los fenómenos analizados.

Jiménez et al. (2022) distinguen tres tipos de valores numéricos en el estudio de una magnitud variable: el valor actual, los valores anteriores o previos, y los valores posteriores. La relación entre ellos permite caracterizar comportamientos crecientes o decrecientes. Así, por ejemplo, una magnitud creciente cumple que su valor actual es mayor que los valores anteriores y menor que los valores posteriores, mientras que una magnitud decreciente cumple la relación inversa.

Este tipo de lenguaje se distingue por su capacidad para expresar el cambio y la direccionalidad del fenómeno, integrando términos cotidianos, símbolos y relaciones que reflejan el dinamismo del proceso en estudio, reconociendo sus aspectos cuantitativos. Este lenguaje permite describir y expresar la variación del fenómeno estudiado de forma coherente, constituyendo así un medio esencial para pensar y comunicar el cambio dinámico de manera estructurada; por lo tanto, el lenguaje requerido en el trabajo matemático con las magnitudes variables que intervienen en los fenómenos de la realidad es esencialmente de carácter variacional y dinámico.

*d) El pensamiento variacional utiliza una variedad de representaciones y herramientas (numérica, gráfica y algebraica) para analizar y matematizar el comportamiento de las magnitudes variables*

La matematización de las magnitudes variables requiere de múltiples representaciones que permiten analizar, visualizar y describir el cambio desde diferentes perspectivas. Jiménez et al. (2022) destacan las siguientes:

- Representación tabular o numérica: permite organizar los valores numéricos de las magnitudes. Se pueden realizar cálculos y operaciones, por ejemplo, calcular diferencias o cambios absolutos entre pares de valores numéricos consecutivos, proporcionando de manera clara información sobre el comportamiento de la magnitud variable.
- Representación gráfica: traduce el cambio en una codificación geométrica que revela tendencias o patrones; en contextos dinámicos, las gráficas adquieren un carácter covariacional.
- Representación algebraica o analítica: establece relaciones cuantitativas entre magnitudes variables mediante igualdades algebraicas o mediante funciones, concebidas como una relación de dependencia entre los valores numéricos de dos magnitudes variables.
- Representación verbal: expresa con precisión los comportamientos y relaciones entre las magnitudes utilizando el lenguaje natural.
- Representación icónica: consiste en una serie de dibujos o ilustraciones que permite visualizar directamente a las magnitudes variables perceptibles que intervienen en un fenómeno.
- Representación digital: posibilita la observación dinámica del cambio mediante simulaciones o videos, resaltando el carácter progresivo de la variación.

Estas representaciones constituyen herramientas variacionales, ya que permiten estudiar tanto el cambio de una sola magnitud (en la recta numérica), como en el cambio conjunto de dos magnitudes (en el plano cartesiano).

En contraste, las representaciones que se emplean en el estudio de las variables y funciones numéricas son estáticas, al mostrar relaciones de correspondencias discretas entre conjuntos numéricos. Emplean herramientas tradicionales: tablas de valores puntuales, gráficas estáticas, cálculo de valores de funciones entre otros.

*e) En el estudio matemático del cambio en progreso, las gráficas cartesianas son codificaciones dinámicas (como videoclips) de fenómenos o procesos de variación*

En el pensamiento variacional, las gráficas se conciben como codificaciones dinámicas del cambio en progreso, más que como simples correspondencias numéricas (Jiménez et al., 2022). Desde esta perspectiva, son como “videoclips matemáticos” que representan visualmente el devenir de un fenómeno.

A diferencia de las gráficas conjuntistas obtenidas mediante la técnica de punteo, que muestra relaciones estáticas entre pares de números, las gráficas covariacionales capturan el movimiento simultáneo de dos magnitudes variables, mostrando cómo una cambia en dependencia del cambio de la otra.

Este enfoque permite no solo observar la evolución de un fenómeno, sino también predecir su comportamiento, identificar regularidades y formular modelos que describan su desarrollo,

potenciando la comprensión del cambio continuo. En este sentido, la gráfica deja de ser un producto estático y se transforma en una representación dinámica del proceso variacional, es decir, se usan puntos móviles sobre la recta numérica (para una magnitud) o plano cartesiano (para dos magnitudes) que reflejan los valores permisibles de cada magnitud identificada en el fenómeno analizado.

Así, las gráficas empleadas en el pensamiento variacional son covariacionales y dinámicas. Las gráficas de las funciones numéricas son conjuntistas y estáticas, puntos obtenidos por la técnica de punteo, conectados para formar la gráfica; muestran correspondencias discretas sin reflejar directamente cambios progresivos o relacionales de dependencia dinámicas.

*f) En el pensamiento variacional, más que interesarse por las diferentes clases de funciones, el trabajo matemático con las magnitudes covariantes se interesa por identificar y describir los tipos básicos de covariación*

Más que interesarse en la tipología de funciones, el pensamiento variacional se interesa en identificar y describir los tipos básicos de comportamientos variacionales y covariacionales que se manifiestan en las magnitudes presentes en los fenómenos.

Jiménez et al. (2022) establecen una tipología que permiten caracterizar las variaciones de una magnitud variable. Entre los tipos básicos de variación se encuentran: crecimiento uniforme, crecimiento acelerado, crecimiento desacelerado, decrecimiento uniforme, decrecimiento acelerado, decrecimiento desacelerado y crecimiento nulo (magnitud constante). Además, describen siete tipos elementales de comportamientos covariacionales, es decir, aquellos que expresan las distintas formas en que los valores numéricos de dos magnitudes variables pueden variar conjuntamente: crecimiento covariacional acelerado, crecimiento covariacional desacelerado, decrecimiento covariacional uniforme, decrecimiento covariacional acelerado, decrecimiento covariacional desacelerado y crecimiento covariacional nulo (constante).

Así, en el pensamiento variacional la atención está en los comportamientos dinámicos de las magnitudes variables, promoviendo una comprensión profunda del cambio y de las relaciones de dependencia que subyacen en los fenómenos, y no en las propiedades de las funciones.

Cabe señalar que en nuestro proyecto de intervención no se analizarán todos estos tipos básicos de covariación, dada la naturaleza del contenido matemático que se decidió abordar. En la covariación exponencial continua se manifiestan solamente dos de estos tipos elementales, el crecimiento covariacional acelerado y el decrecimiento covariacional desacelerado. Otros tipos de covariación exponencial más complejos (p. ej. la covariación logística) no serán considerados.

En conjunto, las características descritas permiten reflexionar que el pensamiento variacional constituye una forma particular de razonamiento matemático, orientado a entender y representar el cambio en progreso de las magnitudes variables. Este pensamiento articula lo cualitativo con lo cuantitativo, lo simbólico con lo gráfico y cambia lo estático por lo dinámico, dando lugar a la matematización de los fenómenos de la realidad. Por lo tanto, su objeto de estudio no son las

funciones y variables numéricas en sí mismas, sino las magnitudes variables y las relaciones cuantitativas dinámicas que emergen de ellas.

### 5.3 Estructura operativa para el desarrollo del pensamiento variacional

Tomando como base el enfoque del pensamiento variacional, y la visión de pensamiento matemático según Harel (2008), establecemos que, para promover el desarrollo del pensamiento variacional por los estudiantes, se deben diseñar estrategias de aprendizaje que les permitan generar maneras variacionales de entender y maneras variacionales de pensar. A las *Maneras Variacionales de Entender (MVdE)* las definimos como el producto cognitivo particular del acto mental de producir imágenes dinámicas relacionadas con las características o propiedades esenciales de las magnitudes variables, presentes en los fenómenos de variación y cambio en progreso, y a las *Maneras Variacionales de Pensar (MVdP)* las describimos como las características cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas por el estudiante, reveladas de las ejecuciones repetidas de sus maneras variacionales de entender.

Por ejemplo, si un estudiante formula una interpretación, similar o igual, argumentando que “los valores numéricos que toma la literal que representa a una magnitud variable están asociados con una unidad de medida”, está evidenciando una manera variacional de entender, porque es un producto cognitivo particular de su acto mental de interpretar una característica importante de las magnitudes variables. Y si sostiene más de una manera variacional de entender es probable que posea, además, la manera variacional de pensar que “las magnitudes variables toman progresivamente valores numéricos que podemos dividir en tres grupos: el valor actual, los valores previos y los valores posteriores”.

Desde esta perspectiva, el pensamiento variacional de los estudiantes evoluciona progresivamente a medida que interactúa con situaciones y tareas diseñadas para promover la reflexión y matematización del cambio y la covariación. Las *MVdE* y *MVdP* se conciben, por tanto, como procesos de construcción mental interdependientes que orientan el tránsito desde representaciones intuitivas y visuales hacia representaciones formales y estructuradas del razonamiento matemático. Este tránsito no solo describe el desarrollo cognitivo del estudiante, sino que también ofrece directrices para el diseño de tareas de aprendizaje que promuevan dicho desarrollo.

En consecuencia, las *MVdE* y *MVdP* operan como elementos de mediación entre el mundo real y el mundo matemático, al establecer vínculos entre los objetos matemáticos y las propiedades cuantitativas de las magnitudes variables que intervienen en los fenómenos de la realidad. De este modo, constituyen una base explicativa que permite comprender cómo los estudiantes pueden matematizar la realidad mediante el reconocimiento de las relaciones dinámicas que gobiernan los procesos de variación y covariación.

Finalmente, al establecerse en términos de propiedades cuantitativas y procesos dinámicos, las *MVdE* y *MVdP* promueven la formulación de una secuencia cognitiva para el desarrollo del pensamiento variacional. Las *MVdE*, como manifestaciones observables de los actos mentales de

los estudiantes, ofrecen indicadores sobre cómo promover la comprensión; mientras que las *MVdP* representan la consolidación de esas comprensiones en características cognitivas. Así, ambas constituyen el núcleo operativo del marco teórico-metodológico que sustenta este estudio, al definir las formas en que los estudiantes pueden capturar la esencia de los procesos de variación y cambio en progreso.

Como parte de este esfuerzo de teorización, desde el punto de vista lógico, en nuestro trabajo, hemos identificado y caracterizado un conjunto de *MVdE* y *MVdP*, a nivel general, referidas a cualquier proceso de variación (ver Tabla 3 y 4). A partir de ellas, se han identificado y caracterizado *MVdE* más específicas asociadas a los procesos de covariación exponencial, las cuales son fundamentales para orientar el diseño de nuestra secuencia de actividades. Más adelante en este documento, en la Tabla 5, se presentan de manera resumida algunas de dichas *Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial Continua (MVdE-CExpC)*.

### 5.3.1 Maneras Variacionales de Entender y Maneras Variacionales de Pensar

A continuación, se muestran algunas Maneras Variacionales de Entender que pueden promoverse y manifestarse en los estudiantes al razonar sobre fenómenos de variación. En congruencia con la concepción del pensamiento variacional asumida en este estudio, directamente relacionada con la matematización de las magnitudes variables, se considera *manera no variacional de entender* toda aquella que se aparta de este criterio.

En otras palabras, las maneras no variacionales se caracterizan por centrarse en las funciones numéricas como objetos formales o en el tratamiento simbólico y conjuntista de las variables, sin una referencia explícita a las magnitudes que varían en un fenómeno. Aunque muchas de estas maneras de entender son matemáticas, no promueven un razonamiento variacional ni covariacional, pues no se refieren el cambio continuo y cuantitativo de magnitudes.

Por el contrario, las maneras variacionales de entender se anclan en la comprensión de las magnitudes variables y en la forma en que sus valores cambian de manera continua, suave y coherente con una realidad cuantificable. Estas maneras de entender constituyen el núcleo del pensamiento variacional y se distinguen por su potencial para generar modelos matemáticos de procesos reales de cambio. Otras maneras de entender en este rubro no son matemáticas, y por ende, tampoco pueden ser consideradas como variacionales (ver Tabla 3 y 4).

#### a) *Maneras no Variacionales de Entender y Maneras Variacionales de Entender*

Tabla 3: Maneras no Variacionales de Entender vrs Maneras Variacionales de Entender

No variacional	Variacional
Las variables son objetos matemáticos abstractos (sin significado); no representan nada que tenga que ver con alguna realidad.	Las variables algebraicas son símbolos que escogemos de manera conveniente para representar aspectos cuantitativos esenciales de cierta realidad que intentamos comprender.

La variable tiene o representa un único valor numérico; es simplemente un número, es el valor de la variable en el instante que se analiza.	La magnitud variable toma progresivamente infinitos valores numéricos.
La variación consiste en cambios cualitativos en los fenómenos o procesos.	La variación implica fundamentalmente cambios cuantitativos: cambios en los valores numéricos de las magnitudes variables.
La literal representa un valor numérico.	La literal representa todos y cada uno de los valores numéricos de la magnitud variable.
A las literales no se les asignan unidades de medida.	Los valores numéricos que toma la literal que representa a una magnitud variable están asociados con una unidad de medida.
La variación consiste en cambios que ocurren “a saltos”.	La variación implica cambios continuos y suaves en los valores de las magnitudes variables.
Los valores numéricos de la literal les son asignados arbitrariamente.	Los valores numéricos que toma la literal pueden ser progresivamente medidos o calculados.
Los valores numéricos de $x$ y $y$ pueden ser asignados libre o arbitrariamente, indistintamente el uno del otro.	Los valores numéricos de las magnitudes variables no pueden ser asignados arbitrariamente; a un valor dado de $x$ le corresponde sólo un valor perfectamente definido de $y$ .
Las expresiones algebraicas con literales son solo objetos matemáticos manipulables.	Las expresiones algebraicas en las que intervienen literales como variables tienen congruencia dimensional con lo que ellas representan.
Una igualdad o ecuación algebraica es algo que se debe resolver o que se emplea para realizar un cálculo.	Una igualdad algebraica en la que intervienen literales como variables es un modelo matemático de la relación cuantitativa que existe entre tales magnitudes variables.
La razón promedio de cambio es el valor de la pendiente de la secante a la curva.	La razón media de cambio de una magnitud variable dependiente, con respecto al incremento uniforme de su variable independiente, es la razón constante de cambio de un proceso uniforme imaginario (ideal) que permitiría pasar del estado inicial al estado final del proceso real no uniforme.

---

*Nota.* Elaboración conjunta con el Director de Tesis.

A continuación, se muestran algunas *Maneras Variacionales de Pensar* para cualquier proceso de variación, junto con las que no se consideran variacionales. Al igual que en el caso de las *Maneras Variacionales de Entender*, las *Maneras Variacionales de Pensar* están directamente relacionadas con las magnitudes variables. A las maneras de pensar que no caen bajo este criterio, así como a las maneras de pensar que no son matemáticas, las hemos clasificado como no variacionales.

***b) Maneras no Variacionales de Pensar y Maneras Variacionales de Pensar***

Tabla 4: Maneras no Variacionales de Pensar vrs Maneras Variacionales de Pensar

<b>No variacional</b>	<b>Variacional</b>
Las únicas variables que se estudian en matemáticas son $x$ y $y$ .	Las magnitudes variables pueden estar representadas por diferentes símbolos o literales, según convenga.
Los valores numéricos que toma la variable no están sujetos a una dependencia temporal, son asignados arbitrariamente.	Las magnitudes variables toman progresivamente valores numéricos que podemos dividir en tres grupos: el valor actual, los valores previos y los valores posteriores.
El movimiento de la variable independiente es arbitrario: los valores numéricos que toma ocurren arbitrariamente.	La magnitud variable independiente siempre crece de manera continua y uniforme (emula al tiempo).
Las igualdades algebraicas son fórmulas para calcular el valor de $y$ a partir del valor de $x$ .	Las igualdades matemáticas entre magnitudes variables representan cantidades y relaciones cuantitativas dinámicas.
Las igualdades algebraicas son verdaderas solo en el sentido matemático.	Las igualdades algebraicas con variables no sólo deben ser verdaderas en el sentido matemático, sino que deben ser razonablemente satisfactorias en relación con la realidad que pretenden modelar.
La rapidez del cambio permite medir la distancia con respecto al tiempo y solo es un número fijo, estático en todo momento.	Cuando algo cambia, lo hace con cierta intensidad, tasa o ritmo de cambio. Es posible cuantificar o expresar con números la rapidez del cambio.
Los simbolismos matemáticos en la modelación de fenómenos son fórmulas en las cuales se sustituyen números.	El simbolismo matemático empleado para modelar situaciones de variación (cambio en progreso) permite formular conjeturas y verificarlas.
El comportamiento de las funciones depende del valor de sus variables, son siempre uno a uno.	Existe un conjunto finito de maneras o formas en que las magnitudes variables pueden comportarse; se trata

	de los comportamientos covariacionales elementales o básicos.
El comportamiento de las funciones está definido por el trazo entre los pares ordenados $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ que lo componen.	Los comportamientos covariacionales complejos son simplemente combinaciones suaves y continuas de comportamientos covariacionales elementales.
Las gráficas de las funciones son como alambres doblados, pistas o trayectorias por las que se puede transitar. Son por lo tanto objetos estáticos, fijos e inertes.	Las gráficas covariacionales son codificaciones matemáticas de procesos dinámicos, son como “videos matemáticos” de procesos de cambio en progreso.

*Nota.* Elaboración conjunta con el Director de Tesis.

Una vez aclaradas e ilustradas las nociones “*Maneras Variacionales de Entender*” (MVdE) y “*Maneras Variacionales de Pensar*” (MVdP), fue posible la formulación y descripción de las maneras variacionales de entender y pensar relacionadas con la covariación exponencial, *MVdE-CExp* y *MVdP-CExp*, respectivamente.

A continuación, se muestran algunas *MVdE-CExp*, junto con las que no se consideran variacionales. De ellas las primeras seis se refieren al proceso de covariación exponencial simple, las cuales nos ayudaron en un estudio previo, a orientar el diseño de actividades didácticas para estudiar la covariación exponencial desde la perspectiva de las sucesiones numéricas, como primera aplicación de los constructos teóricos establecidos en este estudio (Amador y Jiménez, 2023). Las últimas cuatro orientarán el diseño de las actividades didácticas para estudiar la covariación exponencial continua desde la perspectiva de la razón de cambio promedio y razón instantánea de cambio, es decir, del Cálculo Diferencial.

***c) Maneras no Variacionales y Variacionales de Entender la Covariación Exponencial***

Tabla 5: Maneras no Variacionales de Entender la Covariación Exponencial vs Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial

No variacional	Variacional
La función exponencial es una función continua cuyo factor de incremento entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ es independiente. Es decir $\frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h})}{f(\mathbf{x})} = \mathbf{g}(\mathbf{h})$ .	Una magnitud variable de comportamiento exponencial se caracteriza por el hecho de que su factor de crecimiento o decrecimiento es igual a una constante positiva (mayor o menor que la unidad).
Si en una sucesión geométrica la razón constante es $\mathbf{e}$ , tenemos una función exponencial que describe un crecimiento exponencial.	Los valores numéricos consecutivos de una magnitud variable de comportamiento exponencial forman una sucesión geométrica (creciente o decreciente), $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{r}\mathbf{y}_n$ , $\mathbf{r}$ es la

	razón de la sucesión geométrica con $r > 0$ y $r \neq 1$ .
Si la variable $x$ aumenta una unidad, tenemos que ese factor de incremento es una constante, y justamente esa constante es la base de la función exponencial.	Si la magnitud variable independiente $x$ aumenta (disminuye) una unidad, entonces la magnitud variable dependiente se incrementa (decrementa) por un factor constante, y ese factor constante es la base de la expresión algebraica exponencial para esa relación de covariación.
Cuando $x$ aumenta $n$ unidades, la función aumenta (o disminuye) respecto del estado anterior en forma proporcional, $f(x + n) = f(x) \cdot a^n$ .	Si la magnitud variable independiente $x$ aumenta (disminuye) $n$ unidades, entonces la magnitud variable dependiente $m$ aumenta (o disminuye) respecto del estado anterior en forma proporcional: $m(x \pm n) = m(x) \cdot r^{\pm n}$ .
La función exponencial es una función continua que transforma las sumas en productos, es decir, satisface la ecuación funcional, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ .	Una magnitud variable $m$ covaría exponencialmente en dependencia de la magnitud variable $x$ , si para dos valores cualesquiera de ésta $x_1, x_2 = x_1 + h$ , los correspondientes valores de $m$ satisfacen la relación cuantitativa $m(x_1 + h) = m(x_1) \cdot m(h), h > 0.$
La función exponencial es una función continua que transforma las restas en divisiones, es decir, satisface la ecuación funcional $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ .	Una magnitud variable $m$ covaría exponencialmente en dependencia de la magnitud variable $x$ , si para dos valores cualesquiera de ésta $x_1, x_2 = x_1 - h$ , los correspondientes valores de $m$ satisfacen la relación cuantitativa $m(x_1 - h) = \frac{m(x_1)}{m(h)}, h > 0.$
Incrementos aritméticos iguales de una función exponencial en la variable independiente conducen a cambios proporcionales iguales en la variable $y$ .	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial con variaciones aritméticas iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales iguales en la magnitud variable dependiente.
En una función exponencial, si $h$ es el cambio aritmético de la variable independiente, entonces $a^h - 1$ es el cambio proporcional en la variable dependiente.	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial $N(\Delta h)$ con variaciones aritméticas iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales en la

	magnitud variable dependiente de la forma $N(a^{\Delta h} - 1)$ .
La función exponencial es una función continua cuya tasa de incremento relativo dependerá específicamente del incremento que se produce desde un valor cualquiera de $x$ . Conociendo la tasa es posible encontrar la base de la función exponencial.	La razón promedio de cambio relativa de una magnitud covariante de comportamiento exponencial, para incrementos iguales de la magnitud variable independiente, es igual a una constante numérica no nula.
Función exponencial como una función derivable que satisface la ecuación diferencial $y' = ky$	Una magnitud covariante cuya razón instantánea de cambio es directamente proporcional al valor actual de dicha magnitud variable.

---

*Nota.* Elaboración conjunta con el Director de Tesis.

### 5.3.2 Implicaciones metodológico-didácticas para el diseño de tareas variacionales

Para la organización, diseño y análisis de las estrategias o actividades didácticas orientadas al desarrollo del pensamiento variacional, se establece una estructura operativa de las implicaciones metodológico-didácticas basadas en tres etapas esenciales. Esta estructura ha sido adaptada del modelo DNR de Harel (2008a). Además, articula la intención teórica con la práctica docente permitiendo diseñar, implementar y analizar tareas que conduzcan a los estudiantes hacia maneras más profundas de razonar sobre la variación y la covariación de magnitudes.

Cada etapa cumple una función específica dentro del proceso didáctico: el prediseño permite establecer las metas cognitivas; el diseño concreta las tareas mediante principios teóricos y tecnológicos; y el análisis permite valorar el aprendizaje alcanzado.

1. Prediseño de las estrategias didácticas: el profesor deberá identificar y caracterizar las *Maneras Variacionales de Entender (MVdE)* que espera promover en los estudiantes, y especificar los actos cognitivos particulares de interés.
2. Diseño de las estrategias didácticas: para la elaboración y organización de las actividades didácticas, esbozar una secuencia cognitivamente lógica de obtención de los productos cognitivos que involucran los actos mentales presentes en los estudiantes en forma de declaraciones y acciones.
3. Análisis de las estrategias didácticas desarrolladas por los estudiantes: el profesor deberá inferir de forma indirecta las características cognitivas comunes entre los productos cognitivos de los actos mentales presentes en las actividades desarrolladas por los estudiantes, estas son las *Maneras Variacionales de Pensar (MVdP)* de los estudiantes.

A continuación se describen elementos fundamentales que guían el desarrollo de cada una de las etapas que conforman la estructura operativa de las implicaciones metodológico-didácticas mencionadas previamente.

### **Etapas de prediseño:**

En esta etapa se tiene como propósito definir las MVdE que se espera promover en los estudiantes, y establecer los elementos conceptuales y cognitivos que orientan el diseño de las actividades. Para identificar y caracterizar las MVdE que se espera promover en los estudiantes es necesario seguir el proceso que a continuación se detalla.

- En primer lugar, se debe caracterizar el tipo de covariación que se desea abordar (lineal, cuadrática, exponencial, etc.), así como los contextos de aplicación en el que dicha covariación se manifiesta (físicos, biológicos, económicos, tecnológicos, entre otros). Esto permite establecer el vínculo entre las magnitudes variables y su significado fenomenológico. Es decir, las MVdE caracterizan el desarrollo dinámico del proceso.
- En segundo lugar, se debe realizar un análisis desde lo histórico-epistemológico que permite examinar el desarrollo del concepto matemático a lo largo del tiempo y cómo se estructura en el conocimiento disciplinar. Este análisis aporta comprensión más profunda sobre las maneras de razonar y representar la variación que han sido significativas en la historia de las matemáticas.
- Por último, se realiza la formulación de las MVdE como configuraciones específicas de pensamiento, expresadas mediante lenguaje variacional. Estas MVdE no se formulan como definiciones formales o conocimientos declarativos, sino como enunciados precisos de las propiedades cuantitativas de las magnitudes variables. Su función es representar formas de organizar mentalmente las características cuantitativas de las magnitudes variables que intervienen en situaciones de cambio.

En este sentido, las MVdE operan como orientaciones normativas para diseñar tareas, pues guían la elaboración de las actividades didácticas que fomenten en los estudiantes un tipo de pensamiento matemático que es coherente con la naturaleza continua, dinámica, cuantitativa y relacional de los fenómenos de variación.

### **Etapas de diseño**

En esta etapa se concretan los lineamientos que guían la elaboración y organización de las actividades didácticas destinadas a promover las MVdE previamente formuladas. Es aquí donde los principios teóricos se operativizan en un conjunto de decisiones didácticas encaminadas a promover el desarrollo del pensamiento variacional por los estudiantes.

En coherencia con el modelo DNR propuesto por Harel (2008, 2013), esta etapa considera el resto de los principios fundamentales del modelo. El primero, el principio de necesidad intelectual, establece que el aprendizaje se produce cuando el estudiante percibe una necesidad genuina de construir conocimiento matemático; por tanto, las tareas deben generar en los estudiantes la necesidad de matematizar la variación, evitando la imposición de definiciones, fórmulas o

representaciones prefabricadas. El segundo, el principio de Razonamiento reiterado, plantea que la comprensión profunda se consolida mediante procesos de razonamiento sostenido, reflexivo y recurrente. Este razonamiento sobre las MVdE propicia a que los estudiantes puedan pensar variacionalmente, es decir, logren evidenciar características cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas de las propiedades cuantitativas de las magnitudes variables. Ambos principios se articulan en esta etapa como parte de los ejes orientadores del diseño de las actividades didácticas, promoviendo la evolución gradual de las MVdE hacia MVdP.

Dado que este estudio corresponde a una intervención didáctica, la fundamentación teórica para el diseño de tareas de aprendizaje constituye una prioridad metodológica. Por ello, el arsenal del diseño propuesto en esta etapa se complementa con dos subcomponentes esenciales que concretan su dimensión operativa: los principios de diseño de tareas matemáticas (Barzel et al., 2013) y los principios de diseño de tareas tecnológicas (Swidan et al., 2019). Ambos subcomponentes permiten estructurar una secuencia cognitiva y tecnológica coherente con la naturaleza continua, cuantitativa y relacional de la variación.

### **1. Principios de diseño de tareas matemáticas**

El diseño de tareas matemáticas se orienta por medio del esbozo de la secuencia cognitivamente lógica de obtención de los productos cognitivos que involucran los actos mentales de los estudiantes, que favorezcan la construcción y análisis progresivo de las MVdE. Esta estructuración parte de la identificación de los actos mentales esperados en los estudiantes y se traducen en declaraciones y acciones que guían la elaboración de las tareas.

De acuerdo con Barzel et al. (2013), esta progresión epistemológica se organiza en tres fases que permiten modelar la transición desde la exploración intuitiva hasta la sistematización conceptual.

- *Fase de exploración:* los estudiantes interactúan con fenómenos dinámicos para identificar magnitudes variables y formular conjeturas iniciales. Lo fundamental es activar sus conocimientos previos y fomentar la formación de imágenes variacionales, entendidas como representaciones mentales dinámicas que permiten razonar sobre el cambio continuo y la covariación suave entre magnitudes.
- *Fase de organización del conocimiento:* los estudiantes estructuran y representan formalmente las relaciones cuantitativas observadas durante la exploración, utilizando herramientas matemáticas como gráficas, tablas numéricas y expresiones algebraicas. El foco está en sistematizar el razonamiento sobre la variación y fortalecer una comprensión más precisa de cómo cambian las magnitudes en conjunto.
- *Fase de consolidación:* finalmente, los estudiantes aplican sus conocimientos en contextos diversos, mediante el uso e interpretación de representaciones y herramientas para resolver problemas que impliquen matematizar el comportamiento de las magnitudes variables. El énfasis está en promover un razonamiento reiterado que les permita internalizar, organizar y retener las MVdE que se están promoviendo.

Estas fases constituyen una guía epistemológica para diseñar actividades didácticas que avancen desde la exploración de fenómenos reales hasta la institucionalización del tema matemático.

## **2. Principios de diseño de tareas tecnológicas**

Los principios de diseño de tareas tecnológicas complementan los aspectos mencionados con anterioridad, al integrar recursos tecnológicos que actúan como mediadores entre la experiencia fenomenológica y el conocimiento matemático. Son directrices que se centran en integrar a la actividad herramientas tecnológicas, como software de Geometría Dinámica, simuladores o videoclips, entre otros, que permitan establecer un vínculo entre el mundo físico y el mundo abstracto de las matemáticas. La tecnología debe facilitar experiencias cognitivas que no solo presenten información de manera dinámica, sino que también potencien el razonamiento sobre la variación continua de magnitudes (Arzarello, 2019; Swidan et al., 2019).

Estas experiencias promueven que los estudiantes despierten la necesidad intelectual de interactuar activamente con representaciones dinámicas, visualizando y manipulando magnitudes variables en tiempo real. Es decir, la necesidad intelectual de matematizar los fenómenos y construir imágenes variacionales coherentes con los procesos de cambio. Así, la tecnología se convierte en un medio para desarrollar el pensamiento variacional y modelar fenómenos desde una perspectiva dinámica.

La etapa de diseño constituye un proceso de articulación entre teoría y práctica, en el que los principios del modelo DNR se integran con los aportes contemporáneos sobre el diseño de tareas matemáticas y tecnológicas. Estos elementos permiten elaborar secuencias de aprendizaje coherentes con la naturaleza de la variación y covariación, donde el estudiante se involucra activamente en la construcción de conocimiento.

Una vez definidas las tareas didácticas y los recursos tecnológicos pertinentes, se da paso a la implementación de las actividades con los estudiantes. Es en este momento en el que será posible analizar en qué medida las interacciones y producciones de los estudiantes evidencian o no la consolidación de MVdE y MVdP promovidas en la intervención.

### **Etapa de análisis**

Esta etapa tiene como propósito valorar en qué medida las actividades diseñadas e implementadas logran promover en los estudiantes el desarrollo de MVdP, en el contexto específico de estudio.

El análisis se centra en las producciones mentales expresadas por los estudiantes en sus declaraciones, justificaciones y argumentaciones verbales o escritas. Siguiendo a Harel (2008a, 2008b), estas producciones permiten al profesor inferir, de manera indirecta, las características cognitivas comunes que emergen de los actos mentales realizados durante el desarrollo de las actividades.

El análisis busca, por tanto, obtener evidencia sólida de que los estudiantes son capaces de identificar y formular las características cuantitativas esenciales de la covariación que se aborda, a partir de la coordinación conjunta y simultánea entre los valores numéricos de magnitudes variables que intervienen en los fenómenos analizados.

Este análisis permite, además, retroalimentar el diseño didáctico, reformulando las tareas y ajustando las estrategias en función de las MVdP observadas.

Las tres etapas metodológico-didácticas: prediseño, diseño y análisis, configuran un proceso cíclico y reflexivo que articula la teoría y la práctica en el desarrollo del pensamiento variacional. El *prediseño* establece las metas cognitivas en términos de las MVdE, el *diseño* concreta las condiciones didácticas y tecnológicas que propician su construcción, y el *análisis* permite evidenciar su transformación en MVdP a través de las acciones de los estudiantes.

En conjunto, los elementos desarrollados en este marco teórico y explicativo permiten situar con precisión las bases conceptuales, cognitivas y didácticas que orientan este proyecto. La articulación entre la perspectiva de Harel sobre pensamiento matemático, el enfoque dinámico del pensamiento variacional y la estructura operativa derivada para su desarrollo ofrece una plataforma sólida para comprender cómo los estudiantes construyen maneras variacionales de entender y maneras de variacionales pensar en torno a fenómenos de variación y covariación. Así mismo, la incorporación de principios de diseño de tareas matemáticas y tecnológicas fortalece la dimensión metodológica del marco, al proporcionar criterios concretos para la elaboración de ambientes de aprendizaje que atiendan la naturaleza dinámica de las magnitudes variables. Con ello, este apartado no solo clarifica las nociones que sustentan la propuesta, sino que establece las directrices teóricas necesarias para analizar y fundamentar las decisiones didácticas del proyecto, especialmente aquellas relacionadas con la promoción del pensamiento variacional en contextos donde la covariación exponencial ocupa un lugar central.

## 6 METODOLOGÍA

El presente proyecto se sustenta teóricamente en el modelo de enseñanza de las matemáticas basada en DNR propuesto por Harel (2008, 2008a, 2008b, 2021), el cual orienta las intervenciones en el aula a partir de tres aspectos principales: 1) la identificación de maneras matemáticas de entender y sus productos cognitivos; en nuestra propuesta de concreción al pensamiento matemático de tipo variacional, estas se denominan *maneras variacionales de entender*, 2) la generación de una necesidad intelectual para motivar el aprendizaje de los estudiantes, y 3) la promoción de razonamientos reiterados que conduzcan a la consolidación de los significados matemáticos, dando lugar a establecer una pauta para el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes.

Si bien el modelo DNR ofrece un marco sólido para orientar las intervenciones en el aula, no proporciona una metodología explícita que guíe de manera detallada el diseño, implementación, rediseño y valoración de dichas intervenciones didácticas. Por tal razón, se han identificado algunos elementos que aportan a la formulación de la metodología a seguir para el diseño de las actividades didácticas, concretadas en el apartado anterior como las implicaciones metodológico-didácticas para el diseño de tareas variacionales.

Por lo tanto, los aspectos metodológicos del presente proyecto de intervención didáctica se estructuran en fases de trabajo que permiten organizar, planificar y valorar sistemáticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje involucrados. Sin embargo, este trabajo se realiza una vez decidido el tema matemático a abordar, identificadas las dificultades tanto de enseñanza como de aprendizaje de este, planteada la problemática a abordar y su justificación como punto de partida para el desarrollo del proyecto de tesis. De este modo, las fases metodológicas se organizan en cuatro momentos fundamentales que describen los procedimientos y acciones para lograr los objetivos, tanto general como específicos de este proyecto. A continuación se describen dichas fases y se enuncian algunos avances.



### 6.1 Fase 1: Del prediseño

Una vez delimitada la problemática y su justificación, esta fase se centra en establecer los elementos teóricos que darán sustento al diseño de las actividades didácticas. Esta fase permite seleccionar o adaptar aspectos teóricos de la Matemática Educativa que sean pertinentes y coherentes con las necesidades específicas del proyecto. Como resultado de este proceso se seleccionan, articulan y concretan elementos teóricos del modelo de enseñanza de las matemáticas basada en DNR de Harel (2008) con nociones del enfoque del pensamiento variacional.

Las acciones específicas contempladas en esta fase son:

- Realizar una revisión epistemológica y curricular del tema matemático a abordar: la covariación exponencial continua y el desarrollo del pensamiento variacional.
- Identificar y caracterizar las *Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial Continua* que se esperan promover en los estudiantes, definiendo los actos mentales de interés, en relación con el **Objetivo específico 1**. Recurriendo a la *etapa de Prediseño de las estrategias didácticas* establecida en los aspectos teóricos.

Esta fase permite construir una visión clara sobre qué maneras de pensamiento se espera promover en los estudiantes, qué obstáculos podrían presentarse, y qué recursos cognitivos deberán movilizar durante la intervención. Particularmente en este trabajo interesa la covariación exponencial continua, esto nos hace poner un principal énfasis en las magnitudes variables que intervienen en fenómenos de comportamiento exponencial. Dicho esto, en la Tabla 6 (ver Anexo 1) se muestran las *MVdE-CExpC* que orientarán a nuestra secuencia de actividades didácticas, las cuales fueron organizadas desde la que a nuestro criterio es la más simple o elemental hasta la más compleja, tanto desde la perspectiva del conocimiento matemático, como de las posibilidades cognitivas de los estudiantes. También se consigna una versión resumida de los productos cognitivos que resultan de algunos de los actos mentales básicos o elementales requeridos para cada *MVdE-CExpC*.

Las *MVdE-CExpC* operan como orientaciones normativas para diseñar tareas variacionales, ya que guían la elaboración de las actividades didácticas que fomenten en los estudiantes una manera dinámica de pensar.

### 6.2 Fase 2: Del diseño y análisis a priori

En esta fase se formularán y organizarán las tareas orientadas a promover el desarrollo del pensamiento variacional. Como se ha mencionado, el acercamiento didáctico se centrará en el estudio de fenómenos de comportamiento exponencial, para favorecer la comprensión y aplicación del Cálculo Diferencial en tales situaciones. Para ello, en esta fase se llevará a cabo la *etapa de Diseño de estrategias didácticas*, fundamentada en el marco teórico y explicativo. Como avance en esta etapa, y complementaria a las características de la propuesta presentada en apartados previos, se presentan a continuación algunas pautas y principios de diseño para orientar la elaboración de nuestra propuesta de enseñanza:

1. Priorizar el análisis de fenómenos reales e identificar las magnitudes variables de interés: Las tareas deben partir de contextos reales en los que los estudiantes puedan identificar y razonar sobre magnitudes cuya variación sea observable y cuantificable, en relación con el **Objetivo específico 2**. Esto permite anclar el conocimiento matemático en experiencias significativas, en lugar de comenzar con funciones numéricas como objetos abstractos.
2. Diseñar tareas que promuevan la construcción de significados desde la necesidad intelectual: en coherencia con el principio de Necesidad del modelo DNR, es fundamental que las tareas presenten desafíos cognitivos que despierten en los estudiantes la necesidad de matematizar la variación, en lugar de imponer definiciones, gráficas de funciones numéricas o fórmulas desde el inicio.

3. Utilizar representaciones gráficas dinámicas y herramientas tecnológicas: la incorporación de entornos como GeoGebra posibilita la visualización continua y dinámica del comportamiento de magnitudes. Esto permite a los estudiantes experimentar el carácter dinámico de la covariación, superando la percepción estática asociada a gráficas trazadas y analizadas con la técnica de punteo.

### **Principios de diseño para la construcción de tareas variacionales y tecnológicas en torno a la covariación exponencial continua**

Los principios de diseño que se establecen están organizados en dos niveles: el nivel matemático, centrado en la covariación exponencial continua y el nivel cognitivo-semiótico, relativo a la construcción de imágenes variacionales que permitan razonar sobre magnitudes variables que intervienen en fenómenos de variación. Como apoyo a estos niveles, se utiliza la tecnología y/o material concreto, particularmente GeoGebra, como un entorno interactivo de visualización y manipulación dinámica. En relación con el **Objetivo específico 3**.

#### ***Nivel matemático (Covariación exponencial continua)***

##### **Principios de diseño de tareas matemáticas (PDTM)**

- **PDTM1** - Exploración de la covariación exponencial continua a través de la visualización, recolección y análisis simultáneo entre valores numéricos de magnitudes variables (fase exploratoria): las tareas deben permitir a los estudiantes involucrarse en un proceso inicial de exploración, donde recolecten, estimen o interpreten los valores numéricos de las magnitudes variables que intervienen en fenómenos de comportamiento exponencial. Este principio tiene como propósito fomentar el reconocimiento intuitivo de patrones de covariación continua y suave, así como su traducción en lenguaje variacional y algebraico.
- **PDTM2** – Sistematización de la covariación exponencial continua mediante aspectos operacionales y estructurales de su representación analítica exponencial (fase de organización): las tareas deben guiar al estudiante hacia la organización de la institucionalización del conocimiento, que articule la comprensión operativa de la expresión analítica exponencial (cómo cambia o se comporta al aumentar o disminuir una magnitud) con su representación tabular, algebraica y gráfica. Esto permitirá una transición de lo intuitivo a lo institucional, esencial en el desarrollo del pensamiento variacional.

##### **Principios de diseño de tareas tecnológicas (PDTT)**

- **PDTT1** - Uso de herramientas tecnológicas interactivas para coordinar procesos reales, ya sean simulados o presentados con videoclips: las tareas deben incorporar tecnología (como GeoGebra) que permita a los estudiantes manipular parámetros o visualizar cómo una magnitud variable varía en relación con otra. Esto facilitaría la comprensión de la relación entre fenómenos reales, simulados, y sus modelos matemáticos, apoyando la construcción de significados en términos de covariación continua y suave.
- **PDTT2** - Visualización dinámica y multiformato de expresiones analíticas exponenciales en distintos modos de representación: las tareas deben ofrecer representaciones gráficas

dinámicas de covariación que permitan mostrar los cambios suaves y continuos (por ejemplo, mediante animaciones), permitiendo a los estudiantes percibir transiciones, comportamientos y razones de cambio. Esto es fundamental para desarrollar la intuición del cambio continuo que exige el pensamiento variacional.

### ***Nivel cognitivo-semiótico (Imágenes variacionales)***

#### **Principios de diseño de tareas matemáticas (PDTM)**

- **PDTM3** – Uso de imágenes variacionales para explorar la covariación exponencial continua (fase exploratoria): las tareas deben estar diseñadas para promover en los estudiantes la construcción de imágenes dinámicas de las propiedades cuantitativas de las magnitudes variables y del proceso de covariación entre ellas. Estas imágenes deben reflejar la continuidad del cambio, permitiendo a los estudiantes argumentar y razonar sobre la dinámica de la covariación.

#### **Principios de diseño de tareas tecnológicas (PDTT)**

- **PDTT3** - Uso de tecnología que facilite la generación de imágenes variacionales: las herramientas tecnológicas utilizadas deben permitir que los estudiantes interactúen con representaciones dinámicas de fenómenos, en las que puedan observar cómo varía una magnitud en relación con otra y modificar parámetros para visualizar diferentes comportamientos exponenciales.
- **PDTT4** - Integración de representaciones dinámicas para favorecer la organización del conocimiento: el entorno tecnológico debe facilitar la construcción de imágenes coherentes y conectadas entre representaciones visuales, tabulares, algebraicas y gráficas, de manera que los estudiantes puedan organizar su conocimiento alrededor de la noción de covariación continua y estructurar ideas sobre razón de cambio y comportamiento asintótico.

Una vez diseñada la secuencia de actividades didácticas se realizará un análisis a priori de la propuesta, empleando las herramientas conceptuales y metodológicas del marco teórico seleccionado. Además, se incluirán las posibles dificultades o procedimientos que los estudiantes deberán desarrollar a lo largo de la secuencia de actividades.

### **6.3 Fase 3: De la puesta en escena**

En esta fase se procederá a la selección de la población estudiantil a la que se le aplicará la secuencia de actividades didácticas. La implementación se llevará a cabo bajo condiciones controladas en el aula, utilizando hojas de trabajo diseñadas previamente, así como otros instrumentos de recolección de datos, según sea el caso pueden ser videograbaciones de sesiones, entrevistas clínicas, etc.

El propósito es observar cómo los estudiantes interactúan con las tareas diseñadas, identificar evidencias del desarrollo del pensamiento variacional, registrando los procesos cognitivos de construcción en torno a la covariación exponencial continua.

### **6.4 Fase 4: Del análisis a posteriori y valoración**

En esta fase se realizará un análisis detallado de los datos obtenidos durante la implementación de las actividades diseñadas, con el objetivo de inferir de forma indirecta las características cognitivas comunes entre los productos cognitivos de los actos mentales presentes en las actividades desarrolladas por los estudiantes, siendo estas sus Maneras Variacionales de Pensar. En correspondencia con la *etapa de Análisis* propuesta en los elementos teóricos establecidos.

Las acciones incluyen:

- Establecer criterios para valorar las producciones de los estudiantes a fin de constatar si fue o no posible que lograran identificar y formular algunas de las características cuantitativas esenciales de la covariación exponencial continua, a partir de la coordinación conjunta y simultánea de los valores numéricos de las magnitudes variables involucradas en los fenómenos a estudiar. Como avance en esta acción se presenta, en anexos, en la Tabla 7 una versión preliminar de las Evidencias de Manifestación y Calidad de la ejecución de las *MVdE-CExpC* que se promoverán en la secuencia de actividades didácticas.
- Confrontar los resultados obtenidos con el análisis a priori, para valorar la adecuación de las tareas y las conjeturas didácticas planteadas.
- Establecer criterios para valorar las fortalezas, debilidades y aspectos a mejorar de la secuencia didáctica. En relación con el **Objetivo específico 4**.

Este análisis permite tomar decisiones informadas para ajustar y refinar las actividades, así como fundamentar las conclusiones del estudio respecto al aprendizaje y al diseño de propuestas orientadas a promover el desarrollo del pensamiento variacional.

En síntesis, la metodología propuesta articula acertadamente los fundamentos teóricos del modelo DNR, las demandas cognitivas del pensamiento variacional y las exigencias didácticas propias del estudio de la covariación exponencial continua. La organización del trabajo en cuatro fases, prediseño, diseño y análisis a priori, puesta en escena, y análisis a posteriori, permiten estructurar un proceso sistemático que integra la identificación de las maneras variacionales de entender, la elaboración de tareas variacionales guiadas por principios de diseño, la observación de la actividad matemática de los estudiantes y la valoración de sus producciones. Este enfoque metodológico no solo garantiza la coherencia entre objetivos del proyecto y las acciones realizadas, sino que establece un camino claro para analizar, interpretar y afianzar la propuesta de intervención, asegurando que las decisiones didácticas se encuentren fundamentadas tanto en la teoría como en la evidencia empírica generada durante el estudio.

A continuación se presentan las conclusiones derivadas del trabajo realizado en este documento. En los anexos se incluye el cronograma de las actividades previstas para los próximos semestres, así como una descripción preliminar de un tipo de actividad con base en los fundamentos teóricos que orientan este proyecto.



## CONCLUSIONES

El trabajo presentado en este documento permite construir un andamiaje conceptual, metodológico y didáctico que fundamenta el proyecto de intervención orientado al desarrollo del pensamiento variacional mediante el estudio de la covariación exponencial continua por estudiantes de educación superior. A partir del análisis de los antecedentes históricos, epistemológicos y disciplinares, fue posible identificar las raíces conceptuales de la variación continua, así como reconocer las dificultades persistentes en la enseñanza y el aprendizaje de fenómenos de comportamiento exponencial. Este recorrido permitió justificar la pertinencia de abordar la covariación exponencial desde un enfoque variacional que priorice la coordinación dinámica de magnitudes y la comprensión del cambio continuo, superando las limitaciones del enfoque tradicional centrado en funciones numéricas y procedimientos estáticos.

En el plano teórico, la articulación entre el modelo DNR de Harel y el pensamiento variacional permitió delimitar las Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial Continua (MVdE-CExpC) como eje rector para el diseño de actividades didácticas. Estas maneras variacionales de entender, acompañadas de sus actos mentales y productos cognitivos asociados (en anexos, ver Tabla 6), ofrecen un marco para orientar los procesos de diseño, implementación y análisis de la intervención. Asimismo, se establecieron principios de diseño de tareas matemáticas y tecnológicas que guían la construcción de tareas variacionales, enfatizando la importancia de promover la necesidad intelectual de los estudiantes, la exploración de las propiedades cuantitativas de fenómenos reales, la coordinación simultánea de magnitudes y la incorporación de herramientas digitales como mediadores cognitivos.

Desde la perspectiva metodológica, la estructura; prediseño, diseño y análisis a priori, puesta en escena y análisis a posteriori, permite organizar sistemáticamente las acciones necesarias para llevar a cabo el proyecto de intervención. En la fase de prediseño, se consolidaron los elementos teóricos y se identificaron las MVdE-CExpC que orientarán la secuencia de actividades. En la fase de diseño, se avanzó en la formulación de criterios didácticos y tecnológicos que serán la base para la construcción de tareas variacionales que articulen contextos reales, simulaciones, representaciones dinámicas y análisis de la covariación, esta formulación surgió como parte de un estudio de replicación dentro del ámbito de una experimentación en el curso *Introducción a la Experimentación de Propuestas de Enseñanza con Tecnología*. En la fase de puesta en escena, se proyectó la recolección de datos en condiciones controladas de aula, mediante hojas de trabajo, videograbaciones e interacción con GeoGebra. Finalmente, la fase de análisis a posteriori estableció criterios preliminares para la valoración de las producciones de los estudiantes, específicamente a través de las evidencias de manifestación y calidad de las MVdE-CExpC (en anexos, ver Tabla 7).

El conjunto de avances hasta el momento ofrece una estructura sólida para el diseño e implementación de las actividades didácticas. La revisión y análisis de trabajos previos, particularmente la experimentación basada en García (2022), permitió reafirmar la importancia

didáctica de las herramientas tecnológicas para favorecer la visualización dinámica de la variación y la reorganización cognitiva de los estudiantes. Esto fortaleció la justificación del uso de recursos interactivos como GeoGebra y confirmó que la tecnología tiene el potencial de fomentar formas de pensamiento coherentes con la covariación continua.

En síntesis, lo que se presenta hasta el momento sobre el proyecto de tesis no solo deja sentada las bases teóricas y metodológicas de la intervención, sino que también permite avanzar en la definición de criterios, principios y procedimientos para orientar la intervención a su siguiente etapa. El trabajo realizado constituye un insumo importante para el diseño e implementación formal de la secuencia didáctica durante los próximos semestres, donde será posible obtener evidencia empírica sobre el impacto de la propuesta en el desarrollo del pensamiento variacional y, con ello, avanzar hacia la consolidación de un marco didáctico más robusto para la enseñanza de la covariación, particularmente la covariación exponencial continua en el contexto del Cálculo.

Finalmente, este trabajo consolida un punto de partida firme para avanzar hacia una propuesta didáctica robusta que responda a una problemática urgente en la enseñanza del Cálculo: la necesidad de formar estudiantes capaces de pensar variacionalmente, de interpretar el cambio continuo y de comprender la dinámica de los fenómenos que modelan. Con ello, el proyecto no solo abre un camino para innovar en la enseñanza de la covariación exponencial continua, sino que también aporta una base conceptual y metodológica que podrá extenderse, profundizarse y convertirse en un referente para futuros trabajos en Matemática Educativa.

## REFERENCIAS

- Amador S. L. M. y Jiménez R. J. R. (2023). *Diseño didáctico de la covariación exponencial bajo el enfoque del pensamiento variacional*. Memorias del XVI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática <https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/view/1338/694>
- Arias-García, A. (2020). *El método de exhaución de Eudoxo aplicado a la cuadratura del círculo* [Fotografía]. <https://totumat.com/2020/05/15/la-integral-definida/>
- Årlebäck, J. B., Doerr, H. M., & O'Neil, A. H. (2013). *A modeling perspective on interpreting rates of change in context*. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 15; 314-336.
- Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. *Ingeniería didáctica en educación matemática, 1*, 97-140. Grupo Editorial Iberoamericana, México.
- Artigue, M. (2009). *Didactical Design in Mathematics Education*. *Nordic Studies in Mathematics Education*, DOI:10.1163/9789087907839\_003 14(3), 7-18, Grupo Editorial Brill, Dinamarca.
- Arzarello, F. (2019). *La covariación instrumentada: Un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica*. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Número 18. pp 11–29. Costa Rica.
- Avgerinos, E., & Remoundou, D. (2021). *The Language of “Rate of Change” in Mathematics*. *European Journal of Investigation in Health, Psychology and Education*, 11(4), 1599-1609.
- Barzel, B., Leuders, T., Prediger, S., & Hußmann, S. (2013). *Designing tasks for engaging students in active knowledge organization*. *ICMI study, 22*, 285-294.
- Bianchini, B., Lima, G. y Gomes, E. (2024). *La tmcc en la revisión del estudio de la función en un problema de ingeniería*. *Tecné, Episteme y Didaxis: ted*, (56), 275 - 300. <https://doi.org/10.17227/ted.num56-18773>
- Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). *Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education*. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(6), 763-777.
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus*. Springer Nature. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32975-8>

- Camarena, P., Loureiro de Lima, G., Gomes, E. y Bianchini, B. (2022). *Pensamiento matemático y cultura matemática: concepciones semánticas en la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias*. PNA, 17(1), 51-88. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.21583>
- Campo-Meneses, K. G., y García-García, J. (2020). *Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos*. Educación Matemática, 32(3), 209-240.
- Capote León, G. E., Rizo Rabelo, N., y Bravo López, G. (2016). *La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria*. Revista Universidad y Sociedad, 8(1), 21-28.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., y Hsu, E. (2003). *Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio*. Educación Matemática, 8, 121-156
- Castillo-Garsow, C. (2012). *Continuous quantitative reasoning*. In R. Mayes, R. Bonillia, L. L. Hatfield, & S. Belbase (Eds.), *Quantitative reasoning: Current state of understanding*. (Vol. 2, pp. 55–73). University of Wyoming
- Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). *Chunky and smooth images of change*. *For the Learning of Mathematics*, 33(3), 31-37.
- Crosby, A. W. (1998). *La medida de la realidad. La cuantificación y la sociedad occidental*. Copyright. ISBN: 84 7423 885 4.
- Curtis, L. J. (1978). *Concept of the exponential law prior to 1900*. *American Journal of Physics*, 46(9), 896-906.
- Davis, J. D. (2009). *Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge*. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 365-389.
- Díaz Godino, J., Batanero Bernabéu, C., Cid, E., Font, V., Roa Guzmán, R., y Ruiz, F. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. ISBN: 84-933517-1-7. <https://hdl.handle.net/10481/95586>
- Dray, T. & Manogue, C. A. (2010) *Putting differentials back into Calculus*. *The College Mathematics Journal*, v41 n2 p90-100. doi: 10.4169/ 074683410x480195. 01Mar2017 [math.oregonstate.edu/bridge/papers/CMJdifferentials.pdf](http://math.oregonstate.edu/bridge/papers/CMJdifferentials.pdf)
- Edwards, C. J. (1979). *The historical development of the calculus*. Springer Science & Business Media.
- Ely, R. (2021). *Teaching calculus with infinitesimals and differentials*. *ZDM–Mathematics Education*, 53, 591-604. Aula Magna Proyecto clave McGraw Hill.

- Ely, R., & Ellis, A. B. (2018). *Scaling-continuous variation: A productive foundation for calculus reasoning*. In Proceedings of the 21st annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 1180-1188). SIGMAA on RUME.
- Foti, S. B. (2021). *Las funciones exponenciales: Un análisis de la distancia epistemológica*. Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.
- García Teutli, U. (2022). *Diseño y valoración de actividades en GeoGebra para el aprendizaje de la función real desde la teoría de variación y covariación*. Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla <https://hdl.handle.net/20.500.12371/17705>
- García, R., J. Á. (2013). *La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Revista Educación, 37(1), 29-42.
- Gatica, S. N., y Ares, O. E. (2012). *La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos*. Edmetic, 1(2), 88-107.
- Greeno, G. (1992). *Mathematical and scientific thinking in classroom and other situations*. In D. Halpern (Ed.), Enhancing thinking skills in sciences and mathematics (pp. 39–61). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Harel, G. (2008). *What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question*. En B. Gold & R. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. <https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf>
- Harel, G. (2008a). *DNR perspective on mathematics curriculum and instruction*, Part I: Focus on proving. ZDM - International Journal on Mathematics Education, 40(3), 487–500. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1>
- Harel, G. (2008b). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction*, Part II ZDM—The International Journal on Mathematics Education, pp. 487 – 500. <https://mathweb.ucsd.edu/~harel/pdf/DNRII.pdf>
- Harel, G. (2013). *Intellectual need*. In vital direction for mathematics education research, Leatham, K. (Ed.), Springer.
- Harel, G. (2021). *The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective*. ZDM - Mathematics Education, 53(3), 709–721. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01223-8>
- Herrera, H., Moreno-Beltrán, R., y Cuesta-Borges, A. (2024). *Múltiples Representaciones en un curso de Cálculo Diferencial de Bachillerato a través del Microlearning*. Journal of Research in Mathematics Education, 13(1), 87-110.

- Hodaňová, J., & Nocar, D. (2016). *Mathematics importance in our life*. In INTED2016 Proceedings (pp. 3086-3092). IATED. DOI: 10.21125/inted.2016.0172
- Ímaz, C. y L. Moreno (2010) *La génesis y la enseñanza del cálculo*. Las trampas del rigor. México, Trillas.
- Jiménez R. J. R., Grijalva M. A., Milner, F. A., Dávila A. M. T., y Romero F. C. F. (2022). *Reconceptualización didáctica del Cálculo*. Editorial de la Universidad de Sonora. México. <https://doi.org/10.47807/UNISON.201>
- Jiménez-Rodríguez, J. R. (2020). *Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics / El nivel cero del razonamiento covariacional en la educación secundaria*. <https://pmena2020.cinvestav.mx/Portals/pmena2020/Proceedings/PMENA42-BRR1655990-Jimenez.pdf>
- Johnson, H. L., & McClintock, E. (2018). *A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning*. Educational Studies in Mathematics, 97, 299-316.
- Kaput, J. J. (1994). *Democratizing access to calculus: New routes to old roots*. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 77-156). Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. J., & Roschelle, J. (2013). *The Mathematics of Change and Variation from a Millennial Perspective: New Content, New Context*. The SimCalc Vision and Contributions: Democratizing Access to Important Mathematics, 13-26.
- Khanh, T. L. C., Tien, L. V., & Loi, N. H. (2020). *An Analysis Of The Concept Of Exponential Functions In History And Textbooks In Vietnam*. The International Journal of Engineering and Science, 9(11), 23-28.
- Kleiner, I. (2001). *History of the infinitely small and the infinitely large in calculus*. Educational Studies in Mathematics, 48, 137-174.
- Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). *Understanding the concepts of calculus: Frameworks and roadmaps emerging from educational research*. Compendium for research in mathematics education, 526-550.
- Larson, R., y Edwards, B. (2016). *Cálculo*, Tomo I. Décima edición. Cengage Learning.
- Maor, E. (2006). *E: historia de un número*. Librería.
- Moreno, M. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros*. IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.

- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderna*, 5ta ed. Pearson Educación.
- Orton, A. (1983). *Students' understanding of differentiation*. Educational studies in mathematics, 14(3), 235-250.
- Pérez Herrera, A. (2023). *Modelo didáctico-contextual para desarrollar aprendizajes significativos en estudiantes de ingeniería en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales*. Tesis Doctoral, Repertorio Institucional, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.
- Pinilla Castañeda, A. D., Hernandez, A. D., y Daniel Castellanos, C. (2024). *Instrumento para potenciar el aprendizaje del cálculo de volúmenes desde la perspectiva de Cavalieri*. Revista Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 19(1).
- Presmeg, N., & Nenduradu, R. (2005). *An Investigation of a Preservice Teacher's Use of Representations in Solving Algebraic Problems Involving Exponential Relationships*. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 105-112.
- Redish, E. F., & Smith, K. A. (2008). *Looking beyond content: Skill development for engineers*. Journal of engineering education, 97(3), 295-307.
- Retana, J. Á. G. (2013). *La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Revista Educación, 37(1), 29-42.
- Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). *Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation*. In Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Salinas, P., y Alanís, J. A. (2009). *Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa*. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12(3), 355-382.
- Selden, A., & Selden, J. (2013). *Advanced mathematical thinking: A special issue of mathematical thinking and learning*. 10.4324/9781315045955
- Sharhorodska, O., Alvarez, A. P., y Alpaca, N. B. (2018). *Las matemáticas y la formación del ingeniero, como una relación simbiótica*. Revista Referencia Pedagógica, 6(2), 175-189.
- Sternberg, R. J. (1996). *What is mathematical thinking?* En R.J. Sternberg y Ben-Zeev (Eds.), The nature of mathematical thinking (pp. 303-318). Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum.
- Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). *Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial*. Educación matemática, 25(2), 89-118.
- Swidan, O., Schacht, F., Sabena, C., Fried, M., El-Sana, J., & Arzarello, F. (2020). *Engaging students in covariational reasoning within an augmented reality environment*. En

Augmented Reality in Educational Settings (pp. 147–167). Brill.  
<https://brill.com/display/book/9789004408845/BP000016.xml>

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Thompson, P. W. (1994). *Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus*. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 229-274.  
<https://doi.org/10.1007/BF01273664>

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). *Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically*. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). *Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically*. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). *Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties*. *ZDM–Mathematics education*, 53(3), 507-519.

Thompson, P. W., Ashbrook, M., & Milner, F. (2019). *Calculus: Newton, Leibniz, and Robisonmeet technology*. Retrieved from <http://patthompson.net/ThompsonCalc/>

Thompson, P. W., y Harel, G. (2021). *Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties*. *ZDM–Mathematics education*, 53(3), 507-519.

Valencia Álvarez, A. B., & Valenzuela González, J. R. (2017). *¿A qué tipo de problemas matemáticos están expuestos los estudiantes de Cálculo? Un análisis de libros de texto*. *Educación Matemática*, 29(3), 51–78. <https://doi.org/10.24844/em2903.02>

Van Schendel C. (2019) *Mathematical Thinking: Short Circuits Between the Mathematicians' Work and Educational Theories*. Written for 30 ECTS research project Science Education and Communication. Utrecht  
<https://studenttheses.uu.nl/handle/20.500.12932/33367>

Vasco, C. E. (2003). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. In *Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática*, Blumenau (Vol. 9, pp. 2009-2010). Obtenido de <https://www.studocu.com/es-mx/document/universidad-de-mexicali/quimica/carlos-e-vasco-pensamiento-variacional-y-la-modelacion-matematica/13026673> el 8 de febrero de 2025.

Vorhölter, K., Kaiser, G., & Borromeo Ferri, R. (2014). *Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics*

*education*. Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices, 21-36.

Yu, F. (2019). *A Student's Meanings for the Derivative at a Point*. In Proceedings of the 23rd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education (pp. 672-680).

Yu, F. (2024). *Extending the covariation framework: Connecting covariational reasoning to students' interpretation of rate of change*. The Journal of Mathematical Behavior, 73, 101122.

Zieldóvich, Ya. B. y Yaglóm, I. M. (1970) *Matemática superior para principiantes y sus aplicaciones a la física*. 5<sup>a</sup> ed. Moscú: Naúka.



## ANEXOS

### CRONOGRAMA

Se presenta un cronograma con los avances que se han tenido en el proyecto y las proyecciones futuras para la conclusión de la tesis.

Capítulos y fases del proyecto	I Semestre	II Semestre	III Semestre	IV Semestre	V Semestre	VI Semestre	VII Semestre	VIII Semestre
Antecedentes								
Estado del arte								
Problemática								
Justificación								
Objetivos								
Aspectos teóricos								
Aspectos metodológicos								
Examen predoctoral								
Fase de prediseño								
Fase de diseño y análisis a priori								
Fase de Puesta en escena								
Fase de análisis a posteriori y valoración								
Reporte final del proyecto de tesis								

Se espera que en los semestres restantes del Posgrado se realicen más participaciones en eventos académicos, publicaciones en revistas importantes del área de Matemática Educativa, estancia doctoral que permita realizar consideraciones importantes en el proyecto, entre otras actividades. Parte del propósito es para cumplir los requisitos de titulación del posgrado, sin embargo, considero que son actividades enriquecedoras para mi formación académica y profesional.

## Anexo 1:

Tabla 6 MVdE-CExpC, actos mentales básicos o elementales y productos cognitivos

<i>MVdE-CExpC</i>	Actos mentales	Productos cognitivos
1	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial con variaciones aritméticas iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales iguales en la magnitud variable dependiente.	<p>Identificar incrementos aritméticos iguales en la magnitud independiente; cambios no aditivos sino proporcionales.</p> <p>Identificar</p> <p>Relacionar la constancia del cociente, <math>\frac{N_{i+1}}{N_i} = a</math>, con el patrón multiplicativo del crecimiento o decrecimiento.</p> <p>Relacionar</p> <p>Argumentar la diferencia entre variación aditiva y multiplicativa, justificando que se presenta un cambio proporcional constante.</p> <p>Argumentar</p> <p>Representar</p> <p>Representar expresiones como <math>N(x + \Delta h) = N(x) \cdot a</math> o <math>N(x + 1) = N(x) \cdot a</math> o <math>N(x) = N_0 \cdot a^x</math>; tablas y gráficas que muestran la constancia del factor multiplicativo.</p>
2	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial $N(\Delta h)$ con variaciones aritméticas iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales en la magnitud variable dependiente de la forma $N(a^{\Delta h} - 1)$ .	<p>Identificar intervalos de variación <math>\Delta h</math> y el cambio proporcional relativo <math>a^{\Delta h} - 1</math>.</p> <p>Identificar</p> <p>Relacionar la magnitud del incremento <math>\Delta h</math> con la magnitud del cambio proporcional; la base <math>a</math> con la intensidad del cambio.</p> <p>Relacionar</p> <p>Argumentar que el cambio relativo depende de <math>\Delta h</math> y de la base <math>a</math>; <math>a^{\Delta h} - 1</math> cuantifica la relación entre ambas magnitudes.</p> <p>Argumentar</p> <p>Representar</p> <p>Representar expresiones algebraicas como <math>\frac{N(x+\Delta h) - N(x)}{N(x)} = a^{\Delta h} - 1</math> y representaciones gráficas o tabulares de los efectos de distintos <math>\Delta h</math>.</p>
3	La razón promedio de cambio relativa de una magnitud covariante de comportamiento exponencial, para incrementos iguales de la magnitud variable independiente, es igual a una constante numérica no nula.	<p>Identificar incrementos iguales en la magnitud independiente y cálculo de la razón promedio de cambio relativa.</p> <p>Identificar</p> <p>Relacionar la razón promedio de cambio relativa con la noción de tasa de crecimiento o decrecimiento constante.</p> <p>Relacionar</p> <p>Argumentar que la invariación de la razón promedio de cambio relativa caracteriza la regularidad proporcional del fenómeno.</p> <p>Argumentar</p> <p>Representar</p> <p>Representar expresiones algebraicas como <math>\frac{e^{k\Delta t} - 1}{\Delta t}</math> y representaciones gráficas que muestren constancia del crecimiento relativo.</p>
4	Una magnitud covariante cuya razón instantánea de cambio es directamente proporcional al valor actual de dicha magnitud variable.	<p>Identificar que la magnitud dependiente cambia a un ritmo proporcional a su valor; reconocer <math>\frac{dN}{dt} = kN</math> como modelo.</p> <p>Identificar</p> <p>Relacionar el valor actual de la magnitud con su tasa de cambio; la constante <math>k</math> con el tipo de genomeno (crecimiento o decrecimiento).</p> <p>Relacionar</p> <p>Argumentar</p> <p>Representar</p>

Argumentar que la proporcionalidad entre el valor y su cambio origina el modelo exponencial  $N(t) = N_0 \cdot e^{kt}$ .

Representar la variación infinitesimal de la magnitud variable de interés,  $dN = kNdt$ , y la razón instantánea de cambio,  $\frac{dN}{dt} = kN$ , su solución y su representación gráfica como crecimiento o decrecimiento proporcional continuo.

*Nota.* Elaboración conjunta con el Director de Tesis.

## Anexo 2:

Tabla 7 Criterios para valorar la manifestación y calidad de las MVdE-CExpC

<i>MVdE-CExpC</i>	Evidencias de manifestación	Calidad de la ejecución
Una magnitud covariante de comportamiento exponencial con variaciones aritméticas iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales iguales en la magnitud variable dependiente.	Los estudiantes identifican un factor constante de multiplicación al analizar los valores numéricos de las magnitudes variables en sus diversas representaciones (tabular, gráfica o expresiones algebraicas). En su discurso o argumentación expresan ideas como “cada vez se multiplica por el mismo número” o “aumenta en la misma proporción”. En sus representaciones emplean escalas multiplicativas y formulan relaciones del tipo $N(x + \Delta h) = N(x) \cdot a$ o $\frac{N(x + \Delta h)}{N(x)} = a$	Se refleja en la capacidad para: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Distinguir entre crecimiento aditivo y multiplicativo.</li> <li>• Establecer que incrementos iguales de la magnitud independiente generan razones proporcionales iguales en la dependiente.</li> <li>• Expresar la covariación de la forma analítica y argumentada, mostrando comprensión de la estructura multiplicativa del fenómeno.</li> </ul>
Una magnitud covariante de comportamiento exponencial $N(\Delta h)$ con variaciones aritméticas iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales en la magnitud variable dependiente de la forma $N(a^{\Delta h} - 1)$ .	Los estudiantes reconocen que el cambio proporcional depende del tamaño del incremento $\Delta h$ y lo expresan en lenguaje verbal o simbólico, usando frases como “si el intervalo es más grande, la proporción también cambia”. En sus representaciones ajustan los factores de cambio en intervalos distintos y modelan la dependencia mediante $N(x + \Delta h) = a^{\Delta h}.$	Se evidencia en la capacidad para: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Justificar que el cambio proporcional no es constante, sino depende del tamaño del incremento <math>\Delta h</math>.</li> <li>• Representar esta relación en expresiones generales coherentes con el modelo <math>N(a^{\Delta h} - 1)</math>.</li> <li>• Interpretar que el comportamiento exponencial es continuo, estableciendo una relación entre incremento y valor resultante.</li> </ul>
La razón promedio de cambio relativa de una magnitud covariante de comportamiento exponencial, para incrementos iguales de la magnitud variable independiente, es igual	Los estudiantes utilizan expresiones como “aumenta siempre el mismo porcentaje” o “crece un mismo porcentaje cada vez”. Identifican que la razón promedio de cambio relativa no depende del valor de la magnitud independiente, aunque el cambio absoluto sí lo haga. En representaciones tabulares o gráficas aplican una misma	Se aprecia en la capacidad para: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentar que la constancia de razón relativa caracteriza al comportamiento exponencial.</li> <li>• Distinguir entre cambio absoluto y cambio relativo, identificando lo invariante como la proporción del cambio respecto al valor actual.</li> </ul>

<p>a una constante numérica no nula.</p>	<p>tasa relativa a distintos intervalos, expresando la constancia de:</p> $\frac{N(x+\Delta h) - N(x)}{N(x)} = a^{\Delta h} - 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aplicar correctamente la noción de tasa relativa constante en diversos contextos.</li> </ul>
<p>Una magnitud covariante cuya razón instantánea de cambio es directamente proporcional al valor actual de dicha magnitud variable.</p>	<p>Los estudiantes reconocen que la variación depende del valor actual de la magnitud de interés. En representaciones gráficas asocian la pendiente de la curva con su altura, y expresan ideas como “cuánto más grande es la cantidad, más rápido crece”. En gráficas covariacionales, identifican la proporcionalidad directa entre magnitud y ritmo de cambio.</p>	<p>Se determina por la capacidad para</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Establecer y comprender la relación diferencial <math>\frac{dN}{dh} = kN</math>, reconociendo su significado variacional.</li> <li>• Interpretar el parámetro k como la tasa relativa instantánea que determina el tipo de crecimiento o decrecimiento continuo.</li> <li>• Integrar el razonamiento gráfico, analítico y verbal para expresar la proporcionalidad directa entre magnitud y cambio, relacionándola con el modelo exponencial <math>N = Ce^{kh}</math>.</li> </ul>

*Nota.* Elaboración conjunta con el Director de Tesis.

### **Anexo 3: Descripción preliminar de un tipo de actividad**

#### **Objetivo general de aprendizaje:**

- Formar en los estudiantes una imagen adecuada de la covariación continua y suave, que les permita comprender, razonar y representar de manera dinámica la relación entre magnitudes que varían conjuntamente en fenómenos de variación y cambio.

Para el establecimiento de esta actividad se espera que los estudiantes alcancen los siguientes objetivos específicos de aprendizaje:

- Reconocer y describir el comportamiento del decrecimiento y crecimiento exponencial continuo a partir de la observación e interpretación dinámica del proceso de purificación del queroseno mediante un filtro de caolín, con el propósito de construir imágenes mentales que permitan comprender la covariación entre la longitud del filtro y la concentración tanto de contaminantes como de pureza en el queroseno.
- Analizar y modelar la relación exponencial entre la longitud del filtro de caolín y las concentraciones de contaminantes y pureza del queroseno, utilizando representaciones gráficas, tabulares y algebraicas que faciliten la expresión y comprensión de dicha relación cuantitativa.

#### ***SITUACIÓN 1. El problema de la purificación del queroseno***

Para que el queroseno se pueda usar como combustible en los motores a reacción, los Reglamentos Federales de los E.U. establecen que se le deben eliminar contaminantes haciéndolo pasar a través de un material poroso llamado caolín. Supondremos que el caolín está depositado en el interior de un tubo formando un filtro, y que cada pulgada (aprox. 2.5 cm.) de tubo elimina el 5% de los contaminantes. Por consiguiente, de cada pulgada de tubo sale 95% de la contaminación. Suponiendo que la concentración inicial de contaminantes del queroseno es de 10%, ¿de qué longitud debe ser el filtro de caolín para que, según los Reglamentos Federales, el queroseno alcance una pureza del 99%? Explora la relación que existe entre la longitud del filtro y la concentración de contaminantes en el queroseno.

#### ***Descripción de las actividades:***

Las actividades se han estructurado en cuatro secciones, y cada una de ellas persigue propósitos que orientan el desarrollo de las tareas con ayuda de los applets diseñados en GeoGebra, como se muestran a continuación:

#### ***Sección 1:***

Esta sección tiene como propósito que los estudiantes observen, describan y analicen cualitativamente el comportamiento de una magnitud variable (la concentración de contaminantes) en un proceso de decrecimiento continuo. Se busca que, a partir de una simulación dinámica, los estudiantes identifiquen intuitivamente la forma del cambio, reconozcan la naturaleza no lineal del proceso y comprendan que la variación se produce de

forma continua, pero con una razón de cambio decreciente. Asimismo, se pretende que comiencen a construir imágenes mentales sobre la persistencia del cambio y la tendencia asintótica del fenómeno, sin necesidad de recurrir aún a representaciones algebraicas.

En esta sección se le presentan a los estudiantes actividades exploratorias para observar y analizar el fenómeno de purificación, por lo que se les presenta la siguiente indicación:

***Actividad exploratoria: Observa y analiza el fenómeno de purificación***

***Indicaciones para los estudiantes:***

Utiliza el applet de GeoGebra ***“Simulación”*** y haz clic en el botón ***Iniciar simulación*** para observar el proceso de purificación del queroseno. A partir de lo que observes, responde lo siguiente.

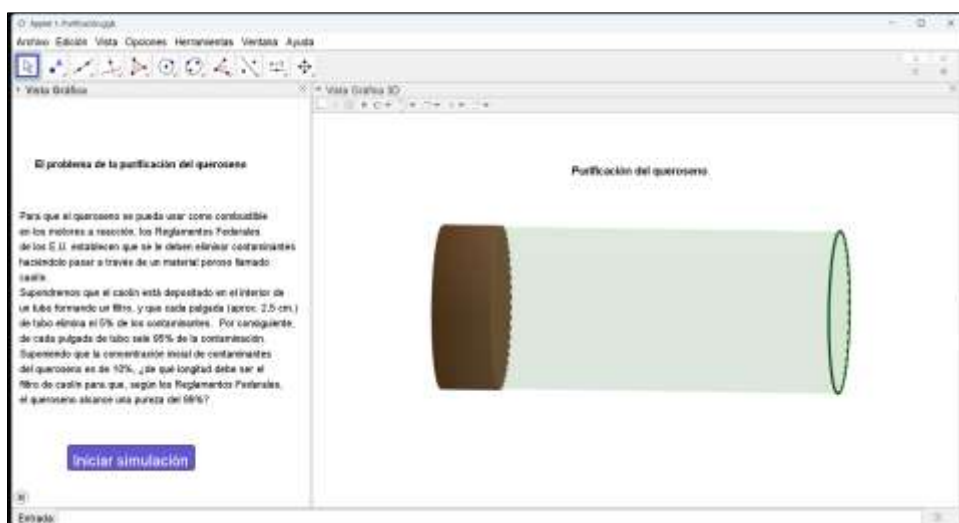


Figura 5 Imagen del applet 1) sobre simulación del fenómeno de purificación

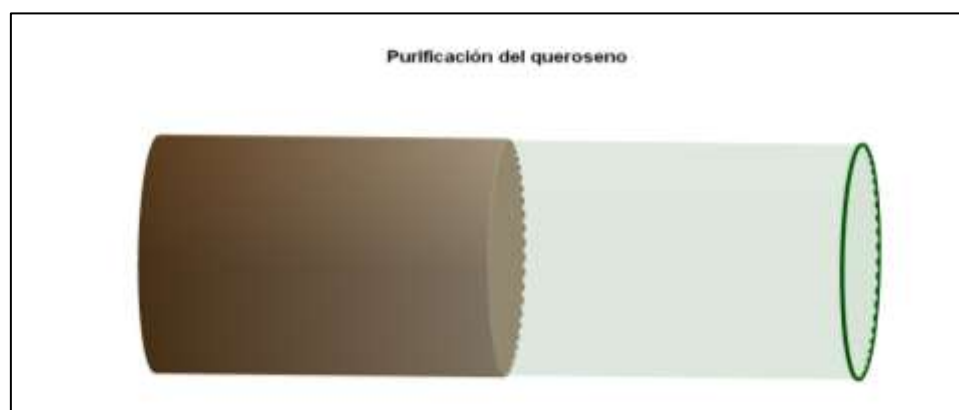


Figura 6 Imagen cercana del applet 1) sobre el inicio de la simulación

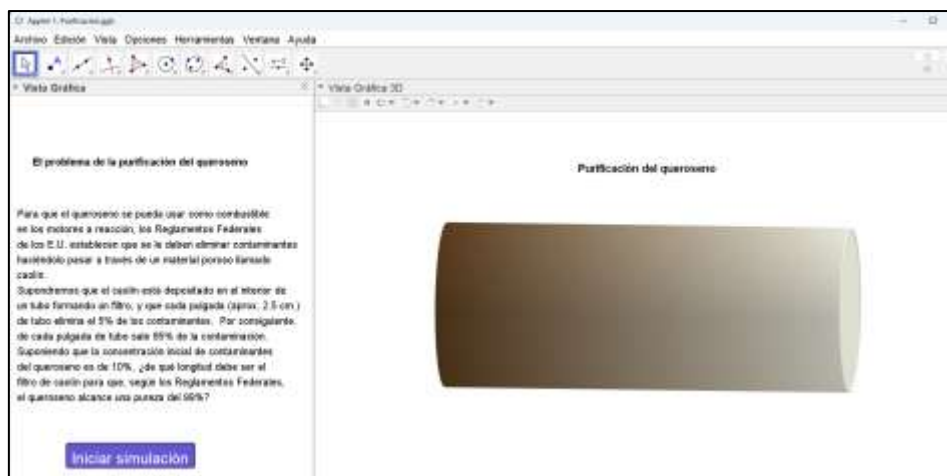


Figura 7 Imagen del applet 1) capturando la finalización de la simulación

Las Figuras 1, 2 y 3 muestran un applet interactivo que simula el fenómeno de purificación del queroseno. Este recurso fue diseñado con el propósito de que los estudiantes no solo observen cómo ocurre el proceso de manera visual, sino que también vivan una experiencia dinámica del cambio. A través de la simulación, se busca que los estudiantes construyan imágenes mentales en movimiento sobre cómo varía la concentración de contaminantes a lo largo del filtro. Se postula que estas imágenes dinámicas facilitarían luego la articulación con otras representaciones del fenómeno, como tablas de valores numéricos, gráficas y expresiones algebraicas, favoreciendo así una comprensión más profunda y conectada del comportamiento exponencial involucrado.

### ***Sección 2:***

Esta sección tiene como propósito que los estudiantes profundicen en la observación del comportamiento del proceso de purificación del queroseno, enfocándose en cómo varía la concentración de contaminantes a lo largo de diferentes tramos del filtro. Se espera que identifiquen diferencias visuales en el cambio entre el inicio, el medio y el final del filtro, y que vayan creando hipótesis sobre la razón por la cual la disminución en la concentración se hace progresivamente más lenta. Además, se busca que los estudiantes analicen la relación entre el porcentaje de contaminantes y el porcentaje de pureza, reconociendo su comportamiento inverso y su vínculo con la conservación del 100%. Finalmente, se pretende que comiencen a construir una comprensión más precisa sobre el comportamiento asintótico del proceso, argumentando por qué el 0% de contaminantes es una meta inalcanzable en términos exactos, aun cuando visualmente se aproxime a ella.

### ***Indicaciones para los estudiantes:***

Sigue explorando el comportamiento del proceso de purificación utilizando el applet de GeoGebra [“% de contaminantes”](#).

- Haz clic en el botón **“Iniciar”** para observar cómo varía la concentración de contaminantes a medida que el queroseno atraviesa el filtro.
- Si consideras necesario repetir la simulación para analizar mejor el fenómeno, puedes utilizar el botón **“Reiniciar”**.

Durante tu exploración, describe lo que observas y reflexiona sobre cómo cambia la concentración a lo largo del filtro.



Figura 8 Imagen del applet 2) sobre el análisis del proceso de purificación simulado

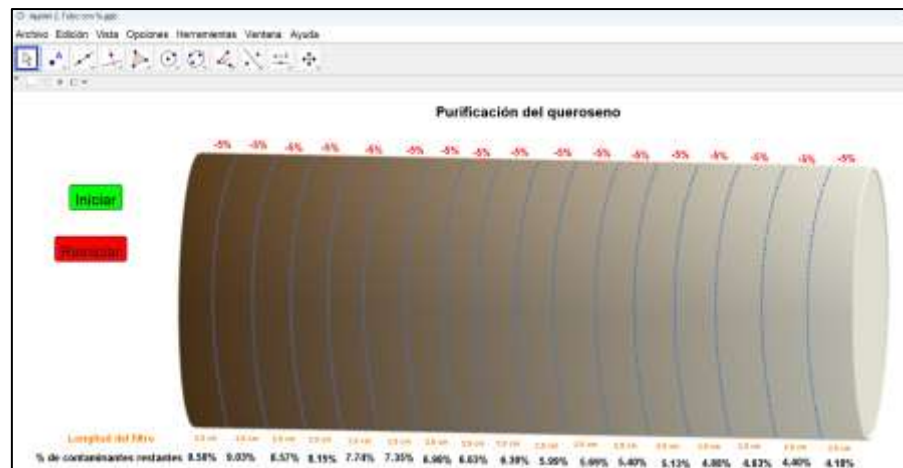


Figura 9 Imagen sobre el applet 2) durante la animación

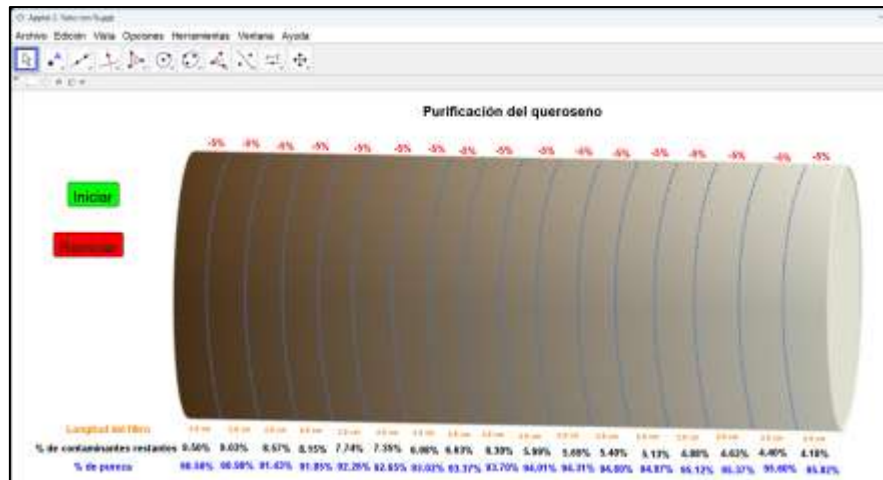


Figura 10 Imagen sobre el applet 2) al finalizar la animación

Las Figuras 4, 5 y 6 presentan un applet interactivo elaborado a partir de una imagen estática (captura de pantalla) del proceso de purificación una vez finalizado. Este recurso tiene como finalidad que los estudiantes, después de haber observado el fenómeno en desarrollo, tengan un primer acercamiento cuantitativo al proceso. A partir de esta visualización, se busca que se cuestionen sobre la proporción de contaminantes que aún permanecen; una magnitud que exhibe un comportamiento de decrecimiento exponencial continuo, así como sobre el porcentaje de pureza del queroseno; el cual representa una magnitud en crecimiento exponencial saturado.

### ***Sección 3:***

Esta sección tiene como propósito que los estudiantes organicen e interpreten la información obtenida en las simulaciones anteriores mediante el análisis de valores numéricos representados en una tabla. Se espera que, al completar y examinar la tabla, los estudiantes reconozcan regularidades matemáticas en el comportamiento de la concentración de contaminantes y comprendan cómo se modela este cambio mediante una sucesión geométrica decreciente. Asimismo, se busca que los estudiantes identifiquen el tipo de sucesión que describe la longitud del filtro (sucesión aritmética) y establezcan la relación entre ambas sucesiones, destacando cómo una magnitud (la longitud) crece uniformemente mientras la otra (la concentración) decrece cada vez menos (sucesión geométrica). Finalmente, esta sección pretende que los estudiantes comprendan el papel de la razón constante como mecanismo de cambio en procesos exponenciales, y cómo el porcentaje de eliminación se traduce matemáticamente en una reducción proporcional que da lugar a una tendencia decreciente continua. Las Figuras 7 y 8 muestran la imagen del applet diseñado para lograr estas intenciones:

### ***Actividades de organización del conocimiento***

#### ***Indicaciones para los estudiantes:***

Utiliza el applet **“Tabla N°1”** para que puedas completar la siguiente tabla, en la que se consigna la concentración de contaminantes que corresponden a cada longitud del filtro.

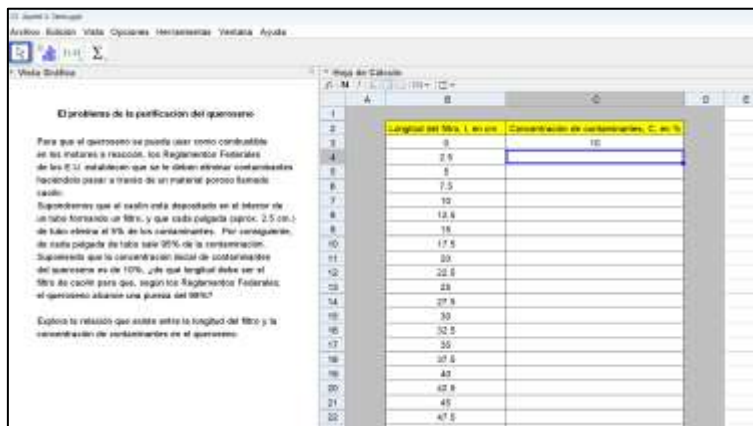


Figura 11 Imagen del applet 3) sobre el análisis tabular de los valores numéricos de las magnitudes variables que intervienen en el fenómeno de purificación

	A	B	C	D
1				
2		Longitud del filtro, L, en cm.	Concentración de contaminantes, C, en %	
3		0	10	
4		2.5	9.5	
5		5	9.025	
6		7.5	8.57375	
7		10	8.14500	
8		12.5	7.73750	
9		15	7.35000	
10		17.5	6.98337	
11		20	6.6342	
12		22.5	6.30049	
13		25	5.98127	
14		27.5	5.688	
15		30	5.409	
16		32.5	5.1342	
17		35	4.87676	
18		37.5	4.63201	
19		40	4.40127	
20		42.5	4.1812	
21		45	3.97214	
22		47.5	3.77354	

Figura 12 Imagen del applet 3) sobre el análisis tabular de los valores numéricos de las magnitudes variables completado

#### Sección 4:

Esta sección tiene como propósito que los estudiantes interpreten de forma dinámica el comportamiento gráfico del proceso de purificación del queroseno mediante el uso del applet de GeoGebra. A través del análisis visual y numérico de los datos representados en el plano cartesiano, se busca que identifiquen la naturaleza del cambio en las magnitudes variables involucradas: la longitud del filtro (magnitud variable independiente) y la concentración de contaminantes (magnitud variable dependiente). Se espera que los estudiantes reconozcan que la longitud del filtro aumenta a ritmo constante mientras la concentración de contaminantes decrece cada vez menos, lo cual se traduce gráficamente en una curva descendente de concavidad positiva. Esta experiencia visual se espera que permita a los estudiantes construir una noción de covariación exponencial y desacelerada, promoviendo la comprensión de

relaciones entre las magnitudes mediante representaciones gráficas. Además, se pretende que los estudiantes expresen algebraicamente dicha relación mediante una expresión analítica exponencial o modelo exponencial del tipo  $C(l) = 10(0.95)^{l/2.5}$ , y que desarrollen habilidades para modelar situaciones reales, como estimar la longitud necesaria del filtro para alcanzar un nivel específico de pureza. De esta forma, se fortalecen las conexiones entre lo visual, lo algebraico y lo contextual, favoreciendo un pensamiento variacional más dinámico y profundo. Las figuras 9 y 10 muestran la imagen estática del applet sobre el análisis dinámico de gráficas.

Indicaciones para los estudiantes:

Para la siguiente actividad utiliza el applet de GeoGebra [“Análisis dinámico de gráficas”](#), y responde.

Representación gráfica de la concentración de contaminantes

a) Activa la opción de **Cantidad inicial de contaminantes**, luego da clic en **Iniciar**. Observa el comportamiento de los valores numéricos de las magnitudes variables, representadas en el plano cartesiano.



Figura 13 Imagen del applet 4) sobre el análisis dinámico de gráficas

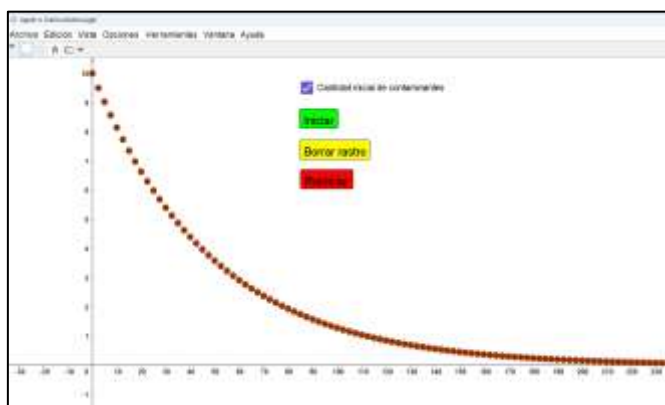


Figura 14 Imagen del applet 4) sobre el análisis dinámico de gráficas al finalizar la animación