UNIVERSIDAD DE SONORA

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias
con Especialidad en Matemática Educativa

Desarrollo del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Educación Secundaria

Documento predoctoral que presenta

José Manuel Castillo Sedano

Director de Tesis:

Dr. José Ramón Jiménez Rodríguez

Posgrado en Matemática EDUCATIVA Universidad de Sonora

Hermosillo, Sonora. Enero 2026

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo que ha proporcionado para mi formación académica con la beca número 708967

Contenido

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

El presente proyecto de tesis aborda el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación secundaria. Dicho tipo de pensamiento se concibe como una forma de razonamiento matemático orientada a analizar fenómenos de variación continua en procesos dinámicos de la realidad en los cuales intervienen ciertas cualidades perceptibles y medibles del fenómeno (magnitudes variables), las cuales presentan un cambio en progreso a través del tiempo y el espacio.

Nuestra conceptualización se diferencia de otras interpretaciones del término “variación”, dado que no se centra en el estudio formal de las funciones, y tampoco se enfoca en analizar los procesos de variación de forma discreta o “por partes”, de forma estática. Es decir, se orienta hacia el análisis dinámico y continuo de los fenómenos de cambio. En el currículo de la Nueva Escuela Mexicana (2024) se menciona que es importante desarrollar en los estudiantes el pensamiento variacional. Sin embargo, se identifican ciertos vacíos y confusiones en los documentos oficiales, dado que no presentan claridad conceptual y didáctica para fomentar de manera apropiada dicho tipo de razonamiento.

Históricamente, el pensamiento variacional conecta con la evolución del estudio matemático de las magnitudes variables desde la antigüedad, pasando por las contribuciones de grandes pensadores matemáticos como Nicolás Oresme y Galileo Galilei. Nuestro trabajo de intervención didáctica enfatiza la distinción entre el razonamiento variacional (análisis de la variación dinámica y continua del cambio mediante la construcción de imágenes mentales sobre magnitudes variables), y el razonamiento funcional (análisis de la variación discreta y abstracta centrado en el estudio formal de funciones).

Consideramos que el desarrollo del pensamiento variacional se posibilita en dos etapas clave: primero, trabajar inicialmente el razonamiento univariacional, relacionado con el estudio matemático del comportamiento de una sola magnitud variable (aislada de forma artificial) en la recta numérica, luego avanzar al razonamiento covariacional que involucra la coordinación de dos o más magnitudes variables en el plano cartesiano.

Asimismo, se plantea un marco teórico-metodológico el cual funciona como un aparato didáctico para identificar y fomentar ciertas acciones mentales relacionadas con maneras variacionales de entender y de pensar deseables para desarrollar en los estudiantes. Dicho marco se apoya en modelos teóricos como los de Harel (2008; 2008a; 2008b), Carlson y cols. (2003), Thompson y Carlson (2017), Jiménez et al. (2022) y Castillo y Jiménez (2023) con el propósito de mejorar la enseñanza-aprendizaje del pensamiento variacional.

En resumen, el presente proyecto de tesis proporciona una fundamentación teórico-metodológica y didáctica para fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación secundaria, contribuyendo a la claridad tanto del concepto y al diseño de las actividades didácticas con el uso de tecnología digital que promueva una comprensión más profunda y dinámica del cambio y la variación continua en contextos reales.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

El presente proyecto de tesis aborda el estudio del pensamiento variacional, entendido como una forma de razonamiento que permite analizar fenómenos de variación y cambio en contextos diversos. Para evitar confusiones, es necesario precisar que dicho enfoque no se identifica con otras acepciones del término “variación” comúnmente empleadas en educación o en matemáticas.

En primer lugar, no se relaciona con la Teoría de la Variación de Marton, centrada en el análisis pedagógico de contrastes y diferencias que según Leung (2012) posibilitan estructurar las experiencias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En segundo lugar, no corresponde al uso del concepto de variación en el área de Estadística, en donde Silva y Coutinho (2008) mencionan que se vincula con las ideas de medidas de dispersión tales como la varianza o la desviación estándar.

En tercer lugar, tampoco se refiere al trabajo puramente algebraico como el de Mestre y Oliveira (2012) enfocado en variables numéricas, en donde dichas variables son de carácter discreto, atemporales y adimensionales, orientadas al razonamiento cuantitativo (intramatemático). En cuarto lugar, el significado que se asume en el presente enfoque no está anclado al estudio y tratamiento formal de las funciones, como en los trabajos de Mateus-Nieves y Moreno (2021), donde se conceptualiza a la función como correspondencia entre conjuntos numéricos.

En quinto lugar, aunque está directamente relacionado con el estudio matemático de procesos dinámicos de la realidad, mantiene una sutil diferencia con otros enfoques que comparten esta visión, es decir, no se restringe al estudio de la variación discreta o “por partes”, ni la prioriza, como se aborda por ejemplo en el artículo de Stephens (2005).

En cambio, nuestra caracterización del pensamiento variacional se distingue como una forma genérica de pensar, orientada al estudio de procesos y/o fenómenos dinámicos (situaciones variacionales), aquellos que cambian y transcurren en el tiempo y el espacio, y en donde intervienen ciertas cualidades perceptibles del fenómeno que es posible medir, a las que denominamos magnitudes variables.

Entonces, el hecho de comprender o interpretar de manera parcialmente adecuada una situación variacional concreta de un fenómeno de la realidad no se considera como una prueba confiable de que el individuo posee este tipo de pensamiento. Es decir, no se limita solamente al comportamiento de la magnitud variable de un caso concreto de la situación específica (aquí y ahora), sino más bien se relaciona con la capacidad de imaginar, analizar y entender todos los comportamientos posibles que pueden tener las magnitudes variables en general, más allá de una situación particular. El pensamiento variacional se constituye como un campo de razonamiento más amplio y en una herramienta valiosa, orientado a la comprensión transversal e integral de los procesos de variación que ocurren en los fenómenos de cambio en la realidad.

En los últimos años, el término pensamiento variacional ha adquirido relevancia en distintos ámbitos. Por un lado, aparece con frecuencia en las reformas curriculares de matemáticas para la educación básica en diversos países, y por otro, se menciona bastante como un tema pertinente de atender en las investigaciones en Matemática Educativa, especialmente en aquellas centradas en los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Bajo estas perspectivas, el pensamiento variacional se concibe como un tipo particular de pensamiento matemático, indispensable para comprender los fenómenos de variación y cambio que ocurren en la realidad.

En el contexto mexicano, el concepto de pensamiento variacional ha sido incorporado en el currículo de educación secundaria dentro del modelo educativo de la Nueva Escuela Mexicana (NEM). Este documento oficial reconoce explícitamente que es fundamental fomentar en los estudiantes el desarrollo de esta forma de razonamiento matemático desde las primeras etapas de la escolaridad, para que los alumnos se familiaricen con una manera de pensar que les permita interpretar procesos dinámicos. Dentro del campo formativo de Saberes y Pensamiento Científico para secundaria según la SEP (2022), se establece que en el área de Matemáticas se busca desarrollar el pensamiento geométrico, algebraico, variacional, estadístico y funcional.

Sin embargo, a pesar de la importancia que se le otorga, los documentos oficiales no explicitan ni describen con claridad qué procedimientos, estrategias o modos de razonamiento pueden considerarse como variacionales y cuáles no, y tampoco ofrecen al profesorado ejemplos concretos que sirvan de referencia para la práctica docente. Esta carencia de orientaciones didácticas genera vacíos que dificultan la puesta en práctica del desarrollo del pensamiento variacional en las aulas.

Por ende, resulta evidente que, si no se cuenta con una definición clara y compartida del término "pensamiento variacional", el diseño de estrategias didácticas orientadas a promoverlo en los estudiantes se convierte en una tarea especialmente compleja. La ambigüedad conceptual se traduce en un obstáculo para la planeación docente, ya que impide establecer criterios sólidos para reconocer cuándo una actividad realmente contribuye al desarrollo de este tipo de pensamiento.

Además, la literatura académica sobre el tema aún es limitada. Son escasos los trabajos que describen de manera sistemática cómo surge, evoluciona y se construye el pensamiento variacional en los estudiantes a lo largo de su trayectoria escolar. Sin este conocimiento, es difícil diseñar propuestas didácticas que sean cognitivamente congruentes con dicho proceso de enseñanza-aprendizaje, y que al mismo tiempo permitan al docente acompañar de manera eficaz a sus alumnos en la construcción progresiva de esta forma de pensar.

El uso del término "pensamiento variacional" busca encapsular el tipo de razonamiento matemático asociado al estudio de la variación y el cambio. Sin embargo, no se trata de un concepto cuya definición haya sido establecida de manera clara, precisa y consensuada dentro de la comunidad científica en Matemática Educativa.

Por ende, distintos grupos de investigación, desde diferentes enfoques teóricos, le atribuyen significados particulares, lo que genera un panorama heterogéneo y en ocasiones contradictorio, es decir, lentes de análisis distintos en los proyectos de investigación, que si bien, aunque enriquece la discusión, también contribuye a la dispersión de significados y/o confusiones entre los miembros de la comunidad.

La dificultad se acentúa porque incluso un concepto más amplio y previo, como el de pensamiento matemático, se utiliza de manera flexible y con múltiples interpretaciones. En la práctica docente, a menudo se confunde con términos como "razonamiento lógico" o "cultura matemática". Para muchos profesores, desarrollar el pensamiento matemático de los alumnos equivale a enseñarles a razonar de manera lógica. No obstante, esta equiparación es reduccionista y equívoca, ya que el pensamiento lógico, si bien está presente en la actividad matemática, no constituye su rasgo distintivo: también se encuentra en otros tipos de pensamiento humano.

Ante este panorama, es posible identificar al menos tres problemas centrales relacionados con la enseñanza y aprendizaje del pensamiento variacional.

El primero, es el problema del significado en la práctica docente, en donde los profesores suelen manejar una noción implícita, ambigua o poco definida del término, lo cual limita su capacidad para promoverlo en el aula.

El segundo, corresponde a la falta de concreción en los documentos curriculares, dado que a pesar de reconocer la importancia del pensamiento variacional, los planes y programas de estudio presentan explicaciones vagas y sin ejemplos claros operativos, lo cual refuerza las interpretaciones confusas que ya poseen los docentes.

Y el tercero, trata sobre la diversidad de enfoques en la investigación académica, es decir, en el ámbito de Matemática Educativa existen distintas teorías que abordan el pensamiento variacional, pero con definiciones y usos que no siempre son concordantes, lo que dificulta la comparación de propuestas y la construcción de marcos didácticos coherentes.

Por lo tanto, este proyecto se propone contribuir y atender dichas cuestiones, ofreciendo una fundamentación teórica y didáctico-metodológica que permita a los docentes de educación secundaria construir un significado más claro, consistente y operativo del concepto de pensamiento variacional. La intención es que los profesores puedan identificarlo y concretarlo en torno a ciertos contenidos matemáticos específicos, lo que a su vez les permitirá guiar a sus estudiantes en el desarrollo progresivo de esta forma de razonamiento matemático en la práctica docente en el aula.

Realizando un análisis sobre las concepciones acerca de pensamiento variacional en el área de Matemática Educativa, se data que desde hace algún tiempo se utiliza del término de interés, pensamiento variacional. Sin embargo, dicha investigación en el área arroja que se han desarrollado diferentes conceptos, íntimamente relacionados con el aprendizaje de la matemática del cambio y la variación; éstos están siendo usados como herramientas para la implementación de reformas educativas y como referentes teóricos en diferentes proyectos de investigación. Uno de ellos, el de pensamiento variacional, ha tenido diferentes interpretaciones y usos en algunas investigaciones educativas, tal como lo señalan Ramos y Jiménez (2014):

a) *La matemática del cambio*, surgido en el seno del movimiento de reforma en la enseñanza del Cálculo en EUA en los años ochenta (Hughes-Hallet y cols., 1992).
b) El concepto de *Cálculo cualitativo*, desarrollado para la organización TERC en Estados Unidos, así como en el Centro de Investigación Shell en Inglaterra (Stroup, 2002).
c) El concepto de *Pensamiento variacional*, desarrollado dentro de la reforma curricular de Colombia de finales de los noventa (Vasco, 2000, 2002, 2003)
d) El concepto de *Pensamiento funcional* el cual se desarrolló en el Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV (Cuevas, Martínez y Pluvinage, 2012).
e) El concepto de *Pensamiento y lenguaje variacional*, enfoque desarrollado por investigadores del Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV (Cantoral y Farfán, 1998; 2000).
f) El concepto de *razonamiento covariacional*, desarrollado por Carlson et al. (2003).

En base a lo anterior, podemos inferir que la concepción del término “pensamiento variacional” es diversa y se relaciona con múltiples proyectos de investigación, es decir, dicho concepto no está definido de forma clara y precisa. En el capítulo IV referente a la Problemática se profundizará respecto a las distintas concepciones, interpretaciones y usos del concepto en el área de Matemática Educativa.

2.1 Origen y evolución del término “pensamiento variacional” en Matemática Educativa

La reconstrucción del origen y evolución del concepto de pensamiento variacional dentro de la Matemática Educativa ha sido abordada solo en pocos estudios. Uno de los más completos es la tesis doctoral de Mariño (2020), donde se documentan a partir de un amplio análisis bibliográfico episodios relevantes tanto en el origen, desarrollo y parte del trabajo en la búsqueda de la consolidación conceptual del término.

Primeramente, Confrey (1991) aporta uno de los primeros acercamientos al estudio del pensamiento variacional mediante la introducción del “enfoque de covariación” versus el “enfoque de correspondencia”, que prevalece en el currículo con la notación funcional $y = f(x)$, en donde a partir de sus investigaciones con estudiantes identificó que éstos interpretan la función únicamente como una correspondencia entre valores numéricos.

Los trabajos de Confrey y Smith (1995) enfatizan que la enseñanza y aprendizaje del Cálculo no se reduce al aprendizaje algorítmico de las reglas de derivación o integración de las funciones, sino que ésta debe estar fundamentada en la comprensión de procesos de cambio (fenómenos dinámicos) más allá de las técnicas algorítmicas. Por ello, proponen que la noción de covariación (la coordinación simultánea de dos cantidades que varían) es más natural en la comprensión de los estudiantes en el contexto del aprendizaje del Cálculo, esto implica moverse operacionalmente de y_m a y_{m+1} coordinando con los movimientos de x_m a x_{m+1}.

En síntesis, Confrey abrió el camino a concebir el pensamiento variacional alejado de la visión formal y rigurosa de la matemática pura, concibiéndolo como la capacidad de razonar acerca de cómo es que cambian en conjunto y simultaneidad las cantidades. Por su parte, los trabajos de Thompson (1990, 1993) aportan la noción del marco de "razonamiento cuantitativo", éstos se relacionan con el pensamiento variacional dado que exploran cómo los estudiantes conceptualizan a las cantidades y construyen significados sobre la variación de dichas cantidades.

Thompson define a la "cantidad" como la conceptualización de un objeto con un atributo que puede variar, menciona que una cantidad no está en la realidad (mundo real), está en la mente de la persona (mundo ideal), es decir, es un constructo mental. Del mismo modo, la cuantificación consiste en un proceso de conceptualizar un objeto y un atributo (cualidad medible), de modo que a dicho atributo se le puedan asignar valores numéricos y una respectiva unidad de medida.

El autor enfatiza que aunque están estrechamente vinculadas, las operaciones cuantitativas no deben confundirse con las operaciones numéricas. En este sentido, Thompson (2011) explica el concepto de variación: a partir del ejemplo de que x representa una cantidad, ésta puede asumir distintos valores en distintos momentos de tiempo, entonces se puede representar como $x = x(t)$, donde t representa simbólicamente el tiempo.

De esta forma, la formulación propuesta busca reflejar las operaciones conceptuales a través de la imagen de una magnitud creciente o decreciente (por ejemplo, como un segmento de línea que se alarga o acorta progresivamente). Así, una magnitud en un instante específico posee un valor $x(t)$, pero al pensar en su variación, el sujeto la imagina variando en pequeños cambios (incrementos o decrementos) o "bits microscópicos", donde cada uno de esos cambios, al observarse más de cerca, cada bit posee en sí mismo una nueva variación.

En resumen, la noción de razonamiento cuantitativo de Thompson describe el proceso de crear, interpretar y manipular cantidades en contextos dinámicos. Se concibe entonces que el pensamiento variacional no es un bloque aislado, sino parte de un marco más amplio del razonamiento cuantitativo.

Desde su perspectiva, Vasco (2000) propone en la reforma curricular de educación básica de Colombia al pensamiento variacional como uno de los ejes articuladores para estructurar la enseñanza de las matemáticas en educación básica, enfatizando su papel en la formación del pensamiento matemático escolar, junto a los otros tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico y estocástico.

En términos generales, Vasco caracteriza al pensamiento variacional como una manera dinámica de pensar que busca comprender lo que cambia y lo que permanece constante en un proceso de la realidad, así como los patrones de covariación entre las magnitudes que aparecen en los fenómenos, el propósito no es simplemente resolver ejercicios algorítmicos y rutinarios, tampoco memorizar definiciones y/o aplicar fórmulas de forma mecánica simplemente sustituyendo valores en ellas ($F = ma$, $V = IR$) dado que dicha actividad no garantiza la comprensión del proceso de variación en sí, mucho menos el dibujar el esbozo de graficas de funciones como representaciones estáticas, ya que aunque pueden ser útiles, la mayoría de las veces los estudiantes se enfocan solamente en la forma, y no prestan atención a la covariación dinámica que representan.

La concepción de Vasco sobre el pensamiento variacional consiste en que éste es una manera dinámica de pensar y está orientado a la modelación matemática de fenómenos de la realidad, es decir, tiene como finalidad la construcción de modelos mentales que representen y expliquen tales procesos de variación que ocurren en el entorno. Dentro de los rasgos principales que se destacan: primeramente el distinguir qué cambia y qué permanece constante en el fenómeno, identificar patrones y/o regularidades entre las magnitudes presentes que varían de forma simultánea (covariación), construir modelos mentales dinámicos en los que dichas variables se relacionan de forma semejante a lo observado en la realidad, ejecución del modelo mental, contrastarlo con la realidad y refinarlo si es necesario, formulación simbólica del modelo a través de lenguaje matemático verbal, gráfico y/o algebraico.

Para el desarrollo de este tipo de pensamiento se requiere la articulación de varios tipos de pensamiento matemático, la utilización de múltiples representaciones (verbal, numérica, geométrica, gestual, simbólica), así como también el uso de recursos tecnológicos que potencien la exploración y análisis dinámico de los fenómenos.

Por otro lado, Carlson et al (2003) desarrollaron el aporte de un marco conceptual acerca del constructo de "razonamiento covariacional", un modelo que precisa de forma detallada los procesos cognitivos implicados en la coordinación de dos cantidades variables, los cuales sustentan el desarrollo de dicho tipo de razonamiento variacional en los estudiantes para el aprendizaje del Cálculo.

En el trabajo se enmarca la identificación de cinco acciones mentales fundamentales concatenadas que los estudiantes llevan a cabo al razonar sobre la variación; a la vez estás acciones se organizan y están asociadas a cinco niveles de razonamiento covariacional, las cuales permiten describir el progreso de aprendizaje del estudiante de forma gradual, es decir, desde las concepciones básicas hasta las comprensiones más avanzadas del Cálculo.

Las acciones mentales que identificaron los autores son las siguientes: 1) coordinación de los cambios de una variable con los cambios en la otra, 2) coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable, 3) coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra, 4) coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada y 5) coordinación de la razón de cambio instantáneo de la función, con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función. Los niveles de desarrollo: 1) coordinación, 2) dirección, 3) coordinación cuantitativa, 4) razón promedio, y 5) razón de cambio instantánea, respectivamente.

Este marco conceptual ha sido muy influyente en el área de Cálculo y en los temas de variación, dado que proporciona una taxonomía que describe ciertos procesos cognitivos, la cual es útil tanto para la investigación como para la enseñanza-aprendizaje. Asimismo, los autores retoman ciertas ideas de Piaget (1968, 1970) para el concepto de "desarrollo", señalando que las imágenes mentales y dinámicas de la covariación pueden ser definidas por niveles, los cuales surgen en un orden, de forma gradual y sucesiva.

Complementando el trabajo descrito anterior, Thompson y Carlson (2017) años después profundizan en la relación entre "razonamiento variacional y covariacional" enfatizando la integración de dichos marcos conceptuales en una visión unificada y más robusta. En dicho aporte, los autores analizan que previo a la actividad de razonar covariacionalmente, se encuentra la de razonar de forma variacional, y dicho razonamiento consta de dos momentos críticos.

El primero consiste en comprender que las magnitudes variables varían, es decir, que sus valores numéricos cambian. Se caracteriza por el hecho de ser una manera dinámica de pensar. Es decir, percibir en una situación de cambio la intervención de una o más magnitudes variables (una de las cuales puede ser el tiempo), indagar de qué manera cambian, formarse imágenes mentales dinámicas sobre ellas, crear herramientas matemáticas para representar y cuantificar tales cambios, y desarrollar un lenguaje apropiado para describirlos.

Hay un aspecto importante en la conceptualización de una magnitud variable que tiene una connotación intuitiva. Se trata del hecho de que el valor numérico que la magnitud variable toma en cada momento es único (no es posible que una magnitud variable tome dos o más valores numéricos diferentes en un mismo instante). Esta característica esencial es conocida como el principio de unicidad.

El segundo momento es una apreciación de carácter estético: cuando una magnitud variable cambia, lo hace suavemente (el tiempo transcurre suavemente de un instante a otro en un intervalo, un atleta al correr se desplaza suavemente de un punto a otro de la trayectoria). Todo el proceso es continuo, no omite ningún estado en su devenir. El cambio es suave de un estado al siguiente, esta característica corresponde al principio de continuidad.

Entonces, dichas abstracciones son una condición e idea previa para que con menos dificultades se logre coordinar dicha variación de cierta magnitud con otra, es decir, desarrollar el razonamiento covariacional posteriormente.

En fechas recientes, Jiménez y cols. (2022) plantean una reconceptualización didáctica del Cálculo, en donde muestran de forma detallada las diferencias clave entre el Análisis Matemático y el Cálculo, las cuales recaen en el estudio de las funciones y/o las magnitudes variables, respectivamente, así como también las repercusiones fundamentales que poseen dichos enfoques en el proceso de enseñanza-aprendizaje, al concebir uno u otro. El objeto matemático central del Cálculo es el estudio de las magnitudes variables (magnitud física), entendidas como cualidades y/o atributos medibles de objetos, fenómenos o procesos que cambian con el tiempo y/o con respecto a otras magnitudes.

Los autores señalan que en el Análisis Matemático los fenómenos naturales (y con ellos, las magnitudes variables) quedan relegados a un segundo o tercer plano, como simples casos particulares, ejemplos ilustrativos o aplicaciones. Es decir, se considera más importante el estudio abstracto de las funciones y sus propiedades, independientemente si surgen o no de algún fenómeno de la realidad.

Por otro lado, en el Cálculo el papel principal lo ocupan las magnitudes variables, las cuales son extraídas de la situación variacional presente en la realidad, mientras que las funciones cumplen su rol solamente como una herramienta para la matematización del fenómeno de cambio donde intervienen dichas magnitudes variables.

Entonces Jiménez y cols. (2022) plantean dos vertientes de pensamiento matemático para cada enfoque discutido anteriormente, el pensamiento variacional y el pensamiento funcional. Señalan que el Cálculo requiere de una manera variacional de pensar, y que la manera de pensar característica del Análisis Matemático es funcional. Es decir, el Cálculo se centra en la comprensión de situaciones de cambio en progreso, y el Análisis Matemático privilegia el estudio de las funciones como objetos matemáticos formales y abstractos.

Por su parte, los autores mencionan que se concibe que el pensamiento variacional es una forma de pensar que combina dos dimensiones, una parte cualitativa, que implica la construcción de imágenes dinámicas de la variación y el razonamiento sobre ellas, al igual que el desarrollo de un lenguaje que refleje dicho dinamismo, a la que Stroup (2002) denomina como "Cálculo cualitativo"; y una parte cuantitativa, la cual tiene que ver con cálculos numéricos, técnicas y expresiones algebraicas. La manera de pensar que exige el estudio matemático del cambio en progreso es un ente complejo que podemos concebir como constituido por dos componentes complementarios, a los que Thompson y Carlson (2017) han denominado respectivamente razonamiento variacional y razonamiento covariacional.

En contraste, el pensamiento funcional se concibe de forma distinta, dado que es una forma de pensar meramente matemática enfocada en el estudio de las funciones como objetos abstractos, sin necesidad de que éstos tengan algún vínculo con los fenómenos de la realidad o su matematización. Este tipo de pensamiento se desarrolla en el Análisis Matemático en donde se estudian con un enfoque meramente formal las propiedades internas de las funciones elementales en sus diferentes representaciones.

Por último, Jiménez (2025) presenta una síntesis sobre cuestiones referentes a las concepciones del "pensamiento matemático" en donde aclara que no existe una definición como tal única ni consensuada del término en la comunidad académica. Sin embargo, retoma diversas fuentes para tener la posibilidad de caracterizarlo de forma operativa.

El autor señala que el pensamiento matemático es de carácter abstracto, es decir, el razonamiento matemático opera sobre objetos ideales, no materiales. Entonces, para pensar en objetos ideales se requiere el uso de representaciones (simbólicas, gráficas, concretas, etc.) y se debe tener muchísimo cuidado para evitar confundir la representación del objeto matemático, con el objeto mismo. Por su parte, la resolución de problemas es un factor detonante del pensamiento matemático, ya que implica analizar, conjeturar, formular estrategias y adaptar ideas para resolver situaciones contextualizadas, y eso involucra también pensar matemáticamente.

También la modelación matemática caracteriza al pensamiento matemático, ésta consiste en traducir los fenómenos del mundo real al lenguaje de las matemáticas (matematizar), con todas las herramientas simbólicas que se requieran para ello. Por su parte, Radford (2021) señala que el pensamiento matemático tiene una dimensión colaborativa, es decir, es también una práctica social, no solamente individual, y éste se genera a través de la interacción social entre individuos (pensar con otros), por medio del lenguaje (verbal, gestual, símbolos, etc.) y otras herramientas intelectuales.

En síntesis, el pensamiento matemático se concibe como una actitud o manera de pensar y actuar que se mueve desde razonamientos personales e intuitivos, socioculturales, hasta el dominio formal de teoremas y/o técnicas matemáticas, en donde la cultura influye y permea dicho razonamiento en el individuo.

Por lo tanto, el término "pensamiento variacional" es una manifestación particular del pensamiento matemático, ligado al estudio de la variación y el cambio. El autor señala que es necesario intentar avanzar hacia una caracterización también operativa y útil del mismo, con la finalidad de mejorar la enseñanza-aprendizaje de dicho conocimiento y aportar referentes didácticos, metodológicos y teóricos para orientar al profesorado en su práctica docente al desarrollar dichos temas en el aula con sus estudiantes.

2.2 Antecedentes históricos del concepto de variación: la matemática de las cantidades variables

Aunque el término "pensamiento variacional" es relativamente reciente en Matemática Educativa, sus raíces pueden rastrearse en la evolución histórica de la matemática misma. Aleksándrov, Kolmogórov y Lavrent'ev (1974) señalaron que el desarrollo del conocimiento matemático puede dividirse en dos grandes periodos: primeramente, el periodo de la matemática de las cantidades constantes en el que predominaron la aritmética, la geometría, la trigonometría y los primeros desarrollos del álgebra, éste abarca desde la antigüedad hasta el siglo XVI. Aquí, las cantidades se concebían fundamentalmente como estáticas, sin atender a procesos de cambio continuo. Seguidamente, el periodo de la matemática de las cantidades variables, iniciada a partir del siglo XVI con el surgimiento del cálculo infinitesimal y el desarrollo posterior del análisis matemático, este periodo marca un cambio radical al situar la noción de variación en el centro de la actividad matemática.

En este sentido, el pensamiento variacional puede entenderse como heredero de este segundo periodo acerca de la matemática centrada en las cantidades variables, dado que se fundamenta en la capacidad de concebir, representar y analizar fenómenos dinámicos continuos, situando el estudio del cambio y la interdependencia de magnitudes como núcleo del razonamiento matemático en los fenómenos de la realidad.

Los antecedentes históricos del concepto de variación han sido un objeto de reflexión desde la antigüedad, junto con el desarrollo de la matemática centrada en las cantidades variables, éstos han evolucionado significativamente a lo largo de los siglos, marcando un tránsito desde la filosofía natural hasta la ciencia moderna.

Ya desde la antigüedad, la variación fue un concepto fundamental. Uno de los casos más tempranos y documentados de su estudio es el del movimiento de caída de los cuerpos. La física aristotélica, por ejemplo, ya había formulado una ley para la caída de los cuerpos "grávidos", es decir, aquellos cuerpos materiales que poseen peso. Sin embargo, Zubieta y Moreno (1996) señalan que la comprensión y un estudio científico más profundo de la variación se desarrolló en el periodo histórico comprendido entre los siglos XIII y XVII.

Durante la Edad Media, los pensadores de las escuelas de filosofía natural de Oxford y París se dedicaron a investigar los fenómenos de cambio, mostrando un interés particular en el estudio cuantitativo del movimiento no uniforme. Estos filósofos concibieron que los objetos del mundo no solo poseían formas geométricas, sino también "cualidades" de naturaleza no geométrica, muchas de las cuales eran cuantificables y, por lo tanto, susceptibles del estudio matemático. En este contexto, se realizaron esfuerzos para conceptualizar cuantitativamente fenómenos cotidianos como el calor, la iluminación y el movimiento no uniforme.

A partir de la segunda mitad del siglo XIII, los pensadores escolásticos comenzaron a debatir sobre el cambio de intensidad de las cualidades, un problema conocido como la intensificación y debilitación de las formas (variables). Tomando en cuenta a Fernández (1983), las primeras descripciones de este fenómeno utilizaban el concepto de "grados de intensidad" de las cualidades observadas, relacionándolas con el tiempo o la extensión del cuerpo en el que se manifestaban. Entre las contribuciones más destacadas de este periodo, sobresale la de Nicolas Oresme, quien en su tratado *De configurationibus qualitatum et motion* (Acerca de las configuraciones de las cualidades y del movimiento) introdujo el concepto de "intensidad de las cualidades", en donde desarrolló una teoría geometrizada para describir dichas cualidades utilizando un segmento horizontal, al que llamó "longitud" para representar la cantidad continua de sustancia o tiempo, y un segmento vertical, denominado "latitud" para representar el tamaño de la intensidad de la cualidad. Esta es conocida como la teoría de las latitudes de las formas.

Un avance trascendental en el estudio de la variación fue dado por el gran pensador italiano Galileo Galilei, quien llevó a cabo un estudio cuantitativo del movimiento no uniforme. Galileo se enfocó en dos casos específicos: la caída libre de un objeto y el movimiento de una bala de cañón disparada horizontalmente. Descubrió una relación intrínseca entre estos dos movimientos, entendiendo el movimiento de la bala de cañón como una composición de un movimiento horizontal de velocidad constante y un movimiento vertical de caída libre.

En sus investigaciones sobre la caída libre, Galileo observó patrones específicos: mientras que los tiempos transcurridos siguen una progresión aritmética (1, 2, 3, 4, 5, etc.), los espacios recorridos en intervalos sucesivos siguen una secuencia de números impares (1, 3, 5, 7, 9, etc.), y la distancia total recorrida en caída libre obedece una ley cuadrática (1, 4, 9, 16, 25, etc.). Fernández y Rondero (2004) mencionan que la originalidad de Galileo radicó en su objetivo de estudiar matemáticamente un movimiento real que ocurre en la naturaleza, apartándose de las causas últimas y metafísicas que caracterizaban a la escuela aristotélica. Esta postura representó una ruptura evidente con la tradición, dando origen a un nuevo concepto de ciencia que se centraba en el "cómo" de los fenómenos sin necesidad de indagar el "porqué", y ratificando la legitimidad de aplicar las matemáticas al mundo natural.

Galileo poseía una concepción sofisticada de la variación y empleaba un "auténtico lenguaje variacional", González (2004) menciona que los escritos de Galileo revelan que concebía el movimiento como un proceso en el que: 1) el móvil pasa por todos los grados de velocidad hasta llegar al reposo, lo que establece la continuidad de la variación de la velocidad; 2) el móvil pasa por cada grado de velocidad "sin emplear más de un instante", implicando un movimiento infinitesimal en cada instante; y 3) "en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes", los cuales son suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que la velocidad puede ir disminuyendo.

En el pensamiento de Galileo ya estaban presentes dos principios fundamentales: el de unicidad y el de continuidad, dichas concepciones se derivan del significado de "grado de velocidad" como una variable continua. Según Malagón (1988) esto implica que, al pasar un cuerpo del estado de reposo (grado cero de movimiento) a otro estado de movimiento, o viceversa, debe transitar por todos los infinitos grados de movimiento intermedios. Además, Galileo aceptaba la idea de que un móvil pasa por un número infinito de grados de velocidad en un tiempo finito, al establecer una correspondencia uno a uno entre los grados de velocidad y los instantes de tiempo; es decir, a cada instante del movimiento le corresponde un único grado de velocidad.

Es relevante notar que las propuestas actuales de pensamiento variacional, a menudo influenciadas por el concepto formal de función, no siempre recuperan la rica y sofisticada concepción galileana de la variación.

En desarrollos posteriores, el periodo que abarca desde el siglo XV hasta el XVII fue de una gran efervescencia para el estudio de los procesos de variación, lo que generó importantes avances relacionados con el movimiento de los cuerpos celestes, la intensidad luminosa y la intensidad del calor. Grandes pensadores como Sadi Carnot, los hermanos Bernoulli, Leibniz y Newton, así como Euler y Fourier, entre muchos otros, investigaron y ofrecieron soluciones originales a diversos problemas que involucraban cantidades variables y sus cambios.

CAPÍTULO 3. ESTADO DEL ARTE

Adentrarse a la exploración sobre cómo piensan matemáticamente los individuos es una tarea complicada pero interesante. Soto et al. (2022), afirman que, cuando las personas hacen matemáticas realizan actos mentales tales como contar, interpretar, representar, estructurar, conjeturar, demostrar, probar y resolver problemas. En este sentido, Harel (2008) señala que dichos actos se podrían traducir a acciones mentales, las cuales son parte de operaciones intelectuales del pensamiento matemático.

Entonces, llevar a cabo una coordinación de acciones mentales es parte fundamental en la actividad matemática para resolver problemas y construir conceptos matemáticos. Por ende, es importante identificar las acciones mentales que los estudiantes tienen disponibles en su pensamiento y buscar la forma de desarrollarlas progresivamente, con el propósito de que logren una comprensión sólida de los conceptos y métodos matemáticos.

Por su parte, Harel y Sowder (2005) fundamentan sus trabajos bajo la premisa de que las acciones mentales de los seres humanos, las cuales son observables o inferidas, son inducidas y gobernadas por sus visiones del mundo y viceversa. Dicha premisa los llevó a distinguir entre dos categorías del conocimiento: formas de entender y formas de pensar, las cuales surgen a partir de tres actividades matemáticas interrelacionadas: 1) la comprensión de contenidos matemáticos cuando se leen textos o se escucha a otros, 2) al realizar una investigación cuando se resuelve un problema, y 3) al establecer una verdad cuando se justifica o refuta.

3.1 Maneras matemáticas de entender y de pensar de Harel (2008)

Guershon Harel (2008) ofrece una respuesta pedagógica a la pregunta filosófica ¿qué son las matemáticas? Primeramente define de forma simple y como su interpretación personal al pensamiento matemático, al cual vincula con la enseñanza. El autor señala que el pensamiento matemático es un ente conformado por la unión de dos componentes fundamentales que se complementan entre sí: 1) *Maneras matemáticas de Entender* y 2) *Maneras matemáticas de Pensar*. Esto tiene implicaciones pedagógicas y curriculares, puesto que se considera importante prestar atención tanto a la identificación y al desarrollo de maneras matemáticas de entender como de maneras matemáticas de pensar, las cuales actúan como pauta para el proceso de enseñanza-aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Para conceptualizar las maneras matemáticas de entender y las maneras matemáticas de pensar es pertinente primero comprender los "*Actos Mentales*", que son la base de la cognición humana. Los seres humanos realizan una multitud de actos mentales, tales como interpretar, conjeturar, inferir, probar, explicar, estructurar, generalizar, aplicar, predecir, clasificar, buscar y resolver problemas, entre otros, los cuales se distinguen de los actos físicos dado que son elementos básicos de procesos cognitivos abstractos que suceden en la mente del individuo. Sin embargo, aunque dichos actos mentales no son observables físicamente, se pueden detectar cuando el individuo las exterioriza mediante el lenguaje o sus producciones.

Cabe mencionar que los actos mentales no son exclusivos de las matemáticas o la ciencia, éstos se realizan en todos los ámbitos de la vida. Sin embargo, la naturaleza o las características de estos actos mentales pueden diferir significativamente entre profesionales de distintas disciplinas, por ejemplo: un biólogo y un matemático pueden resolver problemas, pero la forma en que lo hacen y otros actos mentales relacionados probablemente sean distintos.

Por su parte, una Manera de Entender (MdE) es el producto cognitivo particular (o intelectual) que resulta de un acto o acción mental que realiza el individuo. Por ejemplo, un estudiante al leer o escuchar el enunciado de una situación problema en matemáticas, se encarga de interpretar, decodificar o traducir dicha información, es decir, proporcionarle un significado.

Todo lo anterior se realiza mediante una operación cognitiva la cual no es posible observar dado que no consiste en un acto físico, pero sí es posible inferirla cuando el individuo la exterioriza a través del lenguaje cuando se le cuestiona, y a éste producto cognitivo de ese acto mental Harel (2008, 2008a) lo denomina como MdE. Cabe mencionar que las características de las maneras de entender pueden variar según el contexto, éstas pueden ser juzgadas como adecuadas o inadecuadas, sofisticadas o ingenuas, correctas o erróneas, útiles o poco prácticas, es decir, pueden ser matemáticas o no, todo depende de la experiencia y conocimientos previos del estudiante.

Ahora bien, es pertinente enfatizar tres connotaciones sutiles pero esenciales que fundamentan el constructo "Manera de Entender" (MdE) formulado por Harel (2008a): a) la primera consiste en la naturaleza cognitiva y puramente intelectual, la definición excluye del análisis los aspectos fisiológicos, como los enlaces neuronales, o los estados emocionales que acompañan el acto mental del individuo, por ende el foco de estudio es la operación mental en sí y su resultado, lo cual es fundamental para el desarrollo del conocimiento matemático; b) la segunda aborda la aparente contradicción entre la terminología y su significado conceptual, dado que en el lenguaje común, la expresión "manera de" suele interpretarse como un proceso o un procedimiento, lo cual implica dinamismo; sin embargo, Harel emplea el término "manera de entender" (MdE) para referirse al producto intelectual o resultado específico de una acción mental, lo que lo convierte en un concepto esencialmente estático; y c) la tercera y más crucial connotación, especialmente para el diseño didáctico, radica en que la formulación "manera de" sugiere que un solo acto mental puede dar lugar a varios resultados o productos cognitivos potenciales, de esta forma, una misma acción mental puede producir múltiples MdE.

Es responsabilidad del docente inferir este conocimiento y diseñar actividades que posibiliten la formación de maneras de entender deseables y coherentes con el conocimiento matemático aceptado, dado que las MdE pueden ser quizás correctas desde un punto de vista puramente matemático, pero inadecuadas en un contexto o situación determinada. Del mismo modo, las MdE son meramente productos cognitivos personales, por ende, las maneras de entender generadas por diferentes personas no son necesariamente idénticas entre sí.

Por otro lado, las Manera de Pensar (MdP) surgen a partir de las MdE, éstas se definen como las características cognitivas estables del acto mental, las cuales se revelan a través de la observación repetida de las acciones manifiestas de las MdE. Por lo tanto, estos constructos proporcionan una guía a los profesores para inferir el conocimiento de los estudiantes y para diseñar actividades que hagan factible la generación de maneras de entender y pensar deseables, las cuales sean compatibles con el conocimiento matemático institucionalizado en la comunidad matemática.

Harel (2008, 2008a) ejemplifica la distinción entre MdE y MdP utilizando el acto mental de "interpretar"; un estudiante al ver el símbolo " $3/4$ ", puede interpretarlo como "3 objetos de 4 objetos" o "la suma $1/4 + 1/4 + 1/4$", o alguien podría producir una interpretación más sofisticada matemáticamente tal como "la clase de equivalencia algebraica entre números $3n/4n$, en donde n es un número entero distinto de cero", y otra un modo de comprensión ingenuo y no matemático, como "dos números con una raya entre ellos".

Asimismo, y complementando los ejemplos que menciona Harel, para nuestro proyecto una manera variacional de entender y pensar, sería interpretar $3/4$ como una "razón promedio de cambio, por cada 4 unidades que cambia la variable independiente, la variable dependiente cambia 3 unidades", también existe el significado relacionado con porcentajes para $3/4$, por ejemplo "un beisbolista que con cuatro turnos al bat, en tres ocasiones pegó de hit, posee un 75% de efectividad al bat", el cual se relaciona también con la probabilidad por lo que "dicha fracción representa que el evento ocurre en 3 de cada 4 ocasiones o intentos (o sus múltiplos) si el experimento se repite muchas veces". El autor señala que la interpretación que un estudiante da a una cadena de símbolos o a un concepto es su manera de entender, porque es un producto cognitivo de su acto mental de interpretar.

La caracterización del pensamiento matemático de Guershon Harel, que lo divide en MdE y MdP, es la piedra angular de la teoría, pero su aplicación práctica en proyectos de Matemática Educativa no es sencilla. Es decir, aunque se han realizado esfuerzos para definir los constructos de MdE (el producto cognitivo particular de un acto mental) y MdP (las características cognitivas del acto mental reveladas por la observación repetida de las MdE), en la práctica es mucho más fácil identificar y etiquetar una producción cognitiva de un alumno como una Manera de Entender o de interpretar. Esto se debe a que la MdE representa un producto cognitivo de naturaleza intelectual que es esencialmente estático.

Por otro lado, la identificación de otra producción cognitiva como una Manera de Pensar resulta ser una tarea que genera más dudas y complicaciones, Harel mismo reconoció dicha dicotomía, señalando que "es mucho más difícil reflejar y expresar en palabras de manera exacta las maneras de pensar que las maneras de entender" (2008, p. 9). Esta dificultad en la precisión del lenguaje para describir las MdP es una razón pertinente para continuar los esfuerzos de clarificación teórica y práctica en el campo de la investigación educativa.

Entonces, si concebimos a las matemáticas escolares como un conjunto de MdE y MdP, Harel justifica el proceso de enseñanza-aprendizaje con una clara misión cognitiva: "la meta de la instrucción debe ser inequívoca: ayudar a los estudiantes a desarrollar maneras de entender y maneras de pensar que sean compatibles con las aceptadas actualmente por la comunidad matemática en general" (2008, p. 23). Esto significa que la función de la escuela consiste en promover la formación de maneras individuales o personales de entender y de pensar que sean compatibles con aquellas que la comunidad matemática global considera como "correctas y útiles en la resolución de problemas matemáticos y científicos" (Harel, 2008, p. 9).

Por ello, el verdadero desafío pedagógico no consiste en lograr que los estudiantes generen MdE y MdP personales, ya que esto ocurre de manera natural y espontánea; el problema esencial de la enseñanza se centra, más bien, en impedir la formación de maneras inadecuadas o incorrectas de pensar. Esto requiere determinar la "naturaleza de las intervenciones educativas que puedan conducir a los estudiantes a refinar y modificar una manera personal de entender o de pensar inadecuada o imprecisa por otra más deseable" (Harel, 2008a, p. 17).

Para que un profesor pueda cumplir el propósito mencionado e influir positivamente en el aprendizaje, modificando las maneras de pensar inadecuadas, Harel (2008a) establece que el conocimiento del docente debe organizarse en tres componentes fundamentales:

1. El conocimiento matemático: corresponde a las Maneras de Entender y Maneras de Pensar que son deseables y que el profesor debe poseer.
2. El conocimiento del aprendizaje de los estudiantes: consiste en la visión del profesor sobre cómo se aprenden las matemáticas, y su comprensión acerca de los aspectos cognitivos y epistemológicos que se involucran en el aprendizaje de determinadas MdE y MdP.
3. El conocimiento de la pedagogía: se refiere a las prácticas de enseñanza apropiadas o pertinentes para la emergencia de MdE que el profesor aplica en su intervención didáctica.

Asimismo, otro aspecto importante que establece Harel (2008b), es que desde una perspectiva metodológica los constructos "acto mental", "manera de entender" y "manera de pensar" ofrecen una estructura operativa con implicaciones directas en la enseñanza, que se resumen en tres actividades esenciales que el profesor debe realizar:

1. Identificar los actos mentales de interés: El profesor debe determinar y establecer los actos mentales particulares relevantes para el aprendizaje.
2. Identificar las Maneras de Entender (MdE): El profesor debe identificar los productos cognitivos de cada acto mental, los cuales son las maneras de entender, y combatir los que no sean adecuados.
3. Inferir las Maneras de Pensar (MdP): El profesor debe inferir las características cognitivas de los actos mentales, que se manifiestan a través de la observación repetida de las MdE del estudiante; y fomentar las maneras deseables de entender, es son las MdP.

Este proceso de reflexión realizado por Harel sobre la caracterización del conocimiento matemático y el propósito de la enseñanza lo llevó a formular un esquema metodológico específico, denominado "la enseñanza basada en DNR". Éste acrónimo se deriva de los tres principios fundamentales que sustentan el esquema: el Principio de Dualidad (D), el Principio de Necesidad Intelectual (N) y el Principio de Razonamiento Reiterado (R). A continuación, se describen brevemente estos principios.

El Principio de Dualidad (D). Este principio establece una relación de interdependencia bidireccional entre los dos subconjuntos del pensamiento matemático: las maneras de entender (MdE) y las maneras de pensar (MdP). Es decir, los estudiantes solo pueden desarrollar maneras adecuadas de pensar si, simultáneamente, construyen maneras adecuadas de entender; e inversamente, las maneras de entender que producen están determinadas por las maneras de pensar que ya poseen (Harel, 2008b, p. 19).

El Principio de Necesidad Intelectual (N). Este principio señala que el aprendizaje efectivo requiere que los estudiantes desarrollen una necesidad intelectual de lo que se les está enseñando, dicha "necesidad" se refiere a una necesidad intelectual, no a una necesidad social o económica (Harel, 2008b, p. 20). El término necesidad intelectual apela a la inclinación natural y espontánea hacia la curiosidad y la tendencia inquisitiva a entender el por qué de las cosas, es el espíritu racional natural del ser humano.

El Principio de Razonamiento Reiterado (R). Este principio funciona para asegurar la consolidación del conocimiento, consiste en que el estudiante debe practicar el razonamiento de manera reiterada. Sin embargo, ésta práctica repetida no debe confundirse con la simple mecanización, más bien es la clave para que los estudiantes internalicen, organicen y retengan las maneras de entender y las maneras de pensar deseadas; Harel subraya que "la secuencia de problemas debe provocar continuamente el razonamiento a través de las situaciones y de las soluciones, y deben responder a las cambiantes necesidades intelectuales de los estudiantes" (Harel, 2008b, p.21).

Es importante destacar que la visión del pensamiento matemático formulada por Guershon Harel proporciona un camino definido para promover el pensamiento matemático en los estudiantes, a través de los constructos teóricos Maneras de Entender y Maneras de Pensar. A partir de ellos, Amador y Jiménez (2023) profundizan y los utilizan como base para establecer un marco explicativo, orientado específicamente a promover el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes. En el apartado siguiente se presenta más información al respecto.

3.2 Maneras variacionales de entender y de pensar, según Amador y Jiménez (2023)

En este contexto, Amador y Jiménez (2023) realizaron una aportación teórica basada en la obra de Harel para definir y caracterizar dos nuevos constructos teóricos, vinculados necesariamente al pensamiento matemático de tipo variacional: las Maneras Variacionales de Entender (MVdE) y las Maneras Variacionales de Pensar (MVdP), éstos funcionan como una estructura operativa la cual es necesaria utilizar para el diseño, organización y análisis de las estrategias o actividades didácticas para el desarrollo del pensamiento variacional.

Los autores se centran en definir primeramente el enfoque del pensamiento variacional; lo conciben como un tipo de pensamiento matemático que exige una manera dinámica de pensar, enfocado en el estudio del comportamiento de las magnitudes variables presentes en los fenómenos o procesos de la realidad. A partir de ahí, establecen una estructura operativa de las implicaciones metodológico-didácticas para fomentar el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático, tomando en cuenta las MVdE y las MVdP.

Amador y Jiménez (2023) definen a las Maneras Variacionales de Entender (MVdE) como el producto cognitivo particular del correspondiente acto mental que produce imágenes dinámicas adecuadas, relacionadas con las características esenciales de las magnitudes variables en procesos de variación y cambio en progreso, es decir, son aquellas que el estudiante produce al llevar a cabo un acto mental en un contexto variacional. Por otra parte, las Maneras Variacionales de Pensar (MVdP) son descritas como las características cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas adecuadas, que se revelan por la repetición de las maneras variacionales de entender de los estudiantes, éstas son inferidas por el profesor al observar las MVdE de los alumnos.

Por ejemplo, si un estudiante interpreta que "las variables algebraicas son símbolos que escogemos de manera conveniente para representar aspectos cuantitativos esenciales de cierta realidad que intentamos comprender", está evidenciando una MVdE; si ese estudiante sostiene varias MVdE similares, es probable que posea la MVdP de que "las magnitudes variables pueden estar representadas por diferentes símbolos o literales, según convenga".

En educación secundaria es posible desarrollar en los estudiantes el pensamiento variacional identificando previamente una serie de MVdE en donde se busque construir y/o reconstruir conceptos matemáticos en los estudiantes que pudiesen estar obstaculizando el desarrollo de este tipo de pensamiento, ya que los enfoques tradicionales de enseñanza de las matemáticas se centran en la memorización de fórmulas, conceptos y procedimientos, por lo que los estudiantes no logran una comprensión genuina de las ideas matemáticas involucradas. A continuación los autores muestran algunas MVdE para cualquier proceso de variación en comparación con aquellas que se han clasificado como no variacionales.

Tabla 1. Maneras no Variacionales de Entender vs Maneras Variacionales de Entender

No Variacional	Variacional
Las variables son objetos matemáticos abstractos (sin significado); no representan nada que tenga que ver con alguna realidad.	Las variables algebraicas son símbolos que escogemos de manera conveniente para representar aspectos cuantitativos esenciales de cierta realidad que intentamos comprender.
La variable tiene o representa un único valor numérico; es simplemente un número, es el valor de la variable en el momento que se analiza.	La magnitud variable toma infinitos valores numéricos; su valor numérico es diferente en cada momento.

La variación consiste en cambios cualitativos en los fenómenos o procesos.	La variación implica fundamentalmente cambios cuantitativos: cambios en los valores numéricos de las magnitudes variables.
La literal representa un valor numérico.	La literal representa todos y cada uno de los valores numéricos de la magnitud variable.
A las literales no se les asignan unidades de medida.	Los valores numéricos que toma la literal que representa a una magnitud variable están asociados con una unidad de medida.
La variación consiste en cambios que ocurren "a saltos", por porciones.	La variación implica cambios continuos y suaves en los valores de las magnitudes variables.
Los valores numéricos de la literal les son asignados arbitrariamente.	Los valores numéricos que toma la literal en cada momento pueden ser progresivamente medidos o calculados.
Los valores numéricos de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ pueden ser asignados libre o arbitrariamente, indistintamente el uno del otro.	Los valores numéricos de las magnitudes variables no pueden ser asignados arbitrariamente; a un valor dado de x le corresponde sólo un valor perfectamente definido de y.
Las expresiones algebraicas con literales son solo objetos matemáticos manipulables.	Las expresiones algebraicas en las que intervienen literales como variables tienen congruencia dimensional con lo que ellas representan.
Una igualdad o ecuación algebraica es algo que se debe resolver o que se emplea para realizar un cálculo.	Una igualdad algebraica en la que intervienen literales como variables es un modelo matemático de la relación cuantitativa estable que existe entre tales magnitudes variables.
La razón promedio de cambio es el valor de la pendiente de la secante a la curva.	La razón media de cambio de una magnitud variable dependiente, con respecto al incremento uniforme de su variable independiente, es la razón constante de cambio de un proceso uniforme imaginario (ideal) que permitiría pasar del estado inicial al estado final del proceso real no uniforme.

Fuente: Amador y Jiménez (2023)

Al igual que las Maneras Variacionales de Entender (MVdE), las Maneras Variacionales de Pensar están directamente relacionadas con el estudio de las magnitudes variables; a las maneras de pensar que no cumplen este criterio se las ha catalogado como no variacionales (habitualmente se relacionan con las variables numéricas y funciones conjuntistas).

Tabla 2. Maneras no Variacionales de Pensar vs Maneras Variacionales de Pensar

No variacional	Variacional
Las únicas variables que se estudian en matemáticas son $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$.	Las magnitudes variables pueden estar representadas por diferentes símbolos o literales, según convenga.
Los valores numéricos que toma la variable no están sujetos a una dependencia temporal, son asignados arbitrariamente.	Las magnitudes variables toman progresivamente valores numéricos que podemos dividir en tres grupos: el valor actual[1], los valores previos[2] y los valores posteriores[3].
El movimiento de la variable independiente es arbitrario: los valores numéricos que toma ocurren arbitrariamente.	La magnitud variable independiente siempre crece de manera continua y uniforme.
Las igualdades algebraicas son fórmulas para calcular el valor de $\boldsymbol{y}$ a partir del valor de $\boldsymbol{x}$.	Las igualdades matemáticas entre magnitudes variables representan cantidades y relaciones cuantitativas dinámicas.
Las igualdades algebraicas son verdaderas solo en el sentido matemático.	Las igualdades algebraicas con variables no sólo deben ser verdaderas en el sentido matemático, sino que deben ser

[1] El valor actual es el valor numérico que una magnitud variable puede tomar en cualquier momento.
[2] Los valores previos son los valores numéricos que una magnitud variable toma antes de llegar al valor actual.
[3] Los valores posteriores son los valores numéricos que una magnitud variable toma después de dicho valor actual.

	razonablemente satisfactorias en relación con la realidad que pretenden modelar.
La razón media del cambio permite medir la pendiente de la recta secante y solo es un número fijo, estático en todo momento.	Cuando algo cambia, lo hace con cierta intensidad, tasa o ritmo de cambio. Es posible cuantificar o expresar con números la rapidez del cambio.
Los simbolismos matemáticos en la modelación de fenómenos son fórmulas en las cuales se sustituyen números.	El simbolismo matemático empleado para modelar situaciones de variación (cambio en progreso) permite formular conjeturas y verificarlas.
El comportamiento de las funciones numéricas depende del valor de sus variables, son siempre uno a uno.	Existe un conjunto finito de maneras o formas elementales en que las magnitudes variables pueden comportarse; se trata de los comportamientos covariacionales elementales o básicos.
El comportamiento de las funciones está definido por el trazo entre los pares ordenados $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ que lo componen.	Los comportamientos covariacionales complejos son simplemente combinaciones suaves y continuas de comportamientos covariacionales elementales.
Las gráficas de las funciones son como alambres doblados, pistas o trayectorias por las que se puede transitar. Son por lo tanto objetos estáticos, fijos e inertes.	Las gráficas covariacionales son codificaciones matemáticas de procesos dinámicos, son como "videos matemáticos" de procesos de cambio en progreso.

Fuente: Amador y Jiménez (2023)

Entonces, la distinción entre MVdE y MVdP es crucial para el desarrollo del pensamiento variacional. El proceso de enseñanza-aprendizaje tiene la finalidad de que los estudiantes generen MVdE a través de actividades didácticas que impliquen el estudio, identificación y formulación de propiedades cuantitativas presentes en los fenómenos de cambio en progreso, es decir, magnitudes variables en las situaciones variacionales de la realidad.

Por su parte Amador y Jiménez (2025) proporcionan una estructura operativa de las implicaciones metodológico-didácticas para la organización, el diseño y análisis de las actividades y estrategias de enseñanza, la cual se resume en tres etapas esenciales.

1. Prediseño de las estrategias didácticas*:* el profesor deberá identificar y caracterizar las MVdE concretas que se espera promover en los estudiantes, y especificar los actos mentales particulares de interés.
2. Diseño de las estrategias didácticas: para la elaboración y organización de las actividades didácticas, esbozar una secuencia cognitivamente lógica de obtención de los productos cognitivos que involucran los actos mentales manifestados por los estudiantes en forma de declaraciones y acciones, dicha etapa guía el diseño de las actividades didácticas y su gestión en el aula.
3. Análisis de las estrategias desarrolladas por los estudiantes durante la actividad: el profesor deberá inferir de forma indirecta las características cognitivas comunes entre los productos cognitivos de los actos mentales presentes en las actividades desarrolladas por los estudiantes, éstas inferencias son las MVdP de los estudiantes.

Es importante destacar que el presente enfoque busca que la instrucción ayude a los estudiantes a desarrollar maneras de entender y pensar compatibles con las aceptadas por la comunidad matemática, evitando de manera intencionada la formación de maneras inadecuadas o incorrectas. El análisis de las maneras variacionales y no variacionales de entender y de pensar se fundamenta en una distinción crucial respecto a cómo se concibe el conocimiento matemático, especialmente en el estudio de la variación y el cambio. La postura variacional busca un enfoque dinámico, contextual y cognitivamente coherente para modelar matemáticamente el cambio en progreso de las magnitudes presentes en fenómenos reales, en contraste con el enfoque tradicional abstracto que suele ser formal, estático y algorítmico, el cual se centra primordialmente en la manipulación de las funciones numéricas y fórmulas con una escasa o nula vinculación a las situaciones reales y cotidianas.

Para llevar a cabo un diseño didáctico que bajo el enfoque de MVdE y MVdP, es necesario utilizar múltiples herramientas de enseñanza-aprendizaje, así como los recursos didácticos pertinentes para el mismo fin. A continuación se abordará una metodología didáctica para el proceso de la enseñanza de la covariación con artefactos digitales, denominada “Covariación instrumentada”, y se discutirá cómo su uso puede generar ideas fructíferas en la práctica docente de la comunidad de profesores de matemáticas de educación básica.

3.3 Covariación instrumentada

Tal como se mencionó al principio de este documento, el concepto de pensamiento variacional se menciona como un tipo de pensamiento matemático en el nuevo plan de estudios de la Nueva Escuela Mexicana (NEM) a nivel secundaria, y se enfatiza que es importante desarrollarlo en los estudiantes. Específicamente, en el Campo Formativo de Saberes y Pensamiento Científico en su de libro de primer grado se abordan en un primer acercamiento al tema variacional contenidos que implican “situaciones con pendiente positiva: El estudio de las variaciones proporcionales requiere del concepto de función, que es una regla de correspondencia entre dos variables, en donde una es dependiente de la otra. Cuando se grafican estos datos, en ocasiones es necesario obtener la razón de cambio, definida como la pendiente de una recta” según la SEP (2022), en donde su enfoque primordial es el tema de funciones, y se aborda de manera estática. Esa visión es incongruente con la perspectiva didáctica que se pretende realizar en nuestro proyecto de intervención, para posibilitar el desarrollo del pensamiento variacional y la generación de las ideas variacionales pertinentes, para una comprensión significativa del conocimiento matemático.

Por su parte, Arzarello (2019) enmarca dicha problemática y propone ideas con fundamentación semiótica y epistemológica que se traducen en una herramienta de análisis implementada como estrategia de enseñanza-aprendizaje para superar dicho problema, a la que denomina como “Covariación Instrumentada” (CI), la cual consiste en el diseño de situaciones didácticas en el sentido de Brousseau (1998), que permitan a los estudiantes desarrollar concepciones referentes a la covariación. El autor además enfatiza el papel que juegan las nuevas tecnologías en el desarrollo de dichas situaciones didácticas de aprendizaje, especialmente cuando se propicia en entornos de geometría dinámica (EGD).

Es decir, en la enseñanza tradicional, es claramente notorio que en los planteles educativos un alto porcentaje de profesores de enseñanza de las matemáticas abordan los temas de variación descuidando fundamentalmente la esencia de dicho razonamiento, el enfoque variacional; ya que habitualmente se inclinan a elaborar una enseñanza de las funciones de acuerdo a la definición estática del grupo Bourbaki, bajo la cual se congela su naturaleza dinámica con un lenguaje didáctico meramente estático de la teoría de conjuntos.

Para ello, se propone tomar en cuenta la epistemología del pensamiento variacional y sustentar dicho enfoque en la didáctica de las matemáticas, lo cual tendrá repercusiones positivas en el ámbito cognitivo de los estudiantes para desarrollar una mayor comprensión de las ideas variacionales relacionadas con este tipo de pensamiento.

La metodología de la CI consiste en el trabajo con el software de geometría dinámica mediante su "instrumentalización" como un proceso de aprendizaje, en donde se amplifica la visión para la observación del fenómeno de estudio, se aborda la formulación del problema y al mismo tiempo se modela y manipula permitiendo su instrumentación. Es decir, dicho método de enseñanza-aprendizaje aporta una lente semiótica para la descripción y el análisis de los fenómenos variacionales, y se deriva del enfoque instrumental de Vérillon y Rabardel (1995), en donde se considera al concepto de instrumento como una entidad mixta, con un componente de artefacto y un componente cognitivo, representado por patrones de uso.

La CI se basa en el uso de artefactos tecnológicos, argumentando que abordar la covariación en un entorno exclusivo de papel y lápiz es muy abstracto y difícil, por lo que las herramientas tecnológicas permiten abordarla con cierto éxito desde los primeros años de la escuela. La Covariación Instrumentada se fundamenta en que si la instrumentación se planifica didácticamente con cuidado y de manera coordinada con múltiples artefactos, puede ayudar al aprendizaje aprovechando el potencial semiótico que proporciona la mediación adecuada de las herramientas tecnológicas, para generar una sinergia positiva de aprendizaje en el aula.

Es importante señalar el rol de las tecnologías en este apartado, ya que toman un papel importante al momento de presentar, observar y analizar los fenómenos de cambio que se presentan en las situaciones de la vida diaria. Por otro lado, se proporciona una posible solución a la falta de comprensión de este tipo de pensamiento matemático, debido a que en la enseñanza tradicional, incluso en los libros de texto de educación básica, este tipo de tópicos se centran en la definición abstracta y estática de las funciones.

Sin embargo, como menciona Arzarello (2019), este tipo de pensamiento posee un valor epistemológico y cognitivo más amplio, tomando en cuenta los objetos matemáticos que surgen a partir de los fenómenos y buscando sus relaciones mutuas (problemas físicos, biológicos, económicos, etc. en los que es necesario modelar fenómenos que evolucionan con el tiempo).

La CI describe cómo el aprendizaje de relaciones matemáticas dinámicas se ve facilitado en el aula mediante la mediación semiótica y el uso coordinado de artefactos tecnológicos, como videos y simulaciones de GeoGebra. Arzarello (2019) explica que el razonamiento covariante (covariacional) implica entender el cómo varían dos o más cantidades simultáneamente, y argumenta que la formulación de problemas abiertos, junto con la instrumentación didáctica, puede superar la enseñanza estática tradicional de estos temas. Es decir, funciona como una herramienta de análisis compleja que posee una contraparte didáctica, es descrita como un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica.

Por otro lado, la CI puede ayudar a los profesores a diseñar situaciones didácticas apropiadas con el fin de introducir el razonamiento covariacional en entornos de geometría dinámica. Dicho trabajo, basado en la instrumentación coordinada, por ejemplo, al utilizar un video de un experimento físico junto con una simulación en GeoGebra, puede ayudar a los estudiantes de secundaria a comprender el complejo proceso de covariación de cantidades involucradas en un fenómeno físico.

3.4 El pensamiento variacional y el cambio en progreso

Es importante considerar que, para comprender de manera dinámica cómo ocurren los cambios en las magnitudes variables del fenómeno, es esencial utilizar adecuadamente el término “cambio”. Según Thompson et al. (2019), su uso adecuado implica percibir que las magnitudes variables están experimentando un cambio en curso en ese momento, es decir, conlleva la noción dinámica de “cambio en progreso” (en cierto lugar y en un marco temporal). Las magnitudes variables son intrínsecamente objetos dinámicos, siempre tienen un trasfondo temporal y espacial.

Conceptualizamos como magnitud variable a cierta cualidad perceptible y cuantificable de un proceso en desarrollo, misma que en cada momento, en una progresión temporal inexorable, toma un valor numérico distinto. Como resultado de un proceso de cuantificación, cada valor numérico está asociado a una unidad de medida. Las magnitudes variables son temporales en el sentido expuesto, y son dimensionales en el sentido de que se les asocia una unidad de medición. La magnitud variable (la cual se mide o calcula) toma progresivamente distintos valores en distintos momentos, a medida que va desarrollándose el fenómeno o proceso en el que ella interviene. Esta imagen del concepto de variable es dinámica, es decir, posee un *significado variacional* (contrario a un *significado formal* al que se hará referencia en el siguiente párrafo), según Jiménez et al. (2022).

Schmid y Wu (2008) indican que “en matemáticas, una variable es una abreviatura informal de “un elemento en el dominio de definición de función”, que por supuesto es un concepto perfectamente bien definido”. Por su parte, Wu (2005) señala que en el ámbito de las matemáticas, la palabra “variable” se utiliza de manera vaga y se entiende informalmente como un elemento en el dominio de definición de una función, y no existe una definición precisa para este término en matemáticas. Su uso se mantiene en la literatura matemática simplemente por la conveniencia y la fuerza de la tradición, al igual que sucede con el término “identidad”. No obstante, existe una ironía extrema en el contexto de las matemáticas escolares: mientras que este concepto impreciso se toma muy en serio, otros temas que deberían ser prioritarios (como las fracciones, los decimales o la gráfica de una función) son descuidados. El autor menciona que es importante que los educadores sean conscientes del daño psicológico que la palabra "variable" puede causar a los estudiantes principiantes al evocar la imagen mental de un número que "varía" o cambia, dado que es una idea incorrecta: "Un número es un número. Nunca varía".

Por su parte, el matemático Menger (1953, 1956) contribuyó a la formalización del concepto de variable con dos significados clave. En 1953, Menger presentó un significado formal restringido, aplicable a las matemáticas centradas en los números reales: “una variable real es un símbolo que representa cualquier elemento de un determinado conjunto de números reales, llamado el rango de la variable” (p. 956). Posteriormente, en 1956 formuló un significado formal más general: “Por variable nos referimos a un símbolo que, en algún contexto y de acuerdo con estipulaciones definidas, puede ser reemplazado por cualquier elemento de una determinada clase (llamada el rango de la variable)” (p. 246). Bajo esta definición ampliada, Jiménez et al. (2022) indican que el concepto de variable ya no se limita estrictamente a los números reales y ni siquiera a los conjuntos numéricos.

Estas definiciones se relacionan con el significado formal o conjuntista de la variable, típico del Análisis Matemático. En este enfoque, la variable es vista como una abreviatura informal para referirse a "un elemento en el dominio de definición de una función". Por consiguiente, una variable definida de esta manera no varía ni cambia, es simplemente un elemento estático de un conjunto infinito de números, y su definición lo reduce a ser un "comodín" que puede ser sustituido por números, caracterizado por ser atemporal y adimensional, es decir, carente de cualquier relación con el tiempo, el movimiento o las unidades de medida. Por más que el vocablo con que se les denomina sugiera lo contrario, parecería que las variables, al tomar distintos valores en cierto conjunto de números, lo hicieran por cuenta propia o por capricho, de manera azarosa y sin atenerse a ninguna secuencia temporal, y mucho menos vincularse con algún fenómeno de cambio en progreso de la realidad.

Esta imagen estática del concepto de variable es promovida por los libros de texto junto con la interpretación estática del concepto de función (comúnmente vista como "valor de entrada-valor de salida" o "regla de correspondencia"), que se desarrolla a partir de esta definición formal. Thompson y Dreyfus (2016) señalan que está total e intencionalmente divorciada de las ideas fenomenológicas y dinámicas de variación, covariación, razón de cambio y acumulación. En esta perspectiva formal de la variación, la noción de función se ubica como el objeto fundamental de estudio, exhibiendo las mismas características que las variables numéricas abstractas: es atemporal (desligada del tiempo o de cualquier secuencia temporal), adimensional (no está ligada a unidades de medida) y estática (inerte, también referida como adinamicidad).

Bajo esta concepción, una función se define simplemente como una terna (un conjunto de tres elementos) que consta de dos conjuntos de números y una regla de correspondencia que los relaciona. No se considera esencial el significado concreto o fenomenológico de estos números o de la regla de correspondencia: parece trivial asumir que eso se aclara en cada caso específico. Lo primordial de esta visión es que las funciones existen por sí mismas (por su propio derecho) y están dadas de antemano, sin la obligación intencional de surgir de alguna realidad natural o física. Por lo tanto, se asume que el aspecto más importante es simplemente la existencia de los dos conjuntos numéricos y la regla de correspondencia entre ellos.

La definición formal del concepto de función resulta en un objeto inerte, estático y desprovisto de todo significado variacional. Es decir, los números y los conjuntos de números que componen la función no necesitan ser vistos como el resultado de un proceso de cuantificación o medición (ya sea directa o indirecta); de hecho, estos conjuntos se determinan de manera arbitraria. Y la correspondencia que se establece entre los números en el dominio y los números en el rango es atemporal, es decir, no posee un carácter temporal ni está relacionada de ninguna manera con el tiempo. Los números del dominio se seleccionan de forma arbitraria, y no están obligados a seguir una secuencia temporal o creciente. Esta desvinculación es intencional, ya que el aspecto crucial es la regla que asegura que a cada número del dominio le corresponda uno y solamente un número en el rango.

En contraste, al abordar los fenómenos de variación, aunque el tiempo no se considere la variable principal, es crucial reconocer que las magnitudes variables están en constante evolución a lo largo del tiempo. Es decir, los fenómenos, ya sean naturales o sociales, son intrínsecamente dinámicos y no estáticos, y siempre relacionados bajo una temporalidad.

Por lo tanto, al estudiar la variación, es esencial tener en cuenta la presencia de características cambiantes y cuantificables que permiten imaginar o percibir que el cambio está sucediendo, esto es, siempre está presente en las situaciones variacionales un "cambio en progreso", según Thompson et al. (2019) y Jiménez et al. (2022). Este "cambio en progreso" es fundamental para la comprensión y el abordaje de una amplia gama de fenómenos en las ciencias naturales y sociales, dado que dicho concepto postula y exige una perspectiva variacional, con el uso deseable de tecnologías dinámicas para su estudio en el entorno educativo.

Por lo tanto, se retoman las ideas de Jiménez y cols. (2022), quienes mencionan que en el corazón del pensamiento variacional se encuentran las magnitudes variables. Para ello, es esencial definir el concepto "magnitud física", la cual se entiende como una propiedad o cualidad cuantificable de cualquier objeto, proceso o fenómeno. Entonces, como el proyecto se centra en el desarrollo del pensamiento variacional, es importante agregar el adjetivo de "variable" al concepto de magnitud, "magnitudes variables" son aquellas propiedades o atributos cuantificables presentes en los fenómenos de la realidad, que pueden cambiar o variar, es decir, presentan una connotación dinámica.

Las características primordiales de las magnitudes variables son que éstas son dimensionales y temporales. Es decir, están asociadas a una unidad de medida, por lo tanto, a un fenómeno que sucede en la realidad y fluye de forma continua y suave a lo largo del tiempo (tiene un inicio y un fin). Por ende, dicha magnitud variable toma un valor numérico distinto en cada momento, siguiendo una progresión temporal. En este enfoque, el concepto de variable surge de forma intuitiva y natural del contexto, exhibiendo un significado variacional o dinámico (en oposición a su significado formal y estático del Análisis Matemático). Algunos ejemplos de magnitudes variables son el tiempo transcurrido durante un fenómeno curso, la distancia cambiante por un objeto en movimiento, la velocidad de un avión durante el despegue, la temperatura oscilante del día en una ciudad, la cantidad de sustancia en un recipiente que está siendo llenado o vaciado, entre muchas otras.

La característica clave de las magnitudes variables es que éstas no son estáticas o constantes, sino que pueden experimentar cambios en función de diversas circunstancias y condiciones, es decir, al ser medidas en dicho cambio en progreso, se observa que los valores numéricos que representan a dicha magnitud variable están cambiando. Entonces, uno de los aspectos más importantes del pensamiento variacional es desarrollar la capacidad de razonar sobre cómo cambian las magnitudes variables en diferentes situaciones, por lo que los estudiantes tendrán la oportunidad de analizar cómo se relacionan las magnitudes variables y cómo evolucionan con el tiempo o en respuesta a cambios con otras magnitudes. Este tipo de razonamiento variacional es fundamental para comprender conceptos y problemas matemáticos relacionados con el estudio de la variación.

Por su parte, Vasco (2003) menciona que los estudiantes aprenden a crear modelos matemáticos que representen situaciones del mundo real en términos de magnitudes variables y sus relaciones cuantitativas, no necesariamente en términos de funciones, y que dichos modelos permiten a los estudiantes analizar y predecir cómo cambiarán las magnitudes en diferentes escenarios y cómo se relacionan entre sí. Por ende, la modelación matemática de las magnitudes variables se convierte en una herramienta poderosa para resolver problemas y tomar decisiones basadas en información cuantitativa, y desempeña un papel importante en el desarrollo del pensamiento variacional.

La importancia de esta perspectiva del pensamiento variacional consiste en que lo necesario para comprender la variación se relaciona directamente con el estudio de las magnitudes variables, mientras que las funciones figuran como herramientas auxiliares para la matematización de estas magnitudes y de los procesos en los que intervienen. En consecuencia, el lenguaje utilizado para describir el comportamiento de estas magnitudes en los fenómenos de cambio en progreso es consecuentemente variacional y dinámico.

En resumen, el desarrollo del pensamiento variacional es un proceso que progresa a medida que los estudiantes avanzan en el razonamiento sobre las magnitudes variables que están presentes en los procesos o fenómenos de la realidad. Éste se inicia con la identificación de magnitudes variables y la observación de cómo cambian en situaciones simples. A medida que los estudiantes avanzan, desarrollan la capacidad de analizar más complejamente las relaciones cuantitativas entre las magnitudes variables, y la modelación de éstas se convierte en una herramienta cada vez más sofisticada para abordar problemas y situaciones del mundo real.

Para complementar las ideas referentes al desarrollo del pensamiento variacional es necesario rescatar los trabajos relacionados con algunos marcos conceptuales referentes al tópico de estudio. Para ello, en el siguiente apartado se describen, con mayor extensión que en el capítulo de Antecedentes, los trabajos realizados por Carlson y cols. (2003), y Castillo y

Jiménez (2023), éstos últimos complementando grosso modo el marco conceptual de los primeros.

3.5 El marco conceptual de Carlson y cols. (2003) y la adaptación de Castillo y Jiménez (2023)

El marco conceptual del *Razonamiento Covariacional* de Carlson y cols. (2003) describe una serie de acciones mentales concatenadas y complejas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables, en términos de cinco niveles de desarrollo, que van desde el Nivel 1 (el más elemental) hasta el Nivel 5 (el más desarrollado). Cada nivel queda descrito por lo que se denomina *acción mental*, que consiste en la manifestación de ciertos razonamientos sobre los fenómenos o situaciones de covariación a los que son enfrentados los estudiantes (también clasificadas en cinco tipos AM1-AM5). El desarrollo de cada nivel está en función de la acción mental asociada a ese nivel, y de todas aquellas que la preceden; por ejemplo, para poder ubicar a un estudiante en el nivel cuatro (N4), éste tendrá que demostrar comportamientos y características que evidencien el dominio de las acciones mentales desde la acción mental uno hasta la acción mental cuatro (AM1-AM4).

Cada acción mental se puede caracterizar a través de la combinación de las imágenes de covariación que el estudiante vaya formando y de los razonamientos que exprese durante la actividad. Estos comportamientos reflejan o exteriorizan el grado de comprensión y tipo de coordinación que el estudiante es capaz de realizar sobre las magnitudes variables involucradas en el fenómeno.

Los comportamientos referentes a las acciones mentales describen una serie de registros de representación. Duval (2006) menciona que dichos registros de representación deben permitir la manipulación y transformación dentro de un mismo registro, y/o permitir la transformación total o parcial hacia otro registro. Por lo que, según Hitt (1998), si un estudiante consigue la articulación de al menos tres registros de representación de un concepto matemático, puede establecerse el argumento de que dicho alumno ha logrado comprender dicha conceptualización.

Por su parte, Ramos y Jiménez (2014) señalan dos limitaciones del enfoque de Carlson y cols. (2003): a) se centra solamente en el Cálculo Diferencial, y b) no considera todas las representaciones semióticas deseables para abordar el pensamiento variacional. En su trabajo proponen de manera complementaria el uso de representaciones tabular, gráfica, algebraica, verbal, y digital.

A diferencia de la información presentada por Carlson y cols. (2003), en la que básicamente se centran en la descripción en dos representaciones (numérica y gráfica), Castillo y Jiménez (2023) consideran más variedad de representaciones para complementar el análisis de dicho marco conceptual: el uso del lenguaje (explicaciones verbales), el video (representación visual y dinámica) y la tabla (representación visual de valores numéricos ordenados); en la Tabla siguiente se describe con más detalle la información al respecto.

Tabla 3. Descripción detallada y complementada de los comportamientos de los alumnos, que evidencian la ejecución de las acciones mentales relacionadas con la covariación consignadas en el marco teórico de Carlson y cols. (2003).

Acción Mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una magnitud variable con los cambios en la otra. Coordinación de los valores de Δx con los de Δy.	En el uso del lenguaje: Este será un tipo de comportamiento que esperamos que se presente en forma simultánea en todos los registros de representación que consideramos, con explicaciones verbales se evidenciará la presencia de los comportamientos esperados. Por ejemplo, enumerar todas las cualidades medibles del fenómeno (tiempo, altura del líquido). En el video: Identificación visual de las magnitudes que cambian (altura, volumen, áreas, radio, diámetro, largo) y manifestar comportamientos que muestren de qué forma se relacionan las magnitudes variables encontradas (altura-tiempo, volumen-altura, área-radio, distancia-tiempo, área-tiempo). En la tabla: Señalamientos sobre la tabla que muestren que cada columna consigna valores numéricos asociados a cierta magnitud variable. En la gráfica: Establecimiento de los ejes coordenados (x, y), señalando cuál de las coordenadas es asociada con la variable independiente, y comprendiendo que si se da un cambio en la coordenada x también se presentará un cambio en el valor de la coordenada y. En la forma algebraica: Identificación del papel que juega cada una de las variables involucradas, obteniendo expresiones algebraicas donde x es quien determina los valores de y, pudiendo señalar los valores permitidos de x.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una magnitud variable con los cambios en la otra magnitud variable.	En el uso del lenguaje: El uso de la verbalización para reforzar el conocimiento del sentido en el que se está dando el cambio de las magnitudes variables (ej. "La variable independiente siempre crece", "si la variable independiente siempre crece, entonces la variable dependiente siempre disminuye"). En el video: El trabajo de análisis visual sobre el último fotograma del video. En el caso del fenómeno de vaciado, por ejemplo, que identifique que conforme pasa el tiempo, la altura y el volumen del fluido disminuyen; en el caso del péndulo, la identificación del sentido en el que, conforme transcurre el tiempo, cambia la distancia (horizontal o vertical) con respecto al eje establecido como referencia, comportándose ésta en algunos momentos de manera creciente y en otros de manera decreciente. En la tabla: Identificación del hecho de que, conforme se avanza hacia abajo en los renglones de la tabla, los valores de la primer columna siempre aumentan, mientras que los de la segunda columna tienen un comportamiento ya sea creciente (ej. Altura respecto al tiempo en el llenado del recipiente) o decreciente (ej. Volumen respecto a la altura en el vaciado del recipiente) según sea el fenómeno observado, pudiendo ser (como en el caso del péndulo) que se identifique en una parte decrecimiento y en otra crecimiento. En la gráfica: La construcción del bosquejo de la tendencia de la curva, donde gráficamente se muestre el sentido del cambio en los valores de las magnitudes variables involucradas.

		En la forma algebraica: Que el alumno establezca la forma algebraica, con lo que observa en el video y sobre cómo se relacionan las variables (dependiente e independiente).
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	En el uso del lenguaje: Que el alumno exprese la relación que existe entre el valor numérico de una magnitud variable (variable independiente) con los cambios que presenta la otra magnitud variable (variable dependiente). (ej. “La variable independiente aumenta en tal proporción”, “si la variable independiente aumenta en tal proporción, entonces la variable dependiente disminuye en tal proporción). En el video: coordinar la magnitud de separación entre las marcas en el fotograma con la conciencia de que dichas marcas fueron realizadas con la misma separación temporal. Se esperan enunciados del comportamiento de esas separaciones (ej. “están cada vez más juntas”, “están cada vez más separadas”). En la tabla: Se esperan expresiones que relacionen la cantidad de cambio en los valores de la variable de la primera columna de un renglón a otro, relacionándolo con la cantidad de cambio obtenida en los mismos renglones para los valores de la segunda variable (segunda columna). En la gráfica: Interpretar los valores de Δx como un conjunto de segmentos horizontales, uno por cada par de puntos consecutivos de la gráfica, excepto el último, e interpretar los valores de Δy como un conjunto de segmentos verticales (uno por cada punto en la gráfica, excepto el primero). Asimismo, que asocie la dirección hacia arriba de estos segmentos verticales con el crecimiento, y la dirección hacia abajo, con el decrecimiento; también que asocie el tamaño de estos segmentos con el comportamiento variacional acelerado (cada vez más grandes) o desacelerado (cada vez más pequeños), o constante (cada vez lo mismo). En la forma algebraica: La cuantificación del cambio mediante procedimientos algebraicos, a partir de la expresión algebraica que relaciona las magnitudes variables.
El proyecto colaborativo a nivel de Educación Secundaria pretendió abarcar en tercer grado hasta la Acción Mental anterior (AM3).		
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	En el uso del lenguaje: Que el alumno exprese la relación que existe entre el valor numérico de la razón de cambio promedio y el comportamiento variacional de la magnitud variable (ej. “la razón de cambio promedio es positiva, entonces la magnitud variable crece”, “la razón de cambio promedio es negativa, podemos decir que la magnitud variable está decreciendo”, “la razón de cambio promedio es cero, entonces la magnitud variable no cambia”). En el video: Coordinar y relacionar la magnitud de separación entre las marcas en el fotograma punteado en relación con la magnitud del intervalo en que fueron hechas. Dentro de la verbalización se podrán enunciar, para el caso de nuestros fenómenos de estudio, la razón de cambio de la altura en el vaciado del recipiente conforme transcurren periodos de tiempo de la misma magnitud, o la razón a la que aumenta la superficie del espejo del líquido conforme disminuye la altura en la misma cantidad cada vez, también la razón de cambio de la distancia del péndulo hacia el eje de referencia.

	Coordinación de los distintos valores numéricos de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ con cada valor de Δx.	En la tabla: La coordinación del cociente de los cambios absolutos, e interpretarlos como una razón de cambio promedio en cada subintervalo. Se podrán observar otros comportamientos, como el agregar columnas a la tabla para incluir en ellas los cocientes calculados, y establecer con mayor precisión la relación entre ellas, es decir, la razón de cambio. En la gráfica: El estudiante debe ser capaz de formar rectas secantes entre los pares de puntos contiguos de la gráfica, y reforzar con la verbalización sobre la relación entre cada una de ellas con su pendiente como la razón promedio de cambio; al igual que la identificación de puntos importantes de la gráfica, como son los puntos extremos, de inflexión o concavidades y su relación con el comportamiento de las pendientes. En la forma algebraica: La forma de coordinar el cambio entre las variables, será calculando su razón de cambio promedio (RCP) en un intervalo tomando en cuenta un valor de interés x_0 y el tipo de intervalo a considerar (hacia adelante, atrás o centrado); mediante el análisis de los resultados de los diferentes cálculos, determine que existe una tendencia hacia un valor numérico específico, si se van haciendo dichos cálculos con intervalos de menor magnitud.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función. Coordinación de los valores de $f'(x)$ con los valores de x.	En el uso del lenguaje: Verbalizar lo que se observa y analiza en los registros de representación (video, tabla, en la forma algebraica, etc.). En el video: Este tipo de abstracción de AM ya no se podrá identificar en el video o en alguno de sus fotogramas, ya que no es cuestión visual la identificación de la razón instantánea de cambio (es una abstracción). En la tabla: El trabajo en tablas puede aproximarnos a una razón de cambio instantánea, cuando surge en el estudiante la inquietud de ver lo que sucede si se trabaja con intervalos más pequeños cada vez, sin embargo, no se podrá trabajar con intervalos más pequeños, ya que no tendríamos de donde obtener información, y se tendrá que pasar a algún otro registro para continuar el análisis. El comportamiento importante será entonces que el estudiante realice ese paso hacia otro registro y continúe con el objetivo de llegar a la razón de cambio instantánea. En la gráfica: Que el estudiante identifique propiedades esenciales de la gráfica, relacionándolas con el comportamiento variable de la tangencia en cada punto de la gráfica, razón instantánea de cambio, como son puntos extremos, de inflexión, o concavidades. Este comportamiento puede necesitar de la verbalización. En la forma algebraica: Para que un estudiante desarrolle la imagen de razón instantánea de cambio (RIC) es necesario considerar que el cambio que sufre la variable independiente es infinitamente pequeño $\Delta x \to 0$, de nueva cuenta, si tenemos la representación de la función como $y = f(x)$, la razón de cambio instantánea la calcularíamos con $\text{RIC} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y al igual que en la razón promedio, podemos tener diferentes maneras de realizar dicho cálculo. Estos cálculos se apoyan en una interpretación intuitiva de lo infinitamente pequeño y del proceso de paso al límite.

Fuente: Castillo y Jiménez (2023)

Se enfatizan en el presente trabajo las limitaciones del marco conceptual, dado que el razonamiento covariacional es cognitiva y matemáticamente mucho más complejo que el razonamiento variacional, ya que para desarrollar en el alumno la capacidad de razonar de forma covariacional, no solo es deseable sino además y ante todo es *necesario* desarrollar previamente su capacidad más elemental para razonar de manera univariacional, esto es, razonar sobre una sola magnitud variable.

Castillo y Jiménez (2023) plantean una adaptación didáctica al marco conceptual de Carlson y cols. (2003), la cual consiste en incluir una acción mental preliminar mucho más elemental, previo al Nivel 1 y a la Acción Mental 1, a la que denominan *acción mental cero* (AM0). Los autores señalan que es pertinente comenzar el estudio de la variación analizando solamente el comportamiento de una magnitud variable a partir de una lista de valores numéricos, dichos valores pueden representarse en una recta numérica; en donde es posible calcular cambios absolutos (primeras, segundas y/o terceras diferencias). Por su parte, Jiménez (2022) menciona que estos fundamentos prácticamente aritméticos proporcionan un camino para la comprensión de ideas avanzadas del Cálculo a un nivel elemental, tales como un primer acercamiento a las derivadas de orden superior y el teorema fundamental del Cálculo, al asumir este enfoque.

Asimismo, afirmamos que las grandes ideas requeridas para la coordinación de dos magnitudes variables se pueden desarrollar a partir de ese caso simplificado, es decir, los seis comportamientos variacionales básicos o fundamentales, a los que en este trabajo denominamos: *crecimiento uniforme, crecimiento acelerado, crecimiento desacelerado, decrecimiento uniforme, decrecimiento acelerado, decrecimiento desacelerado*, que después devienen en covariacionales, se encuentran también en el caso de la variación de una sola magnitud variable. En otras palabras, los conocimientos, ideas y herramientas matemáticas elementales necesarios para la coordinación de dos magnitudes variables (situaciones bivariacionales) se encuentran presentes en el estudio de una sola magnitud que cambia (situaciones univariacionales), con un nivel de complejidad cognitiva inferior. Castillo y Jiménez (2023) organizan en una tabla a grandes rasgos la descripción de lo que compete a la AM0 (referente al Nivel Cero del Razonamiento Variacional) y de los comportamientos que proporcionan evidencia de ejecución en la Tabla siguiente:

Tabla 4. Descripción de la Acción Mental Cero y de los comportamientos de los alumnos que dan evidencia de su ejecución.

Acción Mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM0	Identificación de las magnitudes variables relevantes.	<u>En el uso del lenguaje:</u> Este será un tipo de comportamiento que esperamos que se presente en forma simultánea en todos los registros de representación que consideraremos, con explicaciones verbales se evidenciará la presencia de los comportamientos esperados. Por ejemplo, enumerar varias de las cualidades medibles del fenómeno (tiempo, altura del líquido, área no mojada). <u>En el video:</u> Identificación visual de las magnitudes que cambian (altura, volumen, áreas, radio, diámetro, largo). En el caso del fenómeno de vaciado, por ejemplo, que conforme pasa el tiempo, la altura y el volumen del fluido disminuyen; en el caso del péndulo, la identificación del sentido en el que,

		conforme transcurre el tiempo, cambia la distancia (horizontal o vertical) con respecto al eje establecido como referencia, comportándose ésta en algunos momentos de manera creciente, y en otros de manera decreciente.
	Representación algebraica de las magnitudes variables.	<u>En la forma algebraica:</u> Identificación del papel que juega cada una de las magnitudes variables involucradas, proponiendo literales y/o expresiones algebraicas que representen a dichas magnitudes variables.
	Representación numérica de la magnitud variable: cuantificación del cambio.	<u>En el registro numérico:</u> Señalamientos de una lista de valores numéricos de dicha magnitud variable registrados en una tabla, ordenados de acuerdo con la secuencia natural de dichos valores en el desarrollo del fenómeno en que la magnitud variable interviene. Identificación del hecho de que, conforme se avanza hacia abajo en los renglones de la lista de valores numéricos de la magnitud variable registrados en una tabla, los valores de la columna siempre aumentan, o por el contrario siempre disminuyen, o se mantienen constantes. Es decir, tienen un comportamiento ya sea creciente (ej. Altura en el llenado del recipiente) o decreciente (ej. Volumen en el vaciado del recipiente) según sea el fenómeno observado, pudiendo ser (como en el caso de un péndulo) que se identifique en una parte decrecimiento y en otro crecimiento. Se esperan expresiones que relacionen la cantidad de cambio en los valores numéricos de la variable de la columna de un renglón a otro, (primeras diferencias).
	Representación gráfica de las magnitudes variables.	<u>En la gráfica:</u> Establecimiento del eje coordenado horizontal o vertical (x) o recta numérica. La construcción del bosquejo de gráficas donde se muestre el sentido del cambio en los valores de la magnitud variable involucrada. <u>En el uso del lenguaje:</u> La verbalización para reforzar el conocimiento del sentido en el que está ocurriendo el cambio de la magnitud variable (ej. "La magnitud variable siempre crece", "la magnitud variable siempre decrece", "la magnitud variable se mantiene constante").
	Cuantificación del cambio de una magnitud variable.	<u>En el registro numérico:</u> Analizando la lista de valores numéricos de dicha magnitud variable registrados y ordenados en la tabla de acuerdo con la secuencia natural en que se desarrolló dicho fenómeno en que la magnitud variable interviene. <u>En la forma algebraica:</u> La cuantificación del cambio mediante procedimientos algebraicos, a partir de la expresión algebraica que relaciona el cálculo de las diferencias de valores consecutivos de la magnitud variable. <u>En el uso del lenguaje:</u> Que el alumno exprese la relación que existe entre el valor numérico de las diferencias entre el valor final y valor inicial en un determinado momento y el comportamiento variacional de la magnitud variable (ej. "la diferencia es positiva, entonces la magnitud variable crece", "la diferencia es negativa, podemos decir que la magnitud variable está decreciendo", "la diferencia es cero, entonces la magnitud variable no cambia"). <u>En la gráfica y uso del lenguaje:</u> La representación gráfica de una magnitud variable en la recta numérica es un punto móvil (un solo punto móvil) que se desplaza en ella de cierta manera, regulada por el comportamiento de la magnitud variable a la que representa. Interpretar en la gráfica la dirección del punto móvil hacia la derecha con el crecimiento, y hacia la izquierda con el decrecimiento. Coordinar y relacionar la magnitud de separación entre las marcas en el fotograma punteado con la conciencia de que dichas marcas fueron realizadas con la misma separación temporal. Se esperan enunciados del comportamiento de esas separaciones en donde se analicen las distancias en las

		que aparece el punto móvil, correspondientes a los valores numéricos de la magnitud variable de nuestro fenómeno de estudio y describan el comportamiento variacional acelerado (están cada vez más separados), el desacelerado (están cada vez más juntos) o uniforme (están cada vez lo mismo de separados).

Fuente: Castillo y Jiménez (2023)

Sin embargo, en fecha reciente Jiménez y Castillo (2025) han presentado una propuesta más amplia que la mencionada con antelación, referente al marco conceptual complementario al Razonamiento Covariacional de Carlson et al. (2003) y al Razonamiento Variacional de Thompson y Carlson (2017). Los autores deciden denominar Nivel Cero (N0) a la etapa inicial correspondiente a la formación y desarrollo del razonamiento variacional, el cual se enfoca en caracterizar el razonamiento variacional relacionado con la conceptualización matemática de la variación continua de una sola magnitud variable, teniendo ésta un trasfondo temporal. Describen de manera sucinta ciertas etapas que en su conjunto tienen lugar en el nivel cero del razonamiento, al adentrarse al análisis de una situación variacional, y que son requeridos para en un segundo momento, dicho tipo de pensamiento pueda transitar desde el trabajo matemático en la recta numérica hacia el trabajo matemático en el plano cartesiano.

En el capítulo V del presente documento, referido como Marco Teórico, se presentará con más detalle la información al respecto, dado que dicho trabajo fundamentará las bases teóricas y metodológicas del presente proyecto de intervención didáctica.

CAPÍTULO 4. PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS

Todos los fenómenos que se presentan en el universo son manifestaciones del cambio, por ejemplo, los organismos en desarrollo cambian conforme crecen, las poblaciones de cualquier ser vivo sufren modificaciones en tiempos determinados, así como la historia, la política, la economía, el clima, etc., están sujetos a variaciones constantes y con frecuencia desconcertantes, algunos cambios son simples, como el ciclo de las estaciones en un año, el flujo de las mareas en los océanos, el desplazamiento de una persona de su casa al trabajo; otros son más complicados, como los brotes de enfermedades, crisis económicas, la variación de las condiciones meteorológicas, el aumento o disminución del volumen de agua en una presa en tiempos de lluvia o sequía, el crecimiento de una planta durante un mes, etc. Existen cambios de diversas formas, mismos que influyen en nuestras vidas.

Sin embargo, estas variaciones en ocasiones son difíciles de detectar a simple vista, debido a que se encuentra implícitas en nuestra vida cotidiana, por ello es sustancial la comprensión de los cambios que experimentamos diariamente, identificando patrones perceptibles tanto a simple vista, como también aquellos patrones ocultos que a simple vista no es posible detectar. Para ello es preciso entender los tipos de cambio, saber representarlos de forma comprensible, identificar particularidades en ellos y por supuesto utilizar la matemática como un medio de representación y análisis (Stewart, 1998).

Hoy en día, la mayoría de las ramas matemáticas tienen una estrecha relación con el cambio, y forman una estructura altamente integrada e interconectada. Además, el cambio es un fenómeno a tal grado complejo y variado, que para abordarlo con mayor claridad se requieren de todas las ideas que se puedan considerar para su estudio. Es decir, se requiere la combinación en una sola visión integrada de la experimentación como un vehículo para distinguir aquellos aspectos imperceptibles, el uso de la tecnología que permita observar cambios dinámicos en fenómenos físicos y de las matemáticas que permitan expresar estos cambios. Debido a que "los patrones del cambio en el medio natural y en las matemáticas no se restringen a las categorías ordinarias del pensamiento, para hacer progresos se debe responder con imaginación y sensibilidad a los nuevos tipos de patrones, incluso, los patrones propios de pensamiento deben cambiar" (Stewart, 1998, p. 195).

Sin embargo, en la actualidad se presenta en el ámbito educativo una serie de problemáticas identificadas que obstaculizan en cierta medida el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático en los estudiantes, el pensamiento variacional. Dichas problemáticas se vinculan con la forma en que este tipo de pensamiento matemático se considera o no dentro del currículo educacional del país, la manera en que se interpreta este tipo de pensamiento, así como las características esenciales que lo componen como tal para llamarlo variacional. A continuación se detalla de forma más específica cada una de ellas.

4.1 El pensamiento variacional en el currículo de educación secundaria

Analizando las propuestas curriculares vigentes en educación secundaria respecto al pensamiento variacional, se observa que la metodología de enseñanza que establecen los planes y programas para educación básica omite etapas importantes en el enfoque didáctico para el desarrollo del pensamiento variacional, lo cual repercute en el proceso de aprendizaje de las ideas matemáticas sobre la variación y el cambio en los estudiantes de educación básica, como lo mencionan Ímaz y Moreno (2010), quienes consideran que la fuente del problema es el enfoque curricular no variacional propuesto, lo cual repercute como obstáculo en la comprensión de las ideas matemáticas que abordan sobre pensamiento variacional en educación básica, media y superior en los cursos de Precálculo y el Cálculo.

Por ende, se presenta a continuación un análisis sobre las ideas y/o abordajes del pensamiento variacional en la Nueva Escuela Mexicana, vigente desde el 2022, centrado en el documento oficial *Nueva Escuela Mexicana. Programa de Estudio para la Educación Secundaria: Programa Sintético de la Fase 6* (SEP, 2024).

El plan curricular hoy vigente tenía una versión preliminar en el año 2022 en un documento oficial denominado "Avance del contenido del Programa sintético de la Fase 6", el cual específicamente para educación secundaria se encontraba como "material en proceso de construcción", pero hoy en día ya se encuentra formalizado de manera oficial desde el año 2024. Éste organiza los elementos curriculares del Programa Sintético, entre los cuales se describen los "Campos formativos", un panorama de los "Contenidos" de la Fase 6 para cada grado escolar, y los “Procesos de desarrollo de aprendizaje” (PDA). El campo formativo referente a nuestro tema de estudio es el de “Saberes y Pensamiento Científico”, el cual vincula las asignaturas de matemáticas y ciencias (biología, física y química), en donde menciona como objeto de aprendizaje del campo la “comprensión y explicación de los fenómenos y procesos naturales tales como cuerpo humano, seres vivos, materia, energía, salud, medio ambiente y tecnología, desde la perspectiva de diversos saberes y en su relación con lo social” (SEP, 2024, p. 55) y una de las finalidades del campo que tiene relación con el pensamiento variacional concierne a la “comprensión para explicar procesos y fenómenos naturales en su relación con lo social, los cuales ocurren en el mundo, con base en los saberes y el pensamiento científico por medio de indagación, interpretación, experimentación, sistematización, representación con modelos y argumentación de tales fenómenos” (SEP, 2024, pp. 55-56).

Algo relevante de este nuevo plan de estudios, es que formula recomendaciones para utilizar la transversalidad de las asignaturas contenidas dentro del rubro del campo formativo, lo cual “requiere una perspectiva sistémica orientada a la búsqueda de soluciones, así como el diseño de actividades experimentales y de campo en donde se describan, registren, argumenten y formalicen las interpretaciones de fenómenos y procesos naturales y socioculturales, y que al mismo tiempo se avance en el desarrollo del pensamiento geométrico, algebraico, variacional, estadístico y funcional” (SEP, 2024, p. 57)

Para la educación secundaria, lo referente a pensamiento variacional se aborda en el contenido de Funciones, donde los PDA que se organizan para primer grado son “Relaciona e interpreta relaciones proporcional y no proporcional a partir de su representación tabular, gráfica y con diagramas” y “Modela y resuelve diversas situaciones a través de ecuaciones proporcionales con constante positiva y negativa”. Para segundo grado, “Relaciona e interpreta la proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades, además usa una tabla, gráfica o representación algebraica en diversos contextos”. En el tercer grado, “Relaciona e interpreta la variación de dos cantidades a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica” y “Explora diversos procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional” (SEP, 2024, p. 59). Sin embargo, se requiere un análisis más profundo para escudriñar los libros de texto propuestos por la NEM para el campo formativo de Saberes y Pensamiento Científico.

Para primer grado, en el libro de texto oficial (DGME, 2024a) denominado “Colección Ximhai (Matemáticas y Biología), se desglosan los aspectos relacionados con el pensamiento variacional en base a los contenidos y subtemas siguientes: Relaciones lineales (subtemas: a) situaciones con pendiente positiva, y b) situaciones con pendiente negativa), y Proporcionalidad y no proporcionalidad (subtemas: a) registro y tabulación de datos de relaciones proporcionales y no proporcionales, y b) gráficas en el plano cartesiano de datos de relaciones proporcionales y no proporcionales).

Para segundo grado, en el libro de texto oficial (DGME, 2024b) “Colección Sk’asolil” (Matemáticas y Física), los contenidos y subtemas relacionados con el tema de estudio son los siguientes: La proporcionalidad inversa de dos magnitudes o cantidades y su representación (subtemas: cálculo de la proporcionalidad inversa, y b) representación gráfica, tabular y algebraica de la proporcionalidad inversa).

Para tercer grado, en el libro de texto oficial (DGME, 2024c) “Colección Nanahuatzin” (Matemáticas y Química) se desglosan los contenidos y subtemas siguientes: Relación e interpretación de la variación de dos cantidades a partir de su representación tabular, gráfica y algebraica (subtemas: a) comprensión de la variación y la covariación, y b) representación tabular, algebraica y gráfica de la variación y la covariación) y Procedimientos para resolver problemas de reparto proporcional (subtemas: a) métodos para hallar un término de una relación proporcional y b) ejemplos de resolución de problemas de reparto proporcional).

En el primer contenido que se aborda sobre pensamiento variacional en tercer grado de educación secundaria se menciona lo siguiente: “Todo lo que circunda al ser humano está en movimiento, incluso lo aparentemente inmóvil. Todo está en constante cambio o variación; sería imposible concebir el mundo como estático e inmutable. Comprender la variación implica conocer los conceptos de variable, función y covariación. La variable es lo que cambia, la función indica de qué manera se relacionan las variables, y la covariación se refiere a la coordinación de los cambios de las variables por parte de quien interpreta la variación” (DGME, 2024c, p. 69)

Ahora bien, podemos decir que existe una deficiencia en los documentos oficiales concernientes a los currículos de Educación Secundaria en el país, el detalle es que no se explicita de forma clara lo que concierne a presentar una definición clara de pensamiento variacional, sino solo ideas un poco ambiguas y/o difusas que se relacionan con tal concepto. Por su parte, en la Nueva Escuela Mexicana, se puede decir que es el primer proyecto curricular en donde se incorpora explícitamente el término de interés de pensamiento variacional, en el cual se indica que es un tipo de pensamiento matemático pertinente para que los estudiantes desarrollen durante su trayecto escolar en educación secundaria. Sin embargo, en ninguna parte de dicho documento oficial se presentan aclaraciones o ejemplos sobre el significado e interpretación propuesto para pensamiento variacional, y tampoco se explica sobre cómo es requerido desarrollar las ideas variacionales básicas en los alumnos

Lo anterior es una problemática, debido a que a pesar de que se considera desarrollar este tipo de pensamiento variacional, a los profesores de matemáticas no se les presentan las orientaciones didácticas mínimas para poder desarrollar su práctica docente al abordar dichos temas, es decir, no se informa qué es, ni en qué consiste, y mucho menos cómo es que se puede desarrollar en los estudiantes, tampoco qué conceptos no se relacionan con el pensamiento variacional y/o cuales sí.

4.2 La interpretación del término pensamiento variacional en Matemática Educativa

Retomando el análisis de Ramos y Jiménez (2014) sobre las concepciones del término “pensamiento variacional” y las distintas interpretaciones del término en Matemática Educativa

(Hughes-Hallet y cols., 1992; Stroup, 2002; Vasco y cols., 2000; Cuevas, Pluvinage y cols., 2012; Cantoral y cols., 1998; Carlson et al., 2003), inferimos que se presentan ciertas dificultades, tanto teóricas como prácticas.

En primer lugar, la complicación recae en la parte de las teorías, es decir, en la comunicación entre investigadores y la discusión matemática del tema en el ámbito académico, al no saber si se está hablando o estudiando la misma fenomenología matemática. En segundo lugar, la dificultad recae en la parte práctica, es decir, dicho obstáculo refiere a las implicaciones didáctico-metodológicas que se implementan en las intervenciones en el salón de clases, y la duda sobre si en dichas propuestas de secuencias didácticas se están atendiendo las problemáticas relacionadas con el pensamiento variacional o no. De ahí parte la importancia de analizar y definir el concepto de pensamiento variacional como punto de partida en el desarrollo de un proyecto de intervención didáctica.

Ahora bien, las distintas concepciones que se cobijan bajo el término en cuestión, aunque en sus declaraciones dan a entender que se refieren a la misma idea, en sus concreciones prácticas muestran que no están tratando el mismo asunto debido a que, aunque existen diversos proyectos, investigaciones y artículos que utilizan el término “pensamiento variacional”, es pertinente realizar un análisis crítico de la concepción expresada en los mismos, ya que el contenido que abordan dichos trabajos se asocia con tres diferentes enfoques de abordar el conocimiento matemático en cuestión, en este caso podemos ubicar tres grupos.

En el primer grupo, hay proyectos (Cantoral y Farfán, 1998; 2000). que hablan del término pensamiento variacional, pero se centran meramente con el estudio formal de ciertos objetos matemáticos en concreto, es decir, atan a este tipo de pensamiento a las funciones y sus propiedades; las cuales no son de naturaleza dinámica, sino estática, y su estudio no desarrolla en el individuo una forma de pensar con dinamismo, más bien, obstaculiza dicho proceso, dado que se abordan sólo como fórmulas para remplazar valores en ellas (Vasco, 2002, pág. 62).

Recordemos que, formalmente, una función se define como una relación entre elementos de dos conjuntos, tal que a cada elemento del primer conjunto se le asocia o coloca en correspondencia con uno y solo un elemento del segundo conjunto. Esta definición moderna de función ni siquiera exige que los elementos del conjunto tienen que ser números, en los libros de texto se ilustran ejemplos de funciones en donde los elementos del conjunto ni siquiera son objetos matemáticos, sino incluso representaciones icónicas. Es decir, solamente son dos conjuntos no vacíos en donde a cada elemento del primer conjunto se le vincula con un elemento del segundo conjunto.

En particular, si los elementos de ambos conjuntos son números, y a partir de ahí, se cumple la relación que establece la definición de función, se tendría lo que se denomina a las funciones numéricas, y por otro lado, si se tiene en un conjunto de vectores y en el otro conjunto a matrices, y si a cada vector se le asocia a cada matriz, se tendría otro tipo de funciones, las matriciales. Tal como menciona Tejera (2021), en repetidas ocasiones el trabajo matemático escolar que se realiza de forma habitual con funciones se convierte en un obstáculo epistemológico y didáctico para el desarrollo del pensamiento variacional, desde el análisis de la definición formal de función grosso modo como conjunto de pares ordenados, es decir valores numéricos y/o símbolos claramente estáticos.

Es decir, el "dinamismo" dentro de las interpretaciones del pensamiento funcional es meramente abstracto. Por ejemplo, si nos centramos en el tipo de funciones denominadas numéricas (las más presentadas en el currículo), una habilidad matemática que se podría confundir con "dinámica" (la cual bajo nuestro enfoque no lo es) consiste en la relación que se establece entre elementos de dos conjuntos bajo la definición de función, misma que no está sujeta a una progresión temporal. Es decir, el trabajo matemático que se lleva a cabo no tiene un orden temporal, por lo que se puede analizar a los elementos matemáticos involucrados de forma arbitraria, solamente con cerciorarse de que a cada uno de los elementos del conjunto A, le corresponda uno y solo un elemento del conjunto B.

Sin embargo, la asociación o correspondencia que se realiza se lleva a cabo en el orden que el individuo quiera, arbitrariamente. Por ejemplo, si un individuo decide realizar dicha asociación en un orden determinado, alguien puede tomar otra secuencia de valores numéricos, pero la función se mantiene igual, no cambia. Solamente se va llevando a cabo la correspondencia de los dos conjuntos de elementos y se obedece la regla por la cual se les va asociando. En el pensamiento funcional no necesariamente los valores numéricos con los que se trabaja matemáticamente están conectados con alguna realidad de la vida cotidiana, ya que los ejemplos que se ilustran en los libros de texto, en su mayoría son situaciones propuestas por los autores que no tienen que ver con ningún fenómeno natural, y en ocasiones no resulta interesante ya que los estudiantes no le encuentran utilidad y aplicación en la vida diaria.

Diversas investigaciones resaltan que bajo este enfoque, los fenómenos naturales y las magnitudes físicas de interés quedan relegados a un segundo o tercer plano. Jiménez et al (2022) mencionan que las funciones eclipsan a las magnitudes variables. Por su parte Thompson y Carlson (2017) mencionan que una gran cantidad de estudiantes experimentan dificultades para desarrollar el pensamiento variacional tomando en cuenta a las relaciones funcionales, debido a que carecen de la capacidad de razonar de forma alternativa o covariacional, es decir, se centran principalmente en procesos algorítmicos y algebraicos, provocando dificultades en la comprensión de las ideas matemáticas variacionales de forma genuina, a causa de que en el aula el alumno al abordar este contenido matemático procede a actuar de forma mecánica, aprendiendo reglas y procedimientos en torno a procesos funcionales meramente abstractos y alejados de la realidad.

Por su parte, un punto crucial a destacar es que, si analizamos bajo una perspectiva epistemológica la forma en que surgió el concepto matemático de variación a lo largo de la historia, es que el concepto de función no existía, ni mucho menos estaba desarrollado en la época en que se comenzó a construir la matemática del cambio, misma que se asocia con el pensamiento variacional. La concepción matemática abstracta de función surgió aproximadamente ciento cincuenta años después.

Por lo tanto, consideramos incluso un obstáculo dentro de la disciplina de matemáticas utilizar el término pensamiento variacional asociado a las funciones para describir procesos de cambio en progreso, debido a que al llevar a cabo un trabajo matemático con funciones no se trabaja con elementos matemáticos dinámicos y variacionales, tal como ocurre en la fenomenología de la realidad.

Es decir, el trabajo matemático que se realiza bajo el enfoque de pensamiento funcional se lleva a cabo tal como lo establece la definición formal de funciones, considera solamente relaciones matemáticas entre dos conjuntos de elementos (en el mejor de los casos elementos numéricos), grosso modo una relación (no dinámica) en donde a cada elemento del dominio se le asocia a uno y solamente un elemento del rango o codominio. Se enfatiza que dicha relación no es dinámica, por lo tanto, el individuo puede establecer dicha correlación entre los elementos del conjunto del dominio y codominio de forma arbitraria (no considerando la temporalidad del fenómeno).

En el segundo grupo, hay investigaciones que se centran en el estudio de fenómenos de la realidad, las cuales claramente proporcionan menos importancia al objeto matemático de función y se inclina por hacer más énfasis en el análisis de los fenómenos naturales, es decir, las funciones intervienen como objeto de estudio auxiliar. Sin embargo, estos trabajos que proporcionan acercamientos que parecen ser más adecuados en términos didácticos al significado lógico de pensamiento variacional, aún no presentan claridad en cuanto a la definición de dicho tipo de pensamiento, debido a que conceptualizan el cambio de manera imprecisa, como el cambio que ocurre "por porciones, en pedazos, por brincos", y éstos no toman en cuenta la característica de que los procesos variacionales suceden de forma fluida y "suave", es decir, con la característica de que la variación es continua.

Por ejemplo, Castillo-Garsow et al. (2013) señalan un ejemplo de análisis variacional al imaginar una botella que se está llenando de líquido y cuestionan acerca de las diferentes maneras de pensar sobre cómo el volumen del líquido cambia en relación con la altura del líquido en la botella. Los autores mencionan dos formas de pensar al afrontar dicha situación, en el presente grupo se analizará la primera (la segunda manera se detallará en el tercer grupo), la cual se denomina: variación "por partes", la cual consiste en imaginar secciones a lo largo de la altura de la botella y determinar (o estimar) la cantidad de volumen en cada sección. Dicha forma de pensar se compara con el llenado de una botella taza por taza, de manera sucesivas verter el líquido, es decir, la percepción de los cambios en volumen y altura del líquido de la botella ocurren en segmentos discretos (por partes o trozos).

Por ende, ésta forma de interpretar indica como los estudiantes recurren a cierta imagen de la variación al construir relaciones entre magnitudes variables (en este caso, el volumen y la altura del líquido de una botella). Se utiliza la palabra imagen para referirnos a la "dinámica de las operaciones mentales" (Thompson, 1994, p. 231), por lo tanto diferentes imágenes del cambio implican y promueven diferentes operaciones mentales.

Castillo-Garsow (2010) señala que las imágenes "segmentadas" del cambio implican imaginar el cambio ocurriendo en partes completas, estas imágenes están definidas por dos componentes: a) la unidad segmentada (pedazo) cuya repetición constituye la variación, y b) la ausencia de una imagen de variación dentro de la unidad segmentada. Por lo tanto, el cambio se analiza mediante una secuencia de segmentos (o trozos) de igual tamaño, lo que hace que medir el cambio sea esencialmente contar cuantos segmentos (o pedazos) han ocurrido.

Un aspecto clave del segmento (o trozo) es que éste se concibe de manera atómica. El pensamiento de la variación "por partes" consiste en pensar por intervalos, pero no pensar sobre los intervalos. Por lo tanto, la atención de los alumnos se enfoca en lo que aparentemente ocurre en los límites dicho intervalo o fragmento concebido como unidad. Los valores intermedios dentro del fragmento "existen", en el sentido de que son necesarios para completar el segmento (o trozo), pero reciben poca o ninguna atención.

Entonces, inferimos que cuando un individuo utiliza la variación "por partes o trozos", trabaja en unidades atómicas, es decir, razona en puntos discretos utilizando la medida de esa unidad o fragmento, y, consideramos a los espacios entre esos puntos como "huecos". Por "huecos", no conceptualizamos que no exista nada en dichos espacios, sino que enfatizamos que en el pensamiento de la variación por partes se centra en los puntos discretos que existen en los límites de dichos fragmentos.

Otro factor importante es que cuando se utiliza el pensamiento variacional por pedazos (por partes) el lugar de los vacíos o huecos evidencia la conceptualización de la variación de forma asincrónica. Es decir, cuando el tiempo se imagina en términos de "fragmentos o pedazos", existe una desproporción entre el orden temporal de los valores numéricos dentro dicha situación y la conceptualización de esos valores numéricos por parte de un estudiante la imagina de forma atemporal. Dicha desproporción genera que parezca imposible que un estudiante que utiliza el pensamiento "por trozos" imagine una situación de manera dinámica.

Por ejemplo, cuando la variable independiente varia "a saltos", la variable dependiente puede calcularse a partir de la variable independiente. Este enfoque es comúnmente utilizado por los estudiantes al graficar funciones, el cual consiste en trazar algunos puntos para tener una idea de la función y luego conectar dichos puntos, tal enfoque puntual de graficación respalda una conceptualización por saltos de la variación. Aunque dicho método permite a los estudiantes realizar una multitud de gráficas de funciones, emerge la problemática de que se necesita primeramente determinar el tamaño de fragmento antes de graficar, a menudo mediante una comprensión secundaria del problema planteado.

Por lo tanto, consideramos que la variación "por partes" genera concepciones incompletas de la variación, y la imagen mental que generan los estudiantes como resultado de dicho pensamiento es de naturaleza discreta. Entonces, el analizar la variación "por trozos" no parece implicar una capacidad para pensar en la variación de forma fluida y continua, ni tampoco parece proporcionar una raíz cognitiva para el pensamiento fluido y suave, característico de la variación genuina.

En resumen, consideramos que las conceptualizaciones y significados que abordan tanto el primer y segundo grupo descrito en los párrafos anteriores, en ocasiones no corresponde a lo que habría que entender bajo la terminología relacionada con la variación, en donde como punto principal debe existir una connotación dinámica (variación continua y fluida) relacionado con el trabajo matemático de estudio de las magnitudes variables presentes en la fenomenología de la realidad en situaciones de cambio en progreso. Dicho enfoque si es compatible con el tercer grupo, el cual se presenta a continuación.

En el tercer grupo, se ubican los trabajos de investigación que centran sus producciones didácticas en introducir el estudio del comportamiento de las magnitudes físicas, extraídas a partir de fenómenos naturales, en los que el modelo matemático abstracto consiste en la noción de magnitud variable.

Retomando el ejemplo de Castillo-Garsow et al. (2013) analizado en el segundo grupo, acerca de la situación de análisis variacional al imaginar una botella que se está llenando de líquido y pensar sobre cómo el volumen del líquido cambia en relación con la altura del líquido en la botella. Alternativamente a la variación "por trozos o pedazos", uno podría imaginar que tanto el volumen como la altura de la botella cambian juntos (simultáneamente), de modo que cada uno aumente continuamente. Dicha manera de pensar podría compararse con el llenado de la botella mediante una manguera, es decir, los cambios en volumen y en altura del líquido de ésta progresan de manera continua, fluida y suave.

Es decir, los valores numéricos de las magnitudes variables involucradas del volumen del líquido y altura del líquido varían con cambios continuos a través del tiempo. Dicha imagen fluida y continua del cambio implican imagina un cambio en progreso (Castillo-Garsow, 2010), El cambio en progreso se genera al conceptualizar una magnitud variable que siempre va tomando valores numéricos en un flujo continuo en el espacio y tiempo.

Es decir, dicha variación tiene un punto de inicio (principio del fenómeno variacional) y el punto final se alcanza hasta que el cambio en progreso termina (finalización del fenómeno variacional). Por lo tanto, las imágenes de la variación continua (fluidas y suaves) del cambio son totalmente diferentes a las imágenes de la variación "por pedazos" (fragmentada), dado que implican una conceptualización completamente diferente de la variación.

Aunque la variación continua y la variación "por partes" son fundamentalmente diferentes, consideramos que no son ajenos entre sí. Nos resulta difícil conceptualizar como la variación "por fragmentos" podría ser una raíz cognitiva (Tall, 1989) de la variación continua (por ejemplo, no importa qué tan pequeños sean los fragmentos o trozos, dicha partición siempre está presente). Sin embargo, consideramos que si la variación continua y suave fuera una raíz cognitiva de la variación "por pedazos", se podría formar la base para una forma más potente de un razonamiento acerca de la "variación por partes".

Asimismo, el análisis de situaciones de la variación continua genera concepciones suaves y fluidas de la variación. Dicha concepción (continua) implica dos factores: a) imaginar una magnitud variable en la que sus valores numéricos están cambiando, y b) atender a todos y cada uno de los estados o valores numéricos que están cambiando de manera continua sin privilegiar ningún tipo de unidad que forme la base de su conteo. Por ende, el análisis de la variación continua no genera de inmediato productos que sea posible cuantificar.

El trabajo del erudito del sigo XIV Oresme fue basarse en imágenes del cambio como una cantidad continua y medible: “Todo lo que es medible, escribió Oresme, es imaginable de la manera de una cantidad continua” (Boyer, 1991, p. 264). Oresme concebía el cambio como una intensidad de un objeto medible, indicando que una línea es una representación “adecuada” de una intensidad, porque tanto las intensidades como las líneas pueden aumentarse o disminuirse sin límite (Clagett, 1968). Oresme proporcionó ejemplos de lo que entendía por intensidad: “aquello según lo cual se dice que al es “más tal o cual”, como “más blanco” o “más rápido” (Clagett, 1968, p. 167).

Aunque Oresme no definió la intensidad con precisión, su uso del término sugiere que imaginaba la naturaleza de la intensidad como la de un continuo (Clagget, 1968). Las imágenes continuas del cambio de Oresme fueron fundamentales para el avance del estudio del cambio y la variación, apoyando a los usos posteriores de representaciones gráficas de las magnitudes variables (Edwards, 1979).

Entonces, la conceptualización sobre la intensidad del cambio de Oresme eran imágenes de la variación continua, suave y fluida. Tomando en cuenta a un punto imaginario que se movía a lo largo de una línea, Oresme indicó tres tipos claramente distintos de variación o cambio: una intensidad particular a lo largo de todo el proceso, una intensidad que aumentaba o disminuía de manera “regular”, y un movimiento “irregular” que no podía explicarse mediante un movimiento regular (Clagett, 1968). Las diversas intensidades se diferenciaban en lo que más tarde se denominaría tasas de cambio constantes y variables, sugiriendo al menos dos tipos de tasas de cambio variables.

A partir de lo anterior, consideramos que las imágenes relacionadas con la concepción de la variación continua, suave y fluida del cambio es más poderosa que la concepción de la variación “por partes o fragmentada” del cambio, debido a las dificultades matemáticas que los estudiantes presentan al analizar la variación “por trozos”.

Por su parte, bajo este enfoque retomamos a Jiménez et al (2022) los cuales señalan que en primera instancia es pertinente abordar el desarrollo de un pensamiento variacional (estudiando en solitario el comportamiento de una sola magnitud variable de interés en el espacio de trabajo matemático de la recta numérica), y posteriormente proseguir con el desarrollo del pensamiento covariacional, con el estudio de la relación entre dos o más magnitudes variables que participan en un fenómeno natural, el modelo matemático abstracto es la noción de covariación y función, pero está supeditado a la modelación de dichos fenómenos (estudiando en conjunto el comportamiento de la relación que existe entre dos o más magnitudes variables de interés en el espacio de trabajo matemático del plano cartesiano).

Tomando en cuenta lo anterior, y realizando un análisis de forma critica de la literatura especializada en el tópico de estudio, la conceptualización propia en este proyecto de intervención didáctica acerca del término en matemática educativa sobre “pensamiento variacional”, es el que está directamente relacionado con el estudio de las magnitudes variables. Se concibe a dichas magnitudes variables como aquellas cualidades o propiedades medibles que se perciben en la fenomenología de la realidad, los cuales ocurren de forma dinámica, es decir, en los procesos de variación y cambio, en donde se busca la producción de modelos mentales con referencia al análisis, interpretación y caracterización de dichas magnitudes físicas que varían, y a su comportamiento dentro de los fenómenos naturales y situaciones en contexto de la realidad; por lo que nuestra definición está directamente relacionada con la concepción del tercer grupo de los mencionados con antelación, y se vincula con las características de la variación de unicidad, continuidad, escalamiento y reversibilidad.

Dicha conceptualización se relaciona con lo expresado por Cabezas y Mendoza (2016) sobre lo que significa para ellos el pensar variacionalmente, que consiste en desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar de forma dinámica lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Es decir, se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas), las cuales se van refinando hasta la comprensión de la situación de cambio mediante procesos de visualización, conduciendo hacia un modelo mental de la situación variacional planteada, misma que es objetivada por representaciones que dan cuenta a las características del comportamiento de las magnitudes variables de interés involucradas en el fenómeno, que se manifiesta con algún tipo de soporte material (registro ostensivo).

En resumen, y reconociendo la diversidad de enfoques en relación con el pensamiento variacional, para el presente proyecto consideramos que es un tipo de pensamiento matemático requerido para comprender los procesos de variación y el cambio en progreso que ocurren en el entorno, y se desarrolla a medida que se estudia y analiza cuando suceden los fenómenos variacionales, en donde el estudio de las magnitudes variables es el enfoque primordial. Es una forma de pensar que presenta tanto una faceta cualitativa, la cual involucra la construcción de imágenes dinámicas de la variación y un razonamiento sobre las mismas, así como el desarrollo de un lenguaje que exprese su dinamismo y este aspecto cualitativo del pensamiento variacional, que Stroup (2002) ha conceptualizado como Cálculo cualitativo; y una faceta cuantitativa implica la realización de cálculos con valores numéricos y el desarrollo de técnicas procedimentales aritméticas mediante la utilización de expresiones algebraicas con la simbología que la caracteriza. Thompson y Carlson (2017) han identificado dos componentes complementarios para su desarrollo, el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional.

4.3 El enfoque del razonamiento funcional versus el razonamiento variacional

En la enseñanza tradicional, es claramente notorio que en los planteles educativos un alto porcentaje de profesores de matemáticas aborda los temas de variación descuidando fundamentalmente la esencia de dicho razonamiento, el enfoque variacional; mayormente se inclinan a conducir una enseñanza de las funciones de acuerdo con la definición estática del grupo Bourbaki, con el lenguaje didáctico meramente estático de la teoría de conjuntos. Por ejemplo, en el razonamiento funcional formalmente se define a una función creciente mediante el siguiente enunciado "diremos que f es creciente en el intervalo desde A hasta B, si cuando tomamos dos valores diferentes x_1 y x_2 de la variable independiente x dentro de este intervalo en donde se cumple que $x_1 < x_2$, resulta que $f(x_1) < f(x_2)$", y viceversa "diremos que f es decreciente en el intervalo desde A hasta B, si cuando tomamos dos valores diferentes x_1 y x_2 de la variable independiente x dentro de este intervalo en donde se cumple que $x_1 < x_2$, resulta que $f(x_1) > f(x_2)$".

Dicho tipo de razonamiento funcional se caracteriza, en primera, en que en el orden en que se toman los valores numéricos no se toma en consideración un trasfondo temporal, es decir, solamente se establece la comparación entre x_1 y x_2, esto es solo un orden puramente matemático. El componente del tiempo queda relegado, no se toma en consideración. Luego se calculan los valores de f en x_1 y en x_2 y se lleva a cabo una comparación; si ocurre que f en x_1 es menor que f en x_2 se dice que la función es creciente. Dicha concepción no es dinámica en el sentido del pensamiento variacional, debido a que no hay temporalidad de por medio, solo se lleva un trabajo matemático analítico meramente aritmético, abstracto.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede considerar una analogía, diciendo que ésta podría ser como una fotografía instantánea de la fenomenología para cada evaluación en f, es decir, una pequeña parte de análisis de la variación en comparación con el cambio total del fenómeno. Por lo tanto, se juzga el comportamiento del proceso con dos fotografías, es decir, tenemos una fotografía instantánea en el momento x_1 y otra foto instantánea en el momento x_2, se comparan y se juzga lo que ocurre. Dicho procedimiento no cubre en su totalidad la fenomenología variacional, debido a que para poder cubrir todo el fenómeno se tiene que realizar muchísimas veces esa comparación (varios pares de fotografías), con el objetivo de cubrir el análisis de todos los valores desde A hasta B utilizando un par cada vez. Entonces el "dinamismo" se expresa en que hay que tomar más fotografías (es decir, realizar más comparaciones de valores numéricos) para analizar más a fondo el fenómeno. Sin embargo, eso no significa un análisis dinámico, sino estático, análisis por partes de la variación.

Por otro lado, en el razonamiento variacional, una forma dinámica de describir a una función creciente solo sucede en el pensamiento variacional genuino, en donde decimos que una magnitud variable covariante es creciente cuando al crecer de manera uniforme los valores numéricos de la variable independiente, los valores correspondientes de la variable dependiente van consecutivamente aumentando (en la frase van consecutiva o progresivamente aumentando, existe una secuencia entre valores numéricos relacionada con un trasfondo temporal). Es decir, el valor numérico actual es mayor que el valor numérico inmediato previo y que todos los valores numéricos anteriores, y es menor que el valor numérico inmediato posterior y que todos los valores numéricos posteriores.

Bajo el enfoque variacional dinámico es natural observar (sin necesidad de fotografías instantáneas estáticas, sino más bien como un videoclip) el mismo dinamismo del fenómeno al analizar los valores numéricos, y juzgar si dicha magnitud variable se comporta de forma creciente o decreciente, debido a que se analizan todos y cada uno de los valores numéricos de la magnitud variable, no solamente dos. Esto es una manera dinámica de razonar, de analizar cambios y variaciones de los fenómenos.

Cabe mencionar que en ambos casos se lleva cabo un razonamiento matemático, sin embargo en uno consideramos que efectivamente es razonamiento variacional, debido a que se centra en el estudio de la variación física, del fenómeno de cambio en progreso de la naturaleza, y en el otro caso el razonamiento es funcional (analítico), es decir, concierne a otra rama de la matemática más abstracta, en donde la fenomenología de la realidad y con ella el trasfondo temporal ni siquiera es considerada, se restringe solamente a los elementos numéricos, entes matemáticos y el análisis de sus relaciones.

Por otra parte, las gráficas en el razonamiento funcional son estáticas, y en el razonamiento variacional son dinámicas. Si analizamos el proceso de construcción de la gráfica de una función numérica, veremos que éste se realiza con base en su definición formal, es decir, se cuenta con dos conjuntos de números y a cada número (elemento) del primer conjunto se le establece en correspondencia con otro número del segundo conjunto. Grosso modo, se toman los dos valores numéricos, éstos se convierten en una pareja ordenada de números y se interpretan geométricamente como un punto con coordenadas que puede ser ubicado en el plano cartesiano. Luego se lleva a cabo otro emparejamiento de valores numéricos que no necesariamente se ubicará en el punto inmediato siguiente (ni siquiera es fácil que quede cerca de él), es decir, queda separado.

El proceso de graficar las funciones se realiza por "punteo", y en desorden para que una vez que se tenga una cierta cantidad de puntos en el plano cartesiano la tarea cognitiva que se lleva a cabo es "encontrarle forma a la gráfica", es decir, la percepción visual sugiere que todos los puntos ubicados forman una curva, por lo cual es necesario realizar el proceso de unión de todos los puntos graficados mediante una curva suave, no hay dinamismo en el trabajo matemático de llevar a cabo la representación.

Por su parte, en el razonamiento variacional y el análisis de los fenómenos de la realidad las gráficas se construyen de forma diferente, de manera dinámica, es decir, la gráfica se genera mediante el movimiento continuo, suave, sin brincos, de un punto móvil (punto generador) en el plano cartesiano. Dicha gráfica codifica estados del fenómeno, no es por puntos separados, es mediante un punto móvil. El enfoque es con dinamismo, covariacional, analizando el cambio en progreso.

El pensamiento variacional es el tipo de pensamiento que se generó en la matemática antes de que se crearan las funciones y se les definiera formalmente. Es decir, fue muchísimo antes, alrededor de 150 años previos a cuando surgió el concepto de función cuando los pensadores matemáticos de aquella época comenzaron a fijarse en la realidad de los fenómenos naturales, fenómenos físicos, específicamente en el movimiento no uniforme y a querer matematizar eso con las herramientas que poseían en esa época.

Lo anterior produjo una manera de acercarse a las cosas que refleja la realidad que se quiere matematizar, la cual siempre tiene un trasfondo temporal, que se concreta en el hecho de que la progresión de valores numéricos que van tomando las cantidades (magnitudes variables) que ahí intervienen está condicionada temporalmente. Es decir, como primer elemento de argumentación es que hay que considerar que existe una clara progresión en el tiempo en que sucede la fenomenología de estudio, que va desde un momento inicial (el fenómeno tiene un comienzo) hasta un momento final (el fenómeno concluye).

También, otro elemento para considerar es que al analizar la progresión del fenómeno con un trasfondo temporal, éste no se presenta por "saltos o brincos", sino que tiene un seguimiento continuo, se presenta el cambio en progreso (como avanzar mediante las cuentas de un rosario y/o eslabones de una cadena), en donde es posible utilizar un lenguaje especial tales como "valor actual", "valores anteriores o previos", "valores posteriores". Estos conceptos en el análisis de las funciones no tienen cabida, ya que en el estudio de éstas, los elementos y/o valores numéricos son seleccionados de forma arbitraria.

Por ejemplo, en el estudio de las funciones se toma cualquier valor, por lo tanto, no puede considerarse como valor inicial o previo, ya que ni siquiera se sabe o tiene el conocimiento del valor siguiente que se tomará por la característica de la arbitrariedad. Por lo tanto, este lenguaje variacional dinámico no existe en el trabajo con las funciones, y para el razonamiento variacional de las cantidades (magnitudes variables) es requisito importante conocer esos conceptos para acercarse al análisis de cómo sucede la fenomenología.

Lo que se conserva únicamente con la visión de pensamiento variacional en el pensamiento funcional es que en la definición formal de función se presenta la exclusividad en la relación de asociar a un solo elemento de un conjunto A con uno y solo un elemento del otro conjunto B. Dicha visión se asocia con la idea primigenia de que en los fenómenos de la realidad en un momento dado para un cierto valor de la magnitud variable es imposible que haya dos o más valores diferentes asociados de la otra magnitud variable.

En el trabajo de Carlson et al. (2003), se da cuenta de diversos estudios que llevan a los autores a afirmar que los estudiantes muestran dificultades para interpretar y representar funciones involucradas en fenómenos de cambio, y también mencionan la dificultad de interpretar las gráficas como una forma de representar una relación entre variables. Por ende, se sugiere por lógica realizar primeramente el análisis de una magnitud variable de manera aislada con base en el desarrollo histórico del enfoque variacional, ya que así fue como ocurrió cuando Nicole Oresme en su obra *Teoría de las latitudes y formas*, explicó que: la dimensión de los fenómenos está sometida a múltiples variaciones, y que dicha multiplicidad es difícilmente discernible si su estudio no se remite al estudio de figuras geométricas… "Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmente rectilíneo" (citado en González-Urbaneja, 1992, p. 42).

Oresme deseaba representar los fenómenos de forma geométrica pero, por la complejidad de la representación en tres dimensiones, se apoyaba en representaciones bidimensionales, y así fue como planteó sus primeras representaciones de las magnitudes que cambian; jamás estaba pensando en dos magnitudes variables, sino en darle prioridad a una magnitud variable (ordenada) y plasmar los cambios consecutivos sobre un segmento horizontal (al que denominó longitud) para representar la cantidad continua de sustancia (o de tiempo), y un segmento vertical (al que denominó latitud) para representar el tamaño de la intensidad de la cualidad.

Sin embargo, sabemos que aunque en los fenómenos naturales de la realidad en la que vivimos nunca se presentan las magnitudes variables por separado, es decir, de forma aislada; diversas investigaciones en el área de Matemática Educativa de Reséndiz (2006), Ímaz y Moreno (2010), y Stroup (2002), muestran que surgen dificultades en los estudiantes al empezar a estudiar el pensamiento variacional con el desafío de coordinar dos magnitudes variables, debido a que implica una tarea cognitiva difícil de llevar a cabo.

Por ejemplo, cuando una persona no sabe bailar y le solicitan que mueva pies y manos al mismo tiempo al ritmo de las cadencias musicales, le resultará una tarea compleja, por lo que es lógico concebir que primero debe aprender a coordinar el movimiento de los pies con la música, y posteriormente agregar el movimiento de las manos, es decir, avanzar gradualmente de lo simple hacia lo complejo. De forma análoga, es preferible que los estudiantes sean introducidos al pensamiento variacional analizando primeramente el cambio de una sola magnitud variable de la situación fenomenológica artificialmente aislada (razonamiento univariacional), y después abordar el análisis del cambio simultáneo de dos magnitudes variables en el proceso (razonamiento bivariacional).

Por ello, es necesario complementar el modelo teórico de razonamiento covariacional de Carlson y cols. (2003) añadiendo a éste un Nivel Cero (N0) para el desarrollo de este tipo de pensamiento, en el cual también se desglosan una serie de acciones mentales que manifiestan comportamientos que evidencian que el estudiante se encuentra en ese nivel de comprensión de las ideas variacionales, para transitar de forma menos complicada al estudio de la covariación entre magnitudes variables.

El nivel cero (razonamiento univariacional) consiste en concebir en cierta situación de cambio de la realidad la presencia de cualidades que sean posible cuantificar, y por lo tanto puedan expresarse mediante valores numéricos. A dichas propiedades cuantificables de la realidad en el presente trabajo se les denomina magnitudes, y en la literatura anglosajona se denominan cantidades. Sin embargo, el concepto de cantidad no es sinónimo del concepto de número, Thompson definió a la cantidad como una conceptualización de un objeto realizada por una persona, según la cual el objeto posee una particularidad que podría ser medida, es decir, toma en cuenta el aforismo de Cauchy que menciona que "a los números se los ve nacer de la medición de las magnitudes".

Dicho tipo de razonamiento variacional (correspondiente al nivel cero) consta también de una serie de acciones mentales ubicadas en este nivel, para manifestar el desarrollo de esta forma dinámica de pensar mediante una serie de etapas de un proceso intelectual que ocurre en el aparato cognitivo del estudiante. A continuación se formulan con más detalle las descripciones correspondientes a las etapas que en su conjunto tienen lugar en el nivel cero del razonamiento, al adentrarse al estudio del análisis de una situación variacional, y que son requeridos para en un segundo momento, dicho tipo de pensamiento pueda trasladarse desde el trabajo matemático de la variación en la recta numérica hacia el trabajo matemático covariacional en el plano cartesiano. En el apartado de Marco Teórico del presente trabajo de tesis se presenta la información a detalle sobre dicha propuesta de marco conceptual complementario: el nivel cero del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional es un tipo de pensamiento matemático complejo, ya que se desarrolla en dos momentos cruciales e importantes. El primer nivel del razonamiento variacional, en el que aislamos de manera ficticia una magnitud variable para no enfrentarnos en el primer paso a la complejidad de analizar varias magnitudes, es donde dicha magnitud variable se matematiza, en particular se geometriza y representa en el espacio adecuado que es la recta numérica.

En este espacio se lleva a cabo un trabajo matemático que no es elemental, el cual requiere herramientas elementales, pero no es elemental ni fácil. Dicho trabajo matemático tiene que ver con observar cómo se desplaza un punto en la recta numérica (se recupera el dinamismo), a diferencia de lo que habitualmente se les enseña a hacer a los alumnos en la recta numérica en la primaria y la secundaria, que es un trabajo matemático, pero con un enfoque estático (se les solicita que aprendan a identificar puntos con sus coordenadas o viceversa, coordenadas con puntos, a partir de eso, segmentos que no cambian de tamaño nunca, quedan definidos por sus extremos, un trabajo esencialmente estático, no hay temporalidad ahí).

Por su parte, nuestro enfoque de pensamiento variacional se centra en matematizar una realidad, interpretar, representar en la recta numérica algo que está cambiando en relación con el tiempo, significa que tenemos que enseñar y aprender a trabajar con un punto móvil. Y entender que la dirección de su desplazamiento refleja cómo se está comportando nuestra magnitud variable (desplazamiento en la dirección positiva, crecimiento; desplazamiento en la dirección negativa, decrecimiento). Después, deviene una segunda fase en la que este tipo de razonamiento variacional se amplía para incorporar una segunda magnitud variable (razonamiento covariacional), entonces, la dificultad aumenta debido a que se pasa de trabajar de la recta numérica al plano cartesiano. En consecuencia, ahora hay dos magnitudes variables presentes en la fenomenología de estudia, por lo tanto dos puntos móviles que coordinar, interpretar y analizar.

A partir de lo anterior, se considera pertinente tomar en cuenta y mejorar el soporte metodológico de Bojórquez, Castillo y Jiménez (2016), el cual propone que las actividades diseñadas para la secuencia didáctica se enfoquen en el análisis del llenado y vaciado de recipientes con variaciones no uniformes, en vez de retomar lo que estipula el programa oficial, como son los fenómenos de movimiento uniforme al inicio del tema. Por lo tanto, los recipientes que se seleccionarán tendrán una forma especial (cónica), con la finalidad de poder apreciar los seis tipos de comportamientos variacionales elementales, y abarcar un amplio conjunto de ideas matemáticas primigenias sobre el pensamiento variacional, tales como el estudio de los fenómenos de movimiento oscilatorio y rectilíneo, ya que en ellos se aprecian las ideas que se pretenden desarrollar, en particular, en los fenómenos de carácter oscilatorio se observan como mínimo para cada caso, cuatro tipos básicos de comportamientos de una magnitud física que cambia, lo cual debe de aprovecharse para un análisis profundo y significativo, así como también ejemplos de tiro parabólico y caída libre.

Como se puede observar en los apartados anteriores, es necesario y factible que las ideas variacionales genuinas sean introducidas en los estudiantes desde etapas tempranas como lo es el nivel de educación secundaria, analizando primeramente situaciones univariacionales previo a la covariación. Por ello, se considera que existen ciertos argumentos pertinentes sobre los cuales es posible plantear los objetivos del proyecto.

4.4 Objetivos del proyecto de intervención didáctica

El Objetivo general del proyecto de intervención didáctica consiste en: fundamentar teóricamente, diseñar y validar una muestra integrada de actividades didácticas para los tres grados de educación secundaria, que coadyuve a la formación y el desarrollo de ideas y conceptos matemáticos elementales relacionados con el pensamiento variacional de los estudiantes.

Los objetivos específicos se desglosan a continuación:

i. Identificar y caracterizar las acciones mentales relacionadas con el estudio de la variación continua de una sola magnitud variable aislada (razonamiento uni-variacional) para elaborar una propuesta teórica-metodológica denominada como el Nivel Cero del Razonamiento Variacional (N0) que sustente dicho trabajo de tesis.

ii. Diseñar y/o adaptar prototipos manipulables y virtuales de actividades didácticas para el trabajo matemático en la recta numérica, que apoye el desarrollo del Nivel Cero del Razonamiento Variacional.

iii. Diseñar y/o adaptar prototipos manipulables y virtuales de actividades didácticas para el estudio de la covariación de dos magnitudes variables relacionadas entre sí (razonamiento bi-variacional), y el trabajo matemático en el plano cartesiano, analizando la variación lineal, cuadrática, y periódica respectivamente, para cada grado de educación secundaria, tomando en cuenta las acciones mentales relacionadas con los Niveles 1, 2 y 3 (N1, N2, N3) del Razonamiento Covariacional de Carlson et al. (2002).

CAPÍTULO 5. LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

Las características de la propuesta se fundamentan estrechamente con los diversos componentes del enfoque teórico que ya han sido expuestos en capítulos previos, así como también con el marco teórico-metodológico sobre el desarrollo del pensamiento variacional de Jiménez y Castillo (2025), cuyas nociones serán expuestas de manera más detallada en el capítulo siguiente, referente al marco teórico del presente proyecto. A grandes rasgos, la propuesta de intervención didáctica se orienta al estudio del comportamiento de magnitudes variables presentes en los fenómenos de la realidad, sin reducirlas necesariamente a funciones matemáticas (funciones numéricas), enfatizando la promoción intencional y selectiva de maneras variacionales de entender (MVdE) y de pensar (MVdP) que señalan Amador y Jiménez (2023), en lugar de centrarse exclusivamente en la formulación y/o definición de conceptos y propiedades relacionadas con aspectos intramatemáticos.

A diferencia de otras propuestas, el diseño didáctico que se plantea parte del análisis de situaciones con razón de cambio variable desde el mismo inicio de la secuencia, relegando aquellas de razón constante a solo un caso particular, de los diversos comportamientos presente en los fenómenos de cambio. Asimismo la secuencia didáctica, en concordancia con el enfoque teórico asumido, se estructura en dos fases: en la primera fase se contempla a) el trabajo de matematización del comportamiento de una sola magnitud variable, intencional y artificialmente aislada correspondiente al razonamiento univariacional (Nivel Cero del razonamiento variacional), y en la segunda fase b) el trabajo de matematización bivariacional, que aborda la covariación entre dos magnitudes variables (Nivel 1, 2 y 3 del razonamiento covariacional). Además, con el propósito de propiciar la formación por parte del alumno de maneras variacionales flexibles de entender y de pensar, se incluyen en la secuencia situaciones dinámicas en las que el tiempo no es necesariamente la magnitud variable independiente relevante.

Cabe destacar que la propuesta enfatiza la conceptualización de la variación continua y suave de las magnitudes variables, que caracteriza a los fenómenos dinámicos de la realidad, abandonando la visión estática, puntual y discreta del estudio de la variación que predomina en la enseñanza tradicional. Con ello, se pretende evitar que el estudiante se forme imágenes mentales limitadas, que conceptualice el cambio "en grueso" o “por porciones” de la variación, en lugar de visualizar y comprender el cambio continuo en progreso. Finalmente, en plena concordancia con el enfoque de la covariación instrumentada, se incluye el análisis de situaciones en vivo, como videos y manipulables físicos (por ejemplo: el péndulo o el resorte, entre otras) que permitan una experiencia directa y significativa del fenómeno variacional. A continuación se describen con más detalle las ideas principales abordadas con anterioridad.

5.1 El pensamiento variacional y las magnitudes variables

En diversos fenómenos naturales y sociales, es habitual encontrarnos con magnitudes que varían a través del tiempo y el espacio. Estas magnitudes variables, presentes en los fenómenos o procesos de la realidad, reflejan el dinamismo y el cambio en progreso que caracterizan a la naturaleza del mundo real y que, por lo tanto, son objetos de estudio del pensamiento variacional, ya que su desarrollo exige una manera dinámica de pensar (Vasco, 2003). El tiempo, la temperatura, la presión y la velocidad de un móvil en carretera son ejemplos de magnitudes variables que fluctúan y evolucionan en relación con los procesos y fenómenos que ocurren en el entorno natural (Jiménez et al., 2022).

El objeto de estudio del pensamiento variacional se enfoca en las magnitudes variables. Como se mencionó anteriormente, estas magnitudes variables son aquellas propiedades o cualidades perceptibles y cuantificables presentes en los fenómenos o procesos de la realidad, que tienen capacidad para cambiar, crecer o disminuir a lo largo del tiempo o del espacio, y que por su naturaleza intrínseca son dinámicas. Además, "toda magnitud variable puede ser medida o cuantificada usando la unidad o patrón y el instrumento correspondiente" (Jiménez et al., 2022), es decir, las magnitudes variables tienen unidades de medida.

El pensamiento variacional es el tipo de pensamiento matemático que busca comprender cómo se producen estos cambios y cómo podemos interpretar y analizar los patrones que se forman en relación con estas magnitudes. El estudio del pensamiento variacional se puede aplicar en diversos campos, como la geología, la física, la biología y la psicología. En cada uno de estos campos, el objetivo es entender cómo las magnitudes variables se comportan en diferentes situaciones y cómo podemos representar y analizar matemáticamente este comportamiento. Jiménez et al. (2022) presentan cuatro características esenciales del concepto de magnitud variable que es adecuado para desarrollar en los estudiantes las ideas y técnicas variacionales propias del pensamiento variacional:

1. El símbolo usado para representar la magnitud variable, en primera instancia, representa a la *cualidad cuantificable* en sí misma: temperatura, presión, densidad, etc.
2. Pero no solamente representa a la cualidad, sino además representa también a *todos y cada uno* de los distintos valores numéricos que progresivamente puede tomar, en el proceso o fenómeno en el que ella interviene. En particular, en el proceso de razonamiento sobre el cambio en progreso, representa al *valor actual* de la magnitud variable.
3. Además, ese conjunto de valores numéricos no está dado al azar, ya que la magnitud variable no cambia de manera caprichosa (aleatoria) o caótica, sino que lo hace en una cierta secuencia, que habitualmente tiene como referente de fondo al tiempo, esto es, cambia de un momento a otro. (En cada momento, la magnitud variable toma un valor numérico distinto).
4. Esta secuencia de valores numéricos es continua, aunque también puede ser discreta (…). (pp. 223-224)

Debido a esta consideración fundamental, el foco de atención se centra en las magnitudes variables, en lugar de las variables numéricas abstractas. Es esencial comprender que las variables numéricas empleadas en el contexto de funciones se caracterizan por sus valores numéricos, que son meramente números sin necesidad de estar ligados a mediciones específicas o a la cuantificación de fenómenos o procesos de la realidad. Estos valores numéricos son simplemente extraídos de conjuntos numéricos sujetos a una relación de correspondencia, y es así como se establece la noción de función numérica. Es importante destacar que las funciones numéricas no poseen unidades de medida, en contraposición a los valores numéricos obtenidos al cuantificar magnitudes variables, los cuales intrínsecamente incluyen unidades de medida.

Es crucial resaltar que los valores numéricos asociados a las magnitudes variables están inquebrantablemente vinculados a una dimensión temporal, ya que se originan en el contexto de procesos dinámicos. En contraste, los de las variables numéricas son seleccionados de manera arbitraria y carecen de una relación temporal significativa, ya que en los conjuntos numéricos, el orden en el que se toman sus elementos no tiene mayor importancia.

5.2 Situaciones con razón de cambio variable (no uniforme)

Asimismo, las situaciones didácticas que se proponen se basan en el análisis de fenómenos físicos, en las cuales se considera que, para posibilitar el desarrollo del pensamiento variacional, dichas actividades deben de presentar situaciones en las cuales la razón de cambio es variable. En los planes, programas de estudio y libros de texto vigentes, así como en muchos proyectos de intervención el abordaje de esta temática inicia con actividades de covariación uniforme, lo cual ha generado interrogantes sobre sí es pertinente comenzar el aprendizaje variacional partiendo del estudio de la uniformidad, y nuestra respuesta es: “no es necesario”, por esto, se plantea iniciar el estudio del comportamiento variacional en situaciones donde el cambio no sea uniforme. Kaput (1994) asume la siguiente postura “el aprendizaje del cálculo tiene que basarse en el estudio del cambio y la acumulación cuantificables y en la relación entre los dos”. Stroup (2002) señala que los planes de estudio excluyen durante mucho tiempo el análisis a fondo de situaciones donde la razón de cambio es variable, y argumenta que dicha restricción constriñe el aprendizaje, tanto de las ciencia naturales y sociales, como de las matemáticas, dado que entornos donde la variación es uniforme (siempre la misma) son poco frecuentes en la realidad.

Es decir, se pretende comenzar con actividades en las cuales se puedan estudiar, de ser posible, los cambios de crecimiento y decrecimiento no uniformes, y posteriormente actividades donde se estudie el comportamiento uniforme; de esta manera se abordarán los siete tipos básicos de comportamiento de una magnitud física variable, los cuales son: *crecimiento uniforme*, *crecimiento acelerado* y *crecimiento desacelerado*, así como también *decrecimiento uniforme*, *decrecimiento acelerado*, *decrecimiento desacelerado* y el comportamiento de *razón de cambio nula* será considerado como un tipo extremo o límite de variación.

La investigación realizada por Dávila y Herrera (2021), en la cual se realizó una revisión al currículo mexicano de educación secundaria y los libros de texto con respecto al estudio de la variación lineal, permitió constatar que se presentan situaciones que no favorecen su estudio debidamente, ya que plantean un abordaje estático de la variación, no se favorece el análisis de la variación de cada magnitud, ni de su variación conjunta.

Dichos programas presentan un enfoque muy limitado de enseñanza del tema, dado que se centran en un enfoque discreto y estático de las situaciones, y más aún, no se promueve explícitamente el desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes, lo cual es central para comprender adecuadamente los fenómenos variacionales (Bojórquez, Castillo y Jiménez, 2016), lo que a futuro serán constructos e ideas para apropiarse de manera adecuada de la noción de función durante el trayecto escolar de educación secundaria, y en estudios superiores dichas ideas construidas en esta etapa proporcionarán un soporte de conocimientos necesarios para una mejor comprensión de temas más complejos en el bachillerato y/o universidad.

Cuando se estudian procesos de variación, es sustancial no sólo interesarse por los cambios en sí mismos, sino también considerar otros aspectos de interés, por ejemplo, la dirección y sentido (magnitudes vectoriales), y la rapidez o velocidad con que se comportan. Para entender la importancia de los problemas del pensamiento variacional y su enseñanza es pertinente precisar dos aspectos: el cualitativo y el cuantitativo; el primero muestra cómo cambia la magnitud variable y el segundo indica cuánto cambia dicha magnitud.

5.3 Estructura de la propuesta: razonamiento univariacional y razonamiento bivariacional

Sabemos que en la vida diaria ocurren fenómenos naturales con una gran cantidad de magnitudes variables. Por ejemplo, cuando se presentan lluvias y el agua que cae en forma de gotas se concentra en una presa, el volumen de agua que ésta contiene aumenta y depende de la duración de la tormenta, así como de su intensidad; por otro lado, la disminución del volumen del agua de la presa dependerá de la evaporización del líquido, la permeabilidad del suelo, las extracciones de agua que se generen para su utilización, etc.

Sin embargo, aunque en la naturaleza las magnitudes físicas se encuentran en constante interacción, para estudiarlas se propone como estrategia didáctica aislar de dichos fenómenos naturales las distintas magnitudes variables, las cuales pueden cuantificarse y analizarse por separado, con la finalidad de facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Se parte de la premisa de que el conocimiento se construye de lo elemental hacia lo complejo, por lo que se propone en un primer momento el estudio del comportamiento de una sola magnitud variable aislada (situaciones univariacionales) y después correlacionar dos magnitudes variables (situaciones de covariación), con ello se intenta evitar dificultades y confusiones de los alumnos en la temática.

El diseño de las situaciones didácticas se organiza de modo que se estudia primero una sola magnitud variable intencionalmente aislada (razonamiento uni-variacional) y posteriormente estudiar dos magnitudes variables interrelacionadas (razonamiento bi-variacional). En el currículo actual se pretende que el estudio de la variación se lleve a cabo desde un primer momento en el plano cartesiano, relacionando dos magnitudes físicas que varían, es decir, se comienza propiamente con el análisis de la covariación, y aunque en la realidad las magnitudes variables están en interacción constante, varias investigaciones como la de López y Sosa (2008) muestran que, en general, los estudiantes presentan dificultades para razonar covariacionalmente, dichos autores señalan que "las experiencias de aprendizaje en las aulas no [toman en cuenta] la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar, y explicar fenómenos de carácter variacional, [originando] dificultades de aprendizaje y conceptualizaciones erróneas en los estudiantes" (p. 309).

Por ejemplo, Dolores y Salgado (2009), presentan una crítica hacia los métodos de graficación tradicionales (usando la tabulación), cuyos procedimientos están basados solamente en el trazado de la gráfica de una función a partir de un conjunto de puntos, dejando en segundo plano y sin relevancia la correlación causal entre las variables; no se hace énfasis en la naturaleza de lo que cambia; se representan las x y las y como entes abstractos, y los valores que adquieren, dependen de los valores numéricos que le asigne el docente; se usa la fórmula de la función para calcular las coordenadas de los puntos, finalmente, se unen los puntos consecutivos sin realizar cuestionamientos sobre su significado variacional, y no necesariamente se discute el cómo y cuánto cambian dichas variables.

Además, los estudiantes tienen que enfrentar el desafío cognitivo de analizar dos magnitudes que cambian al mismo tiempo y que están interrelacionadas, ya que una magnitud variable es dependiente de los cambios en la otra (covariación). Este posicionamiento es compartido por Carlson y Oehrtman (2005), los cuales hacen alusión a que se presentan dificultades para establecer una estructura conceptual de la relación funcional entre la variable dependiente y la independiente, pues para ello se requiere del razonamiento covariacional.

Por lo anteriormente expuesto, como estrategia didáctica consideramos importante que, en un primer momento, se inicie con el análisis de una sola magnitud física, sus comportamientos y las distintas maneras de representarlas, con el fin de desarrollar ideas variacionales básicas, según la adaptación complementaria que hemos realizado al marco teórico de Carlson y coautores (2003). Como hemos mencionado en apartados anteriores, dicho marco teórico no aborda el estudio de una sola magnitud variable, es decir, se centra totalmente en la covariación, pero éste se ha complementado con las aportaciones de Jiménez y Castillo (2025), agregando y caracterizando el Nivel Cero del Razonamiento Variacional, describiendo las Acciones Mentales involucradas en éste, el cual se integra como un peldaño previo en el marco conceptual del Razonamiento Covariacional de Carlson y cols. (2003), analizando en vez de dos magnitudes variables, solamente una de ellas.

Una vez terminada la primera fase (análisis de una sola magnitud variable), los estudiantes tendrán los conocimientos e ideas elementales para avanzar a un segundo momento (análisis de dos magnitudes variables interrelacionadas), de acuerdo con los niveles complejos de razonamiento covariacional, y posibilitar así una disminución de los obstáculos de aprendizaje y las interrogantes que pueden surgir en la temática de la covariación.

5.4 El tiempo como magnitud variable independiente

Las actividades de covariación que integren nuestra propuesta didáctica no necesariamente considerarán al tiempo como variable independiente. Los libros de texto y algunos cursos de Cálculo consideran al tiempo de forma explícita como la variable independiente inmersa de manera natural en los fenómenos variacionales, lo cual origina dificultad en los estudiantes al tener que proporcionarles una definición universal sobre el concepto de razón de cambio, restringiendo su concepción al categorizarla solamente como velocidad o como variación respecto al tiempo.

Por su parte Zandieh (2000), en su marco teórico ampliado para el concepto de razón de cambio, menciona que cada uno de los significados físicos tales como la velocidad, aceleración y velocidad de variación de la temperatura, implican cambios respecto al tiempo. De la misma manera, Dray y Manogue (2010) insisten en la necesidad de establecer un significado físico *más auténticamente físico* para la razón de cambio, para lo cual consideran necesario analizar ejemplos de situaciones en las que el tiempo no figure como variable independiente.

Lo anterior provoca que tanto los conceptos como los procedimientos se enfocan básicamente en el cálculo de velocidades promedio, tiempos y distancias a partir de la relación $v = dt$, es decir, ya intervienen dos magnitudes variables relacionadas entre sí: el tiempo y la distancia (covariación). En cuanto al significado institucional pretendido, predomina la razón de cambio como velocidad instantánea y como pendiente de la recta tangente, sin embargo, dichas acepciones se logran a partir de la definición de la tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos).

Desde la perspectiva de la construcción de conceptos científicos en los niños y el desarrollo del pensamiento matemático, Chamorro (2005) destaca las dificultades de comprensión propias de la magnitud tiempo, señaladas también en las investigaciones de Piaget y Fraise (citados en Chamorro, 2005), las cuales mencionan al fenómeno del tiempo como una magnitud compleja en su génesis y relación con otros elementos fundamentales como el espacio.

Por otro lado, considerar al tiempo como la variable independiente también genera obstáculos de aprendizaje debido a la ambivalencia de significados que posee; algunos autores retoman la problemática sobre las ambigüedades que se presentan en la vida cotidiana acerca de su concepción, por ejemplo "la duración de un viaje podría considerarse como un viaje que tardó mucho tiempo, o que la distancia recorrida fue grande" (Stroup, 2002, p. 177).

Autores como Johnson (2013) y Stroup (2002) insisten en el empleo de situaciones de covariación en las que la magnitud variable independiente no sea el tiempo. Por un lado, esto permite formar en los estudiantes una imagen mucho más rica del concepto de covariación (no necesariamente dependiente del tiempo). Por ende, las actividades de nuestra propuesta serán diseñadas para enlazar en un contexto físico una gama múltiple de magnitudes variables interrelacionadas entre sí, en donde el tiempo sea considerado como una más de las posibles magnitudes variables intervinientes, con el propósito de desligarnos de las actividades comunes que se presentan al abordar temáticas en las cuales la variable independiente regularmente es el tiempo.

5.5 La variación continua y suave, el cambio en progreso

El razonamiento variacional se compone de dos momentos cruciales. El primero de ellos consiste en la comprensión de que las magnitudes variables efectivamente están cambiando, de decir, sus valores numéricos varían, con lo que se propicia la generación de una forma de pensar dinámica. Thompson y Carlson (2017) ilustran lo que se concibe como una "auténtica" magnitud variable cuando recurren al ejemplo de la observación de un corredor por un espectador, conceptualizando la ubicación del corredor en términos de medir su distancia respecto a un punto de referencia, percibiendo que esa distancia está cambiando, es decir, variando. La persona representa a la distancia del corredor desde el punto de partida con la literal "d", lo que significa que el valor de "d" presenta variación, porque el corredor se aleja de dicho punto referencial. Por ende, la variación de una magnitud variable emana del hecho de que una persona concibe, mediante un proceso de abstracción, que la cantidad cuyo valor está representado por la literal posee un valor que varía.

Cuando la persona es consciente de percibir a la magnitud variable, puede comenzar a desarrollar un proceso de razonamiento variacional al preguntarse de qué manera está cambiando dicha distancia, para lo cual de forma simultánea y análoga, la persona concibe que el cambio de distancia del corredor respecto al punto de partida ocurre asumiendo un trasfondo temporal, es decir, el tiempo varía y cambia a cada momento, está inmerso de forma inevitable al conceptualizar a las magnitudes variables. En este caso, la persona ha detectado en la misma situación variacional una segunda magnitud variable, el tiempo.

Entonces, en este primer acercamiento consistente en identificar en los fenómenos variacionales una o más magnitudes variables, el proceso de indagar de qué forma cambian, así como también de la formación de imágenes mentales sobre las maneras en que se comporta la variación, el idear herramientas matemáticas para la representación y cuantificación de tales cambios, y desarrollar un lenguaje ad hoc para describir dichos cambios, entre otras acciones mentales, es lo que conforma la esencia del razonamiento variacional.

En el entramado de la reflexión en torno a la cuantificación de una magnitud variable, por su parte, Jiménez y cols. (2022) sustentan que existe un aspecto relevante que posee relación con la intuición. Se trata del hecho de concebir que el valor numérico que la magnitud variable toma en cada momento es única, es decir, es imposible que una magnitud variable tome dos o más valores numéricos diferentes en un mismo instante. Por ejemplo, no es posible que el corredor en un instante dado esté en dos diferentes distancias respecto a su punto de partida. Esta característica importante del comportamiento de las magnitudes variables enuncia que el valor numérico que una magnitud variable toma en cada instante es único, y se le conoce como el *principio de unicidad*.

El segundo momento crucial en el razonamiento variacional se relaciona con una apreciación que tiene que ver connotativamente con lo estético, y se trata sobre cómo es que cambian las magnitudes variables en la fenomenología variacional. La idea es que, a medida que un proceso se desarrolla, éste ocurre de forma natural, de forma "suave", es decir, no ocurre con un cambio caótico, sino "suavemente". En otras palabras, a medida que una situación se desarrolla, no omite ningún estado en su acontecer; podemos imaginar tales procesos en "cámara lenta", por ejemplo, la distancia del corredor con respecto al punto de partida va cambiando con suavidad, el tiempo transcurre suavemente de un instante a otro en un intervalo, el corredor se mueve suavemente de un punto a otro en la trayectoria, todo el proceso es continuo, ya que es continuo en cada momento.

Los procesos de variación son continuos, en relación con que cambian de forma "suave" de un estado al siguiente; esta "suavidad" es una cualidad inmersa en las situaciones de cambio en progreso que se aplica a todos los procesos naturales y se denomina *principio de continuidad*. Significa que si el fenómeno se encuentra en un estado en determinado momento y en otro estado en momento diferente, entonces inevitablemente asume todos los estados entre estos dos momentos. Es decir, si el corredor estuvo en un instante dado en un punto P de la trayectoria, y en el instante actual está en otro punto Q, se asume que el corredor forzosamente ha estado en todos los puntos intermedios entre P y Q sin omitir ninguno de ellos. El razonamiento variacional se vincula con conceptualizar que la magnitud variable tiene una variación continua y siempre un trasfondo temporal.

Por otro lado, el concepto de escalamiento se relaciona con el de continuidad y refleja la forma de pensar de Leibniz sobre la variación; y en el razonamiento variacional consiste en que el sujeto imagine que en cualquier escala el continuo sigue siendo un continuo, y la magnitud variable toma todos los valores de dicho continuo. Es decir, no existe una escala en el que el continuo sea discreto. Se puede concebir al continuo como infinitamente "ampliable", en donde en dicho proceso de reacercamiento o "zoom" nunca se revelarán agujeros o vacíos en el continuo.

Es pertinente mencionar que en el currículo de educación básica de las últimas dos décadas, como los Planes y Programas de Estudio 2006 y 2011, Aprendizajes Clave 2017 y Nueva Escuela Mexicana 2022 de la SEP (2006, 2011, 2017, 2022), se menciona que es importante desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes, y especifican en su contenido al pensamiento variacional. Sin embargo, el desarrollo didáctico en las actividades propuestas en los libros de texto se enfoca principalmente en situaciones problemas vinculadas a procesos covariacionales, mostrando una relación discreta (y no continua), es decir, por porciones, por ejemplo relaciones proporcionales de forma estática (y no dinámica). Existe entonces en la actualidad un currículo con falta de claridad en los conceptos matemáticos a enseñar con respecto a la variación, ya que no se abordan según su naturaleza epistemológica, y posiblemente las ideas que se construyan bajo ese enfoque didáctico obstaculicen el desarrollo de ideas variacionales importantes, que en un futuro serán la base de constructos matemáticos para el aprendizaje del Cálculo.

5.6 Las maneras variacionales de entender y de pensar en el análisis de situaciones variacionales en vivo (covariación instrumentada)

La muestra integrada de actividades didácticas que se diseñará se fundamentará en un sustento teórico- metodológico basado en los niveles de razonamiento del pensamiento variacional de los marcos conceptuales analizados en los capítulos previos, es decir, del Nivel Cero hasta el Nivel Tres (N0-N3) de los aportes de Jiménez y Castillo (2025) y Carlson y cols. (2003), para los tres grados de educación secundaria. El desglose preliminar de actividades se tiene organizado de la siguiente manera:

a) 1° GRADO: Razonamiento Univariacional (recta numérica) con fenómeno de variación sobre el Llenado/vaciado de líquido de un recipiente cónico y/o Ley de Hooke en el estiramiento continuo de un resorte a partir de un aumento de masa continuo (variación lineal).
b) 2° GRADO: Razonamiento Covariacional (plano cartesiano) con fenómeno de variación sobre desplazamiento de un objeto sobre un plano inclinado, tiro parabólico y/o caída libre (covariación cuadrática).
c) 3° GRADO: Razonamiento Covariacional (plano cartesiano) con fenómeno de variación sobre el desplazamiento de un objeto sobre un plano inclinado al modificar el ángulo de inclinación, oscilación libre de un péndulo y/o movimiento circular (covariación senoidal).

Como ejemplo, a continuación se describirán ciertas características de la propuesta de intervención didáctica centrada en el primer grado de educación secundaria, específicamente las primeras actividades, las cuales están enfocadas al análisis del llenado y vaciado de recipientes con variaciones no uniformes, en vez de retomar lo que estipula el currículo de forma predeterminada como son los fenómenos de movimiento uniforme al inicio del tema.

Por lo tanto, los recipientes seleccionados tienen una forma especial (cónica), con la finalidad de poder apreciar los siete tipos de comportamientos variacionales elementales o básicos que fueron objeto de análisis, para abarcar un amplio conjunto de ideas variacionales (*crecimiento uniforme*, *crecimiento acelerado*, *crecimiento desacelerado, decrecimiento uniforme, decrecimiento acelerado, decrecimiento desacelerado, y la razón de cambio nula*).

También se pretende estudiar fenómenos de movimiento oscilatorio y rectilíneo, ya que en ellos también se aprecian las ideas que se pretenden desarrollar; en particular, en los de carácter oscilatorio se pueden observar como mínimo para cada caso, cuatro tipos básicos de comportamiento de una magnitud física que cambia, lo cual debe aprovecharse para el análisis, así como también ejemplos de tiro parabólico y caída libre.

Retomando lo anterior, las actividades de llenado y vaciado de recipientes serán presentadas y analizadas a partir de videos digitales, ya que para dichas situaciones el uso del video digital proporciona tres ventajas importantes:

Evitar accidentes. Llevar a cabo actividades utilizando video digital en vez de recrear los experimentos en vivo, ya sea por parte de los alumnos o el docente, evita que ocurran accidentes como daños al mobiliario o a los estudiantes. Por ejemplo, el derrame del líquido en el caso de llenado y vaciado de recipientes.

La repetitividad del video. Otra de las ventajas es que, si contamos con este recurso, el fenómeno que se está analizando se puede reproducir en la pantalla las veces que sea necesario hasta lograr comprenderlo. En cambio, si el fenómeno hubiera sido recreado, por ejemplo, un experimento de tiro vertical tomaría más tiempo llevarlo a cabo y repetir las mediciones que se requieran, con una precisión adecuada.

Evitar errores de medición. Al momento que se desee obtener datos sobre algún fenómeno, por ejemplo, llenado y vaciado de recipientes, si los estudiantes miden con regla, eso generaría demasiada imprecisión en las mediciones. Por ende, es recomendable trabajar con datos extraídos a partir de mediciones más precisas (mediciones digitales), con el objetivo de que el estudio de los fenómenos variacionales se apegue a la realidad.

Para la fase de procesamiento del video, se utilizará el software de edición científica de videos AviMeca/Tracker, el cual se caracteriza por ser un programa diseñado para matematizar la información que al usuario le convenga, a partir de un archivo de video con extensión .avi, mediante la introducción de un plano coordenado y el señalamiento de puntos adecuados en cada fotograma del video; además cuenta con la posibilidad de exportar dichos datos a un procesador gráfico para someterlos a su posterior análisis y procesamiento. Los datos obtenidos corresponden a las magnitudes variables que intervienen en el fenómeno.

Es importante mencionar que el software AviMeca permite realizar mediciones tomando en cuenta distancias y tiempos en el video, por lo que algunas magnitudes variables pueden ser medidas directamente con el software, pero otras se calculan a partir de las que fueron medidas de manera directa. Por ejemplo, con AviMeca se puede medir la altura del líquido, pero el volumen del líquido en el caso de llenado/vaciado de recipientes, debe ser calculado utilizando la fórmula correspondiente para obtener el volumen con la altura y el radio obtenido por el software.

Figura 1. Impresión de pantalla del software AviMeca en el video de llenado/vaciado de un recipiente cónico.

Fuente: Castillo y Jiménez (2023)

Como complemento, para la fase de análisis visual de los datos extraídos en el tabulador del video, se utilizará el software dinámico GeoGebra para el estudio de cada una de las variables del fenómeno, mediante un Applet prediseñado. Se decidió usar este software, ya que además de ser muy sencillo de utilizar, proporciona la vinculación de la matemática con el álgebra, la geometría y el cálculo, al incluir tanto la geometría dinámica como las herramientas de álgebra computacional, las cuales, según Hohenwarter y Preiner (2007), potencian el desarrollo del pensamiento variacional.

Entonces, dichos datos extraídos de AviMeca se guardan como listas de valores numéricos, para después ser utilizadas al momento de procesarlas en la representación gráfica en el ambiente digital de GeoGebra, mediante un Applet prediseñado para cada caso de variación. En GeoGebra se estudiarán y analizarán los comportamientos de las magnitudes variables que fueron seleccionadas, con ayuda de los Applets MagnitudVariable.ggb y

Covariación.ggb, los cuales se están diseñando y/o adaptando para poder visualizar el comportamiento de las magnitudes variables de una forma dinámica, es decir, mediante puntos móviles en una recta numérica o un plano coordenado.

Cabe mencionar que las Acciones Mentales (MVdE y MVdP) que proporcionan una guía para las actividades referentes a primer grado de educación secundaria, y se relacionan con el desarrollo del Nivel Cero del pensamiento variacional se presentan en la Tabla 5 en el capítulo VI del Marco teórico-metodológico.

Es preciso señalar que no se debe tomar al pie de la letra o como un imperativo la secuencia de acciones mentales consignadas en la Tabla 5. Dado que el desglose detallado y su progresión lógica-cognitiva responde a intereses del análisis teórico y el esfuerzo de destacar con pulcritud aquellas acciones mentales que intervienen en el razonamiento univariacional.

En la práctica real del aula, probablemente los alumnos realizarán dos o más de tales acciones mentales de forma simultánea, sin distinguirlas o separarlas, es decir, el posible proceso de razonamiento sobre el análisis de una sola magnitud variable podría ser "en paquetes" de operaciones mentales.

Desde el punto de vista práctico, y de la elaboración de conclusiones, lo importante es que la evidencia de ejecución permita inferir con una alta probabilidad que el alumno ha realizado algunas (o la mayoría) de estas acciones mentales.

5.7 Ejemplo preliminar de diseño didáctico

A continuación se muestra el bosquejo preliminar de las actividades en Hojas de Trabajo (HT) relacionadas con algunas de las acciones mentales propuestas como marco conceptual (AM1-N0, AM6-N0, AM7-N0, AM8-N0, AM9-N0, AM10-N0) y que se apoyan con el uso de tecnología digital; en itálica se enfatizarán los cuestionamientos descritos en ellas.

Hoja de trabajo 1. Parte 1. Identifica lo que cambia y lo que no cambia. (AM1-N0).

a) Observa el video sobre llenado/vaciado de líquido en un recipiente cónico y enlista todas las magnitudes que observes y/o detectes que presenten algún cambio o variación (magnitudes variables), así como las que no presenten ningún tipo de cambio o variación (magnitudes constantes).

b) Organiza el listado de magnitudes de interés identificadas en la tabla.

Figura 2. Tabla de la Hoja de Trabajo para el estudiante

Magnitudes variables	Magnitudes constantes
Altura del líquido	Altura de la copa

Fuente: Elaboración propia (2025)

En los incisos a) y b) se espera que los estudiantes identifiquen como magnitudes constantes el radio de la copa, la altura de la copa, el área lateral de la copa, el área de la superficie circular de la copa, el volumen de la copa, el tiempo total transcurrido en el fenómeno, el flujo del líquido para llenar la copa, etc., y como magnitudes variables la altura del líquido en la copa, la altura del espacio vacío en la copa, el radio de la superficie circular del líquido contenido en la copa, el área de la superficie lateral de la copa mojada por el líquido, el área de la superficie lateral de la copa no mojada por el líquido, el volumen del líquido en la copa, el volumen del espacio vacío en la copa, etc.

De forma grupal, se completará el listado de magnitudes de interés identificadas mediante la participación de los estudiantes. Para ello, se completará en plenaria la tabla trazada o proyectada en la pizarra, con el propósito de analizar las magnitudes de interés identificadas y complementar con aquellas que quizás no hayan sido detectadas por el estudiante de forma individual, y enfatizar las leyes de conservación presentes en el fenómeno de variación.

c) Analiza las magnitudes variables (relacionadas tanto con la parte llena como con la parte vacía del recipiente) que sean similares, y responde. ¿Qué relación tienen entre sí? ¿Con qué tipo de magnitudes constantes se relaciona?

En el inciso c) se espera que los estudiantes identifiquen las magnitudes variables presentes, tanto en la parte llena de líquido del recipiente, como en la parte vacía del mismo, y su relación con las magnitudes constantes identificadas, por ejemplo: altura del líquido y altura del espacio vacío con altura de la copa, volumen del líquido y volumen del espacio vacío con volumen de la copa, área lateral de la copa mojada por el líquido y área lateral de la copa no mojada por el líquido con área lateral de la copa, y/o las combinaciones similares a éstas.

d) Expresa la relación que prevalece entre las magnitudes variables y magnitudes constantes identificadas en el inciso anterior.

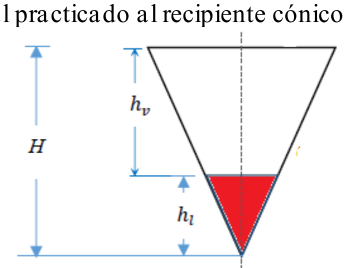
En el inciso d) se espera que los estudiantes expresen argumentos tales como: Altura del líquido + Altura del espacio vacío = Altura de la copa; Volumen del líquido + Volumen del espacio vacío = Volumen de la copa; Área lateral mojada de la copa + Área lateral no mojada de la copa = Área lateral de la copa. Más adelante se les expresará con lenguaje algebraico. Ejemplo para el primer caso:

$$h_l + h_v = H$$

e) En equipos, realiza un bosquejo de un recipiente cónico en donde se ilustre las magnitudes de interés (variables y constantes) que se relacionan entre sí como leyes de conservación.

En el inciso e) se espera que los estudiantes expresen icónicamente las magnitudes de interés variables y constantes identificadas en el fenómeno, y también un dibujo relacionado con leyes de conservación entre magnitudes variables y constantes involucradas.

Figura 3. Corte transversal practicado al recipiente cónico mediante un plano vertical



Fuente: Elaboración propia (2025)

Hoja de trabajo 7. Representación gráfica de la magnitud variable, dirección del desplazamiento del punto móvil. (AM6-N0, AM7-N0, AM9-N0, AM10-N09).

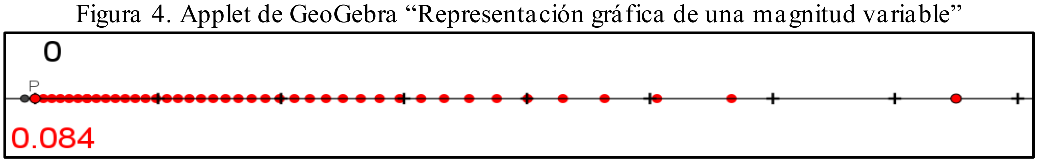
En la Hoja de Trabajo 6 aprendieron a realizar la representación gráfica de una magnitud constante, la cual consistió en la ubicación de un punto fijo sobre la recta numérica, cuya abscisa corresponde con el valor numérico de dicha magnitud. En equipos respondan

a) Si la representación gráfica de una magnitud constante (una magnitud caracterizada por que su valor numérico nunca cambia) la representa un punto fijo e inamovible sobre la recta numérica, ¿cómo sería posible representar gráficamente una magnitud variable (una magnitud caracterizada por que sus valores numéricos siempre cambian)? ¿Por qué?

En el inciso a) se espera que los estudiantes se apoyen de forma creativa en la acción mental previa para proponer una manera adecuada de representar a la magnitud variable mediante un punto móvil en la recta numérica.

Una vez llegado al convenio de que la representación gráfica de una magnitud variable se realiza mediante un punto móvil que se desplaza por la recta numérica pasando por todos y cada una de las posiciones que representan a los valores numéricos cuantificados de la magnitud variable, se procederá a un análisis de dicha representación gráfica mediante un applet de GeoGebra denominado "Representación gráfica de una magnitud variable.ggb", el cual se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Applet de GeoGebra "Representación gráfica de una magnitud variable"



Fuente: Captura de pantalla del applet de GeoGebra

b) ¿Qué representa el punto móvil P?

En el inciso b) se espera que los estudiantes conceptualicen que el punto P representa a los valores numéricos que la magnitud variable toma en cada momento del fenómeno.

c) ¿Qué representa el rastro del punto móvil P (los puntos marcados en rojo) en la representación gráfica de la magnitud variable?

En el inciso c) se espera que los estudiantes conceptualicen que el rastro del punto P representa los valores numéricos de la magnitud variable que fueron medidos a intervalos iguales de tiempo.

d) ¿En qué dirección se desplazó el punto móvil P? ¿Cómo cambian las abscisas del punto móvil P (aumentan, disminuyen o se mantienen constantes)?

En el inciso d) se espera que los alumnos comprendan que si el punto móvil se desplaza en dirección positiva, se puede decir que la magnitud variable crece, y si ocurre en dirección negativa, se infiere que la magnitud variable decrece; si no ocurre ningún desplazamiento del punto móvil (permanece fijo, sin movimiento), se argumenta que la magnitud identificada es una constante (no presenta variación ni cambio).

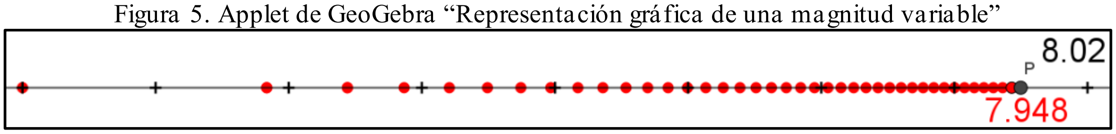
e) ¿Cómo es la separación entre los rastros del punto móvil que representa el comportamiento de la magnitud variable? Describe de forma detallada el comportamiento de la magnitud variable de interés que observas mediante el desplazamiento en la recta numérica del punto móvil P.

En el inciso e) se espera que los alumnos comprendan que en el desplazamiento del punto móvil que representa a la magnitud variable, la distancia entre los pares de posiciones consecutivas de dicho punto puede manifestarse de tres maneras, que sea: igual o diferente (cada vez más separada y/o más junta). A partir de su análisis es posible determinar si la magnitud variable crece o decrece cada vez lo mismo, cada vez más o cada vez menos.

Hoja de trabajo 8. Variación continua de la magnitud variable en su representación gráfica. (AM8-N0).

En la Hoja de Trabajo 7 analizamos la representación gráfica de una magnitud variable, la cual consistió en el desplazamiento de un punto móvil sobre la recta numérica, cuya abscisa corresponde a cada uno de los valores numéricos que progresivamente toma dicha magnitud variable. De forma grupal se analizará el applet en GeoGebra y se responderán los siguientes cuestionamientos.

Figura 5. Applet de GeoGebra "Representación gráfica de una magnitud variable"



Fuente: Captura de pantalla del applet de GeoGebra

a) ¿La magnitud variable solo y únicamente tomó los valores mostrados en el applet mediante el rastro de color rojo? ¿Por qué?

En el inciso a) se espera que los alumnos comprendan que el punto móvil que representa a la magnitud variable, al desplazarse, deja como rastro rojo (o huella) las posiciones en las que estuvo previamente el punto móvil P, las cuales se asocian en correspondencia con los valores numéricos de la magnitud variable que fueron posible medir a partir del video; también, que el punto móvil P se desplaza por todas y cada una de las posiciones intermedias desde el valor inicial hasta el valor final de la magnitud variable, tanto del rastro rojo como todas aquellas que están entre las marcas.

b) ¿Cuántos valores numéricos crees que tomó la magnitud variable en el fenómeno desde el valor inicial hasta el valor final?

En el inciso b) se espera que los alumnos presenten quizás una respuesta con algún valor numérico discreto, la cual se contrastará con la siguiente pregunta del inciso c).

c) Si hacemos una amplificación zoom a la recta numérica y activamos la vista de más cifras decimales. ¿Es posible conocer cuántos valores numéricos tomó la magnitud variable, desde el valor inicial hasta su valor final? ¿Porqué?

En el inciso c) se espera que los alumnos comprendan que desde el valor inicial hasta el valor final de la magnitud variable, los valores numéricos que toma el punto P son muchos, infinitos, debido al zoom infinitamente ampliable, lo cual se puede apreciar con la extensión de cifras decimales para la abscisa del punto móvil P.

5.8 Discusión sobre las características de la propuesta

El esfuerzo de caracterizar con más detalle un marco conceptual complementario, correspondiente al Nivel Cero del pensamiento variacional, de forma desglosada con su respectiva descripción de las acciones mentales que intervienen, proporciona una guía metodológica pertinente que impacta en el diseño de actividades didácticas, debido a que dicha organización de las acciones mentales proporciona una pauta para los tipos de cuestionamientos y preguntas pertinentes en las hojas de trabajo, que sirven como apoyo para que el estudiante, con ayuda del profesor, genere ideas variacionales respecto a la fenomenología que se está analizando en el salón de clases.

Por su parte, el uso de tecnología digital facilita, primeramente, la cuestión de cuantificar las magnitudes variables que intervienen en la situación variacional, al obtener valores numéricos de éstas, con los cuales es posible realizar un análisis matemático sobre lo que sucede en dicho fenómeno de cambio en progreso; en segundo lugar, los recursos tecnológicos aportan un gran apoyo en la visualización dinámica del comportamiento de las magnitudes variables, analizadas por separado en la representación geométrica, mediante un punto móvil que se desplaza sobre la recta numérica.

El uso del applet pretende favorecer la comprensión de ideas variacionales potentes, dado que cuestiona conceptualizaciones erróneas presentes en el currículo de enseñanza y prácticas docentes que lo fomentan, por ejemplo, el análisis de procesos variacionales “por porciones o por partes”, los cuales conceptualizan a los procesos de variación y cambio como si sucedieran por brincos o saltos. Sin embargo, con el uso del applet se pretende ilustrar claramente que el punto móvil P se desplaza de forma continua, desde la posición inicial hasta la posición actual.

Lo anterior pretende apoyar al estudiante a construir lo que se denomina *principio de continuidad*, un principio importante, que en el currículo de educación secundaria es omitido para su análisis a profundidad, pese a que los procesos y/o fenómenos de variación presentes en la realidad son dinámicos, y suceden de forma suave y continua, desde un estado o momento inicial hasta un momento final en su devenir.

CAPÍTULO 6. MARCO TEÓRICO-METODOLÓGICO

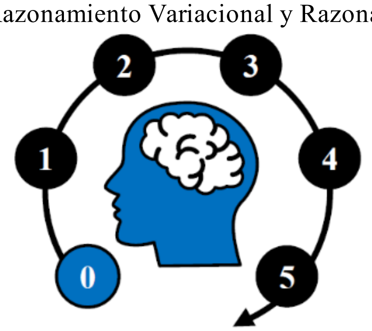
En este capítulo se presenta una propuesta de marco conceptual que proporciona un sustento teórico-metodológico para el presente proyecto de intervención didáctica. Dicho marco se deriva de un análisis crítico de la literatura especializada en el área de Matemática Educativa, acerca de cómo surge de forma primigenia el “pensamiento variacional” y su evolución a través de la historia del conocimiento matemático, para establecer un panorama que permitiera generar hipótesis plausibles sobre cómo fomentar en los estudiantes este tipo de pensamiento matemático.

Como se mencionó en capítulos previos, consideramos que el desarrollo del pensamiento variacional está relacionado con el razonamiento matemático sobre las magnitudes variables que están inmersas en los procesos o fenómenos de variación y cambio en progreso en la realidad. Por ende, se proponen elementos teóricos sustentados en la visión del pensamiento matemático según Harel (2008, 2008a, 2008b), el cual señala que el propósito principal de la educación matemática consiste en desarrollar en los estudiantes el pensamiento matemático, mismo que se conforma de un subconjunto de maneras de entender y maneras de pensar (MdE y MdP), y más específicamente la conceptualización de las maneras variacionales de entender y de pensar (MVdE y MVdP) propuestas por Amador y Jiménez (2023); éstas se componen más específicamente por acciones mentales (AM), relacionadas con el marco teórico de Carlson y cols. (2003) sobre el desarrollo del razonamiento covariacional.

6.1 Un marco conceptual complementario: el Nivel Cero (N0) del pensamiento variacional

Se decidió denominar *Nivel Cero* (N0)[4] a la etapa inicial correspondiente a la formación y desarrollo del razonamiento variacional. Es un marco conceptual complementario al Razonamiento Covariacional de Carlson et al. (2003) y al Razonamiento Variacional de Thompson y Carlson (2017), y se enfoca en caracterizar el razonamiento dinámico relacionado con la conceptualización matemática de la variación continua de una sola magnitud variable, teniendo ésta un trasfondo temporal.

Figura 5. Niveles del Razonamiento Variacional y Razonamiento Covariacional.



Fuente: Elaboración propia (2025)

Ahora bien, ¿por qué se considera que es un marco complementario?, la Figura 5 ilustra los niveles de razonamiento del 1 al 5 (N1, N2, N3, N4 y N5), los cuales corresponden al marco conceptual del Razonamiento Covariacional de Carlson y cols. (2003); específicamente se trata de razonamiento bivariacional (dos magnitudes variables involucradas), por lo tanto la representación gráfica requiere de un trabajo matemático dinámico en el plano cartesiano. Nuestra propuesta para complementar dicho marco conceptual pretende abordar lo correspondiente al Nivel Cero (N0), y se relacionan con el razonamiento univariacional, es

[4] Tomando en cuenta la terminología propuesta por Carlson et al. (2003).

decir, el análisis de una sola magnitud variable (artificial e intencionalmente aislada), lo cual requiere un trabajo matemático dinámico en la recta numérica.

Consideramos que, tanto desde el punto de vista del sentido común o de la lógica ordinaria, como desde el punto de vista matemático, el razonamiento univariacional debe anteceder al razonamiento bivariacional. A continuación se enlistan y describen de manera sucinta las etapas que en su conjunto tienen lugar en el nivel cero del razonamiento, al adentrarse al estudio del análisis de una situación variacional, y que son requeridos para que, en un segundo momento, dicho tipo de pensamiento pueda transitar de manera coherente desde el trabajo matemático en la recta numérica hacia el trabajo matemático en el plano cartesiano. En esta línea de trabajo de Jiménez et al. (2022), la propuesta para abordar el *Nivel Cero (N0)* se desarrolla mediante las acciones mentales que se presentan en la Tabla 5, sus *Evidencias de Manifestación* (EDM) y la *Calidad De la Ejecución* (CDE), las cuales se presentan con más detalle en los párrafos siguientes.

Tabla 5. Propuesta de marco conceptual complementario para el estudio y análisis de la variación de una sola magnitud variable:

Acciones Mentales del Nivel Cero del Pensamiento Variacional
AM1-N0. Identificar las magnitudes variables y las magnitudes constantes en el fenómeno.
AM2-N0. Cuantificar las magnitudes de interés identificadas.
AM3-N0. Analizar los valores numéricos obtenidos de la magnitud variable.
AM4-N0. Conceptualizar la variación continua de la magnitud variable en el listado numérico.
AM5-N0. Representar simbólicamente a la magnitud variable identificada.
AM6-N0. Conceptualizar la representación gráfica de una magnitud constante.
AM7-N0. Conceptualizar la representación gráfica de una magnitud variable.
AM8-N0. Conceptualizar la variación continua de la magnitud variable en la gráfica.
AM9-N0. Analizar la dirección del desplazamiento del punto móvil en la representación gráfica de la magnitud variable.
AM10-N0. Discriminar el carácter del cambio con base en la representación gráfica de la magnitud variable.
AM11-N0. Cuantificar el cambio que experimenta la magnitud variable.
AM12-N0. Determinar el carácter y la magnitud del cambio a partir del signo y valor absoluto de las primeras diferencias.
AM13-N0. Discriminar los tipos elementales de variación a partir del cálculo de diferencias.

Fuente: Elaboración propia (2025).

O

I. Primera Acción Mental del Nivel Cero (AM1-N0). Identificar las magnitudes variables y las magnitudes constantes involucradas en el fenómeno de cambio (identificación de las magnitudes de interés relevantes).

Las magnitudes variables son aquellas cualidades medibles que pueden tomar distintos valores numéricos en distintos momentos. Podemos decir que *en un proceso o fenómeno (natural o social) se les llama magnitudes variables o simplemente variables a aquellos atributos cuantitativos (es decir, susceptibles de ser medidos o cuantificados) de los objetos o* *de los procesos, cuyos valores cambian; por el contrario, se les llama magnitudes constantes o simplemente constantes a las que, por una u otra razón, conservan inalterables sus valores durante dicho proceso*.

La EDM es un listado nominal de magnitudes constantes y variables percibidas por el estudiante en el fenómeno dinámico. La CDE se determina por: 1) el carácter de las magnitudes (variables y constantes) identificadas por el estudiante, y su importancia para la comprensión y posterior matematización del fenómeno; y 2) la pertinencia de las magnitudes variables percibidas, con respecto a la realidad intrínseca del fenómeno de cambio.

Ejemplo: en el fenómeno de llenado/vaciado de un recipiente cónico es posible detectar varias magnitudes físicas (variables y constantes) que intervienen en dicha situación de cambio en progreso. La lista aquí presentada no pretende ser exhaustiva.

Figura 6. Captura del fenómeno de llenado/vaciado de un recipiente cónico.

R : el radio del recipiente cónico;
H : la altura del recipiente cónico;
A_l : el área lateral del recipiente cónico;
A_s : el área de la superficie circular del recipiente cónico (el área de la “base”);
V : el volumen del recipiente cónico;
τ : el tiempo de llenado o vaciado del recipiente cónico;
F : el flujo del líquido hacia o desde el recipiente cónico;
t : el tiempo transcurrido;
h_l : la altura del líquido en el recipiente cónico;
h_v : la altura del espacio vacío en el recipiente cónico;
r : el radio de la superficie circular del líquido contenido en el recipiente cónico;
a_s : el área de la superficie circular del líquido en el recipiente cónico;
a_m : el área de la superficie lateral del recipiente cónico, que es mojada por el líquido;
a_n : el área de la superficie lateral del recipiente cónico, no mojada por el líquido;
V_l : el volumen del líquido en el recipiente cónico;
V_n: el volumen del espacio vacío en el recipiente cónico.

Fuente: Elaboración propia (2025)

II. Segunda Acción Mental del Nivel Cero (AM2-N0). Tiene que ver con la cuantificación de cada una de las magnitudes de interés identificadas. Consiste en utilizar un método y un instrumento que permita cuantificar (mediante medición directa o indirecta) las propiedades involucradas en el fenómeno, o al menos imaginárselo e informarse sobre dicha operación y su protocolo.

A veces no resulta fácil cuantificar las magnitudes variables que son relevantes en un proceso de cambio. Para ello es necesario disponer de un conocimiento más completo de aquella teoría científica, en la que dichas magnitudes variables figuran como fundamentales. En términos generales, la cuantificación de un atributo implica una dialéctica compleja entre tres acciones: concebir (percibir) al objeto, concebir (percibir, imaginarse o identificar) un atributo cuantificable del mismo, y concebir un método o una técnica (y de ser posible, también un instrumento) para medir ese atributo (Thompson; 1990, 1993).

No es difícil entender que no todas las magnitudes enlistadas se pueden medir o cuantificar de manera directa. Se plantea entonces el problema de determinar cuáles de dichas magnitudes será posible medir directamente (por ejemplo, en el video digital), y cuáles deberán ser calculadas a partir de aquellas que puedan ser medidas. En este último caso, deberemos también derivar las respectivas fórmulas para realizar los cálculos correspondientes.

La EDM es un listado de valores numéricos consecutivos (ordenado de acuerdo con la progresión en que fueron registrados u obtenidos a medida que el proceso variacional sucedió) y que representan el comportamiento de la magnitud variable en el fenómeno de cambio cuantitativamente. La CDE consiste en si el estudiante percibe el carácter discreto de este listado de valores numéricos y lo confronta, o no, con la realidad observada, reflexión que lo lleva a tomar conciencia de que solamente unos cuantos (realmente, muy pocos) valores numéricos de la magnitud variable han sido registrados, y de la dificultad o imposibilidad de registrarlos todos.

Por ejemplo, en el fenómeno de llenado/vaciado de un recipiente cónico es posible obtener los valores numéricos de las magnitudes físicas (variables y constantes) que intervienen en dicha situación de cambio en progreso, ya sea por medición directa y/o indirecta.

Listado 1: Tiempo transcurrido. t = {0.033, 3.133, 6.233, 9.333, 12.433, 15.533, 18.633, 21.733, 24.833, 27.933, 31.033, 34.133, 37.233, 40.333, 43.433, 46.533, 49.633, 52.733, 55.833, 58.933, 62.033, 65.133, 68.233, 71.333, 74.433, 77.533, 80.633, 83.733, 86.833, 89.933, 93.033, 96.133, 99.233, 102.333, 105.433}

Listado 2: Altura del líquido. h_l = {0.517, 2.351, 2.958, 3.384, 3.723, 4.010, 4.261, 4.485, 4.689, 4.876, 5.050, 5.213, 5.367, 5.512, 5.649, 5.781, 5.906, 6.027, 6.143, 6.254, 6.362, 6.466, 6.567, 6.665, 6.761, 6.853, 6.943, 7.031, 7.117, 7.201, 7.282, 7.362, 7.441, 7.517, 7.593, 7.666, 7.739, 7.810, 7.879, 7.948, 8.015}

Listado 3: Radio de la superficie circular del líquido. r = {0.415, 1.887, 2.373, 2.715, 2.988, 3.218, 3.419, 3.599, 3.763, 3.913, 4.053, 4.183, 4.306, 4.423, 4.533, 4.639, 4.740, 4.836, 4.929, 5.019, 5.105, 5.189, 5.270, 5.349, 5.425, 5.499, 5.572, 5.642, 5.711, 5.778, 5.844, 5.908, 5.971, 6.032, 6.093, 6.152, 6.210, 6.267}

Listado 4: Área mojada de la superficie del cono. a_m = {0.864, 17.880, 28.282, 37.016, 44.815, 51.985, 58.690, 65.031, 71.076, 76.875, 82.462, 87.866, 93.109, 98.208, 103.177, 108.030, 112.776, 117.425, 121.983, 126.457, 130.854, 135.178, 139.434, 143.625, 147.757, 151.832, 155.852, 159.822, 163.742, 167.617}

Listado 5: Volumen del líquido. V_l = {0.093, 8.773, 17.453, 26.133, 34.813, 43.493, 52.173, 60.853, 69.533, 78.213, 86.893, 95.573, 104.253, 112.933, 121.613, 130.293, 138.973, 147.652, 156.332, 165.012, 173.692, 182.372, 191.052, 199.732, 208.412, 217.092, 225.772, 234.452, 243.132, 251.8 12, 260.492, 269.172}

III. Tercera Acción Mental del Nivel Cero (AM3-N0). Se relaciona con la capacidad de analizar los valores numéricos de la magnitud variable que aparecen en el listado, establecer relaciones entre ellos, realizar mentalmente ciertas estimaciones aritméticas elementales (sentido numérico), para que a partir de la visualización completa del listado (progresivo) discreto de los valores numéricos de la magnitud variable, se conceptualice la dirección del cambio de la magnitud variable, y por ende el comportamiento en grueso de ésta.

La EDM consiste en si el alumno es capaz o no, de analizar dos aspectos importantes de los valores numéricos: 1) el signo de los valores numéricos, para entender si los valores numéricos que consecutivamente toma la magnitud variable son positivos, negativos o incluso de ambos signos; 2) una comparación (inicialmente mental y aproximada) de los valores numéricos que dicha magnitud variable toma de forma progresiva, para entender si dichos valores numéricos van aumentando, disminuyendo, aumentan primero y luego disminuyen o viceversa. La CDE consiste en si el estudiante es o no capaz de describir de forma cualitativa y adecuada el cambio, ya sea mediante los términos "aumenta" o "disminuye", "crece" o "decrece", o cualquier otra expresión similar.

Ejemplo: en el caso del listado de valores numéricos del radio de la superficie circular del líquido resulta obvio que estos valores numéricos van consecutivamente en aumento, forman una sucesión numérica creciente. Esta observación podría o debería llevar al alumno a formular la siguiente imagen conceptual: si una magnitud variable z cambia de tal modo que cada valor numérico posterior que ella tome es mayor que todos sus valores numéricos previos, diremos que z es una *magnitud variable creciente*.

Por lo mismo, el valor inicial de dicha magnitud variable es menor que todos sus demás valores numéricos. De hecho, es el menor de todos los valores numéricos. El valor inicial de una magnitud variable creciente es el *valor mínimo* de dicha magnitud variable. Análogamente, el valor final de una magnitud variable creciente es mayor que todos los demás valores numéricos de dicha magnitud variable: es su *valor máximo*.

Ejemplo: en el caso del listado de valores numéricos de la altura del espacio vacío. También resulta obvio que dichos valores numéricos progresivamente disminuyen o decrecen. Esta observación podría o debería llevar al alumno a formular la siguiente imagen conceptual: si una magnitud variable z cambia de tal modo que todo valor numérico posterior que ella toma es menor que cada uno de sus valores numéricos previos, diremos que z es una *magnitud variable decreciente*. En otras palabras, una magnitud variable decreciente es aquella, cada uno de cuyos valores numéricos posteriores es menor que todos sus valores numéricos anteriores.

Por ello, el valor inicial de dicha magnitud variable es el mayor de todos los valores numéricos. Análogamente, el valor final de una magnitud variable decreciente es menor que todos los demás valores numéricos de dicha magnitud variable: es su *valor mínimo*.

IV. Cuarta Acción Mental del Nivel Cero (AM4-N0). Se refiere a la conceptualización de la variación continua de la magnitud variable a partir del listado numérico. Requiere concebir que el cambio de la magnitud variable sucede de forma fluida y suave (sin brincos), es decir, a medida que el fenómeno se desarrolla, todo el proceso es continuo desde el inicio hasta su fin. Esta conceptualización podría o debería llevar al estudiante a formular el *principio de continuidad* presente en los fenómenos de cambio en progreso.

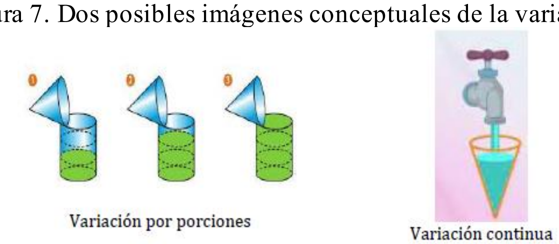
La EDM y la CDE se vincula con si el estudiante es o no capaz de comprender que la variación de la magnitud variable no ocurre de forma caótica (o por partes), sino que sucede de manera natural con "suavidad", y que a cualquier escala o amplificación del continuo de valores numéricos que toma la magnitud variable no omite ningún estado en su devenir.

No debemos perder de vista el hecho de que, cuando analizamos un fenómeno de *cambio en progreso* a partir de datos reales, éstos han sido obtenidos a intervalos regulares de tiempo o de distancia, y por lo tanto no son *todos* los valores numéricos que las magnitudes variables sujetas al análisis pueden tomar. Si ignoramos esta circunstancia, corremos el riesgo de formarnos una imagen mental inadecuada de la variación de una magnitud variable, imagen que no es productiva y que entra en conflicto con las ideas fundamentales requeridas por el pensamiento variacional. Se trata de la idea de que la variación de una magnitud variable ocurre por tandas.

Esta imagen de la variación "por tandas" implica que los valores de las magnitudes variables van cambiando después de cierto lapso, saltando bruscamente de un valor numérico a otro, en contraposición con la imagen adecuada, que concibe que los valores numéricos de la magnitud variable van cambiando en cada instante, en un flujo continuo y suave, sin cambios bruscos. Analicemos estas dos imágenes incompatibles con mayor detalle.

Ejemplo: en el caso del proceso de llenado de un recipiente, la imagen mental de la variación por tandas consiste en concebir que el proceso de llenado se realiza agregando consecutivamente pequeñas porciones idénticas de líquido al recipiente, por ejemplo, pequeñas tazas, o cucharadas. En cambio, la imagen mental de la variación continua consiste en concebir que el proceso de llenado se realiza por medio de una manguera, a través de la cual el líquido fluye de manera suave y continua.

Figura 7. Dos posibles imágenes conceptuales de la variación.



Fuente: Jiménez (2022)

El problema fundamental que surge en relación con estas dos imágenes mentales de la variación es que ellas implican y provocan diferentes operaciones mentales para analizar el cambio de los valores numéricos de la magnitud variable y, en consecuencia, a diferentes conceptualizaciones matemáticas de dicho cambio.

El cambio por tandas de una magnitud variable requiere concebir cierta *unidad* o *porción unitaria* de ella (que es a lo que nos hemos estado refiriendo como "la tanda"), cuya repetición automática va dando lugar a la variación de la magnitud variable, y no se concibe ni siquiera como posibilidad remota ningún cambio menor que esa unidad. A diferencia de esta imagen inadecuada, la idea de variación continua requiere concebir el cambio *a cualquier escala o amplificación* del continuo de los valores numéricos que toma la magnitud variable. Matemáticamente, esta concepción suave de la variación de una magnitud variable atiende sin discriminar todos y cada uno de los estados o momentos del proceso, sin privilegiar ninguna porción específica que pudiera ser tomada como "unidad" para cuantificar dicha variación.

Los argumentos anteriores sugieren que es didácticamente inadecuado presentar al estudiante un escenario en el que el llenado/vaciado de recipientes se realice “por tandas”, de manera discreta, como se hace en las propuestas presentadas por Stephens (2005), Mestre y Oliveira (2012), Mateus-Nieves y Moreno (2021), Hughes-Hallet y cols. (1992), Cantoral y Farfán (1998; 2000).

V. Quinta Acción Mental del Nivel Cero (AM5-N0). La representación simbólica de la magnitud variable identificada cumple una doble función e implica transitar del uso simbólico de la literal como incógnita (valor numérico generalizado), a utilizar el simbolismo de la literal para referirse a un objeto matemático que no representa un valor numérico fijo; al contrario, dicho valor numérico cambia suavemente. Esto constituye un proceso crucial en el desarrollo del pensamiento algebraico en el alumno, es la formación del sentido variacional de la literal. Se trata de una acción mental a la que no se presta la atención debida en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra.

La EDM y la CDE consisten ambas en que el estudiante comprenda dicha doble función de la representación algebraica, la literal simboliza no solo a la magnitud variable identificada, sino también representa a todos y cada uno de los (infinitos) valores numéricos, ordenados en una progresión temporal continua (valores numéricos consecutivos) que toma la magnitud variable en cada instante del fenómeno. Es decir, se utiliza la representación simbólica de la literal como variable, conceptualizada con su debida connotación dinámica, no simboliza un solo valor fijo.

El gran poder de la representación algebraica, en este caso, consiste en que permite representar, mediante símbolos simples y convenientes, tanto las magnitudes variables y sus valores numéricos, como las relaciones que ellas guardan entre sí, y particularmente sus relaciones cuantitativas.

VI. Sexta Acción Mental del Nivel Cero (AM6-N0). Tiene que ver con la conceptualización de la representación gráfica o geométrica de una magnitud constante en la recta numérica mediante la localización de un punto fijo en ella, cuya abscisa corresponda con el valor numérico de la magnitud constante.

La EDM consiste en el proceso de localización del punto A, cuya abscisa corresponde con el valor numérico de la magnitud constante. La CDE queda determinada por la capacidad del estudiante para utilizar sus conocimientos previos para construir la recta numérica e identificar al único punto fijo sobre ella que representa adecuadamente a la magnitud constante, lo que implica comprender las características esenciales de dicho punto: a) se trata de un punto fijo, estático, inamovible; b) la abscisa de este punto es exactamente igual al valor numérico de la magnitud constante.

VII. Séptima Acción Mental del Nivel Cero (AM7-N0). Tiene que ver con la conceptualización de la representación gráfica o geométrica de una magnitud variable en la recta numérica, mediante un punto móvil sobre ésta.

La EDM consiste en obtener una imagen dinámica de la variación de la magnitud variable que represente a todos y cada uno de los valores numéricos de ésta, y en la cual la abscisa de dicho punto móvil es igual al valor numérico que toma la magnitud variable en cada momento; por lo tanto, en cada instante, la ubicación del punto móvil está determinado por el valor numérico que la magnitud variable toma en ese momento. La CDE se determina por la capacidad del estudiante para apoyarse de forma creativa en la acción mental previa, y proponer una manera adecuada de representar a la magnitud variable mediante un punto móvil en la recta numérica, describiendo las características esenciales de dicho punto móvil.

VIII. Octava Acción Mental del Nivel Cero (AM8-N0). La conceptualización de la variación continua de la magnitud variable en la representación gráfica.

La EDM y CDE consisten ambas en que el punto móvil que representa a la magnitud variable se desplaza siempre en la recta numérica, sin salirse de ella, sin brincos o saltos, avanzando de una posición a la inmediatamente siguiente sin omitir ninguna, de manera suave y fluida, sin dejar “huecos” en el segmento de recta numérica, entre el valor inicial y el valor final que dicha magnitud variable toma durante el fenómeno de cambio.

A pesar de lo que hemos estado enfatizando con respecto a la naturaleza continua de los procesos dinámicos de cambio, en ciertas situaciones del Mundo Real podemos percibir magnitudes variables que no se ajustan al comportamiento continuo, es decir, no necesariamente debemos pensar que dicha variable toma todos los valores numéricos posibles, esto es, todos los números reales. Ello depende de la naturaleza de dicha magnitud variable y del proceso en el que ella interviene. De hecho, se distinguen esencialmente dos tipos de magnitudes variables: las así llamadas magnitudes variables *continuas*, y las magnitudes variables *discretas*.

Una *magnitud variable discreta* es aquella que por su naturaleza sólo puede tomar valores numéricos consecutivos “a saltos”, por porciones o “paquetes”. Habitualmente, el tamaño de dicha “porción” es igual a la cantidad mínima posible que puede existir de dicha magnitud variable. Por ejemplo, la cantidad de individuos que constituyen a una población dada (bacterias, peces, conejos, personas) no puede tomar valores numéricos fraccionarios, sino solamente números naturales, ya que no existen individuos “incompletos”; por ejemplo, no tiene sentido hablar de “media bacteria”. En el caso de los seres humanos, aún y cuando una persona haya perdido una parte no vital de su cuerpo, se le contabiliza como una unidad, no como “tres cuartos” o “cinco sextos” de persona. Igualmente, una sustancia química no puede consistir de un número fraccionario de moléculas, ya que tampoco existen las “moléculas incompletas”. En el mundo natural y en la sociedad existen muchos procesos que son de naturaleza discreta. El modelo matemático apropiado para describir tales procesos es el de las *sucesiones numéricas*.

El dominio de una magnitud variable discreta se representa gráficamente en la recta numérica mediante un conjunto de puntos separados y ordenados matemáticamente. Entre un punto y el que inmediatamente le sigue hay un “hueco”, de tamaño igual al “salto”, porción o cantidad mínima unitaria en que dicha magnitud variable discreta puede cambiar; este hueco representa a todos los números reales que hay entre los números correspondientes a las abscisas de ambos puntos, y que dicha magnitud variable nunca toma.

Figura 8. La representación gráfica del dominio de una magnitud variable discreta.

Fuente: Jiménez (2022)

En cambio, una *magnitud variable continua* puede tomar todos los valores numéricos reales consecutivamente sin "saltos", fluyendo suavemente. El tiempo es el ejemplo más familiar, aunque pensemos que varía de segundo en segundo; no olvidemos que se pueden medir intervalos de tiempo mucho menores que un segundo (por ejemplo, en algunas competencias deportivas las milésimas de segundo pueden hacer la diferencia entre obtener o no una medalla, o establecer un nuevo récord). Pero una milésima de segundo tampoco es la menor cantidad de tiempo posible. Recuérdese el reciente experimento, realizado con el colisionador de hadrones en el Centro Europeo de Investigaciones Nucleares, en busca del bosón de Higgs: dicha partícula fue detectada durante una fracción de tiempo del orden de ¡una billonésima de segundo! Aunque así nos lo parezca a partir de nuestras limitadas experiencias vitales, el tiempo no es discreto, es continuo.

El dominio de una magnitud variable continua se representa gráficamente en la recta numérica mediante un continuo numérico matemáticamente ordenado, esto es, un segmento de la recta (o bien mediante toda la recta numérica). En este caso, no hay ningún "hueco" (salvo, ocasionalmente, los puntos extremos): se dice que este continuo numérico es ***denso*** (en oposición a *poroso*, que sería el término aplicable a la representación gráfica de las magnitudes variables discretas).

Figura 9. La representación gráfica del dominio de una magnitud variable continua.

Fuente: Jiménez (2022)

IX. Novena Acción Mental del Nivel Cero (AM9-N0). Analizar la dirección del desplazamiento del punto móvil en la representación geométrica o gráfica de la magnitud variable.

La EDM consiste en si el alumno es capaz o no de detectar la dirección en la que ocurre el cambio de las magnitudes de interés, mediante su representación gráfica con ayuda del punto móvil en la recta numérica, y comprender que su movimiento representa el comportamiento de la magnitud variable. La CDE se basa en la capacidad del estudiante para comprender que, si el punto móvil se desplaza en dirección positiva, se puede decir que la magnitud variable crece, y si ocurre en dirección negativa, se infiere que la magnitud variable decrece; si no ocurre ningún desplazamiento del punto móvil (permanece fijo, sin movimiento), se argumenta que la magnitud identificada es una constante (esta no presenta variación ni cambio).

X. Décima Acción Mental del Nivel Cero (AM10-N0). La discriminación del carácter del cambio con base en la representación geométrica de la magnitud variable.

Al explorar con ayuda del applet MAGNITUD VARIABLE de *GeoGebra* la representación gráfica de las distintas magnitudes variables que intervienen en los procesos de llenado y vaciado del recipiente cónico, ha sido posible detectar algunos grupos de magnitudes variables cuyo comportamiento variacional es el mismo o, en todo caso, es muy parecido. Por razones de espacio, tomaremos solamente una de dichas magnitudes variables en cada grupo, como ejemplo ilustrativo de los distintos comportamientos variacionales que pueden exhibir las magnitudes variables.

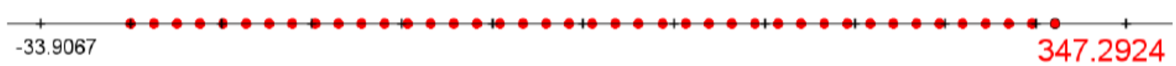
La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de detectar, en el desplazamiento del punto móvil, que la distancia entre los pares de posiciones consecutivas de dicho punto puede manifestarse de tres maneras: que sea siempre igual, cada vez mayor o cada vez más pequeña.

Ejemplo de algunos comportamientos variacionales básicos en el fenómeno de llenado/vaciado de un recipiente cónico.

a) El volumen V_l (en cm^3) del líquido durante el llenado del recipiente cónico.

La representación gráfica (obtenida mediante el applet ya mencionado) para esta magnitud variable es la siguiente (última imagen de la animación dinámica).

Figura 10. Representación gráfica dinámica mediante un punto móvil, en la recta numérica horizontal, del *crecimiento uniforme* de una magnitud variable.



Fuente: Jiménez (2022)

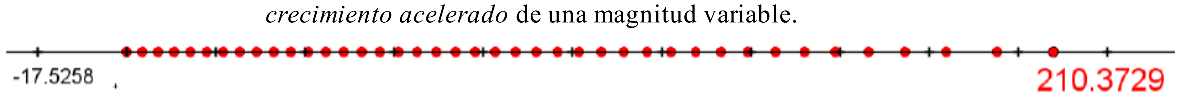
Como se observa en esta imagen, la magnitud variable aludida se representa, en la recta numérica horizontal, mediante un punto que se mueve siempre con *dirección positiva* (esto es, hacia la derecha) y *avanza cada vez lo mismo*; en la recta numérica vertical, su representación es un punto que también se mueve siempre con dirección positiva (es decir, hacia arriba) y avanza ("sube") cada vez lo mismo. En todo momento, la abscisa de dicho punto móvil corresponde al valor numérico que la magnitud variable toma en ese momento.

Llamaremos a este comportamiento variacional *crecimiento uniforme* y lo describiremos mediante la frase *la magnitud de interés crece cada vez lo mismo*.

b) El área a_n (en cm^2) de la superficie no mojada por el líquido durante el vaciado del recipiente cónico.

La representación gráfica (obtenida mediante el applet ya mencionado de *GeoGebra*) para esta magnitud variable es la siguiente (última imagen de la animación dinámica).

Figura 11. Representación gráfica dinámica mediante un punto móvil, en la recta numérica horizontal, del *crecimiento acelerado* de una magnitud variable.



Fuente: Jiménez (2022)

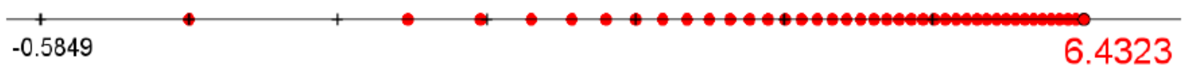
Como se observa en la imagen, esta magnitud variable se representa, en la recta numérica horizontal, mediante un punto que se mueve siempre con *dirección positiva* (hacia la derecha) y *avanza cada vez más*; en la recta numérica vertical, su representación es un punto que se mueve siempre con dirección positiva (hacia arriba) y avanza ("sube") cada vez más. En todo momento, la abscisa de dicho punto móvil corresponde al valor numérico que la magnitud variable toma en ese momento.

Llamaremos a este comportamiento variacional *crecimiento acelerado* y lo describiremos mediante la frase *la magnitud de interés crece cada vez más*.

c) El radio r (en cm) de la superficie circular del líquido durante el llenado del recipiente cónico.

La representación gráfica (obtenida mediante el applet ya mencionado de *GeoGebra*) para esta magnitud variable es la siguiente (última imagen de la animación dinámica).

Figura 12. Representación gráfica dinámica mediante un punto móvil, en la recta numérica horizontal, del *crecimiento desacelerado* o *amortiguado* de una magnitud variable.



Fuente: Jiménez (2022)

Como se observa en la imagen, esta magnitud variable se representa, en la recta numérica horizontal, mediante un punto que se mueve siempre con *dirección positiva* (hacia la derecha) y *avanza cada vez menos*; en la recta numérica vertical, su representación es un punto que se mueve siempre con dirección positiva (hacia arriba) y avanza ("sube") cada vez menos. En todo momento, la abscisa de dicho punto móvil corresponde al valor numérico que la magnitud variable toma en ese momento.

Siguiendo la lógica empleada en los dos casos anteriores, llamaremos a este comportamiento variacional *crecimiento desacelerado (o amortiguado),* y lo describiremos mediante la frase *la magnitud de interés crece cada vez menos.*

Asimismo, en el vaciado de líquido en un recipiente cónico se presentan casos similares pero contrarios al crecimiento, es decir, decrecimiento (uniforme, acelerado y desacelerado).

XI. Undécima Acción Mental del Nivel Cero (AM11-N0). La cuantificación numérica del cambio que experimenta la magnitud variable.

La CDE está determinada por la capacidad y/o creatividad del estudiante para utilizar sus conocimientos previos y proponer una manera adecuada para cuantificar el cambio experimentado por una magnitud variable, mediante una resta (diferencia) de dos de sus valores numéricos consecutivos en la lista, señalando el orden en que dicha operación de sustracción debe realizarse. Esta cuantificación, a diferencia de lo que habitualmente se practica en la enseñanza bajo otros enfoques, no es puntual sino global (se realiza sobre el listado completo de valores numéricos) y dinámica (se van tomando de manera progresiva parejas consecutivas de valores numéricos de la magnitud variable, hasta agotar todas las parejas).

XII. Duodécima Acción Mental del Nivel Cero (AM12-N0). La determinación del carácter y la magnitud del cambio a partir del signo y el valor absoluto de las diferencias.

La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de realizar el cálculo y análisis de las diferencias de los valores numéricos consecutivos de la magnitud variable que interviene en el fenómeno. En esta etapa hay que prestar mucha atención no solo al tamaño de lo que cambia, es decir, al valor absoluto de dichas diferencias, sino sobre todo al signo que arroja dicho cálculo, debido a que éste expresa si la magnitud variable crece o decrece.

Todo lo que necesitamos para calcular diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de una magnitud variable es aritmética simple: una resta de dos números. A pesar de ello, esta sencilla operación aritmética nos proporciona una poderosa herramienta para entender y describir matemáticamente el comportamiento de las magnitudes variables. *El comportamiento de las diferencias entre pares consecutivos de valores numéricos de una magnitud variable nos informa de manera clara sobre el comportamiento variacional de dicha magnitud*. A dichas diferencias también se les denomina ***cambios absolutos** de la magnitud variable*. No confundir este concepto con el de *valor absoluto*. Veamos el proceso de cálculo de los cambios absolutos de una magnitud variable con más detalle, usando como ilustración los tres ejemplos que analizamos en la acción mental previa. Por razones de espacio, no se incluyen todos los valores numéricos (hayan sido éstos medidos o calculados) de las respectivas magnitudes variables.

Ejemplo 1. Crecimiento uniforme: la magnitud de interés crece cada vez lo mismo. El volumen V_l del líquido durante el llenado del recipiente cónico (en cm^3).

Volumen V_l, cm^3	0.0933	8.773	17.4533	26.1333	34.8132	43.4932	⋯

Cambios absolutos consecutivos del volumen del líquido (en cm^3):

$8.773 - 0.0933 = 8.679978$ **Aumentó** 8.679978

$17.4533 - 8.773 = 8.679978$ **Aumentó** 8.679978

$26.1333 - 17.4533 = 8.679975$ **Aumentó** 8.679978

$34.8132 - 26.1333 = 8.679978$ **Aumentó** 8.679978

$43.4932 - 34.8132 = 8.679978$ Etc. ...

⋮

Como podemos apreciar, al parecer *todos* los cambios absolutos del volumen del líquido son *positivos e iguales entre sí* (la única diferencia apreciable entre ellos es del orden de las millonésimas de centímetro cúbico, que, desde el punto de vista práctico, es despreciable).

Ejemplo 2. Crecimiento acelerado: la magnitud de interés crece cada vez más. El área a_n de la superficie no mojada por el líquido durante el vaciado del recipiente cónico (en cm^2).

Área a_n, cm^2	2.4742	6.0078	9.5719	13.1676	16.7961	20.4587	⋯

Cambios absolutos consecutivos del área de la superficie no mojada (en cm^2):

$6.0078 - 2.4742 = 3.53353$ **Aumentó** 3.53353

$9.5719 - 6.0078 = 3.56409$ **Aumentó** 3.56409

$13.1676 - 9.5719 = 3.595736$ **Aumentó** 3.595736

$16.7961 - 13.1676 = 3.628536$ **Aumentó** 3.628536

$20.4587 - 16.7961 = 3.662568$ Etc. ...

⋮

Ahora podemos apreciar que, al parecer, *todos* los cambios absolutos del área de la superficie no mojada por el líquido son *positivos y van aumentando*.

Ejemplo 3. Crecimiento desacelerado: la magnitud de interés crece cada vez menos. El radio r de la superficie circular del líquido durante el llenado del recipiente cónico (en cm).

Radio r, cm	0.4151	1.8873	2.3737	2.7156	2.988	3.2181	⋯

Cambios absolutos consecutivos del radio de la superficie circular (en cm):

$1.8873 - 0.4151 = 1.472267$ **Aumentó** 1.472267

$2.3737 - 1.8873 = 0.48634$ **Aumentó** 0.48634

$2.7156 - 2.3737 = 0.341892$ **Aumentó** 0.341892

$2.988 - 2.7156 = 0.272414$ **Aumentó** 0.272414

$3.2181 - 2.988 = 0.23015$ Etc. ….

$\vdots$

En este caso, podemos apreciar que *todos* los cambios absolutos del radio de la superficie circular del líquido al parecer son *positivos y van disminuyendo*.

Asimismo, en el caso del vaciado de líquido en un recipiente cónico se presentan tres casos similares pero contrarios al crecimiento, es decir, decrecimiento (uniforme, acelerado y desacelerado.

XIII. Décimo Tercera Acción Mental del Nivel Cero (AM13-N0). La discriminación fina de los tipos elementales de variación a partir del empleo repetido del cálculo de diferencias.

La EDM consiste en la aplicación repetida del cálculo de diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable. La CDE se refleja por la capacidad y/o creatividad del estudiante para utilizar sus conocimientos y acciones mentales previamente asimiladas, y proponer el cálculo recurrente (por segunda vez, por tercera vez, etc.) de las diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable, como herramienta para explorar e investigar, dentro de cada tipo elemental de comportamiento variacional, las subclases posibles (teóricamente), y determinar el comportamiento de la magnitud variable (creciente o decreciente) como: uniforme, acelerado y/o desacelerado.

Ilustremos la utilidad de estas dos herramientas matemáticas, las primeras y segundas diferencias o cambios absolutos, para analizar con más profundidad el comportamiento variacional de una magnitud variable. Para este análisis utilizaremos como ejemplo tanto las magnitudes variables que previamente hemos estado considerando, y que intervienen en los procesos de llenado y vaciado de un recipiente cónico, como el caso de algunas magnitudes variables hipotéticas.

a) *El caso del crecimiento uniforme*: la magnitud de interés crece cada vez lo mismo.

Si una magnitud variable *crece uniformemente*, todos los valores de las primeras diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de dicha magnitud variable son iguales a cierta *constante numérica positiva*, y todos los valores numéricos de sus segundas diferencias son iguales a *cero*. Recíprocamente, si todos los valores de las primeras diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de cierta magnitud variable son iguales a una *constante numérica positiva*, y todos los valores numéricos de sus segundas diferencias son iguales a *cero*, entonces dicha magnitud variable *crece uniformemente*.

b) *El caso del crecimiento acelerado*: la magnitud de interés crece cada vez más.

Si una magnitud variable *crece aceleradamente*, todos los valores numéricos de las primeras diferencias entre pares de valores consecutivos de dicha magnitud variable son *positivos* y además *crecen*, ya sea de manera uniforme, acelerada o desacelerada. En consecuencia, los valores numéricos de las segundas diferencias o cambios absolutos de esta magnitud variable son todos estrictamente positivos. Recíprocamente, si todos los valores numéricos de las primeras diferencias o cambios absolutos entre pares de valores consecutivos de cierta magnitud variable son *positivos* y *crecen* (sin importar como lo hagan, ya sea de manera uniforme, acelerada o desacelerada), y por ende todos los valores numéricos de sus segundas diferencias o segundos cambios absolutos son *positivos*, entonces dicha magnitud variable *crece aceleradamente*.

c) *El caso del decrecimiento desacelerado*: la magnitud de interés decrece cada vez menos.

Si una magnitud variable *decrece desaceleradamente*, todos los valores numéricos de las primeras diferencias entre pares de valores consecutivos de dicha magnitud variable son *negativos* y además *crecen*, ya sea de manera uniforme, acelerada o desacelerada. En consecuencia, los valores numéricos de las segundas diferencias o cambios absolutos de esta magnitud variable son todos estrictamente *positivos*. Recíprocamente, si todos los valores numéricos de las primeras diferencias o cambios absolutos entre pares de valores consecutivos de cierta magnitud variable son *negativos* y *crecen* (sin importar como lo hagan, ya sea de manera uniforme, acelerada o desacelerada), y por ende todos los valores numéricos de sus segundas diferencias o segundos cambios absolutos son *positivos*, entonces dicha magnitud variable *decrece desaceleradamente*.

Aclaramos que, aunque sin duda se trata de una acción mental importante para el desarrollo del pensamiento variacional, el establecimiento de relaciones (cualitativas, y sobre todo cuantitativas) entre las magnitudes variables, constantes y parámetros percibidas que intervienen en el fenómeno, no se incluye en el marco conceptual del *Nivel Cero*, dado que dichas ideas están directamente relacionadas con el concepto de covariación entre magnitudes variables, es decir, con el razonamiento covariacional.

6.2 Discusión

La investigación educativa parece asumir como un hecho incuestionable y obvio que el razonamiento variacional es simple, natural y espontáneo, y que no deberíamos preocuparnos por su desarrollo. Sin embargo, al realizar el esfuerzo de identificar, describir y caracterizar de forma preliminar las acciones mentales del trabajo matemático requerido en el análisis de una sola magnitud variable (aislada de las demás) percibida en un fenómeno de cambio en progreso, nos percatamos con asombro de dos hallazgos significativos: a) existe -al menos teóricamente- un número considerable de acciones mentales del *Nivel Cero* (trece hasta el momento), y b) estas acciones mentales no son elementales, sino que como lo hemos mostrado aquí, presentan cierto grado de abstracción y complejidad matemática.

Los hallazgos presentados con anterioridad permiten adentrarse en la reflexión sobre porqué a la mayoría de los estudiantes no les resulta fácil empezar a trabajar directamente a nivel covariacional, puesto que en dicho trabajo matemático experimentan una serie de dificultades y obstáculos cognitivos, referenciados en varios artículos de investigación en el área de Matemática Educativa (López y Sosa, 2008; Ímaz y Moreno, 2010; Dolores y Salgado, 2009, Carlson y Oehrtman, 2005). Por lo tanto, consideramos que la causa principal consiste en la omisión curricular y didáctica del *Nivel Cero* del pensamiento variacional, dado que esta etapa inicial es crucial en la construcción de ideas variacionales, acciones mentales e imágenes dinámicas esenciales para el desarrollo de este tipo de pensamiento.

Las dificultades que presentan los estudiantes al trabajar con fenómenos covariacionales se manifiestan a partir de que no tienen formadas y desarrolladas las acciones mentales que se requieren para comprender las ideas matemáticas de la covariación, y es casi imposible poder desarrollarlas en dicho escenario matemático, dado que éste les exige a los alumnos poseer estas imágenes dinámicas y acciones mentales para cada una de las magnitudes variables y poner en juego la coordinación; por ejemplo, la representación numérica como representación tabular, la algebraica mediante la notación de funciones, y la gráfica en el plano cartesiano. Sin embargo, como los alumnos no tienen formadas adecuadamente dichas acciones mentales, les es difícil realizar tal coordinación de ambas magnitudes variables de forma simultánea.

Por último, consideramos que el marco conceptual propuesto exhibe una problemática identificada por atender, a la que hasta el momento no se le ha prestado la atención debida. Ciertamente, en el currículo escolar está contemplado el estudio de la recta numérica, pero lamentablemente no desde el punto de vista variacional, para desarrollar en ella imágenes gráficas dinámicas asociadas a los distintos comportamientos variacionales elementales, o a desarrollar y utilizar herramientas matemáticas que permitan a los estudiantes profundizar en el análisis del comportamiento de las magnitudes variables.

Se considera que el marco conceptual propuesto funciona como pauta y guía para el diseño de actividades didácticas sobre fenómenos de cambio en progreso, que se propondrán a los estudiantes de educación secundaria como primer acercamiento al desarrollo de este tipo de pensamiento matemático.

CAPÍTULO 7. CRONOGRAMA

ACTIVIDADES - SEMESTRE	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Antecedentes – Estado del arte								
Problemática y objetivos del proyecto								
Características de la propuesta didáctica								
Marco teórico – Marco metodológico								
Diseño de actividades y recursos didácticos – Pilotaje preliminar								
Revisión y/o mejora del diseño didáctico – Implementación de intervención didáctica								
Análisis de resultados y hallazgos – Perfeccionamiento del diseño didáctico								
Redacción del documento de tesis								
Publicación de artículo en revista con arbitraje								
Estancia académica								
Publicación en memorias en evento internacional								

CAPÍTULO 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aleksándrov P. S., Kolmogórov A. N., Lavréntiev, et al. (1974). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Editorial. España.

Amador, L. M. y Jiménez, J. R. (2023). *Diseño didáctico de la covariación exponencial bajo el enfoque del pensamiento variacional*. Memorias del XVI Congreso https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/view/1338/694.

Amador, L. M., y Jiménez, J. R. (2025). Covariación exponencial continua: una razón de cambio directamente proporcional al valor de la magnitud variable de interés. En *Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. https://ponencias.ciaem-redumate.org/cemacyc/article/download/670/148

Arzarello, F. (2019). La covariación instrumentada: un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (18), 11-29.

Bojórquez, A., Castillo, J. y Jiménez, J. (2016). Development of the variational thought in secondary students. Congreso Internacional en Tecnología y su Integración en la Educación Matemática (TIME). 29 de junio al 2 de julio de 2016. *Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA)* y Facultad de Ciencias de la UNAM. Ciudad de México. Disponible en: http://www.acdca.ac.at/fileadmin/Mathematik_Uploads/ACDCA/TIME2016/Garcia_ao.pdf

Boyer, C. B. (1991). *A History of Mathematics* (2nd edition). New York, NY: John Wiley & Sons.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1-56.

Cabezas, C. y Mendoza, M. R. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. *Formación Universitaria*, 9(6), 13-26. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062016000600003.

Cantoral, R. & Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Revista Epsilon*, Vol. 42, Núm. 14(3), 353 – 369.
Cantoral, R. & Farfán, R.M. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: Cantoral R. (Ed.) El futuro del Cálculo infinitesimal. ICME 8. 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V. México, D.F.
Carlson, M., Jacob, S. Coe, E. Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA, VOL. 8* Nº2, pp. 121-156.
Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). *Key aspects of knowing and learning the concept of function*. Mathematical Association of America. Research Sampler. Extraído de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_9.html
Castillo, J. M. y Jiménez, J. R. (2023). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de primer grado de educación secundaria* [Tesis de Maestría, Universidad de Sonora].
Castillo-Garsow, C. W. (2010) *Teaching the Verhulst Model: A Teaching Experiment in Covariational Reasoning and Exponential Growth.* Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University, Tempe, AZ.
Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33*(3), 31–37. http://www.jstor.org/stable/43894859
Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas en Educación Infantil*. Madrid: Pearson Educación. España.
Clagett, M. (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions.* Madison, WI: University of Wisconsin Press.
Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student's perspective. En L. Steffe (Ed.), Epistemological Foundations of Mathematical Experience. Recent Research in Psychology (pp. 124-159). New York, NY: Springer.
Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation and their role in the development of exponential function. Journal for Research in Mathematics Education, 26, 66-86.
Cuevas, C. A., Martínez, M. y Pluvinage, F. (2012). Promoviendo el pensamiento funcional en la enseñanza del cálculo: un experimento con el uso de tecnologías digitales y sus resultados. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 17, 137-168.
Dávila, M. y Herrera, K. (2021). Reflexiones en torno al diseño de una propuesta formativa sobre variación lineal orientada a futuros profesores de secundaria. Sahuarus. Revista Electrónica De Matemáticas. ISSN: 2448-5365, 5(1), pp. 94-111.
Dirección General de Materiales Educativos (DGME), (2024a). *Colección Ximhai. Saberes y pensamiento científico. Primer grado*. México: Secretaría de Educación Pública. [Consulta: 04-12-24]. Recuperado de: https://libros.conaliteg.gob.mx/2023/S1SAA.htm
Dirección General de Materiales Educativos (DGME), (2024b). *Colección Sk'asolil. Saberes y pensamiento científico. Segundo grado.* México: Secretaría de Educación Pública. [Consulta: 04-12-24]. Recuperado de: https://libros.conaliteg.gob.mx/2023/S2SAA.htm
Dirección General de Materiales Educativos (DGME), (2024c). *Colección Nanahuatzin. Saberes y pensamiento científico. Tercer grado*. México: Secretaría de Educación Pública. [Consulta: 04-12-24]. Recuperado de: https://libros.conaliteg.gob.mx/2023/S3SAA.htm
Dolores, C. y Salgado, G. (2009). Elementos para la graficación covariacional. Números, *Revista de Didáctica de las Matemáticas, Volumen 72*, pp. 63-74.

Dray, T. y Manogue, C. (2010). Putting Differentials Back into Calculus. *The College Mathematics Journal, V. 41,* N. 2, pp. 90-100, 2010. DOI: 10.4169/074683410X480195.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la RSME, 9*(1), pp.143-168.

Edwards, C. H. (1979) *The Historical Development of the Calculus.* New York, NY: Springer-Verlag.

Fernández, L. M. (1983): El comportamiento de un con sustantivos y adjetivos en función de predicado nominal: sobre el llamado 'un enfático', en Serta Philologica Fernando Lázaro Carreter, vol. 1, Madrid, Cátedra, pp. 195-208.

Fernández, M., & Rondero, C. (2004). El inicio histórico de la ciencia del movimiento: implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa*, *7*(2), 145–156. Recuperado a partir de https://relime.org/index.php/relime/article/view/537

González Redondo Francisco A. (2004) La formulación matemática de la Mecánica en el siglo XVII: Galileo, Newton, Leibniz. Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 66 (Febrero 2004), pp. 74-90.

González-Urbaneja, P. (1992). Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Madrid: Alianza Universidad, 1ª Ed., 1992.

Harel, G. y Sowder, L. (2005). Advanced Mathematica-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning,* *7*(1), 27-50. https://doi.org/ 10.1207/s15327833mtl0701_3.

Harel, G. (2008). *What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question*. En B. Gold & R. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf.

Harel, G. (2008a). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. ZDM – International Journal on Mathematics Education, 40(3), 487-500. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1.

Harel, G. (2008b). *DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part II* ZDM—The International Journal on Mathematics Education, pp. 487 – 500. https://mathweb.ucsd.edu/~harel/pdf/DNRII.pdf

Hitt, F. (1998). Function, Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. Journal of Mathematical Behavior JMB, 17. 123-134. http://www.academia.edu/807002/Difficulties_in_the_articulation_of_different_representations_linked_to_the_concept_of_function

Hohenwarter, M. y Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and its Applications, Volume 7(1), 2-12. Article ID: 1448.

Hughes-Hallet, D., Gleason, A., et al. (1992). Calculus. New York, NY: John Wiley & Sons.

Ímaz, C. y Moreno, L. (2010). Génesis y la enseñanza del cálculo, las trampas del rigor. Editorial: TRILLAS.

Jiménez, J. R. (2025). *El pensamiento matemático y el pensamiento variacional.* Ponencia en X Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM X), Guadalajara, Jalisco, México.

Jiménez, J. R., y Castillo, J. M. (2025). Un marco conceptual complementario para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación secundaria. En *Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. https://ponencias.ciaem-redumate.org/cemacyc/article/download/614/491

Jiménez, J. R., Grijalva, A., Milner, F. A., Dávila-Araiza, M. T. & Romero, C. F. (2022). Reconceptualización didáctica del Cálculo. Editorial de la Universidad de Sonora. ISBN: 978-607-518-508-8. https://doi.org/10.47807/UNISON.201

Johnson, H. L. (2013). Designing covariation tasks to support students reasoning about quantities involved in rate of change. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in Mathematics Education*. Proceedings of ICMI Study 22(Vol. 1, pp. 213-222). Oxford.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 77-156). Hillsdale: Erlbaum.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el estudio de funciones en estudiantes de bachillerato. En: P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21, pp. 308-318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Leung, A. (2012). Variation and mathematics pedagogy. In J. Dindyal, L. P. Cheng, & S. F. Ng (Eds.), Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (pp. 433–440). Singapore: MERGA.

Malagón, J. F. (1988). La relación física y matemáticas en Galileo. Tesis de Maestría en Docencia de la Física. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Mariño L. F. (2020) Avances en la caracterización del pensamiento variacional emergente en el contexto del planteo y resolución de problemas en profesores de matemáticas en formación. Programa de Doctorado en Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. Bogotá, Colombia.

Mateus-Nieves, E. y Moreno, E. (2021). Development of Variational Thinking for the Teaching of Preliminary Notions of Calculus. A Classroom Experience in Basic Education. Acta Scientiae, 23(2), 113-135. http://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5716.

Menger, K. (1953). *The ideas of variable and function*. Proc. N.A.S., Vol. 39, págs. 956-961. https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.39.9.956

Menger, K. (1956). What are x and y? The Mathematical Gazette, Vol. 40, No. 334 (Dec., 1956), pp. 246-255. The Mathematical Association of America. doi:10.2307/2964704

Mestre, C, & Oliveira, H. (2012). From Quasi-Variable Thinking to Algebraic Thinking: A Study With Grade 4 Students. [Online]. https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7087/1/Mestre_Oliveira_ICME12.pdf

Piaget, J. (1968:1970). Estructuralismo. New York: Basic Books, Inc.

Radford, L. (2021). The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning. Brill/ Sense: Leiden, The Netherlands.

Ramos, L. y Jiménez, J. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. El cálculo y su enseñanza, 5(1), pp. 111-130. Recuperado de https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/119/70.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (1), pp. 435–458.

Schmid, W. & Wu, H. (2008). The Major topics of school algebra. Descargado de https://math.berkeley.edu/_wu/NMPalgebra7.pdf

Secretaría de Educación Pública (SEP), (2006). Programas de estudio 2006. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Secretaría de Educación Pública. [Consulta: 02-05-25]. Recuperado de: https://www.uv.mx/personal/grihernandez/files/2011/04/programa.pdf

Secretaría de Educación Pública (SEP), (2011). Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. Secretaría de Educación Pública.

[Consulta: 04-12-24]. Recuperado de: https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/18394/Programa._Secundaria_tercer_grado_Matematicas_guia_para_maestros.pdf

Secretaría de Educación Pública (SEP), (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación. Matemáticas. Secretaría de Educación Pública. [Consulta: 04-12-24]. Recuperado de: https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf

Secretaría de Educación Pública (SEP), (2022). *Avance del contenido del Programa Sintético de la Fase 6*. [Material en proceso de construcción].

Secretaría de Educación Pública (SEP), (2024). *Programa de Estudio para la Educación Secundaria: Programa Sintético de la Fase 6*. [Consulta: 04-12-24]. Recuperado de: https://educacionbasica.sep.gob.mx/wpcontent/uploads/2024/06/Programa_Sintetico_Fase_6.pdf

Silva, C., & Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: A study with secondary mathematics teachers. In C. Batanero, G. Burril, C. Reading, & A. Rossman (2008).

Soto, O., Siy, K. y Harel, G. (2022). Promoting a set-oriented way of thinking in a U.S. High School discrete mathematics class: a case study. *ZDM Mathematics Education, 54,* 809-827. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01337-7.

Stephens, A. (2005). Developing students' understandings of variable. Mathematics Teaching in the Middle School, 11(2), 96–100. Retrieved from http://labweb.education.wisc.edu/~knuth/taar/papers_rep_pub/MTMS_variable.pdf

Stewart, I. (1998). Cambio. La Enseñanza Agradable de las Matemáticas. pp. 193-228. Limusa Noriega Editores. México. L. Steen, & L. Steen (Ed.).

Stroup, W. (2002). Understanding Qualitative Calculus: A Structural Synthesis of Learning Research. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, pp.167-215.

Tall, D. (1989) Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. For the Learning of Mathematics 9(3), 37-42.

Tejera, M. (2021). Modelos matemáticos mediados por GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Reloj de agua*, *24*, 39-49.

Thompson, P. W. (1990). A theorical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebraic. Unpublished manuscript, Center for Research in Mathematics & Science Education. [Consulta: 04-12-24]. Available at https://pat-thompson.net/PDFversions/1990TheoryQuant.pdf

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. Educational Studies in Mathematics, 25(3), 165–208. Available at http://patthompson.net/PDFversions/1993Complexity&AddStruct.pdf.

Thompson, P. W. (1994a). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics* 26(2-3), 229-274.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), New Perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Mongraphs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., Ashbrook, M., y Milner, F. (2019). Calculus: Newton, Leibniz, and Robinson meet technology. Retrieved from http://patthompson.net/ThompsonCalc/

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Thompson, P.W., y Dreyfus, T. (2016). *A coherent approach to the Fundamental Theorem of Calculus using differentials*. In R. Göller. R. Biehler & R. Hochsmuth (Eds.), Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientitific Discipline (pp. 355–359) Hannover, Germany: KHDM.
Vasco, C. E. (1994). Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. (Volumen 1 y 2:), en: Serie Pedagogía y Currículo, Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, pp. 187.
Vasco, C. E. (2000). Las matemáticas escolares en el año 2001, Formarse para la enseñanza de las matemáticas, Las competencias matemáticas, Universidad del Valle Instituto de Educación y Pedagogía Grupo de Educación Matemática, Pág. 29.
Vasco, C. E. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Memorias del Congreso Internacional de Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*, 61-70.
Vasco, C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In Anais eletrônicos do CIAEM-Conferencia Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9, pp. 2009-2010).
Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1). 77-101.
Wu, H. (2005). Introduction to school algebra. Draft paper. Department of Mathematics, University of California at Berkeley. Recuperado de https://math.berkeley.edu/_wu/Algebrasummary.pdf
Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education IV (pp. 103-127). Providence, RI: American Mathematical Society.
Zubieta, B., G. & Moreno, A., L. (1996). Sobre el número y la Variación. En: Didáctica: Investigaciones en Matemática Educativa. Editor: Fernando Hitt Espinosa. Grupo Editorial Iberoamericana. México D.F. 46