



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

UNIVERSIDAD DE SONORA

Facultad Interdisciplinaria de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias

con especialidad en Matemática Educativa

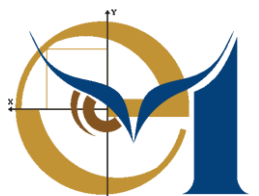
**Propuesta de enseñanza de la ecuación cuadrática con enfoque
instrumentalista para estudiantes de Ciencias Económicas y
Administrativas**

Documento predoctoral que presenta

Paola Tonanzy García Mendivil

Director de tesis:

Dr. César Fabián Romero Félix



Posgrado en
**Matemática
EDUCATIVA**
Universidad de Sonora

Hermosillo, Sonora

Noviembre de 2025

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti) por el apoyo brindado para mi formación, con la beca de número 4021454

CONTENIDO

1. Introducción	5
2. Antecedentes	7
2.1 Elementos curriculares	7
2.2 Problemática asociada a los métodos de resolución	10
2.3 El uso de material manipulable en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas	15
2.4 Análisis del contenido matemático	17
3. Estado del Arte	32
3.1 Revisión y clasificación de investigaciones sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas	32
3.2 Propuestas de enseñanza	40
4. Problemática y objetivos de proyecto	49
4.1 Problemática en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas	49
4.2 Problemática en la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas	52
4.3 Exploración con estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Administración	56
4.4 Objetivos	59
5. Aspectos teóricos	60
5.1 Descripción general de la teoría instrumentalista	60
5.2 Génesis instrumental como referencia para el diseño de enseñanza	64
5.3 La Orquestación Instrumental y el papel del docente	65
6. La propuesta y sus características	69
6.1 Ubicación y pertinencia curricular	69
6.2 Artefactos e instrumentación en la propuesta	70
6.3 Descripción general de las secuencias didácticas	72
7. Consideraciones metodológicas	75
Consideraciones finales	83
Cronograma	84
Referencias bibliográficas	89
Anexos	92

Anexo 1	92
Anexo 2	97
Anexo 3	100
Anexo 4	102

1. Introducción

La comprensión de las ecuaciones cuadráticas constituye un componente fundamental en la formación matemática de los estudiantes universitarios, particularmente en programas relacionados con las Ciencias Económicas y Administrativas. Aunque este contenido suele asociarse de manera inmediata con el álgebra escolar, su relevancia en el nivel superior adquiere nuevos matices cuando se reconoce su papel en la modelización de fenómenos propios del ámbito administrativo, como el análisis de costos e ingresos, la determinación de puntos de equilibrio y el estudio del comportamiento de funciones asociadas a la toma de decisiones. No obstante, diversos estudios han mostrado que los estudiantes llegan al nivel universitario con dificultades persistentes en la manipulación simbólica, la interpretación gráfica y la resolución de ecuaciones cuadráticas, lo que limita su capacidad para utilizarlas como herramientas analíticas en contextos propios de su disciplina.

En el caso particular de la Licenciatura en Administración de la Universidad de Sonora, estas dificultades se manifiestan en el primer semestre, durante el Espacio Educativo Matemáticas, donde las ecuaciones cuadráticas aparecen como un contenido que los estudiantes reconocen, pero no siempre comprenden en profundidad. La falta de conexión entre los procedimientos algebraicos y las situaciones propias del campo administrativo suele generar una percepción de poca utilidad, lo que dificulta el establecimiento de relaciones entre la fundamentación matemática y su aplicación en problemas realistas. Frente a este panorama, se hace necesario diseñar propuestas didácticas que promuevan formas alternativas de acercarse al contenido, favoreciendo experiencias de aprendizaje más significativas.

El presente documento predoctoral describe los elementos que sustentan la propuesta del Proyecto de Intervención Didáctica enfocado en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en estudiantes de los Programas Educativos de Ciencias Económicas y Administrativas. Para ello, cada sección del documento desarrolla aspectos específicos que permiten comprender la problemática, fundamentar la propuesta y delinear los elementos metodológicos que se llevarán a cabo. A continuación, se describe el contenido de cada una de las secciones que componen esta propuesta.

En la sección 2 Antecedentes, se presenta el panorama curricular que contextualiza el estudio. Se examinan los elementos del plan de estudios de la Licenciatura en Administración relacionados con Matemáticas. También se aborda la problemática documentada en torno a los métodos de resolución que se enseñan tradicionalmente. Además, se revisa literatura sobre el uso de materiales manipulables en el aprendizaje del álgebra.

En cuanto a la sección 3 Estado del Arte se profundiza en estudios y propuestas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas. Se presenta una revisión de investigaciones que abordan errores comunes, estrategias de resolución y

enfoques pedagógicos documentados en distintos niveles educativos. Posteriormente, se analizan propuestas de enseñanza que incorporan materiales concretos o digitales.

En la sección 4 problemática y objetivos del proyecto, se delimita la problemática que motiva el desarrollo del proyecto. Se describe la manera en la que los estudiantes experimentan dificultades específicas al resolver ecuaciones cuadráticas. A partir de este análisis, se formulan los objetivos general y específicos del proyecto, orientados al diseño, implementación y valoración de una intervención didáctica. Además, se incorpora la descripción de la exploración realizada con estudiantes del primer semestre de la Licenciatura en Administración de la Universidad de Sonora. La sección presenta los principales hallazgos de esta exploración inicial y su importancia para afinar el diseño de la propuesta.

La sección 5 presenta los elementos teóricos que sustentan a la propuesta, la cual es la Teoría de la Génesis Instrumental y Orquestación Instrumental. En esta sección se desarrolla una descripción detallada de los conceptos fundamentales de la perspectiva instrumentalista. Además, se analiza el papel del docente en la organización de la actividad matemática, lo cual resulta fundamental para comprender cómo se estructuran las interacciones entre estudiantes, materiales concretos y herramientas digitales durante la intervención. Finalmente, se describen las orquestaciones seleccionadas como referentes para el diseño que se contempla implementar, destacando su función en la construcción colectiva de significado en el aula.

En la sección 6, la propuesta y sus características, se presenta la estructura general de la intervención didáctica. Se describe su ubicación curricular dentro del programa de estudios y se justifica su pertinencia para el Espacio Educativo Matemáticas. La sección concluye con la descripción general de las secuencias didácticas, sus propósitos y las actividades contempladas.

La última sección desarrolla el enfoque metodológico que guiará el proyecto. Se describen las fases del diseño, pilotaje, implementación y valoración de la intervención, así como los instrumentos de recolección de datos que se emplearán en cada etapa. Se incluye también un cronograma que organiza temporalmente las actividades del proyecto dentro del periodo correspondiente al proceso doctoral. Esta sección cierra el documento al presentar la ruta de trabajo que permitirá avanzar hacia la consolidación de la propuesta.

Finalmente, los anexos contienen las actividades aplicadas en el pilotaje inicial, así como los instrumentos de observación utilizados para registrar la interacción de los estudiantes con el material manipulables

Esta propuesta busca sentar las bases para el diseño, implementación y valoración de una intervención que contribuya a mejorar la experiencia de aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en programas de las Ciencias Económicas y Administrativas, a partir de un enfoque que articule el trabajo con material concreto y digital, la reflexión colectiva y la construcción progresiva de significados matemáticos relevantes para el campo profesional.

2. Antecedentes

En el presente apartado se abordan, en primer lugar, los elementos curriculares que enmarcan el estudio de las ecuaciones cuadráticas, con especial atención en el Espacio Educativo Matemáticas del programa de la Licenciatura en Administración, debido a que constituye el contexto donde se desarrollará la propuesta de intervención. Posteriormente, se analiza la problemática asociada a los métodos de resolución más comunes, los cuales suelen centrarse en la aplicación de procedimientos mecánicos. También, se examina el uso de material manipulable como recurso didáctico que promueve la exploración, visualización y la reflexión sobre el significado de las ecuaciones cuadráticas. Finalmente, se realiza un análisis del contenido matemático, con el propósito de identificar los elementos importantes que orientarán el diseño de las secuencias didácticas de la intervención.

2.1 Elementos curriculares

En este apartado se describe cómo las ecuaciones cuadráticas se abordan a lo largo de la trayectoria escolar en el Sistema Educativo Nacional (Mexicano). Se identifica su inclusión en el nivel básico, en tercer grado de secundaria; su consolidación en la educación media superior, particularmente en el tercer semestre del bachillerato dentro de la asignatura Pensamiento Matemático III; y finalmente su aplicación en la educación superior, donde adquieren un papel instrumental para la modelización en distintos campos disciplinares.

En este sentido, en el Programa Sintético de la Fase 6 de educación secundaria el estudio de las ecuaciones cuadráticas forma parte del Campo Formativo Saberes y Pensamiento Científico, dentro de la asignatura de Matemáticas los contenidos se organizan en torno a la identificación de la forma general $Ax^2 + BX + C = 0$, al uso de la factorización como método de solución y a la aplicación inicial de la fórmula general (SEP; 2024, p. 59).

En cuanto al nivel medio superior, las ecuaciones cuadráticas adquieren un tratamiento más riguroso y sistemático. De acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS), Modelo Educativo 2025 (SEP, 2025), este contenido se aborda en el tercer semestre dentro de la asignatura Pensamiento Matemático III: Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana.

Se establece como propósito formativo que los estudiantes apliquen la aritmética y el manejo del álgebra para resolver ecuaciones cuadráticas vinculadas con situaciones de interés. Para ello, se incluyen los siguientes contenidos formativos: Reconocimiento de la forma general de la ecuación cuadrática, resolución mediante el método de completar cuadrados, uso de la fórmula general (Bhaskara) y la representación gráfica (SEP, 2025, p. 19).

En este nivel, el estudio de las ecuaciones cuadráticas permite profundizar en la conexión entre la expresión algebraica y su interpretación gráfica. La inclusión del discriminante posibilita analizar la naturaleza de las soluciones, lo que favorece en los

estudiantes una comprensión más amplia de los distintos escenarios que pueden presentarse al resolver una ecuación de segundo grado. Esta perspectiva contribuye a que el aprendizaje vaya más allá del procedimiento mecánico y se convierta en una oportunidad para interpretar resultados.

En lo que respecta al estudio de las ecuaciones cuadráticas en el nivel superior no se justifica únicamente por la trayectoria histórica que este tema ha tenido en la enseñanza de las matemáticas, sino también por los lineamientos curriculares que establecen su pertinencia y función dentro de los Programas Educativos.

En el marco institucional, la Universidad de Sonora ha adoptado diversos modelos educativos a lo largo de su historia, en consonancia con las necesidades sociales y los avances pedagógicos. En 2018 se aprobó el Modelo Educativo 2030, concebido como marco teórico-conceptual para orientar el desarrollo institucional hacia ese horizonte temporal. Este modelo, fundamentado en la misión, visión y valores de la universidad, buscó consolidar la formación de profesionales integrales y competentes a nivel nacional e internacional. Entre sus componentes principales destacaban un enfoque curricular centrado en el estudiante, la formación basada en competencias, la flexibilidad académica, la internacionalización y la vinculación con la sociedad.

En 2023 la Universidad de Sonora actualizó su modelo educativo, manteniendo los principios del anterior, pero incorporando elementos que respondieran a los desafíos contemporáneos, como la globalización, la aceleración tecnológica y la demanda de perfiles profesionales adaptados al mundo actual. Este modelo enfatiza la formación integral, la inclusión, la equidad, la calidad educativa, la responsabilidad social y el desarrollo sostenible.

El Modelo Educativo vigente se estructura en tres componentes: el curricular, centrado en el estudiante y orientado al desarrollo de competencias con flexibilidad e internacionalización; el de docencia, que concibe al profesor como mediador y promotor de metodologías activas y participativas; y el de gestión educativa, que busca articular de manera dinámica y flexible las necesidades académicas y administrativas de la institución. Además, este modelo impulsa la internacionalización de las funciones sustantivas de la Universidad, la transferencia de conocimiento, la responsabilidad social y el uso de la tecnología para la toma de decisiones y el fortalecimiento organizacional.

Desde esta perspectiva, el modelo promueve el desarrollo de competencias genéricas como el análisis de problemas y la toma de decisiones y competencias específicas aplicables al campo administrativo, tales como la gestión de recursos y el liderazgo. Al basarse en un enfoque de competencias, busca que los egresados no solo adquieran conocimientos teóricos, sino que también desarrollen habilidades y actitudes para enfrentar los retos del entorno profesional. El perfil planteado en el plan de estudios corresponde al de un profesional capaz de dirigir los recursos humanos, materiales, técnicos y financieros de las organizaciones, bajo criterios de eficiencia, responsabilidad social y respeto al entorno.

En este marco, el Espacio Educativo *Matemáticas* (UNISON, 2025) , ubicado en el primer semestre de la Licenciatura en Administración, tiene como propósito proporcionar una base sólida para la aplicación de herramientas matemáticas en el ámbito económico-administrativo. El programa enfatiza el desarrollo de competencias vinculadas con la modelización, la interpretación de funciones y el uso de software especializado, con el fin de relacionar los contenidos matemáticos con situaciones propias de la gestión empresarial.

Los resultados de aprendizaje incluyen la aplicación de operaciones aritméticas y algebraicas, el modelado de situaciones mediante ecuaciones y funciones, y el análisis de gráficas para evaluar indicadores como costos, ingresos, utilidades y puntos de equilibrio. Estas competencias están directamente relacionadas con el perfil de egreso del área económico-administrativa, al favorecer la capacidad de interpretar información cuantitativa y tomar decisiones fundamentadas.

La organización de contenidos contempla cuatro unidades principales: la primera aborda operaciones aritméticas y números reales; la segunda se centra en expresiones algebraicas y leyes del álgebra; la tercera desarrolla el estudio de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales; y la cuarta se orienta al análisis de funciones y gráficas. El tema de las ecuaciones cuadráticas aparece en la Unidad 3, específicamente en el apartado 3.2, donde se plantea su resolución mediante la fórmula general y el uso de software matemático. Asimismo, en la Unidad 4, al cierre del programa, se incluyen los apartados 4.7 y 4.8, correspondientes al análisis de modelos de oferta y demanda y al estudio de puntos de equilibrio en negocios, lo cual refuerza la intención de vincular las matemáticas con problemáticas directamente relacionadas con la administración.

El diseño del plan busca integrar la teoría con la práctica mediante ejemplos aplicados al campo económico-administrativo y el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, SageMathCell y Máxima. También promueve el aprendizaje autónomo a través de actividades complementarias, acceso a bibliotecas digitales y proyectos integradores, lo que favorece un aprendizaje contextualizado e interdisciplinario.

No obstante, el programa presenta limitaciones. El tratamiento de las ecuaciones cuadráticas se reduce a la aplicación de la fórmula general y al uso de software, lo que puede derivar en un aprendizaje mecánico más que en una comprensión profunda de su utilidad en escenarios administrativos. Además, la amplitud de contenidos que abarca varios tipos de ecuaciones y funciones en un solo semestre puede dispersar la atención de los estudiantes, dificultando la consolidación de aprendizajes significativos en temas esenciales como las funciones cuadráticas en costos e ingresos. Aunque se promueve el uso de la tecnología y se proponen aplicaciones al área administrativa, la orientación didáctica privilegia aún la exposición del profesor y la resolución de ejercicios convencionales, lo que limita la exploración y la construcción activa del conocimiento.

En conclusión, el plan de Matemáticas de la Licenciatura en Administración en la Universidad de Sonora constituye un diseño curricular pertinente para fortalecer la formación

de los estudiantes, al integrar contenidos matemáticos fundamentales con aplicaciones al ámbito económico y administrativo. Sin embargo, es recomendable ampliar el tratamiento de las ecuaciones cuadráticas mediante actividades de modelización contextualizadas y potenciar los apartados finales sobre modelos de oferta y demanda y puntos de equilibrio, de manera que se conviertan en ejes integradores del curso y no se perciban como contenidos abordados de manera superficial.

2.2 Problemática asociada a los métodos de resolución

La enseñanza de las ecuaciones cuadráticas generalmente se enfoca en la aplicación mecánica de métodos de resolución como la factorización, la fórmula general y completar el cuadrado. Sin embargo, esta estrategia presenta dificultades, ya que los estudiantes frecuentemente memorizan procedimientos sin comprender sus fundamentos, lo que limita su capacidad de transferir el conocimiento a nuevas situaciones o contextos prácticos. En este sentido, a continuación, se muestra la descripción de tipo de dificultad de aprendizaje asociada a los métodos de resolución reportada por varios investigadores.

El estudio de Makgakga (2023) se centra en los errores que cometen los estudiantes de onceavo grado al resolver ecuaciones cuadráticas mediante el método de completar el cuadrado, utilizando como marco de análisis el modelo de Newman. Esta elección metodológica permitió identificar y clasificar las dificultades de los estudiantes en tres tipos principales: errores de comprensión, de transformación y de procedimiento. El trabajo parte de la idea de que las ecuaciones cuadráticas constituyen un tema fundamental en la educación secundaria, tanto por su vínculo con otros conceptos matemáticos (funciones, derivadas polinomiales, ecuaciones lineales) como por sus aplicaciones en la vida real y en disciplinas como la física y la ingeniería. Sin embargo, pese a su importancia, numerosos estudios muestran que los estudiantes tienen serias dificultades para dominarlas, en particular al aplicar el método de completar el cuadrado, considerado uno de los más complejos.

La investigación se realizó en una escuela secundaria de Limpopo, Sudáfrica, con 35 estudiantes que respondieron un test diagnóstico con ocho ítems, complementado con entrevistas semiestructuradas a 10 de ellos. El análisis reveló que no se presentaron errores de lectura, ya que las tareas se plantearon únicamente con símbolos matemáticos. Los errores más frecuentes fueron de comprensión, evidenciados en la dificultad para definir correctamente una ecuación cuadrática o de describir el procedimiento de completar el cuadrado y sus cinco pasos. Los errores de transformación se relacionaron con la aplicación incorrecta de operaciones, como no hacer que el coeficiente de x^2 fuera igual a 1 antes de continuar con el proceso. Finalmente, los errores de procedimiento se observaron en la ejecución inadecuada de los pasos, por ejemplo, al añadir el cuadrado de la mitad del coeficiente de x solo en un lado de la ecuación o al manipular fracciones de forma incorrecta.

En la Figura 1 se muestran ejemplos de errores de transformación ya que no podían interpretar correctamente los tres términos de la ecuación; siguieron los procedimientos

incorrectos para cambiar la ecuación. Donde (a) L8M (alumno 8, hombre y (b) L9F (alumno 9, mujer).

Figure 1 shows two examples of transformation errors. Panel (a) shows a student's work for the equation $2x^2 - 2x - 9 = 0$. The student incorrectly adds $(2x \cdot \frac{1}{2})^2 = 9 + (2x \cdot \frac{1}{2})^2$ to both sides, resulting in $2x^2 - 2x + 2 = 9 + 2$ and $2x^2 - 2x + 2 = 11x$. Panel (b) shows another student's work for the same equation. The student incorrectly adds $(2x \cdot \frac{1}{2})^2 = 9 + (2x \cdot \frac{1}{2})^2$ to both sides, resulting in $2x^2 - 2x + 2 = 9 + 2$ and $2x^2 - 2x + 2 = 9x$.

Figura 1. Ejemplos de tipo de error de transformación: (a) L8M y (b) L9F.

En la Figura 2 se observan errores de procesamiento de los estudiantes número 19 mujer (a) y 26 hombre (b).

Figure 2 shows two examples of processing errors. Panel (a) shows a student's work for the general quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$. The student incorrectly applies the quadratic formula, resulting in $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$. Panel (b) shows another student's work for the same equation. The student incorrectly applies the quadratic formula, resulting in $x = \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Figura 2. Ejemplos de tipo de error de procesamiento: (a) L19F y (b) L26M.

Lo mostrado da evidencia de la existencia de diversas dificultades que existen en la comprensión de las ecuaciones cuadráticas; Por ejemplo, los estudiantes aplicaron la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones; sin embargo, para muchos estudiantes esto se hace como una acción, es decir, como un procedimiento memorizado que no guarda relación con la idea básica de utilizar la raíz cuadrada; también existen carencias en la comprensión conceptual, conceptos erróneos algebraicos y procedimentales.

Las entrevistas mostraron que muchos estudiantes atribuían sus fallos a la rapidez con que los docentes avanzaban en el temario, lo cual dificultaba la asimilación conceptual. También, se identificó que la falta de conocimientos previos en contenidos básicos, como inversos aditivos y multiplicativos, influía en los errores detectados. El estudio concluye que los errores de comprensión tienden a desencadenar errores de transformación y de procedimiento, generando un efecto en cadena que compromete la resolución correcta. Por ello, el autor recomienda que los docentes no ignoren los errores de los estudiantes, sino que

los utilicen como oportunidades de aprendizaje, promoviendo explicaciones más detalladas y un ritmo de enseñanza que permita el dominio progresivo del tema.

En suma, este trabajo aporta evidencia empírica de que los estudiantes presentan dificultades conceptuales y procedimentales significativas al resolver ecuaciones cuadráticas por completar el cuadrado. Además, ofrece a docentes y formadores de profesores información valiosa para diseñar estrategias pedagógicas que atiendan estas dificultades desde un enfoque diagnóstico y reflexivo, favoreciendo un aprendizaje más sólido y duradero.

De manera complementaria, a continuación, se presenta el estudio de Tendere y Mutambara (2020) en donde se analiza los errores y concepciones erróneas que presentan los estudiantes de tercer curso de secundaria en Zimbabue al resolver ecuaciones cuadráticas. La investigación se centró en treinta alumnos y tres profesores de matemáticas, utilizando cuestionarios, pruebas escritas e entrevistas semiestructuradas. Los resultados evidenciaron que los estudiantes mostraron dificultades significativas en los procedimientos de factorización, en la aplicación de la fórmula general y en la interpretación de problemas enunciados en forma de historia matemática. Dichas dificultades se manifestaron en tres tipos de errores: conceptuales, procedimentales y técnicos.

En los ejercicios de factorización, una parte considerable de los alumnos confundió términos semejantes, aplicó de manera incorrecta los pasos o realizó factorizaciones incompletas. En la resolución mediante la fórmula general, algunos estudiantes fueron incapaces de recordar el procedimiento o sustituyeron de forma inadecuada los valores de los coeficientes, mientras que otros presentaron errores al operar con números negativos o al manipular expresiones algebraicas. Asimismo, en los problemas contextualizados, la dificultad principal se relacionó con la conversión de situaciones verbales a expresiones algebraicas correctas, lo que generó planteamientos inadecuados y respuestas erróneas.

A continuación, se muestran los resultados de la pregunta 1 (Figura 3) y de la pregunta 4 (Figura 4) de dos de los estudiantes que participaron en el estudio:

Pregunta 1. Resuelve la ecuación $2x^2 + 5x + 3 = 0$ usando el método de factorización:

$$\begin{aligned} 1) & \quad 2x^2 + 5x + 3 = 0 \\ & \quad = (2x^2 + 5x + 3) = 0 \\ & \quad = (2x^2 + 5x) + 3 = 0 \\ & \quad = (7x^2) + 3 = 0 \\ & \quad = (7x^2 + 3) = 0 \\ & \quad = 10x^2 \end{aligned}$$

Figura 3. Respuesta de un estudiante a la pregunta 1.

En la resolución presentada por el estudiante para la ecuación $2x^2 + 5x + 3 = 0$, se identificaron errores relacionados con la manipulación de términos algebraicos y el manejo de la factorización. El procedimiento inicial parte correctamente de la ecuación cuadrática original, pero se desvía debido a un tratamiento inadecuado de los términos. El procedimiento del paso donde el estudiante transforma la expresión $(2x^2 + 5x) + 3 = 0$ en $(7x^2) + 3 = 0$ refleja una concepción errónea sobre los términos semejantes, porque el estudiante suma el término cuadrático con un término lineal. Este error puede asociarse con la tendencia de algunos estudiantes a trasladar de manera mecánica la idea de sumar coeficientes sin atender a la forma algebraica de los términos. Este tipo de error evidencia que el estudiante concibe la factorización como una simple operación aritmética sobre coeficientes, sin considerar el grado de los términos.

Pregunta 4. Un patio de recreo rectangular mide $(x + 2)m$ por $(2x + 1)m$. Si el valor numérico del área de este parque infantil es $30m^2$, encuentre los posibles valores de x correctos con dos decimales.

(1) $(x+2)m$ by $(2x+1)$

$(x+2) 30 (2x+1)$

$x+2+60x+1$

$\frac{2x}{2} * \frac{60}{1} = 3,5,1$

$x = 35,1$

Figura 4. Respuesta de un estudiante a la pregunta 4.

El error del estudiante está en la traducción algebraica del área, mostrando un enfoque mecánico en la multiplicación de binomios y una desconexión con el significado geométrico del área. Las entrevistas con los profesores corroboraron que estas dificultades se explican en gran medida por la falta de dominio de conceptos previos, como operaciones con números enteros, factorización básica o manipulación algebraica. La investigación concluye que es necesario reforzar los conocimientos fundamentales, reexplicar los procedimientos cuando sea preciso, y utilizar materiales de práctica acompañados de soluciones para favorecer la retroalimentación.

En síntesis, la problemática en el uso de los métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas radica en que los estudiantes se enfrentan tanto a carencias conceptuales como a obstáculos procedimentales y técnicos que afectan su desempeño. Estas dificultades no solo limitan la comprensión del álgebra, sino que también impiden establecer conexiones con contextos más amplios de las matemáticas y con aplicaciones en la vida real. Reconocer esta situación implica replantear las estrategias de enseñanza, integrando prácticas que

fortalezcan los saberes previos y promuevan un aprendizaje más profundo y significativo de las ecuaciones cuadráticas.

Por otro lado, el estudio de Mistima y Zakaria (2010) analiza los errores más comunes de los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas, centrándose en tres métodos de resolución: factorización, completar el cuadrado y la fórmula general. La problemática que existe al intentar resolver una ecuación cuadrática utilizando la factorización en donde los estudiantes cometen errores de comprensión, transformación y en la habilidad de proceso. La mayor parte de los errores de comprensión suceden cuando los estudiantes no entienden los términos que utilizan. Existe dificultad en los estudiantes donde involucran operaciones para reemplazar el signo positivo y negativo, es decir, deficiencia en sus habilidades algorítmicas.

En cuanto a la segunda problemática abordada son los errores que existen al completar el cuadrado, donde los estudiantes cometen errores de transformaciones y proceso. Los estudiantes suelen presentar dificultades relacionadas con la transformación algebraica y la secuencia de pasos. Este tipo de error surge cuando no logran comprender con precisión lo que dicen los enunciados, lo que se traduce en respuestas que no corresponden a los conceptos ni a los métodos trabajados en clase. Los estudiantes, al no interpretar de manera clara y detallada las indicaciones, tienden a ejecutar procedimientos incompletos o incorrectos que los llevan a resultados erróneos.

Y por último la tercera problemática que existe al resolver las ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula general, los estudiantes presentan errores de habilidades de proceso como operaciones de suma, resta, multiplicación y división. También los estudiantes tienen problemas con el cambio del signo positivo y negativo provocando con ello errores en el uso de la fórmula.

La investigación se realizó con 30 estudiantes de tercer grado de secundaria en Jambi, Indonesia, utilizando una prueba diagnóstica de 16 ítems y entrevistas basadas en el modelo jerárquico de errores de Newman, el cual clasifica las fallas en cinco niveles: lectura, comprensión, transformación, habilidades de proceso, codificación, además de errores por descuido.

Los resultados muestran que los errores más frecuentes fueron los de transformación y den habilidades de proceso, principalmente en la aplicación de procedimientos algebraicos y en la manipulación de signos, fracciones y expansiones algebraicas. En factorización, los estudiantes confundieron términos como “raíces” y tuvieron dificultades en operaciones básicas. En completar el cuadrado, fallaron en interpretar lo que pedía el problema y en seguir los pasos del procedimiento. En la fórmula general, los errores se concentraron en el manejo aritmético y en la sustitución de signos positivos y negativos.

Los autores destacan que estas dificultades están vinculadas a vacíos en el dominio de conocimientos previos como el álgebra elemental y los números negativos, así como a una

enseñanza centrada en la repetición algorítmica más que en la comprensión conceptual. El estudio concluye que identificar los errores de manera sistemática permite a los docentes planificar estrategias de enseñanza más efectivas y con mayor impacto, además de ofrecerles herramientas para anticipar las dificultades de los estudiantes. En consecuencia, se sugiere que la práctica docente combine el desarrollo de habilidades algorítmicas con una sólida construcción conceptual, a fin de mejorar el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas y prevenir la repetición de errores comunes.

En definitiva, la problemática vinculada con los métodos de resolución de ecuaciones cuadráticas no radica únicamente en la dificultad técnica que representan, sino también en la manera en que suelen enseñarse: centrados en la aplicación mecánica de procedimientos, desvinculados de contextos significativos y poco orientados a la comprensión conceptual. Esta situación hace que los estudiantes recurran a memorizar pasos sin desarrollar un razonamiento matemático sólido. Es por ello la necesidad de plantear propuestas didácticas que promuevan un aprendizaje más reflexivo, donde los métodos se comprendan no solo como algoritmos, sino como herramientas útiles para interpretar y resolver problemas reales.

2.3 El uso de material manipulable en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas

En este apartado se abordan estrategias didácticas relacionadas con la incorporación de material manipulable en la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas. Dichos recursos se reconocen como una alternativa pedagógica que permite acercar al estudiante a la comprensión de este tipo de ecuaciones, tradicionalmente enseñadas a partir de fórmulas y procedimientos algorítmicos.

El uso de materiales manipulables en la enseñanza de las matemáticas ha sido objeto de atención en diversos enfoques pedagógicos, porque constituyen un recurso valioso para acercar a los estudiantes a conceptos abstractos de manera concreta y accesible. Estos recursos, generalmente diseñados con fines educativos, permiten que los estudiantes exploren, visualicen y experimenten con ideas matemáticas que de otra forma se perciben lejanas o demasiado formales. En este sentido, los manipulables actúan como un puente entre la acción y el pensamiento, promoviendo un aprendizaje activo que favorece la construcción de significados y la generación de discusiones que enriquecen el proceso formativo.

Diversos estudios destacan que los manipulables no son únicamente una herramienta auxiliar, sino que pueden desempeñar un papel central en la formación matemática cuando se integran en actividades didácticas planificadas. Su valor radica en que facilitan la transición de lo concreto a lo abstracto, al permitir que los estudiantes observen patrones, formulen conjeturas y contrasten procedimientos de manera tangible. En el caso de las ecuaciones cuadráticas, por ejemplo, es posible emplear representaciones geométricas o bloques algebraicos que ayuden a identificar relaciones entre factores y resultados, otorgando sentido a algoritmos que suelen aprenderse de memoria.

En este sentido, Picciotto (1990) ha enfatizado que los materiales manipulables, como los bloques algebraicos, ofrecen al estudiante la posibilidad de experimentar con los objetos matemáticos de una manera significativa. De acuerdo con este autor, la manipulación de representaciones concretas puede abrir el camino hacia la comprensión de expresiones y procedimientos simbólicos, siempre que se acompañe de una adecuada mediación docente y de actividades que fomenten la reflexión, como se puede observar en la Figura 5. Los manipulables no deben ser entendidos como recursos exclusivamente para niveles básicos, sino como instrumentos que enriquecen el aprendizaje de nociones algebraicas avanzadas, entre ellas las ecuaciones cuadráticas.

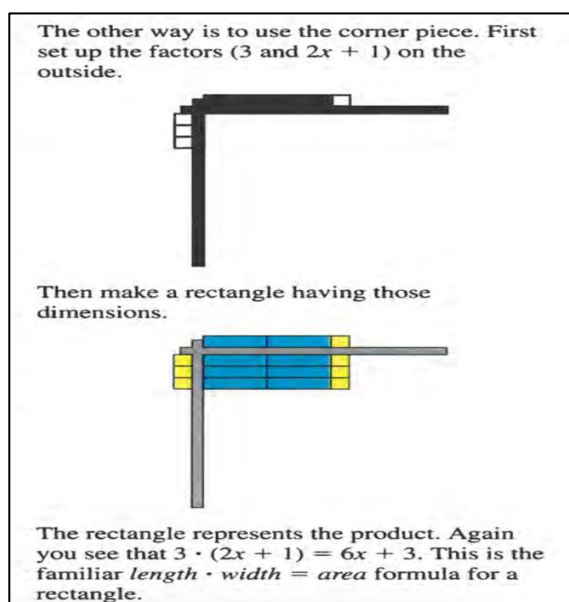


Figura 5. Representación gráfica de la multiplicación $3(2x + 1)$ con bloques algebraicos (Wah y Picciotto, 1994, p. 27).

El potencial de estos recursos reside también en que favorecen la participación activa de los estudiantes, colocándolos en el centro del proceso de aprendizaje. Mediante la manipulación, tienen la oportunidad de equivocarse, replantear estrategias y ensayar distintas formas de resolver un problema, lo que contribuye al desarrollo del pensamiento crítico y de la autonomía en su aprendizaje. Asimismo, las actividades con manipulables suelen generar espacios de trabajo colaborativo y diálogo, que permiten contrastar ideas y fortalecer la comprensión de los conceptos.

No obstante, es importante subrayar que el uso de materiales manipulables no garantiza por sí mismo un aprendizaje. Para que resulten efectivos, es necesaria una planeación didáctica adecuada que oriente las acciones de los estudiantes hacia la construcción de significados matemáticos. De este modo, los manipulables deben entenderse no como un fin en sí mismos, sino como un medio para lograr una comprensión más sólida y significativa de los contenidos.

2.4 Análisis del contenido matemático

Las ecuaciones cuadráticas constituyen uno de los contenidos fundamentales del álgebra elemental y tienen una presencia transversal en múltiples disciplinas, tanto dentro como fuera de las matemáticas. Una ecuación cuadrática es una expresión algebraica de la forma general $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ y $a, b, c \in R$. Su estudio no solo implica el dominio de técnicas algebraicas para su resolución, sino también la comprensión de sus significados funcionales, geométricos y aplicados (Stewart, 2013).

Carpinteyro (2012), indica que el grado de un polinomio en una sola variable se define por el mayor exponente de esa variable después de simplificar todos los términos semejantes en la expresión algebraica. Además, clasifica las ecuaciones cuadráticas en dos tipos: completas e incompletas, y dentro de las ecuaciones incompletas, las divide en ecuaciones cuadráticas puras y mixtas. Establece que existen dos tipos de ecuaciones cuadráticas: Ecuaciones cuadráticas completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, que tienen un término en x^2 , un término en x y un término independiente de x ; Ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$ que carecen del término en x o de la forma $ax^2 + bx = 0$ que carecen del término independiente c .

En este sentido, Alvarado (2013) menciona que la ecuación general consta de un término de segundo grado ax^2 , de un término de primer grado bx y de un término independiente c . Por tanto, el coeficiente del término de segundo grado es igual a a , el coeficiente del término de primer grado es igual a b y el término independiente es igual a c . Una ecuación de segundo grado se puede resolver por diferentes métodos como son:

- Factorización
- Completando el trinomio cuadrado perfecto
- Utilizando la fórmula general
- Gráfico

La *factorización* permite descomponer la expresión en dos binomios y encontrar las raíces como los valores que anulan cada factor. Esta técnica favorece la comprensión de las propiedades del producto nulo y la estructura de los polinomios. *Completar el trinomio cuadrado perfecto* es útil para visualizar la conversión de una forma general a una forma canónica, como $a(x - h)^2 + k$, lo cual es importante para el análisis gráfico. Donde h representa la abscisa del vértice de la parábola, es decir, la coordenada en el eje x donde la función alcanza su máximo o mínimo, dependiendo del signo de a , k corresponde a la ordenada del vértice, y define el desplazamiento vertical de la parábola respecto al eje x .

En términos de su naturaleza matemática, tanto h como k son números reales que dependen de los coeficientes a , b y c de la forma general $ax^2 + bx + c$. Se obtienen mediante las siguientes relaciones: $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}$

Desde una perspectiva gráfica h y k determinan la posición del vértice de la parábola (h, k) , permitiendo comprender cómo los parámetros de la ecuación afectan su desplazamiento y su forma. Así, completar el trinomio cuadrado perfecto no solo transforma la ecuación, sino que revela la estructura geométrica de la función cuadrática al mostrar explícitamente su vértice y su orientación.

La *fórmula general* o fórmula cuadrática, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ aunque frecuentemente enseñada de forma mecánica, encierra el concepto de discriminante y su relación con la existencia y tipo de soluciones (Haeussler y colaboradores, 2015, p. 38).

La expresión cuadrática también puede entenderse como una función $f(x) = ax^2 + bx + c$, cuya gráfica es una parábola. Los coeficientes a , b , c son números reales. Su naturaleza determina distintas características de la función y de su gráfica.

- a (coeficiente cuadrático): número real distinto de cero $a \neq 0$. Define la apertura y la concavidad de la parábola. Su valor absoluto influye en qué tan “abierta” o “estrecha” es la curva, y su signo indica si se abre hacia arriba ($a > 0$) o hacia abajo ($a < 0$).
- b (coeficiente lineal): número real que incide en la posición horizontal del vértice y en la simetría de la parábola. Afecta el desplazamiento del eje de simetría respecto al origen.
- c (término independiente): número real que representa la ordenada al origen, es decir, el punto donde la parábola corta al eje y .

Los tres coeficientes pertenecen al conjunto de los números reales, y su combinación determina la forma, orientación y posición de la parábola en el plano.

El *método gráfico* consiste en representar la ecuación cuadrática en el plano cartesiano mediante una función asociada $y = ax^2 + bx + c$. Al graficar esta expresión, se obtiene una parábola cuya forma depende del valor del coeficiente a . Comprender cómo los coeficientes afectan a la forma y posición de la parábola es importante para interpretar fenómenos en diversos contextos. El coeficiente a determina la concavidad (abierto hacia arriba si $a > 0$, hacia abajo si $a < 0$), mientras que b y c influyen en la ubicación del vértice y la intersección con el eje y . El eje de simetría de la parábola es $x = -\frac{b}{2a}$. Los valores de x que hacen que $y = 0$ corresponden a las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática., es decir, a los puntos donde la parábola intercepta al eje x . Si la parábola corta al eje x en dos puntos distintos, la ecuación tiene dos soluciones reales y diferentes; si toca el eje en un solo punto, existe una única solución real, y si no lo toca, las soluciones son complejas (Stewart, 2013).

El contenido matemático de las ecuaciones cuadráticas también puede abordar el análisis del discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, ya que este determina la naturaleza de las soluciones. Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas; si $\Delta = 0$, tiene una

solución real doble; y si $\Delta < 0$, las soluciones son complejas conjugadas. Esta clasificación no solo es algebraicamente útil, sino también significativa en términos gráficos y funcionales, pues se relaciona con el número de intersecciones de la parábola con el eje x.

Además, en cursos más avanzados, el contenido puede extenderse a la resolución de ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos, irracionales o incluso como parte de la factorización de polinomios de mayor grado, lo cual refuerza su centralidad dentro del álgebra. La enseñanza de las ecuaciones cuadráticas en contextos aplicados ayuda a los estudiantes a verlas no solo como ejercicios simbólicos, sino como herramientas para comprender y resolver problemas del mundo real. Esto promueve la modelización matemática, una competencia en la educación superior, especialmente en carreras donde se toman decisiones basadas en análisis cuantitativo.

Didácticamente, las ecuaciones cuadráticas ofrecen una oportunidad para introducir el razonamiento algebraico estructural, fomentar la resolución de problemas, y trabajar con materiales manipulables o representaciones visuales que fortalezcan la comprensión conceptual.

A continuación, se presenta un análisis de los materiales utilizados para la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas en el Espacio Educativo Matemáticas. En particular, se revisa un libro de texto sugerido institucionalmente, con el propósito de identificar los enfoques didácticos predominantes, los tipos de actividades que se proponen y la manera en que se aborda este contenido en relación con el perfil formativo de los estudiantes de la Licenciatura en Administración.

Los siguientes materiales, específicamente los libros de texto sugeridos en el Espacio Educativo Matemáticas constituyen recursos importantes para el desarrollo de los contenidos del curso. Estos materiales han sido seleccionados para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, proporcionando explicaciones teóricas, ejemplos aplicados y ejercicios que permiten reforzar los conceptos abordados en clase. A continuación, se presentan los libros de texto recomendados en el Espacio Educativo de Matemáticas de la Licenciatura en Administración (UNISON, 2025).

1. Arya, C., Lardner, W., e Ibarra, H. (2009). *Matemáticas aplicadas a administración y a la economía* (5ª edición). Pearson Educación de México.
2. Haeussler, E., Paul R. y Wood, R. (2015). *Matemáticas para administración y economía* (13ª edición). Pearson Educación de México.
3. Hoffmann L., Bradley G. y Rosen K. (2006). *Cálculo aplicado a la administración y economía* (8ª edición). McGraw-Hill.
4. Hoffmann L., et al. (2014). *Matemáticas aplicadas a la administración y los negocios* (11ª edición). McGraw-Hill
5. Larson R. y Hodgkins A. (2013). *College algebra with applications for business and life sciences* (2ª edición). Cengage.

6. Tan, S. (2002). *Matemáticas para administración y economía* (2ª edición). Thomson Learning.
7. Vidaurri H. (2017). *Matemáticas financieras* (6ª edición). Cengage.

A continuación, se describe el abordaje de las ecuaciones cuadráticas en los libros recomendados. En particular, en el libro de Arya y colaboradores (2009), el estudio de las ecuaciones cuadráticas se desarrolla en la sección 2-3, donde se presentan y resuelven seis ejemplos. Los dos primeros ejemplos abordan la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante factorización, mientras que los ejemplos 3, 4 y 5 emplean la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado. El método de completar el cuadrado se introduce únicamente en el ejemplo 6.

Además, en esta sección se incluyen ejercicios de práctica de naturaleza intramatemática. En total, se presentan 22 ejercicios que se solicita se resuelvan por el método de factorización, 12 mediante la fórmula general y 10 utilizando el método de completar el cuadrado. Finalmente, la sección concluye con 23 ejercicios en los que se solicita al estudiante determinar el método de resolución más adecuado.

En el siguiente ejemplo, extraído del libro de Arya y colaboradores (1990, p. 74), se muestra el primer caso de resolución de una ecuación cuadrática que aparece en dicha obra. Este ejemplo permite explorar tanto los aspectos conceptuales como procedimentales del álgebra, destacando la relación entre las habilidades operativas y la comprensión teórica.

Resolver la ecuación $3(x^2 + 1) = 5(1 - x)$

Solución No hay fracciones en esta ecuación. Eliminando los paréntesis, se encuentra que $3x^2 + 3 = 5 - 5x$

Después de que todos los términos de la derecha se pasan al primer miembro, la ecuación se transforma en

$$3x^2 + 3 - 5 + 5x = 0$$

o bien,

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Así, se tiene una ecuación cuadrática con coeficientes $a = 3$, $b = 5$ y $c = -2$. Al utilizar el método de factorización, se factoriza la expresión de la izquierda. En este ejemplo,

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$$

y así, la última ecuación toma la forma:

$$(3x - 1)(x + 2) = 0$$

El producto de los dos factores $(3x - 1)(x + 2)$ es cero. Ahora se utiliza la siguiente propiedad de los números reales:

Propiedad del factor cero:

Si A y B son números reales y $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$ o ambos son iguales a cero.

En consecuencia, $3x - 1 = 0$ o $x - 2 = 0$. En el primer caso, $3x = 1$, de donde $x = \frac{1}{3}$. En el segundo, $x + 2 = 0$ implica que $x = -2$. Así, $x = \frac{1}{3}$ o $x = -2$; estos números dan las dos raíces de la ecuación dada.

Se observa que el punto crucial del método de factorización consiste en escribir la expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$, que es la forma estándar de la ecuación como el producto de dos factores lineales. Dado que este producto está igualado a cero, se sigue que alguno de los factores debe ser cero.

En el ejemplo anterior se puede señalar que el concepto de ecuación cuadrática se aborda de forma mecánica, centrada principalmente en la aplicación de procedimientos algebraicos sin una reflexión profunda sobre su significado. El proceso sigue una secuencia que es la eliminación de paréntesis, reducción de términos y factorización, pero se limita a una ejecución algorítmica del método. No se problematiza el porqué de cada paso ni se promueve una interpretación conceptual del resultado. Por ejemplo, la factorización se presenta como un procedimiento técnico para hallar raíces, sin discutir cómo los valores obtenidos representan soluciones que anulan la ecuación o qué significado podrían tener en un contexto determinado. En este sentido, el trabajo con la ecuación cuadrática privilegia la manipulación simbólica sobre la comprensión conceptual del objeto matemático, lo cual puede conducir a que los estudiantes asocien la resolución de ecuaciones cuadráticas únicamente con la aplicación de reglas.

Por otro lado, el análisis del contenido matemático, según el enfoque de Cañadas y colaboradores (2018), se basa en la clasificación cognitiva de los contenidos, diferenciando entre el campo conceptual y el campo procedimental, siguiendo las ideas de Rico (1997). El campo conceptual se refiere al entendimiento profundo de los conceptos fundamentales, como la estructura de las ecuaciones cuadráticas y sus soluciones, mientras que el campo procedimental se enfoca en las habilidades y estrategias necesarias para resolver las ecuaciones, como la factorización y el uso de la fórmula cuadrática. Ambos enfoques son cruciales para desarrollar un aprendizaje completo y significativo de las ecuaciones cuadráticas.

Según la clasificación de Rico (1997), el campo conceptual, se refiere a la *sustancia* del conocimiento matemático: qué conceptos, hechos y estructuras componen un tema. Este campo se compone de: Hechos, que representan las unidades más pequeñas de información, como fórmulas, definiciones y teoremas; Conceptos, que son conjuntos de hechos interrelacionados y organizados, como la idea de *función cuadrática* o *sistema de ecuaciones* y *Estructuras conceptuales*, que consisten en sistemas de conceptos interrelacionados,

formando un marco teórico más amplio. En cuanto a el campo procedimental se compone de tres elementos interrelacionados: destrezas, razonamientos y estrategias. Las destrezas se ejecutan procesando hechos: se produce una manipulación de símbolos y transformaciones. Los razonamientos se ejecutan sobre conceptos y las estrategias se ejecutan sobre estructuras conceptuales.

En el contexto de la problemática identificada sobre la desconexión entre las ecuaciones cuadráticas y su aplicabilidad en los contextos económicos y administrativos, se ha optado por revisar el libro de texto *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía* (Arya y Lardner, 2009). El propósito de este análisis es identificar recursos y enfoques pedagógicos que faciliten la integración de las ecuaciones cuadráticas en situaciones profesionales reales, aprovechando tanto los materiales manipulativos como los ejemplos contextualizados, para promover una comprensión más profunda y aplicada de estos conceptos matemáticos. Dentro del diseño de actividades para este proyecto, la distinción entre el campo conceptual y el procedimental permitirá estructurar las actividades de manera que los estudiantes no solo ejecuten operaciones, sino que también comprendan los principios detrás de cada paso. Al centrar este proyecto en la resolución de ecuaciones cuadráticas, se busca que los estudiantes desarrollen no solo habilidades prácticas, sino también un enfoque analítico y estratégico hacia el álgebra, adaptado a sus necesidades y contexto dentro de los Programas Educativos de Ciencias Económicas y Administrativas. En la Tabla 1 se presenta la descripción de los campos conceptual y procedimental del primer ejemplo que está en el libro de Arya y Lardner (2009).

Tabla 1

Descripción de los campos conceptual y procedimental, ejemplo 1 (Arya y Lardner, 2009, p. 74).

Campo conceptual	Campo procedimental
<p>La propiedad distributiva es fundamental para expandir ambos lados de la ecuación, lo que permite reorganizar los términos para obtener la forma estándar de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$.</p> <p>Esta estructura no solo facilita la identificación de los coeficientes a, b y c, sino que también sirve como base para elegir el método de resolución adecuado, como la factorización o la fórmula cuadrática.</p> <p>Si el producto de dos factores es igual a cero, al menos uno de ellos debe ser cero.</p>	<p>La resolución de este problema implica una secuencia precisa de pasos técnicos.</p> <p>El primer paso es expandir y simplificar los términos en ambos lados de la ecuación: $3(x^2 + 1)$ se convierte en $3x^2 + 3$ y $5(1 - x)$ en $5 - 5x$.</p> <p>Estos términos se reorganizan para formar la ecuación $3x^2 + 5x - 2 = 0$, que es esencial para avanzar hacia una resolución sistemática.</p>
<p>La factorización, otro aspecto crucial del campo conceptual, implica reestructurar el trinomio</p>	<p>La factorización, que descompone el trinomio cuadrado en $(3x - 1)(x + 2)$, requiere habilidad para identificar números que</p>

<p>cuadrado $3x^2 + 5x - 2$ como el producto de dos binomios lineales: $(3x - 1)(x + 2)$.</p> <p>Este proceso no solo requiere una comprensión de cómo los coeficientes y términos interactúan, sino también una conexión con las raíces de la ecuación.</p> <p>La interpretación de las soluciones $x = \frac{1}{3}$ y $x = -2$ también se vincula al campo conceptual, ya que representan los valores en los que la función cuadrática corta al eje x, lo que establece un puente entre la forma algebraica y su representación gráfica y también entre lo que es una función y lo que es una ecuación.</p>	<p>satisfagan simultáneamente las condiciones del producto y la suma de los términos.</p> <p>Una vez factorizada, la ecuación se resuelve aplicando la propiedad del factor cero, lo que conduce a las soluciones $x = \frac{1}{3}$ y $x = -2$.</p> <p>Finalmente, se verifica la corrección de las soluciones sustituyéndolas en la ecuación original, asegurando su validez.</p>
--	--

Los problemas de la sección 2-3 de ecuaciones cuadráticas del libro de Arya y Lardner (2009) comparten varias similitudes:

1. **Estructura de la ecuación:** todos los problemas presentan ecuaciones cuadráticas en la forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$, lo que implica que los problemas se centran en resolver ecuaciones de segundo grado. Aunque los coeficientes a , b , y c pueden variar, la forma general de la ecuación se mantiene constante.
2. **Se enfocan en encontrar las raíces:** los problemas en su mayoría están diseñados para que el estudiante encuentre las soluciones o raíces de la ecuación cuadrática.
3. **Métodos de resolución:** la mayoría de los problemas de la sección requieren el uso de diferentes métodos (factorización, fórmula general o completando el trinomio cuadrado perfecto).
4. **Discriminante:** en muchos de los problemas, el discriminante $D = b^2 - 4ac$ juega un papel importante para determinar el número de soluciones, lo cual aparece repetidamente en los ejemplos. El discriminante ayuda a identificar si las soluciones son reales y distintas, reales e iguales, o complejas.

En la sección 2-4, el libro de Arya y Lardner (2009) introduce aplicaciones de ecuaciones cuadráticas en distintos contextos, como edades, dimensiones de objetos, renta de departamentos, decisiones de precios y finanzas. A diferencia de la sección anterior, que abordaba exclusivamente problemas intramatemáticos, en esta sección se presentan situaciones contextualizadas que conectan el uso de ecuaciones cuadráticas con problemas del mundo real. En total, se desarrollan seis ejemplos.

A continuación, se presentan siete ejercicios de aplicación de ecuaciones cuadráticas, tomados de la sección 2-4 del libro de Arya y Lardner (2009), junto con un análisis de los campos conceptual y procedimental de cada ejercicio, con el propósito de obtener información sobre la manera en que se abordan y en cuáles de estos campos se pone mayor énfasis.

2-4 Aplicaciones de ecuaciones cuadráticas

(Renta de apartamento) Steve es propietario de un edificio de apartamentos que tiene 60 departamentos. Él puede rentar todos los departamentos si cobra una renta de \$180 mensuales. A una renta mayor, algunos de los departamentos permanecerán vacíos; en promedio, por cada incremento de \$5 en la renta, 1 departamento quedará vacante sin posibilidad de rentarlo. Encuentre la renta que debe cobrar por cada departamento para obtener un ingreso total de \$11,475. En la Tabla 2 se muestra la descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas del libro de Arya y Lardner (2009, p. 82).

Tabla 2

Descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas (Arya y Lardner, 2009, p. 82).

Campo conceptual	Campo procedimental
<p>El ejercicio involucra el concepto de función cuadrática aplicada a una situación real, donde la ecuación que modela los ingresos totales es de segundo grado debido a la relación entre el número de departamentos ocupados y la renta mensual.</p> <p>Dentro del campo conceptual, se abordan aspectos como el modelado algebraico, al establecer la relación entre el número de departamentos rentados y el precio de renta; el concepto de ingresos, que se define como el producto entre el número de departamentos ocupados y la renta mensual; y la estructura de una ecuación cuadrática, expresada en la forma $ax^2 + bx + c = 0$</p> <p>También, se considera la interpretación de las raíces de la ecuación en términos del contexto del problema, analizando la viabilidad de los valores obtenidos en la realidad.</p>	<p>Plantear la ecuación de ingreso total: $I(x) = (60 - x)(180 + 5x)$.</p> <p>Definir las variables: sea x el número de incrementos de \$5 en la renta. La renta será $180 + 5x$ y los departamentos rentados serán $60 - x$.</p> <p>Calcular $p = 180 + 5x$ para obtener la renta que satisface la condición dada.</p> <p>Resolver la ecuación $(60 - x)(180 + 5x) = 11,475$ para encontrar x.</p>
<p>Expresión cuadrática: al expandir la ecuación de ingreso, se obtiene una ecuación cuadrática.</p>	<p>La resolución de esta ecuación se realiza mediante factorización, o mediante la aplicación de la fórmula cuadrática. Finalmente, se interpretan las soluciones dentro del contexto del problema para determinar la renta que cumple con la condición del ingreso total requerido.</p>

(Decisión de precio) La cámara de comercio del huevo de Columbia Británica sabe de experiencias pasadas que si cobra p dólares por docena de huevos, el número de vendidos por semana será x millones de docenas, donde $p = 2 - x$. Entonces, su ingreso semanal total será $R = xp = x(2 - x)$ millones de dólares. El costo para la industria de producir x millones de docenas de huevos por semana está dado por $C = 0.25 + 0.5x$ millones de dólares. ¿A qué precio debe vender los huevos la industria para asegurar una utilidad de \$0.25 millones? En la Tabla 3 se presenta la descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de decisión de precio, que se encuentra en el libro de Arya y Lardner (2009, p. 83).

Tabla 3

Descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas (Arya y Lardner, 2009, p. 83).

Campo conceptual	Campo procedimental
Función de ingreso: se define el ingreso total semanal como $R(x) = x(2 - x)$.	Sustituir la ecuación dada para el ingreso y expandir la expresión algebraica.
Función de costo: se define el costo total de producción como $C(x) = 0.25 + 0.5x$.	Sustituir los valores y operar algebraicamente para despejar incógnitas.
Función de utilidad: la utilidad se obtiene como $U(x) = R(x) - C(x)$.	Plantear la ecuación de utilidad $U(x) = R(x) - C(x)$, y sustituir los valores dados.
Condición de utilidad deseada: se desea que $U(x) = 0.25$ millones.	Resolver la ecuación $x(2 - x) - (0.25 + 0.5x) = 0.25$ para encontrar x .
Se trabaja con el modelado algebraico, donde la función de ingreso total se define como el producto del número de docenas de huevos vendidas y el precio por docena, lo que da lugar a una expresión cuadrática. También, se introduce el concepto de utilidad, que se obtiene al restar el costo total de producción al ingreso total. La estructura cuadrática de la ecuación permite su resolución mediante factorización o la fórmula cuadrática, vinculando el análisis algebraico con la interpretación económica.	Se resuelve la ecuación cuadrática usando la fórmula general o factorización, y se identifican los valores viables en el contexto del problema. Finalmente, el valor de x obtenido se calcula el precio p usando la ecuación $p = 2 - x$, asegurando así la utilidad deseada.

(Inversión) Una suma de \$400 se invirtió a una tasa de interés $R\%$ anual. Al final del año, el capital y el interés se dejan que generen interés durante el segundo año. Determine R si el valor total de la inversión al final del segundo año es \$484. En la Tabla 4 se muestra la descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de inversión, que está en el libro de Arya y Lardner (2009, p. 84).

Tabla 4

Descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas (Arya y Lardner, 2009, p. 84).

Campo conceptual	Campo procedimental
<p>Se basa en el cálculo del interés compuesto, el cual implica que tanto el capital inicial como los intereses generados en el primer año producen nuevos intereses en el segundo año.</p> <p>La estructura de esta ecuación permite resolver el problema algebraicamente para encontrar la tasa de interés R, utilizando propiedades de ecuaciones exponenciales y raíces cuadradas.</p> <p>Interés compuesto: la inversión crece año con año, sumando los intereses generados al capital inicial.</p>	<p>Usar la fórmula del interés compuesto: $A = P(1 + r)t$, donde A es el monto final, P es el capital inicial, r es la tasa de interés decimal, y t es el número de años.</p>
<p>Definición de variables: se establece que el capital inicial es 400 y el tiempo es 2 años.</p>	<p>Plantear la ecuación con los valores dados: $484 = 400(1 + R/100)^2$.</p>
<p>Condición del problema: se busca la tasa de interés R que permite que la inversión crezca a \$484 en 2 años.</p>	<p>Resolver la ecuación</p> $(1 + R/100)^2 = \frac{484}{400}$ <p>para encontrar R.</p>
<p>Conversión a porcentaje: la tasa de interés se expresa como un porcentaje.</p>	<p>Multiplicar el valor de r por 100 para obtener R.</p>

(Problema de costo) Un vendedor vendió un reloj en \$75. Su porcentaje de ganancia fue igual al precio de costo en dólares. Determine el precio de costo del reloj. En la Tabla 5 se presenta la descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de costo, que está en el libro de Arya y Lardner (2009, p. 87).

Tabla 5

Descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas (Arya y Lardner, 2009, p. 87).

Campo conceptual	Campo procedimental
<p>Este ejercicio involucra el concepto de porcentaje de ganancia, donde la ganancia se expresa como un porcentaje del precio de costo.</p> <p>Se debe establecer una ecuación algebraica que relacione el precio de costo con la ganancia y el precio de venta.</p>	<p>Definir x como el precio de costo del reloj. La ganancia también es $x\%$, lo que significa que la ganancia en dólares es $\frac{x}{100} \cdot x$.</p>

El problema también implica la interpretación del porcentaje como una cantidad absoluta y su relación con el precio de costo, lo que da lugar a una ecuación cuadrática. Definición de variables: se establece que el precio de costo es x dólares y la ganancia es un porcentaje de x .	
Condición del problema: el precio de venta es la suma del precio de costo y la ganancia.	<i>Plantear la ecuación:</i> $x + \frac{x^2}{100} = 75$
Ecuación cuadrática: la ecuación obtenida es cuadrática en términos de x .	Reescribir la ecuación en forma estándar: $x^2 + 100x - 7500 = 0$. Resolución de la ecuación: se puede resolver por factorización o usando la fórmula general. Evaluar las soluciones obtenidas y verificar cuál es válida en el contexto del problema.

(Decisión de producción y de precio) Cada semana, una compañía puede vender x unidades de su producto a un precio de p dólares cada uno, en donde $p = 600 - 5x$. A la compañía le cuesta $(8000 + 75x)$ dólares producir x unidades.

- a) ¿Cuántas unidades debe vender la compañía cada semana para generar un ingreso de \$17,500?
- b) ¿Qué precio por unidad debe cobrar la compañía para obtener un ingreso semanal de \$18,000?
- c) ¿Cuántas unidades debe producir y vender cada semana para obtener una utilidad semanal de \$5500?
- d) ¿A qué precio por unidad la compañía generará una utilidad semanal de \$5750?

En la Tabla 6 presenta la descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de decisión de producción y de precio, que está en el libro de Arya y Lardner (2009, p. 87).

Tabla 6

Descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas (Arya y Lardner, 2009, p. 87).

Campo conceptual	Campo procedimental
Este problema se basa en el modelado algebraico y el análisis de funciones cuadráticas en el contexto de ingresos, costos y utilidades.	Plantear la ecuación de ingreso: $R = x(600 - 5x)$.

<p>En el campo conceptual, se trabaja con la función de ingreso total, que es el producto del número de unidades vendidas y el precio por unidad.</p> <p>También se analiza la función de costos, que incluye un costo fijo y un costo variable por unidad producida. La utilidad se obtiene como la diferencia entre el ingreso total y el costo total.</p> <p>La resolución del problema involucra la manipulación de ecuaciones cuadráticas y lineales para determinar valores específicos de cantidad vendida y precio unitario.</p> <p>Función de ingreso: se define como $R = x \cdot p$, donde $p = 600 - 5x$.</p>	
<p>Función de costo: el costo total de producción está dado por $C = 8000 + 75x$.</p>	<p>Usar esta función para calcular la utilidad como $U = R - C$.</p>
<p>Condición de ingreso deseado: se busca el valor de x que hace que el ingreso sea 17,500 o 18,000.</p>	<p>Resolver $x(600 - 5x) = 17,500$ y $x(600 - 5x) = 18,000$ para encontrar x y luego p.</p>
<p>Función de utilidad: la utilidad se obtiene restando el costo del ingreso total, es decir, $U = x(600 - 5x) - (8000 + 75x)$.</p>	<p>Plantear la ecuación de utilidad y resolver para x cuando $U = 5500$ y para p cuando $U = 5750$.</p>
	<p>Desarrollar las expresiones cuadráticas y resolver usando factorización o la fórmula general.</p>

(Política de precios) Una Cámara Estatal del Vino compra whisky a \$2 una botella y la vende a p dólares por botella. El volumen de ventas x (en cientos de miles de botellas por semana) está dado por $x = 24 - 2p$, cuando el precio es p . ¿Qué valor de p da un ingreso total de \$7 millones por semana? ¿Qué valor de p da, a la Cámara del Vino, una utilidad de \$4.8 millones semanales? En la Tabla 7 se presenta la descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de política de precios, que está en el libro de Arya y Lardner (2009, p. 87).

Tabla 7

Descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas (Arya y Lardner, 2009, p. 87).

Campo conceptual	Campo procedimental
-------------------------	----------------------------

<p>Resolver este problema requiere, entre otros aspectos, establecer la relación entre el precio de venta, la cantidad demandada y el ingreso total. La expresión de la demanda en función del precio muestra cómo el precio afecta la cantidad vendida, estableciendo una relación lineal negativa.</p> <p>El ingreso total se obtiene como el producto de la cantidad vendida y el precio, lo que genera una función cuadrática cuya resolución permite determinar los valores óptimos de precio.</p> <p>También, el concepto de utilidad se introduce como la diferencia entre el ingreso total y el costo total de producción. El costo de producción depende de la cantidad vendida, lo que implica un modelo lineal de costos.</p> <p>Al establecer una ecuación para la utilidad, se obtiene nuevamente una ecuación cuadrática, cuya solución determina si es posible alcanzar la utilidad deseada bajo las condiciones del problema.</p> <p>La solución requiere la manipulación de ecuaciones cuadráticas y la interpretación de sus raíces en un contexto económico.</p> <p>Función de ingreso: el ingreso total se obtiene multiplicando el precio de venta por la cantidad de botellas vendidas.</p>	<p>Usar la fórmula de ingreso: $R = p \cdot x$ Dado que $x = 24 - 2p$, sustituimos para obtener $R = p(24 - 2p)$.</p>
<p>Condición de ingreso total: se busca el precio p que genera un ingreso de \$7,000,000.</p>	<p>Plantear la ecuación: $p(24 - 2p) = 70$ (en cientos de miles). Resolver la ecuación cuadrática.</p>
<p>Condición del problema: se busca la tasa de interés R que permite que la inversión crezca a \$484 en 2 años.</p>	<p>La utilidad es $U = R - C$. Como el costo por botella es \$2, el costo total es $C = 2x = 2(24 - 2p)$, entonces $U = p(24 - 2p) - 2(24 - 2p)$.</p>
<p>Condición de utilidad total: se busca el precio p que genera una utilidad de \$4,800,000.</p>	<p>Plantear la ecuación: $p(24 - 2p) - 2(24 - 2p) = 48$ (en cientos de miles). Resolver la ecuación cuadrática.</p>

(Punto de equilibrio del mercado) La demanda para los bienes producidos por una industria están dados por la ecuación $p^2 + x^2 = 169$ en donde p es el precio y x es la cantidad demandada. La oferta está dada por $p = x + 7$. ¿Cuáles son el precio y la cantidad del punto de equilibrio? En la Tabla 8 se presenta la descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de punto de equilibrio del mercado, que está en el libro de Arya y Lardner (2009, p. 164).

Tabla 8

Descripción de los campos conceptual y procedimental de un problema de aplicación de ecuaciones cuadráticas (Arya y Lardner, 2009, p. 164).

Campo conceptual	Campo procedimental
<p>Este problema se basa en el análisis de equilibrio de mercado, donde el precio y la cantidad de un bien se determinan en el punto en que la oferta y la demanda se igualan.</p> <p>La ecuación de la demanda y la de la oferta son funciones del precio p y la cantidad x.</p> <p>El punto de equilibrio se encuentra igualando estas dos ecuaciones, ya que en este punto la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida.</p>	<p>El procedimiento consiste en sustituir una ecuación en la otra para encontrar el valor de x (cantidad) y p (precio) en el punto de equilibrio.</p> <p>El precio y la cantidad del punto de equilibrio son los valores positivos de p y x que satisfacen a la vez las ecuaciones de la oferta y la demanda.</p> $p^2 + x^2 = 169 \quad (5)$ $p = x + 7 \quad (6)$ <p>Sustituyendo el valor de p de la ecuación (6) en la ecuación (5) y simplificando, resulta:</p> $(x + 7)^2 + x^2 = 169$ $2x^2 + 14x + 49 = 169$ $x^2 + 7x - 60 = 0$ <p>Factorizando, encontramos que</p> $(x + 12)(x - 5) = 0$ <p>lo cual da $x = -12$ o 5. El valor negativo de x es inadmisibles, de modo que $x = 5$.</p> <p>Sustituyendo $x = 5$ en la ecuación (6),</p> $p = 5 + 7 = 12$ <p>En consecuencia, el precio de equilibrio es 12 y la cantidad de equilibrio es 5.</p>

En esta sección 2-4 Aplicaciones de ecuaciones cuadráticas del libro de Arya y Lardner (2009), se presentan problemas prácticos cuya solución requiere de la modelización de situaciones que, partiendo del contexto real, lleguen a establecer ecuaciones cuadráticas. Al analizar estos problemas, se observa la repetición de ciertos procedimientos y conceptos importantes:

1. Planteamiento de la ecuación cuadrática: cada problema inicia con la traducción de una situación práctica a una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Este paso es esencial para modelar matemáticamente las situaciones.
2. Identificación de variables y parámetros: se definen las variables desconocidas y se establecen las relaciones entre ellas según el contexto del problema. Esta identificación facilita la formulación correcta de la ecuación.
3. Resolución de la ecuación: una vez planteada la ecuación cuadrática, se aplican métodos como la factorización, la fórmula general o completar el trinomio cuadrado perfecto para encontrar las soluciones.
4. Interpretación de las soluciones: después de obtener las raíces de la ecuación, se analizan en el contexto del problema original. Se determina cuáles soluciones son viables y tienen sentido práctico, descartando aquellas que no se ajustan a la realidad del contexto.
5. Interpretación de las soluciones: después de obtener las raíces de la ecuación, se analizan en el contexto del problema original. Se determina cuáles soluciones son viables y tienen sentido práctico, descartando aquellas que no se ajustan a la realidad del escenario planteado.
6. Verificación de resultados: se sustituyen las soluciones en la ecuación original para confirmar su validez y asegurarse de que cumplen con las condiciones establecidas en el problema.

Estos procedimientos y conceptos se repiten a lo largo de los ejemplos y ejercicios de la sección.

Cabe señalar que entre las características más importantes de cómo aparecen las ecuaciones cuadráticas en el libro de Arya y Lardner (2009) se puede señalar que se mantiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$ como punto de partida en la mayoría de los ejemplos; sin embargo, puede restringir la comprensión si no se vincula con otras formas de representación o con significados geométricos y funcionales. También las secciones priorizan el dominio técnico de los métodos de resolución (factorización, fórmula general y completar el cuadrado) en donde se observa que la resolución de ecuaciones se muestra como una rutina mecánica en lugar de un proceso de razonamiento. Se aprecia que en la sección 2.4 existe un intento por conectar las ecuaciones cuadráticas con situaciones reales; sin embargo, en estas aplicaciones rara vez participa el estudiante en la toma de decisiones sobre cómo formular el modelo o cómo interpretar críticamente los resultados.

Aunque existe una intención de avanzar desde la técnica hacia la aplicación, el tránsito entre ambas secciones 2-3 y 2-4, no siempre se acompaña de una reflexión profunda sobre el significado matemático de las ecuaciones cuadráticas. En esta organización se observa un enfoque más centrado en la “aplicación del método”. Sería deseable que los ejemplos no solo guiaran al estudiante a encontrar las raíces de la ecuación, sino también a discutir qué representa cada parámetro, a reflexionar sobre la naturaleza de las soluciones, a

analizar cómo cambia la forma de la gráfica según los valores de a , b y c , y a cuestionar por qué el modelo cuadrático resulta adecuado o no para describir una situación real.

3. Estado del Arte

A continuación, se presentan algunas investigaciones vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas. La revisión de estudios permite identificar los enfoques y metodologías que han sido empleados para abordar esta temática con énfasis en el papel de los materiales manipulables como recursos para favorecer la construcción del conocimiento matemático. Con esto se pretende mostrar un panorama de los avances y aportes en el campo, así como reconocer vacíos que justifican la pertinencia del proyecto de intervención didáctica orientada a estudiantes de los programas educativos de las Ciencias Económicas y Administrativas.

3.1 Revisión y clasificación de investigaciones sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas

Diversas investigaciones han mostrado que los estudiantes suelen enfrentar dificultades en la resolución de ecuaciones cuadráticas; van desde errores conceptuales relacionados con la comprensión de la estructura algebraica de la ecuación, hasta errores con el uso de los métodos de resolución más comunes. Analizar estas dificultades resulta importante, porque permite comprender los obstáculos que limitan el aprendizaje y también identificar los factores que los originan. De esta manera, el estudio de dichas dificultades se convierte en un punto de partida para transformar la práctica docente y favorecer experiencias de aprendizaje más significativas.

En este sentido, el trabajo de Didiş (2023) presenta una revisión temática y descriptiva de las investigaciones realizadas entre 2000 y 2021 sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en el campo de la educación matemática. El propósito del estudio fue identificar las tendencias generales, los enfoques metodológicos y las perspectivas de investigación que se han desarrollado en torno a este tema, considerado fundamental en el currículo de secundaria, pero también complejo tanto en el plano conceptual como en el procedimental.

La autora analizó un total de 56 estudios (45 artículos y 11 tesis), clasificándolos en tres categorías principales: investigaciones empíricas, teóricas y de análisis de libros de texto. Los hallazgos muestran que la mayoría de los trabajos fueron empíricos, realizados principalmente con estudiantes de secundaria, quienes enfrentan dificultades persistentes en la resolución de ecuaciones cuadráticas, especialmente en procesos de factorización y en la comprensión conceptual del método de completar el cuadrado. Entre los errores más frecuentes se encuentran fallos de cálculo, simplificación, transformación, raíces omitidas y concepciones erróneas, lo cual confirma la necesidad de replantear las prácticas de enseñanza.

En cuanto a los enfoques didácticos, se destaca la predominancia de métodos cualitativos, con entrevistas y pruebas abiertas como principales herramientas de recolección de datos. Algunos estudios integraron la tecnología, como el uso de GeoGebra o aplicaciones basadas en mosaicos algebraicos, mientras que otros propusieron actividades de inspiración histórica, retomando métodos babilónicos, griegos o las demostraciones geométricas de Al-Juarizmí, con el fin de ofrecer alternativas más significativas y motivadoras para los estudiantes.

Finalmente, la investigación concluye que, aunque se observa un aumento en el número de publicaciones en los últimos años, los estudios sobre ecuaciones cuadráticas siguen siendo escasos y de alcance restringido. Se requiere profundizar en investigaciones que articulen la enseñanza con las dificultades reales de los estudiantes, y que promuevan el uso de enfoques alternativos como son históricos, manipulativos y tecnológicos que favorezcan la comprensión conceptual, más allá de la aplicación mecánica de algoritmos. Este panorama constituye una guía tanto para investigadores como para profesores de matemáticas interesados en enriquecer sus prácticas y diseñar entornos de aprendizaje más efectivos.

La investigación de Didiş constituye un aporte importante para el diseño del proyecto de intervención didáctica en torno a las ecuaciones cuadráticas, ya que ofrece un panorama amplio de las tendencias de investigación y de las dificultades más recurrentes en su enseñanza y aprendizaje. Entre sus aportes principales, se encuentra la identificación de errores conceptuales y procedimentales frecuentes en los estudiantes, lo que permite anticipar obstáculos en el diseño de las actividades. El estudio resalta la escasa atención que se ha dado al papel de los docentes en formación y en servicio, lo cual refuerza la pertinencia de una propuesta que incorpore enfoques alternativos de enseñanza, tales como el uso de materiales manipulables, recursos tecnológicos y perspectivas históricas.

Por otro lado, O'Connor y Norton (2022) realizaron un estudio donde se muestran las dificultades que presentan los estudiantes al aprender y resolver ecuaciones cuadráticas, y reflexionan sobre cómo la estructura e implementación del currículo de matemáticas en Australia influyen en estos resultados. El tema es particularmente relevante porque el éxito en el dominio de las cuadráticas constituye un prerrequisito fundamental para avanzar hacia contenidos más abstractos, como el cálculo.

La investigación se desarrolló en una escuela australiana con una muestra de 25 estudiantes del onceavo año escolar, en el estudio se aplicaron pruebas escritas y entrevistas diagnósticas con el objetivo de identificar patrones de error y analizar la comprensión conceptual y procedimental de los estudiantes. La categorización del tipo de errores se describe en la Figura 6.

La metodología fue exploratoria y se centró en el análisis cualitativo de los errores, lo que permitió categorizar las dificultades en función de su naturaleza. Los resultados revelaron que la mayoría de los estudiantes presentaban problemas tanto en aspectos

conceptuales como procedimentales. En particular, muchos no comprendían la ley del factor nulo ni la naturaleza de las soluciones cuadráticas, mostrando tendencia a tratarlas como si fueran ecuaciones lineales; incluso aquellos que lograban factorizar con éxito, en ocasiones no sabían aplicar adecuadamente la ley para obtener las soluciones. También, se evidenció falta de fluidez en las convenciones algebraicas básicas (manejo de signos, operaciones con enteros, reordenamientos), así como gran dificultad cuando la ecuación no tenía un coeficiente principal igual a 1. Al realizar las entrevistas se confirmó que los estudiantes no relacionaban las soluciones de la ecuación con las intersecciones en el eje x de la gráfica.

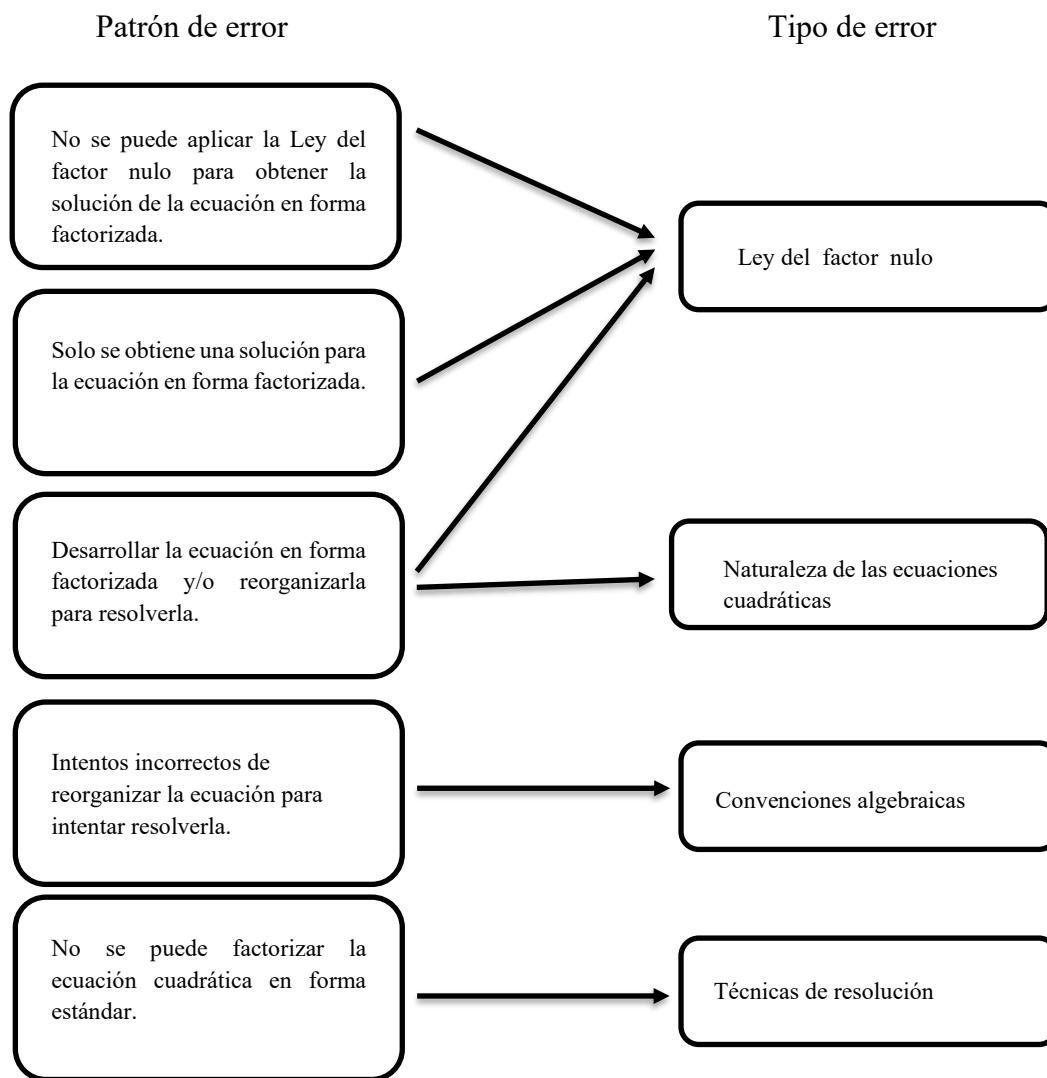


Figura 6. Categorización de errores (Traducido de O'Connor y Norton, 2022, p. 169).

Desde la perspectiva curricular, los autores señalan que estas dificultades no son atribuibles únicamente a los estudiantes, sino también a la manera en que el currículo australiano estructura el aprendizaje de las cuadráticas. En el décimo año escolar, el tema suele abordarse de manera muy concentrada, dedicándose apenas unas horas, lo que no permite un desarrollo profundo ni revisiones suficientes.

Ecuaciones de la forma $(x - r)(x - s) = 0$ La solución a una ecuación de la forma $(x - r)(x - s) = 0$ se deriva de la ley del factor nulo que establece que, si la ecuación anterior es verdadera, $x - r = 0$ o $x - s = 0$ y por lo tanto, $x = r$ o $x = s$. Al resolver el cuadrático factorizado, un tipo de error cometido por los estudiantes fue intentar expandir la ecuación para resolverla. Esto sugiere que los estudiantes no identificaron la pregunta como cuadrática o no entendieron cómo aplicar la ley del factor nulo en este escenario. Ambos errores demuestran esencialmente una falta de comprensión conceptual con respecto a las cuadráticas y sus formas, así como la ley del factor nulo, ya que no hay lógica en la expansión de un cuadrático factorizado para resolver. Evidencia de estos errores se presenta en la Figura 7.

Solve for x : $(x - 3)(x - 5) = 0$

$(x - 3)(x - 5)$

$x^2 - 3x - 5x + 15 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x^2 - 8x = -15$

The student correctly expands the equation despite it already being in factorised form. This procedure is not necessary.

The student correctly combines like terms, demonstrating procedural fluency.

The student correctly moves +15 to the other side of the equation but does not know how to proceed. This is procedurally correct, but the earlier error now makes progress impossible.

Summary: This student did not identify the given equation as a quadratic and, as a result, did not apply the null factor law and has attempted to solve the equation as if it were linear. The solution above indicates that the student is fluent with algebraic manipulation in this instance but did not know how to solve a quadratic in factorised form. The data suggests that this may be a result of an overgeneralisation of linear solving techniques.

Figura 7. Ejemplo de un estudiante demostrando que no identificó la pregunta como una ecuación cuadrática y no usó métodos apropiados para resolverla.

El artículo concluye que el enfoque curricular vigente en Australia no favorece la consolidación conceptual ni la fluidez procedimental necesarias para que los estudiantes logren un dominio sólido del tema. Los autores recomiendan incorporar principios de aprendizaje, con diagnósticos previos, enseñanza que priorice la comprensión conceptual y mayores tiempos de revisión.

Cabe señalar que este estudio aporta evidencia empírica de los errores más comunes en la resolución de cuadráticas y plantea la necesidad de replantear los tiempos y métodos de enseñanza. El estudio resulta de importancia para este proyecto de intervención didáctica, puesto que aporta evidencia sobre las dificultades persistentes que enfrentan los estudiantes al aprender ecuaciones cuadráticas y cómo estas se relacionan con la estructura y el enfoque del currículo. Su análisis permite reconocer que los problemas de aprendizaje no se limitan solo al dominio técnico del procedimiento, sino que también están vinculados con la manera en que los contenidos se organizan y presentan en el aula. De este modo, el trabajo constituye un referente importante para fundamentar la necesidad de diseñar propuestas didácticas que favorezcan la comprensión conceptual y la articulación entre expresiones numéricas, algebraicas y gráficas.

Otro aspecto relevante es que una de las principales dificultades al trabajar con ecuaciones cuadráticas radica en la ejecución de operaciones algebraicas y aritméticas, lo que representa una conexión de tipo procedimental. Cuando estas operaciones se realizan de

forma incorrecta, no solo se impide obtener un resultado correcto, sino que también se obstaculiza la comprensión conceptual de la ecuación; como lo manifiestan López y colaboradores (2016) en su investigación, señalan que la comprensión de las ecuaciones cuadráticas con una incógnita resulta esencial para el aprendizaje posterior en Matemáticas y en diversas Ciencias. Sin embargo, distintas investigaciones han mostrado que tanto estudiantes de secundaria como de nivel universitario suelen presentar dificultades para entender estas ecuaciones y las reglas empleada en su resolución.

En el estudio se analiza la comprensión de las ecuaciones cuadráticas en estudiantes universitarios a través de la teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), proponiendo una descomposición genética que identifica las construcciones mentales necesarias para resolverlas. Se destaca que, aunque los estudiantes suelen conocer procedimientos como la factorización o la fórmula cuadrática, tienden a aplicarlos de manera mecánica, sin relacionarlos con significados conceptuales ni con otras representaciones.

La investigación se desarrolló en dos fases: entrevistas a ocho estudiantes de primer año que recién habían cursado precálculo, y un análisis de trabajos escritos de 121 estudiantes de Ciencias e Ingeniería en un curso de cálculo multivariable. En ambos grupos se evidenciaron dificultades persistentes. Los estudiantes mostraron problemas para interiorizar propiedades básicas de la raíz cuadrada, lo que impactó en su comprensión del método de completar el cuadrado. Otra limitación encontrada fue la falta de flexibilidad: los estudiantes privilegiaron la factorización o la fórmula cuadrática, evitando métodos alternativos como el gráfico o el de completar el cuadrado, incluso cuando resultaban más convenientes. Además, manifestaron confusiones sobre la naturaleza y el número de soluciones posibles, así como inseguridad frente a raíces complejas. El estudio concluye que es necesario diseñar experiencias de enseñanza que promuevan la interiorización y coordinación de los distintos métodos de solución, fomentando la reflexión sobre cuándo y por qué utilizarlos. En particular, se recomienda atender a las propiedades de la raíz cuadrada y su relación con el método de completar el cuadrado, así como vincular los procedimientos algebraicos con interpretaciones gráficas. De este modo, los estudiantes podrían avanzar hacia una comprensión más flexible y significativa de las ecuaciones cuadráticas, trascendiendo la aplicación mecánica de algoritmos.

En una de las preguntas planteadas a los estudiantes fue: “encuentra todas las soluciones de la siguiente ecuación: $(81 - x)^2 = 8$ ”. Una de las respuestas dadas por un estudiante se presenta en la Figura 8.

$$\begin{aligned}
 (81-x)^2 &= 81 \\
 \sqrt{(81-x)^2} &= \sqrt{81} \\
 81-x &= 9 \\
 -x &= 9-81 \\
 -x &= -72 \\
 x &= 72
 \end{aligned}$$

Figura 8. Respuesta de un estudiante a la pregunta 1a.

El estudiante parte correctamente de la ecuación $(81 - x)^2 = 81$, pero al aplicar la raíz cuadrada solo considera una solución, $\sqrt{81} = 9$, omitiendo la raíz negativa. Esto lo lleva a un único resultado $x = 72$, sin reconocer que también existe la solución $x = 90$. La dificultad principal radica en el manejo incompleto de la operación con raíces cuadradas.

En este mismo sentido, se muestra en la Figura 9 la respuesta al problema 5 que dice “encuentra todas las soluciones de la siguiente ecuación completando el cuadrado y usando la raíz cuadrada: $x^4 + 2x^2 - 48 = 0$ ”

$$\begin{aligned}
 5) \quad x^4 + 2x^2 - 48 &= 0 & x^2 &= w \\
 w^2 + 2w - 48 &= 0 \\
 w^2 + 2w + 1 &= 48 + 1 \\
 w^2 + 2w + 1 &= 49
 \end{aligned}$$

Figura 9.. Respuesta de una estudiante al problema 5.

El estudiante inicia bien el cambio de variable $x^2 = w$, transformando la ecuación en $w^2 + 2w + 1 = 48$. Sin embargo, comete un error al manipular la ecuación: en lugar de aplicar el método adecuado (fórmula general o factorización), altera los términos y obtiene $w^2 + 2w + 1 = 49$, lo cual no corresponde. La dificultad está en la resolución incorrecta del trinomio cuadrático al confundir la transposición de términos con la aplicación de una identidad.

Así mismo, el estudio de Didis y Erbaş (2015) tuvo como propósito analizar el desempeño y las dificultades de estudiantes de décimo grado al resolver ecuaciones cuadráticas con una incógnita, tanto en contextos simbólicos como en problemas de enunciado. La investigación se realizó con 217 estudiantes de secundaria en Turquía, mediante un cuestionario compuesto por ocho ecuaciones cuadráticas simbólicas y cuatro problemas de enunciado, complementado con entrevistas semiestructuradas a un grupo de voluntarios. Se adoptó un enfoque mixto, que combinó el análisis cuantitativo de las

respuestas (correctas, incorrectas, incompletas y en blanco) con un examen cualitativo orientado a identificar los tipos de errores y dificultades más recurrentes.

Los resultados revelaron que, en términos generales, el rendimiento de los estudiantes fue bajo, aunque se observó un desempeño relativamente mejor en el contexto simbólico que en el de los problemas de enunciado. En la resolución de ecuaciones simbólicas, los errores se relacionaron principalmente con dificultades en los procedimientos algebraicos y aritméticos: errores en la factorización, dificultades para aplicar correctamente la fórmula cuadrática (particularmente en el cálculo del discriminante) y escaso manejo del método de completar el cuadrado. También, algunos estudiantes intentaron factorizaciones imposibles o aplicaron de manera incorrecta identidades notables como la diferencia de cuadrados. Se encontró además que varios estudiantes tendían a recurrir mecánicamente a la fórmula cuadrática como único procedimiento, aun cuando la ecuación era factorizable de manera más sencilla.

En el caso de los problemas de enunciado, el rendimiento fue más bajo y las dificultades más diversas. Muchos estudiantes no lograron comprender el texto de los problemas, lo que impidió formular la ecuación correspondiente; otros comprendieron el planteamiento, pero no supieron traducirlo al lenguaje algebraico, y un tercer grupo logró formular la ecuación, pero cometió errores en su resolución o no concluyó el procedimiento. Se identificó que la falta de comprensión lectora, la complejidad sintáctica de los enunciados y la tendencia a pensar en términos aritméticos en lugar de algebraicos fueron factores que dificultaron la formulación correcta de las relaciones matemáticas; algunos estudiantes que resolvieron problemas correctamente lo hicieron mediante estrategias como el tanteo o el dibujo, sin llegar a utilizar el álgebra.

El análisis de entrevistas confirmó que muchos estudiantes habían memorizado reglas y fórmulas, pero carecían de una comprensión conceptual de las ecuaciones cuadráticas. En consecuencia, olvidaban procedimientos al poco tiempo de haberlos aprendido o los aplicaban de manera incorrecta. Este hallazgo refuerza la idea de que la enseñanza tradicional, centrada en la manipulación simbólica, genera aprendizajes algorítmicos, pero no garantiza la comprensión relacional.

En conclusión, los autores destacan que las dificultades de los estudiantes con las ecuaciones cuadráticas no se deben únicamente al tipo de instrucción recibida, sino también a los procesos cognitivos implicados en la formulación y resolución de estas ecuaciones. El estudio sugiere la necesidad de entornos de enseñanza que promuevan el razonamiento reflexivo y la comprensión conceptual, en lugar de un aprendizaje basado en la memorización.

Para este proyecto de intervención didáctica en educación superior, esta investigación constituye un aporte importante al mostrar que los problemas con las ecuaciones cuadráticas no se limitan a los procedimientos simbólicos, sino que se profundizan en la transición hacia contextos aplicados, lo cual justifica la implementación de estrategias didácticas que

favorezcan el tránsito entre distintas formas de representación matemática, que vinculen los procedimientos algebraicos con situaciones reales del ámbito administrativo.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de dificultades que presentaron los participantes al realizar la prueba en el estudio de Didiş y Erbas (2015):

- a) *Intentar factorizar ecuaciones cuadráticas no factorizables*: Los datos revelaron que algunos de los estudiantes no juzgaron correctamente si la ecuación cuadrática a resolver era factorizable en algún dominio, como los números racionales. Véase Figura 10.

Handwritten work for a quadratic equation:

$$4) x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\begin{matrix} 3 & & -3 \\ x & & +1 \end{matrix}$$

$$(3x-3)(x+1) = 0$$

$$\begin{cases} 3x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \quad \boxed{x = -1}$$

Figura 10. Ejemplo del intento de un estudiante de factorizar una ecuación cuadrática no factorizable.

- b) *Uso incorrecto de las técnicas de diferencia de dos cuadrados o del máximo común divisor*: Algunos estudiantes no pudieron aplicar correctamente la identidad algebraica $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ para factorizar cuadráticas. Como se muestra en la Figura 11.

Handwritten work for a quadratic equation:

$$8) 3x^2 = 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(3x - 2) = 0$$

$$\begin{matrix} 3x = 0 & 3x = 2 \\ x = 0 & x = \frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$C = \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\}$$

Figura 11. Ejemplo de los errores de un estudiante en el uso de la técnica del máximo común divisor.

- c) *Las dificultades de los estudiantes al utilizar la fórmula cuadrática*: Los datos mostraron que los estudiantes encontraron los siguientes desafíos al aplicar la fórmula cuadrática para encontrar las raíces de las ecuaciones cuadráticas: (i) los estudiantes calcularon el discriminante incorrectamente debido a errores de cálculo o no pudieron calcularlo en absoluto; (ii) los estudiantes calcularon correctamente el discriminante, pero aplicaron incorrectamente la fórmula cuadrática; (iii) los estudiantes calcularon el discriminante incorrectamente pero aplicaron la fórmula cuadrática correctamente. Por ejemplo, muchos de los estudiantes recordaban mal la fórmula de ecuación cuadrática (Figura 12).

$$\begin{array}{l}
 x^2 + 2x - 1 = 0 \\
 \Delta = b^2 - 4ac \\
 \Delta = 4 - 4 \cdot (-1) \\
 \Delta = 8 \\
 x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{c} \\
 x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{-1} \\
 x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{c} \\
 x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-1} = \boxed{2 + 2\sqrt{2}}
 \end{array}$$

Figura 12. Ejemplo del uso incorrecto de la fórmula cuadrática.

- d) *Dificultades de los estudiantes al utilizar la propiedad de la raíz cuadrada:* Los datos también revelaron que, al resolver la ecuación de dos términos $9x^2 - 25 = 0$, algunos estudiantes no utilizaron ni factorización ni fórmula cuadrática. Más bien, intentaron utilizar el método de la raíz cuadrada; La mayoría de los estudiantes que siguieron este procedimiento encontraron sólo una raíz correcta y descuidaron una de las raíces de las ecuaciones cuadráticas, particularmente la raíz negativa (Figura 13).

$$\begin{array}{l}
 7) \ 9x^2 - 25 = 0 \\
 9x^2 - 25 = 0 \\
 9x^2 = 25 \\
 \sqrt{x^2} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} \\
 \boxed{x = \frac{5}{3}} //
 \end{array}$$

Figura 13. Ejemplo de los errores de un estudiante relacionados con la búsqueda de una raíz única como solución.

Por lo tanto, las dificultades que los estudiantes enfrentan en la resolución de ecuaciones cuadráticas no se limitan únicamente a la aplicación de procedimientos algebraicos, sino que también involucran aspectos conceptuales e interpretativos que influyen en su desempeño. Estos obstáculos ponen de manifiesto la necesidad de replantear las prácticas de enseñanza, orientándolas hacia estrategias que promuevan una comprensión más profunda, la conexión con situaciones significativas y el uso de recursos que potencien la exploración y la reflexión. Reconocer estos desafíos constituye un punto de partida fundamental para diseñar propuestas didácticas que atiendan de manera específica los vacíos detectados y favorezcan un aprendizaje más significativo.

3.2 Propuestas de enseñanza

En esta sección, se presentan ejemplos de propuestas que incorporan el uso de materiales manipulables en la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas. Estas iniciativas están diseñadas para proporcionar a los estudiantes herramientas concretas que les permitan explorar y comprender este contenido matemático.

En ese sentido, en la investigación de Gidado y colaboradores (2024) se examinan los efectos del uso del *algebra tiles* como estrategia didáctica en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en estudiantes de educación secundaria en Abuja, Nigeria. La investigación parte de la preocupación por el bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas, en particular en temas algebraicos, donde la enseñanza tradicional basada en la memorización de procedimientos no logra fomentar una comprensión conceptual sólida. Los autores sostienen que los manipulables concretos, como las *algebra tiles*, pueden representar una alternativa eficaz para apoyar la visualización y la comprensión de los procesos algebraicos que intervienen en la factorización y resolución de ecuaciones cuadráticas.

El estudio adoptó un diseño cuasi-experimental con grupos experimentales y de control. El grupo experimental recibió instrucción utilizando las *algebra tiles*, mientras que el grupo de control fue enseñado con el método convencional de explicación y ejercicios. La muestra estuvo conformada por estudiantes de nivel medio de distintas escuelas de Abuja. Se aplicaron pruebas de rendimiento en ecuaciones cuadráticas antes y después de la intervención para medir el impacto de la estrategia.

Los resultados evidenciaron diferencias significativas en el desempeño académico: los estudiantes que trabajaron con álgebra tiles obtuvieron mejores puntajes que aquellos que aprendieron únicamente con el enfoque tradicional. Los resultados sugieren que la manipulación de materiales concretos favorece la comprensión de conceptos abstractos y reduce los errores relacionados con la factorización, el uso de fórmulas y la interpretación de los pasos algebraicos. Además, el estudio mostró que el uso de este recurso fomenta la motivación, la participación en clase y el interés por las matemáticas, lo cual incide positivamente en la actitud hacia la asignatura.

Los autores enfatizan que álgebra tiles ayudan a los estudiantes a establecer conexiones entre el aspecto geométrico y algebraico de las ecuaciones cuadráticas. Este enfoque permite visualizar el producto de binomios como áreas rectangulares y comprender de manera más intuitiva el proceso de completar el cuadrado. También subrayan la importancia del docente como mediador: el manipulable por sí mismo no garantiza el aprendizaje, sino que requiere un diseño de actividades que guíen la reflexión y promuevan la articulación entre diferentes formas de representación matemática.

Finalmente, el estudio concluye que la integración de materiales manipulables como las *algebra tiles* debe ser considerada en la enseñanza de matemáticas en Nigeria y en otros contextos similares. Los autores recomiendan que los docentes reciban capacitación en su uso y que los planes de estudio incorporen este tipo de recursos para optimizar el aprendizaje de los estudiantes. De igual forma, sugieren ampliar la investigación a otros contenidos matemáticos y en diferentes niveles educativos, con el fin de confirmar la eficacia de este enfoque y explorar su potencial en la mejora del rendimiento académico y la actitud hacia las matemáticas.

El trabajo realizado por los autores resulta pertinente para el proyecto, ya que constituye evidencia empírica reciente sobre la eficacia del uso de materiales manipulables en la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas. Señalan que el empleo de álgebra tiles favorece no solo la mejora en el rendimiento académico, sino también una actitud más positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas, al propiciar una comprensión conceptual más profunda y una mayor motivación en los estudiantes. Estas aportaciones respaldan la idea de que la incorporación de manipulables puede ser un recurso valioso para superar las dificultades en la enseñanza del álgebra en contextos de educación superior, porque muestran que su uso no solo ayuda a clarificar procedimientos abstractos, sino que también influye en la disposición de los estudiantes para involucrarse activamente en el proceso de aprendizaje.

Por otro lado, el estudio desarrollado por Caylan y Haser (2021) se centra en explorar el impacto del uso de materiales manipulables, específicamente fichas de álgebra, en el aprendizaje de los estudiantes de educación básica. El objetivo principal fue analizar cómo la incorporación de estos recursos en actividades grupales influye en el rendimiento algebraico, el pensamiento algebraico y las percepciones de los alumnos respecto al aprendizaje de las matemáticas. La investigación parte de la premisa de que el álgebra constituye un área fundamental en la formación matemática, pero que también representa un terreno en el que muchos estudiantes encuentran dificultades de comprensión, sobre todo al pasar de representaciones concretas a expresiones simbólicas.

La metodología empleada fue un diseño cuasi-experimental con pretest y postest en un grupo experimental y un grupo control. La muestra estuvo compuesta por 40 estudiantes de sexto grado de primaria. El grupo experimental trabajó con fichas de álgebra en dinámicas colaborativas, mientras que el grupo control siguió el enfoque tradicional de enseñanza. Además de las pruebas aplicadas para medir el rendimiento, los investigadores recopilaron información cualitativa mediante entrevistas y observaciones en clase, con el fin de obtener una visión más amplia sobre los procesos de aprendizaje y las percepciones de los estudiantes.

En cuanto a los resultados, el análisis cuantitativo no mostró diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento algebraico entre los dos grupos. Sin embargo, los datos cualitativos revelaron un panorama distinto: los estudiantes que trabajaron con fichas de álgebra mostraron un mayor desarrollo en su pensamiento algebraico, ya que lograron relacionar representaciones concretas con expresiones simbólicas de manera más clara y significativa. Asimismo, los alumnos reportaron que el uso de este material manipulable facilitó la comprensión de los conceptos, fomentó la colaboración en el trabajo en equipo y generó una experiencia de aprendizaje más atractiva y motivadora.

Los aportes de esta investigación son relevantes tanto en el ámbito teórico como en el práctico. Por un lado, proporciona evidencia empírica sobre el valor de los materiales manipulables en el aprendizaje del álgebra, un área en la que persisten dificultades para los estudiantes. Por otro lado, ofrece orientaciones para el diseño de intervenciones didácticas

que promuevan la exploración, la construcción de significados y la interacción social en el aula. En este sentido, los autores concluyen que, aunque los efectos en el rendimiento medido con pruebas estandarizadas pueden no ser inmediatos, el uso de fichas de álgebra en trabajo grupal constituye una estrategia prometedora para favorecer el pensamiento algebraico y la actitud positiva hacia las matemáticas.

En relación con el Proyecto de Intervención Didáctica, este estudio resulta particularmente pertinente, ya que pone de relieve cómo los materiales manipulables pueden ser un recurso eficaz para abordar la enseñanza del álgebra desde una perspectiva más significativa. Si bien Caylan y Haser (2021) trabajaron con fichas de álgebra en el nivel básico, las conclusiones ofrecen un sustento teórico y metodológico aplicable al contexto universitario. En este ámbito, la resolución de ecuaciones cuadráticas mediante materiales manipulables no solo puede contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico, sino también favorecer la vinculación de los contenidos matemáticos con situaciones reales del campo administrativo, promoviendo un aprendizaje más comprensivo, reflexivo y relevante para los estudiantes.

Se puede observar que en el artículo de Bartolini y Martignone (2020), presenta una revisión amplia sobre el papel de los materiales manipulables en la educación matemática, destacando que estos constituyen artefactos que permiten a los estudiantes explorar, investigar y comprender conceptos matemáticos a través de experiencias sensoriales. Los autores distinguen entre manipulables concretos (objetos físicos), virtuales (artefactos digitales), histórico-culturales (instrumentos con un trasfondo histórico en la construcción del conocimiento matemático) y artificiales (creados con fines educativos específicos, como los bloques multibase de Dienes).

Se subraya que tanto los manipulables concretos como los virtuales tienen ventajas y limitaciones. Los concretos favorecen la comprensión conceptual al ofrecer experiencias táctiles y visuales, mientras que los virtuales resultan motivadores, accesibles y eficientes en tiempo y espacio, aunque reducen la dimensión sensorial. Las investigaciones comparativas muestran que su uso combinado potencia el aprendizaje.

El estudio también señala problemas críticos en su implementación. Uno es la autonomía del estudiante: si bien Montessori promovió un uso libre de manipulables en ambientes preparados, existe el riesgo de que los estudiantes no establezcan conexiones con los lenguajes matemáticos simbólicos si no hay mediación docente. Otro aspecto importante es la edad de los estudiantes, ya que la mayoría de estudios se han centrado en educación básica, aunque se argumenta que los manipulables también son útiles en niveles superiores, incluso universitarios, siempre que se diseñen tareas que promuevan procesos de definición, conjetura, argumentación y prueba. Se presentan ejemplos de “máquinas matemáticas” (como la Pascalina, el compás o los pantógrafos) para ilustrar cómo los manipulables histórico-culturales pueden enriquecer el aula al conectar la historia de las matemáticas con la construcción de significados actuales. Por ejemplo, los pantógrafos (Figura 14) se

describieron en diferentes tipos de documentos, como textos matemáticos y tratados técnicos para arquitectos y pintores. En particular, en el siglo XIX, cuando la teoría de las transformaciones geométricas se convirtió en fundamental en las matemáticas, fueron diseñadas y estudiadas por muchos científicos (Bartolini y Martignone, 2020).

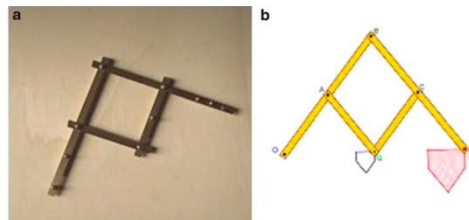


Figura 14. Pantógrafo de Scheiner (Bartolini y Martignone, 2020, p. 492)

Finalmente, se resalta que no existe un “mejor” manipulable universal: la elección depende de factores culturales, del contexto educativo y de las creencias del docente sobre la naturaleza de las matemáticas. En cualquier caso, los autores insisten en que ningún artefacto es evidente por sí mismo; siempre se requieren tareas y acompañamiento pedagógico bien diseñadas para que el material cumpla su función didáctica.

Este artículo ofrece una base sólida para el proyecto de intervención didáctica, ya que refuerza la idea de que los materiales manipulables no son solo apoyos concretos, sino mediadores de significados matemáticos que requieren una orquestación intencional del docente. Al abordar la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas en la Licenciatura en Administración, resulta relevante considerar cómo integrar manipulativos artificiales y, cuando sea posible, histórico-culturales, de manera que promuevan la exploración, el debate y la construcción de significados más allá de la mera memorización de procedimientos. Además, la discusión sobre la “ambigüedad teórica” de los manipulativos abre la posibilidad de usarlos como generadores de reflexión y argumentación en estudiantes universitarios, validando su pertinencia en contextos de educación superior. Esto se alinea directamente con la meta de mi intervención: vincular lo algebraico con problemas reales y favorecer una comprensión profunda de las matemáticas aplicadas a la administración.

Larbi y Okyere (2017) analizaron el uso de manipulables en la enseñanza de las matemáticas, con un enfoque en mejorar la comprensión conceptual de los estudiantes de secundaria. El estudio se centró en la utilización de álgebra tiles (bloques algebraicos) para facilitar la resolución de problemas algebraicos y favorecer la visualización de conceptos abstractos. La investigación incluyó a 56 estudiantes de dos escuelas en Ghana, divididos en un grupo experimental, que utilizó manipulables, y un grupo control, que recibió enseñanza tradicional.

Los resultados indicaron que el grupo experimental superó significativamente al grupo control en pruebas posteriores, evidenciando una mejora en el rendimiento académico y en la comprensión conceptual de los temas abordados. Además, los estudiantes reportaron una actitud más positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas, sugiriendo que el uso de

materiales manipulables puede incrementar la motivación y el interés en la materia. Los autores destacan que, aunque los manipulables pueden ser herramientas muy efectivas, su impacto depende de cómo se integren en la enseñanza. Es decir, se requiere que los docentes diseñen actividades adecuadas y guíen a los estudiantes en la transición de la manipulación concreta hacia la abstracción matemática. También enfatizan la importancia de la formación docente para asegurar que los manipulables se utilicen de forma eficaz en la enseñanza.

La Figura 15 es similar a factorizar una expresión. Comenzando con esta forma de factorización, guía a los estudiantes a desarrollar una sensación de la propiedad distributiva, que luego se introduce fácilmente, inicialmente en la forma; multiplique cada bloque a lo largo de la izquierda por cada bloque en la parte superior.

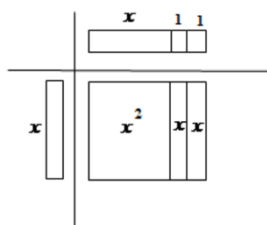


Figura 15. La propiedad distributiva (Larbi y Okyere, 2017, p. 56)

La investigación proporciona evidencia empírica sobre la eficacia del uso de materiales manipulables en la enseñanza de conceptos algebraicos. Sus resultados respaldan la idea de que el empleo de álgebra tiles puede mejorar tanto la comprensión conceptual como el rendimiento académico de los estudiantes. Esto sustenta la incorporación de materiales manipulables en el diseño de la intervención didáctica, al justificar que su uso no solo facilita la resolución de ecuaciones cuadráticas, sino que también promueve la visualización concreta de conceptos abstractos, lo que puede resultar especialmente útil para estudiantes de Ciencias Económicas y Administrativas. también, enfatiza la necesidad de planificar tareas, reforzando la importancia de un diseño didáctico estructurado para garantizar que los manipulables cumplan su función pedagógica.

Por otro lado, el proyecto de Solving Quadratic Equations: Shell Center Team (2012), presenta una lección de evaluación formativa cuyo propósito es identificar y atender las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver ecuaciones cuadráticas con una variable. Los objetivos matemáticos principales incluyen: comprender una situación de la vida real y traducirla a términos matemáticos, aplicar distintos métodos de resolución (radicación, completar cuadrados, factorización y fórmula general) e interpretar los resultados en el contexto original. El problema (Figura 16) gira en torno al movimiento de un autobús al dar una vuelta, donde se modela el recorrido de las ruedas traseras y delanteras, lo que permite plantear una ecuación cuadrática que refleja la distancia en que la rueda trasera invade un carril bici.

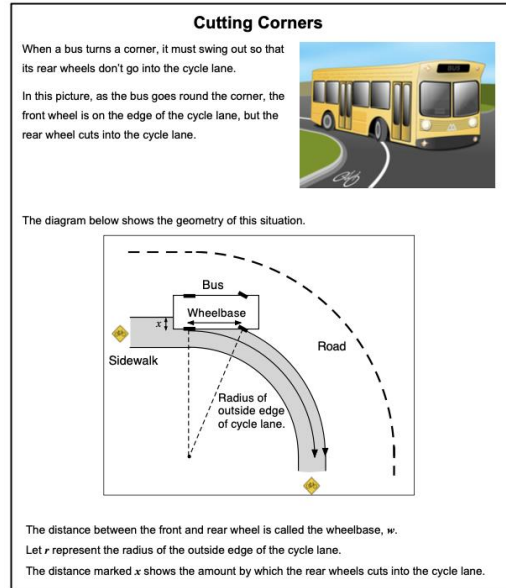


Figura 16. Problema Cutting Corners

La estructura de la lección está organizada en varias fases: antes de la sesión, los estudiantes resuelven individualmente la tarea Cutting Corners; en clase, primero trabajan de manera individual con retroalimentación guiada, luego colaboran en grupos pequeños para discutir y mejorar sus estrategias, y finalmente participan en una discusión plenaria donde se comparan los diferentes enfoques. También, se incluyen actividades de análisis de soluciones de otros estudiantes que permiten reflexionar sobre errores comunes, distintos métodos y la pertinencia de los resultados obtenidos. El tiempo estimado de implementación es de 90 minutos (o dos sesiones de 45 minutos), con un seguimiento adicional en casa o en otra clase breve.

Entre los aspectos pedagógicos destacados se encuentra el énfasis en no calificar las respuestas de los estudiantes, sino en proporcionar preguntas que orienten la revisión y mejora de su propio trabajo, fomentando el pensamiento crítico y la construcción de sentido matemático. Además, el diseño propone que los estudiantes reconozcan la importancia de vincular los procedimientos algebraicos con la interpretación contextual de las soluciones, ya que no todas las raíces de la ecuación tienen significado práctico en el problema planteado. Este recurso constituye una propuesta didáctica que trasciende la práctica rutinaria de aplicar métodos mecánicos para resolver cuadráticas. En su lugar, promueve un aprendizaje más profundo al integrar modelización de situaciones reales, trabajo colaborativo y reflexión crítica sobre los distintos caminos de resolución.

El recurso resulta pertinente para el proyecto, ya que propone una lección de evaluación formativa en la que las ecuaciones cuadráticas se abordan desde un problema contextualizado: el giro de un autobús y la trayectoria de sus ruedas. Este documento aporta al estado del arte al mostrar cómo la resolución de cuadráticas puede vincularse con

situaciones reales, a la vez que fomenta el análisis crítico de distintos métodos de resolución, la identificación de errores recurrentes y la reflexión colaborativa. También, su enfoque formativo, centrado en la retroalimentación y en la discusión de estrategias más que en la calificación, se alinea con la intención de este proyecto de diseñar actividades que promuevan una comprensión más profunda y significativa de las cuadráticas. En este sentido, constituye un referente metodológico que sustenta la pertinencia de implementar propuestas didácticas apoyadas con materiales manipulables que favorezcan la construcción del conocimiento matemático en los estudiantes de Ciencias Económicas y Administrativas.

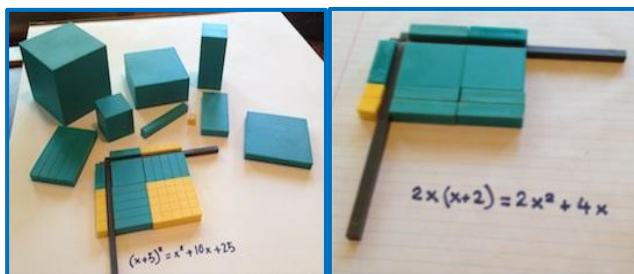
Por otro lado, *The Algebra Lab* de Picciotto (1990) surge como una obra transformadora que ofrece estrategias didácticas innovadoras para abordar estas dificultades. A través del uso de materiales manipulativos y actividades progresivas, Picciotto redefine el aprendizaje del álgebra, promoviendo una comprensión conceptual más profunda y accesible para una amplia gama de estudiantes.

Una de las características distintivas de este libro es la incorporación del Lab Gear, un conjunto de materiales manipulativos diseñados específicamente para representar visualmente conceptos algebraicos. Estos bloques físicos permiten modelar términos constantes, variables y operaciones matemáticas, haciendo tangible lo abstracto. Por ejemplo, al explorar la ley distributiva, los estudiantes pueden utilizar el Lab Gear para observar cómo los términos se distribuyen y agrupan, facilitando una comprensión intuitiva del concepto; permite a los estudiantes descubrir patrones y relaciones algebraicas por sí mismos. Al utilizar bloques físicos para modelar términos algebraicos y operaciones, los alumnos pueden observar visualmente cómo se forman patrones, cómo se relacionan las diferentes partes de una ecuación y cómo las propiedades matemáticas, como la ley distributiva, se aplican de manera concreta. Este proceso de descubrimiento personal refuerza la comprensión conceptual y anima a los estudiantes a reflexionar sobre el “por qué” detrás de las operaciones matemáticas, en lugar de simplemente seguir reglas sin comprenderlas (Picciotto, 1990).

El enfoque de *The Algebra Lab* se centra en tres áreas conceptuales principales: la aritmética de enteros, la ley distributiva y la factorización, y la resolución de diferentes tipos de ecuaciones. Un aspecto crucial del libro es su énfasis en la comprensión conceptual por encima de la memorización de algoritmos. Picciotto (1990), busca que los estudiantes entiendan no solo cómo realizar operaciones algebraicas, sino también por qué estas funcionan. Este enfoque fomenta habilidades analíticas y críticas, promoviendo un aprendizaje significativo que trasciende la resolución mecánica de problemas. En lugar de repetir fórmulas, los estudiantes son invitados a explorar patrones, descubrir relaciones y reflexionar sobre las conexiones entre diferentes representaciones algebraicas. Además, *The Algebra Lab* se destaca por su accesibilidad e inclusividad. Al priorizar métodos visuales y táctiles, el libro facilita el aprendizaje para estudiantes con diversas habilidades y antecedentes académicos. Esto es particularmente relevante en contextos donde el álgebra suele percibirse como un área intimidante y desconectada de la realidad cotidiana.

A continuación, se presentan dos representaciones que ilustran el uso del material manipulativo Lab Gear, diseñado por Picciotto, para explorar conceptos algebraicos. Estas figuras muestran cómo los bloques permiten modelar operaciones algebraicas, como la expansión de expresiones y la aplicación de la propiedad distributiva, promoviendo una comprensión conceptual más profunda.

Como se puede observar en la Figura 17, se muestran dos ejemplos: la representación del desarrollo de $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$, donde los bloques se utilizan para visualizar el cuadrado de un binomio; y un ejemplo de la propiedad distributiva con $2x(x + 2) = 2x^2 + 4x$, donde se modela la expansión de un producto algebraico mediante los bloques.



$$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 \quad 2x(x + 2) = 2x^2 + 4x$$

Figura 17. Representación algebraica mediante bloques

En vista de lo anterior, la inclusión dentro del aula de un material manipulable como el que se tiene pensado realizar en este proyecto, podría dotar de significado a los símbolos, coadyuvando en los procesos de desarrollo del aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado. Esta propuesta abonará en el desarrollo del pensamiento matemático en la medida que el estudiante traduzca el lenguaje natural al simbólico y formal. Este diseño podría ser adaptado e implementado por docentes que busquen alternativas pertinentes para iniciar un acercamiento al concepto matemático ecuación cuadrática en los estudiantes.

Cabe señalar que, en la búsqueda de investigaciones relacionadas con las ecuaciones cuadráticas, se identificó que una parte considerable de los trabajos existentes se concentra en los niveles básicos y medios de enseñanza. Estos estudios, en su mayoría, abordan el tema desde una perspectiva centrada en las dificultades conceptuales y procedimentales que enfrentan los estudiantes al resolver este tipo de ecuaciones. Se destacan, por ejemplo, investigaciones enfocadas en errores frecuentes como la aplicación mecánica de fórmulas sin comprensión del proceso, el uso incorrecto de métodos de factorización o la dificultad para completar el cuadrado. También, se observa un interés por analizar los métodos de enseñanza que se implementan en estos niveles, en particular la incorporación de materiales manipulativos, recursos tecnológicos y enfoques didácticos innovadores que buscan superar la visión tradicional de la resolución algorítmica.

Este panorama de investigaciones en niveles básicos y medios resulta importante porque permite reconocer tendencias comunes en el aprendizaje de las ecuaciones

cuadráticas, tales como la persistencia de concepciones erróneas o la falta de conexión con situaciones reales. Sin embargo, también pone de manifiesto un vacío significativo en el ámbito de la educación superior, donde el estudio de las ecuaciones cuadráticas suele estar orientado únicamente a la aplicación de técnicas algebraicas sin considerar su utilidad en contextos disciplinares específicos. Esto evidencia la necesidad de desarrollar investigaciones que respondan a las características y demandas de los Programas Educativos universitarios, en particular en las Ciencias Económicas y Administrativas, donde las matemáticas adquieren sentido en la medida en que se vinculan con problemas reales de análisis de costos, ingresos o utilidades. De esta manera, aunque los aportes de los trabajos en niveles básicos y medios constituyen un referente valioso, se vuelve fundamental avanzar hacia propuestas que fortalezcan la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas en el nivel superior, con un enfoque contextualizado y pertinente.

4. Problemática y objetivos de proyecto

A lo largo de los años, el álgebra ha evolucionado en respuesta a la variedad de problemas que ha enfrentado, lo que evidencia su complejidad y el desafío que representa su aprendizaje. Cuando los estudiantes comienzan a estudiar álgebra, suelen basarse en las ideas y estrategias que empleaban en aritmética. Sin embargo, el álgebra no se limita a ser una extensión de la aritmética; su comprensión requiere que los estudiantes transiten de situaciones numéricas específicas hacia un pensamiento más abstracto y general sobre números y operaciones. En este tránsito, uno de los contenidos que refleja de manera notoria dichas dificultades es el estudio de las ecuaciones cuadráticas, debido a que su abordaje suele presentarse de manera mecánica y desvinculada del contexto, lo que limita la comprensión y aplicación significativa por parte de los estudiantes.

En este sentido, en este apartado se presenta elementos sobre la problemática en torno al aprendizaje y la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas, particularmente por la forma mecánica y descontextualizada en que suelen enseñarse. Además, se formulan los objetivos del proyecto, tanto el general como los específicos, los cuales orientan la propuesta de intervención didáctica.

4.1 Problemática en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas

La dificultad para comprender las matemáticas parece estar vinculada a la propia naturaleza de sus objetos, ya que asimilar conceptos, manejar los fundamentos del cálculo, interpretar el lenguaje simbólico y resolver problemas representa un reto para muchos estudiantes. Esta situación se debe por el alto grado de abstracción que caracteriza a los objetos matemáticos, así como por la necesidad de dominar un lenguaje de representación regidos por normas. Un ejemplo de ello es la complejidad que surge al interpretar los enunciados de los problemas (Socas, 1997).

En el estudio de las ecuaciones cuadráticas una de las dificultades más recurrentes se relaciona con la ejecución de operaciones algebraicas y aritméticas (conexión procedimental). Cuando estas se realizan de manera incorrecta, no es posible obtener un resultado válido ni avanzar hacia el dominio conceptual de la ecuación cuadrática, tal como lo señalan López y colaboradores (2016) en su investigación. Los autores señalan que es preocupante que los estudiantes no logren establecer una conexión entre los conceptos básicos y las operaciones necesarias para resolver ecuaciones cuadráticas, lo que se traduce en dificultades continuas al momento de aplicar estos conocimientos a problemas más complejos. Esta falta de integración entre los aspectos procedimentales y conceptuales resalta la necesidad urgente de replantear los enfoques pedagógicos, para fomentar una comprensión más sólida y duradera en el ámbito de las matemáticas.

De manera similar, diversos autores como Makgakga (2023) y Tendere y Mutambara (2020) han documentado que las principales dificultades de los estudiantes surgen al aplicar técnicas como la factorización, la fórmula general o el método de completar el cuadrado. En el caso de la factorización, se observan errores tanto en la identificación de los factores como en la aplicación de productos notables. Muchos estudiantes no reconocen patrones como el trinomio cuadrado perfecto o la diferencia de cuadrados, lo que impide que puedan descomponer la ecuación correctamente para hallar las soluciones. Respecto a la fórmula general, es frecuente que los estudiantes olviden parte de la fórmula o cometan errores de sustitución al ingresar los valores de los coeficientes. También se presentan equivocaciones en el uso de signos, en la simplificación de raíces cuadradas o en el desarrollo de las operaciones aritméticas necesarias para obtener el resultado final. Con respecto a el método de completar el trinomio cuadrado perfecto representa una de las estrategias menos comprendidas y utilizadas por los estudiantes. Muchos no logran visualizar cómo transformar una expresión cuadrática incompleta en un binomio elevado al cuadrado, lo que los lleva a evitar este método por considerarlo más complejo o abstracto.

Estas dificultades no solo evidencian carencias en el dominio de procedimientos técnicos, sino también una comprensión superficial del significado de las operaciones que se realizan. En consecuencia, los estudiantes tienden a memorizar fórmulas o pasos sin entender los fundamentos que los sustentan, lo que repercute directamente en la calidad de sus respuestas y en su capacidad para validar los resultados obtenidos.

Otra de las dificultades de aprendizaje que se ha identificado en los estudiantes es que hay un desconocimiento de las características estructurales que distinguen a este tipo de expresiones algebraicas. La consecuencia es que, al no reconocer adecuadamente la forma canónica de la ecuación cuadrática, los estudiantes tienden a clasificarla erróneamente, lo que afecta los procedimientos posteriores de resolución. Esta dificultad evidencia no solo vacíos en la comprensión conceptual, sino también carencias en las estrategias de enseñanza que, al privilegiar la memorización de fórmulas, dejan de lado el análisis estructural y el desarrollo del razonamiento algebraico.

También, la falta de habilidades en la transformación de expresiones algebraicas juega un papel crucial en esta problemática. Muchos estudiantes no saben cómo manipular y reorganizar ecuaciones para que adopten la forma estándar o canónica de una ecuación cuadrática. Por ejemplo, no logran identificar términos que pueden agruparse o simplificarse, lo que dificulta que puedan reescribir ecuaciones que en principio no parecen cuadráticas en una forma que sea más fácil de resolver.

Este desconocimiento sobre la estructura de las ecuaciones cuadráticas limita las posibilidades de éxito de los estudiantes al intentar resolverlas. Al no reconocer la ecuación como cuadrática, muchos optan por métodos incorrectos o intentan resolverla de manera errónea, lo que aumenta la dificultad del proceso de resolución.

Las dificultades detectadas no solo remiten a aspectos técnicos u operativos, sino que también reflejan una desconexión profunda entre los contenidos matemáticos y la realidad académica y profesional de los estudiantes. Por ello, resulta indispensable diseñar estrategias de enseñanza que trasciendan la simple aplicación de procedimientos algorítmicos y que, en su lugar, promuevan una comprensión más integral de los conceptos involucrados. Se requiere un enfoque más reflexivo y exploratorio del aprendizaje, en el que los estudiantes no solo apliquen fórmulas de manera mecánica, sino que analicen, interpreten y argumenten sus procesos y resultados.

Asimismo, uno de los desafíos más significativos que enfrentan los estudiantes al aprender ecuaciones cuadráticas es la dificultad para traducir un problema real a su representación algebraica correspondiente. Muchos estudiantes logran ejecutar los procedimientos algebraicos de manera mecánica, como aplicar la fórmula general o factorizar expresiones, pero se enfrentan a obstáculos cuando se trata de identificar cómo una situación del mundo real puede ser expresado mediante una ecuación cuadrática (Hernández-Sánchez y Kú, 2021, p. 30).

La dificultad radica en que la mayoría de los estudiantes carecen de estrategias que les permitan identificar las variables y las relaciones entre ellas. Por ejemplo, en un problema de costos y beneficios, un estudiante debe ser capaz de reconocer que la función de ingreso total o de utilidad puede presentarse como una ecuación cuadrática, en la cual una variable indica la cantidad producida o vendida, mientras que los coeficientes se refieren a los precios, costos fijos y costos variables. La dificultad para discernir que es cada cosa puede llevar a planteamientos incorrectos, generando soluciones que no reflejan la realidad del problema.

Asimismo, la representación de problemas reales mediante ecuaciones cuadráticas implica comprender y establecer relaciones funcionales entre variables. Los estudiantes deben ser capaces de identificar patrones, formular hipótesis sobre la relación entre cantidades y traducir estas hipótesis a expresiones algebraicas. Esto requiere no solo habilidades algebraicas, sino también competencias de pensamiento crítico y razonamiento lógico. En consecuencia, la dificultad para traducir problemas reales a ecuaciones cuadráticas constituye una barrera en el aprendizaje, especialmente en carreras que demandan capacidad

de análisis y toma de decisiones fundamentas en datos cuantitativos. Superar esta barrera requiere diseñar experiencias de aprendizaje que promuevan la exploración, reflexión y la articulación entre el contexto y la expresión matemática.

4.2 Problemática en la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas

La enseñanza de las ecuaciones cuadráticas es fundamental para la modelización de fenómenos económicos y administrativos, este contenido suele introducirse de manera abstracta, centrada en la manipulación simbólica y la aplicación mecánica de fórmulas, sin proporcionar un contexto que permita a los estudiantes percibir su utilidad práctica. Esta situación genera una serie de dificultades que afectan tanto el aprendizaje conceptual como el desempeño académico de los estudiantes.

Hey (2005) dice que la enseñanza de la economía no requiere necesariamente del dominio del álgebra y el cálculo, propone sustituir los desarrollos algebraicos por representaciones gráficas precisas, apoyadas en el uso de software matemático capaz de realizar los cálculos y generar animaciones dinámicas. El autor sostiene que los estudiantes de economía no necesitan ser expertos en matemáticas para comprender los fundamentos de la disciplina, de esta manera, los estudiantes se concentran en sentir la economía y no en temer a las matemáticas. Si se emplean gráficos rigurosos y herramientas computacionales adecuadas, es posible transmitir los contenidos de manera clara y accesible, promoviendo que los estudiantes comprendan y apliquen la economía sin que el formalismo matemático represente una barrera para su aprendizaje.

Si bien propuestas como la de Hey podrían resultar atractivas, no se puede perder de vista que una formación académica sólida constituye un pilar indispensable para el desarrollo profesional. Simplificar el aprendizaje mediante el uso de gráficos y software puede motivar y acercar a los estudiantes a la disciplina, pero en el mediano y largo plazo, la ausencia de una base matemática puede limitar su capacidad para enfrentar problemas más complejos, analizar modelos de manera autónoma o generar nuevas aportaciones en el campo.

La economía se sostiene de herramientas formales que permiten no solo interpretar la realidad, sino también modelarla y prever escenarios. Renunciar al aprendizaje del álgebra o del cálculo puede ser funcional en los niveles introductorios, pero resulta insuficiente cuando se trata de construir conocimiento, evaluar la validez de los supuestos o realizar investigaciones con mayor grado de abstracción. En este sentido, confiar únicamente en la representación gráfica o en el software corre el riesgo de convertir al estudiante en un usuario pasivo de resultados, sin la capacidad crítica de cuestionar cómo fueron obtenidos ni de verificar su consistencia.

Mientras Hey propone “sentir la economía” sin necesidad de dominar el lenguaje algebraico, la propuesta de intervención sostiene que es posible reconciliar la formalización matemática con la aplicabilidad en el campo administrativo. A través del uso de bloques algebraicos, los estudiantes no solo visualizan y exploran las relaciones entre expresiones

cuadráticas, sino que también desarrollan esquemas de acción que les permiten conectar lo concreto con lo simbólico. De esta manera, se genera un puente entre la intuición visual que Hey defiende y la comprensión formal, indispensable para que los futuros administradores puedan enfrentar problemas reales como el análisis de costos, ingresos y utilidades. Al explorar y manipular materiales concretos, los estudiantes descubren que las ecuaciones cuadráticas no son un conocimiento abstracto y ajeno, sino una herramienta útil para interpretar fenómenos de su disciplina.

Cabe señalar que la enseñanza del álgebra en el contexto escolar presenta varias dificultades para los estudiantes. Estas dificultades pueden ser de tipo cognitivo, ya que no todos los alumnos que inician el curso de álgebra tienen un buen dominio de la aritmética, lo que puede dar lugar a errores por un uso excesivo de generalizaciones. Muchos ven el álgebra como algo complicado, creyendo que solo se trata de realizar operaciones aritméticas con letras. Esto les impide reconocer el lenguaje algebraico como una herramienta valiosa en matemáticas y no comprenden conceptos fundamentales como el significado de las incógnitas, las expresiones equivalentes y las operaciones con ellas (Kieran y Filloy, 1989). Como consecuencia, el álgebra se percibe como un tema poco atractivo y sin contexto, y los estudiantes tienden a memorizar conceptos sin entender su verdadero significado ni establecer relaciones entre ellos.

En este sentido, Vergnaud (citado por Rabino y colaboradores, 2004), reflexiona sobre aspectos en la transición desde un enfoque aritmético para resolver problemas hacia un tratamiento algebraico; el álgebra implica una doble ruptura epistemológica: primero, al introducir un desarrollo formal en la resolución de problemas que tradicionalmente se abordan de manera intuitiva, y segundo, al incorporar nuevos objetos matemáticos, como ecuaciones e incógnitas, funciones y variables, así como monomios y polinomios. Desde la educación inicial hasta los niveles superiores, los estudiantes adquieren conceptos y principios matemáticos en su forma abstracta, así como procedimientos que les permiten llevar a cabo tareas matemáticas. Sin embargo, muchos estudiantes enfrentan dificultades para comprender los conceptos y principios que sustentan esos procedimientos. La educación previa de los estudiantes, en ocasiones, no es lo suficientemente sólida para enfrentar tareas relacionadas tanto con el álgebra como con la aritmética.

Otro aspecto de la problemática en la enseñanza de las ecuaciones cuadrática es presentarlas solamente desde un enfoque procedimental. Este abordaje restringe la posibilidad de que los estudiantes comprendan de manera integrada la relación entre la expresión algebraica y la representación gráfica, dificultando la interpretación de raíces, máximos, mínimos o el efecto que producen los coeficientes en el comportamiento de la función. Como resultado, la enseñanza favorece un aprendizaje fragmentado, donde los estudiantes repiten fórmulas y algoritmos sin desarrollar una comprensión conceptual sólida, lo que dificulta aplicar los conocimientos en situaciones reales y disminuya su valor formativo dentro de la profesión.

Por otro lado, el enfoque descontextualizado también impacta la motivación de los estudiantes; al no percibir la relevancia de las ecuaciones cuadráticas para su formación profesional, los estudiantes tienden a mostrar desinterés hacia las actividades matemáticas. Además, la carencia de estrategias didácticas que fomenten la exploración y la reflexión sobre el significado de los procedimientos algebraicos contribuye a que los estudiantes desarrollen una visión reducida de la matemática. La enseñanza centrada en la transmisión de reglas y fórmulas refuerza un aprendizaje pasivo, donde los estudiantes reproducen técnicas sin involucrarse activamente en la construcción de su conocimiento.

Esta desconexión se debe principalmente a que los enfoques pedagógicos actuales no logran vincular adecuadamente las ecuaciones cuadráticas con problemas reales del ámbito económico y administrativo. A menudo, la enseñanza se centra en la resolución algebraica sin considerar la aplicación práctica de estos conocimientos en situaciones que los estudiantes enfrentarán en su futuro profesional. Como resultado, los estudiantes perciben una desconexión entre el contenido matemático y su aplicabilidad en el campo administrativo, ya que no logran ver la relevancia de las ecuaciones cuadráticas en su desarrollo profesional. Este tratamiento abstracto y descontextualizado del tema en el aula contribuye a que los estudiantes no comprendan cómo estas herramientas matemáticas pueden ser útiles para resolver problemas concretos del ámbito económico y administrativo. El tratamiento adecuado de las ecuaciones cuadráticas en el contexto de las Ciencias Económicas y Administrativas es de suma importancia, tanto para el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes como para su capacidad para aplicar estos conocimientos en escenarios profesionales reales. En este sentido, Puig y colaboradores (2015) afirman que:

La formación matemática del economista no se puede lograr en un proceso de enseñanza aprendizaje inconexo, con solo la presencia de la disciplina Matemática, descontextualizada de la profesión. Se requiere de la sistematización de los contenidos desde las diferentes disciplinas y contextos formativos vinculados con la realidad económica, donde se resuelven problemas del perfil profesional utilizando métodos matemáticos (p. 415).

Por otro lado, se observa una carencia de recursos didácticos: Los materiales utilizados no están diseñados para reflejar las demandas y problemas reales del entorno económico y administrativo. Esto evidencia la necesidad de implementar intervenciones didácticas que integren materiales manipulables, actividades exploratorias y problemas contextualizados. La utilización de bloques algebraicos u otros recursos concretos puede permitir a los estudiantes visualizar y experimentar con las expresiones cuadráticas, facilitando la construcción de esquemas. Estas herramientas favorecen la articulación entre lo concreto y lo simbólico, promoviendo un aprendizaje más activo y significativo que prepare a los estudiantes para enfrentar problemas reales del ámbito económico y administrativo.

Sin embargo, la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas no solamente está presente en los niveles básicos de escolaridad, sino que también persiste en el nivel superior. Aunque los estudiantes en este nivel ya han tenido un acercamiento previo con este tipo de ecuaciones, en muchos casos traen consigo vacíos conceptuales y dificultades en su comprensión.

Uno de los aspectos que explica esta situación es el carácter generalizado y abstracto con el que suele enseñarse el tema en la trayectoria educativa previa. De manera reiterada, los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones cuadráticas de forma mecánica los procedimientos, sin comprender el significado de los resultados obtenidos. Esta práctica se replica en el nivel universitario, donde el enfoque se centra más en cubrir contenidos del Plan de Estudios que en promover experiencias de aprendizaje ligadas al contexto administrativo.

Por otro lado, también está presente la problemática que los estudiantes tienen al no lograr establecer conexiones significativas entre el conocimiento matemático y su campo de estudio. Esta desconexión impide que los estudiantes comprendan la importancia de las ecuaciones cuadráticas como un recurso para analizar y resolver situaciones propias de su ámbito.

La identificación de la problemática expuesta evidencia la necesidad de replantear la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas con los estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Administración de la Universidad de Sonora. Esta situación se explica por una combinación de factores que, al interactuar entre sí, generan obstáculos significativos para el aprendizaje. En primer lugar, persisten vacíos conceptuales provenientes de etapas educativas anteriores, lo que dificulta que los estudiantes construyan una comprensión sólida de los elementos algebraicos involucrados. Estos vacíos se manifiestan en dificultades para realizar operaciones elementales, interpretar expresiones y operar con símbolos. A ello se suma la escasez de recursos didácticos que propicien experiencias de aprendizaje más significativas. La ausencia de materiales, concretos o digitales, que permitan manipular, visualizar y comparar distintas maneras de expresar y trabajar las ideas matemáticas dificulta el desarrollo de estrategias personales para analizar las ecuaciones cuadráticas. El uso de herramientas tradicionales, sin mediaciones pedagógicas que favorezcan la exploración, restringe la oportunidad de que los estudiantes construyan significados a partir de la interacción con distintos artefactos. También, se observa que predomina una práctica docente centrada en la repetición de algoritmos, donde la resolución de ecuaciones cuadráticas se presenta como un conjunto de pasos mecánicos desvinculados de situaciones relevantes para el campo administrativo. Esta aproximación limita la posibilidad de que los estudiantes comprendan el sentido y la utilidad del contenido matemático, reduciendo su aprendizaje a la memorización de procesos que difícilmente pueden transferir a la resolución de problemas profesionales. Finalmente, se identifica una escasa integración entre el contenido matemático y los saberes propios de la formación en administración. Esta desconexión genera que el estudio de las ecuaciones cuadráticas se perciba como un requisito curricular sin relación con

la toma de decisiones en contextos de costos, ingreso, proyecciones o análisis financiero. Como resultado, los estudiantes no logran establecer vínculos entre el álgebra y los problemas que enfrentarán en su trayectoria académica y profesional.

Estos cuatro factores ponen de manifiesto la urgencia de transformar las prácticas de enseñanza mediante enfoques que promuevan la exploración, el uso de materiales y la modelización como medios para apoyar la construcción de significados. Replantear la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas se vuelve fundamental para favorecer un aprendizaje vinculado con los desafíos reales de la formación en administración.

4.3 Exploración con estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Administración

Para refinar el planteamiento de los objetivos del Proyecto de Intervención Didáctica, se llevó a cabo una sesión de enseñanza *exploratoria* con un grupo de estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Administración de la Universidad de Sonora (Figura 18). El propósito de esta exploración fue obtener información inicial sobre la manera en que los estudiantes interactúan con los bloques algebraicos como material manipulable y valorar la pertinencia de este recurso didáctico en el nivel superior. Para ello, se seleccionaron dos actividades propuestas por Wah y Picciotto (1994), las cuales fueron adaptadas conforme a los propósitos específicos definidos para cada una de ellas (Véase Anexo 1 y 2).

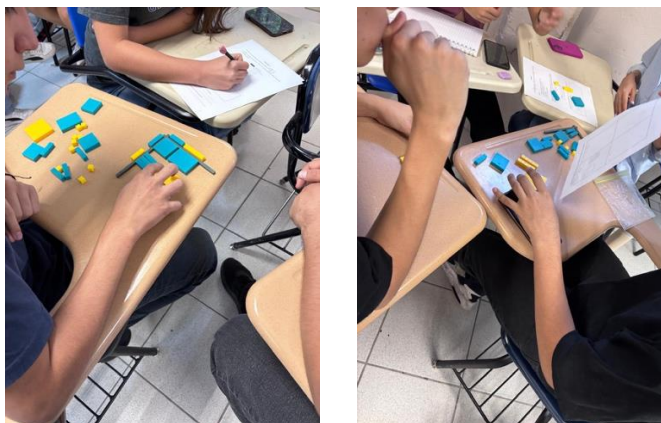


Figura 18. Fotografías tomadas durante la exploración.

El uso de material manipulable también permitió visualizar la sustitución de valores al modificar la variable dentro de las representaciones. Esta acción favoreció la comprensión funcional de las expresiones algebraicas, al posibilitar que los estudiantes observaran de manera directa los efectos de los cambios en la variable, como se muestra en la Figura 19. Este tipo de actividad promovió un carácter exploratorio, la discusión y reflexión colectiva entre los equipos.

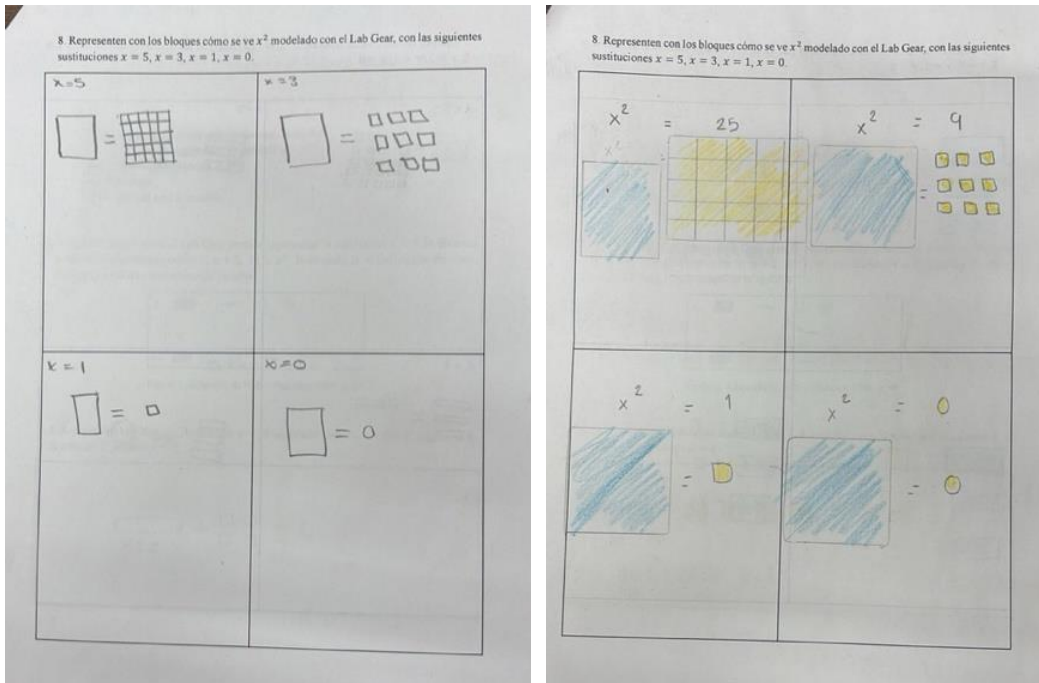


Figura 19. Respuestas dadas por dos equipos de estudiantes.

La segunda actividad se centró en el armado de configuraciones básicas con bloques para representar productos de expresiones lineales. Los estudiantes trabajaron en equipos de cuatro integrantes. Este ejercicio buscaba que identificaran la estructura de expresiones cuadráticas generadas a partir de multiplicaciones de dos expresiones lineales y que verbalizaran sus observaciones sobre las relaciones entre la construcción concreta y la expresión simbólica correspondiente. Al menos dos equipos lograron explicar con sus propias palabras el significado de las representaciones construidas con los bloques como se puede observar en la Figura 20.

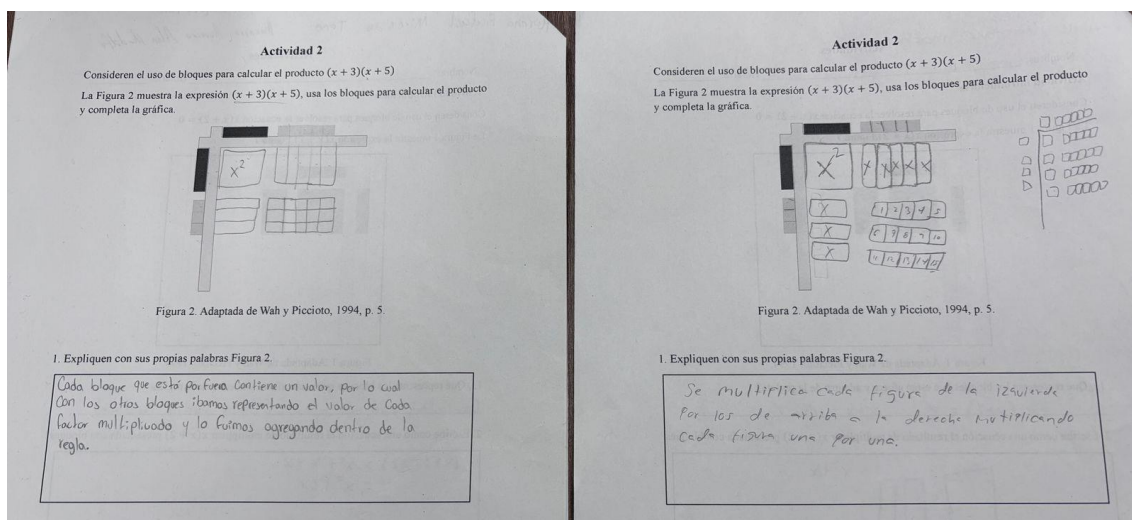


Figura 20. Respuestas dadas por dos equipos de estudiantes a la consigna 1 de la Actividad 2.

Se observó que no todos los equipos lograron identificar con claridad esta relación (Figura 21), lo que evidenció diferencias en la comprensión de la estructura algebraica del producto. Algunos grupos lograron establecer correctamente la correspondencia entre la representación concreta y la simbólica, expresando la ecuación resultante en forma desarrollada, mientras que otros se limitaron a describir la figura o a representar los bloques sin traducir sus construcciones al lenguaje algebraico. Estas diferencias ponen de manifiesto la necesidad de fortalecer el acompañamiento docente durante la transición de lo concreto a lo simbólico, promoviendo que los estudiantes reflexionen sobre el significado de los términos obtenidos y su relación con la estructura de la ecuación cuadrática.

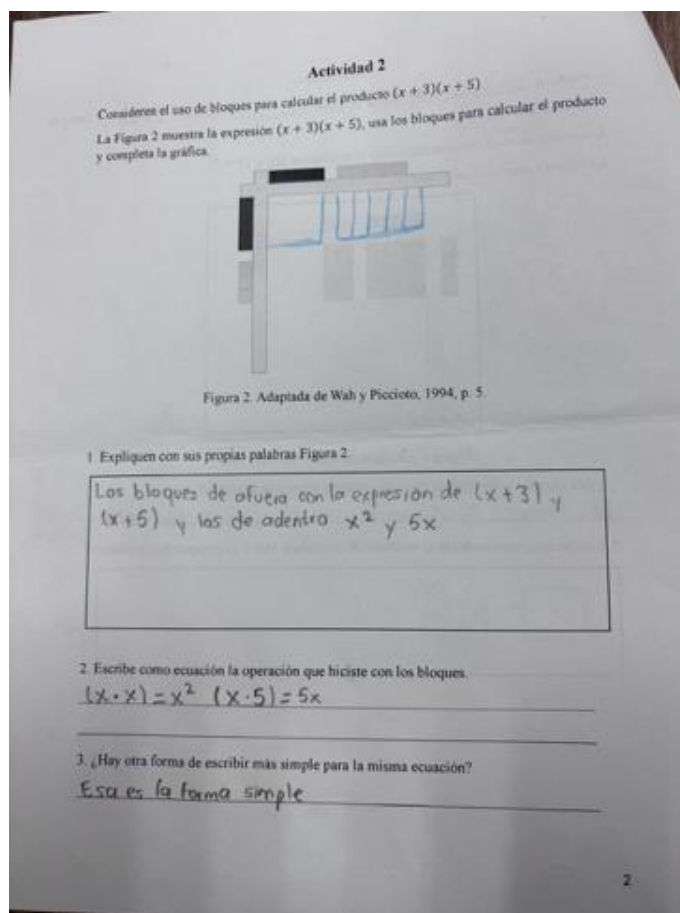


Figura 21. Respuesta dada por un equipo de estudiantes a la consigna 2.

Los resultados de la exploración mostraron que los estudiantes lograron familiarizarse rápidamente con el material y mostraron interés por manipularlo para comprobar sus conjeturas. Sin embargo, también se identificaron dificultades relacionadas con operaciones elementales, así como obstáculos para establecer correspondencias entre la representación concreta y la expresión algebraica. Estas observaciones podrán permitir ajustar la secuencia previa a la implementación formal y anticipar necesidades de acompañamiento por parte del profesor, así como momentos de discusión guiada.

Cabe señalar que, la exploración ofreció un espacio valioso para explorar la viabilidad del uso de bloques algebraicos en un curso del ámbito administrativo y para identificar elementos conceptuales y didácticos que deberán fortalecerse en el diseño definitivo de la propuesta de enseñanza.

4.4 Objetivos

A partir del análisis previo, se presentan a continuación el objetivo general del proyecto de intervención didáctica, así como los objetivos específicos que orientarán el desarrollo de este trabajo, con la finalidad de alcanzar dicho objetivo general.

Se establece como *objetivo general* de la propuesta el siguiente:

- Diseñar una intervención didáctica que integre el uso de materiales manipulables y herramientas digitales para fortalecer la comprensión y resolución de ecuaciones cuadráticas, promoviendo un enfoque tanto conceptual como procedimental en contextos relacionados con las Ciencias Económicas y Administrativas.

Con el fin de lograr el objetivo general, se establecen los siguientes *objetivos específicos*:

OE1. Diseñar actividades didácticas que conecten las expresiones y ecuaciones cuadráticas con situaciones realistas del campo económico administrativo.

OE2. Promover, a través del uso de materiales manipulables y recursos digitales, la exploración de contextos realistas que propicien la discusión y reflexión para la resolución de problemas.

OE3. Facilitar un proceso de transición del uso de materiales manipulables a formas de representación más formales, que coadyuven a fortalecer la comprensión de las ecuaciones cuadráticas.

OE4. Estructurar estrategias de Orquestación Instrumental que orienten la interacción entre los estudiantes, el material manipulable y las herramientas digitales, que favorezcan la construcción de esquemas de acción colectiva durante la resolución de problemas.

Cabe señalar que, estos objetivos configuran una ruta de trabajo que busca no solo diversificar los recursos y métodos mediante los cuales los estudiantes se aproximan a las ecuaciones cuadráticas, sino también transformar la manera en que dichas nociones adquieren significado dentro de su formación profesional. La propuesta pretende generar un entorno de aprendizaje en el que el uso de materiales manipulables, las herramientas digitales y las situaciones vinculadas al ámbito económico-administrativo actúen de manera complementaria. Se espera favorecer la integración entre lo conceptual y lo procedimental, así como fortalecer la evolución desde interacciones concretas hacia formas más abstractas de trabajo matemático. Además, la incorporación de estrategias de Orquestación Instrumental permitirá gestionar de manera intencional las dinámicas en el aula para promover esquemas de acción colectiva que enriquezcan las experiencias de aprendizaje.

5. Aspectos teóricos

En esta sección, se describe el enfoque teórico que sustenta la propuesta de intervención didáctica, siendo esta la Génesis Instrumental y Orquestación Instrumental de Trouche (2004), que plantea que los artefactos, como los materiales didácticos, pueden convertirse en verdaderos instrumentos de aprendizaje si los estudiantes logran apropiarse de ellos. Desde esta perspectiva, un artefacto es un objeto puesto a disposición del estudiante, en esta propuesta serán los bloques algebraicos como material concreto y el software GeoGebra como material digital.

5.1 Descripción general de la teoría instrumentalista

Dentro de la teoría de la *Génesis Instrumental* de Trouche, los conceptos de artefacto, instrumento, instrumentalización, instrumentación y esquemas juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento mediante el uso de herramientas.

En ese sentido se puede señalar que un *artefacto* es un objeto físico o digital que puede ser utilizado en una actividad. Puede ser una calculadora, un software matemático, un material manipulable o cualquier herramienta externa que ayude en la resolución de problemas. Es importante precisar que un artefacto, al ser utilizado, implica siempre una intencionalidad. No se trata de manipular un objeto, sino de emplearlo con un propósito específico que guíe la acción y la toma de decisiones durante la resolución de una tarea.

Los conceptos de instrumento e instrumentalización tienen significados específicos dentro del contexto del uso de herramientas en el aprendizaje, siendo estos los siguientes:

- a) Un *instrumento* no es solo una herramienta física o digital (como una calculadora, un software o material manipulable), sino que se forma cuando un usuario (en este caso, un estudiante) le da sentido y lo integra en su actividad de resolución de problemas. Es decir, un instrumento es el resultado de la apropiación de un artefacto mediante esquemas de uso que se construyen a partir de la interacción con él. Es un constructo psicológico (Trouche, 2004), surge cuando una persona toma un artefacto y lo integra en su actividad, adaptándolo y dándole un propósito específico. La Figura 22 presenta los componentes que conforman un instrumento, es decir, un objeto que se usa para hacer cierta actividad y las ideas o formas de usarlo que le dan sentido.



Figura 22. Componentes de un instrumento

- b) Según Trouche (2004), el proceso de la Génesis Instrumental se compone de dos dimensiones interrelacionadas, la *instrumentalización* se orienta hacia el artefacto,

pues implica las acciones mediante las cuales el usuario lo transforma, adapta o enriquece para hacerlo más funcional y adecuado a los fines específicos de una actividad. Este proceso no se limita al uso mecánico del recurso, sino que supone una reconstrucción del artefacto a partir de las necesidades del sujeto, lo que puede derivar en nuevas formas de uso o en la creación de estrategias que amplían su potencial.

Por su parte, la *instrumentación* se dirige al sujeto y hace referencia al proceso de construcción y desarrollo de esquemas de acción mediante los cuales interactúa con el artefacto de forma cada vez más eficiente. A través de la experiencia, la reflexión y la práctica, el individuo desarrolla una comprensión más profunda de las posibilidades que ofrece el artefacto, integrándolo a su actividad cognitiva. Este proceso da lugar a un uso intencionado y estratégico del instrumento, permitiendo respuestas más eficaces y pertinentes en la resolución de las tareas.

En este sentido, dentro del enfoque instrumental, *esquemas* se refiere a patrones estructurados de pensamiento y acción que los individuos desarrollan al interactuar con artefactos y convertirlos en instrumentos. Los *esquemas* son estructuras mentales que guían la manera en que una persona usa un artefacto. Para Piaget (1936), un esquema es una estructura mental determinada que puede ser transferida y generalizada. Por otro lado, Vergnaud (1990), redefinió el esquema, como la “organización invariante de la conducta para una clase dada de situaciones”, siendo este tema una entidad funcional dinámica.

Cabe señalar que, en la Teoría de la Génesis Instrumental, existen dos tipos de esquemas que son importantes porque, al articular la interpretación que el estudiante hace del artefacto con las acciones que desarrolla para ajustarlo a la tarea, transforman dicho artefacto en un instrumento cognitivo que potencia su comprensión y su capacidad para resolver problemas matemáticos:

- *Esquemas de uso*: son las acciones y estrategias que un usuario desarrolla para manejar un artefacto y convertirlo en un instrumento. Estos esquemas pueden ser colectivos o individuales y evolucionan con la práctica. Están orientados hacia la gestión básica del artefacto. Incluyen las acciones y conocimientos necesarios para manejar las funciones fundamentales del artefacto (Trouche, 2004).
Algunos ejemplos de esquema de uso son: encender una calculadora, ajustar el brillo de la pantalla, seleccionar un botón específico para acceder a una función.
- *Esquemas de acción instrumentada*: son esquemas que combinan el conocimiento matemático con el uso del artefacto para resolver problemas. Es decir, no solo se trata de saber cómo operar con la herramienta, sino de integrarla en el proceso de razonamiento matemático. Son más complejos y están orientados a la realización de tareas específicas con el artefacto. Estos esquemas requieren de una integración más profunda de conocimiento, ya que se basan en cómo el usuario utiliza el artefacto para llevar a cabo una actividad concreta.

Algunos ejemplos de esquemas de acción instrumentada son: resolver una ecuación cuadrática con una calculadora graficadora, utilizar un software para crear un modelo financiero, generar gráficos en Excel para analizar datos administrativos.

De acuerdo con el enfoque de la Génesis Instrumental (Trouche, 2004), se describen a continuación los posibles esquemas de uso y de acción instrumentada que podrían surgir durante la intervención. Para ilustrar cómo pueden emerger estos distintos tipos de esquemas, se presentan tres tablas: La Tabla 9 se enfoca en el material manipulable concreto, la Tabla 10 en el material digital, y la Tabla 11 en la aplicación de estos esquemas en contextos económicos-administrativos.

Tabla 9. Ejemplos de tipos de esquemas que podrían surgir con el uso de material manipulable concreto (bloques algebraicos).

Tipo de esquema	Ejemplo posible en el proyecto
Esquemas de uso	<ol style="list-style-type: none"> 1. El estudiante acomoda los bloques que representan x^2, x y los términos constantes para formar figuras cuadradas. 2. Identifica visualmente qué bloque corresponde a x^2, cuáles a x, y cuáles a los valores numéricos. 3. Cuenta los bloques y los organiza en filas y columnas para equilibrar ambos lados de una ecuación cuadrática.
Esquemas de acción instrumentada	<ol style="list-style-type: none"> 1. El estudiante reconoce que, al organizar los bloques en forma de cuadrado, la figura obtenida corresponde a la representación geométrica del cuadrado de un binomio, por ejemplo, identificando que $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$. 2. El estudiante reflexiona sobre la relación entre los términos lineal y constante, reconociendo que al variar el primero, el segundo debe ajustarse para mantener la representación geométrica de un cuadrado perfecto. 3. El estudiante emplea los bloques para explicar el proceso de completar el cuadrado como una transformación algebraica con sentido geométrico, y no solo como un procedimiento mecánico.

Tabla 10. Ejemplos de tipos de esquemas que podrían surgir con el uso de material manipulable digital (GeoGebra).

Tipo de esquema	Ejemplo posible en el proyecto
Esquemas de uso	<ol style="list-style-type: none"> 1. El estudiante manipula el deslizador en GeoGebra para cambiar el valor de a, b o c en la función $y = ax^2 + bx + c$. 2. Ajusta la vista gráfica para observar cómo cambia la parábola al modificar los coeficientes. 3. Utiliza la herramienta de intersección para ubicar los puntos donde la función corta el eje x.
Esquemas de acción instrumentada	<ol style="list-style-type: none"> 1. Interpreta que, al variar a, la concavidad de la parábola cambia y deduce que el signo de a determina si la función tiene un máximo o mínimo. 2. Observa que los cambios en b desplazan el vértice horizontalmente y relaciona esta observación con la fórmula del vértice $x = -\frac{b}{2a}$. 3. Compara diferentes funciones cuadráticas y explica, a partir de la gráfica, cuál representa un problema administrativo (por ejemplo, maximización de utilidad o minimización de costos).

Tabla 11. Ejemplos de tipos de esquemas que podrían surgir con en contextos económicos-administrativos.

Tipo de esquema	Ejemplo posible en el proyecto
Esquema de uso	Sustituye valores numéricos en una función de costos $C(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener resultados específicos.
Esquemas de acción instrumentada	<ol style="list-style-type: none"> 1. Interpreta que la forma cuadrática del costo representa un crecimiento acelerado en la medida en que se aumenta la producción, vinculando la forma de la parábola con la realidad económica. 2. Analiza en GeoGebra el vértice de la parábola y lo interpreta como el punto de producción óptimo que minimiza el costo o maximiza la utilidad.

En la Figura 23 se presentan la caracterización de la Génesis Instrumental, vista como dos procesos relacionados (Trouche, 2004, p. 289). En esta teoría, se distingue entre el artefacto, que representa sus limitaciones y posibilidades; y el sujeto que incorpora su conocimiento y su método de trabajo. La interacción entre ambos se da a través de dos procesos (flechas horizontales): La instrumentación, dirigida hacia el artefacto, mediante la cual el sujeto adapta y utiliza el artefacto de manera efectiva; y la instrumentalización, dirigida hacia el sujeto, que consiste en la construcción y desarrollo de esquemas de acción que permiten aprovechar el artefacto de forma cada vez más eficiente. Como resultado de esta relación surge el instrumento, entendido como la combinación del artefacto y los esquemas de acción instrumentada.

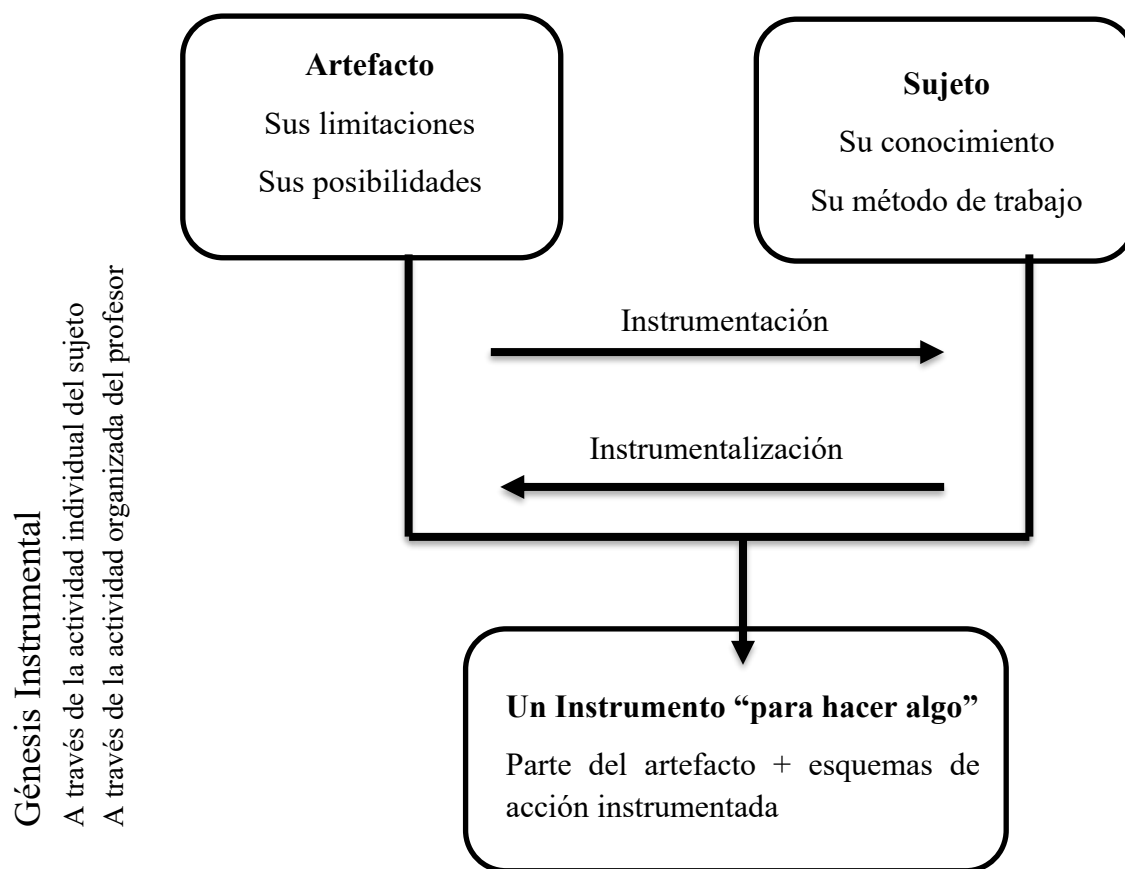


Figura 23. Génesis Instrumental como una combinación de dos procesos. (Traducida de Trouche, 2004, p. 289).

5.2 Génesis instrumental como referencia para el diseño de enseñanza

La enseñanza puede favorecer la instrumentación: Desde la perspectiva de la Génesis Instrumental, la enseñanza no debe limitarse a la simple introducción de herramientas, sino que debe diseñarse de manera que oriente y facilite el proceso de instrumentación, es decir, la apropiación progresiva de un artefacto por parte del estudiante hasta convertirlo en un instrumento útil para la resolución de tareas (Artigue, 2002). Para ello, el docente puede

proponer situaciones didácticas que propicien esquemas de uso variados, promoviendo la exploración y reflexión sobre las acciones realizadas con el material.

La génesis instrumental favorece el aprendizaje conceptual: El proceso de Génesis Instrumental, entendido como la interacción entre la instrumentalización (adaptación del artefacto por parte del usuario) y la instrumentación (influencia del artefacto sobre el usuario), permite que el estudiante no solo utilice una herramienta, sino que desarrolle esquemas que articulan el uso del instrumento con nociones matemáticas (Trouche, 2005). Así, este proceso contribuye a la construcción de significados y al aprendizaje conceptual, ya que el estudiante se ve obligado a movilizar conocimientos y a establecer vínculos entre acciones técnicas y conceptos matemáticos.

¿Cómo se evalúa la génesis instrumental y el desarrollo conceptual?: La evaluación de la génesis instrumental implica observar cómo el estudiante transforma un artefacto en un instrumento a través de sus esquemas de uso, los cuales pueden identificarse mediante la resolución de tareas, el análisis de producciones escritas, las interacciones orales y el uso del material en situaciones diversas (Gueudet y Trouche, 2009). Por su parte, el desarrollo conceptual puede evaluarse a partir del grado de articulación entre las acciones realizadas con el instrumento y las nociones matemáticas movilizadas, así como por la capacidad del estudiante para transferir lo aprendido a nuevas situaciones problemáticas.

5.3 La Orquestación Instrumental y el papel del docente

Si la Génesis Instrumental describe cómo los estudiantes se apropian de los instrumentos, la Orquestación Instrumental (Trouche, 2004; Drijvers et al., 2010) explica cómo el docente organiza el entorno de aprendizaje para que ese proceso ocurra. En esta perspectiva, el profesor actúa como un director que dispone los recursos, las interacciones y las consignas, con el fin de guiar la actividad de los estudiantes hacia la construcción de conocimiento matemático. La Orquestación Instrumental se estructura a partir de tres elementos fundamentales: la configuración didáctica, el modo de ejecución y el desempeño didáctico.

La configuración didáctica comprende la organización del entorno de aprendizaje, es decir, cómo se disponen los instrumentos, los estudiantes y las tareas. En el proyecto, la configuración incluye el trabajo colaborativo con bloques algebraicos y la exploración digital en GeoGebra, en torno a problemas contextualizados en la Administración.

El modo de ejecución se refiere a la manera en que el profesor conduce la actividad, por ejemplo, las instrucciones que formula, las preguntas que plantea y los momentos de interacción que promueve. En esta propuesta, el docente interviene mediante preguntas orientadoras que fomentan la reflexión, sin resolver directamente las tareas. Se alternan momentos de trabajo autónomo con discusiones grupales, buscando que los estudiantes articulen sus observaciones y argumenten sus conclusiones.

Por último, el desempeño didáctico corresponde a la práctica real del docente durante la sesión, cuando responde a las situaciones imprevistas, adapta las estrategias y promueve la participación de los estudiantes. Es en este nivel donde se observa la flexibilidad docente y su capacidad para guiar el proceso de Génesis Instrumental en función de las necesidades que surjan del grupo.

En Figura 24 la según las diferentes formas en que el profesor gestiona la interacción entre los estudiantes, las herramientas y las tareas. En la propuesta se seleccionaron dos de ellas Enlazar pantalla-pizarra y Sherpa en acción por su pertinencia para analizar la articulación entre el uso de material manipulable concreto, los recursos digitales y la participación de los estudiantes en la construcción del conocimiento.

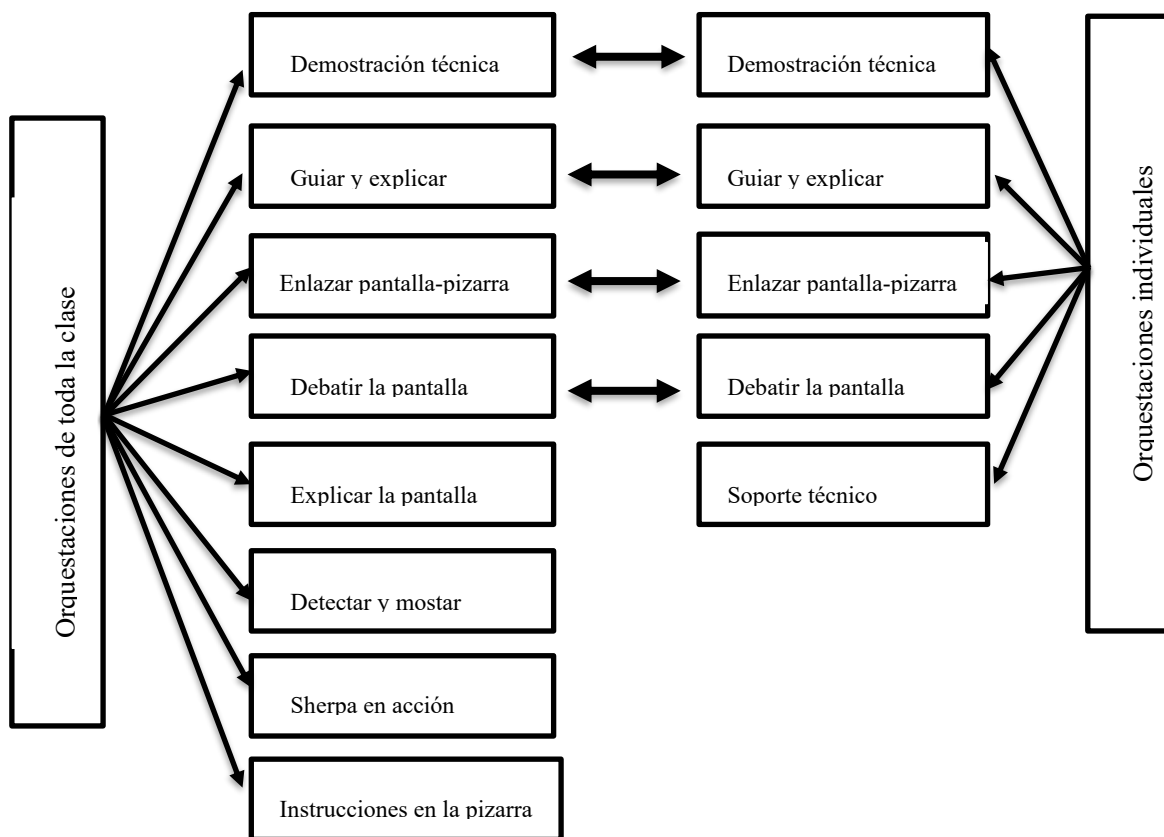


Figura 24. Visión general de las orquestaciones de toda la clase e individuales (Drijvers et. al, 2010, p. 998).

5.3.1 Orquestaciones seleccionadas para la intervención didáctica

En el presente proyecto se seleccionaron dos orquestaciones instrumentales para el análisis y diseño de la intervención didáctica: Enlazar pantalla-pizarra y Sherpa en acción.

Cabe señalar que ambas orquestaciones constituyen estrategias de gestión del aula en las que el profesor organiza, orienta y coordina las interacciones entre los estudiantes, los recursos tecnológicos y los medios tradicionales. Desde esta perspectiva, el profesor actúa

como mediador entre los entornos tecnológicos y los modos convencionales de trabajo, guiando a los estudiantes hacia una comprensión más profunda de los conceptos.

El valor didáctico de estas orquestaciones radica en su potencial para propiciar que las acciones realizadas en el entorno digital no se limiten a la manipulación técnica de recursos, sino que se vinculen con el razonamiento matemático y con formas de representación más cercanas al lenguaje simbólico y gráfico que los estudiantes utilizan en su formación. De esta manera, el uso del material ya sea digital o concreto se integrará en tareas que promuevan la reflexión, la argumentación y la construcción compartida de significados. Así, el aula se transformará en un espacio de interacción y diálogo donde la tecnología no sustituye la comprensión, sino que actúa como mediadora entre la acción, la interpretación y la formalización del conocimiento matemático.

La selección de las orquestaciones *Enlazar pantalla-pizarra* y *Sherpa en acción* responde a la intención de analizar cómo el profesor puede aprovechar la complementariedad entre distintos recursos y formas de participación en el aula. Estas orquestaciones permitirán observar cómo se produce la interacción entre los estudiantes, el profesor y la tecnología en el desarrollo de actividades.

En la orquestación *Enlazar pantalla-pizarra*, el profesor destaca la conexión entre las acciones realizadas en el entorno tecnológico y su correspondencia con las representaciones matemáticas habituales en el papel, el libro o el tablero. Esta orquestación busca que el estudiante reconozca las relaciones entre los procedimientos efectuados con herramientas digitales como la manipulación de gráficas o la resolución de ecuaciones en programas interactivos y las expresiones matemáticas que se emplean de manera tradicional. La configuración didáctica contempla tanto el acceso a los medios tecnológicos, de proyección y una disposición del aula que facilita la visualización simultánea de ambos espacios. Esta doble visualización (pantalla-pizarra) permitirá que los estudiantes observen cómo los resultados obtenidos digitalmente pueden interpretarse, verificarse o reformularse mediante los lenguajes matemáticos convencionales, fortaleciendo la comprensión de los conceptos. En cuanto a los modos de ejecución, el profesor puede iniciar la orquestación a partir del trabajo previamente desarrollado por los estudiantes o bien proponer una nueva tarea o situación problemática que funcione como punto de partida. En ambos casos, el papel del docente es esencial para guiar la discusión y resaltar las conexiones conceptuales entre los procedimientos tecnológicos y los razonamientos matemáticos. En este tipo de orquestación también se fomenta el diálogo entre los estudiantes, quienes pueden contrastar sus observaciones, explicar sus estrategias o cuestionar los resultados obtenidos. De este modo, el teclado y la pantalla se convierten en instrumentos complementarios para la construcción colectiva del contenido matemático.

Por otra parte, en la orquestación *Sherpa en acción*, un estudiante denominado Sherpa (Trouche, 2004), utiliza la tecnología para mostrar su propio trabajo o ejecutar las acciones que el profesor solicita. Este tipo de orquestación sitúa al estudiante en una posición activa,

pues se convierte en el mediador entre la herramienta tecnológica y el resto del grupo. La configuración didáctica requiere un entorno que facilite visualización de la pantalla y la interacción entre los participantes, de manera que las acciones del Sherpa puedan ser observadas, comentadas y analizadas colectivamente. Es indispensable que el estudiante tenga el control sobre la herramienta tecnológica, ya que su papel no se limita a reproducir instrucciones, sino a tomar decisiones, argumentar sus procedimientos y reflexionar sobre los resultados que obtiene. En los modos de ejecución de esta orquestación, el profesor puede solicitar al Sherpa que presente o explique su propio trabajo, o bien que realice acciones específicas dentro del entorno digital en respuesta a preguntas o desafíos planteados. Mientras tanto, el resto del grupo observa y analiza las acciones, lo que favorece el intercambio de ideas, la formulación de hipótesis y la discusión de los procedimientos utilizados. La elección de ambas orquestaciones se justifica por su capacidad de adaptarse a contextos donde se combinan materiales manipulables concretos y herramientas digitales.

En Enlazar pantalla-pizarra, el profesor puede emplear los materiales concretos para representar o verificar visualmente los procesos que se ejecutan en la pantalla, permitiendo que los estudiantes pasen de la acción concreta a la formulación simbólica. En Sherpa en acción, los materiales concretos pueden servir como apoyo para que el estudiante Sherpa ilustre sus procedimientos. De esta manera, ambas orquestaciones ofrecen una estructura flexible que integra la tecnología con el trabajo manual, favoreciendo una comprensión más significativa de los conceptos matemáticos.

En conjunto, las orquestaciones Enlazar pantalla-pizarra y Sherpa en acción permiten analizar cómo las estrategias de gestión del aula pueden influir en la manera en que los estudiantes exploran, comunican y consolidan su aprendizaje. Estas orquestaciones promueven la interacción entre diferentes formas de representación, fortaleciendo el vínculo entre la acción, el razonamiento y la interpretación. También, otorgan al profesor un papel activo como mediador y diseñador de tareas que fomentan la participación y la reflexión colectiva del conocimiento. En este sentido, la elección de estas dos orquestaciones dentro del proyecto de intervención didáctica responde al propósito de aprovechar el potencial de la tecnología y del material manipulable concreto como recurso que enriquecen los procesos de enseñanza y aprendizaje en el estudio de las ecuaciones cuadráticas, promoviendo una conexión entre la acción concreta y la abstracción simbólica.

En esta propuesta, la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental se integran para comprender y orientar el trabajo de los estudiantes con los materiales manipulables y recursos digitales durante el estudio de las ecuaciones cuadráticas. Cada uno aporta una perspectiva particular sobre los procesos que se busca favorecer, por lo que el uso articulado permite diseñar, conducir y analizar la intervención desde una mirada más completa.

Por un lado, la Génesis Instrumental se emplea para comprender cómo los estudiantes transforman el material manipulable en un instrumento de pensamiento matemático. Desde esta perspectiva, se pretende analizar las acciones, exploraciones y construcciones personales

que los estudiantes realizan al interactuar con el recurso, poniendo atención tanto a los procesos de instrumentalización (las transformaciones que el estudiante hace del material) como de instrumentación (los esquemas de acción que se van configurando a partir de ese uso). Este enfoque ofrece criterios para interpretar los avances en la construcción de significados, así como para valorar la manera en que los estudiantes vinculan lo concreto, lo verbal y lo simbólico durante la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Por otro lado, la Orquestación Instrumental se utiliza como guía para diseñar y conducir la intervención del aula. Desde esta perspectiva, se definirá cómo se organizará el trabajo colectivo, qué configuraciones didácticas se emplearán y qué intervenciones del profesor permitirán favorecer la exploración, el diálogo y la construcción conjunta de estrategias. La Orquestación permitirá planificar de manera intencionada las configuraciones de uso del material manipulable, los momentos de interacción entre estudiantes, y las dinámicas de discusión.

El uso combinado de la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental permite que el proyecto se sostenga en dos niveles complementarios: La Génesis orienta el análisis de los procesos cognitivos y de apropiación del instrumento por parte de los estudiantes, mientras que la Orquestación orienta el diseño y conducción de las actividades, así como la creación de condiciones que posibiliten esa apropiación. En conjunto, ofrecen una estructura conceptual que no solo guía la planificación y la implementación, sino también aporta criterios para valorar la intervención y comprender los procesos que los estudiantes desarrollan al trabajar con ecuaciones cuadráticas apoyándose en materiales manipulables.

6. La propuesta y sus características

El objetivo principal de la intervención didáctica es promover en los estudiantes la construcción de significados sobre las expresiones y ecuaciones cuadráticas mediante el uso de materiales manipulables concretos y digitales, favoreciendo un carácter exploratorio que les permita establecer conexiones entre diferentes formas de expresión en la resolución de problemas vinculados al ámbito administrativo. Se busca que el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas deje de percibirse como un proceso mecánico o puramente algorítmico, y se convierta en una oportunidad para comprender los principios que sustentan los modelos matemáticos aplicados en administración.

La propuesta de enseñanza integra recursos materiales que permitirán a los estudiantes visualizar los procesos algebraicos y transitar de manera gradual desde lo concreto hacia la formalización simbólica.

6.1 Ubicación y pertinencia curricular

La propuesta de intervención didáctica estará dirigida a estudiantes de primer semestre que cursan el Espacio Educativo Matemáticas de la Licenciatura en Administración

en la Universidad de Sonora. El proyecto surge de la necesidad de replantear la enseñanza de las ecuaciones cuadráticas en el contexto de las Ciencias Económicas y Administrativas, debido a que tradicionalmente este contenido se aborda de manera abstracta, descontextualizada y desvinculada de los problemas reales que enfrentan los futuros profesionales del área. La propuesta busca resignificar este contenido ofreciendo a los estudiantes experiencias de aprendizaje basadas en la exploración, la reflexión y la construcción de significados a través del uso de material manipulable.

6.2 Artefactos e instrumentación en la propuesta

Se emplean recursos concretos que permiten visualizar procesos algebraicos y facilitar la transición hacia la formalización algebraica. El uso de estos materiales no se concibe como una simple herramienta didáctica, sino como un instrumento cognitivo que apoya la construcción del conocimiento y promueve la exploración activa de las relaciones algebraicas. Mediante la manipulación de objetos concretos, los estudiantes pueden observar, representar y analizar las estructuras propias del álgebra, en donde los estudiantes no solo ejecutan procedimientos, sino que reflexionan sobre su sentido. Su uso favorece un carácter exploratorio en el aula, donde los estudiantes no se limitan a aplicar reglas o algoritmos, sino que construyen, prueban y justifican sus ideas a partir de la observación y el razonamiento.

Por su parte, los materiales digitales activan procesos de visualización dinámica, al permitir que los estudiantes anticipen cambios en la representación gráfica al modificar coeficientes y parámetros. Esta interacción promueve la formulación de hipótesis y la toma de decisiones, al comparar mentalmente distintos escenarios y reflexionar sobre cómo cada variación afecta la representación de la expresión algebraica. Así, tanto los manipulables concretos como los digitales estimulan procesos de razonamiento, análisis y síntesis que consolidan la comprensión algebraica en contextos prácticos.

Se puede señalar que se emplearán bloques algebraicos como material manipulable concreto, estos bloques permiten representar expresiones y ecuaciones cuadráticas mediante la composición y descomposición de figuras geométricas, ofreciendo a los estudiantes una forma tangible de comprender la estructura de la factorización. En esta propuesta, los bloques actuarán como mediadores entre la acción concreta y el pensamiento abstracto, en el sentido que permitirán a los estudiantes visualizar y manipular físicamente las expresiones algebraicas, identificar relaciones, y trasladar esas experiencias a la formulación simbólica de los procedimientos y resultados.

La principal ventaja de utilizar bloques algebraicos radica en que los estudiantes logran visualizar los procesos algebraicos y comprender el sentido de las operaciones que realizan. El trabajo con estos materiales favorece la identificación de patrones y la comprensión de las relaciones entre las dimensiones geométricas y las expresiones algebraicas. Además, el uso de los bloques fomenta la argumentación, ya que los estudiantes deben justificar sus acciones y establecer correspondencias entre lo que construyen y lo que expresan simbólicamente. Mediante la manipulación de objetos concretos, los estudiantes

pueden observar, representar y analizar las estructuras propias del álgebra, contribuyendo así al desarrollo de significados más sólidos y duraderos. En la sección 3.2 se presentan resultados de diversas experiencias de enseñanza que destacan las ventajas del uso de material manipulable en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Estos trabajos coinciden en señalar que los manipulables favorecen la exploración y contribuyen a que los estudiantes construyan significados más sólidos.

En cuanto a los criterios para dejar de utilizar los bloques, se propone que esta transición ocurra de forma paulatina y reflexiva, considerando varios aspectos del aprendizaje:

1. Cuando logren expresar y manipular las relaciones algebraicas mediante símbolos, reconociendo las equivalencias con las representaciones construidas previamente con el material.
2. Cuando puedan prever los resultados de combinaciones o transformaciones algebraicas sin necesidad de construirlas físicamente.
3. Cuando se requiera abordar ecuaciones cuadráticas cuyos coeficientes ya no sean enteros positivos.

Cumplidos estos criterios, los bloques algebraicos dejan de ser una herramienta necesaria para la ejecución de tareas y se transforman en un recurso de referencia que los estudiantes podrán evocar mentalmente para verificar o reinterpretar procedimientos. No se busca prescindir de los bloques de manera inmediata, sino acompañar a los estudiantes en un proceso progresivo que les permita internalizar el pensamiento algebraico mediante la transición gradual de la manipulación concreta con los bloques a la formulación simbólica y la anticipación de resultados, manteniendo la conexión con las experiencias manipulativas que sustentan sus aprendizajes. Este proceso se logra a través de la práctica sistemática de representar expresiones y ecuaciones con los bloques, discutir y justificar sus transformaciones, y luego representar esas operaciones a lenguaje algebraico.

Por otro parte, el uso de material digital como GeoGebra representa una ventaja significativa en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que permite a los estudiantes explorar de manera dinámica las relaciones entre expresiones algebraicas, representaciones gráficas y valores numéricos. Esta herramienta favorece la visualización inmediata de los efectos de los parámetros en una ecuación cuadrática, promoviendo la comprensión conceptual más allá de la manipulación simbólica. También, GeoGebra fomenta la experimentación y el razonamiento inductivo, ya que los estudiantes pueden formular conjeturas, comprobar resultados y reflexionar sobre los vínculos entre distintas representaciones, fortaleciendo su pensamiento algebraico y su autonomía en la construcción del conocimiento matemático.

6.3 Descripción general de las secuencias didácticas

El diseño de la propuesta contempla el desarrollo de cuatro secuencias didácticas organizadas en actividades progresivas que favorecen el avance gradual en la comprensión de los contenidos:

- i. Una secuencia introductoria con bloques algebraicos.
- ii. Secuencia de transición: De bloques a GeoGebra.
- iii. Secuencia sobre la interpretación de impuestos en problemas administrativos.
- iv. Secuencia sobre la interpretación del punto de equilibrio.

i. Secuencia introductoria con bloques algebraicos

Objetivo: Que los estudiantes comprendan y representen, mediante el uso de bloques algebraicos, las operaciones algebraicas elementales y el producto de dos expresiones lineales, identificando las relaciones entre los procedimientos concretos y sus expresiones simbólicas.

En esta secuencia, se introducirá a los estudiantes en el manejo de los bloques algebraicos como herramienta para explorar y comprender las operaciones básicas del álgebra. A través de actividades de construcción y descomposición de figuras formadas con los bloques, los estudiantes representarán sumas, productos y potencias de expresiones lineales. Así como en el trabajo manipulativo permitirá que visualicen cómo se genera una expresión cuadrática a partir del producto de dos binomios.

Al trabajar con bloques algebraicos, se espera que los estudiantes puedan observar de manera tangible varias propiedades fundamentales del álgebra. Por ejemplo, se manifiesta la propiedad conmutativa, ya que al reorganizar los bloques que representan sumas o productos, el resultado no cambia. También se espera que logren observar la propiedad distributiva, al combinar bloques de distintos tipos para formar productos de binomios y ver cómo cada término se multiplica con los demás. Además, de que identifiquen patrones relacionados con la propiedad asociativa, al agrupar bloques de manera diferente sin alterar el resultado, y la existencia de un elemento neutro para la suma, representado por los bloques que no afectan la cantidad total. Este trabajo pretende que los estudiantes establezcan conexiones entre sus propiedades y sus representaciones simbólicas, fortaleciendo la comprensión conceptual de las operaciones algebraicas y de la formación de expresiones cuadráticas.

ii. Secuencia de transición: De bloques a GeoGebra

Objetivo: Que los estudiantes reconozcan las estrategias y procedimientos utilizados con bloques algebraicos en un entorno digital mediante GeoGebra, explorando las posibilidades que ofrece esta herramienta para representar, verificar y analizar las relaciones algebraicas.

Los estudiantes trasladarán al entorno digital las estrategias y procedimientos previamente trabajados con los bloques algebraicos. A través de GeoGebra, explorarán la representación gráfica y simbólica de las expresiones y ecuaciones cuadráticas. Buscará que los estudiantes comprendan cómo las herramientas digitales pueden ampliar sus formas de análisis, permitiéndoles visualizar relaciones, comprobar resultados y generar nuevas conjeturas sobre los procedimientos algebraicos.

Al trasladar los procedimientos de los bloques algebraicos al entorno digital de GeoGebra, los estudiantes pueden observar y experimentar de manera interactiva diversas propiedades algebraicas. Se muestra nuevamente la propiedad conmutativa, al comprobar que el orden de los sumandos o factores no altera el resultado de la operación, y la propiedad distributiva, al visualizar cómo cada término de un binomio se multiplica por los términos del otro, generando la expresión cuadrática correspondiente. Además, se refuerza la propiedad asociativa, al reagrupar términos en sumas o productos sin cambiar el resultado.

iii. Secuencia didáctica: Interpretación de impuestos en problemas administrativos

Objetivo: Que los estudiantes comprendan el concepto de impuestos y su impacto en costos e ingresos, analizando situaciones del ámbito administrativo mediante la representación algebraica mediante la representación algebraica de las relaciones involucradas, y puedan interpretar gráficamente cómo los impuestos afectan la rentabilidad y el punto de equilibrio.

Los estudiantes trabajarán con situaciones administrativas en las que los impuestos inciden en el cálculo de costos, ingresos y utilidades. La secuencia permitirá identificar los diferentes tipos de impuestos aplicables en escenarios administrativos, representar algebraicamente los costos totales incluyendo impuestos y los ingresos generados por ventas, interpretar gráficamente los efectos de los impuestos sobre los ingresos, costos y utilidades, así como reflexionar sobre la importancia de los impuestos en la toma de decisiones administrativas y cómo afectan la rentabilidad de una empresa.

Los estudiantes cuando trabajan con problemas administrativos que incluyen impuestos se podrá identificar varias propiedades algebraicas en un contexto aplicado, entre ellas la propiedad distributiva, al descomponer costos totales en costos base más impuestos y al relacionar ingresos y gastos dentro de una misma expresión. También surge la propiedad aditiva, al sumar diferentes componentes de costo e ingreso para obtener totales, y la equivalencia algebraica, al verificar que distintas formas de expresar los costos e ingresos conducen al mismo resultado.

iv. Secuencia sobre la interpretación del punto de equilibrio

Objetivo. Que los estudiantes comprendan el significado del punto de equilibrio y lo interpreten algebraicamente a partir de situaciones del ámbito administrativo, estableciendo relaciones entre las expresiones que representan costos, ingresos y utilidades mediante representaciones gráficas y simbólicas para su análisis.

En esta secuencia, los estudiantes analizarán el punto equilibrio como un concepto importante en la toma de decisiones empresariales, vinculando su comprensión algebraica con su interpretación económica. Mediante actividades que involucran el planteamiento y resolución de ecuaciones cuadráticas derivadas de funciones de costos e ingresos, los estudiantes explorarán cómo identificar el punto en que la empresa no presenta ni pérdida ni ganancia. Se fomentará la interpretación de resultados mediante perspectivas numérica y gráfica.

La solución en los problemas de punto de equilibrio que involucran ecuaciones cuadráticas adquiere una importancia fundamental, no solo por su valor numérico, sino por el proceso de interpretación que conlleva. Desde el punto de vista matemático, la resolución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ permite determinar los valores que satisfacen la igualdad entre costo e ingreso total, lo que corresponde a los puntos donde la empresa no obtiene ni pérdida ni ganancia. Sin embargo, su relevancia se amplía al analizar el significado económico de las soluciones: dos valores reales indican dos puntos de equilibrio, uno representa una situación crítica y la ausencia de soluciones reales refleja un escenario de inviabilidad económica. Desde la perspectiva didáctica, la solución se convierte en un medio para promover la comprensión conceptual y no un fin en sí mismo, ya que posibilita que los estudiantes justifiquen los procedimientos empleados, validen los resultados dentro del contexto y relaciones sobre su interpretación gráfica y simbólica.

El contexto administrativo no se presenta como un simple escenario decorativo, sino como un espacio de representación y análisis que posibilita la construcción de significados. La contextualización se convierte en un medio para que los estudiantes comprendan que la matemática no es ajena a su formación, sino una herramienta para interpretar y tomar decisiones fundamentadas en datos cuantitativos.

Cabe señalar que estas secuencias se implementarán con un grupo de 40 estudiantes. El tiempo destinado para el desarrollo de cada sesión será de 50 minutos, distribuidos a lo largo de ocho semanas. Durante este periodo, se buscará favorecer la participación de los estudiantes mediante actividades que promuevan la exploración, el análisis y la reflexión en torno a las situaciones propuestas.

Se espera que los estudiantes logren:

- Reconocer que el producto de dos expresiones lineales genera una ecuación cuadrática y visualizar este proceso con material manipulable.
- Utilizar la factorización como un procedimiento de resolución de ecuaciones cuadráticas, comprendiendo su relación con las representaciones concretas y simbólicas.
- Identificar la utilidad de las ecuaciones cuadráticas en problemas reales del ámbito administrativo.
- Vincular la resolución de ecuaciones cuadráticas con problemas reales del ámbito administrativo, como el punto de equilibrio y el manejo de bodegas.

Cabe señalar que la propuesta de enseñanza se encuentra en una etapa de construcción en la que se están definiendo los criterios específicos que orientarán su diseño e implementación. Estos criterios se establecerán con base en el propósito general de la intervención, que busca promover en los estudiantes un carácter exploratorio en la resolución de problemas y favorecer la construcción de significados mediante el uso de material manipulable concreto y digital. La definición de los criterios implicará considerar aspectos relacionados con la coherencia entre los objetivos, las secuencias de actividades diseñadas y las estrategias de evaluación, de manera que se garantice la pertinencia de la propuesta en el contexto de la Licenciatura en Administración. Aunque aún no se han determinado de manera definitiva, se prevé que dichos criterios respondan a la necesidad de vincular los contenidos matemáticos con situaciones propias del ámbito administrativo, fomentando así una comprensión más profunda y significativa de las ecuaciones cuadráticas.

7. Consideraciones metodológicas

La presente propuesta de intervención didáctica se estructura metodológicamente a partir de cuatro fases que orientarán su desarrollo de manera ordenada y coherente. Cada fase responde a propósitos específicos que, en conjunto permitirán alcanzar el objetivo general y los objetivos específicos de la propuesta, centrados en fortalecer la comprensión conceptual y procedimental de las ecuaciones cuadráticas mediante el uso de materiales manipulables y herramientas digitales, en contextos vinculados con las Ciencias Económicas y Administrativas.

Desde esta perspectiva, esta metodología se centra en la organización sistemática de acciones didácticas que buscan propiciar la actividad matemática de los estudiantes, favorecer la interacción con los artefactos y analizar la evolución de sus esquemas de utilización, ya sea esquemas de uso, esquemas de acción instrumentada y esquemas de acción colectiva instrumentada. Dichas acciones se desarrollan dentro de un espacio de aula real, lo que permite que las decisiones metodológicas respondan a las características del grupo, al contenido matemático y a las metas formativas del Programa Educativo.

La propuesta se sustenta teóricamente en la Génesis Instrumental y la Orquestación Instrumental, planteada por Trouche (2004), que ofrece un marco para comprender la relación entre los sujetos y los artefactos en contextos de aprendizaje. Desde esta teoría, los materiales manipulables y las herramientas digitales son concebidos como artefactos que pueden transformarse en instrumentos cognitivos cuando el estudiante los integra a su actividad, desarrollando esquemas de utilización que le permiten organizar sus acciones y construir conocimiento matemático.

7.1 Organización metodológica de la propuesta

La estructura metodológica de la intervención se organiza conforme a la Figura 25. Cada una de estas fases responde a un conjunto de acciones articuladas que orientan la propuesta.

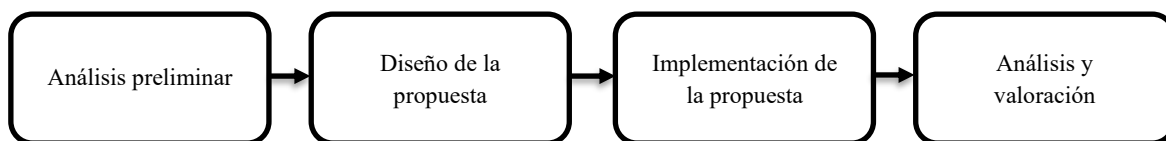


Figura 25. Fases metodológicas de la propuesta de intervención didáctica

Fase de análisis preliminar

En la primera fase se llevó a cabo una revisión de literatura especializada relacionada con la enseñanza del álgebra y de las ecuaciones cuadráticas en los distintos niveles educativos, prestando especial atención a los enfoques que integran el uso de materiales manipulables. El análisis de la información permitió identificar dificultades recurrentes en los estudiantes, entre ellas, el manejo mecánico de procedimientos y la falta de comprensión de significado de los coeficientes en las ecuaciones cuadráticas. Estas problemáticas respaldan la pertinencia de la propuesta y orientan el diseño de actividades que promuevan la exploración, el razonamiento y una comprensión más profunda de los conceptos algebraicos (véase Tabla 12).

Durante esta fase también se definieron el objetivo general y los objetivos específicos, orientados a la incorporación de recursos concretos y digitales como instrumentos para promover una comprensión de las ecuaciones cuadráticas. Se decidió como enfoque teórico la Teoría de la Génesis Instrumental y la Orquestación de Trouche (2004), la cual permitirá analizar cómo los estudiantes transforman los artefactos en instrumentos de pensamiento matemático mediante procesos de instrumentación e instrumentalización. Esta perspectiva posibilitará comprender la manera en que los materiales y las herramientas tecnológicas pueden favorecer la construcción de esquemas de acción organizados.

También se revisaron los Programas Educativos del área de Ciencias Económicas y Administrativas, en particular correspondiente al Espacio Educativo Matemática, con el propósito de asegurar la pertinencia de la intervención y analizar la relación entre los contenidos algebraicos y su aplicación en contextos profesionales. Este análisis permitió identificar una escasa vinculación entre la fundamentación matemática y las situaciones realistas del ámbito administrativo, debido a que los temas suelen abordarse de manera abstracta, atendiendo a la ejecución de procedimientos formales sin establecer conexiones explícitas con problemáticas en la toma de decisiones empresariales.

Tabla 12

Matriz de correspondencia entre la Fase 1, acciones, objetivos específicos y productos esperados.

Fase	Acciones principales	Objetivos específicos a los que contribuye	Productos esperados
Análisis preliminar	<p>Revisión de literatura.</p> <p>Identificación de dificultades en el aprendizaje de ecuaciones cuadráticas.</p> <p>Definición de los objetivos general y específicos.</p> <p>Selección del enfoque teórico: Génesis Instrumental y Orquestación Instrumental (Trouche, 1994).</p> <p>Análisis de la relación entre contenidos y su aplicación profesional.</p>	<p>OE1. Conectar expresiones y ecuaciones con situaciones realistas.</p>	<p>Análisis de literatura revisada.</p> <p>Diagnóstico inicial sobre dificultades en el aprendizaje de las ecuaciones cuadráticas.</p> <p>Objetivos general y específicos.</p> <p>Marco teórico definido (Génesis Instrumental y Orquestación Instrumental).</p> <p>Análisis curricular del área económico-administrativa.</p>

Fase de diseño

Esta fase corresponde al diseño de la propuesta didáctica, se elaboran las secuencias didácticas que integran el uso de materiales y herramientas digitales con el fin de favorecer la construcción de significados sobre las ecuaciones cuadráticas. El diseño busca propiciar un tránsito de lo concreto a lo abstracto, iniciando con experiencias de manipulación y visualización que permitan representar procesos algebraicos de manera tangible y avanzar hacia la formalización simbólica y analítica.

Se contempla elaborar el diseño de las cuatro secuencias didácticas durante el quinto semestre del Programa de Doctorado, correspondiente al periodo de enero a junio de 2026. En esta etapa también se prevé realizar el pilotaje de las dos primeras secuencias con el propósito de refinar el diseño antes de la implementación definitiva. Dicho pilotaje se llevará a cabo durante las dos primeras semanas del mes de mayo de 2026, mientras que la aplicación de la tercera secuencia está programada para agosto del mismo año.

Cabe señalar que, antes de su aplicación, se realizará un proceso de validación del diseño con al menos dos profesores que han impartido el Espacio Educativo Matemáticas, con el propósito de recoger sus opiniones respecto a la pertinencia, claridad y factibilidad de las actividades propuestas.

En esta etapa se definen los propósitos de aprendizaje, los materiales manipulables y las herramientas digitales que se integrarán a la secuencia didáctica. El diseño parte del análisis del contenido algebraico, con énfasis en las características estructurales de las

ecuaciones cuadráticas, su interpretación en distintos contextos y su vinculación con situaciones del ámbito económico-administrativo. Los materiales seleccionados tienen la función de permitir la exploración de las propiedades algebraicas y apoyar la construcción de significados mediante la acción y la visualización. Además, las herramientas digitales se incorporan como un medio para representar dinámicamente las relaciones, validar los procedimientos construidos durante la manipulación y profundizar en la comprensión de los conceptos algebraicos, ya que pueden establecer relaciones entre la forma algebraica, gráfica y numérica de una ecuación cuadrática.

El diseño de las secuencias de actividades se organiza de manera progresiva: se inicia con tareas de exploración y reconocimiento del material concreto, continúa con actividades de análisis y experimentación mediante el uso de GeoGebra y culmina con situaciones de aplicación vinculadas al ámbito económico-administrativo.

Este proceso responde a la intención de promover una evolución en los modos de razonamiento de los estudiantes, permitiendo que las acciones instrumentadas se consoliden y conduzcan hacia una comprensión sobre la fundamentación matemática. La secuencia 3 y 4 consideran contextos realistas relacionados con costos, ingresos, utilidades y análisis del punto de equilibrio, de modo que los estudiantes puedan identificar la aplicabilidad de las ecuaciones cuadráticas en la toma de decisiones administrativas.

En esta fase también se definen las estrategias de mediación docente que orientan la interacción entre los estudiantes y los artefactos. Dichas estrategias se centran en la exploración, la argumentación y la discusión colectiva, de modo que el proceso de aprendizaje se fundamente en la reflexión sobre las acciones realizadas. Además, se elaboran los criterios e instrumentos para recolección de datos que se utilizan posteriormente para analizar la implementación y valorar los resultados (véase Tabla 13).

Tabla 13

Matriz de correspondencia entre la Fase 2, acciones, objetivos específicos y productos esperados.

Fase	Acciones principales	Objetivos específicos a los que contribuye	Productos esperados
Diseño	Elaboración de cuatro secuencias didácticas con materiales manipulables y herramientas digitales. Diseño progresivo de actividades (de lo concreto a lo abstracto). Pilotajes de las secuencias.	OE1. Diseñar actividades didácticas que conecten las expresiones y ecuaciones cuadráticas con situaciones realistas del campo económico administrativo. OE2. Promover, a través del uso de materiales	Diseño completo de las cuatro secuencias didácticas. Reporte del pilotaje y ajustes realizados. Validación externa con docentes especialistas. Instrumentos de recolección de datos

	<p>Validación del diseño mediante docentes del Espacio Educativo Matemáticas.</p> <p>Selección de materiales manipulables y herramientas digitales.</p> <p>Definición de estrategias de mediación docente y Orquestación Instrumental.</p> <p>Elaboración de instrumentos de recolección de datos.</p>	<p>manipulables y recursos digitales, la exploración de contextos realistas que propicien la discusión y reflexión para la resolución de problemas.</p> <p>OE3. Facilitar un proceso de transición del uso de materiales manipulables a formas de representación más formales, que coadyuven a fortalecer la comprensión de las ecuaciones cuadráticas.</p> <p>OE4. Estructurar estrategias de Orquestación Instrumental que orienten la interacción entre los estudiantes, el material manipulable y las herramientas digitales, que favorezcan la construcción de esquemas de acción colectiva durante la resolución de problemas.</p>	<p>(rúbricas y guías de observación).</p> <p>Esquema de Orquestación Instrumental para cada secuencia.</p>
--	--	--	--

Fase de implementación

La implementación corresponde al desarrollo de las secuencias didácticas planificadas en el aula, donde los estudiantes interactúan con los materiales manipulables y las herramientas digitales. Durante esta fase, el docente desempeña un papel de guía que orienta, observa y acompaña las acciones de los estudiantes, interviniendo estratégicamente para favorecer la reflexión, la argumentación y la reorganización de las ideas.

De acuerdo con la Génesis Instrumental, la implementación propicia dos procesos complementarios: la instrumentalización, dirigida hacia el artefacto, y la instrumentación, dirigida hacia el sujeto. En el primero, el estudiante transforma el artefacto a través del uso, adaptándolo a sus necesidades y objetivos; en el segundo, el artefacto influye en el pensamiento del sujeto, modificando sus esquemas de acción y su forma de representar el conocimiento. La metodología de la propuesta busca generar las condiciones para que ambos procesos ocurran de manera integrada, permitiendo a los estudiantes construir instrumentos de aprendizaje que amplíen su comprensión de las ecuaciones cuadráticas.

La implementación se desarrolla en el Espacio Educativo Matemáticas con estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Administración. Para ello se va a contar con la colaboración de un profesor que funge como observador del proceso. El tiempo estimado que se tiene contemplado para la implementación es de un mes por cada secuencia didáctica.

Las sesiones estarán estructuradas para permitir que los estudiantes interactúen activamente con los materiales manipulables y las herramientas digitales, promoviendo la construcción colectiva de significados.

En la primera secuencia didáctica, los estudiantes se familiarizan con los bloques algebraicos identificando su correspondencia con los términos cuadráticos, lineales y constantes. Posteriormente, se hace un tránsito de las tareas realizadas con el material concreto al uso de herramienta digital con el propósito de que los estudiantes coordinen lo gráfico, lo tabular y lo algebraico en la resolución de problemas. Finalmente, en las últimas dos secuencias se integran situaciones contextualizadas del ámbito administrativo.

Durante esta fase se registrarán observaciones, producciones escritas y videgrabaciones, que posteriormente servirán como evidencia para el análisis y la valoración de la intervención. Los datos recabados permitirán identificar los procesos de aprendizaje y las transformaciones en las estrategias de los estudiantes al enfrentarse a la resolución de ecuaciones cuadráticas en contextos realistas.

El docente asume un papel activo en la planificación, mediación y reflexión sobre la práctica, actuando como orquestador instrumental, en el sentido propuesto por Trouche (2004). Esta función implica diseñar el entorno de aprendizaje, seleccionar las configuraciones didácticas adecuadas y conducir las interacciones en el aula para favorecer la construcción de instrumentos cognitivos. El docente observa las acciones de los estudiantes, identifica los esquemas que se van conformando y promueve la explicitación de los razonamientos que emergen durante la manipulación y el trabajo digital.

Por su parte, los estudiantes son los protagonistas del proceso, pues son quienes, a través de la interacción con los artefactos, construyen significados y reorganizan sus conocimientos previos. La metodología fomenta su participación, la experimentación, la argumentación y la transferencia de los aprendizajes hacia contextos significativos del ámbito económico-administrativo. Esta participación se fortalece mediante la colaboración y la reflexión conjunta, que permiten vincular las experiencias concretas con la comprensión simbólica y funcional del contenido.

La dinámica del aula durante la implementación privilegia el trabajo colaborativo y la discusión guiada, de manera que las interacciones entre los equipos favorezcan la confrontación de estrategias, la validación de resultados y la reflexión conjunta sobre las distintas maneras de abordar los problemas planteados. La observación sistemática permite

reconocer cómo los estudiantes configuran esquemas de uso de los materiales y cómo evolucionan sus formas de razonamiento algebraico a lo largo del proceso.

Este proceso se va llevar a cabo durante el sexto semestre, correspondiente al periodo de agosto a diciembre de 2026 (véase Tabla 14). En esta fase se implementarán las secuencias didácticas que previamente hayan sido validadas y ajustadas con base en los resultados obtenidos durante el pilotaje.

Tabla 14

Matriz de correspondencia entre la Fase 3, acciones, objetivos específicos y productos esperados.

Fase	Acciones principales	Objetivos específicos a los que contribuye	Productos esperados
Implementación	<p>Puesta en práctica de las secuencias didácticas.</p> <p>Registro de producciones escritas, videgrabaciones y dinámicas de discusión.</p> <p>Acompañamiento docente como orquestador instrumental.</p> <p>Identificación de esquemas de uso, de acción instrumentada y de acción colectiva instrumentada.</p>	<p>OE1. Diseñar actividades didácticas que conecten las expresiones y ecuaciones cuadráticas con situaciones realistas del campo económico administrativo.</p> <p>OE2. Promover, a través del uso de materiales manipulables y recursos digitales, la exploración de contextos realistas que propicien la discusión y reflexión para la resolución de problemas.</p> <p>OE3. Facilitar un proceso de transición del uso de materiales manipulables a formas de representación más formales, que coadyuven a fortalecer la comprensión de las ecuaciones cuadráticas.</p>	<p>Registro sistemático de evidencias (videos, notas de campo y guías de observación).</p> <p>Producciones escritas de los estudiantes.</p> <p>Informe de los esquemas que surgieron en los estudiantes.</p>

Fase de Análisis y Valoración

La última fase de la propuesta está prevista para realizarse durante el séptimo semestre del Programa de Doctorado, correspondiente al periodo de enero a junio de 2027. En esta etapa se examinarán de manera sistemática los resultados obtenidos a partir de la

implementación de las secuencias didácticas. Para ello, se organizará un proceso de análisis integral que considere distintas fuentes de información, como los registros de las sesiones, las producciones escritas de los estudiantes, las observaciones del aula, y de ser necesario, entrevistas realizadas a los participantes (Tabla 15).

Durante esta fase se buscará identificar patrones en las estrategias empleadas por los estudiantes, así como cambios en su manera de representar y resolver ecuaciones cuadráticas apoyándose en el material manipulable y en los recursos digitales utilizados en el curso. Se realizará un análisis detallado a partir de los esquemas de acción colectiva, de uso y de acción instrumentada que emergieron durante la implementación. Estos análisis permitirán identificar cómo los estudiantes articularon sus estrategias, cómo incorporaron el material y las herramientas digitales en sus modos de actuar y cómo dichos instrumentos influyeron en la reorganización de sus procedimientos. El análisis permitirá valorar la pertinencia del diseño y los procesos que promovió para favorecer la construcción de esquemas. Además, se presentará atención a las dificultades persistentes, con el fin de comprender su origen y estimar posibles ajustes. También, se explorarán los momentos en los que el material manipulable y las herramientas digitales favorecieron la discusión y la validación de procedimientos.

Asimismo, se examinará la orquestación instrumental desarrollada durante las sesiones, considerando las configuraciones diseñadas, las intervenciones realizadas y las dinámicas que se generaron en el aula. Esto posibilitará valorar la manera en que las decisiones docentes contribuyeron a orientar la actividad matemática, a propiciar intercambios de ideas y a guiar procesos de exploración y argumentación.

Los resultados de esta fase serán integrados en un documento que exponga las contribuciones del proyecto y sus alcances, destacando los aprendizajes obtenidos y las mejoras logradas en torno al uso del material manipulable y recursos digitales vinculados con la resolución de ecuaciones cuadráticas.

Tabla 15

Matriz de correspondencia entre la Fase 4, acciones, objetivos específicos y productos esperados.

Fase	Acciones principales	Objetivos específicos a los que contribuye	Productos esperados
------	----------------------	--	---------------------

Análisis y valoración	<p>Análisis sistemático de registros y producciones.</p> <p>Identificación de patrones en estrategias, representaciones y razonamientos.</p> <p>Análisis de esquemas de uso, de acción instrumentada y de acción colectiva instrumentada.</p> <p>Sistematización de resultados y elaboración de conclusiones.</p>	<p>OE1. Diseñar actividades didácticas que conecten las expresiones y ecuaciones cuadráticas con situaciones realistas del campo económico administrativo.</p> <p>OE2. Promover, a través del uso de materiales manipulables y recursos digitales, la exploración de contextos realistas que propicien la discusión y reflexión para la resolución de problemas.</p>	<p>Valoración de la Propuesta de Intervención Didáctica.</p> <p>Documento con el informe final de análisis y valoración.</p>
-----------------------	---	--	--

La estructura metodológica presentada establece el andamiaje que guiará el desarrollo de la intervención y describe los procesos que serán analizados a lo largo de ella. Con ello, se muestra cómo el enfoque adoptado orienta tanto al análisis como la interpretación de los procesos que los estudiantes desarrollarán al trabajar con ecuaciones cuadráticas apoyándose en materiales manipulables y recursos digitales. En conjunto, la descripción metodológica ofrece un panorama del camino que permitirá evaluar el desarrollo y los alcances de la intervención.

Consideraciones finales

A lo largo de este documento se expusieron los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta, las decisiones didácticas que guiarán el diseño de las secuencias y el papel que desempeñarán los materiales manipulables y las herramientas digitales en la construcción de significados matemáticos para los estudiantes de Ciencias Económicas y Administrativas.

El proyecto se plantea como una oportunidad para replantear la manera en que se aborda este contenido matemático en programas educativos del campo económico-administrativo, donde tradicionalmente se presenta de forma aislada y poco conectada con problemas realistas. La propuesta aspira a contribuir con un enfoque que promueva prácticas de exploración, razonamiento y argumentación que amplíen las posibilidades de comprensión en los estudiantes.

Lo que se pretende con esta propuesta es ir más allá de los proyectos que incorporan materiales manipulable o recursos digitales de manera aislada. En este caso, se busca articular ambos elementos dentro de un marco teórico que permita analizar con mayor precisión la actividad matemática de los estudiantes. Al integrar la Génesis Instrumental, los esquemas de uso, de acción instrumentada y de acción colectiva instrumentada, junto con la Orquestación Instrumental, se aspira a que los estudiantes construyan una comprensión más completa de significados al resolver ecuaciones cuadráticas.

Cronograma

Con el propósito de ofrecer una organización del trabajo realizado durante los primeros cuatro semestres del posgrado, así como de las actividades previstas para los siguientes cuatro, se integran cuatro cronogramas que reúnen las acciones necesarias para la culminación del proyecto. Cada cronograma (Tabla 16,

Acciones	Semestre I					Semestre II				
	2024									
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Revisar literatura sobre ecuaciones cuadráticas										
Revisar literatura sobre el uso de material manipulable										
Escribir sobre los antecedentes del contenido matemático										
Elaborar el Estado del Arte										
Redactar el documento para el IV Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa										
Definir la problemática específica que se abordará en la propuesta del proyecto de intervención didáctica										
Definir los objetivos generales y específicos de la tesis										
Integrar, en un documento la problemática específica y los objetivos general y específicos para redactar y presentar el documento en el V Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa										

Tabla 17, Tabla 18, Tabla 19) corresponde a un periodo de dos semestres consecutivos, lo que permite apreciar de manera ordenada la articulación de las tareas y su distribución temporal. Además, se incorpora un quinto cronograma (Tabla 20) que concentra actividades complementarias relacionadas con los requisitos de titulación.

Tabla 16. Cronograma correspondiente al primer y segundo semestre

Acciones	Semestre I					Semestre II				
	2024									
	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Revisar literatura sobre ecuaciones cuadráticas										
Revisar literatura sobre el uso de material manipulable										
Escribir sobre los antecedentes del contenido matemático										
Elaborar el Estado del Arte										
Redactar el documento para el IV Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa										
Definir la problemática específica que se abordará en la propuesta del proyecto de intervención didáctica										
Definir los objetivos generales y específicos de la tesis										
Integrar, en un documento la problemática específica y los objetivos general y específicos para redactar y presentar el documento en el V Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa										

Tabla 17. Cronograma correspondiente al tercer y cuarto semestre

Acciones	Semestre III						Semestre IV				
	2025										
	Enero	Febrero	marzo	Abril	Mayo	Junio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Desarrollar el contenido matemático											
Seleccionar el enfoque teórico											
Generar elementos metodológicos											
Elaborar las características del proyecto de intervención											
Redactar el documento para el VI Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa											
Estructurar e integrar en un documento con todos los elementos del proyecto de tesis.											
Escribir el documento para el examen predoctoral que integre las siguientes secciones: Antecedentes, Estado del Arte, problemática, objetivos del proyecto, la propuesta y sus características, aspectos teóricos y consideraciones metodológicas											
Elaborar las diapositivas y preparar la defensa del proyecto											
Presentar el examen predoctoral											

Tabla 18. Cronograma correspondiente al quinto y sexto semestre

Acciones	Semestre V					Semestre VI				
	2026									
	Enero	Febrero	marzo	Abril	Mayo	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Elaborar la propuesta de enseñanza (cuatro secuencias de actividades)										
Definir las estrategias de mediación docente que orientan la interacción entre los estudiantes y los artefactos										
Elaborar los instrumentos para la recolección de datos										
Realizar un pilotaje con las primeras dos secuencias didácticas										
Redactar un documento que integre el diseño de las secuencias, la elaboración de los instrumentos y los análisis del pilotaje para presentar en el VIII Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa										
Análisis del pilotaje y refinamiento del diseño										
Implementar las cuatro secuencias didácticas (el tiempo estimado es una secuencia por mes)										
Elaborar el documento para presentar en el IX Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa										

Tabla 19. Cronograma correspondiente al séptimo y octavo semestre

Acciones	Semestre VII					Semestre VIII				
	2027									
	Enero	Febrero	marzo	Abril	Mayo	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre
Organizar la información obtenida con base en los instrumentos de recolección de datos										
Analizar la información en concordancia con los elementos del enfoque teórico y las consideraciones metodológicas										
Identificar aspectos del diseño y de la implementación que requieran ser formulados										
Establecer conclusiones locales										
Redactar un documento para presentar en el X Coloquio Semestral del Programa de Doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa										
Redactar la versión definitiva del Estado del Arte										
Redactar la versión definitiva de la problemática y objetivos										
Análisis global de resultados y valoración de la propuesta										
Estructurar las conclusiones generales de la tesis										
Elaborar el reporte final de la intervención didáctica										
Concluir con la versión escrita de la tesis										

Tabla 20. Cronograma de actividades complementarias

Requisitos para titulación	Semestre V (Fase 2 Diseño)	Semestre VI (Fase 3 Implementación)					Semestre VII (Fase 4 Análisis)									
	2026											2027				
	Julio	Agosto	Septiembre	Octubre	Noviembre	Diciembre	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo					
Participar en un evento internacional para elaborar y publicar la memoria en extenso	RELME				PME-NA											
Realizar una estancia académica																
Redactar un artículo para someterlo a publicación (REMEDI u otras afines)																

RELME Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa

PME-NA North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education

REMEDI Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes

Referencias bibliográficas

- Alvarado, R. (2013). *Álgebra para preuniversitarios*. México, D.F.: Esfinge.
- Arya, J. y Lardner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. Pearson Educación.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:102210390308>
- Bartolini, M. y Martignone, F. (2020). Manipulatives in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_93
- Cañadas, M, Gómez, P y Pinzón, A. (2018). Capítulo 3: Análisis de contenido. Universidad de los Andes. Disponible en: <http://hdl.handle.net/1992/31999>
- Carpinteyro, E. (2012). *Álgebra y aplicaciones*. México, D.F.: Thomsom.
- Caylan, C. y Haser, C. (2021). Students' algebra achievement, algebraic thinking and views in the case of using algebra tiles in groups. *Necatibey Faculty of Education Electronic Journal of Science and Mathematics Education*, 15(2), 254-281.
- Didiș, M. (2023). A thematic review of quadratic equations studies in the field of mathematics education. *Participatory Educational Research*, 10(4), 29-48. <https://doi.org/10.17275/per.23.58.10.4>
- Didiș, M. y Erbas, A. (2015). Performance and Difficulties of Students in Formulating and Solving Quadratic Equations with One Unknown. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*. 15, pp. 1137-1150. <https://doi.org/10.12738/estp.2015.4.2743>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*. Online First.
- Gidado, B., Abdullahi, M., y Nwabueze, Ma. (2024). Effects of Algebra Tiles Teaching Approach on Students Achievement in Quadratic Equation in FCT Abuja, Nigeria. *International Journal of mathematics*. Vol. 07, pp. 34-46. <https://doi.org/10.5281/zenodo.10850654>
- Gueudet, G., y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 199-218. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8>

- Haeussler, E., Paul, R. y Wood, R. (2025). Matemáticas para administración y economía (13^a edición). *Pearson Educación de México*, 38-40.
- Hernández-Sánchez, J. y Kú, D. (2021). Significados de la ecuación cuadrática en producciones de estudiantes de secundaria. En Hernández, L, Juárez, E. y Ruiz, H. (Eds.). *Tendencias en la educación matemática*. Comunicación Científica, México, (pp. 17-32). <https://doi.org/10.52501/cc.019>
- Hey, J. (2005). I Teach Economics, Not Algebra and Calculus, *The Journal of Economic Education*, 36:3, 292-304.
- Kieran, C. y Filloy E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Larbi, E. y Okyere, M. (2016). The Use of Manipulatives in Mathematics Education. *Journal of Education and Practice*. 7, pp. 53-61.
- López, J., Robles, I., y Martínez-Planell, R. (2016). Students understanding of quadratic equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 47(4), pp. 552-572.
- Makgaka, T. (2023). Solving quadratic equations by completing the square: Applying Newman's Error Analysis Model to analyse Grade 11 errors. *Pythagoras -Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 44(1), 1-12.
- Mistima, S. y Zakaria, E. (2010). Analysis of Students' Error in Learning of Quadratic Equations. *International Education Studies*. 3. pp. 105-110.
- O'Connor, B. y Norton, S. (2022). Exploring the challenges of learning quadratic equations and reflecting upon curriculum structure and implementation. *Mathematics Education Research Journal*.
- Piaget, J. (1936). La naissance de l'intelligence chez l'enfant. *Delachaux et Niestlé*.
- Picciotto, H. (1990). *The Algebra Lab*. Creative Publications.
- Puig, O., Diéguez, R. y Torrecilla, R. (2015). Regularidades de la formación matemática en carreras universitarias de Ciencias Económicas. *Multiciencias*, 15(4), pp. 410-416.
- Rabino, A., Cuello, P. y De Munno, M. (2004). Aprender álgebra utilizando contextos significativos. *Revista Premisa*, 22, pp. 36-42.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2025). *Pensamiento matemático: Marco Curricular Común de la Educación Media Superior. Modelo Educativo 2025*. Coordinación Sectorial de Fortalecimiento Académico.
- Secretaría de Educación Pública (2024). *Programa de estudio para la educación secundaria. Programa sintético de la Fase 6*. Dirección General de Desarrollo Curricular. <https://www.sep.gob.mx>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Shell Center Team (2012). Solving quadratic equations: Cutting corners. *Mathematics Assessment Project*, University of Nottingham y University of California, Berkeley. Extraído de: <https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=9250&collection=8&redir=1>
- Stewart, J., Romo, J., y Flores, M. (2008) *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. 6a ed. México: Cengage Learning.
- Tendere, J. y Mutambara, L. (2020). An analysis of errors and misconceptions in the study of quadratic equations. *European Journal of Mathematics and Science Education*, 1(2), 81-90.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.
- Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of symbolic calculators: Turning a computational device into a mathematical instrument* (pp. 197–230). Springer.
- Universidad de Sonora [UNISON]. (2025). *Programa del Espacio Educativo Matemáticas*. Recuperado de: https://administracion.unison.mx/wp-content/uploads/2025/08/2025_Matematicas.pdf
- Vergnaud, G. (1990). Théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(23), pp. 133-169.
- Wah, A. y Picciotto, H. (1994). *Algebra: Themes, tools and concepts*. Creative Publications.

Anexos

Anexo 1

Materiales adaptados del libro de Algebra: Themes, tools, concepts (Wah y Picciotto, 1994).

El propósito de la actividad: Que logren identificar la relación entre los bloques que representan la unidad, la variable y el cuadrado, estableciendo correspondencia entre los objetos concretos y las expresiones simbólicas.

Actividad 1

Nombres: _____ Horario: _____

Materiales:

- Cubos pequeños amarillos que representan la unidad
- Rectángulos azules representan la variable x
- Cubo grande azul representa la x^2
- Hoja de trabajo
- Lápiz y colores azul y amarillo

La Figura 26 ilustra cómo el Lab Gear permite representar la sustitución $x = 2$ en diversas expresiones algebraicas como x , $x + 2$, $3x$ y x^2 , facilitando la visualización de cómo cambian los valores al modificar la variable.

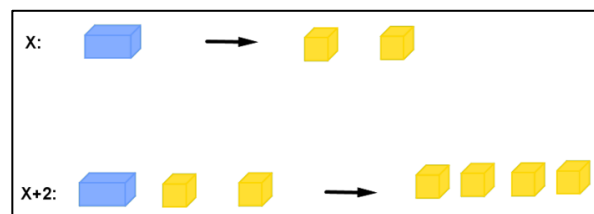
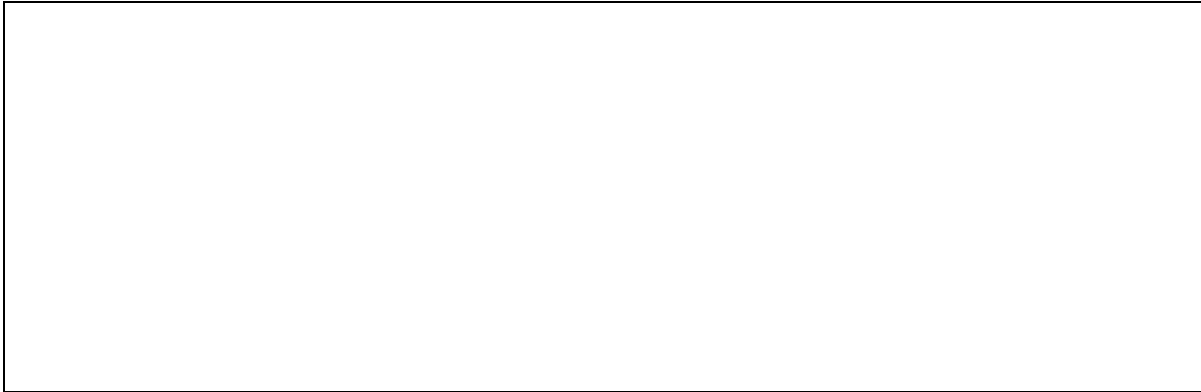


Figura 26. Adaptada de Wah y Piccioto, 1994, p. 11

1. Representen con bloques algebraicos $x + 4$ modelado con el Lab Gear y asignen a x el valor de 2, es decir $x = 2$.



2. ¿Qué ecuación representa lo que hicieron con los bloques?



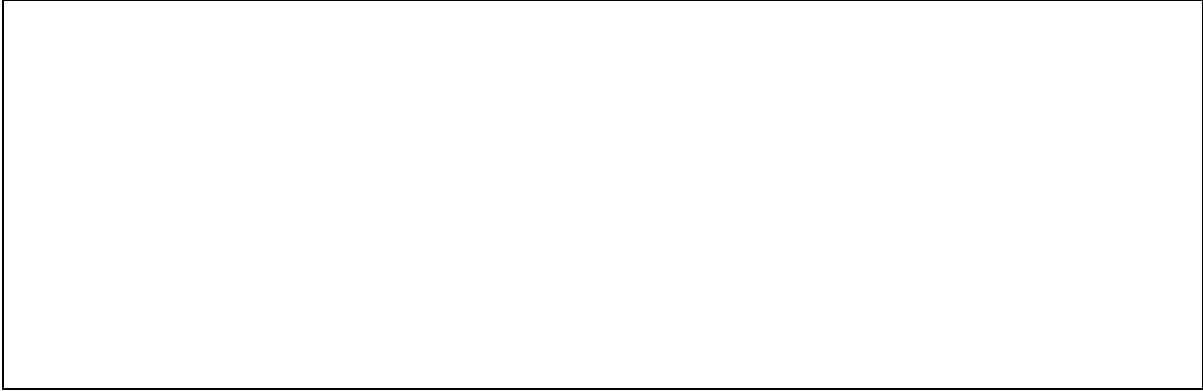
3. Dibujen cómo se ve $3x$ modelado con el Lab Gear, considerando que $x = 2$



4. ¿Cómo escribirían en forma de ecuación lo que representaron con los bloques?



5. Representen con los bloques cómo se ve x^2 modelado con el Lab Gear, con $x = 2$.



6. ¿Qué ecuación representa lo que hicieron con los bloques?

7. Dibujen cómo se ve $3x$ modelado con el Lab Gear, con las siguientes sustituciones $x = 5$, $x = 3$, $x = 1$, $x = 0$

8. Representen con los bloques cómo se ve x^2 modelado con el Lab Gear, con las siguientes sustituciones $x = 5$, $x = 3$, $x = 1$, $x = 0$.

Anexo 2

Actividad introductoria

Nombres: _____ Horario: _____

Consideren el uso de bloques para resolver la ecuación $x(x + 2) = 0$

La Figura 27 muestra la expresión $x(x + 2)$. Figura 27

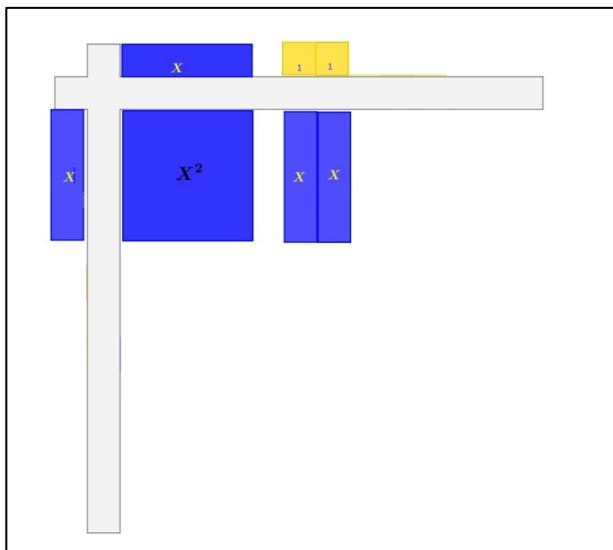


Figura 27. Adaptada de Wah y Piccioto, 1994.

1. ¿Qué representan los bloques que están afuera y adentro de la regleta?

—

2. Escriban como una ecuación el resultado de multiplicar $x(x + 2)$ presentada con bloques?

Propósito de la actividad 2: Que los estudiantes identifiquen que al multiplicar dos expresiones lineales se forma una cuadrática y que los bloques algebraicos permitan representar y resolver la ecuación.

Actividad 2

Consideren el uso de bloques para calcular el producto $(x + 3)(x + 5)$

La Figura 28 muestra la expresión $(x + 3)(x + 5)$, usa los bloques para calcular el producto y completa la gráfica.

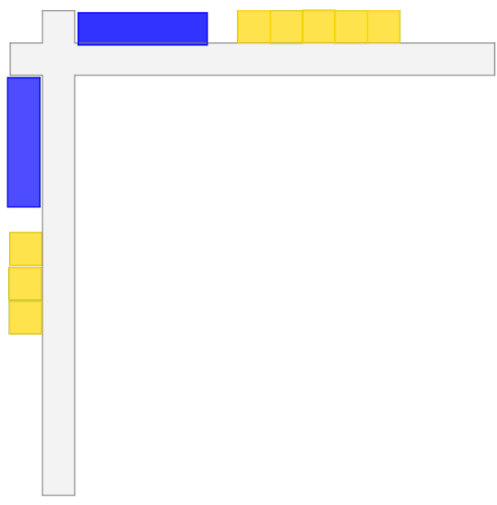


Figura 28. Adaptada de Wah y Piccioto, 1994, p. 5.

1. Expliquen con sus propias palabras Figura 28.

2. Escriban como ecuación la operación que hiciste con los bloques.

Anexo 3

Propósito de la actividad: Registrar evidencias del proceso de los estudiantes al utilizar los bloques algebraicos para representar expresiones algebraicas (suma, múltiplos y potencias) y establecer conexiones entre lo concreto y lo simbólico.

Actividad de tarea

Nombre: _____ Horario: _____

En cada paso, primero construye/dibuja con bloques y luego escribe algebraicamente la expresión.

Paso	Bloques	Expresión algebraica
1. Asigna un valor a la variable x . Representa con bloques el valor elegido.		
2. Construye una expresión lineal que incluya la variable x .		

<p>3. Combina los dos pasos anteriores y representa la ecuación que se obtiene.</p>		
---	--	--

Anexo 4

Instrumento de observación para la Actividad 1

Propósito: Registrar evidencias del proceso de los estudiantes al utilizar los bloques algebraicos para **representar expresiones algebraicas** (suma, múltiplos y potencias) y establecer conexiones entre lo concreto y lo simbólico.

Datos generales			
Número de estudiantes que asistieron:	Espacio Educativo: Matemáticas	Licenciatura en Administración de la Universidad de Sonora	Fecha:

Categorías	Elementos de observación	Sí/No	Observaciones
Elementos Conceptuales	Los estudiantes visualizan la sustitución de valores al modificar la variable con el material manipulable.		
	Los estudiantes reconocen patrones al sumar y multiplicar bloques.		
Técnicas	Agrupar en filas o columnas los bloques que representan términos semejantes.		

	Separan las variables de las constantes al organizar los bloques o al representar la expresión algebraica.		
	Sustituyen todos los bloques a la vez al asignar valores numéricos a las variables para resolver la expresión.		
	Plantean una ecuación lineal.		
	Asignan un valor fijo a la variable para comprobar resultados o resolver la ecuación.		
Elementos técnicos	Utilizan adecuadamente los bloques (unidad, variable y cuadrado).		
	Manipulan los bloques algebraicos para representar expresiones de suma múltiplos y potencias.		

	Elaboran dibujos de las representaciones concretas en la hoja de trabajo.		
	Escriben las ecuaciones que corresponden a las representaciones construidas.		
	Sustituyen valores en las expresiones y observan los cambios.		

Instrumento de observación para la Actividad 2

Propósito: Registrar evidencias del proceso de los estudiantes al utilizar los bloques algebraicos para **representar la multiplicación de dos expresiones lineales para obtener una cuadrática** y establecer relaciones entre lo concreto y lo simbólico.

Datos generales			
Número de estudiantes que asistieron:	Espacio Educativo: Matemáticas	Licenciatura en Administración de la Universidad de Sonora	Fecha:

Categorías	Elementos de observación	Sí/No	Observaciones
Elementos Conceptuales	Los estudiantes identifican que el producto de dos expresiones lineales da lugar a una expresión cuadrática.		
	Reconocen la relación entre el área construida con bloques y la ecuación resultante.		
Técnicas	Realizan el producto variable-variable con los bloques algebraicos.		
	Llevan a cabo el producto variable-unidad utilizando		

	los bloques correspondientes.		
	Realizan el producto unidad-unidad.		
Elementos técnicos	Utilizan adecuadamente los bloques (unidad variable y cuadrado).		
	Manipulan los bloques algebraicos para representar las expresiones lineales y su producto.		
	Representan gráficamente en la hoja de trabajo las construcciones realizadas con los bloques.		
	Escriben la ecuación correspondiente a la representación con bloques.		