UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Matemáticas

Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa

Secuencias didácticas para desarrollar el pensamiento algebraico por medio de la modelización matemática en el bachillerato

Documento predoctoral que presenta

Yessenia Alejandra Liñan Morales

Director de Tesis:

Dr. José Luis Soto Munguía

Hermosillo, Sonora noviembre, 2025

Contenido

INTRODUCCIÓN

El pensamiento algebraico es una habilidad esencial en la formación matemática de los estudiantes de bachillerato, ya que les permite identificar patrones, generalizar relaciones y utilizar símbolos para representar situaciones diversas. Sin embargo, suelen presentar dificultades, especialmente en la comprensión del concepto de variable y su papel en la resolución de problemas. Estas dificultades evidencian la necesidad de implementar estrategias didácticas que faciliten la apropiación de conceptos clave y el desarrollo de un razonamiento algebraico.

El presente trabajo tiene como propósito diseñar e implementar una propuesta de secuencias didácticas orientadas a promover el desarrollo del pensamiento algebraico a través de la modelización matemática, haciendo especial énfasis en la comprensión y uso del concepto de variable. Para ello, se integraron diferentes teorías de la matemática educativa como un marco conceptual, además de aspectos metodológicos que permiten abordar de manera integral la problemática identificada, así como herramientas tecnológicas que potencian el aprendizaje y la exploración matemática en el aula.

SECCIÓN 1. ANTECEDENTES

A lo largo de la historia, el Álgebra ha experimentado diversas transformaciones que han influido en la manera en que se enseña en las escuelas. La decisión sobre qué contenidos algebraicos incluir en los planes de estudio ha sido motivo de debate entre especialistas en Educación Matemática. Algunos autores sostienen que la comprensión de la historia del Álgebra es fundamental para entender su origen y evolución, ya que permite contextualizar los conceptos y métodos que se utilizan actualmente. Sin embargo, otros investigadores consideran que el enfoque histórico no es esencial y sostienen que la enseñanza debe centrarse en los aspectos prácticos y formales del Álgebra. Como resultado de varias posturas, cada país diseña sus propios programas educativos, adaptando el contenido algebraico a las necesidades y objetivos de sus sistemas escolares.

Dentro del álgebra escolar, el pensamiento algebraico ocupa un lugar primordial, ya que representa la capacidad de los estudiantes para generalizar, simbolizar y resolver problemas utilizando el lenguaje algebraico. Existen distintas perspectivas sobre cómo se debe abordar el pensamiento algebraico en el aula, y se han desarrollado herramientas y marcos teóricos para evaluar el nivel de desarrollo de este tipo de pensamiento en los estudiantes. Estas herramientas permiten a los docentes identificar fortalezas y áreas de oportunidad en el aprendizaje del álgebra.

La presente sección tiene como objetivo ofrecer un recorrido por los conceptos fundamentales relacionados con el Álgebra, el álgebra escolar, el pensamiento algebraico, la modelización matemática y el uso de la tecnología.

1.1 Álgebra y álgebra escolar

Las matemáticas se hacen presentes en el transcurso de la vida, en las actividades cotidianas y durante la trayectoria escolar, desde preescolar hasta el nivel superior o estudios más avanzados. Los conceptos matemáticos que se ven involucrados en cada etapa escolar van evolucionando conforme se va avanzando. Esto permite que los alumnos se familiaricen primero con las ideas de forma intuitiva o práctica, y más adelante puedan asociarlas con los términos técnicos o teóricos correspondientes, facilitando así una comprensión más profunda y significativa.

El Álgebra se incorporó a la enseñanza escolar a través de diversas estrategias, como la aplicación de reglas para transformar y resolver ecuaciones, la resolución de problemas, la generalización de patrones, el estudio de estructuras algebraicas y la introducción de conceptos fundamentales como variable y función, entre otros. Estas situaciones didácticas han sido clave para fomentar el surgimiento y desarrollo de la comprensión de conceptos y estructuras algebraicas, así como para explorar los múltiples usos que el álgebra puede tener en distintos contextos.

Para el Álgebra, Janvier y colaboradores (1989) mencionan que un abordaje histórico de su estudio mejora la comprensión de sus conceptos y que podría ayudar a entender los avances y retrocesos en el desarrollo del conocimiento algebraico. Con ello, se visualizaría que el álgebra tiene un vínculo con áreas como la geometría, cómo surge el lenguaje algebraico y da paso al desarrollo del pensamiento algebraico y, si a los estudiantes no les quedan claros los conocimientos previos no podrán apreciar, relacionar y ver todo el potencial que tiene el desarrollo del pensamiento algebraico. En este sentido sería recomendable una parte en las clases de matemáticas donde se aborde su desarrollo histórico para que el estudiante pueda comprender por qué y de dónde proviene el álgebra escolar y los conceptos que se estudian en cada nivel educativo.

Debido a lo anterior, no existe una estructuración única para el álgebra escolar porque los temas que se incluyen en él se plantean depende de los niveles educativos y la época donde se desarrollan, las investigaciones, el análisis que se de en la enseñanza y aprendizaje y en el currículo, tomando en cuenta las necesidades de la población para resolver problemas en algún periodo de tiempo. En este trabajo se reconoce el álgebra escolar como el conjunto de temas, conceptos, definiciones, etc. que se hayan seleccionado del álgebra para ser estudiados.

Varios autores han dado su definición de lo que es el álgebra escolar, Stacey y Chick (2004) señalan que el álgebra escolar es “Una manera de expresar generalidad; un estudio de la manipulación de símbolos y la resolución de ecuaciones; un estudio de funciones; una forma de resolver ciertas clases de problemas; y una manera de modelar situaciones reales”. Definen los objetivos del álgebra escolar como “expresar generalizaciones, establecer relaciones, resolver problemas, explorar propiedades, demostrar teoremas y calcular” (Arcavi et al., 2017, pp. 2-3).

Así mismo, Kieran (1996) caracteriza el álgebra escolar según tres tipos de actividad: generacional, transformacional y global/meta-nivel.

El álgebra escolar es una parte fundamental del currículo de matemáticas en la educación básica y preparatoria en muchos sistemas educativos. Este campo de las matemáticas introduce a los estudiantes en el lenguaje y la lógica del álgebra, proporcionando las herramientas necesarias para abordar una variedad de problemas y situaciones en la vida cotidiana y en disciplinas académicas más avanzadas.

El álgebra escolar no se limita solo a la manipulación de símbolos y ecuaciones, sino que también se enfoca en el desarrollo del razonamiento lógico, la resolución de problemas y la capacidad de generalización. A través del Álgebra, los estudiantes aprenden a representar y analizar patrones, identificar relaciones entre cantidades variables y resolver problemas mediante el uso de ecuaciones y desigualdades.

Sin embargo, el aprendizaje del Álgebra puede resultar desafiante para muchos estudiantes. Las barreras percibidas, como la abstracción de los conceptos, la falta de conexión con la vida cotidiana y la dificultad para visualizar los problemas, pueden obstaculizar el progreso de los estudiantes en este campo. Por lo tanto, es crucial diseñar enfoques de enseñanza efectivos que ayuden a los estudiantes a superar estas dificultades y a desarrollar una comprensión sólida y significativa del álgebra.

Serres (2011) explora cómo los estudiantes se inician en el Álgebra y cómo esta etapa inicial puede tener un impacto significativo en su comprensión y desarrollo posterior en matemáticas. El autor analiza diferentes enfoques y estrategias utilizadas en la enseñanza del álgebra inicial y evalúa sus efectos en el aprendizaje de los estudiantes. Los tres puntos principales que aborda en su trabajo son la iniciación del álgebra, las consecuencias posteriores para la enseñanza y las implicaciones pedagógicas.

Aunado a lo anterior, Malisani (1999) ofrece una visión interesante sobre los desafíos que enfrentan los estudiantes al aprender álgebra. Aborda la noción de *obstáculos epistemológicos*, que son barreras mentales o conceptuales que dificultan la comprensión y el dominio de un área específica del conocimiento, en este caso, el álgebra. Estos obstáculos pueden surgir debido a malentendidos, preconcepciones erróneas o falta de conexión con los conceptos previos.

Malisani (1999) analiza detalladamente diversos aspectos del pensamiento algebraico y señala cómo ciertos conceptos fundamentales, como las variables, las ecuaciones y las representaciones simbólicas, pueden resultar difíciles de entender para los estudiantes. Además, explora cómo estas dificultades pueden persistir a lo largo del tiempo si no se abordan adecuadamente en el proceso educativo.

1.2 Álgebra en la Nueva Escuela Mexicana (NEM)

La Nueva Escuela Mexicana, como modelo educativo que rige la educación obligatoria en México, establece las bases para la formación integral de los estudiantes, promoviendo una enseñanza inclusiva, equitativa y orientada al desarrollo de competencias esenciales.

En el tronco común para toda la Educación Media Superior (EMS) hay 27 unidades de aprendizaje, de las cuales tres corresponden al área de Pensamiento Matemático (PM) como se muestra en la Figura 1.

Recurso Sociocognitivo/Área de Acceso al Conocimiento		**Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC)**	**No. total de UAC**
Recursos Sociocognitivos	Lengua y Comunicación	1. Lengua y Comunicación I 2. Lengua y Comunicación II 3. Lengua y Comunicación III 4. Inglés I 5. Inglés II 6. Inglés III 7. Inglés IV	7
	Pensamiento Matemático	1. Pensamiento Matemático I 2. Pensamiento Matemático II 3. Pensamiento Matemático III	3
	Conciencia Histórica	1. Conciencia Histórica I. Perspectivas del México antiguo. Los contextos globales 2. Conciencia Histórica II. México durante el expansionismo capitalista 3. Conciencia Histórica III. La realidad actual en perspectiva histórica	3
	Cultura Digital	1. Cultura Digital I 2. Cultura Digital II	2

Figura 1. Pensamientos Matemáticos en el tronco común de la EMS

De igual manera, en la Figura 2 se muestra que para el componente de formación fundamental extendido obligatorio para todos los planteles e instituciones que ofrezcan bachillerato general, se mencionan dos unidades de aprendizaje correspondientes al área de matemáticas.

Recurso Sociocognitivo/Área de Acceso al Conocimiento		**Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC)**	**No. de UAC**
Recursos Sociocognitivos	Pensamiento Matemático	1. Temas Selectos de Matemáticas I 2. Temas Selectos de Matemáticas II	2
	Cultura Digital	1. Taller de Cultura Digital	1
Áreas de conocimiento	Ciencias Naturales, Experimentales y Tecnología	1. Taller de Ciencias I 2. Taller de Ciencias II 3. Espacio y Sociedad	3
	Ciencias Sociales	1. Laboratorio de Investigación	1
	Humanidades	1. Pensamiento Literario	1

Figura 2 Pensamiento matemático en el componente de formación fundamental extendido

Por otro lado, en el componente de formación fundamental extendido ofrecen 20 Unidades de Aprendizaje Curricular (UAC) las cuales pueden ser elegidas de acuerdo con las necesidades de cada plantel y entre esa oferta hay ocho opciones para el área de PM.

QUINTO SEMESTRE	SEXTO SEMESTRE
Recurso Sociocognitivo: Lengua y Comunicación	
Ciencias de la Comunicación I	Ciencias de la Comunicación II
Etimologías Grecolatinas I	Etimologías Grecolatinas II
Temas Selectos de Inglés I	Temas Selectos de Inglés II
Recurso Sociocognitivo: Pensamiento Matemático	
Cálculo diferencial	Cálculo integral
Dibujo I	Dibujo II
Matemáticas Financieras I	Matemáticas Financieras II
Probabilidad y Estadística I	Probabilidad y Estadística II

Figura 3 Pensamiento matemático en el componente de formación fundamental extendido

En este contexto, es fundamental conocer el enfoque y los contenidos de Álgebra que se trabajan en los diferentes niveles educativos, ya que este campo de las matemáticas no solo fomenta el pensamiento lógico y crítico, sino que también sienta las bases para la resolución de problemas complejos y la comprensión de situaciones cotidianas y científicas en la vida de los estudiantes.

Es elemental comprender el Álgebra que se enseña en la educación básica, ya que constituye la base para el desarrollo de habilidades matemáticas más complejas. Sin embargo, en este caso, el enfoque principal se centrará en el nivel medio superior, donde los conceptos algebraicos alcanzan un mayor nivel de abstracción y aplicación, preparando a los estudiantes para enfrentar retos académicos y profesionales más avanzados.

En ese sentido, uno de los documentos que surgen a partir de la propuesta curricular de la NEM es el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS), constituyendo un documento fundamental que busca establecer un enfoque educativo integral y flexible para este nivel educativo en México.

A continuación, se muestra en la Tabla 1 las características principales que estipula este marco curricular.

Tabla 1 Características principales del MCCEMS

	CARACTERÍSTICAS
1. Enfoque Integral	Promueve el desarrollo de competencias que no solo abarcan conocimientos académicos como español, matemáticas, historia, etc. sino también habilidades socioemocionales y valores. El MCCEMS defiende la idea de que somos sujetos colectivos e interdependientes y propone reconocer la conversación ética y moral como mecanismo para definir aquello que, en cada sociedad, debe ser superior a la lógica de mercado. Su fin es contribuir a la formación de una nueva generación que desafíe los preceptos de la ideología del neoliberalismo. (Arroyo y Pérez, 2022)

2. Pertinencia y contextualización	Se enfatiza la importancia de que los contenidos sean relevantes y adaptados a las realidades sociales y culturales de los estudiantes. El propósito es contribuir, desde la escuela, a la construcción de una sociedad con fundamento en el humanismo y en la ciencia, a partir de un marco curricular que proporcione a las nuevas generaciones herramientas para formular mejores alternativas de desarrollo sostenible y de bienestar social. (Arroyo y Pérez, 2022)
3. Diversidad de opciones educativas	Reconoce la variedad de trayectorias educativas que pueden seguir los jóvenes, permitiendo una oferta que incluya tanto educación técnica (como Conalep) y preparatorias generales (Cobach, Cecytes, Cbtis). “El nuevo Marco Curricular abrirá también la posibilidad de la movilidad entre Subsistemas, respetando el derecho a la educación de los jóvenes cuando requieran cambiar de servicio de bachillerato”. (Arroyo y Pérez, 2022)
4. Formación para la vida	Se busca que los estudiantes no solo se preparen para el trabajo, sino también para ser ciudadanos críticos y activos en sus comunidades. Que estimule la capacidad de aprender a aprender de por vida para participar en la construcción de una sociedad más justa, pacífica, sustentable y que responda a los retos del futuro; que permita su renovación constantemente con la participación de las y los docentes como profesionales de la educación, y que siente las bases para hacer de la escuela un espacio de transformación y trascendencia personal y social. (Arroyo y Pérez, 2022)
5. Trabajo Colaborativo	Fomenta la colaboración entre instituciones educativas, familias y la comunidad para enriquecer el proceso educativo. “La Nueva Escuela Mexicana subraya su esencia humanista cuando pretende formar jóvenes que se transforman a ellos mismos y con ello a su comunidad y a su nación, con plena libertad de construir sus alternativas del cambio social para mejorar”. (Arroyo y Pérez, 2022)
6. Evaluación Integral	Propone un enfoque de evaluación que considera diversos aspectos del aprendizaje, más allá de los exámenes tradicionales. La evaluación formativa obliga la observación del trayecto del logro, la cual debe estar centrada en el proceso de aprendizaje que experimenta el alumno y tiene como objetivo retroalimentar para la mejora. La propuesta es hacer uso de la coevaluación y la autoevaluación como forma de reflexionar de manera abierta sobre el propio proceso de aprendizaje y necesidades, y que su destino sea el de orientar el trabajo del docente en el aula, o potenciar el acompañamiento

	entre pares, y no la de dar recompensas o castigos. (Arroyo y Pérez, 2022)

El MCCEMS busca transformar la educación media superior en México para que sea más inclusiva, relevante y centrada en el estudiante, alineándose con los principios de la Nueva Escuela Mexicana que está vigente hoy en día para la educación.

La educación contemporánea enfrenta retos sin precedentes que requieren un enfoque innovador y flexible. Las siete paradojas del MCCEMS emergen como reflejos de las tensiones inherentes y los desafíos que surgen al intentar implementar un modelo educativo tan ambicioso y transformador. Estas paradojas no solo destacan las complejidades del proceso educativo, sino que también subrayan la necesidad de adoptar una postura reflexiva y adaptable. Para superar los obstáculos en la implementación del marco curricular, es fundamental comprender y analizar estas tensiones, que, aunque pueden parecer contradictorias, ofrecen valiosas oportunidades para el crecimiento y la mejora continua en la educación. En este contexto, el análisis de las paradojas se convierte en una herramienta esencial para guiar la práctica educativa hacia una mayor efectividad y relevancia en un mundo en constante cambio y por lo tanto también cambios en la educación.

1.2.1 Pensamiento Matemático en la NEM

La educación se encuentra en constante proceso de adaptación para atender las demandas de la sociedad, en consecuencia, las reformas educativas experimentan cambios continuos. Tal es el caso de la NEM, implementada en 2022, cuyo plan de estudios fue igualmente objeto de modificación en 2025.

Considerando lo anterior, el área de matemáticas también fue modificada mediante un cambio en la estructura semestral de la EMS. El objetivo y la justificación de esta modificación, propuesta en el modelo educativo de la Nueva Escuela Mexicana en 2025, radican en que los procesos de enseñanza y aprendizaje deben ser progresivos, estableciendo bases sólidas desde los primeros semestres que permitirán un avance seguro y coherente hacia los contenidos matemáticos posteriores de los semestres.

En el modelo educativo, el área correspondiente a los saberes matemáticos recibe el nombre de "Pensamiento Matemático" y está integrada por seis asignaturas: Pensamiento Matemático I, Pensamiento Matemático II, y así sucesivamente, hasta el sexto semestre de educación media superior. A continuación, se presenta una tabla comparativa (ver Tabla 2) de los contenidos de Pensamiento Matemático en los modelos de la Nueva Escuela Mexicana 2022 y 2025.

Tabla 2 Comparación del pensamiento matemático entre la NEM 2022 y 2025

Pensamiento Matemático	NEM 2022	NEM 2025
I	**Pensamiento estadístico y probabilístico** Horas/semana: 4hrs Progresiones: 15	**Pensamiento aritmético** Horas/semana: 4hrs Propósitos formativos: 7
II	**Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico** Horas/semana: 4hrs Progresiones: 14	**Introducción al álgebra** Horas/semana: 4hrs Propósitos formativos: 6
III	**Pensamiento variacional** Horas/semana: 4hrs Progresiones: 15	**Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana** Horas/semana: 4hrs Propósitos formativos: 6
IV	**Temas selectos de matemáticas I** Horas/semana: 4hrs Progresiones: 9	**Trigonometría y geometría analítica** Horas/semana: 4hrs Propósitos formativos: 7
V	**Taller de probabilidad y estadística I** Horas/semana: 3hrs Progresiones: 8 **Cálculo Diferencial** Horas/semana: 4 hrs	**Cálculo diferencial** Horas/semana: 5hrs Propósitos formativos: 8
VI	**Taller de probabilidad y estadística II** Horas/semana: 3hrs Progresiones: 8 **Cálculo Integral** Horas/semana: 3 hrs	**Pensamiento estadístico y probabilístico** Horas/semana: 5hrs Propósitos formativos: 8

Considerando la tabla anterior, es posible observar diferencias en los contenidos matemáticos que actualmente se imparten en las escuelas de educación media superior en comparación con los propuestos en el modelo de 2022. No obstante, no es posible evaluar la viabilidad de este cambio en la formación de los estudiantes de bachillerato sin contar previamente con resultados obtenidos en las prácticas educativas en el aula.

Por tal motivo, se considera que la propuesta de intervención didáctica podría aplicarse en el curso del *Pensamiento Matemático II: Introducción al álgebra* y/o en el Pensamiento *Matemático III: Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana*, ya que la meta educativa planteada en NEM (2025) para estos dos pensamientos algebraicos coinciden con los objetivos y propósitos de nuestro proyecto. Esas metas educativas son las siguientes:

- PM II: Entienda el lenguaje algebraico como un medio de representación de situaciones cotidianas y escolares para estimular el pensamiento abstracto.
- PM III: Aplique el lenguaje algebraico como herramienta para describir situaciones de la realidad y expresar relaciones matemáticas, y mediante procesos de intuición y razonamiento, logre explicar y resolver problemas.

1.3 Pensamiento Algebraico

El desarrollo del pensamiento algebraico en la educación comienza idealmente desde etapas tempranas, pues facilita la comprensión del simbolismo algebraico y fortalece habilidades como la identificación de patrones, análisis de relaciones funcionales y uso del lenguaje matemático específico. Enseñar y aprender Álgebra con enfoque en el pensamiento algebraico implica trabajar con símbolos, abstracciones, expresiones y generalizaciones para establecer una base sólida que soporte el aprendizaje progresivo de matemáticas más avanzadas.

El pensamiento algebraico es fundamental en la formación matemática porque fomenta una manera particular de reflexionar que apoya el desarrollo del pensamiento lógico, la resolución de problemas y la capacidad de modelar fenómenos diversos mediante el lenguaje y las herramientas del álgebra. Su enseñanza adecuada repercute positivamente en el desempeño matemático y en la capacidad para enfrentar situaciones complejas dentro y fuera del ámbito escolar.

Rojas y Vergel (2013) proponen el estudio de actividades como la generalización de patrones figurativos y numéricos como un recurso didáctico esencial para facilitar y potenciar el álgebra, particularmente en la superación de las conocidas dificultades que experimentan los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra. Además, resaltan la necesidad de integrar el pensamiento algebraico desde las edades más tempranas, alineándose con las directrices curriculares internacionales y colombianas que enfatizan el estudio de patrones, regularidades y la variación para construir una comprensión conceptual más allá del dominio de meros procedimientos y técnicas. Aunque la investigación de los autores se realizó en Colombia, se observa que las dificultades en el pensamiento algebraico son similares a las que presentan otros países, incluyendo México.

Considerando lo expuesto, se propone el desarrollo de este proyecto de tesis con la propuesta didáctica, reconociendo la importancia fundamental que tiene la educación de los jóvenes y la necesidad de incorporar diversos métodos para potenciar el pensamiento algebraico. Entre estos métodos, destaca la modelización matemática, cuyo papel se evidenciará en las actividades diseñadas para este trabajo.

1.4 Modelización Matemática

La modelización matemática es una parte esencial para este proyecto de intervención didáctica, ya que permite vincular los conceptos matemáticos con situaciones reales, favoreciendo la comprensión y el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. Por ello, es fundamental conocer cómo se ha implementado en otros trabajos e investigaciones previas, así como los beneficios documentados que ofrece su aplicación en el ámbito educativo. Diversos estudios han señalado que la modelización matemática promueve habilidades de análisis, resolución de problemas, toma de decisiones y una comprensión más profunda de los conceptos, lo cual justifica su incorporación en este proyecto como una estrategia clave para potenciar el aprendizaje significativo.

En ese sentido, Gould et al. (2012) afirman que los matemáticos suelen dividir el mundo en dos partes: las matemáticas y el mundo real. Sin embargo, esta división es más una conveniencia que una realidad. Cuando aplicamos las matemáticas para entender situaciones del mundo real, tanto las situaciones reales como las matemáticas resultantes son tomadas en serio. Estas situaciones pueden variar, desde problemas muy complejos que pueden llevar a carreras enteras dedicadas a su estudio, como la teoría electromagnética o la criptografía, hasta situaciones muy simples, pero igualmente importantes en la vida cotidiana, como planificar un viaje o decidir sobre una oferta en una subasta.

Independientemente de la complejidad del problema, el proceso de interacción entre las matemáticas y el mundo real sigue una estructura similar: se eligen los aspectos más relevantes de la situación real y se traducen en un modelo matemático idealizado. A partir de este modelo, se aplican herramientas matemáticas para obtener ideas, aproximaciones y teoremas. Estos resultados se traducen nuevamente al mundo real y se evalúan para asegurar su practicidad y coherencia. Este proceso iterativo se conoce como modelización matemática.

La modelización matemática difiere de la resolución de problemas en que mientras la resolución de problemas puede limitarse a situaciones matemáticas ideales que no necesariamente están vinculadas al mundo real, la modelización matemática parte del mundo real. Requiere formular el problema antes de resolverlo y luego volver a integrar los resultados en el contexto original. Además, la modelización matemática no se involucra en problemas o situaciones fantasiosas, ya que su enfoque está en problemas genuinos y motivados por el mundo real.

Este proceso va más allá de la simple resolución de problemas, ya que implica un ciclo iterativo donde se seleccionan los aspectos relevantes de una situación real, se traducen a un modelo matemático idealizado, se aplican herramientas matemáticas para obtener resultados y estos se evalúan en el contexto original para validar su pertinencia y coherencia. Esta dinámica promueve en los estudiantes el desarrollo de habilidades críticas como la interpretación, el análisis, la argumentación y la toma de decisiones basadas en datos y representaciones matemáticas.

Durante el siglo XX, la modelización matemática experimentó un crecimiento significativo con la llegada de la computación y la simulación por computadora. La capacidad de realizar cálculos numéricos complejos permitió a los investigadores desarrollar modelos más detallados y realistas de una amplia gama de fenómenos, desde el clima y la economía hasta la propagación de enfermedades y el comportamiento humano.

Hoy en día, la modelización matemática es una herramienta ampliamente aplicada en la ciencia, la ingeniería, la medicina, la economía y muchas otras disciplinas. Su importancia radica en su potencial para proporcionar comprensiones profundas, hacer predicciones precisas y optimizar el diseño y el funcionamiento de sistemas complejos en el mundo real. Además, la modelización matemática cuando se adapta para ser utilizada en el aula desempeña un papel crucial en la educación matemática, al ayudar a los estudiantes a comprender la aplicabilidad y relevancia de los conceptos matemáticos en contextos prácticos y cotidianos. Los problemas de la vida real que se pueden modelar matemáticamente exigen una diversidad de conceptos matemáticos para llegar a la solución; el presente trabajo se refiere promover la modelización matemática con el propósito de que los estudiantes desarrollen el concepto de variable.

En general, el papel de la modelización matemática en el aprendizaje de las matemáticas tiene gran importancia ya que promueve en los estudiantes una comprensión del mundo real, fomenta su motivación a desarrollar un pensamiento más competente y el descubrimiento de estrategias para resolver problemas, entre otras cosas (Hapizah y Mulyono, 2020). Además de lo anterior, representa una herramienta principal en la educación matemática, especialmente en el nivel bachillerato, porque permite vincular los conceptos abstractos con situaciones concretas del mundo real, facilitando una comprensión profunda y significativa de las matemáticas.

Diversos estudios respaldan que la incorporación de la modelización matemática en el aula favorece la motivación de los estudiantes, al mostrarles la aplicabilidad real de las matemáticas, lo que aumenta su interés y compromiso con el aprendizaje. Esta estrategia didáctica contribuye al desarrollo de habilidades investigativas, pensamiento crítico y resolución de problemas complejos mediante la formulación y validación de modelos que simulan fenómenos reales. La modelización matemática también fortalece la capacidad para aplicar la variable, un concepto esencial en Álgebra, facilitando la transición del pensamiento aritmético al algebraico con sentido y significado.

En síntesis, la modelización matemática es una estrategia que conecta la teoría matemática con la práctica cotidiana y científica. Por tanto, su integración en este proyecto de intervención didáctica resulta necesaria para potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de bachillerato.

1.5 Uso de tecnología

La tecnología se ha convertido en un elemento esencial en la vida moderna, transformando la manera en que nos comunicamos, trabajamos, aprendemos y nos relacionamos con el mundo que nos rodea. Su presencia está en casi todas nuestras actividades diarias, desde el uso de un teléfono inteligente hasta los avances en medicina, transporte y educación. Gracias a ella, los procesos se han vuelto más rápidos, eficientes y accesibles, permitiendo un desarrollo social y personal sin precedentes. Hablar de la importancia de la tecnología es reconocer cómo han cambiado nuestras formas de vivir, y también reflexionar sobre los retos que implica su uso responsable en la construcción de un futuro más equitativo y sostenible.

La tecnología ha transformado profundamente la vida de las personas en múltiples dimensiones. Si se revisa su desarrollo en las últimas décadas, se puede visualizar cómo pasó de ser una herramienta de apoyo en ciertas áreas a convertirse en un elemento central en casi todas las actividades humanas. Su incorporación a la actividad humana ha cambiado la forma en que trabajamos, aprendemos, nos relacionamos y nos cuidamos, volviéndose indispensable en la vida moderna, aunque con retos que aún debemos enfrentar como sociedad.

Los avances de la tecnología en la educación han marcado un antes y un después en la forma en que se enseña y se aprende. En primer lugar, el acceso a internet y a dispositivos digitales ha permitido que la información esté disponible de manera inmediata, lo que favorece la investigación autónoma y la actualización constante de contenidos. Las plataformas educativas en línea, como aulas virtuales y cursos masivos, han abierto la posibilidad de que personas de cualquier lugar del mundo puedan acceder a formación académica sin importar barreras geográficas. La integración de la tecnología en la educación ha demostrado tener un impacto positivo y significativo en los procesos de enseñanza-aprendizaje y en los resultados académicos de los estudiantes (Gallegos et al., 2024).

Considerando el uso de la modelización matemática y la combinación de ésta con la tecnología, varios autores mencionan que estudios existentes han destacado las ventajas de utilizar herramientas digitales durante el proceso de modelado (Blum y Leiß, 2007; Greefrath, 2020; Greefrath y Siller, 2017, 2018; Siller y Greefrath, 2010). También se llegó a la conclusión de que los alumnos primero tienen que comprender el problema real para después realizar algún tipo de modelización y utilizar softwares tecnológicos.

Koyunkaya y Dede (2024) realizaron una investigación sobre el uso de diferentes herramientas digitales para el diseño y la resolución de problemas de modelización matemática, reportaron que los estudiantes, quienes eran profesores en formación, utilizaron diferentes herramientas tecnológicas para plantear y resolver los problemas propuestos, algunas de estas herramientas fueron GeoGebra, Desmos, YouTube, Google Earth y diversos buscadores web.

Uno de los aspectos a rescatar en la investigación es una tabla propuesta sobre las acciones tecnológicas que se pueden realizar al momento de trabajar con GeoGebra y el ciclo de modelización apoyado por GeoGebra (Greefrath et al., 2018) mostrada en la Figura 4.

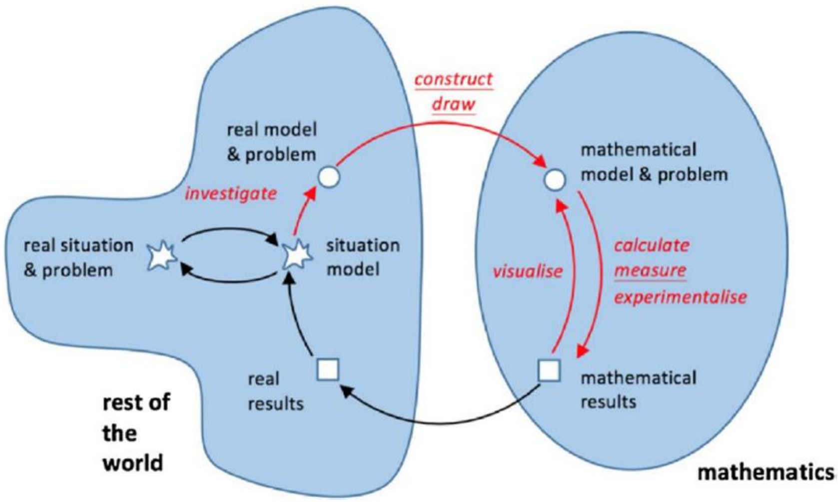


Figura 4 Ciclo de modelización apoyado por GeoGebra (Greefrath et al., 2018, pág. 236)

Tomando en cuenta lo anterior, el uso integrado de tecnologías digitales en el proceso de diseño y resolución de problemas de modelización matemática potencia el aprendizaje y la comprensión matemática. Las herramientas digitales permiten abordar problemas complejos con mayor facilidad y favorecen la reflexión crítica sobre los resultados.

Tabla 3 Descripción de las acciones tecnológicas del ciclo de modelización

Acción tecnológica	Descripción de la acción tecnológica
Investigar	Identificación/Exploración de datos necesarios e innecesarios en el problema real mientras identificando supuestos para construir el modelo real.
Experimentar	Se prueban diversos parámetros, condiciones o suposiciones y se analizan los efectos de esto. Se observan pruebas durante la solución de modelos matemáticos (Greefrath y Siller, 2017; 2018).
Dibujar	Dibujar objetos geométricos dentro de un sistema de coordenadas (Greefrath y Siller, 2017; 2018).
Construir	Construcción de objetos mediante pasos intermedios o líneas auxiliares (Greefrath y Siller, 2017; 2018) y hechos/reglas matemáticas.
Calcular	Calcular resultados numéricos o algebraicos que los estudiantes no pueden realizar en un dado el tiempo sin la herramienta digital (Greefrath, 2011; 2018).
Medida	Medir los componentes de los objetos, por ejemplo, encontrar la distancia entre puntos particulares, la longitud de los segmentos de línea y el tamaño de los ángulos de la pendiente de las líneas o segmentos (Greefrath, 2011; 2018).
Visualizar	Proporcionar amplificadores visuales o arrastrar los objetos para revelar los cambios que ocurrieron en la pantalla, como dibujar o mover puntos o segmentos para representar gráficamente valores encontrados previamente (Greefrath y Siller, 2017).

SECCIÓN 2. ESTADO DEL ARTE

En esta sección se reportan algunas investigaciones e intervenciones didácticas centradas en la modelización matemática y el pensamiento algebraico en el bachillerato, algunas dificultades de los estudiantes para a) modelar, b) algebrizar y c) uso de la variable y sobre el uso de la tecnología en la modelización, con el propósito de identificar los avances, desafíos y vacíos existentes en este campo. Estos hallazgos resultan relevantes, ya que permiten visualizar las acciones que ya se han emprendido en contextos similares y, a partir de ello, sustentar la pertinencia de nuestra propuesta frente a la problemática que buscamos abordar. Así, este análisis previo contribuirá a delimitar con mayor claridad los aspectos que requieren atención y que pueden ser objeto de nuestra intervención didáctica.

2.1 Sobre modelización matemática en el bachillerato

En este apartado se reportan algunas intervenciones didácticas que han sido desarrolladas a partir de la modelización matemática. Estas experiencias permiten identificar cómo se ha implementado este enfoque en distintos contextos educativos, así como los resultados obtenidos en el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes. El análisis de estas intervenciones servirá como referencia para comprender las posibilidades y los desafíos que implica integrar la modelización matemática como estrategia didáctica.

Florez y González (2020) exploran la relación entre la modelización matemática y el concepto de covariación lineal. La covariación lineal es un concepto fundamental en matemáticas que describe la relación entre dos cantidades que varían proporcionalmente.

Los autores se centran en cómo la modelización matemática puede ser una herramienta efectiva para ayudar a los estudiantes a comprender y construir la covariación lineal. La modelización matemática implica el uso de conceptos y técnicas matemáticas para analizar y resolver problemas del mundo real, lo que puede ayudar a los estudiantes a desarrollar un entendimiento más profundo de los conceptos matemáticos y sus aplicaciones. Además, presentan ejemplos concretos de cómo se puede utilizar la modelización matemática para abordar problemas que involucran covariación lineal. Esto puede incluir situaciones como el análisis de datos experimentales, la interpretación de gráficos y la predicción de comportamientos futuros basados en patrones observados.

Además, discuten estrategias pedagógicas específicas que los educadores pueden emplear para facilitar el aprendizaje de la covariación lineal a través de la modelización matemática. Esto puede incluir actividades prácticas, el uso de tecnología para la visualización de datos y la construcción de modelos, y el fomento de la exploración activa por parte de los estudiantes. Este enfoque puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades de resolución de problemas, pensamiento crítico y aplicación de conceptos matemáticos en contextos del mundo real.

Márquez y colaboradores (2019) se enfocan en analizar cómo la modelización matemática puede ser utilizada como una herramienta efectiva para evaluar el desarrollo de competencias en estudiantes. La modelización matemática implica el uso de conceptos y técnicas matemáticas para abordar problemas del mundo real, lo que puede fomentar el desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la comunicación matemática.

En este estudio, los autores examinan cómo la implementación de actividades de modelización matemática en el aula puede proporcionar una oportunidad para evaluar el desarrollo de competencias en los estudiantes. Utilizan una metodología que involucra la aplicación de actividades de modelización matemática en un grupo de estudiantes y luego la evaluación de su desempeño en relación con las competencias específicas que se están desarrollando.

Los resultados del estudio muestran que las actividades de modelización matemática pueden ser efectivas para evaluar el desarrollo de competencias en áreas como la resolución de problemas, la aplicación de conceptos matemáticos en contextos del mundo real y la capacidad para comunicar y justificar resultados matemáticos.

Además, los autores discuten la importancia de diseñar actividades de modelización matemática que estén alineadas con los objetivos de aprendizaje y las competencias que se desean desarrollar en los estudiantes. Esto incluye la selección de problemas significativos y relevantes para los estudiantes, el uso de tecnología para facilitar la exploración y la visualización de datos, y el fomento de la colaboración y el trabajo en equipo.

Dicho en otras palabras, los autores ofrecen una perspectiva importante sobre cómo la modelización matemática puede ser utilizada no solo como una herramienta de enseñanza, sino también como una herramienta efectiva para evaluar el desarrollo de competencias en los estudiantes. Esto puede ser especialmente relevante en el contexto de la educación STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), donde las habilidades de resolución de problemas y la aplicación de conceptos en contextos del mundo real son fundamentales.

Herrera y Muñoz (2014) hacen una propuesta de enseñanza para abordar el concepto de función utilizando la modelización matemática como enfoque principal. El concepto de función es fundamental en matemáticas y se utiliza para describir la relación entre dos conjuntos de datos, donde cada elemento del primer conjunto (dominio) está asociado con exactamente un elemento del segundo conjunto (codominio). Sin embargo, la comprensión de este concepto puede ser desafiante para muchos estudiantes.

La propuesta didáctica presentada en dicho trabajo se basa en el uso de situaciones del mundo real como punto de partida para explorar el concepto de función. Los autores proponen una serie de actividades y ejercicios que involucran la modelización matemática de fenómenos cotidianos para ayudar a los estudiantes a comprender cómo las funciones pueden describir y predecir diferentes situaciones.

Estas actividades incluyen la recolección de datos, la construcción de gráficos y tablas, y la identificación de patrones y regularidades en los datos recopilados. A través de este proceso, los estudiantes pueden desarrollar una comprensión más profunda de cómo las funciones pueden utilizarse para modelar y representar una variedad de situaciones del mundo real.

Además, la propuesta didáctica proporciona sugerencias para la enseñanza de conceptos relacionados con las funciones, como dominio, codominio, imagen, función inversa, entre otros. También se destacan estrategias para promover la participación de los estudiantes y fomentar el trabajo colaborativo en el aula. Esta propuesta puede ayudar a los educadores a hacer que el aprendizaje de las funciones sea más significativo y relevante para los estudiantes al conectarlo con situaciones del mundo real.

En ese sentido, si nos centramos en el nivel de bachillerato podemos encontrar trabajos relacionados con este nivel de interés y la modelización matemática. Tal es el caso del trabajo de Cirillo et al. (2021) donde se enfocan en distinguir claramente entre dos conceptos a menudo confusos: modelar las matemáticas y la modelización matemática. El modelado de las matemáticas se refiere al uso de representaciones y objetos concretos, como manipulativos, para ilustrar conceptos matemáticos, comenzando en el mundo matemático. En contraste, la modelización matemática es un proceso iterativo que utiliza las matemáticas para describir y obtener información sobre situaciones del mundo real que no son inherentemente matemáticas. Además, el texto examina las características esenciales de la modelización matemática y presenta varios ciclos de modelado propuestos por diferentes autores, enfatizando la importancia de esta práctica en el plan de estudios K-12 (educación desde los 5 años hasta los 18 años).

Por otro lado, Trigueros (2009) explora el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas, se aborda el significado de la modelización, presentando diversas posturas teóricas sobre su implementación en el aula. El propósito principal es discutir las posibilidades y limitaciones de esta metodología de enseñanza a través de la descripción detallada de tres experiencias de aplicación el modelo de precios, el reloj de péndulo y el problema de tráfico en cursos de ecuaciones diferenciales y álgebra lineal, destacando la motivación de los estudiantes y el desarrollo conceptual que se logra mediante la modelización.

Considerando lo anterior, queda en evidencia que la modelización matemática desempeña un papel fundamental en la educación, especialmente en la enseñanza de las matemáticas. La integración de la modelización no solo enriquece el proceso de aprendizaje, sino que también promueve habilidades cruciales como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la comprensión profunda de conceptos abstractos.

La literatura revisada demuestra que la aplicación de la modelización matemática no está limitada a un único nivel educativo; por el contrario, su implementación puede adaptarse y resultar beneficiosa desde la educación preescolar hasta la universitaria. Esto amplía el horizonte pedagógico, ofreciendo a los estudiantes oportunidades para conectarse con la realidad a través de situaciones concretas y relevantes.

En definitiva, el uso sistemático de la modelización matemática en diversos niveles educativos contribuye significativamente al desarrollo integral del aprendizaje, facilitando que los estudiantes construyan conocimiento de manera activa y contextualizada. Por ello, resulta indispensable considerar su incorporación como una estrategia clave dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.2 Sobre pensamiento algebraico en el bachillerato

El pensamiento algebraico es una competencia fundamental que se vuelve cada vez más relevante conforme los estudiantes avanzan en los grados académicos. Este tipo de pensamiento no solo permite comprender y trabajar con símbolos y expresiones algebraicas, sino que también favorece la capacidad para generalizar, abstraer y resolver problemas complejos de manera lógica y estructurada.

Sin embargo, desarrollar el pensamiento algebraico representa un desafío importante para muchos estudiantes, dado que implica un cambio significativo en la forma de razonar y entender las matemáticas. Esta dificultad convierte a su enseñanza en un aspecto clave dentro de los procesos educativos y, por ende, en un área prioritaria para el diseño y la orientación de este proyecto de tesis, cuyo propósito es contribuir a mejorar el desarrollo de esta habilidad esencial.

Pitta et al., (2019) investigaron si el pensamiento algebraico es un constructo multifacético, utilizando el marco teórico de Kaput (1998) con estudiantes de secundaria. Los investigadores aplicaron técnicas de modelización de ecuaciones estructurales para analizar el rendimiento de los estudiantes en cuatro componentes del pensamiento algebraico: Aritmética Generalizada, Pensamiento Funcional, Lenguajes de Modelización y Prueba Algebraica. Los resultados confirmaron que el pensamiento algebraico está compuesto por estas cuatro componentes distintas y, crucialmente, revelaron una progresión coherente en la dificultad, sugiriendo que el Pensamiento Funcional es un requisito previo para las otras componentes, con la Prueba Algebraica siendo la más avanzada. Además, el análisis indicó que las habilidades cognitivas de los estudiantes, como el razonamiento analógico, serial y espacial, son predictores significativos de sus capacidades de pensamiento algebraico.

En ese sentido, los mismos autores Pitta et al. (2023) investigaron la conexión entre el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria y secundaria y sus habilidades cognitivas de dominio general, como varios tipos de razonamiento. Los investigadores evaluaron a 591 estudiantes de los grados cuatro al siete en tres áreas del pensamiento algebraico: aritmética generalizada, pensamiento funcional y lenguajes de modelización, así como en razonamiento analógico, serial, espacial y deductivo. Los hallazgos clave de la modelización de ecuaciones estructurales revelaron que el razonamiento deductivo predijo el rendimiento de los estudiantes en las tres categorías del pensamiento algebraico. Además, la aritmética generalizada se predijo por el razonamiento analógico y serial, mientras que el pensamiento funcional y los lenguajes de modelización fueron predichos por el razonamiento espacial, sugiriendo que las distintas áreas del álgebra requieren diferentes demandas mentales. El objetivo final de la investigación es ayudar a educadores y académicos a comprender mejor el esfuerzo cognitivo necesario para el aprendizaje del álgebra en estos grados fundamentales.

Hasta el momento, la mayoría de las investigaciones consultadas se han centrado en el pensamiento algebraico de estudiantes de nivel primaria y secundaria, mientras que se encontraron pocos trabajos específicos que aborden este tema en el nivel medio superior. Esta escasez de estudios representa un reto importante para el presente proyecto, ya que limita el marco de referencia y evidencia disponible para comprender y abordar las particularidades del desarrollo del pensamiento algebraico en este nivel educativo.

No obstante, Torres y Gómez (2019) presentan una propuesta didáctica para la reconceptualización del álgebra en el bachillerato, con el objetivo principal de fomentar el pensamiento algebraico en los estudiantes. Argumentan que el álgebra escolar tradicional está desconectada de la realidad social y se limita a algoritmos y símbolos, lo que minimiza su sentido y uso funcional. Para superar esta limitación, proponen un cambio de enfoque donde las matemáticas se vean como un medio para desarrollar formas de pensamiento, utilizando *Diseños de Experiencias de Aprendizaje* (DEA) que promueven la conceptualización del Álgebra a partir de la funcionalidad y el sentido social del conocimiento. La metodología de diseño de estas experiencias incluye un análisis sistemático de los saberes matemáticos y se orienta a desarrollar la capacidad de los estudiantes para establecer relaciones entre magnitudes variables.

Existen diversos métodos e instrumentos para fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. Actualmente, la tecnología avanza rápidamente y se perfila para igualar e incluso superar en poco tiempo a los métodos tradicionales de enseñanza. En este contexto, Gagliani et al. (2025) destacan la relación entre el desarrollo del pensamiento algebraico y el uso de herramientas tecnológicas, subrayando su importancia en los procesos educativos modernos.

En su investigación examinan las fases asíncronas de las *discusiones matemáticas digitales* (DMD) llevadas a cabo por estudiantes de noveno grado a través de chats y Padlet, centrándose en el uso del lenguaje algebraico para la construcción de pruebas. Los autores buscan caracterizar las interacciones asíncronas de los estudiantes utilizando un marco de modos sociales de co-construcción, al tiempo que identifican los aspectos epistémicos del pensamiento algebraico que surgen, como la activación y coordinación de marcos conceptuales y la anticipación de pensamientos.

La metodología de la investigación se basa en un diseño didáctico que estructura la DMD en fases de trabajo en grupo (chat), discusión en clase (Padlet) y una recapitulación presencial. Los hallazgos principales sugieren una relación directa entre la riqueza de los modos sociales de interacción y el desarrollo del pensamiento algebraico colectivo, destacando que una mayor variedad de interacciones fomenta el pensamiento colectivo, mientras que una interacción limitada conduce a un pensamiento más individual.

Por lo que el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes es fundamental para su formación matemática y para enfrentar con éxito las demandas académicas y sociales actuales. Este tipo de pensamiento permite a los alumnos comprender y manejar símbolos, generalizar patrones y resolver problemas de manera abstracta, habilidades que son esenciales no solo en matemáticas, sino también en diversas áreas del conocimiento y en la vida diaria. Fomentar esta competencia facilita la transición del cálculo aritmético a la comprensión más profunda y estructurada de las matemáticas, lo que contribuye a formar ciudadanos críticos y creativos.

No obstante, el fortalecimiento del pensamiento algebraico implica una serie de dificultades y desafíos para los estudiantes. Muchas veces, el paso hacia la abstracción y el uso de símbolos genera confusión y resistencia, ya que requiere un cambio en la forma tradicional de entender y abordar los problemas matemáticos. Además, las dificultades pueden incrementarse debido a la falta de estrategias pedagógicas adecuadas o recursos didácticos que faciliten este proceso. Asimismo, el contexto educativo, la formación del docente y la motivación del estudiante influyen notablemente en el éxito de este desarrollo, lo que demanda un enfoque integral y adaptativo en la enseñanza.

En consecuencia, es indispensable diseñar y aplicar metodologías que atiendan estas dificultades, promoviendo un aprendizaje significativo y comprometido. La incorporación de actividades contextualizadas, el uso de tecnología educativa y la creación de ambientes motivadores resultan estrategias clave para superar los retos que conlleva el desarrollo del pensamiento algebraico, asegurando así un avance sólido y duradero en la formación matemática de los estudiantes.

2.3 Dificultades de los estudiantes

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas enfrentan diversas dificultades que afectan el desarrollo efectivo de esta disciplina en los estudiantes. Estas barreras pueden estar relacionadas con aspectos conceptuales, metodológicos y emocionales, que dificultan la comprensión profunda de los contenidos. Además, la falta de estrategias pedagógicas adecuadas y de recursos didácticos innovadores contribuye a que muchos estudiantes experimenten desmotivación, ansiedad o confusión, lo que limita su rendimiento y su interés por las matemáticas. Reconocer y abordar estas dificultades es fundamental para mejorar los procesos educativos y favorecer un aprendizaje más significativo y duradero.

A continuación, se mencionan tres dificultades identificadas que se pretenden abordar en este proyecto de tesis.

a) Dificultad para modelar

Ruano y colaboradores (2008) en su investigación se enfocan en el análisis y clasificación de errores que cometen estudiantes de secundaria y bachillerato al trabajar con procesos fundamentales del lenguaje algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización. Los autores, buscan comprender los orígenes de estas equivocaciones, categorizándolos en tres ejes principales: la presencia de un obstáculo (un conocimiento previo que se aplica inadecuadamente), la ausencia de sentido del concepto, o problemas de actitud afectiva. La metodología incluye la administración de un cuestionario para identificar patrones de error, como la necesidad de clausura y el uso incorrecto de paréntesis, con el fin de proponer consecuencias didácticas efectivas para corregir estas dificultades en el aula.

Los autores presentan el siguiente problema que fue aplicado a 11 estudiantes de un bachillerato tecnológico y donde ellos consideran que se debe de modelar el problema planteado.

Pregunta 5

En el supermercado un kilo de peras cuesta 125 pesetas, un kilo de plátanos 60 pesetas, el kilo de ciruelas 325, el kilo de naranjas 210 pesetas y cada kiwi cuesta b pesetas. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: compran a la semana 2 kilos de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

Al analizar las respuestas de los alumnos llegaron a la conclusión de que, aunque los estudiantes identifican el modelo, no logran atribuir un significado adecuado al uso de las letras y suelen regresar a lo numérico para poder solucionar el problema. Otro error común es el uso inadecuado del cambio de registro. La mayoría de los alumnos presenta dificultades al tratar de expresar la relación entre los kilos de ciruelas y su costo.

En conclusión, se pone de manifiesto que las dificultades de los estudiantes en el uso del lenguaje algebraico no se limitan a errores de procedimiento, sino que reflejan problemas conceptuales y actitudinales más profundos. Los errores en la sustitución formal, la generalización y la modelización revelan que muchos alumnos no logran otorgar significado al uso de las letras ni establecer una conexión sólida entre lo numérico y lo simbólico, lo que los lleva a depender de estrategias aritméticas.

Asimismo, la falta de dominio en el cambio de registro al pasar del lenguaje verbal al algebraico obstaculiza la comprensión del problema y la construcción de modelos adecuados. Estos hallazgos subrayan la necesidad de intervenciones didácticas que fortalezcan la comprensión semántica del álgebra, promoviendo el razonamiento simbólico y el sentido del uso de las representaciones en contextos significativos.

b) Dificultad para algebrizar

En ese sentido, Drijvers y Jupri (2016) realizaron una investigación con estudiantes indonesios entre 12 y 14 años, ellos encontraron que existen varias dificultades al momento de resolver problemas algebraicos utilizando entornos digitales de matemáticas (applets).

La principal dificultad reside en la matematización, particularmente en la matematización horizontal, que consiste en traducir problemas reales de enunciado a modelos matemáticos simbólicos como ecuaciones, esquemas o diagramas. Muchos estudiantes tienen dificultades para comprender el contexto del problema y formular el modelo matemático correcto.

Las dificultades también aparecen en la matematización vertical, especialmente en el proceso de solución, que incluye manipular y resolver las ecuaciones, realizar operaciones aritméticas correctamente, comprender las expresiones algebraicas y utilizar correctamente el signo igual. Entre los errores frecuentes se incluyen la mala comprensión o el desconocimiento de los enunciados del problema, la formulación incorrecta de las ecuaciones, errores de cálculo, errores en la operación inversa y la comprobación inadecuada de las soluciones.

En general, el principal obstáculo al que se enfrentan los estudiantes es transformar el problema verbal en un modelo matemático apropiado, lo que subraya la importancia de la instrucción explícita y la práctica en los procesos de matematización en la enseñanza del álgebra.

En conclusión, estas dificultades reflejan una brecha entre la comprensión del contexto del problema y su representación matemática, así como una falta de dominio en la manipulación de ecuaciones y el uso adecuado del lenguaje algebraico. Por ello, se hace necesario fortalecer la enseñanza del álgebra mediante estrategias didácticas que promuevan la construcción progresiva del pensamiento algebraico, con énfasis en la interpretación, la modelización y la verificación de soluciones, de modo que los estudiantes logren establecer conexiones significativas entre el mundo real y el mundo simbólico.

c) Dificultad con el uso de la variable

Trigueros at al., (1996) se enfocan en la creación de un instrumento de evaluación para diagnosticar el nivel de comprensión y manejo del concepto de variable en estudiantes de álgebra. El concepto de variable es fundamental en álgebra, ya que permite representar cantidades desconocidas o que pueden cambiar en una expresión matemática. Sin embargo, su comprensión y manejo pueden ser desafiantes para muchos estudiantes.

Los autores diseñaron un cuestionario que evalúa diferentes aspectos relacionados con el manejo del concepto de variable en el álgebra. El cuestionario se desarrolla a partir de una revisión exhaustiva de la literatura existente sobre el tema y la consulta con expertos en educación matemática. El cuestionario abarca una variedad de temas, incluyendo la comprensión del concepto de variable, la capacidad para identificar variables en contextos dados, la habilidad para escribir y manipular expresiones algebraicas que involucran variables, y la capacidad para resolver ecuaciones y problemas algebraicos.

Una vez diseñado el cuestionario, los autores llevaron a cabo un proceso de validación para asegurar su fiabilidad y validez. Esto implicó la administración del cuestionario a una muestra de estudiantes de álgebra y el análisis de los resultados obtenidos.

Los resultados del estudio proporcionan información valiosa sobre el nivel de comprensión y manejo del concepto de variable en los estudiantes evaluados. Además, el cuestionario desarrollado puede ser utilizado por educadores como una herramienta de diagnóstico para identificar las áreas de fortaleza y debilidad en el aprendizaje del álgebra y diseñar intervenciones educativas específicas.

Por otro lado, Herrera et al. (2016) se enfocan en analizar la comprensión del concepto de variable entre estudiantes de bachillerato en diferentes niveles de estudio. Utilizando el Modelo 3UV (3 Usos de la variable), que distingue entre la variable como incógnita específica, número general y variable en relación funcional, los autores evaluaron las estrategias de resolución de 48 estudiantes frente a problemas que requerían generalización y modelización.

El estudio encontró que la principal dificultad no es la falta de fluidez algorítmica, sino la incapacidad de los estudiantes para realizar la conversión entre diferentes registros semióticos (como el lenguaje natural al algebraico o aritmético). Concluyen que la enseñanza se centra demasiado en los aspectos manipulativos del álgebra, lo que resulta en un conocimiento procedimental carente de significado y una falta de mejora en la comprensión del concepto de variable incluso en los niveles educativos avanzados.

En ese sentido, Meléndez (2015) presenta los avances de una investigación enfocada en identificar las principales dificultades de los estudiantes del nivel medio superior en México con la comprensión de conceptos algebraicos, particularmente los diversos usos del concepto de variable. Utilizando el marco teórico de los Modelos Teóricos Locales y el Modelo 3UV (variable como incógnita, número general y relación funcional), el objetivo es caracterizar el desempeño de los alumnos al resolver problemas aritmético-algebraicos. Los resultados preliminares revelan una gran dificultad entre los estudiantes en la resolución de problemas, con observaciones que incluyen el anclaje a la operatividad y problemas para transitar entre diferentes representaciones de la variable. El artículo concluye señalando la necesidad de un análisis más profundo y la importancia de que los planes de estudio aborden explícitamente los diferentes usos de la variable.

Con el propósito de analizar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de nivel superior, se llevó a cabo un ejercicio basado en un problema tomado del estudio de Escalante y Cuesta (2012), quienes investigan el uso que los estudiantes universitarios hacen de la variable al resolver problemas matemáticos. Este problema fue retomado y aplicado a un grupo de estudiantes del segundo semestre de licenciatura en la Universidad de Sonora, aunque el proyecto de tesis va dirigido a estudiantes de nivel medio superior, con esta implementación se pudo notar la prevalencia de la misma dificultad en los estudiantes de nivel superior.

El pilotaje de este estudio se realizó con estudiantes universitarios con el objetivo de identificar si los alumnos presentan deficiencias en la resolución de problemas y en el uso de la variable. Esta elección se justifica porque, aunque el trabajo está dirigido al nivel de bachillerato, los estudiantes universitarios recientes han transitado por la educación media superior hace poco tiempo, por lo que sus dificultades reflejan de manera representativa los vacíos o debilidades que pueden arrastrarse desde el bachillerato. Además, trabajar con universitarios permite un acceso más ágil a la muestra y facilita la aplicación de instrumentos en un entorno controlado. Esta estrategia metodológica es válida, ya que investigaciones previas han mostrado que los procesos y dificultades en la resolución de problemas matemáticos pueden analizarse en diferentes niveles educativos para identificar patrones y carencias que se originan en etapas anteriores del aprendizaje. (Penalva et al., 2010)

Se recopilaron y analizaron las hojas de trabajo de los 40 estudiantes que participaron en la actividad, con el fin de estudiar los procedimientos empleados durante la resolución del problema. A partir de este análisis, y teniendo en cuenta tanto la naturaleza del problema como las respuestas esperadas de los alumnos, se realizó una adaptación de los niveles de razonamiento algebraico propuestos por Godino et al. (2014). Esta modificación nos permitió clasificar de manera más precisa las estrategias utilizadas por los estudiantes en relación con su nivel de algebrización.

En este apartado se presentan, a modo de ejemplo, algunas de las respuestas de los estudiantes, acompañadas de la clasificación correspondiente según el nivel de pensamiento algebraico en el que se ubican, con base en la adaptación realizada.

El problema fue el siguiente:

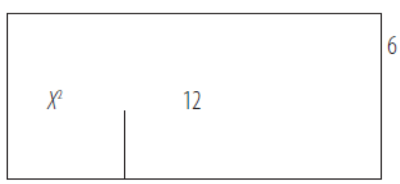
Pregunta 1 (tomado de Ursini y Trigueros, 2006)	*Análisis Particular*
¿Para cuales valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288? 	Se debe reconocer a x como una entidad general (G2) que debe ser manipulada para obtener la expresión del área (G4). Reconocer que x es una cantidad desconocida (I1), cuyo valor puede determinarse (I4) realizando operaciones algebraicas o aritméticas. Se debe reconocer la correspondencia (F1) entre los valores del área y los valores de x, así como la variación conjunta de ambas (F4). Determinar la variación de x dado el intervalo de variación del área (F5).

Figura 5 Problema retomado para pilotaje

La adaptación de los niveles de pensamiento algebraico de Godino y colaboradores se realizaron de la siguiente manera, presentada en la tabla 4:

Tabla 4 Adaptación de los niveles de pensamiento algebraico de Godino et al. (2014)

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen definiciones, conceptos ni generalizaciones. Pueden intervenir nociones básicas de la matemática (suma, resta, multiplicación y división)	Opera con ejemplos concretos, aritméticos. Se espera que se visualicen procedimientos al tanteo, poniendo números al azar para encontrar la x que pregunta el problema.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a datos desconocidos.

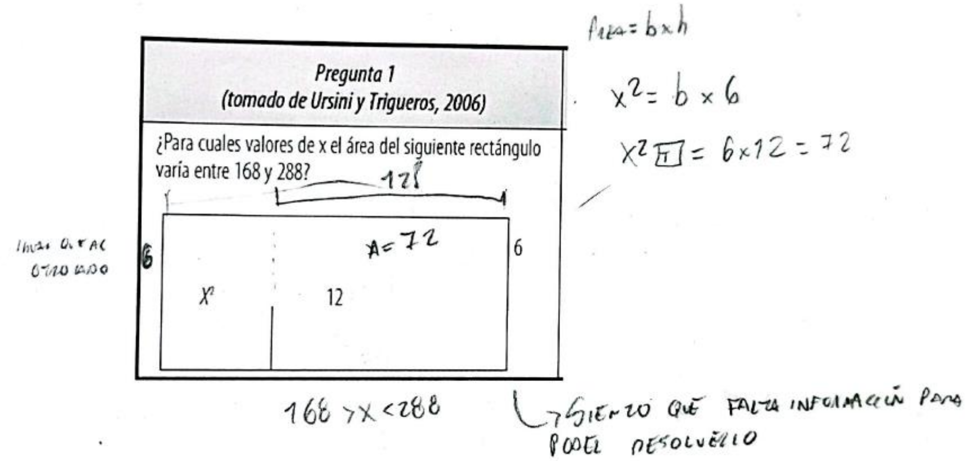
1	Se reconoce que existen datos desconocidos y pueden nombrarlas como variables.	Se pueden visualizar operaciones básicas para encontrar los datos desconocidos. Pueden presentarse ecuaciones de la forma $Ax^2 \pm B = C$.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos.
2	Intervienen indeterminadas o variables, conceptos, generalizaciones, argumentos, etc.	Se opera con las variables en las ecuaciones de desigualdades del tipo $D \leq Ax^2 \pm B \leq C$.	Simbólico-literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.
3	Uso de parámetros.	Se estudian familias de ecuaciones y funciones usando parámetros y coeficientes. Procesos de operar con la incógnita o con la variable. Primer encuentro con parámetros y coeficientes variables.	Simbólico-literal; los símbolos se usan en la función paramétrica que implica la discriminación del dominio y el rango, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica.

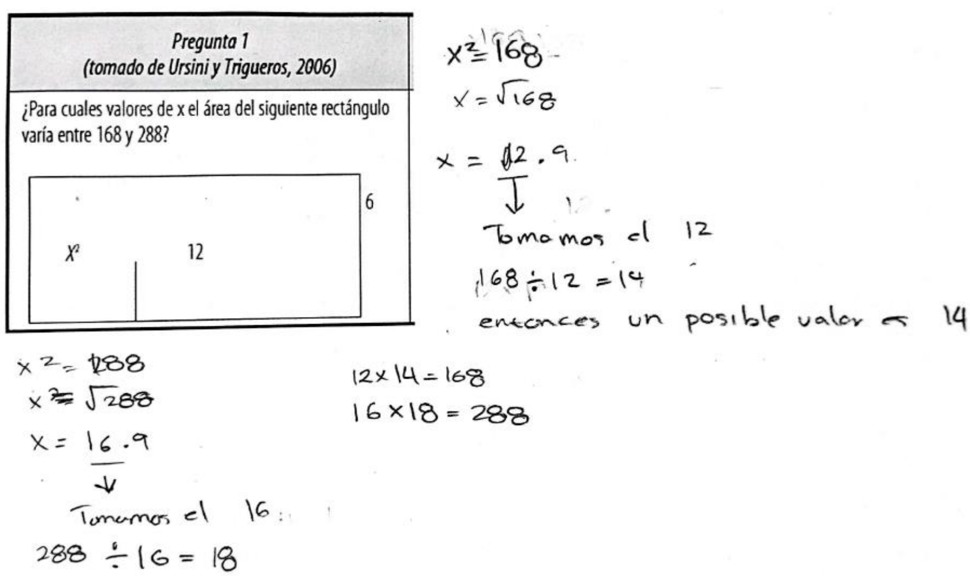
Después de analizar las reproducciones de los estudiantes, ejemplificamos algunas de ellas asignándoles los niveles antes mencionados. Se muestra esta clasificación en la tabla 5.

Tabla 5 Asignación de nivel de pensamiento algebraico a las reproducciones de los estudiantes

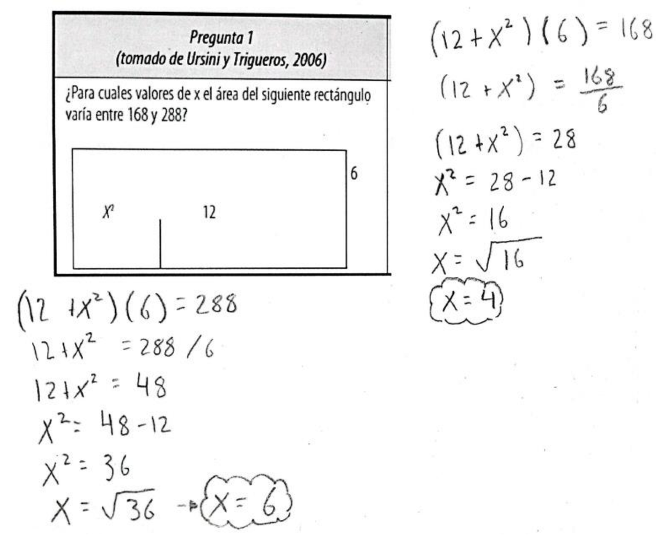
Nivel 0

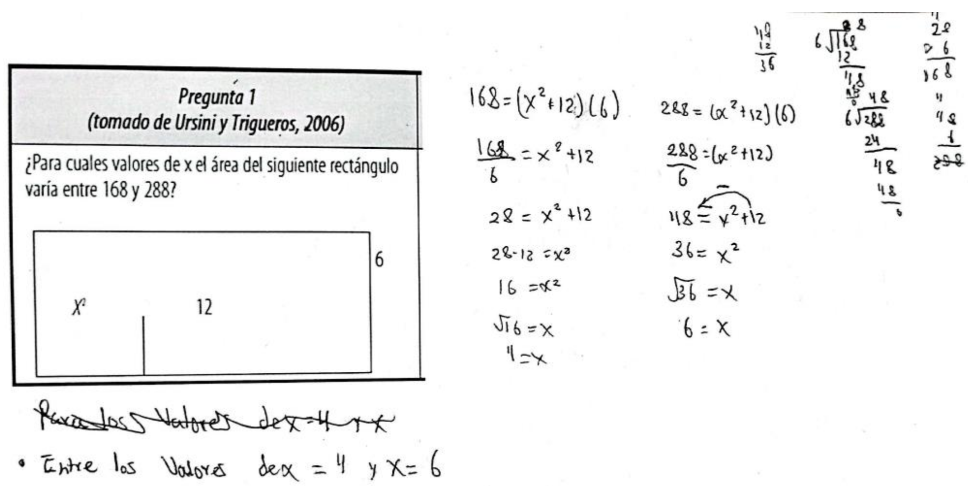
Se observó que los estudiantes intentaron resolver el problema planteado, mostrando símbolos y ejemplos numéricos en sus reproducciones.

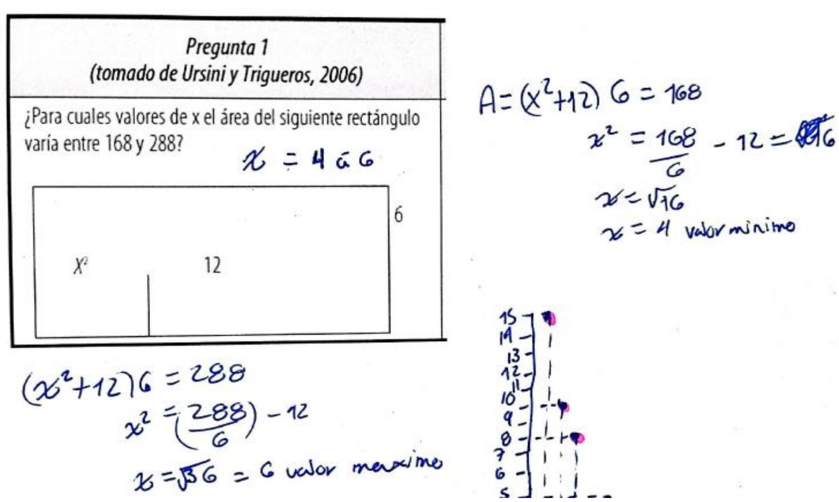




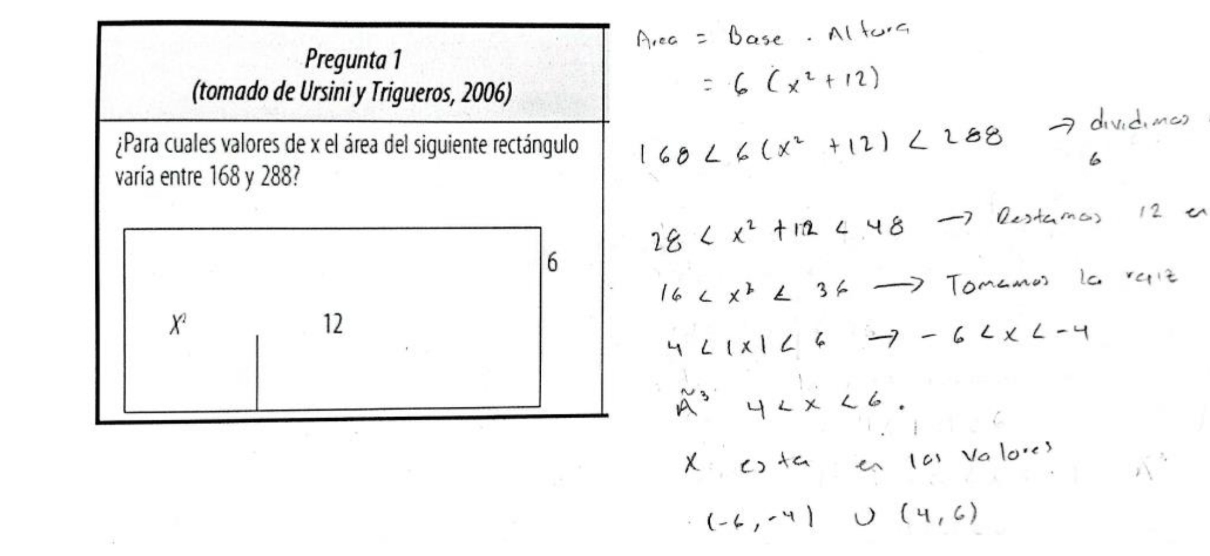
Nivel 1


Pregunta 1
(tomado de Ursini y Trigueros, 2006)
¿Para cuales valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288?
X^2
12
6
$(12+X^2)(6)=168$
$(12+X^2)=\frac{168}{6}$
$(12+X^2)=28$
$X^2=28-12$
$X^2=16$
$X=\sqrt{16}$
$X=4$
$(12+X^2)(6)=288$
$12+X^2=288/6$
$12+X^2=48$
$X^2=48-12$
$X^2=36$
$X=\sqrt{36} \rightarrow X=6$


Pregunta 1
(tomado de Ursini y Trigueros, 2006)
¿Para cuales valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288?
X^2
12
6
$168=(X^2+12)(6)$
$\frac{168}{6}=x^2+12$
$28=x^2+12$
$28-12=x^2$
$16=x^2$
$\sqrt{16}=x$
$4=x$
$288=(x^2+12)(6)$
$\frac{288}{6}=(x^2+12)$
$48=x^2+12$
$36=x^2$
$\sqrt{36}=x$
$6=x$
~~Para los Valores de x=4 y x~~
• Entre los Valores de x = 4 y x = 6


Pregunta 1
(tomado de Ursini y Trigueros, 2006)
¿Para cuales valores de x el área del siguiente rectángulo varía entre 168 y 288?
$x = 4$ ó 6
X^2
12
6
$A=(x^2+12)\,6=168$
$x^2=\frac{168}{6}-12=16$
$x=\sqrt{16}$
$x=4$ valor mínimo
$(x^2+12)6=288$
$x^2=\left(\frac{288}{6}\right)-12$
$x=\sqrt{36}=6$ valor máximo
15
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5

Nivel 2


Nivel 3
Nivel 4
Para estos dos niveles, no se identificaron elementos suficientes en las reproducciones de los estudiantes, por lo tanto, no se pudo asignar una clasificación.

En conjunto, las investigaciones revisadas coinciden en que la comprensión del concepto de variable representa una de las principales dificultades en el aprendizaje del álgebra, especialmente en el nivel medio superior. Los resultados muestran que, más allá de la falta de dominio algorítmico, las dificultades radican en la interpretación semántica y funcional de la variable, así como en la traducción entre distintos registros de representación (verbal, numérico, gráfico y simbólico).

Esto revela que la enseñanza del Álgebra suele centrarse en aspectos mecánicos y procedimentales, dejando de lado la construcción de significados profundos y flexibles. En consecuencia, se resalta la necesidad de replantear las estrategias didácticas para abordar explícitamente los diversos usos de la variable y promover una comprensión más integral que facilite el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

2.4 Uso de la tecnología en la modelización

A lo largo de los años, la tecnología ha adquirido un papel cada vez más relevante, y su incorporación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas resulta indispensable para mantenerse al ritmo de los avances educativos. Entre las diversas metodologías empleadas en la enseñanza de esta disciplina, la modelización matemática destaca como una herramienta clave.

La pregunta entonces es: ¿cómo puede integrarse la tecnología dentro de la modelización matemática? Diversas investigaciones han demostrado que la tecnología desempeña un papel fundamental en este proceso, además de señalar la importancia de que los docentes la incorporen en sus estrategias pedagógicas para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

En ese sentido, Vorhölter y Greefrath (2025) exploran la interdependencia de las creencias de los profesores de matemáticas sobre la modelización matemática (M), la tecnología (T) y la combinación de ambos, la modelización con tecnología (MT). Utilizando una muestra de 90 profesores en servicio y múltiples instrumentos de evaluación, el estudio buscó determinar las relaciones entre estas facetas de competencia profesional y sus sub facetas. Los hallazgos principales revelaron una correlación notablemente fuerte entre las creencias sobre la tecnología y la modelización, y también que la relación entre la modelización y la modelización con tecnología está parcialmente mediada por las creencias sobre la tecnología.

Específicamente, las sub facetas de la tecnología relacionadas con el apoyo al aprendizaje por descubrimiento y las desventajas de la tecnología influyen significativamente en las creencias sobre la modelización con tecnología, sugiriendo una implicación crucial para la formación docente: abordar las creencias sobre la tecnología podría impactar positivamente tanto las creencias tecnológicas como las de modelización con tecnología.

Por otro lado, Koyunkaya y Dede (2024) se enfocan en cómo los futuros profesores de matemáticas diseñan y resuelven problemas de modelización matemática integrando diversas herramientas digitales, un aspecto que aún no ha sido explorado a fondo. Los investigadores combinaron dos cursos universitarios para examinar las habilidades de los participantes, adoptando el ciclo de modelización asistido por GeoGebra como marco conceptual. Los resultados demostraron que los futuros profesores pudieron elaborar y solucionar problemas complejos de modelización, utilizando herramientas como Desmos y GeoGebra, la investigación propone una expansión del marco de modelización al añadir nuevas acciones tecnológicas a las etapas del ciclo.

El objetivo principal de su investigación es relucir la integración efectiva de la tecnología en la enseñanza de la modelización, demostrando el potencial de las herramientas digitales para enriquecer tanto el diseño como la solución de estos problemas.

En relación con la idea anterior, Hernández y colaboradores (2023) analizan cómo los futuros profesores de matemáticas de secundaria utilizan las tecnologías digitales, específicamente GeoGebra, para representar, explorar y resolver problemas matemáticos. El estudio se centra en observar la actividad matemática de los participantes, desglosada en tres componentes: Notificación Matemática (Mathematical Noticing), Razonamiento Matemático y Creación Matemática, a medida que abordan un problema complejo. Los hallazgos destacan que el uso de GeoGebra fomenta la formulación de conjeturas y la búsqueda de múltiples enfoques o rutas novedosas para la resolución, evidenciando una conexión crucial entre las herramientas tecnológicas y el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático en la formación docente.

La investigación recalca la importancia de integrar la fluidez tecno matemática en la preparación de los futuros educadores.

La revisión de las investigaciones analizadas evidencia que la tecnología desempeña un papel esencial en la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática, tanto en la formación de docentes como en la práctica educativa. Su integración no solo amplía las posibilidades de exploración y resolución de problemas, sino que también transforma la manera en que los estudiantes construyen y comprenden los conceptos matemáticos.

Destacan que la incorporación de herramientas digitales como GeoGebra o Desmos fortalece procesos cognitivos clave como el razonamiento, la formulación de conjeturas y la creación matemática, permitiendo un aprendizaje más dinámico y significativo. Además, se pone de relieve que las creencias y actitudes de los docentes hacia la tecnología influyen directamente en su disposición y capacidad para implementar la modelización con tecnología, lo que señala la necesidad de una formación docente que aborde de manera integral tanto los aspectos técnicos como los pedagógicos.

En síntesis, la tecnología no debe considerarse un complemento, sino un componente indispensable en la modelización matemática, capaz de potenciar la comprensión, la creatividad y la autonomía del estudiante. Su uso consciente y pedagógicamente fundamentado contribuye a desarrollar una fluidez tecno matemática, preparando a los futuros educadores y aprendices para enfrentar los retos de una educación matemática más conectada con los avances científicos y tecnológicos del siglo XXI.

Para cerrar esta sección es importante resaltar que la revisión del estado del arte evidencia el papel que la modelización matemática y el pensamiento algebraico juegan en la formación matemática de los estudiantes de bachillerato. La modelización matemática se ha mostrado como una estrategia didáctica para la comprensión de conceptos matemáticos, el desarrollo de habilidades de resolución de problemas y la vinculación del aprendizaje con situaciones del mundo real. De igual manera, el pensamiento algebraico es una competencia esencial para afrontar las demandas académicas actuales, pero presenta desafíos significativos que requieren la implementación de metodologías adecuadas y el uso de tecnología educativa que facilite el aprendizaje.

Los estudios revisados también señalan dificultades recurrentes en el aprendizaje, como la comprensión y uso adecuado de la variable, la algebrización de problemas y la integración de la tecnología en la modelización, aspectos que demandan intervenciones didácticas innovadoras y contextualizadas. En este sentido, el conocimiento y análisis de las investigaciones previas permite identificar vacíos y orientaciones para el diseño de propuestas educativas que contribuyan a superar estos retos, asegurando un aprendizaje significativo y un desarrollo integral del pensamiento matemático.

En conclusión, la integración sistemática de la modelización matemática, el fortalecimiento del pensamiento algebraico y el adecuado uso de la tecnología constituyen elementos clave para una educación matemática de calidad en el nivel bachillerato. Esta base teórica y empírica sustenta la pertinencia del presente proyecto de tesis, orientado a diseñar y aplicar estrategias didácticas que atiendan las dificultades detectadas y promuevan el desarrollo de competencias matemáticas cruciales para la formación de estudiantes críticos, creativos y preparados para enfrentar los retos del mundo real.

SECCIÓN 3. PROBLEMÁTICA Y OBJETIVOS

En este apartado se describen los elementos fundamentales para justificar la problemática que se pretende atender en este trabajo de intervención didáctica. Se identificarán las razones que respaldan la relevancia del tema, así como los factores que evidencian la necesidad de implementar estrategias que contribuyan a mejorar la situación actual. Así mismo, se mostrarán los objetivos planteados que guiarán el proyecto de tesis.

3.1 El pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico consiste en un tipo de razonamiento matemático que permite identificar, examinar y generalizar patrones y relaciones, empleando símbolos y letras para representar números y operaciones. Este pensamiento es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y se va adquiriendo de manera gradual desde la educación básica hasta niveles más avanzados.

Con el paso de los años, se han desarrollado diferentes enfoques sobre el pensamiento algebraico, diversos autores han planteado sus posturas al respecto, como es el caso de Kieran (2004), quien afirma que:

> El pensamiento algebraico puede interpretarse como un enfoque a situaciones cuantitativas que enfatiza los aspectos relacionales generales con herramientas que no son necesariamente simbólicas-alfabéticas, pero que en última instancia pueden usarse como soporte cognitivo para introducir y sostener el discurso más tradicional del álgebra escolar.

Por otro lado, Kaput (2008) sostiene que:

> El dominio del álgebra se compone tanto de prácticas de pensamiento específicas como de áreas de contenido. En particular, sostiene que el pensamiento algebraico incluye (a) la elaboración y comunicación de generalizaciones en sistemas de símbolos cada vez más formales y convencionales, y (b) el razonamiento con formas simbólicas.

Kriegler (2008) enfatiza que “hay dos partes en el pensamiento algebraico, que son: 1) el desarrollo de herramientas de pensamiento matemático y 2) el estudio de la idea básica del álgebra”.

Lew (2004) afirma que “el álgebra es una forma de pensar donde su éxito se basa en seis tipos de razonamiento matemático” los cuales se describen en la Tabla 6.

Tabla 6 Tipos de razonamiento matemático por Lew (2004)

Pensamiento Algebraico	Explicación
Generalización	La generalización es el proceso de encontrar patrones o formas, que comienza con el patrón identificado a partir del objeto dado. Cada relación funcional también es un patrón.
Abstracción	La abstracción es un proceso para extraer objetos y relaciones matemáticas basados en la generalización. En las abstracciones se utilizan símbolos.
Pensamiento analítico	El pensamiento analítico es el proceso de aplicar la operación inversa utilizada bajo las condiciones del problema para encontrar las condiciones requeridas para su resolución.
Pensamiento dinámico	El pensamiento dinámico es pensar involucrando variables como objetos que pueden ser cambiados.
Modelización	La modelización es un proceso para representar situaciones complejas utilizando expresiones matemáticas, para investigar situaciones mediante modelos y describir las relaciones de una actividad. Esta representación puede usar una ecuación y resolver dicha ecuación.
Organización	Organizar proporciona una variedad de combinaciones de pensamiento para encontrar todas las variables independientes, las cuales son importantes en diversas actividades de resolución.

De las perspectivas previamente mencionadas sobre el pensamiento algebraico, se pueden distinguir distintos enfoques y características específicas según cada autor. No obstante, también es posible encontrar importantes coincidencias entre ellos. Una de las similitudes más relevantes es que todos consideran la generalización como un elemento fundamental del pensamiento algebraico. La habilidad para reconocer patrones y representarlos de forma general utilizando símbolos o expresiones algebraicas se percibe como una destreza crucial, ya que facilita a los estudiantes profundizar en su comprensión matemática, y les permite ir más allá del simple cálculo numérico para desarrollar un razonamiento abstracto.

Un aspecto fundamental en el desarrollo del pensamiento algebraico es el uso del concepto de variable, ya que permite representar cantidades desconocidas, generalizar patrones y expresar relaciones matemáticas de manera simbólica. Sin embargo, los estudiantes a menudo perciben a la variable de formas diversas y, en muchos casos, limitadas; por ejemplo, pueden verla únicamente como una letra que representa un número específico, sin comprender su función como herramienta para generalizar o expresar dependencias entre cantidades. Esta percepción puede dificultar la transición del pensamiento aritmético al algebraico, por lo que es esencial promover experiencias que les ayuden a construir una comprensión más flexible y funcional del concepto de variable.

En ese sentido, varios investigadores (Matz, 1982; Trigueros et al., 2000) han encontrado evidencia convincente de que numerosos estudiantes, desde la educación primaria hasta la universidad, enfrentan dificultades para resolver ciertos tipos de problemas elementales de álgebra. Los estudios indican que estos errores se originan, en parte, en una concepción tenue y poco definida de las variables y de su papel en la resolución de problemas.

Escalante y Cuesta (2012) investigaron las dificultades que enfrentan los estudiantes universitarios al intentar comprender el concepto de variable en el contexto de la educación matemática. La comprensión adecuada de este concepto es fundamental en matemáticas, ya que las variables son componentes esenciales en la formulación y resolución de problemas en diferentes áreas de esta disciplina.

Torres y Calderón (2000) abordan el tema del uso y comprensión de las variables en el contexto del álgebra escolar desde una perspectiva didáctica. Los autores señalan cómo los estudiantes desarrollan su comprensión de las variables y cómo los maestros pueden ayudar a los estudiantes a mejorar su dominio sobre este concepto fundamental. Para ello, los autores reconocen diferentes estrategias didácticas y enfoques pedagógicos que pueden facilitar la comprensión de las variables en el álgebra escolar.

3.2 Modelización matemática

La modelización matemática desempeña un papel fundamental en nuestro trabajo, ya que permite representar, analizar y predecir el comportamiento de sistemas complejos del mundo real mediante el uso de estructuras y métodos matemáticos. Numerosas investigaciones han documentado los beneficios de emplear este método, destacando su capacidad para facilitar la toma de decisiones, simular procesos, generar y verificar hipótesis, así como interpretar y comunicar resultados en diversos contextos profesionales y científicos. Estas ventajas han sido ampliamente reconocidas en áreas como la ingeniería, la economía, la medicina y la educación, donde la modelización matemática contribuye al desarrollo de habilidades críticas y a la resolución eficiente de problemas complejos.

Es por ello que, Rodríguez (2010) manifiesta la importante temática del proceso de enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática, con un enfoque específico en las ecuaciones diferenciales. También señala la importancia de la modelización matemática en la educación, destacando su relevancia tanto en el ámbito académico como en la resolución de problemas del mundo real. Además, menciona cómo la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en el contexto de la modelización puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento crítico, razonamiento matemático y aplicación práctica de conceptos. Es recomendable el diseño de actividades que incorporen la mayoría de las etapas del proceso de modelización si realmente se pretende que el alumno desarrolle habilidades en este rubro.

Con el empleo de la modelización matemática, los docentes tendrían que modificar sus métodos de enseñanza para llevar a cabo las actividades que se planteen con modelización.

Arcos et al. (2018) investigaron cómo los futuros profesores de matemáticas adquieren conocimientos sobre la modelización matemática a través de la reflexión durante su formación inicial. Se examina cómo la reflexión sobre sus propias experiencias de modelización, así como sobre la teoría y práctica relacionadas con la modelización matemática, contribuye al desarrollo de su comprensión y habilidades en este campo.

Márquez et al. (2019) se enfocan en analizar cómo la modelización matemática puede ser utilizada como una herramienta efectiva para evaluar el desarrollo de competencias en estudiantes. La modelización matemática implica el uso de conceptos y técnicas matemáticas para abordar problemas del mundo real, lo que puede fomentar el desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la comunicación matemática.

Las investigaciones revisadas proporcionan un panorama sólido acerca de la relevancia y los múltiples beneficios que conlleva la incorporación de la modelización matemática en la enseñanza de las matemáticas. Dichos estudios evidencian que la modelización favorece una comprensión más profunda de los conceptos, al tiempo que facilita la conexión entre el conocimiento matemático y contextos reales. En este sentido, consideramos pertinente y necesario integrar la modelización matemática en nuestro proyecto de tesis, ya que representa una estrategia didáctica que potencia el pensamiento crítico, promueve el aprendizaje significativo y responde a las demandas actuales de una educación matemática más contextualizada y funcional.

3.2.1 Dificultades que enfrentan los profesores

Los docentes deben de tener una formación matemática sólida para poder emplear problemas extra matemáticos para la modelización matemática, de igual manera sería deseable que los docentes estén familiarizados con los conceptos que se empleen en los problemas y que no sean de matemáticas en específico, por ejemplo, de biología, astronomía, arquitectura, etc.

Con base en esta limitación, Guerrero y Mena (2015) comparan las estrategias de enseñanza de la modelización matemática entre estos dos grupos distintos: uno de ellos integrado por matemáticos profesionales y otro de ellos por profesores de matemáticas en la educación secundaria. Los autores examinan cómo estos dos grupos abordan la enseñanza de la modelización matemática, cómo integran la práctica de la modelización en su enseñanza y cuáles son las diferencias y similitudes en sus enfoques.

Los autores proporcionan una visión valiosa sobre cómo se enseña la modelización matemática en diferentes contextos educativos y cómo las estrategias utilizadas por los matemáticos y los profesores de matemáticas pueden influir en el aprendizaje de los estudiantes. Los hallazgos de este estudio pueden ser útiles para mejorar la enseñanza de la modelización matemática y promover un enfoque más efectivo en la educación matemática.

Con el empleo de la modelización matemática, los docentes tendrían que modificar sus métodos de enseñanza para llevar a cabo las actividades que se planteen con modelización.

Las actividades diseñadas que toman a la modelización matemática como punto de partida no es algo nuevo, por lo tanto, algunos profesores de matemáticas podrían haber trabajado previamente con actividades de este tipo, pero puede ser que otros maestros no hayan utilizado este método o hasta podrían no conocer que es la modelización matemática y es ahí donde se presentan las dificultades.

Es deseable descubrir, por medio de estudios empíricos, qué competencias docentes relacionadas con la modelización, son particularmente importantes para mejorar la calidad de la instrucción y el aprendizaje de los estudiantes.

La consecuencia más obvia de estas consideraciones es la inclusión de la modelización matemática y su enseñanza en las fases claves de la formación del profesorado de matemáticas, también y especialmente en las actividades de desarrollo profesional para profesores en ejercicio (Niss y Blum, 2020).

Arcos et al. (2018) investigan cómo los futuros profesores de matemáticas adquieren conocimientos sobre la modelización matemática a través de la reflexión durante su formación inicial. Se examina cómo la reflexión sobre sus propias experiencias de modelización, así como sobre la teoría y práctica relacionadas con la modelización matemática, contribuye al desarrollo de su comprensión y habilidades en este campo.

Proporcionan información valiosa sobre cómo se puede mejorar la formación inicial de profesores de matemáticas para incluir un enfoque más sólido en la modelización matemática; pueden ayudar a mejorar el diseño de programas de formación de profesores y el desarrollo de estrategias efectivas para promover el conocimiento y la competencia en la enseñanza de la modelización matemática en el aula.

En ese sentido, Villa et al. (2009) reportan un estudio de casos con cuatro profesores de matemáticas en Colombia. El trabajo se centra en explorar el sentido de realidad en el contexto de la modelización matemática, utilizando el caso específico de un profesor llamado Alberto. Los autores examinan cómo el sentido de realidad de Alberto influye en su capacidad para participar en actividades de modelización matemática en el aula. Se analiza cómo las experiencias previas, las percepciones y las actitudes de Alberto hacia las matemáticas y el mundo real afectan su participación y desempeño en tareas de modelización matemática.

Villa y colaboradores (2009) proporcionan una visión detallada de cómo los factores individuales y personales del profesor pueden influir en la capacidad de los estudiantes para participar en actividades de modelización matemática y comprender la relevancia de las matemáticas en la vida real.

Cuando se trata de introducir la modelización matemática en la educación, hay dificultades con los materiales y las adaptaciones de las aulas de clases para poder desarrollar actividades de modelización. Hay algunos intentos de compilar actividades diseñadas para utilizar la modelización matemática.

Gould et al. (2012), proponen una serie de actividades para diferentes niveles educativos en contextos extra matemáticos, en cada actividad propuesta se le da una serie de indicaciones para el profesor de cómo podría desarrollar la actividad con modelización matemática y también se presenta la posible solución de cada actividad. Ellos expresan que:

> Un aspecto fundamental de la modelización matemática, como se enfatiza muchas veces en el CCSSM (Common Core State Standards for Mathematics), en la literatura sobre modelización y en el presente trabajo, es el hecho de que cada modelo minimiza ciertos aspectos de la realidad, lo que a su vez significa que los resultados matemáticos eventualmente deben ser verificados contra la realidad. (Gould et al., 2012)

Aunado a lo anterior, Gould et al., (2012) afirman que:

> Hemos discutido varios ejemplos para mostrar la variedad de experiencias que esta colección pretende abarcar. Ilustran situaciones de la vida cotidiana, de la ciudadanía y de las principales disciplinas cuantitativas, situaciones elegidas porque se prestan a breves experiencias introductorias en la modelización matemática. El corazón de la modelización matemática, como hemos visto, es la formulación de problemas antes que la resolución de problemas. (p. XI)

Al respecto de la evaluación de las actividades de modelización, Acebo y Rodríguez (2021) han propuesto una rúbrica para evaluar la competencia en modelización matemática en alumnos de secundaria. Las autoras describen el proceso de diseño de la rúbrica, que incluye la identificación de los criterios clave para evaluar la modelización matemática, así como la definición de niveles de desempeño para cada criterio. Luego, se lleva a cabo un proceso de validación de la rúbrica para garantizar su fiabilidad y validez como herramienta de evaluación.

Acebo y Rodríguez (2021) proporcionan una herramienta útil para evaluar la competencia en modelización matemática en alumnos de secundaria, lo que puede ayudar a los educadores a medir y mejorar las habilidades de los estudiantes en este importante aspecto de la educación matemática. La rúbrica desarrollada en este estudio puede ser utilizada por profesores y educadores para proporcionar retroalimentación específica y efectiva sobre el desempeño de los estudiantes en actividades de modelización matemática.

3.3 Pensamiento matemático en la Nueva Escuela Mexicana (NEM)

Para la educación Secundaria en México, se mencionan diferentes campos formativos en la NEM y el campo donde se hace referencia a las matemáticas se llama saberes y pensamiento científico; en el campo formativo mencionado anteriormente se engloban las materias de Biología, Física, Química y Matemáticas.

Analizando lo que estipula la NEM para el nivel secundaria, existe una lista de contenidos para los diferentes grados de estudio y el contenido que se podría analizar más a fondo como precedente del nivel de interés mostrado en la Figura 6.

CONTENIDO	1ER GRADO	2DO GRADO	3ER GRADO
Introducción al álgebra	Interpreta y plantea diversas situaciones del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa	Representa algebraicamente áreas que generan una expresión cuadrática.	**Representa algebraicamente áreas y volúmenes de cuerpos geométricos y calcula el valor de una variable en función de las otras.**
	Representa algebraicamente perímetros de figuras	Identifica y usa las propiedades de los exponentes al resolver distintas operaciones algebraicas.	

Figura 6. Introducción al álgebra en secundaria

En los primeros tres semestres del bachillerato, las asignaturas de matemáticas están agrupadas bajo el nombre de Pensamiento Matemático (PM), organizadas en tres niveles consecutivos: Pensamiento Matemático I, Pensamiento Matemático II y Pensamiento Matemático III. Cada una de estas materias aborda distintos tipos de pensamientos matemáticos, adaptados progresivamente al desarrollo de competencias específicas en los estudiantes. En la figura 7 se presenta una descripción de los tipos de pensamiento matemático que se incluyen en cada una de estas asignaturas.

Unidad de Aprendizaje Curricular	Tipo del pensamiento matemático
Pensamiento Matemático 1	Pensamiento estadístico y probabilístico
Pensamiento Matemático 2	Pensamiento aritmético, algebraico y geométrico.
Pensamiento Matemático 3	Pensamiento variacional.

Figura 7 Pensamiento matemático en el bachillerato

A continuación, se presenta la figura 8 donde se describen algunos aspectos esenciales de la asignatura de Pensamiento Matemático II, con el objetivo de profundizar en su estructura y enfoques principales.

SEMESTRE	Segundo	
CRÉDITOS	8 créditos	
COMPONENTE	Componente de Formación Fundamental	
HORAS	SEMESTRALES	SEMANALES
MEDIACIÓN DOCENTE	64 horas	4 horas

Figura 8 Aspectos esenciales del Pensamiento matemático II

El programa de Pensamiento Matemático II impartido en segundo semestre consta de 14 progresiones, en cada progresión se describen metas, categorías y subcategorías. La Nueva Escuela Mexicana (NEM) declara que “con el planteamiento de las progresiones de aprendizaje se especifica el qué enseñar, aprender y el qué desarrollar en Pensamiento Matemático para todos los subsistemas de la EMS en el país, sin hacer distinción de las modalidades del bachillerato" (Arroyo y Pérez, 2022).

En el marco de la NEM para el nivel medio superior, *progresión* se refiere al avance gradual y sistemático de los estudiantes en su proceso educativo, asegurando que adquieran y dominen las competencias necesarias para cada etapa de su formación.

También se establecen cuatro categorías para el Pensamiento Matemático.

> Estas categorías pueden pensarse como parcelas que clasifican los procesos cognitivos del quehacer matemático, siempre y cuando se tenga presente que toda actividad matemática puede tener lugar a la vez dentro de dos o más categorías, de hecho, una práctica significativa del pensamiento matemático implicaría que se realicen acciones dentro de categorías de forma simultánea. (SEP,2023)

Estas categorías del pensamiento matemático no funcionan de manera aislada, ya que la actividad matemática puede desarrollarse simultáneamente en una o varias de ellas, lo cual resulta significativo y deseable para fomentar un aprendizaje integral. Las cuatro categorías principales son: Procedural, Procesos de intuición y razonamiento, Solución de problemas y modelización, e Interacción y lenguaje matemático. Cada una de estas se articula a través de subcategorías que enriquecen su alcance y permiten abordar la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva amplia y dinámica, promoviendo una comprensión más profunda y versátil en los estudiantes.

A continuación, se presenta la Tabla 7 con las categorías antes mencionadas y sus descripciones:

Tabla 7 Categorías del pensamiento matemático

CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN
1. Procedural	Engloba los procesos propios de la ejecución mecanizada e incluso automatizada de algoritmos y procedimientos, así como también el acto de interpretar los resultados que arrojan dichos procedimientos algorítmicos.
2. Procesos de Intuición y razonamiento	Incluye procesos fundamentales en el quehacer matemático como lo son la observación, la intuición, el acto de formular conjeturas y la argumentación.
3. Solución de problemas y modelización	Engloba aquellos procesos que suceden cuando describimos un fenómeno utilizando técnicas y lenguaje matemático o resolvemos un problema, entendiendo a este último como un planteamiento al que no se le puede dar respuesta empleando procedimientos mecánicos (obsérvese cómo esta definición de problema depende y varía de individuo a individuo). La modelización se entiende como

	el uso de la matemática y su lenguaje en la descripción de fenómenos de diversa naturaleza.
4. Interacción y lenguaje matemático	Engloba las consideraciones propias que el o la practicante del pensamiento matemático debe tener en mente cuando comunica sus ideas, entendiendo que un lenguaje natural y un lenguaje formal tienen puntos de convergencia y puntos de divergencia; en ambos casos buscamos que el estudiantado sea riguroso con el uso de estos lenguajes.

Tomando en cuenta lo mencionado anteriormente, la problemática que se desea abordar se centra en desarrollar el pensamiento algebraico de los estudiantes de bachillerato. Con este propósito, se diseñará una propuesta de actividades didácticas especialmente dirigida a estudiantes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH). Estas actividades estarán orientadas a facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico promoviendo su comprensión y aplicación dentro de los procesos propios de la modelización matemática, con el fin de fortalecer tanto el pensamiento matemático como las habilidades de análisis y resolución de problemas en este nivel educativo.

3.4 Objetivos

Dicho lo anterior se pretende desarrollar un trabajo de intervención que ponga de manifiesto actividades didácticas basadas en contextos intra y extra matemáticos utilizando tecnología por lo cual se plantean los siguientes objetivos.

3.4.1 Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica que promueva el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato, mediante la modelización matemática y el uso de herramientas tecnológicas.

3.4.2 Objetivos específicos

1) Elaborar secuencias didácticas con contextos intra y extra matemáticos integrando applets de GeoGebra, para favorecer la exploración y comprensión de las relaciones algebraicas en el proceso de modelización matemática.
2) Promover por medio de las secuencias didácticas el uso operativo de la noción de variable para el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.
3) Valorar la pertinencia de las actividades didácticas a partir del nivel de desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes.

SECCIÓN 4. LA PROPUESTA Y SUS CARACTERÍSTICAS

La propuesta constará de un conjunto de entre tres y cinco actividades didácticas secuenciadas, las cuales estarán estructuradas con el método ACODESA (Hitt, 2009). Este método al centrarse en la organización del conocimiento matemático y en la gestión del aula mediante la colaboración y la argumentación, ofrece un marco sólido para el desarrollo de actividades didácticas que fomenten una participación activa y significativa por parte de los estudiantes.

Cada secuencia de actividades estará diseñada con un propósito alineado a los objetivos planteados en este proyecto; asimismo, cada actividad que compone la secuencia contará con un objetivo específico, derivado del objetivo general de dicha secuencia.

Otro aspecto que se tomará en cuenta es el ciclo de modelización de Kaiser y Stender (2013), el cual es iterativo, lo que significa que los estudiantes pueden volver a etapas anteriores tantas veces como sea necesario, hasta lograr un modelo que represente adecuadamente la situación real.

Además, se destaca que la modelización no es solo un proceso técnico, sino también cognitivo y social, donde los alumnos desarrollan competencias para interpretar, argumentar y comunicar ideas matemáticas, así también se promueve la interacción entre pares o grupalmente para fomentar la discusión y colaboración.

El ciclo de modelización es una herramienta didáctica que permite a los docentes:

- Comprender cómo los estudiantes construyen y aplican modelos matemáticos.
- Diseñar tareas que fomenten la conexión entre las matemáticas y la realidad.
- Evaluar las distintas competencias de modelización: interpretar, matematizar, calcular, validar y comunicar.

Conjuntamente en cada una de las actividades que integrarán la secuencia didáctica se considerarán los niveles de pensamiento algebraico de Maudy et al., (2018), se cuyo desarrollo se pretende sea reflejado en las acciones que los estudiantes realicen para trabajar cada una de las actividades que les sean planteadas. Son siete niveles los que establecen los autores, van desde el nivel 0 que describe la ausencia de pensamiento algebraico, sólo se presentan operaciones básicas, se emplean únicamente métodos aritméticos, hasta llegar al nivel 6 en donde se presentan estructuras algebraicas, sus definiciones y propiedades, por ejemplo, los espacios vectoriales o los grupos.

Se analizarán las producciones de los alumnos de bachillerato que respondan la secuencia con el fin de identificar en qué nivel de pensamiento algebraico se encuentran, así como si se logra avanzar en él, con el fin de reconocer obstáculos, diferencias individuales, etc.

Estas secuencias están dirigidas a los alumnos de educación media superior, específicamente los estudiantes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH- Sonora), considerando los cambios que se han venido realizando en el modelo educativo para este nivel de bachillerato. Las actividades están propuestas para llevarse a cabo en el tercer semestre correspondiente a la materia de *Pensamiento Matemático III. Pensamiento algebraico e introducción a geometría plana*. El tiempo estimado para la aplicación de cada secuencia didáctica será de cinco sesiones de 50 minutos, que corresponde a la duración habitual de una clase en el COBACH.

De igual manera, a lo largo de las secuencias se hará uso de la tecnología, específicamente del software GeoGebra ya que ha demostrado aportar múltiples beneficios al proceso educativo. Entre ellos se encuentra un aumento de la motivación estudiantil, debido a que los alumnos suelen percibir las actividades con GeoGebra como más dinámicas y atractivas que la enseñanza tradicional, lo cual favorece su implicación activa en la clase.

Además, GeoGebra facilita la visualización interactiva de conceptos matemáticos complejos, permitiendo que los estudiantes exploren funciones, geometría analítica, vectores y otras figuras de manera gráfica y manipulable, lo que se ha asociado con un aprendizaje más significativo y una mejor comprensión conceptual.

A continuación, se presenta un ejemplo de secuencia didáctica elaborada considerando los aspectos mencionados anteriormente, es importante señalar que, si bien el método ACODESA contempla cinco etapas fundamentales, en esta fase de la intervención se decidió no incorporar la etapa 4, correspondiente a la autorreflexión. Esta será aplicada en días posteriores a la finalización de la actividad, una vez que los alumnos hayan tenido tiempo suficiente para procesar su experiencia y reflexionar sobre su propio aprendizaje.

La situación problema utilizada en la secuencia se basa en un contexto extra matemático, pero sin hacer referencia directa del mundo real. Esta elección permite que los estudiantes se centren en los procesos matemáticos en sí mismos, lo cual es especialmente útil para fortalecer habilidades específicas antes de abordar problemas contextualizados en escenarios reales.

Secuencia didáctica "Doblado de papel"

Tabla 8 Características de la secuencia didáctica

Objetivo de la secuencia:	Reconocer las relaciones que existen entre el área del cuadrado y el área del triángulo amarillo, estableciendo diferentes estrategias algebraicas para resolver el problema.
Nivel:	Educación media superior
Asignatura:	Pensamiento Matemático III
Tiempo estimado:	5 sesiones de 50min

Tabla 9 Aspectos de la actividad individual

Objetivo de la actividad individual:	Entender el problema e identificar magnitudes y expresar una relación entre ellas.
Etapa 1 ACODESA	Trabajo Individual. Analizarán el problema de forma individual utilizando la hoja de trabajo, lápiz y el cuadrado proporcionado e irán identificando magnitudes con el fin de verificar si comprendieron el problema.
Ciclo de modelización	Entender y analizar el problema para después empezar a realizar trabajo matemático, identificando las relaciones que existen con el doblado del cuadrado. Con ello, recorrerán las etapas del ciclo al realizar el trabajo de forma individual.
Niveles de pensamiento algebraico	Se pueden presentar aspectos de los niveles 0 y 1, ya que los alumnos manipularán y hasta podrían hacer mediciones para después buscar relaciones entre ellas.


Actividad individual

Doblar un cuadrado

Con el cuadrado de papel que se te proporciona (Figura 1), haz dobleces de tal manera que se forme un triángulo de color amarillo, donde el vértice del triángulo amarillo se mantenga sobre la diagonal del cuadrado como se muestra en la Figura 2. La medida del lado del cuadrado es de 20cm. ¿Dónde se tendría que colocar el vértice del triángulo amarillo para que el área de la superficie blanca sea la misma que el área del triángulo amarillo?

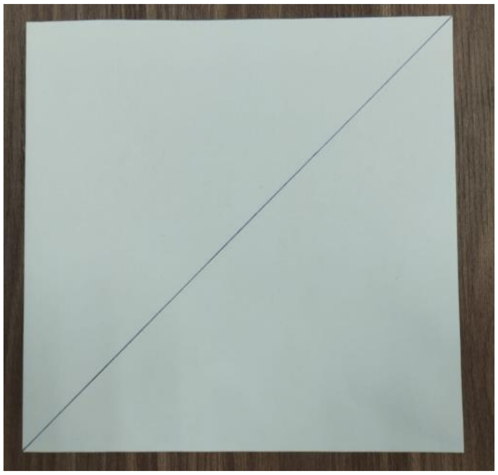


Figura 1

Figura 2

Puedes rayar el cuadrado, doblarlo, etc. lo que necesites realizar para contestar lo siguiente.

a) Después de manipular el cuadrado para contestar la pregunta del problema, elabora una lista de las magnitudes que observas que varían y cuáles no.

Magnitudes que varían	Magnitudes que no varían

b) Escribe 3 relaciones entre dos magnitudes que identifiques.

Considerando tu respuesta del inciso b) Escribe una relación entre dos magnitudes donde una de ellas dependa de la otra. Explica tu respuesta.

Tabla 10 Aspectos de la actividad en equipos

Objetivo de la actividad en equipos:	Comparar la relación establecida individualmente y determinar en conjunto las magnitudes que intervienen en el área del triángulo amarillo y en el área blanca, de modo que ambas áreas sean iguales.

Etapa 2 ACODESA	Los estudiantes formarán equipos de 3 integrantes, con el fin de compartir sus ideas y soluciones a la actividad presentada en la etapa anterior.
Ciclo de modelización	En equipo van a dialogar y compararán sus respuestas con el fin de obtener un consenso sobre la solución y las magnitudes que intervienen en el problema del doblado del cuadrado. En conjunto volverán a transitar por las etapas del ciclo de modelización.
Niveles de pensamiento algebraico	En esta etapa los estudiantes empezarán a asignar e identificar variables y magnitudes para poder explicar cuando el área de la parte blanca es la misma que el área amarilla. Acorde a lo mencionado en el Nivel 2.

Representar el área amarilla y blanca

En equipo de tres estudiantes compararán, dialogarán y llegarán a un acuerdo sobre las 3 preguntas que contestaron en la etapa individual. Se les proporcionará un nuevo cuadrado que podrán rayar para dar una respuesta final en conjunto. También se pueden apoyar en el siguiente applet de GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/a7mfh852 donde se presenta el modelo simulado.

Consideren la siguiente pregunta para su discusión.

¿Cómo representarían las magnitudes que intervienen en el área del triángulo amarillo y en el área blanca, de modo que ambas áreas sean iguales? Expliquen su razonamiento y utilicen la notación que consideren más adecuada.

Tabla 11 Aspectos de la actividad grupal

Objetivo de la actividad grupal:	Establecer de forma grupal una expresión algebraica que resuelva el problema.
Etapa 3 ACODESA	Se elegirá un representante por equipo para que exponga la solución que dieron al problema enfrente de la clase. Los estudiantes participarán con comentarios, dudas y sugerencias mediadas por el profesor.

Ciclo de modelización	El representante del equipo va a interpretar y comunicar las magnitudes que encontraron, cómo las utilizaron para hallar el área del triángulo amarillo y el área blanca, si identificaron varias formas de calcular las áreas, etc.
Niveles de pensamiento algebraico	Con las respuestas que expresen los estudiantes podrían transitar desde el nivel uno hasta el nivel tres o aniveles más avanzados.

Actividad grupal **<u>Exponer la solución</u>**

Después de haber trabajado en la etapa anterior, se elegirá un representante de cada equipo para pasar al frente y exponer/compartir la solución encontrada en la actividad.

1. Deberá mostrar el cuadrado y explicar cómo denotaron las magnitudes que les parecieron relevantes.
2. Expondrá cuáles magnitudes identificaron que varían y las que no varían.
3. Presentará las expresiones que utilizaron para encontrar el área del triángulo amarillo y el área blanca.
4. Mencionará cómo son esas expresiones, si hay una magnitud que dependa de otra y explicará su respuesta.
5. ¿Identificaron varias maneras de calcular el área del triángulo amarillo y el área blanca? Si la respuesta fuera afirmativa, el representante describirá las que considere mejores.

Tabla 12 Aspectos de la actividad de institucionalización

Objetivo de la actividad de institucionalización:	Analizar y demostrar la relación entre el tema establecido por la institución y la expresión matemática encontrada, con el fin de identificar las condiciones bajo las cuales el área amarilla es igual al área blanca.
Etapa 4 ACODESA	El profesor presentará las diferentes formas que hay para resolver el problema de las áreas de color amarillo y blanco, mostrando la evolución de las respuestas de los estudiantes.

Ciclo de modelización	Se validarán las respuestas de los estudiantes para revisar si los resultados tienen sentido con el problema planteado al inicio. Se dará respuesta a la pregunta ¿cuánto debe de medir la altura del triángulo amarillo para que el área del triángulo sea la misa del área de la superficie blanca?
Niveles de pensamiento algebraico	Con las respuestas que expresen los estudiantes podrían establecerse en el nivel 3, sin embargo, los alumnos pueden ir más allá y plantearse variantes al problema y eso se vería reflejado en los niveles más avanzados.

<u>Institucionalización</u>

Esta etapa está guiada por el docente, el profesor debe de referirse a las diferentes formas que existen para resolver el problema planteado, retomar los aspectos relevantes que hayan surgido en la discusión de la actividad grupal y con las respuestas de las preguntas anteriores.

Hay que mostrar la evolución que hubo de las respuestas en las diferentes etapas de la actividad, enfatizar y valorar las ideas de todos los alumnos y las que fueron surgiendo al momento de la resolución de la actividad.

El docente puede discutir las siguientes preguntas con los alumnos:

¿Todos los equipos representaron del mismo modo a las magnitudes que se utilizaron para calcular las áreas?

¿Es un aspecto importante si no se denotan todas las magnitudes de igual manera?

¿Cuánto debe de medir la altura del triángulo amarillo para que el área del triángulo sea la misma del área de la superficie blanca?

¿De qué grado es la ecuación que encontraron para representar las áreas del triángulo amarillo y el área blanca?

La propuesta didáctica presentada se caracteriza por integrar un conjunto de actividades secuenciadas bajo el método ACODESA, el cual promueve una organización estructurada del conocimiento matemático y fomenta la colaboración, la argumentación y una participación activa de los estudiantes. La incorporación del ciclo iterativo de modelización de Kaiser y Stender fortalece el proceso de aprendizaje al permitir que los estudiantes regresen y ajusten sus modelos hasta lograr representaciones matemáticas adecuadas de situaciones planteadas, evidenciando la naturaleza dinámica y cognitiva del ciclo de modelización.

Cada actividad está diseñada para desarrollar objetivos específicos alineados con los niveles de pensamiento algebraico establecidos por Maudy, Didi y Endang, lo que posibilita una evaluación del avance y los obstáculos de los estudiantes en su pensamiento algebraico. La propuesta considera además el uso de tecnología como el software GeoGebra, que contribuye a la motivación, comprensión visual e interactividad, elementos para un aprendizaje más significativo.

En conjunto, esta propuesta didáctica refleja un enfoque integral que articula teoría, práctica y tecnología, orientado a fortalecer el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato. Su implementación tiene el potencial de mejorar tanto la comprensión conceptual como el desarrollo de habilidades algebraicas, a la vez que fomenta la colaboración y el pensamiento crítico, aspectos esenciales para preparar a los estudiantes frente a los retos educativos actuales y futuros.

SECCIÓN 5. MARCO CONCEPTUAL

Para el desarrollo de este trabajo de intervención didáctica, con el objetivo de integrar un marco conceptual sólido, se consideraron tres referentes teóricos fundamentales: el ciclo de modelización propuesto por Kaiser y Stender (2013), los niveles de pensamiento algebraico planteados por Maudy y colaboradores (2018) y el método ACODESA, retomado de Hitt (2009). Estos tres enfoques se considerarán de manera articulada para abordar de forma integral la problemática seleccionada planteada anteriormente, permitiendo diseñar una intervención que favorezca tanto la comprensión conceptual como el desarrollo de habilidades matemáticas en los estudiantes, especialmente en lo que respecta al desarrollo del pensamiento algebraico.

Estos tres aspectos están interrelacionados, pues el ciclo de modelización se centra en representar una situación o problema del mundo real, y puede aplicarse tanto de manera individual como colaborativa. Esto se alinea perfectamente con el método ACODESA, cuyo objetivo principal es fortalecer el aprendizaje de los estudiantes a través del trabajo colaborativo. Además, los niveles de pensamiento algebraico permiten analizar y evaluar con mayor precisión las prácticas y los modos de razonamiento que los estudiantes utilizan al abordar situaciones algebraicas.

A continuación, se describen los tres referentes teóricos mencionados.

5.1 Ciclo de modelización

En la actualidad, la modelización matemática se ha convertido en una herramienta fundamental en múltiples disciplinas, desde las ciencias naturales hasta las ciencias sociales y la ingeniería. Su valor reside en la capacidad para generar análisis profundos, predecir comportamientos y optimizar procesos en sistemas complejos. Adaptada al contexto educativo, la modelización fomenta una visión aplicada de las matemáticas, ayudando a los estudiantes a conectar la teoría con situaciones reales y cotidianas.

Investigadores de todo el mundo destacaron el valor educativo de involucrar a los estudiantes en actividades de modelización (Shahbari y Daher, 2016), especialmente si la educación matemática busca promover una ciudadanía responsable (Kaiser, 2017).

Con el paso del tiempo, diversos investigadores han propuesto distintos ciclos de modelización matemática, cada uno con características particulares en correspondencia con las diferentes perspectivas teóricas y didácticas sobre la modelización. Estas propuestas han dado lugar a múltiples ciclos de modelización que enfatizan distintos aspectos del proceso, como se puede observar en Borromeo (2006). No obstante, en todos estos enfoques existe un consenso en cuanto a que la modelización matemática es un proceso cíclico orientado a la resolución de problemas reales mediante herramientas matemáticas, compuesto por una serie de fases interrelacionadas (Kaiser, 2017).

En ese sentido, se ha optado por utilizar el ciclo de modelización propuesto por Kaiser y Stender (2013), el cual se presenta a continuación.

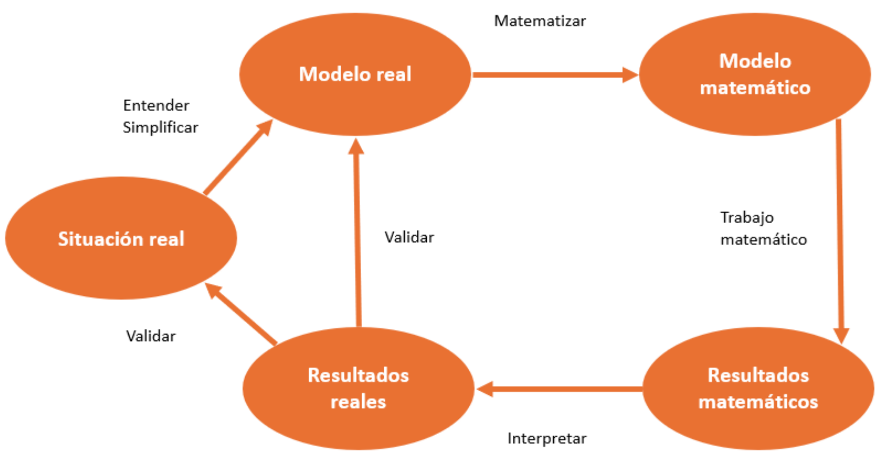


Figura 9 Adaptación del ciclo de modelización de Kaiser y Stender (2013)

El proceso del ciclo de modelización se puede describir de la siguiente manera:

1. **Situación real (Real situation)**

   Es el punto de partida. Se trata de un fenómeno o problema del mundo real que necesita ser entendido o resuelto. Este paso implica observar la realidad, recolectar información y formular una pregunta o problema.

   Acción a realizar → entender/simplificar (understand/simplify): Aquí se traduce la situación real a un modelo comprensible.
2. **Modelo real (Real model)**

   Se identifican los elementos esenciales del problema y se ignoran detalles no relevantes. Se construye un modelo conceptual basado en la realidad.

Acción a realizar → matematizar (mathematise): Se transforma el modelo conceptual en un modelo puramente matemático.

3. **Modelo matemático (Mathematical model)**

    El modelo real se traduce en lenguaje matemático. Se representan las relaciones entre los elementos usando ecuaciones, funciones, gráficos, etc.

    Acción a realizar → trabajo matemático (mathematical work): Se resuelve o analiza el modelo matemático utilizando herramientas matemáticas apropiadas.

4. **Resultados matemáticos (Mathematical results)**

    Se obtienen soluciones, resultados o predicciones matemáticas.

    Acción a realizar → interpretar (interpret): Se interpretan los resultados en el contexto de la situación original y se valida si el modelo y los resultados se ajustan a la realidad.

5. **Resultados reales (Real results)**

    Los resultados obtenidos en el modelo matemático se interpretan en el contexto original. Se traducen al lenguaje del problema real para ver qué significan en la práctica.

    Acción a realizar → validar (validate): Se puede volver al modelo real para ajustes, o incluso reformular el problema si los resultados no son adecuados.

6. **Situación real o Modelo real (Real situation or Real model)**

    Tanto el modelo como los resultados se validan comparándolos con la situación real. Se revisa si el modelo representa adecuadamente el fenómeno y si los resultados tienen sentido en el contexto.

En este sentido, retomar el ciclo de modelización propuesto por Kaiser y Stender (2013) resulta de suma importancia, ya que proporciona una estructura clara y coherente para guiar el proceso de modelar matemáticamente situaciones del mundo real. Esto cobra especial relevancia en el nivel de educación media superior, ámbito en el que se enmarca nuestro proyecto de tesis, pues los planes y programas oficiales como en el documento Fundamentos del Marco Curricular Común de Educación Media Superior deseñado por Arroyo y Pérez (2022), destacan como un objetivo fundamental que los estudiantes sean capaces de aplicar herramientas matemáticas para representar, analizar y resolver problemas contextualizados. Integrar este enfoque no solo responde a los lineamientos curriculares, sino que también promueve un aprendizaje más significativo y funcional de las matemáticas.

Este ciclo puede ilustrarse retomando una de las fases de la secuencia didáctica expuestas en la sección anterior. Al enfocarnos en la etapa individual, el ciclo de modelización se implementa durante el proceso de aprendizaje del estudiante, conforme avanza desde la formulación de la situación hasta la resolución de los cuestionamientos que se le plantean.

Tabla 13 Vinculación del ciclo de modelización con la actividad individual de la secuencia didáctica.

Actividad individual

Doblar un cuadrado

Con el cuadrado de papel que se te proporciona (Figura 1), haz dobleces de tal manera que se forme un triángulo de color amarillo, donde el vértice del triángulo amarillo se mantenga sobre la diagonal del cuadrado como se muestra en la Figura 2. La medida del lado del cuadrado es de 20cm. ¿Dónde se tendría que colocar el vértice del triángulo amarillo para que el área de la superficie blanca sea la misma que el área del triángulo amarillo?

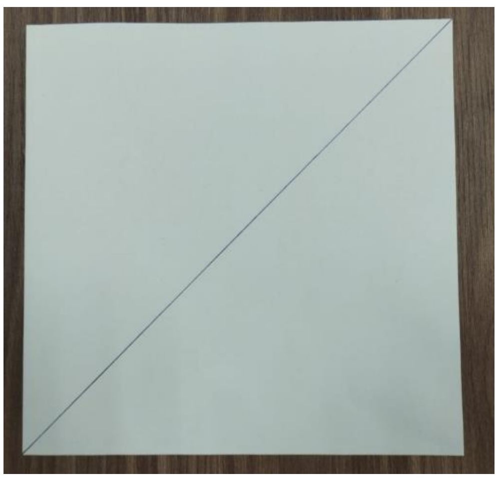


Figura 1

Figura 2

Puedes rayar el cuadrado, doblarlo, etc. lo que necesites realizar para contestar lo siguiente.

c) Después de manipular el cuadrado para contestar la pregunta del problema, elabora una lista de las magnitudes que observas que varían y cuáles no.

Magnitudes que varían	**Magnitudes que no varían**

d) Escribe 3 relaciones entre dos magnitudes que identifiques.

Considerando tu respuesta del inciso b) Escribe una relación entre dos magnitudes donde una de ellas dependa de la otra. Explica tu respuesta.
Ciclo de modelización: En esta etapa de la secuencia didáctica, el alumno transitará por todas las fases que presenta el ciclo de modelización seleccionado.

5.2 Niveles de pensamiento algebraico

Para poder medir o caracterizar el pensamiento algebraico de los estudiantes, varios autores se han dado a la tarea de proponer diferentes niveles de desarrollo, cada uno con características específicas. Estos niveles permiten analizar de manera más detallada las prácticas y formas de razonamiento que los estudiantes emplean al enfrentarse a situaciones algebraicas. A través de este enfoque, es posible identificar en qué etapa del pensamiento algebraico se encuentran, lo que facilita una comprensión más profunda de su aprendizaje y permite orientar mejor la enseñanza. Así, estos niveles funcionan como una herramienta valiosa para describir y evaluar el tipo de pensamiento algebraico que los estudiantes han construido en un momento determinado de su trayectoria escolar.

A continuación, se presentarán algunos ejemplos que ilustran las diferentes maneras de establecer los niveles del pensamiento algebraico. Estos ejemplos tienen como propósito mostrar cómo se manifiestan las características propias de cada nivel en las prácticas de los estudiantes, permitiendo así una mejor comprensión del desarrollo progresivo de su pensamiento algebraico.

Godino et al. (2014) presentan un modelo en el cual identifican cuatro niveles de algebrización, considerando los objetos y procesos involucrados. Esos niveles son:

Nivel 0. Ausencia de razonamiento algebraico

Nivel 1. Nivel incipiente de algebrización

Nivel 2. Nivel Intermedio de algebrización

Nivel 3. Nivel consolidado de algebrización

En la Tabla 14 se muestran rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental (Godino et al., 2014)

Tabla 14 Niveles de razonamiento algebraico de Godino et al. (2014)

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales pueden	Se opera con objetos extensivos. <u>Se entiende como objetos extensivos a casos</u>	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que

	intervenir datos desconocidos. Se entiende como objetos intensivos a las reglas o generalizaciones, por ejemplo, la expresión general de la ecuación de la recta, etc.	particulares o ejemplos específicos que resulta de aplicar una regla general.	refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.
1	En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos. En tareas funcionales se reconocen los intensivos.	En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones. En tareas funcionales se calculan con objetos extensivos.	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos.
2	Intervienen indeterminadas o variables.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.	Simbólico-literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.
3	Intervienen indeterminadas o variables.	En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$. Se opera con las indeterminadas o variables.	Simbólico-literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

Maudy, Didi y Endang (2018) tomando como referencia los niveles de algebrización formulados por Godino et al. (2014), han elaborado una propuesta que identifica siete etapas de desarrollo del pensamiento algebraico, dirigidas a estudiantes de educación primaria y secundaria. Se describen a continuación en la Tabla 15.

Tabla 15 Adaptación de los niveles de pensamiento algebraico de Maudy, Didi y Endang (2018)

NIVELES	DESCRIPCIÓN
0	Se realizan operaciones con objetos específicos utilizando lenguajes naturales, numéricos, icónicos, gestuales.
1	Primer encuentro con el "número genérico", las propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad algebraica (equivalencia). Es decir, pensamiento relacional. Se incluyen objetos intensivos, cuya generalidad se percibe explícitamente mediante lenguajes naturales, numéricos, icónicos o gestuales. Se utilizan símbolos que hacen referencia a los objetos intensivos percibidos, pero no se realiza ninguna operación con ellos. En las tareas estructurales, se aplican las relaciones y propiedades de las operaciones, y podrían incluirse datos desconocidos expresados simbólicamente.
2	Primer encuentro con la representación alfanumérica de funciones y ecuaciones y simplificación de expresiones. Se utilizan indeterminaciones o variables expresadas en lenguaje literal-simbólico para aludir a los objetos intensivos reconocidos, pero están vinculadas a la información espacial o temporal del contexto. En tareas estructurales, la ecuación se expresa como $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con variables para obtener las formas canónicas de expresión.
3	Primer encuentro con el tratamiento de incógnitas y variables utilizando propiedades estructurales (cancelación, reemplazo, etc.) y el modelado algebraico y funcional. Se generan objetos intensivos, representados literal simbólicamente, y se realizan operaciones con ellos; las transformaciones se realizan en forma de expresiones simbólicas que preservan la equivalencia. Se realizan operaciones con las incógnitas para resolver ecuaciones en la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$, y se formulan reglas canónicas simbólicas y descontextualizadas de expresiones de patrones y funciones. En nuestra proposición, el nivel 3 de algebrización asume la operación con los objetos intensivos representados simbólicamente, y de esta manera, dichos objetos tienen connotaciones contextuales.
4	Primer encuentro con la utilización de parámetros en funciones y coeficientes de variables, que son objetos intensivos de segundo orden con la expresión

	de familias de ecuaciones y funciones. La utilización de parámetros para expresar ecuaciones y familias de funciones es indicativa de un nivel superior de razonamiento algebraico, respecto al tercer nivel de algebrización considerado por Aké y otros., que está vinculado a los procesos de "operación con una incógnita o variable"(Ely y Adams, 2012). Este es un "primer encuentro" con parámetros y variables de coeficientes que implica la discriminación del dominio y el rango del parámetro.
5	Primer encuentro con el tratamiento conjunto de incógnitas, variables y parámetros, así como la estructura de la solución emergente del tratamiento de parámetros. Podemos vincular un mayor nivel de algebrización a la actividad matemática que se manifiesta cuando se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que interviene al menos un parámetro. Las operaciones con parámetros presentan un nivel de complejidad semiótica más prominente, ya que los objetos que surgen de estos sistemas de prácticas ponen en juego objetos algebraicos del nivel anterior (ecuaciones o familias de funciones).
6	Primer encuentro con el estudio de las propias estructuras algebraicas, sus definiciones y propiedades estructurales. La introducción de ciertas estructuras algebraicas (por ejemplo, espacios vectoriales o grupos) y el estudio del álgebra funcional (suma, resta, división, multiplicación y composición) comienzan en la secundaria, aplicando objetos y procesos algebraicos de mayor complejidad ontosemiótica que los considerados en el nivel cinco.

Considerando los niveles de pensamiento algebraico propuestos por Maudy, Didi y Endang (2018), se tomarán como referencia dichas categorías, las cuales serán adaptadas para ser dirigidas a estudiantes de nivel medio superior y con ello, analizar y comprender el grado de desarrollo del pensamiento algebraico en dichos estudiantes. Estos niveles ofrecen un marco teórico útil para identificar y caracterizar las distintas formas en que los estudiantes se aproximan al álgebra, desde sus manifestaciones más elementales hasta aquellas que implican un razonamiento más abstracto y simbólico.

El interés particular se centra en conocer en qué medida los estudiantes han desarrollado su pensamiento algebraico y valorar nuestra propuesta de intervención. Por ello, resulta fundamental contar con una caracterización clara de los niveles de pensamiento algebraico, que nos permita evaluar tanto el estado actual de los estudiantes como los posibles avances a partir de la implementación del proyecto. Esta perspectiva permitirá fundamentar mejor las decisiones y evaluar el impacto de la propuesta.

Considerando la secuencia didáctica diseñada hasta ahora, se ilustra estos niveles de pensamiento algebraico mediante la actividad correspondiente al trabajo en equipos dentro de la secuencia.

Tabla 16 Ejemplificación de la vinculación de los niveles de pensamiento algebraico con la actividad en equipos de la secuencia didáctica.

Representar el área amarilla y blanca

En equipo de tres estudiantes compararán, dialogarán y llegarán a un acuerdo sobre las 3 preguntas que contestaron en la etapa individual. Se les proporcionará un nuevo cuadrado que podrán rayar para dar una respuesta final en conjunto. También se pueden apoyar en el siguiente applet de GeoGebra https://www.geogebra.org/classic/a7mfh852 donde se presenta el modelo simulado.

Consideren la siguiente pregunta para su discusión.

¿Cómo representarían las magnitudes que intervienen en el área del triángulo amarillo y en el área blanca, de modo que ambas áreas sean iguales? Expliquen su razonamiento y utilicen la notación que consideren más adecuada.

Niveles de pensamiento algebraico: En esta etapa los estudiantes empezarán a asignar e identificar variables y magnitudes para poder explicar cuando el área de la parte blanca es la misma que el área amarilla. Acorde a lo mencionado en el Nivel 2.

5.3 Método ACODESA para el diseño de las actividades didácticas

Se seleccionó el método ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexión) desarrollada por Hitt (2009) para crear un ambiente de construcción sociocultural del conocimiento, este método incorpora elementos esenciales para el diseño de actividades educativas, siendo uno de los más relevantes el uso de situaciones problemáticas como punto de partida del proceso de enseñanza.

Con este método, la actividad se divide en cinco etapas:

- **Etapa 1. Trabajo individual:** En un primer momento, los estudiantes abordan la tarea de manera autónoma, utilizando únicamente lápiz y papel para desarrollar sus ideas y soluciones.
- **Etapa 2. Trabajo en equipo:** Posteriormente, los alumnos se agrupan, preferentemente en equipos de tres integrantes (según Prusak et al., 2013), para trabajar juntos en la misma actividad y compartir sus ideas.

- **Etapa 3. Debate (Discusión en gran grupo):** Se realiza una puesta en común en la que toda la clase participa. En este espacio, los estudiantes exponen y debaten las propuestas surgidas en la fase anterior, mientras que el docente promueve la comunicación y la construcción colectiva de acuerdos.
- **Etapa 4. Autorreflexión:** Después del debate, cada estudiante revisa individualmente el trabajo realizado en las etapas previas, reflexionando sobre su propio proceso y ajustando su respuesta si lo considera necesario.
- **Etapa 5. Institucionalización:** Finalmente, el profesor presenta la solución formal al problema, mostrando cómo evolucionaron las representaciones y estrategias a lo largo de las etapas. Además, integra y reconoce los aportes de los estudiantes que contribuyeron a la resolución final.

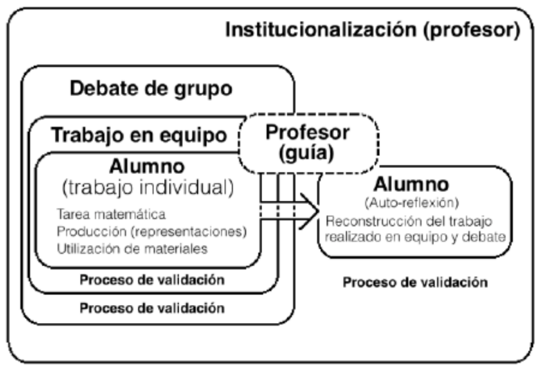


Figura 10 Vista global del proceso en el aula con el método ACODESA

El uso de esta metodología implica comenzar con la presentación de una situación que posea características particulares, entre las cuales destaca la interacción y comunicación entre los estudiantes, con el profesor actuando como facilitador o guía. Asimismo, estas situaciones deben fomentar que en la clase de matemáticas se abandone la imposición de representaciones oficiales, promoviendo en cambio la construcción social y colectiva de dichas representaciones (Hitt y Quiroz, 2017).

Con la aplicación de este método, los estudiantes irán construyendo diversas representaciones a medida que progresen en las etapas hasta alcanzar la solución de la situación planteada. Inicialmente, elaborarán una representación espontánea (RE) de forma individual, luego la confrontarán con la de sus compañeros para obtener una representación mejorada (RM). Finalmente, mediante el trabajo colaborativo en equipo, compararán las representaciones mejoradas para definir una representación grupal (RG).

El método ACODESA está presente en todas las etapas de la actividad didáctica presentada en la sección anterior, pues fue un pilar fundamental en su diseño. Cabe destacar que la etapa de autorreflexión aún no ha sido diseñada, puesto que se planifica su aplicación en un momento posterior a la implementación de la secuencia, con el objetivo de visualizar la apropiación de los conocimientos desarrollados por los estudiantes a través de la secuencia didáctica propuesta.

SECCIÓN 6. CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Para la realización de este proyecto de intervención, se llevaron a cabo algunas acciones orientadas a establecer antecedentes, delimitar la problemática que da origen al proyecto de tesis, así como definir su justificación y los objetivos, tanto generales como específicos. De igual manera, se consultaron varios documentos con el fin de construir los referentes teóricos que sirvieron de guía para el diseño de la propuesta didáctica desarrollada en este trabajo.

Teniendo en cuenta el objetivo general del proyecto: Diseñar una propuesta didáctica que promueva el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato, mediante la modelización matemática y el uso de herramientas tecnológicas.

Se establecieron 4 fases para llevar a cabo el desarrollo del proyecto, las cuales se describen a continuación:

Fase 1. Análisis Preliminar

Tomando en cuenta el objetivo general planteado, se establece una primera fase que incluye los aspectos clave para la selección de la problemática y la delimitación del proyecto de tesis. Esta fase abarca la revisión de literatura, el análisis de investigaciones relacionadas con el área de interés, el estudio de planes y programas de distintos niveles educativos, así como el análisis de teorías de la matemática educativa.

Tabla 17 Acciones que se realizaron para llevar a cabo la fase 1

Acciones	**Propósitos**
Se analizaron investigaciones relacionadas con esta temática: • La historia del álgebra. • El álgebra escolar. • Las concepciones del pensamiento algebraico. • La modelización matemática. • El concepto de variable.	1) Identificar y delimitar la problemática que da origen al proyecto de intervención.
• Se examinaron los planes y programas de los diferentes niveles educativos. • Se determinó que en el nivel medio superior existen deficiencias y carencia de materiales que dificultan la atención a la problemática seleccionada.	2) Justificar la elección del nivel educativo donde se desarrolla el proyecto.
▪ Se identificaron las principales dificultades que enfrentan los estudiantes para el desarrollo de su pensamiento algebraico.	3) Utilizar los hallazgos reportados en las investigaciones revisadas como sustento y justificación del presente trabajo, así como comparar propuestas semejantes.

▪ Se analizaron investigaciones y propuestas diseñadas para atender las dificultades encontradas.	
Se seleccionaron los enfoques teóricos más pertinentes para sustentar el marco conceptual del proyecto: • Ciclo de modelización de Kaiser y Stender (2013). • Método ACODESA de Hitt (2009). • Niveles de pensamiento algebraico de Maudy, Didi y Endang (2018).	4) Contar con un marco conceptual sólido para analizar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato.

El análisis preliminar realizado ha permitido establecer una base para el desarrollo de este proyecto de tesis. A través de la revisión de la literatura, la exploración de planes y programas educativos, y la identificación de las principales dificultades en el pensamiento algebraico, se ha delimitado la problemática a abordar, especialmente en el nivel medio superior.

Se construyó un marco conceptual, que retoma aportaciones de algunos enfoques teóricos, que busca sustentar el estudio y facilitar el análisis del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato. De este modo, en esta fase inicial se dan elementos de justificación que apoyan la pertinencia del proyecto y que también orientan su línea de intervención.

Fase 2. Diseño de la propuesta didáctica

Esta fase está alineada con el primer objetivo específico planteado en las secciones anteriores para la realización del proyecto de tesis. A saber:

OE1. Elaborar secuencias didácticas con contextos intra y extra-matemáticos integrando applets de GeoGebra, para favorecer la exploración y comprensión de las relaciones algebraicas en el proceso de modelización matemática.

Tabla 18 Acciones que se realizaron para llevar a cabo la fase 2

Acciones	**Propósitos**

Selección de:
 	
• Contextos intra-matemáticos:
    ○ Situaciones planteadas dentro del propio ámbito matemático que pudieran contribuir en la comprensión de conceptos y procedimientos algebraicos.
• Contextos extra-matemáticos:
    ○ Situaciones vinculadas con el entorno real o cotidiano de los estudiantes y que requieran la matemática en el mundo real.
	1) Favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico y la modelización matemática mediante la selección de contextos intra y extra-matemáticos como base para la construcción de situaciones problema.

• Adaptación de las etapas del método ACODESA (Hitt, 2009) que servirán de base para el diseño de las secuencias didácticas que conformarán la propuesta.	2) Definir la estructura que tendrán las secuencias didácticas que se diseñarán.
Relacionar las etapas del método ACODESA con las fases del ciclo de modelización matemática: 1. Comprensión del problema. 2. Construcción del modelo. 3. Análisis y resolución matemática. 4. Interpretación y validación. 5. Comunicación y reflexión.	3) Poner en juego el pensamiento algebraico, reconocer y utilizar conceptos algebraicos.

Con la fase de diseño de la propuesta didáctica se responde al primer objetivo específico del proyecto, puesto que se enfoca en la elaboración de secuencias didácticas que integran contextos intra y extra-matemáticos con apoyo del applet GeoGebra. La selección cuidadosa de estos contextos permitirá tanto fortalecer la comprensión de conceptos algebraicos como vincular las matemáticas con situaciones reales y significativas para los estudiantes.

Además, con la incorporación del método ACODESA, en consonancia con el ciclo de modelización matemática, se espera que las actividades propicien la exploración, la argumentación y la construcción colaborativa del conocimiento. De esta manera, se planea que el diseño didáctico esté alineado con los procesos cognitivos esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico y la modelización.

Fase 3. Implementación de la propuesta

Considerando el Objetivo Específico 2 planteado para la realización de este trabajo, se plantearon algunos propósitos y acciones para llevar a cabo esta fase.

OE2. Promover por medio de las secuencias didácticas el uso operativo de la noción de variable para el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

Tabla 19 Acciones consideradas para llevar a cabo la fase 3

Acciones	**Propósitos**
Gestión para la implementación. ▪ Buscar a las autoridades correspondientes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, para pedir autorización de llevar la puesta en escena de las secuencias didácticas con un grupo de alguno de sus planteles.	1) Gestionar con las autoridades correspondientes el uso de las instalaciones y espacio para la implementación de la propuesta.
Implementación en el aula.	2) Poner en práctica las secuencias didácticas diseñadas para observar su

▪ Aplicación de las actividades con estudiantes del Cobach. ▪ Implementación con un grupo de 2do o 3er semestre, cursando la materia de Pensamiento Matemático II o III.	funcionamiento real y la respuesta de los estudiantes.
Observación y recolección de información. ▪ Diseño de las hojas de observación y recolección de la información. ▪ Recopilación de información por medio de las hojas de observación, videograbaciones, hojas de respuesta de los estudiantes, entrevistas. ▪ Identificación de dificultades conceptuales o procedimentales observadas. ▪ Contrastación del nivel de logro de los objetivos de las secuencias.	3) Recopilar información que permita evaluar la pertinencia, claridad y nivel de logro de las secuencias, con el fin de evaluar la posibilidad de un rediseño.

En esta sección se establecen las acciones concretas y sus propósitos específicos que orientan la puesta en práctica de las secuencias didácticas diseñadas, desde la gestión institucional hasta la observación y análisis de su aplicación en el aula. En conjunto, el propósito central es verificar la pertinencia de la propuesta didáctica diseñada.

La aplicación de las actividades en un grupo de segundo o tercer semestre permitirá observar la dinámica en el aula y la respuesta de los estudiantes, mientras que la observación y recolección de información proporcionarán datos valiosos sobre la participación, las dificultades identificadas y el nivel de logro de los objetivos planteados.

Fase 4. Análisis de resultados

Teniendo en cuenta el OE3. Valorar la pertinencia de las actividades didácticas a partir del nivel de desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. Se establecieron los siguientes propósitos y acciones a realizar.

Tabla 20 Acciones consideradas para llevar a cabo la fase 4

Acciones	**Propósitos**
Análisis de resultados. ▪ Identificación de fortalezas y debilidades en las actividades de las secuencias. ▪ Valoración del nivel de desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes al término de la secuencia didáctica.	1) Examinar e interpretar la información recopilada durante la implementación de las actividades para determinar en qué medida se alcanzaron los objetivos planteados.

Rediseño y mejora. ▪ Ajustar las actividades de las secuencias didácticas con base en los hallazgos de la puesta en escena. ▪ Incorporar aspectos observados para realizar cambios y mejorar la claridad, secuencia o pertinencia de los contextos y tareas.	2) Obtener una versión final de las secuencias didácticas que favorezca el desarrollo del pensamiento algebraico mediante la modelización matemática.

La fase de análisis de resultados permitirá identificar tanto las fortalezas como las debilidades presentes en las actividades diseñadas para las secuencias didácticas.

Se valorará el nivel de desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes con el desarrollo de la secuencia.

CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

En este apartado se muestra un cronograma con las acciones que se han realizado y las que se planean hacer en los próximos cuatro semestres del posgrado.

Sección/Acción	I Semestre	II Semestre	III Semestre	IV Semestre	V Semestre	VI Semestre	VII Semestre	VIII Semestre
Antecedentes								
Estado del arte								
Problemática								
Justificación								
Objetivos								
Aspectos teóricos								
Aspectos metodológicos								
Examen predoctoral								
Pilotaje de la primera secuencia didáctica								
Selección de contextos para las secuencias								
Diseño de las secuencias didácticas								

Fase 3 implementación de las secuencias								
Fase 4 Análisis de resultados								
Valoración de la propuesta y reporte del proyecto de tesis								

REFERENCIAS

Acebo, C. & Rodríguez, R. (2021). Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelización matemática en alumnos de secundaria. *Revista Científica*, *40*(1), 13-29.

Arcavi, A., Drijvers, P. y Stacey, K. (2017). The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities. IMPACT (Interweaving mathematics pedagogy and content for teaching). Nueva York, NY: Routledge.

Arcos, J., Borromeo, R. & Mena, J. (2018). El conocimiento de la modelización matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas*, *36*(1), 99-115.

Arroyo, J. y Pérez, M. (2022). Fundamentos del marco curricular común de educación media superior.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M. & Rubel, L. (2021). Perspectives on Modeling in School Mathematics

Drijvers, P. & Jupri, A. (2016). Student Difficulties in Mathematizing Word Problems in Algebra. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2016, 12(9), 2481-2502

Ely, R. & Adams, A. (2012). "Unknown, placeholder, or variable: what is x?" *Mathematics Education Research Journal*, vol. 24, no. 1, pp. 199-38, 2012.

Escalante, J & Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación matemática*, *24* (1), 107-132.

Florez, J. & González, J. (2020). La modelización matemática y la construcción de la covariación lineal.

Gagliani, S., Branchetti, L. & Cusi, A. (2025). Intertwining students' social modes of co-construction and epistemic aspects of algebraic thinking in asynchronous mathematical discussions. Educational Studies in Mathematics (2025) 120:109–135

Gallegos Talavera, M. M., Tania Yolanda, T. Y., Nacimba Gualotuña, S. J., Pilliza Chicaiza, S. del P., & Andrade Andrade, C. L. (2024). Impacto de la tecnología en la educación. *GADE: Revista Científica*, *4*(2), 19-36. Recuperado a partir de https://revista.redgade.com/index.php/Gade/article/view/416

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Gould, H., Murray, D. & Sanfratello, A. (2012) Mathematical Modelling handbook.

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools−A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM - Mathematics Education*, *50*(1‑ 2), 233‑244. https:// doi. org/ 10. 1007/ s11858- 018-0924-6

Guerrero, C. & Mena, J. (2015). Modelización en la enseñanza de las matemáticas: Matemáticos y profesores de matemáticas, sus estrategias. *Revista electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *10*(1), 1-13.

Hapizah, Y. & Mulyono, B. (2020). Mathematical modelling skills of prospective mathematics teachers in problem-solving. *Journal of Physics: Conf. Series 1480*, 1-6. https://doi:10.1088/1742-6596/1480/1/012003

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J. & Camacho-Machín, M. (2023). Prospective Secondary School Mathematics Teachers' Use of Digital Technologies to Represent, Explore and Solve Problems. En Toh, T. L., Santos-Trigo, M., Chua, P. H., Abdullah, N. A., & Zhang, D. Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends (pp. 33-50). Singapore: Springer Nature Singapore.

Herrera, H., Cuesta, A. & Escalante, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. Educación Matemática, vol. 28, núm. 3, diciembre de 2016

Herrera, Y. & Muñoz, V. (2014). Propuesta didáctica para abordar el concepto de función a partir de la modelización matemática [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional. Universidad Pedagógica Nacional.

Hitt, F. & Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet, 10*(1), 1-30. http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977. Consultado 02/11/2017.

Hitt, F. y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelización matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación, 73*(2), 151-175.

Janvier, C., Charbonneau, L. y Rene De Cotret, S. (1989). Obstacles epistemologiques a la notion de variable: perspectives historiques. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), Construction des savoirs. Obstacles et con its (pp. 64-75). Quebec: Les Editions Agence dARC.

Kaiser, G. (2017). The teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267-291), NCTM. https://www.nctm.org/Store/Products/Compendium-for-Research-in-Mathematics-Education-eChapter-11-The-Teaching-and-Learning-of-Mathematical-Modeling-(Download)/

Kaiser, G., & Stender, P. (2013). Complex modelling problems in co-operative, self-directed learning environments. In G. Stillman, G. Kaiser,W. Blum, & J. Brown (ed.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp.. 277–293). Dordrecht: Springer.

Kaput, J. (2008). "What is algebra? What is algebraic reasoning?" in Algebra in the Early Grades, J. J. Kaput, D. W. Carraher, and M. L. Blanton (Ed.), *New York: Lawrence Erlbaum Associates*, pp. 5-17.

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K 12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics, Mathematical Sciences Education Board, & National Research Council (Ed.), The nature and role of algebra in the K– 14 curriculum: Proceedings of a National Symposium (pp. 25–26).Washington, DC: National Academies Press.

Kieran, C. (2004). "Algebraic thinking in the early grades: What is it?" *He Mathematics Educator*, vol. 8, no. 1, pp. 139-151.

Koyunkaya, M. & Dede, A. (2024). Using different digital tools in designing and solving mathematical modelling problems. Education and Information Technologies 29:19035-19065

Kriegler, S. (2008). Just what is algebraic thinking. UCLA: Department of Mathematics. [Online]. Avalaible: http://www.math.ucla.edu/kriegler/pub/algebrat.html

Lew, H. (2004). "Developing algebraic thinking in early grades: Case study in Korean school mathematic," *The Mathematic Educator*, vol. 8, pp. 1-6.

Lins, R. (1992). “A framework for understanding what algebraic thinking is,” PhD dissertation, University of Nottingham.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista Irice*, 13, 105-132.

Márquez, C., Gaviria, C., y Rivera, Y. (2019). Evaluación del desarrollo de competencias a partir de la modelización matemática. *Revista Ingenierías USBMed, 10*(2), 8-15.

Matz M. (1982). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. In Sleeman, D. and Brown, J.S. (eds.) Intelligent Tutoring Systems, London. Academic Press.

Maudy, S., Didi, S. & Endang, M. (2018). Student’ Algebraic Thinking Level. *International Journal of Information and Education Technology*, Vol. 8, No. 9.

Meléndez, A. (2015). Dificultades en la comprensión del álgebra: el uso de la variable en el nivel medio superior. 3er Coloquio de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México, 2015.

Niss, M. & Blum, W. (2020). IMPACT Interweaving mathematics pedagogy and content for teaching. The learning and teaching of mathematical modelling

Penalva, M., Posadas, J. y Roig, A. (2010). Resolución y planteamiento de problemas: Contextos para el aprendizaje de la probabilidad. Educación Matemática, vol. 22, pp. 23-54.

Pitta, D., Chimoni, M. & Christou, C. (2019). Different types of algebraic thinking: an empirical study focusing on middle school students. International Journal of Science and Mathematics Education

Pitta, D., Chimoni, M. & Christou, C. (2023). Unfolding algebraic thinking from a cognitive perspective. Educational Studies in Mathematics (2023) 114:89–108

Prusak, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education, 15*(3), 266–285. doi:10.1080/14794802.2013.836379

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelización: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME, 13*(4_1), 191-210.

Rodríguez, S. (2021). Hallazgos neurocientíficos relacionados con el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria. Varona, 73.

Rojas, P. & Vergel, R (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista científica Educación científica y tecnológica*, edición especial. Bogotá, D.C

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008) Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. PNA 2(2), 61-74.

SEP (2023). Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo. Pensamiento matemático.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Sapiens*, 12 (1), 122-142.

Shahbari, J., & Daher, W. (2016). Pre-service teachers' mathematical models' features. *European Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 523-533. https://doi.org/10.30935/scimath/9491

Stacey, K., & Chick, H. (2004). Solving the Problem with Algebra. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study (1-20). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_1

Torres, L. & Gómez, K. (2019). Álgebra y pensamiento algebraico. Una experiencia de reconceptualización. XV CIAEM-IACME, Medellín, Colombia.

Torres, L. y Calderón, L. (2000). El dominio de la variable: variable didáctica en el álgebra escolar. *Revista EMA, 5* (3), 252-266.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Innovación Educativa , 9 (46), 75-87.

Trigueros, M., Ursini, S. y Lozano, L. (2000). "La conceptualización de la variable en la enseñanza media". *Educación Matemática, México, 12*(2). 27-48.

Villa, J., Quintero, C., Arboleda, M., Castaño, J. & Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelización matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 159-180.

Vorhölter, K. & Greefrath, G. (2025). Interdependence of teachers' beliefs about mathematical modelling and technology. Journal of Mathematics Teacher Education