Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

MODELACIÓN, VISUALIZACIÓN Y REPRESENTACIONES EN LA ERA NUMÉRICA

Editores:
Ibarra Olmos, Silvia Elena
del Castillo Bojórquez, Ana Guadalupe
Zaldívar Rojas, José David
Quiroz Rivera, Samantha

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

Primera edición: mayo 2022 (México)

Modelación, visualización y representaciones en la era numérica

Ibarra, S., del Castillo, A., Zaldívar, J. y Quiroz, S. (Eds).

México: Editorial AMIUTEM

336 p. ; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-2-5

Impreso en México / *Printed in Mexico*

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds., 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolinni & Mariotti, 1999, 2008; Arzarello & Paola, 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros "Matemática Educativa y Tecnología". Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros, uno que contendrá un acercamiento teórico-práctico y otro que será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlas vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Referencias

Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Groupe PME, *2*, 17-24. Seoul: PME.

Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics 19*(2): 27-35.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

English, L. (2015). STEM: Challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (Eds.), *Proceedings of PME39*, *1*, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. A. Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

PREFACIO

Esnel Pérez Hernández[1]

El Nobel de Literatura José Saramago abre su libro *Viaje a Portugal*[2] con el enunciado “Malo es que una obra precise un prólogo que la explique”, y es que la obra en sí misma –como ésta que tengo frente a mí, desde el título hasta contenidos y autores– presenta y genera, en quien la lee, una interpretación propia. Lo que se manifiesta en esta introducción es eso, una apreciación semántica mediada por los saberes, incluso menos profundos, que aquellos que caracterizan a los autores.

Hay una premisa en la obra, de la cual parten la mayoría de los autores: la práctica docente cotidiana en matemáticas considera preponderante la algoritmia, la ejercitación o, en su caso, la presentación algebraica de los contenidos, temas, aprendizajes esperados o cualquier otro nombre asignado por los diseñadores de currículo.

Tal conducta docente ha tenido efectos sobre los estudiantes, a grado tal que para resolver una situación de aula que se les propone manifiestan su predilección por los procedimientos algebraicos sobre cualesquiera de otro tipo.

Con ese planteamiento siempre presente, el libro se ofrece como una alternativa viable para enfrentar esa perspectiva única de tratamiento de las matemáticas de aula. Encierra experiencias de años de trabajo como docentes e investigadores de los doctos autores, quienes han tenido la posibilidad de adentrarse y escudriñar las formas que permiten a los alumnos, de los diferentes niveles educativos, hacer suyo el conocimiento matemático; esto es, aprehender en sus diversas acepciones.

El título mismo, *Modelación, visualización y representaciones en la era numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

---

[1] Instituto GeoGebra AMIUTEM.

[2] Saramago, J (1995). *Viajem a Portugal*. Lectulandia.com, ePub base r1.2. Traducción: Basilio Losada.

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: modelación, visualización y representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje: el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión "*en la era numérica*"), que se entrecruza con los tres primeros.

La lectura deja ver que todos ellos forman un andamiaje del que parten diversos planteamientos teórico-metodológicos que son sustento de los trabajos incluidos en el presente libro; asimismo, expone la coherencia interna entre esos aspectos generales y los productos particulares que forman el compendio.

Uno de tales núcleos conceptuales es la *visualización*, vocablo que desde la perspectiva lingüística se presenta como la representación de un fenómeno a través de imágenes ópticas o gráficas, o también como "[la formación] en la mente de una imagen visual de un concepto abstracto" (Cap. 7).

Dentro del trabajo que presento, *la visualización* tiene una amplia repercusión en el currículum de matemáticas (Cap. 12), incluso se desarrolla en torno a ella un discurso propio que permite una "comunicación estandarizada" entre sus usuarios. Es común encontrar expresiones como lectura de gráficas, variables visuales, unidades significativas, entre otras.

La visualización consiste en captar directamente la configuración total de las relaciones presentes en una situación y en discriminar lo que es relevante en ella (Cap. 7).

Particularmente, la visualización está estrechamente ligada al aprendizaje del estudiante, tal como se presenta en el Capítulo 8, donde se cita que es "una habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel o en algunos casos con computadora) para representar un concepto matemático o problema como una ayuda en la resolución del problema", o bien de manera más general se enuncia que "se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar una información visual" (Cap. 11).

Caracterizar a la visualización como una habilidad implica que ésta puede ser desarrollada mediante situaciones diseñadas ex profeso. Los autores de los diversos capítulos que integran esta obra hacen uso de tal planteamiento, ya sea para provocar la resolución de un problema que involucra el reconocimiento de una regularidad, un patrón (Cap. 15), la función lineal (Cap. 6), un sistema de ecuaciones lineales (Cap. 8), una ecuación diferencial (Cap. 1), las propiedades de la integral (Cap. 7) o, bien, para optimizar una situación (Cap. 3).

Otro de los ejes que identifico en el desarrollo del texto es el de *representación*. Varios autores de esta obra caracterizan el vocablo. Al respecto, en el Capítulo 12 se cita que "Una representación puede ser una combinación de algo escrito en papel, algo existente en forma de objetos físicos y una disposición cuidadosamente construida de ideas en la mente" (Cap. 12).

Una representación está estrechamente relacionada con el planteamiento *Registro de representaciones semióticas* al que se acude como marco explicativo del diseño, la aplicación y la interpretación de algunas proposiciones presentes en el libro. Se cita que éstas están vinculadas a tres funciones de la cognición: la formación, el tratamiento y la conversión de una representación (Cap. 1, Cap. 4, Cap. 7, Cap. 14, Cap. 15).

Los registros tabular, gráfico y algebraico son ejemplos de *Registros de representaciones semióticas*. El paso de uno a otro de estos registros –la conversión de la representación– juega un papel esencial en la conceptualización, según afirman algunos autores (Cap. 1).

El tercer eje es el de *modelación*. Según fuente citada por los autores del Capítulo I, la modelación puede ser vista como un proceso que incorpora "tres dominios de tratamiento distintos: dominio real, dominio pseudo-concreto y dominio matemático", que puede ser seccionado en siete etapas. ¿Qué caracteriza a cada uno de estos dominios? ¿Cómo vincularlos a una propuesta específica de enseñanza?

La modelación en el ámbito educativo está regularmente entrelazada con la resolución de problemas realistas (usando el término atribuido a Freudental por los editores de la colección). Las autoras del Capítulo 2 citan al respecto que: "cuando los alumnos enfrentan situaciones problemáticas de interés son capaces de explorarlas y representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones[,] manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se pueden canalizar a las matemáticas que se desean enseñar". Las situaciones problemáticas de interés a las que hace referencia el texto son aquellas que encierran circunstancias contextuales, esto se desprende de la lectura de la propuesta; de ahí se avanza a discriminar lo que es relevante de aquello que no lo es, para alcanzar la representación del fenómeno central que sea más funcional para llegar a un modelo y a la solución del problema.

Por su parte, los autores del Capítulo 6 citan que “la modelización puede ser un poderoso organizador para la enseñanza de las matemáticas”.

En el Capítulo 3 se plantea que “la modelización es de carácter general, y pretende relacionar en una nueva forma (modelo), los elementos significativos de una situación prescindiendo de todos los demás. A su vez, los autores del Capítulo 6 convienen en que “los Modelos son esencialmente sistemas conceptuales, éstos consisten en elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan cierta situación”.

Vale decir que dentro del propio trabajo que presento se produce un enlace indisociable entre modelo y representación, tal y como plantean los autores del Capítulo 4, al referirse a “la promoción de las *operaciones figurales*, indispensables para la modelación geométrica”.

Por demás está decir que cada uno de estos acercamientos a la modelización es el que al grupo de autoras o autores les pareció más viable utilizar en el diseño, desarrollo y explicación de su propuesta o investigación porque, como se cita en el Capítulo 5, “existen diferentes aproximaciones a la modelación en el aprendizaje de las matemáticas”.

¿Qué diferencias o similitudes tienen el acercamiento a la modelización que la ve cómo un sistema conceptual y aquel que la concibe como un procedimiento? ¿Cómo influye dicha concepción en el diseño de propuestas de enseñanza o de investigación?

Una lectura entre líneas de los capítulos de este libro arrojará luz para dar respuesta a las interrogantes que anteceden.

Enuncié previamente que se distingue un eje trasversal que se cruza con los otros tres mencionados y está relacionado con el uso de tecnología.

Cuando la tecnología digital llegó al aula de matemáticas se pensó que buena parte de los problemas de aprendizaje de la disciplina se solucionarían; al parecer, esa expectativa no se logró, en gran medida por la resistencia de los profesores y por los enfoques de enseñanza con tecnología que regían en aquel momento.

Actualmente, el microprocesador cohabita con el ser humano en todas las actividades que éste realiza. Es por ello que el grupo de autores de este libro ha considerado que la tecnología digital es una poderosa herramienta que puede y debe ser aprovechada para lograr mejores resultados en la generación de conocimiento matemático en sus estudiantes. Plantean implícita o explícitamente el uso de dispositivos físicos: computadoras, tabletas, teléfonos móviles, sensores y paquetería computacional: *Maxima*, *Tracker* y *GeoGebra*, entre otros.

El último *software* mencionado se ha convertido en uno de los preferidos, sobre todo por la gratuidad, lo cual no le resta su mérito como herramienta para enseñar, estudiar y aprender matemáticas. Los autores consideran que las actividades con *GeoGebra* permiten mitigar las dificultades al transitar entre los registros de representación algebraico y gráfico (Cap. 1), así como aquellas que surgen asociadas al pensamiento computacional (Cap. 10). También proponen utilizar *GeoGebra* como herramienta de exploración (Cap. 5, Cap. 11, Cap. 13), de modelización (Cap. 4, Cap. 14), para potenciar el uso de objetos visuales (Cap. 7), para la resolución de problemas (Cap. 12), para validar resultados (Cap. 15) y para ampliar la comprensión (Cap. 2).

Destaca en el libro el uso de diferentes planteamientos teóricos y metodológicos, a saber: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Cap. 2, Cap. 7), Actividades Provocadoras de Modelos (Cap. 6), la Teoría APOE (Cap. 10), la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, el método de enseñanza Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autorreflexión, ACODESA (Cap. 12, Cap. 14, Cap. 15) y marcos teóricos locales.

Los tipos de documentos que integran la obra consisten en: propuesta de enseñanza (Cap. 1), secuencia didáctica (Cap. 2, Cap. 4, Cap. 7), diseño de currículo (Cap. 14), reporte de investigación, resultados de intervención educativa[1] y ensayo (Cap. 3). Los autores utilizaron instrumentos como hojas de trabajo, actividades de investigación, acciones corporales (Cap. 6) y simulaciones digitales, entre otros. Estos planteamientos, si bien algunos fundamentados únicamente desde la teoría, consideran la idoneidad didáctica y su viabilidad en el contexto curricular para el que sugieren su aplicación.

Espero que las palabras escritas hasta aquí sirvan como un puente entre los autores y el lector, y que no haya rebasado los límites del contenido porque,

[1] Una actividad investigativa en aula regular conlleva una dualidad de papeles del profesor: como docente y como investigador.

como dice Saramago (1995), “malo es también que un prólogo presuma de tanto”.

CONTENIDO

II. VISUALIZACIÓN

III. REPRESENTACIONES

1 Propuesta de actividades para la conceptualización de ecuaciones diferenciales

Graciela Eréndira Núñez Palenius[1], José Carlos Cortés Zavala[2], Alfredo Erazo López[3]

Resumen

En el presente capítulo se propone una serie de actividades de aprendizaje para la conceptualización de ecuaciones diferenciales. Es usual que en los cursos de ecuaciones diferenciales este concepto solo se aborde con el uso de técnicas analíticas y numéricas; sin embargo, existe otro enfoque en el cual el énfasis se hace no en el conocimiento explícito de las curvas solución, sino en el comportamiento cualitativo de las mismas. Desde este punto de vista, se pretenden desarrollar actividades que contemplen un acercamiento a estos tres enfoques de solución de ecuaciones diferenciales. De igual manera, se quiere integrar diferentes entornos de aprendizaje: tratamiento escrito, simulación usando *GeoGebra* y la experimentación física, esta última con la finalidad de que el estudiante logre contrastar sus resultados analíticos con la realidad de los sistemas dinámicos que se pretenden modelar.

Palabras clave: actividades de aprendizaje, ecuaciones diferenciales, comportamiento cualitativo.

Résumé

Dans ce chapitre, une série d'activités d'apprentissage est proposée pour la conceptualisation d'équations différentielles. Il est courant que dans les cours d'équations différentielles, ce concept ne soit abordé qu'à l'aide de techniques analytiques et numériques; cependant, il existe une autre approche dans laquelle l'accent n'est pas mis sur la connaissance explicite des courbes de solution, mais sur leur comportement qualitatif. De ce point de vue, le but est de développer des activités qui incluent une approche de ces trois approches pour résoudre des équations différentielles. De la même manière, nous souhaitons intégrer différents environnements d'apprentissage: traitement écrit, simulation à l'aide de GeoGebra et expérimentation physique, cette dernière, afin que l'étudiant puisse opposer ses résultats analytiques à la réalité des systèmes dynamiques qu'il entend modéliser.

Mots clés: activités d'apprentissage, équations différentielles, comportement qualitatif.

[1] Universidad Michoacana, México.

[2] Universidad Michoacana, México.

[3] Universidad Michoacana, México.

Abstract

In this chapter, a series of learning activities are proposed for the conceptualization of differential equations. It is usual that in differential equations courses, this concept is only approached with the use of analytical and numerical techniques; however, there is another approach in which the emphasis is not on the explicit knowledge of the solution curves, but on their qualitative behavior. From this point of view, it is intended to develop activities that contemplate an approach to these three approaches to the solution of differential equations. Similarly, we want to integrate different learning environments: written treatment, simulation using GeoGebra and physical experimentation, the latter, for the student to be able to contrast their analytical results with the reality of the dynamic systems that they intend to model.

Keywords: learning activities, differential equations, qualitative behavior.

1. Introducción

Es indiscutible que el desarrollo de la sociedad moderna está íntimamente relacionado con la comprensión de los fenómenos que ocurren en el entorno natural, de aquí que exista la necesidad de predecir sus comportamientos y así transformar la naturaleza; esto ha dado origen a la *modelación* de los sistemas físicos.

Existen trabajos de investigación, como los mencionados más adelante, que se encuentran orientados a la integración de los registros gráficos como una herramienta didáctica para la visualización de los campos de direcciones y de las curvas solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO).

El objetivo general en este capítulo es la propuesta de actividades de conceptualización para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias, incorporando el empleo de un *software* dinámico, *GeoGebra*; así como también, el enfoque cualitativo cuando se tratan de interpretar las soluciones y los campos de direcciones de una EDO.

Como parte del marco teórico, se trabajará en la investigación el enfoque de la teoría sobre los registros de representación semiótica, el cual servirá para identificar los procesos cognitivos y evaluar las posibles dificultades con las que se encuentra el estudiante cuando resuelve las EDO.

2. Antecedentes

En los últimos años se han desarrollado investigaciones en torno a la didáctica de las ecuaciones diferenciales; como el trabajo de Guerrero *et al*. (2010), que analiza las dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de la EDO al utilizar un *software* dinámico para su tratamiento a través del uso del campo de isóclinas. En el estudio se observó que los estudiantes tenían dificultad en relacionar la solución de la EDO con la propia ecuación diferencial y que, aun cuando las dominaran, no utilizaron las herramientas algebraicas para interpretar el comportamiento de las soluciones dentro del registro gráfico.

De acuerdo con lo anterior, los estudiantes encuentran una dificultad relacionada con la falta de articulación entre el registro algebraico y el registro gráfico, así como su relación con el contexto del problema, pues al intentar manipular algebraicamente la información olvidan el contexto del problema que se ha modelado; a su vez, en concordancia con las dificultades encontradas por Guerrero *et al.* (2010), Hernández (1995) enfatiza que, entre las dificultades que existen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, se han encontrado obstáculos en la integración de distintos registros de representación.

Por otro lado, Rodríguez (2010) analiza la modelación matemática como tema central de la didáctica de las EDO e identifica la influencia de las *praxeologías* en los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

La noción de praxeología constituye una herramienta fundamental para modelar cualquier actividad matemática; al respecto, esta autora sostiene que dicho constructo tiene cuatro componentes:

1. Las tareas, T, al que el alumno es usualmente enfrentado;
2. La técnica, τ, que establece una manera de realizar determinado tipo de tareas;
3. La tecnología, θ, para cada técnica;
4. Una teoría, Θ, que es el discurso que justifica y explica la tecnología.

La pareja (T, τ) conforma el bloque práctico o *praxis* (el saber hacer), mientras que el conjunto (θ, Θ) conforma el bloque teórico o *logos* (el saber).

Con base en la problemática planteada, se tiene el interés en desarrollar una serie de actividades que traten de evaluar y mitigar las dificultades que el estudiante enfrenta cuando trata con las EDO, principalmente en lo relacionado con el tránsito entre los registros de representación algebraico y gráfico, integrando estos con la ayuda de *GeoGebra*.

3. Marco teórico

Un tema central de la propuesta de esta investigación es crear una cultura de la modelación de los fenómenos físicos en los estudiantes, como un punto de partida para la adquisición del concepto de *ecuación diferencial*; con esto, se fortalece la noción de que este concepto tiene su génesis en la *modelación* y, por lo tanto, se pueden relacionar y contrastar los resultados obtenidos teóricamente contra los obtenidos en un contexto real.

La *National Council of Teachers of Mathematics (*NCTM*),* argumenta que la tecnología es esencial en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, ya que puede influir positivamente en la matemática que se enseña e incrementar el aprendizaje de los estudiantes (Alonzo y Cortés, 2016); en su caso, ellos utilizan el CAS para promover el aprendizaje de términos comunes en álgebra. Por este motivo, se opta por el uso del *software GeoGebra* como herramienta de mediación en un ambiente informático para la implementación de estas actividades.

Una de las principales ventajas del uso de las nuevas tecnologías de información y comunicación (NTIC) para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias, es que con ellas se logra una forma de recapturar el *mundo real* y reabrirlo al estudiante en el interior del aula, con amplias posibilidades de interacción y manipulación de su parte (Waldegg, 2002).

Se han propuesto diversos esquemas para la representación simbólica del proceso cognitivo de la modelación; por ejemplo, Borromeo (2006) propone un ciclo para la modelación bajo la perspectiva cognitiva (ver Figura 1), en el cual la representación mental de la situación (RMS) juega un papel muy importante ya que en esta etapa el individuo realiza una representación de la situación que se plantea en el problema. En esta perspectiva, podemos identificar seis procesos de transición que componen el proceso de modelación (Figura 1): 1) la comprensión de la tarea, 2) la simplificación/estructuración de la tarea (el uso o la necesidad del saber extra-matematico, EMK, depende de la tarea en cuestión), 3) la matematización, 4) el trabajo matemático (utilizando las competencias matemáticas individuales), 5) la interpretación y 6) la validación (Borromeo, 2006). Esta RMS depende del estilo de pensamiento matemático de cada individuo: imaginaciones visuales relacionadas con fuertes asociaciones de experiencias propias; o el enfoque se centra más en los números y los hechos dados en el problema, que el individuo puede combinar o relacionar. Debido a esto, la RMS puede ser muy diferente entre distintos individuos (Borromeo, 2006).

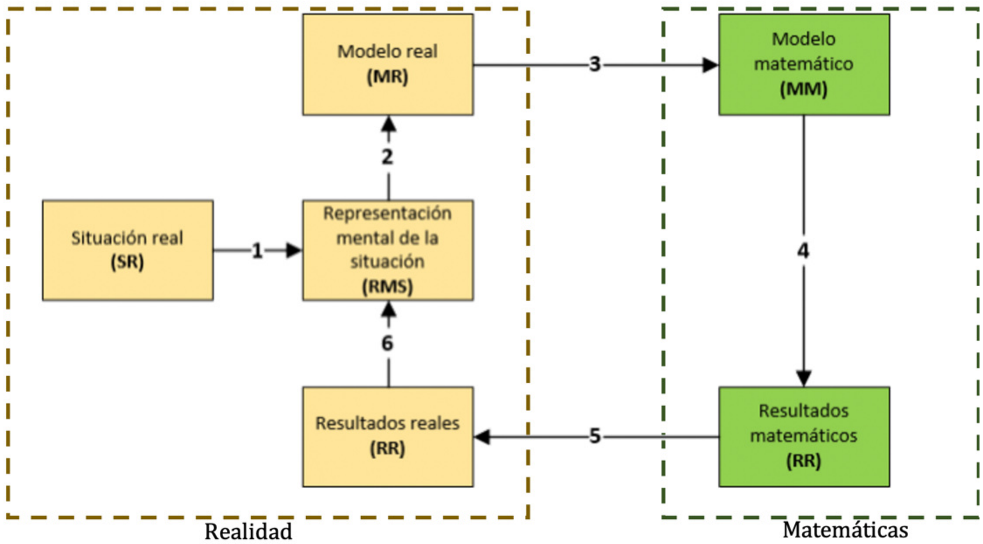


Figura 1. Modelación matemática bajo la perspectiva cognitiva (adaptado de Borromeo, 2006)

Partiendo del modelo recursivo propuesto por Borromeo, posteriormente Rodríguez, 2007 (citado en Rodríguez, 2010), realiza una descripción del proceso de modelación, definiendo tres dominios de tratamiento distintos: el dominio real, el dominio pseudo-concreto y el dominio matemático, la cual se encuentra representada en la Figura 2. En este modelo se tienen siete etapas: situación real o fenómeno a estudiar, modelo pseudo-concreto o primera aproximación, modelo matemático, resultados matemáticos, resultados del modelo pseudo-concreto, conformación modelo-realidad y generalización.

En este trabajo, Rodríguez, 2007 (citado en Rodríguez, 2010), enfatiza en la importancia de la construcción del modelo pseudo-concreto, adecuado para establecer posteriormente los modelos matemáticos que sean pertinentes a la problemática en cuestión, y recomienda el diseño de actividades que incorporen la mayoría de las etapas del proceso de modelación si realmente se pretende que el alumno desarrolle habilidades de este rubro.

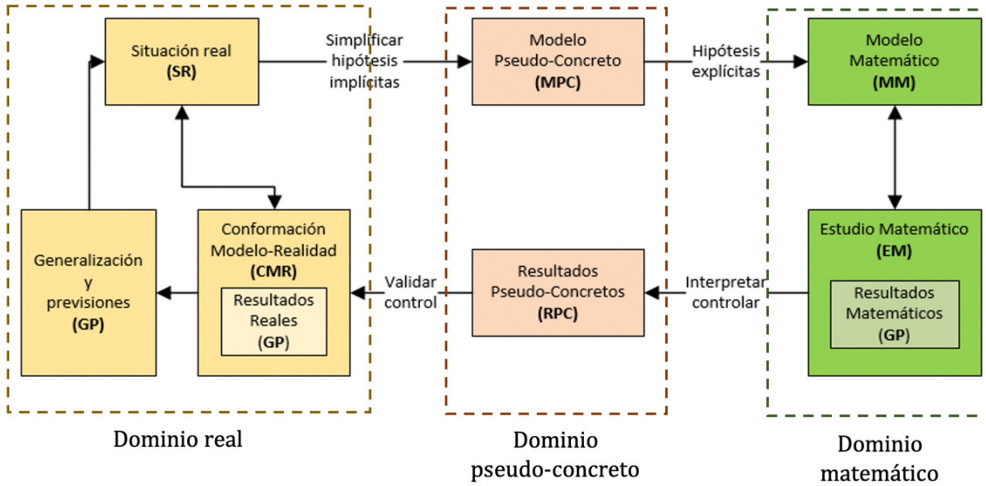


Figura 2. Descripción del proceso de modelación (Rodríguez, 2007)

Con el desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación, se ha propiciado un cambio de paradigma con respecto a la forma en que se hacen las matemáticas aplicadas. Balderas (2011) parte de las consideraciones de Bricio (1992) en su descripción del método matemático para concebir un esquema del proceso de modelación matemática de un proceso físico (Figura 3). En éste, pone de manifiesto la necesidad de emplear una modelación computacional del fenómeno a partir del modelo matemático, antes de realizar la validación de este modelo con la realidad; esto representa una ventaja, pues es posible poner al descubierto ciertas propiedades que no son apreciables a simple vista. En el mismo sentido, Núñez, Cortés, y Duarte (2018) señalan que el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas permite crear instrumentos atractivos con alto grado de interactividad que facilitan la exploración, el descubrimiento y la investigación de conceptos y sus relaciones.

Por otro lado, Núñez y Cortés (2017), aclaran que el aprendizaje mediado representa la interacción, marcada por una serie de necesidades culturales, entre el alumno y su medio ambiente. Tiene los siguientes objetivos:

1. Ofrecer al alumno las herramientas adecuadas para enriquecerse de los estímulos.
2. Desarrollar la consciencia del alumno sobre su propio desarrollo.
3. Formar una concepción propia del mundo, en la solución de problemas relacionados con la vida práctica.
4. Desarrollar una actitud autónoma, activa y autodidacta.

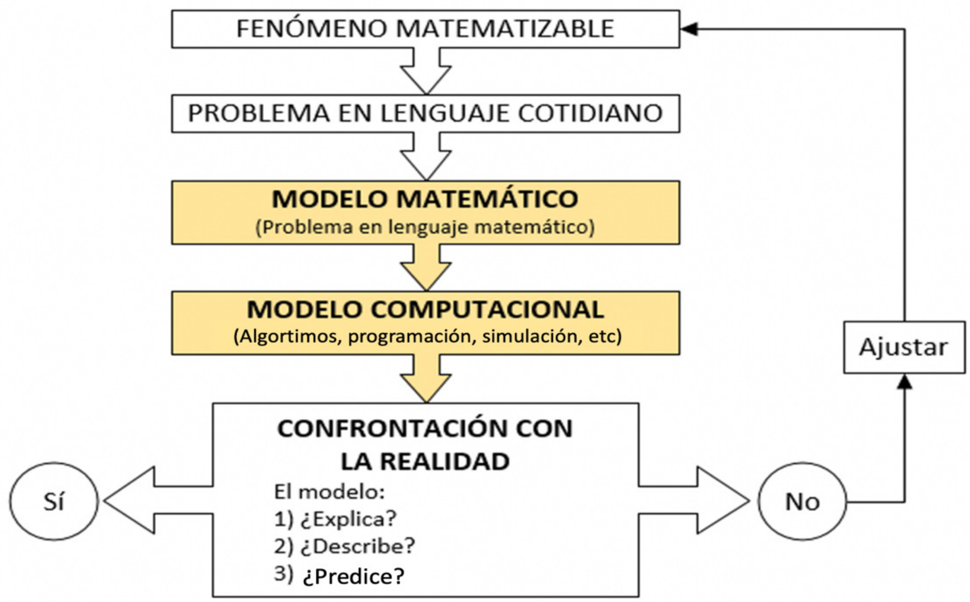


Figura 3. Esquema de modelación matemática (Balderas, 2011)

Hasta este punto se ha expuesto la necesidad de incorporar la creación de un modelo matemático en conjunto con uno computacional, para contrastar los resultados obtenidos en ambos con el modelo desarrollado en el contexto real y de esta manera validarlo, para estar en condiciones de realizar predicciones futuras con un buen grado de exactitud.

Dentro del contexto de la matemática educativa, la modelación de fenómenos se concibe como el proceso de matematización para la formación, el tratamiento y la conversión de representaciones en diferentes sistemas semióticos (Carrión, 1998). Varios investigadores han propuesto que la comprensión de la matemática se ve favorecida por la distinción entre los objetos matemáticos y sus representaciones. De acuerdo con lo anterior, Duval (1995) afirma que no se debe confundir un objeto matemático con su representación, toda confusión desencadena una pérdida de comprensión y los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje.

Es necesario realizar una aclaración en lo que a los sistemas semióticos se refiere: se entiende por sistema semiótico un conjunto de signos y reglas con el fin de representar objetos, los signos son las unidades elementales del sistema y las reglas rigen las asociaciones de los signos. Podemos decir que todo sistema de representación externa es un sistema semiótico. Dentro de los sistemas semióticos existen algunos muy particualres que permiten tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

1. La formación de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación.
3. La conversión de una representación.

A este tipo de representaciones semióticas les llamaremos Registros de Representación Semiótica (RSR).

En una fase de aprendizaje, la conversión juega un papel esencial en la conceptualización, ya que ésta implica una coordinación de registros de representación; al seleccionar bien el registro de representación, las representaciones en él son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado (Duval, 1998).

Estas consideraciones muestran la interdependencia estrecha entre noética (aprehensión conceptual del objeto matemático) y semiótica (aprehensión conceptual de la representación del objeto matemático), por lo que no sólo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética (Núñez y Cortés, 2017).

Por otro lado, una buena enseñanza debe ser constructivista, promover el cambio conceptual y facilitar el aprendizaje significativo (Moreira, 1997). En 1963, Ausubel realizó su primer intento de explicación de una teoría cognitiva del aprendizaje verbal significativo, publicando la monografía *The Psychology of Meaningful Verbal Learning* (Rodríguez, 2004). En este sentido, Pozo (1989) considera la teoría del aprendizaje significativo como una teoría cognitiva de reestructuración que se centra en el aprendizaje generado en el contexto escolar. Se trata de una teoría constructivista porque es el individuo quien genera y construye su aprendizaje (Rodríguez, 2004), desarrollando el proceso de significación de los objetos.

En la misma década en la cual Ausubel desarrollaba sus investigaciones, Bruner presentó su *Teoría del Aprendizaje por Descubrimiento*, también con un enfoque constructivista. Asimismo, Urbina (1999) cita que la resolución de los problemas dependerá de cómo se presentan estos en una situación concreta, ya que han de suponer un desafío que incite su resolución y propicie el aprendizaje. El descubrimiento favorece el desarrollo mental, ya que consiste en transformar o reorganizar la evidencia de manera que es posible ver más allá de ella (Araújo y Chadwick, 1988).

Estas teorías son de vital importancia para la investigación porque las actividades que se diseñaron tienen la intención de que el alumno reflexione, descubra y desarrolle el significado del objeto; es decir, que el estudiante se guíe hacia el descubrimiento del conocimiento. Por otro lado, una parte fundamental a considerar es el "instrumento", que sirve como mediador para el desarrollo del conocimiento: para este caso, consiste en una actividad escrita relacionada con una simulación en *GeoGebra* y un equipo de mezclado de soluciones salinas que consta de dos tanques en serie, uno con geometría cilíndrica y el otro cónico; para realizar el proceso de mezclado de los contenidos de ambos tanques se utilizan dos bombas, para la determinación de la concentración de sal se emplea un sensor basado en las propiedades de conductividad. La combinación de estos tres instrumentos integra un ambiente de aprendizaje adecuado para la enseñanza de las EDO, ya que permite al individuo relacionar la génesis del modelo y los resultados generados por las abstracciones, con el fenómeno físico.

4. Métodos cualitativos de análisis de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Es necesario implementar métodos para lograr que el estudiante tenga un mejor acercamiento a la parte conceptual de los problemas; para el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), una propuesta de orientación se refiere a los métodos cualitativos como una introducción a las ecuaciones diferenciales.

Hacia finales del siglo XIX, Henry Poincaré creó una nueva rama de las matemáticas cuando publicó su famosa obra *Memorie sur les courbes définiés par une équation différentielle* (1881), en la que sentó las bases de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales (Núñez y Salas, 2013). Esta teoría pretende describir la configuración general de las soluciones y el efecto de pequeñas perturbaciones de condiciones iniciales (estabilidad).

Las EDO aparecen en contextos científicos diferentes, en muchas ocasiones la teoría cualitativa proporciona una mayor comprensión de la realidad física de una situación.

La teoría cualitativa implica el uso de la geometría para tener un panorama del comportamiento del modelo, lo que ayuda a determinar su desarrollo a largo plazo; con frecuencia, esta es justamente la información que se requiere (Blanchard, Devaney & Hall, 2011). El corazón de los métodos cualitativos para el estudio de las ecuaciones diferenciales es el *campo de pendientes* o *campo de direcciones* (Hubbard & West, 1991).

5. Exposición de la propuesta

Para el diseño y desarrollo de esta serie de actividades, se toma como consideración que el estudiante debe tener conocimiento de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial y del cálculo integral (límite, derivada, integral, etc.). Es importante señalar que se trata de una propuesta para su aplicación y evaluación en el nivel de licenciatura.

Se aborda la EDO como una herramienta que modela los fenómenos físicos que ocurren en el entorno y a la vez permite sacar predicciones de estos.

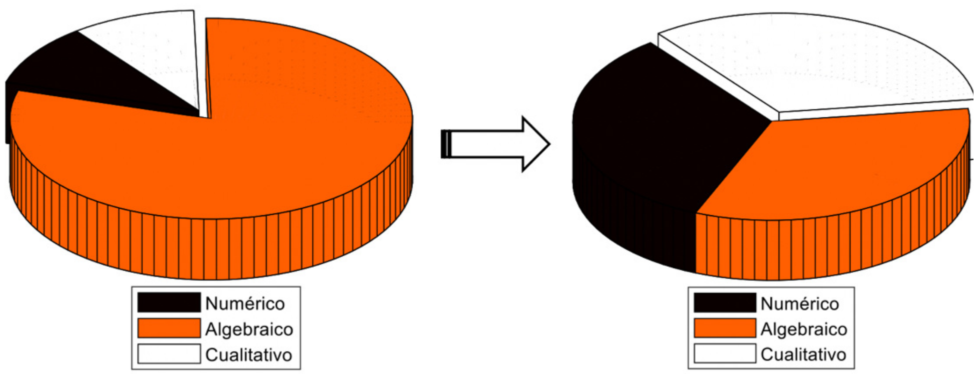


Figura 4. Enfoques usados para el estudio de una EDO

Con esta propuesta se pretende lograr, en el trabajo del estudiante, un equilibrio entre los diferentes enfoques usados para estudiar una EDO, como se muestra en la Figura 4, en la cual se puede observar que se quiere dar énfasis al tratamiento matemático en los enfoques numérico y cualitativo, disminuyendo el trabajo centrado en el tratamiento algebraico y en la conversión del RSR Númerico al RSR Gráfico.

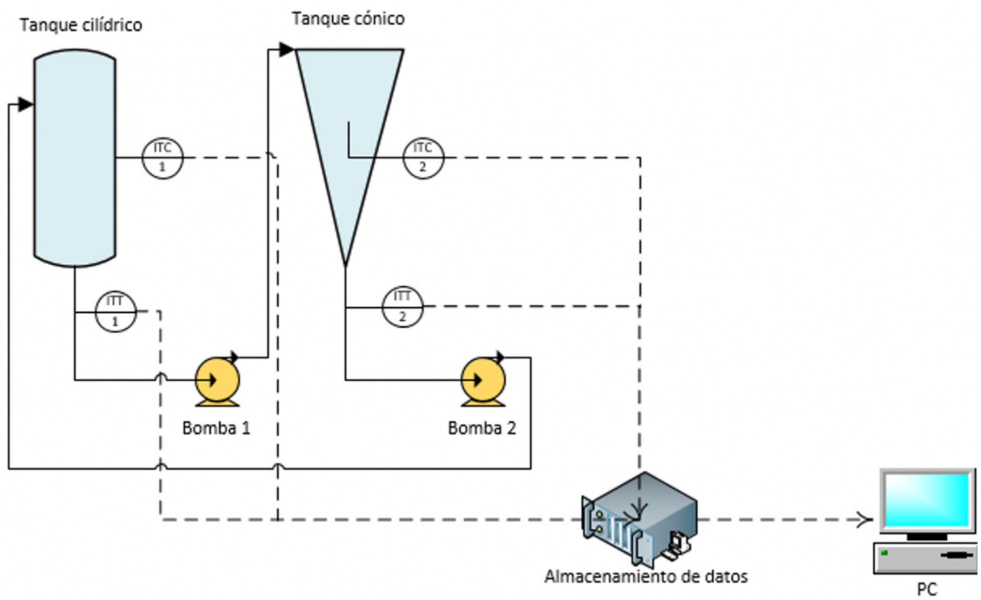


Figura 5. Equipo de mezclado utilizado para la experimentación física del modelo

En este trabajo de investigación se utilizan como problemas de contexto, el llenado de tanques con distintas formas geométricas y el mezclado de dos soluciones salinas con diferente composición, en los cuales se modelan el llenado del tanque y la variación de las concentraciones de sal con el transcurso del tiempo. Para esto, se diseñó el equipo de mezclado que se muestra en el diagrama de la Figura 5.

La secuencia de la estructura conceptual, inmersa en las actividades que se diseñaron para el aprendizaje de las EDO, es la siguiente:

1. Razones de cambio y relaciones entre variables.
2. El concepto de las EDO como herramienta de modelación.

Se comienza con el análisis de la razón de cambio entre dos variables, el tiempo y el volumen, como se muestra a continuación:

PROBLEMA

1. Se tiene un tanque con una capacidad de 600 litros, al cual están conectadas dos tuberías, por una ingresa agua al tanque a una velocidad de 10 litros/minuto y por la otra tubería se desaloja a velocidad de 5 litros/minuto. Conforme transcurre el tiempo se registran los siguientes valores:

Tiempo [minutos]	0	10	20	30	40	50	60
Volumen [litros]	0	50	100	150	200	250	300

En la siguiente tabla determine el cambio de volumen en el tanque para cada intervalo de tiempo:

Intervalo de tiempo [minutos]	Entre 0 y 10	Entre 0 y 30	Entre 0 y 60	Entre 10 y 20	Entre 10 y 30	Entre 30 y 60
Cambio de volumen [litros]						

Figura 6. Primer problema y su representación numérica

En la estructuración conceptual de las actividades, se pretende que el estudiante construya a través del descubrimiento el concepto de la rapidez instantánea de variación entre estas dos variables distintas, esto por medio del análisis de la representación gráfica de los datos proporcionados en la misma (ver Figura 9):

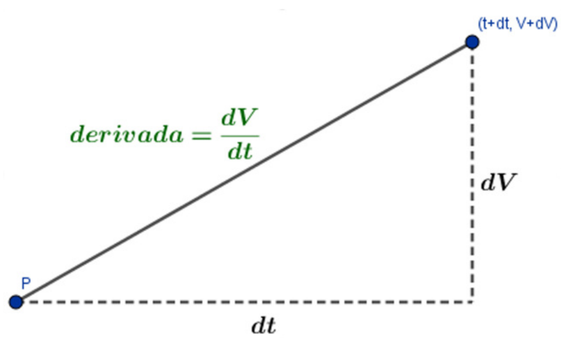


Figura 7. Triángulo relacional

Así mismo, con el uso del registro numérico se relaciona el concepto de la derivada (rapidez instantánea de variación) con el concepto de pendiente.

6. Determine la pendiente entre cada uno de los puntos anteriores.
Nota: Recuerde que la pendiente (m) entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es igual a:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Puntos extremos del segmento		Pendiente del segmento
Punto inicial (P_i)	***Punto final (P_{i+1})***	
P_1	P_2	
P_2	P_3	
P_3	P_4	
P_4	P_5	
P_5	P_6	
P_6	P_7	

Figura 8. Cálculo de pendientes

En un primer análisis, se presentan relaciones de correspondencia lineal para después introducir aquellas relaciones que tienen una correspondencia variable.

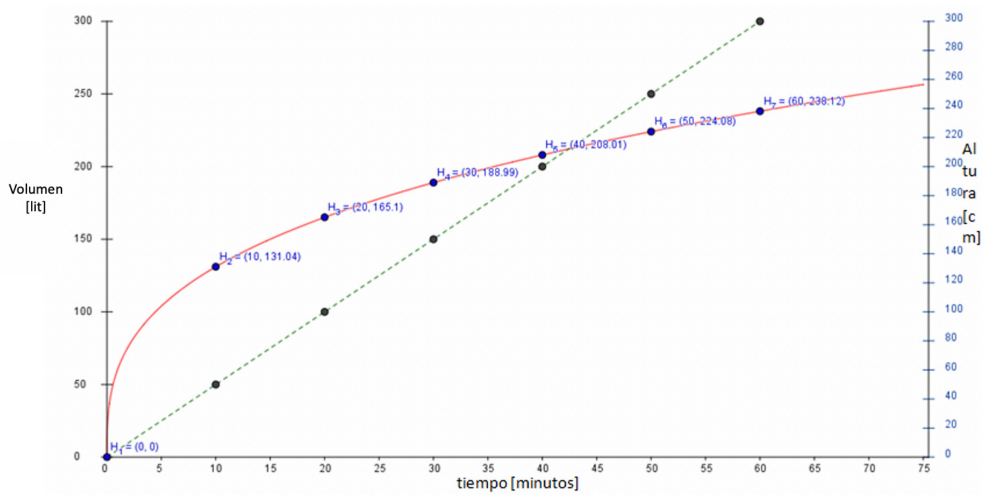


Figura 9. Gráfico del problema

Además, como lo anterior se relaciona con las propiedades físicas del sistema al cambiar la geometría del tanque que se está llenando:

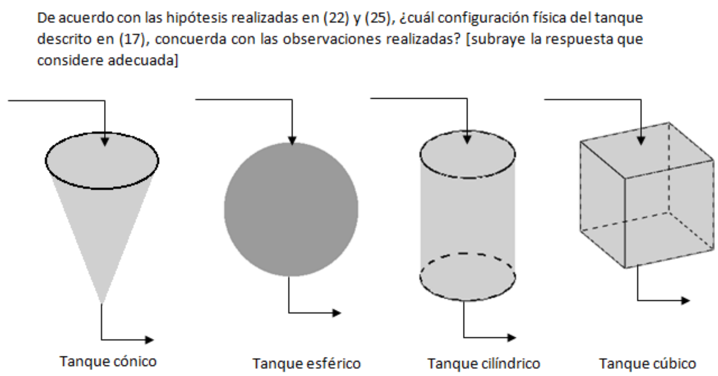


Figura 10. Diferentes tipos de tanque

En el desarrollo de la siguiente actividad, se introduce el uso práctico de las EDO para modelar los fenómenos físicos, al utilizar los siguientes casos:

1. Llenado de un tanque con área transversal constante, analizando el cambio de altura con respecto del tiempo.
2. Llenado de un tanque con área transversal variable, analizando el cambio de altura con respecto del tiempo.
3. El proceso de mezclado de una solución salina, modelando el proceso de dilución al incrementar el contenido de agua pura que se introduce en el tanque.

Con base en el anterior planteamiento, se propone inicialmente el siguiente problema:

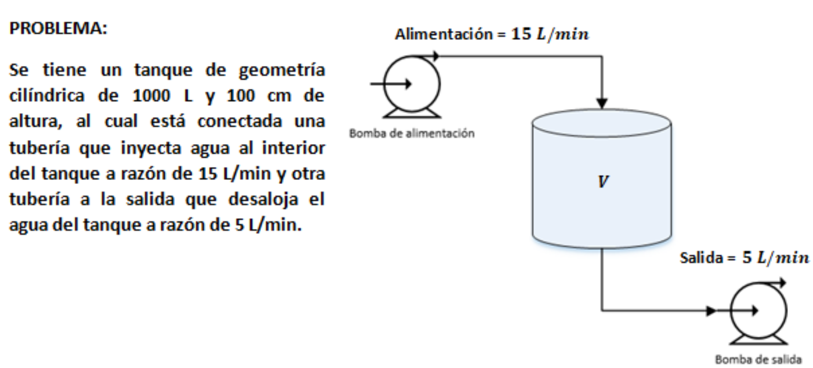


Figura 11. Problema y su modelo pseudo-concreto

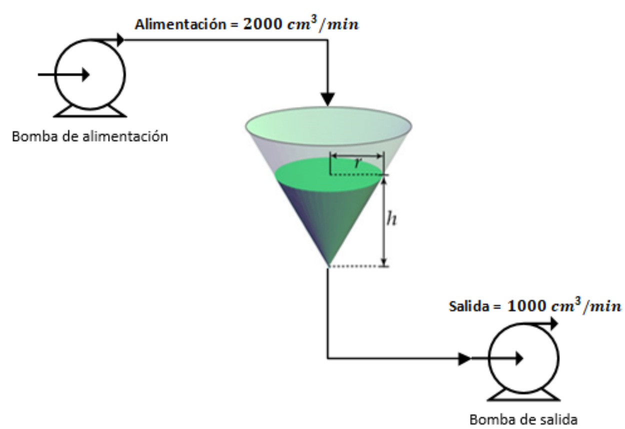
El siguiente cuestionamiento tiene la finalidad de lograr que el estudiante modele el cambio de altura en el interior del tanque, con la ayuda de una ecuación diferencial:

5. Represente la rapidez instantánea de variación del volumen con respecto del tiempo, para realizar esto aplique el límite cuando $\Delta t \to 0$ a la razón de cambio mostrada en (4).

Figura 12. Tipo de preguntas a realizar

Posteriormente, se introduce un cambio en la configuración geométrica del tanque, pasando de un tanque cilíndrico a uno cónico:

9. Considere un tanque cónico como el mostrado a continuación, al igual que en (1) se encuentra conectado a una tubería que inyecta agua al interior del tanque a razón de 2000 cm^3/min y otra tubería a la salida que desaloja el agua del tanque a razón de 1000 cm^3/min.



¿Cuál es la ecuación diferencial que describe la rapidez instantánea de variación del volumen con respecto del tiempo?

Figura 13. Modelo pseudo-concreto

Orientando al alumno a que construya el modelo que describa el cambio de altura con respecto del tiempo, primero se relaciona el cambio del radio conforme cambia la altura:

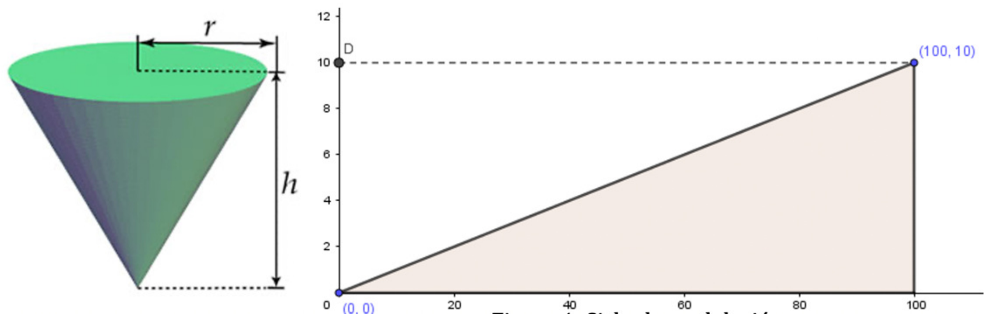


Figura 14. Relación del modelo pseudo-concreto con un RSR gráfico

Así, es posible llegar a la construcción del modelo para el sistema, además de la incorporación de otros conceptos propios del cálculo diferencial, como es el caso de la regla de la cadena:

13. Con ecuación de (12) determine la rapidez instantánea de variación del volumen con respecto de la altura (dV/dh)

14. Es preciso conocer cuál es la rapidez instantánea de variación de la altura con respecto del tiempo, recordando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dh}\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)$$

Con base en esto, ¿cuál es la expresión que permite determinar $\left(\frac{dh}{dt}\right)$ para el sistema que se está analizando?

15. Sustituya los resultados obtenidos en (9) y (13) en la expresión de (14) para encontrar el modelo del sistema

Figura 15. Preguntas para realizar

Una vez que el estudiante puede construir el modelo del sistema, se le pide que realice la simulación del fenómeno en un *applet*, desarrollada previamente en *GeoGebra*, para que pueda analizar el comportamiento dinámico y fortalecer así el proceso de aprendizaje:

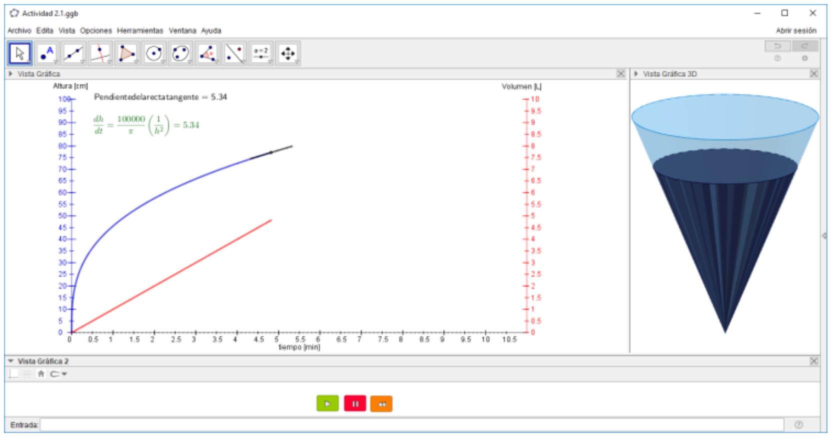


Figura 16. Modelo matemático en *GeoGebra*

En una actividad posterior se recurre a la misma secuencia de análisis para la construcción del modelo de un proceso de dilución de una mezcla salina, tal como se muestra en la Figura 17.

6. Perspectivas

Se plantea que la experimentación y evaluación de las actividades diseñadas se desarrollen en una etapa posterior del proyecto, con el fin de valorar su eficacia en la conceptualización y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales por los estudiantes, en un curso introductorio al tema en el nivel de licenciatura. En este contexto, es posible ampliar la propuesta en el diseño y desarrollo de otras actividades para el aprendizaje-enseñanza de conceptos como el de *ecuación diferencial lineal*, como:

1. Construcción del campo de isóclinas y análisis cualitativo de una EDO.
2. Soluciones de una EDO.
3. La ecuación diferencial lineal.
4. El sistema de ecuaciones diferenciales lineales.
5. El concepto de la función de transferencia como herramienta de modelación de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

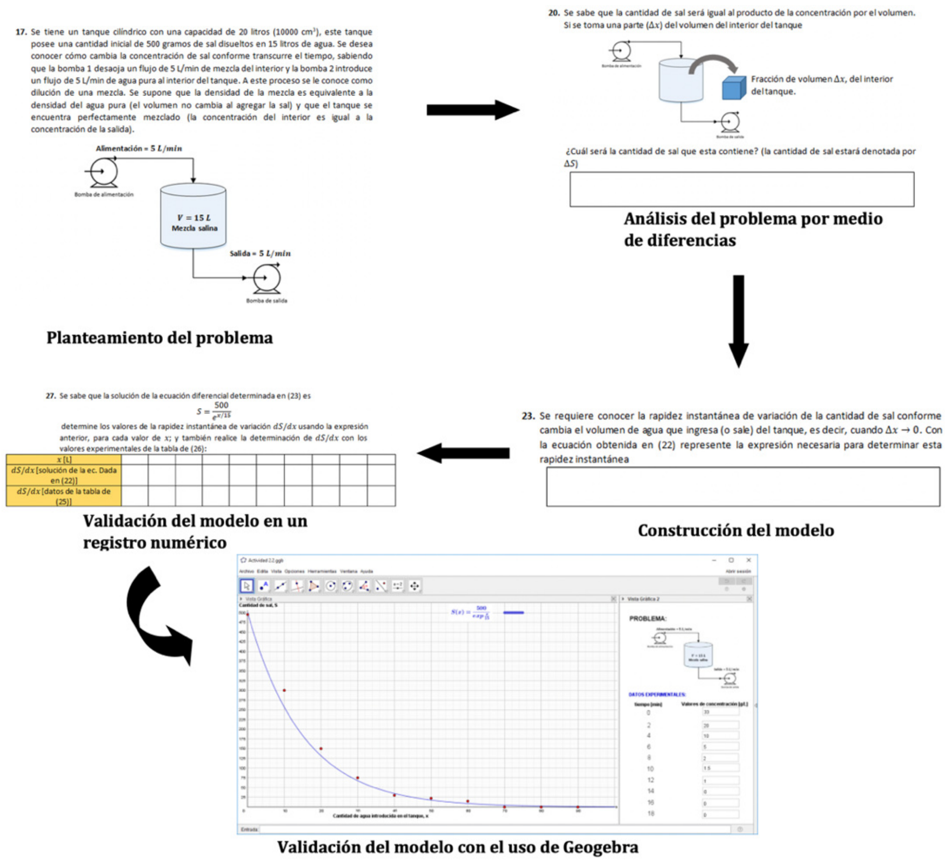


Figura 17. Esquema que relaciona los RSR en el modelo matemático propuesto

Referencias

Alonzo, E. y Cortés, C. (2016). Uso del CAS para el aprendizaje de temas de álgebra del bachillerato. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, *4*(1), 170-181. Disponible en http://revista.amiutem.edu.mx/relecamiutem/article/view/81/pdf_87.

Araújo, J. y Chadwick, C. (1988). Tecnología educacional. Teorías de la instrucción. Barcelona. Paidós.

Blanchard, P., Devaney, R., Hall, G. (2011). Diferential equations, 4th edition, Cengage Learning.

Borromeo, R. (2006). Theorical and empirical differentations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2).

Bricio, D. (1992). Ideas sobre el futuro de la Matemática Aplicada. Reunión Nacional de Matemáticas, Coahuila, México, 65-89.

Carrión, V. (1998). La modelación de fenómenos como proceso de matematización para la formación, tratamiento y conversión de representaciones en diferentes sistemas semióticos. En: F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, 6, 225-241.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica, 5, 101-120.

Guerrero, C. *et al.* (2010), Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 341-352.

Hubbard, J. y West, B. (1997). *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*, 3th edition. New York: Springer-Verlag.

Núñez, G. y Cortés, C. (2017). Aspectos necesarios a considerar en la definición de derivada. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, *6*(2), 32-45. Disponible en http://revista.amiutem.edu.mx/relecamiutem/article/view/138/pdf_60.

Núñez, G., Cortés, C. y Duarte, E. (2018). El concepto de pendiente en un ambiente tecnológico a través de actividades de aprendizaje con el uso de las calculadoras NSPIRE CX CAS. *REVISTA ELECTRÓNICA AMIUTEM*, *6*(2), 82-90. Disponible en http://revista.amiutem.edu.mx/relecamiutem/article/view/153/pdf_74.

Núñez, H., Salas, A. (2013). Poincaré, la mecánica clásica y el teorema de la recurrencia. *Rev. Mex. Fis*. E 59, 91-100.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME* [en línea], 13 [Fecha de consulta: 2 de mayo de 2019] Disponible en https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33529137013.

Urbina, R. (1999). Informática y teorías del aprendizaje. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, 12, 87-100.

Waldegg, G. (2002). El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *4*(1). Consultado en http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-waldegg.html

2 Actividades didácticas para el estudio de la ecuación cuadrática en el bachillerato mexicano mediante la modelación

Ana Guadalupe del Castillo B.[1], Silvia E. Ibarra O.[2], Maricela Armenta C.[3]

Resumen

Se presenta una propuesta de enseñanza para el tema de la ecuación cuadrática ($ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in$ R; $a \neq 0$), con la expectativa de que pueda ser usada por profesores de matemáticas que laboran en el bachillerato mexicano. El diseño se realizó desde la perspectiva de la modelación, teniendo como fundamentación teórica los criterios de idoneidad didáctica, además de los niveles de algebrización propuestos dentro del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Las actividades diseñadas serán mediadas con *GeoGebra*.

Palabras clave: ecuación cuadrática, modelación, bachillerato.

Résumé

Une proposition d'enseignement sur le sujet de l'équation du second degré ($ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in$ R; $a \neq 0$) est présentée, dans l'espoir qu'elle pourrait être utilisée par les professeurs de mathématiques du baccalauréat mexicain. La conception a été fait du point de vue de la modélisation, en ayant une base théorique des critères d'adéquation didactique, en plus des niveaux d'algèbre proposés dans l'approche ontosémiotique de la cognition et de l'instruction mathématiques. Les activités de conception seront réalisées avec GeoGebra.

Mots clés : équation quadratique, modélisation, baccalauréat.

Abstract

A teaching proposal for the subject of the quadratic equation ($ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in$ R; $a \neq 0$) is presented, expecting that it can be used by mathematics teachers who work in the Mexican baccalaureate. The design was made from the perspective of modeling, having as a theoretical foundation the didactical suitability criterion, plus the levels of algebrization proposed within the Ontosemiotic Approach of Mathematical Knowledge and Instruction. The designed activities will be mediated with GeoGebra.

Keywords: quadratic equation, modeling, baccalaureate.

---

[1] Universidad de Sonora, México.

[2] Universidad de Sonora, México.

[3] Universidad de Sonora, México.

1. Introducción

Una de las tareas de mayor complejidad asignada a un profesor de matemáticas de cualquier nivel educativo es la de la planificación de su clase. Dicha complejidad radica en la serie de elementos que, al menos teóricamente, tienen que ser contemplados para la realización de la tarea mencionada: las competencias matemáticas cuyo desarrollo debe promover en sus estudiantes, los objetivos de enseñanza que pretende alcanzar, los medios que utilizará, las características de los alumnos con los que está trabajando, entre otras.

Si bien, al menos en el caso de México, el sistema escolar pone a disposición de los profesores una serie de materiales de apoyo a su labor, así como libros de texto que son diseñados por expertos en el área, las dificultades que los docentes experimentan son muchas. En el caso del bachillerato mexicano (15-18 años), que ha estado sujeto a una serie de modificaciones curriculares (una de las últimas se promovió en 2008), las responsabilidades sobre quienes ejercen la labor docente han ido en aumento.

En contraparte, los investigadores en matemática educativa están generando desde hace algunos años una serie de resultados que explican varios de los fenómenos que se dan en el salón de clase. Además, han empezado a involucrarse en actividades de diseño de propuestas de enseñanza que intentan tender un puente entre los resultados que la investigación ha producido con su posible uso en el aula. En este sentido, Schoenfeld (2000) señaló:

> La investigación en educación matemática tiene dos propósitos principales, uno puro y otro aplicado:
>
> - Puro (Ciencia básica): para comprender la naturaleza del pensamiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje;
> - Aplicado (Ingeniería): usar tales comprensiones para mejorar la instrucción de matemáticas. (p. 641)

Acorde con esta idea, se presenta en este texto una secuencia didáctica que se diseñó tomando como tema matemático a las ecuaciones cuadráticas, la cual está dirigida a estudiantes de nivel bachillerato. Las actividades que integran la secuencia están planteadas desde una perspectiva de la modelación que será explicitada más adelante, e incorporan planteamientos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), posteriormente expuestos. Como medio tecnológico de apoyo se emplea *GeoGebra*.

2. Antecedentes

2.1 Elementos asociados con la enseñanza de la ecuación cuadrática. Una breve mirada hacia algunos resultados de investigación

Algunos historiadores de la matemática (Boyer, 1999; Stewart, 2012), documentan ejemplos de problemas en cuyas resoluciones aparecían las que actualmente se conocen como ecuaciones cuadráticas, proporcionando además información sobre cómo es que esos problemas fueron resueltos. En estos procesos de solución son incorporados en algunas ocasiones procedimientos y argumentaciones de carácter geométrico, y en otros, elementos que podrían categorizarse dentro de lo que hoy se identifica como conocimiento algebraico.

Martínez y Arrieche (2010) hacen un apretado recorrido histórico que va rescatando los que, consideran, son momentos relevantes en el desarrollo de la ecuación de segundo grado; señalan que:

> Es de notar que en todo el proceso histórico en el cual se va configurando la ecuación de segundo grado, tanto el simbolismo como el trabajo de algunos personajes influyeron notoriamente para que la noción de ecuaciones en general evolucionara. Por esto, a lo largo de la historia ha sido diferente la manera de concebir la ecuación de segundo grado y más aún difiere de como hoy en día la vemos; sin embargo, las nociones cuadráticas han estado presentes en diferentes periodos históricos de las Matemáticas... (p. 86).

A partir de esta exposición, los autores reconocen la existencia de alternativas distintas para enseñar la ecuación cuadrática, diferentes a aquella en donde se privilegia la manipulación simbólica. Señalan, por ejemplo, la posibilidad de realizar un uso mayor del trabajo geométrico. Además, consideran que su estudio, que categorizan como histórico-epistemológico, proporciona:

> …una visión más global del lenguaje, los problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que han entretejido el surgimiento de este objeto matemático con el fin de precisar su origen y rescatar su importancia tanto en el contexto matemático como en el educativo (p. 97).

Por su parte Posadas y Godino (2015), presentan una recopilación sintetizada de investigaciones centradas tanto en el proceso de enseñanza como en el proceso de aprendizaje de la ecuación cuadrática. Toman como eje conductor en su discusión lo que denominan como facetas epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica/curricular.

En la faceta epistémica, retomando la postura de otros investigadores, señalan la importancia que podría tener la discusión en clase sobre cómo se obtiene la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática, pues

> Una discusión de cómo se obtiene la fórmula nos lleva a cuestiones de estrategia. En vez de preguntar, ¿Cuál es una fórmula para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática? sería preferible preguntar, ¿Cómo podemos resolver una ecuación cuadrática? Esta segunda cuestión nos conduce a pensar sobre procesos más que sobre productos y considera cómo podemos comenzar (p. 89).

En cuanto a la faceta cognitiva, advierten sobre la necesidad de que los profesores conozcan las dificultades que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a las ecuaciones cuadráticas. Dicha advertencia tiene su apoyo en resultados de estudios que muestran cómo “el pensamiento del estudiante en estos contextos parece estar dominado por la necesidad de lograr dominio procedimental, y usualmente sin garantía de que se logre comprensión relacional” (Skemp, 1978, citado en Posadas *et al*., 2015).

Además de lo anterior, indican que:

> Algunos profesores e investigadores educativos piensan que una aproximación de enseñanza que coloca el estudio de las ecuaciones, incluyendo las ecuaciones cuadráticas, dentro del estudio de las funciones –la llamada aproximación funcional–, es bastante más probable que consiga una comprensión relacional de los estudiantes que la tradicional aproximación expositiva, procedimental de resoluciones de ecuaciones… (p. 89).

En la llamada faceta instruccional se exponen argumentos para apoyar el proceso de resolución de ecuaciones cuadráticas desde la geometría, pues esta estrategia “podría utilizarse en la enseñanza con el objetivo de mostrar las conexiones entre la geometría, el análisis y el álgebra, lo cual ayuda a una mejor comprensión de las matemáticas” (Posadas *et al*., 2015).

Finalmente, en la faceta ecológica/curricular muestran argumentos de la no coincidencia entre los planteamientos curriculares españoles y la concreción que hacen los autores de libros de texto, los cuales tienen aproximaciones diferentes entre sí.

2.2 La ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in R$; $a \neq 0$, en el currículo matemático del sistema escolar mexicano

La ecuación cuadrática es un tema de relevancia en el currículo matemático mexicano, pues se estudia tanto en la etapa final de la educación básica, conocida como escuela secundaria (12 a 15 años), en la educación media superior o bachillerato (EMS), (15 a 18 años), así como en todas las carreras pertenecientes a las ciencias básicas y a las ingenierías (18 años en adelante). Esa prolífica presencia curricular es un indicativo de la importancia que tiene como elemento base para generar conocimientos matemáticos más avanzados, además de ser uno de los modelos algebraicos más empleados en campos de conocimiento extra matemáticos.

Es importante señalar, antes de conocer las especificidades para el tema en cuestión, algunas características relevantes que tiene la formación matemática en la EMS, nivel escolar en el que se ha situado la propuesta de enseñanza que en este documento se formula.

En México, el enfoque educativo que se instituyó para los niveles escolares básicos (preescolar, primaria y secundaria), así como para la EMS, es el enfoque por competencias. En este último caso está vigente desde 2008, habiéndose realizado modificaciones en 2017, estableciéndose lo que se conoce como Nuevo Modelo Educativo (NME).

En el NME se recupera lo establecido en 2008 respecto al enfoque por competencias para el bachillerato, lo que se tradujo en la indicación de que hay una serie de competencias que deben ser desarrolladas por los estudiantes en su paso por la escuela. Corresponde entonces a los profesores hacer lo conducente para promover el desarrollo de tales competencias en sus estudiantes.

De acuerdo con la Dirección General de Bachillerato (DGB), (2017), dependencia de la Secretaría de Educación Pública, las ocho competencias matemáticas son:

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variaciones, para la comprensión y el análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación.
5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
7. Elige un enfoque determinístico o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos (p. 11).

Interesan, para los propósitos de la propuesta, trabajar las competencias 1, 2, 3, 4, 5 y 8.

En cuanto al tema de Ecuaciones Cuadráticas, la DGB lo ubica en la materia Matemáticas I, a cursarse en el primer semestre de los seis que conforman el ciclo completo de la EMS. El programa está constituido por siete bloques, y corresponde al Bloque 7 el estudio de las ecuaciones cuadráticas.

El contenido propuesto para el tema en cuestión se muestra en la imagen correspondiente a la Tabla 1.

DGB

CLAVE CG	CLAVE CDB	Conocimientos	Habilidades	Actitudes	Aprendizajes esperados
CG 5.1 CG 5.2 CG 8.2	CDBM 1 CDBM 2 CDBM 4 CDBM 5	Ecuaciones cuadráticas. • Clasificación. • Métodos de solución.	Describe las características de las ecuaciones cuadráticas y sus métodos de solución. Argumenta la solución obtenida para la toma de decisiones.	Toma decisiones con base en resultados analizando consecuencias. Reconoce sus fortalezas y áreas de oportunidad. Privilegia el diálogo para la construcción de nuevos conocimientos. Se relaciona con sus semejantes de forma colaborativa mostrando disposición al trabajo metódico y organizado.	Propone soluciones de manera colaborativa a ecuaciones cuadráticas, interpretando el resultado en el contexto del problema. Explica la solución de ecuaciones cuadráticas para la toma de decisiones, valorando su uso en las problemáticas del entorno.

Tabla 1. Conocimientos, habilidades, actitudes y aprendizajes esperados para las ecuaciones cuadráticas. Fuente: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio.php

Como puede advertirse de la revisión de la Tabla 1, la descripción del proceso de estudio planteado se centra en el manejo de conceptos y métodos de solución. Se hace alguna alusión a la incorporación de problemáticas del entorno donde se empleen las ecuaciones cuadráticas.

2.3 La modelación como perspectiva para el diseño de actividades didácticas

Los planteamientos curriculares que se acaban de mostrar, aunque escuetamente, intentan recuperar la importancia de relacionar el contenido matemático de interés con la solución de problemáticas del entorno. Lo mismo sucede con los enunciados de algunas de las competencias matemáticas.

De hecho, en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas, un requerimiento recurrente es el relativo a la necesidad de planificar procesos de estudio que surjan a partir del planteamiento de situaciones problemáticas del entorno, esto es, en contextos no matemáticos. Los argumentos en favor de esta postura indican que, trabajando de tal manera, la significación que logran construir los alumnos sobre los objetos matemáticos es más rica y profunda, además del valor agregado que representaría el generarles interés y motivación por resolver los problemas así propuestos (SEMS, 2017).

De acuerdo con Trigueros (2009), "una forma de lograr la contextualización del conocimiento es la presentación de situaciones problemáticas reales que sean factibles de representarse mediante modelos matemáticos" (p. 76).

Si se busca responder cuestionamientos sobre alguna situación concreta, o tener que tomar decisiones, o es necesario hacer predicciones frente a algún fenómeno específico, con mucha frecuencia se requiere generar o estudiar algún modelo matemático. Por ejemplo, conocer las probabilidades de lluvias en un determinado lugar requiere del manejo de un modelo diseñado exprofeso.

Así:

> El supuesto que subyace a la introducción de la modelación matemática al aula consiste en esperar que, cuando los alumnos enfrentan situaciones problemáticas de interés son capaces de explorar formas de representarlas en términos matemáticos, de explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones manipularlas y desarrollar ideas poderosas que se

> pueden canalizar a las matemáticas que se desean enseñar (Lehrer y Schauble, 2000; Lesh e English, 2005, citados por Trigueros, 2009, p. 76).

Hacer una planificación de clase en la que esté presente la modelación matemática no es tarea trivial. De hecho, una revisión a la literatura de investigación en el tema nos muestra que existen diferentes perspectivas sobre cómo introducir y utilizar la modelación en el salón de clases. Toda vez que no es el interés de este trabajo la disertación sobre dichas perspectivas, solamente se declararán las características y expectativas que en la propuesta de enseñanza juega la modelación.

En esta dirección, la propuesta diseñada parte de la presentación de un modelo matemático, el cual estará inmerso en una situación problemática que se considera de relevancia social y que brindará a los alumnos oportunidades para que puedan conocer conceptos, procedimientos, construir argumentaciones, manejar diferentes lenguajes y discutir proposiciones, todos ellos en el marco de la ecuación cuadrática.

Se presupone que el planteamiento del modelo, que será gradual, dará la oportunidad para que el alumno formule y trate de responder cuestionamientos, interrelaciones con sus compañeros y con el profesor, en resumen, se convierta el salón de clase en un escenario para la construcción del conocimiento matemático en juego.

Los detalles concretos sobre el particular se mostrarán en la sección destinada a describir la secuencia de actividades didácticas.

3. Consideraciones teóricas

La secuencia didáctica que se ha estructurado tiene su apoyo teórico en algunas construcciones teóricas tomadas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), (Godino, Batanero y Font, 2008). Dichas construcciones son práctica, objeto, significado, los indicadores de idoneidad didáctica, además de los niveles de algebrización (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014).

Como punto de partida, en el EOS se acude a la triple concepción de la matemática: como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje y como un cuerpo de conocimientos que ha sido socialmente construido y sistematizado. Siempre que un individuo o institución (conglomerado de individuos) desarrolle actividad matemática, esta terna de elementos estará presente.

Godino *et al*. (2008) exponen la noción de práctica matemática como toda acción realizada con la intención de resolver situaciones problema (s-p), comunicar los resultados derivados de dicho proceso de solución, identificando además en la actividad matemática la presencia de los llamados objetos matemáticos primarios: las propias s-p, los lenguajes utilizados, los procedimientos seguidos en el abordaje y resolución de las s-p, las propiedades que se atribuyen a los objetos matemáticos, los conceptos establecidos y los argumentos manejados para justificar cualquier acción realizada.

Además de lo anterior, es importante señalar que, un elemento básico en los procesos de estudio son los sistemas de prácticas que resulten ser útiles para alcanzar los objetivos planteados; esto es, las llamadas prácticas significativas. Éstas deben presentarse de forma frecuente, lo que permite identificarlas con el carácter de prácticas prototípicas. Este señalamiento es útil, porque en el EOS interesa entonces el estudio de las prácticas significativas prototípicas, dado que constituyen lo que se denomina el significado de un objeto matemático.

El significado de un objeto matemático es el sistema de prácticas significativas prototípicas, tanto operativas (lo que se hace), como discursivas (lo que se dice), asociadas a la resolución de determinado tipo de situaciones problema. Si los sistemas de prácticas son generados por un individuo, se tratará de su significado personal; en contraparte, al ser generados por una comunidad, se tratará de un significado institucional.

Otro elemento teórico empleado para el diseño de las actividades son los llamados criterios de idoneidad didáctica, concebidos "como la articulación coherente y eficaz de las distintas dimensiones implicadas en los procesos de estudio matemático: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006, p. 221).

Finalmente, tal como antes se mencionó, se utilizarán los niveles de algebrización de la actividad matemática escolar (Godino, *et al*., 2014). Esta categorización surge como respuesta a la necesidad de seleccionar y elaborar tareas matemáticas que permitan el progresivo desarrollo del razonamiento algebraico en los estudiantes. De acuerdo con dichos autores, se identifican cuatro niveles de algebrización, descritos a continuación.

> Nivel 0. Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante el lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona

un término con el siguiente en casos particulares, no es indicativa de generalización.

Nivel 1. Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

Nivel 2. Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Nivel 3. Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones (pp. 207-211).

El uso de cada uno de los elementos teóricos aquí explicitados, será evidenciado al describir las características de las actividades, en la sección siguiente.

4. Características de la propuesta

Para el diseño inicial de la propuesta se consideran, como guías, los indicadores de idoneidad didáctica en sus diferentes facetas. A continuación, se presentan las principales características de la propuesta atendiendo las facetas epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica.

Las actividades inician con el planteamiento de una situación problema en un contexto de la vida diaria, en el que se resalta la importancia de contribuir a mejorar las condiciones de seguridad en sitios e instalaciones en los que debe implementarse un sistema de señalización para la prevención de riesgos, en beneficio de las personas que concurren o laboran en ellas. Específicamente, se trabaja con las formas y dimensiones para el diseño de señales y avisos de protección civil. Así, para el diseño de las actividades se considera lo que establece la Norma Oficial Mexicana NOM-003-SEGOB-2011 (SEGOB, 2011), con relación a las dimensiones de las señales:

> La dimensión de las señales objeto de esta norma debe ser tal, que el área superficial (S) y la distancia máxima de observación (L) cumplan con la siguiente relación:
>
> $$S \geq \frac{L^2}{2000}$$
>
> donde:
>
> S es la superficie de la señal en metros cuadrados;
>
> L es la distancia máxima de observación en metros;
>
> $\geq$ es el símbolo algebraico de mayor o igual que.
>
> **Nota:** Para convertir el valor de la superficie de la señal a centímetros cuadrados, multiplíquese el cociente por 10000, o aplíquese directamente la expresión algebraica: $S \geq 5L^2$.
>
> Esta relación sólo se aplica para distancias (L) mayores de 5 metros. Para distancias (L) de 5 metros y menores, la superficie de las señales será como mínimo de 125 cm^2.

Antes de introducir esta norma, se plantean situaciones en las que se propone analizar las relaciones existentes entre el área de algunas señales de protección civil y las distancias a las que son claramente visibles. Para la presentación de la norma, se hace una adaptación considerando el área mínima requerida de la señal, para eliminar el uso del signo de desigualdad. El análisis y la comprensión de las situaciones generales planteadas en las primeras actividades desencadenan una serie de situaciones particulares que conllevan actividad matemática y que, en la búsqueda de su solución, promueven la emergencia de ecuaciones cuadráticas, que progresan desde ecuaciones del tipo $ax^2 = c$ hasta llegar a ecuaciones completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, todas ellas con $a \neq 0$ y $a, b, c \in R$. La actividad matemática se encamina a la elaboración de tablas numéricas para organizar información, análisis geométrico y gráfico, la búsqueda de un modelo algebraico, descripciones en lenguaje natural de relaciones y procedimientos, manejo de ecuaciones equivalentes, entre otras, lo que culmina con el análisis de la ecuación general de segundo grado, sus métodos de resolución, así como el número y tipos de soluciones. De esta manera, a lo largo de la secuencia se articulan representaciones geométricas, gráficas, tabulares, algebraicas y en lenguaje natural.

Los procedimientos incluyen las operaciones aritméticas básicas de suma, resta, multiplicación y división; operaciones inversas; factorización; completar cuadrados, geométrica y algebraicamente; análisis de representaciones tabulares; interpretación de representaciones geométricas y gráficas; análisis de los componentes de una ecuación cuadrática, manipulación de *applets GeoGebra*, entre otros. Asimismo, entre los conceptos que intervienen y/o emergen de las prácticas que deben realizar los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia, se pueden identificar los siguientes: número, operaciones aritméticas, número general, incógnita, variable, expresión algebraica, expresión lineal, expresión cuadrática, binomio, trinomio cuadrado perfecto, coeficiente, término cuadrático, término lineal, término independiente, ecuación, ecuación lineal, ecuación cuadrática, ecuaciones equivalentes, igualdad, factor, factor lineal, solución de la ecuación, entre otros. Estos conceptos tienen ciertas propiedades que juegan un papel importante para su apropiado manejo en el desarrollo de la actividad. También se concede especial importancia a la justificación de los procedimientos, la validación de los resultados y las conclusiones obtenidas en cada actividad.

La propuesta didáctica está dirigida a estudiantes del primer semestre de bachillerato y, en relación con los conocimientos previos convenientes para el desarrollo de la secuencia, se pueden mencionar los siguientes: números reales, operaciones y sus propiedades; manejo básico de la literal como número general, incógnita o variable; resolución de ecuaciones lineales y sus representaciones en lenguaje natural, algebraicas, gráficas y tabulares. Para el manejo del contexto, se requiere también conocimiento sobre figuras geométricas básicas y el cálculo de sus áreas. Con respecto a los niveles de algebrización, es conveniente que los estudiantes sean capaces de realizar actividades correspondientes al nivel 3 en relación con el manejo de ecuaciones lineales. Para el desarrollo de la secuencia, se propondrán actividades en las que los estudiantes tendrán que determinar relaciones existentes entre las dimensiones de algunas señales de protección civil y las distancias en las que pueden ser claramente observadas. De este modo se pretende que los estudiantes puedan manifestar habilidades y conocimientos de nivel 1, y transitar hacia niveles superiores, hasta poner en juego habilidades y conocimientos de nivel 3, asociados al manejo de ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Para el desarrollo de las actividades se cuenta con material impreso y en línea, en formato de hojas de trabajo, y un conjunto de *applets* o archivos *GeoGebra*, que apoyan la actividad matemática en momentos clave, ya sea para la simulación de una situación, para la modelación de la misma con distintos tipos de representación, o para el análisis y la profundización matemática. No es necesario contar con experiencia en el uso de este *software*, pues los archivos o *applets* a utilizar sólo requieren manipulaciones o construcciones básicas. En cuanto al manejo del tiempo, se considera que la secuencia podría llevarse a cabo en cuatro o cinco sesiones de cincuenta minutos, y algunas actividades podrían realizarse como tareas extra clase.

Otro asunto importante a considerar en el desarrollo de la propuesta fue la motivación de los estudiantes. Se pretende despertar el interés de los estudiantes al presentar situaciones en un contexto de la vida cotidiana donde las matemáticas aparecen como una herramienta útil para la modelación y resolución de problemas, contando además con el apoyo de una herramienta tecnológica-didáctica que privilegia la actividad del estudiante, y que se constituirá en un medio para explorar, analizar, formular conjeturas y ponerlas a prueba.

Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

La propuesta de enseñanza se presenta como una secuencia didáctica cuya estructura incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde con el planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con las directrices curriculares del modelo educativo vigente en México. Además, el contexto utilizado en las actividades didácticas está directamente vinculado a nuestro entorno social.

5. Descripción de las actividades

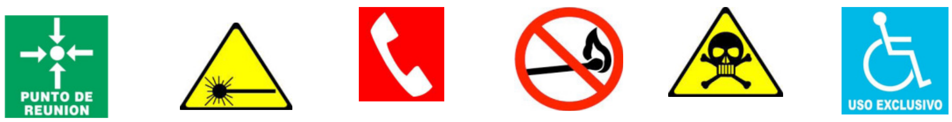
En esta sección se presenta una breve descripción de las actividades, los propósitos, los archivos y *applets GeoGebra*, así como los niveles de algebrización que se requieren o se desarrollan a través de ellas.

5.1. Actividades de apertura

El propósito de la primera actividad de apertura es plantear situaciones sencillas encaminadas al conocimiento del contexto, señales y avisos de protección civil, en donde la actividad matemática se limita a poner en juego conocimientos previos como el manejo de números, operaciones y cálculo de áreas, para el establecimiento de relaciones entre las dimensiones de las formas utilizadas para las señales de protección civil y la distancia máxima de observación de la señal. En un primer momento, se solicita a los estudiantes identificar algunas de las señales plasmadas en las hojas de trabajo (ver Figura

1) para, posteriormente, localizar algunas de ellas en su entorno escolar, laboral o social.

1. Enseguida se presentan algunas señales utilizadas en materia de protección civil:



   a. ¿Cuáles de ellas conoces? ¿Dónde las has visto?

   b. Investiga lo que significan el símbolo, la forma y el color.

   c. Comenta con tus compañeros la importancia de este tipo de señales para mejorar la seguridad en algunos sitios e instalaciones.

Figura 1. Actividad de apertura para el conocimiento del contexto

Con respecto a las señales localizadas en su entorno, los estudiantes habrán de tomar las mediciones pertinentes para el cálculo de su área y estimar diferentes distancias para las cuales les resultan legibles, vistas de frente, preferentemente. Posteriormente, el profesor y los estudiantes elaborarán o conseguirán algunas señales para trabajar en el aula, y buscar una relación entre el área de la figura geométrica utilizada en la señal y la distancia máxima de observación. Las actividades de apertura culminan con la presentación de la Norma Oficial Mexicana correspondiente, donde se presentan las especificaciones sobre las dimensiones de las señales según la distancia máxima de observación. Aunque en el documento oficial la relación se representa algebraicamente, para el desarrollo de la actividad didáctica se hará su presentación en lenguaje natural, considerando la distancia máxima de observación medida en metros, y el área de la señal, medida en centímetros cuadrados. El estudiante abordará situaciones sencillas que involucran cálculos directos de áreas de señales según la distancia máxima de observación planteada y organizará la información en una tabla. Así, para el desarrollo de estas actividades, será suficiente poner en juego conocimientos y habilidades propias de un nivel 1 de algebrización.

Después del contacto concreto con algunas señales y sus dimensiones, y de algunos cálculos sencillos, se trabaja con un *applet GeoGebra* para profundizar en la comprensión del contexto (ver Figura 2). El estudiante manipulará la distancia máxima de observación de la señal y tomará lectura del área de la señal requerida por la norma. Con varios datos así tomados, elaborará una tabla en

GeoGebra, así como la gráfica correspondiente, para el análisis de las relaciones existentes.

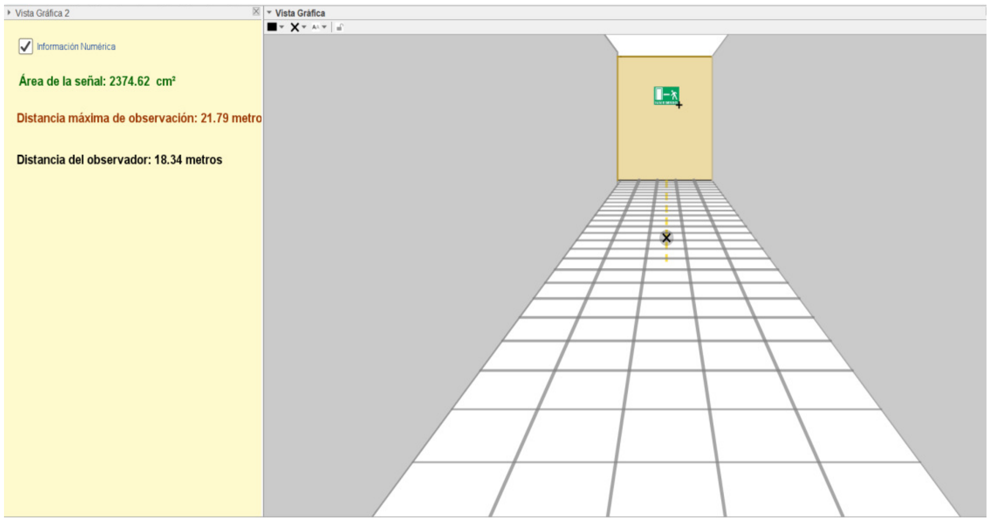


Figura 2. *Applet GeoGebra* que simula la relación entre el área superficial de la señal y la distancia máxima de observación, según la citada Norma Oficial Mexicana

5.2. Actividades de desarrollo

El propósito de la primera actividad de desarrollo es modelar situaciones problema con ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$ $(a \neq 0)$, analizar el proceso de su resolución, así como número y tipo de soluciones, para finalmente dar respuesta al problema planteado (ver ejemplo en Figura 3). La actividad consiste en determinar la distancia máxima de observación para algunas señales de venta en el mercado, con dimensiones preestablecidas por los fabricantes y decidir si son adecuadas para las necesidades de algunos sitios. Se acuerda trabajar con dimensiones mínimas, por lo que el signo $\geq$ en la expresión algebraica presentada por la norma, podrá sustituirse por uno de igualdad. Aunque la situación puede ser abordada de forma numérica, resulta mucho más conveniente el uso del lenguaje algebraico, por lo que se promueve la emergencia de conocimientos y habilidades del nivel 2 de algebrización. En cuanto a los métodos de resolución, se espera que se movilice el uso de operaciones inversas. Se plantea también la comparación de las soluciones de la ecuación y la solución del problema, con las restricciones que impone el contexto.

1. La siguiente señal de protección civil es ofrecida por un proveedor en línea, especificando que la medida del ancho es de 25 cm y de la altura es de 20 cm.

a. Determina la distancia máxima de observación según la norma.

b. ¿Qué consideraciones tendrías que hacer para recomendar su compra a un amigo que es dueño de un local comercial y necesita cumplir con las medidas de seguridad de protección civil y evitar problemas de inspección?

c. ¿Qué área debería tener, mínimamente, la señal para que la distancia máxima de observación, según la norma, fuera de 20 m? Determina también el ancho y la altura, de modo que se conserve la forma de la señal.

Figura 3. Actividad de desarrollo que promueve la emergencia del modelo $ax^2 = c\ (a \neq 0)$

Las actividades de desarrollo continúan con el planteamiento de situaciones que pueden modelarse mediante ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$ y $b \neq 0$), así como con el análisis de los procedimientos de resolución, sus soluciones y la solución del problema original. En esta secuencia, la actividad consiste en determinar las dimensiones de dos señales, una triangular y otra rectangular, con la misma base y la misma área, dado que se establece la altura de la señal rectangular. Aunque sí existen tales figuras, las dimensiones del rectángulo no cumplen en ningún caso con la norma que establece que, "la proporción del rectángulo podrá ser desde un cuadrado y hasta que la base no exceda el doble de la altura" (ver Figura 4). Entre los procedimientos para establecer el modelo algebraico se considera la igualación de las expresiones que corresponden a las áreas de ambas figuras, lográndose así una ecuación con incógnita en ambos miembros de la ecuación y sin términos independientes. Debe tenerse cuidado de no utilizar propiedades de cancelación para el producto pues, al aplicarla incorrectamente, se descartaría la solución $x = 0$. En este caso, se inicia la promoción de conocimientos y habilidades propias del nivel 3 de algebrización.

Figura 4. Señal triangular y rectangular con la misma medida de la base

En la misma dirección, al proponer la construcción de dos señales, una cuadrada y una triangular, en las que se preserve la suma de sus bases y que corresponda a una medida fija dada, se logrará modelar la situación con una ecuación cuadrática completa, es decir, de la forma $(ax^2 + bx + c = 0;\ a, b, c \in \mathbb{R};\ a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$. Entre los procedimientos para establecer el modelo algebraico se considera la igualación de las expresiones que corresponden a las áreas de ambas figuras de las señales, lográndose así una ecuación con términos cuadráticos en ambos miembros de la ecuación. Al igual que en una actividad anterior, se promueve la movilización de conocimientos y habilidades propias del nivel 3 de algebrización.

Figura 5. Señales de forma distinta: misma área, y suma invariante de la medida de sus bases

El uso de *GeoGebra* en las actividades de desarrollo se centra principalmente en la construcción y exploración de modelos algebraicos, geométricos, gráficos y tabulares, para la formulación, contrastación, verificación o refutación de conjeturas (ver Figura 6).

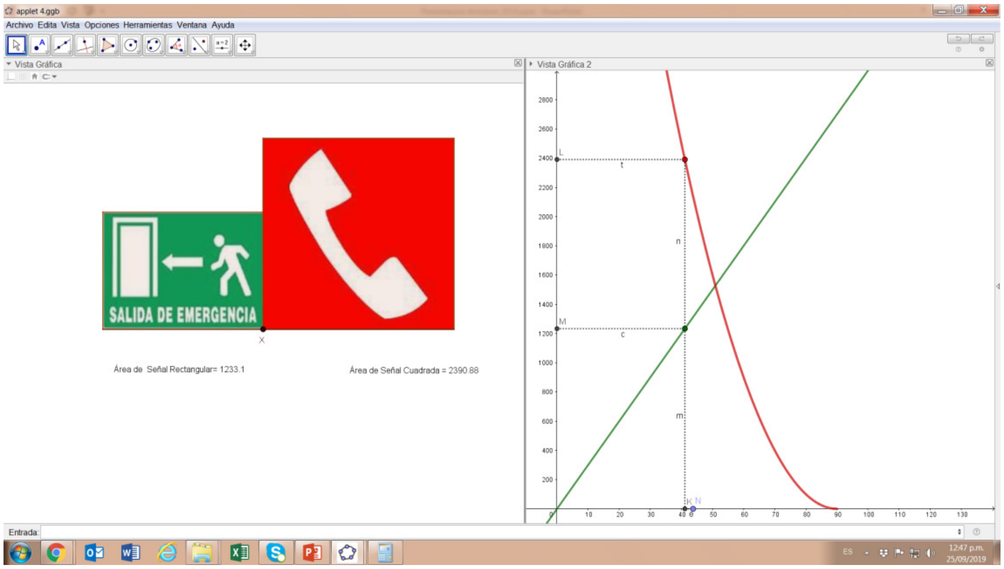


Figura 6. Simulación y modelos gráficos para determinar las dimensiones de dos señales de distinta forma de modo que tengan la misma área

5.3. Actividades de cierre

En las actividades de cierre se discuten las distintas formas que pueden tomar las ecuaciones cuadráticas, dependiendo de los valores de los coeficientes de la misma, partiendo de las formas más simples y avanzando hacia las más complejas. Se analizan el número y tipo de soluciones encontradas para cada una de ellas, así como los diversos procedimientos empleados en la resolución de las mismas: operaciones inversas, factorización, completar cuadrados, completar el trinomio cuadrado perfecto, entre otros. Se parte de casos particulares hasta llegar al caso general y, por ende, al establecimiento de la fórmula general y la discusión de las posibles soluciones.

El uso del *software* se centra en el manejo de familias de ecuaciones, representaciones geométricas, gráficas, algebraicas, numéricas y tabulares.

6. Consideraciones finales

El diseño didáctico aquí presentado, aunque teóricamente fundamentado, aún no ha sido llevado al escenario escolar. Un análisis *a priori* de las actividades permite identificar varios indicadores de idoneidad didáctica en sus diferentes dimensiones. Sin embargo, es necesario que la propuesta pueda implementarse para contar con evidencia empírica que permita refinarla. Por tal motivo, entre las posibles líneas a seguir para dar continuidad a este trabajo se puede mencionar el análisis y la valoración de un proceso de instrucción asociado a la implementación de la propuesta; asimismo, se considera necesario elaborar una guía con recomendaciones para los docentes que resalte los momentos clave de la secuencia, las estrategias didácticas que podrían ponerse en juego de acuerdo a ciertas características específicas del medio físico, sociocultural, incluso emocional, asociado al trabajo en el aula. De igual forma, se pueden discutir las posibles respuestas de los estudiantes, tanto las acertadas como las que no son acordes a lo esperado, señalando también los errores y las dificultades en que se debe poner especial atención.

Referencias

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universitaria.

Díaz-Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Recuperado el 20 de marzo de 2018, de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. En C. L. Oliveira (Ed.) *Acta Scientiae*. *Revista de Ensino de Ciencias e Matemática (10)*2, 7-27. Brasil.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Martínez, M., Arrieche, M. (2010). Configuraciones epistémicas y desarrollo histórico de la ecuación de segundo grado como recurso didáctico. *Dialógica*. 7(1), 83-101.

Posadas, P., Godino, J. (2015). Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. *Didacticae.* Universidad de Barcelona. Disponible en: http://revistes.ub.edu/index.php/didacticae/article/viewFile/18092/20715

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. Disponible en: https://gse.berkeley.edu/sites/default/files/users/alan-h.-schoenfeld/Schoenfeld_2000%20Purposes%20Method%20Research.pdf

Secretaría de Gobernación. (2011). Norma Oficial Mexicana NOM-003-SEGOB-2011. Señales y avisos para protección civil.- Colores, formas y símbolos a utilizar. Publicada el 23 de diciembre de 2011 en el Diario Oficial de la Federación. Última reforma publicada el 15 de julio de 2015.

Stewart, I. (2012). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*. Barcelona: Crítica.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2017). Dirección General del Bachillerato. Dirección de Coordinación Académica. Matemáticas I. Disponible en: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio.php

Trigueros M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9*(46), 75-87.

3 Modélisation mathématique en résolution de problèmes avec *GeoGebra* 3D

Christian Boissinotte[1]

Resumen

Los avances tecnológicos nos llegan regularmente y transforman nuestra visión de enseñar y aprender las matemáticas. En este capítulo, presentamos algunas ideas que parecen responder a esta nueva realidad, incluyendo una situación problema en el contexto de la formación docente en un entorno tecnológico. Utilizamos *GeoGebra* 3D para hacer representaciones virtuales en tres dimensiones con el objetivo de promover representaciones mentales entre los futuros maestros (Duval, 1993) que puedan tener repercusiones en sus procesos de resolución de problemas.

Palabras clave: modelación, geometría dinámica, representación 3D, situación problema, tecnología educativa.

Résumé

Les avancées technologiques nous atteignent régulièrement et transforment notre vision même de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Dans ce chapitre, nous présentons quelques idées qui nous semblent répondre à cette nouvelle réalité, dont une situation problème dans le contexte de la formation des enseignants dans un milieu technologique. Nous utilisons *GeoGebra* 3D pour faire des représentations virtuelles en trois dimensions avec la finalité de promouvoir des représentations mentales chez les futurs enseignants (Duval, 1993) qui pourront avoir des répercussions dans leurs processus de résolution de problèmes.

Mots clés : modélisation, géométrie dynamique, représentation 3D, situation problème, technologie éducative.

Abstract

Technological advances reach us regularly and transform our vision of teaching and learning mathematics. We will present some ideas that seem to respond to this new reality, including a problem situation in the context of teacher training in a technological environment. We will use *GeoGebra* 3D to make virtual representations in three dimensions with the aim of promoting mental representations among future teachers (Duval, 1993) that may have repercussions in their problem-solving processes.

Keywords: modeling, dynamic geometry, 3D representation, problem situation, educational technology.

[1] Université du Québec à Montréal, Canada.

1. Contexte: Technologie, apprentissage et formation des enseignants

Dans les programmes d'études du Québec, une attention particulière est portée depuis de nombreuses années sur le développement des compétences mathématiques par la résolution de problèmes (Gouvernement du Québec, 1988) et des situations problèmes (MEQ, 2001) basées sur des phénomènes réels ou mathématiques (Aldon, Hitt, Bazzini et Gellert, 2017; Squalli, 2000).

Or, l'avènement de ressources technologiques (calculatrices programmables et à capacité graphique, micro-ordinateurs, tableaux numériques interactifs, tablettes, téléphones intelligents) en périphérie de l'institution scolaire est venue, en diverses vagues successives, questionner les méthodes traditionnelles d'enseignement ainsi que le contenu des programmes d'études en mathématique de tous les niveaux. Un exemple frappant est l'introduction de l'étude de la variation des paramètres dans la partie du curriculum qui touche les fonctions au secondaire en raison de la disponibilité de calculatrices à affichage graphique. En 1996, le ministère de l'Éducation disait ceci:

Tous les pays industrialisés sont passés de l'ère industrielle à celle de l'information. Ce changement a transformé la matière qui devra être transmise à l'élève, ainsi que les concepts et les méthodes que l'élève devra maîtriser pour devenir un citoyen ou une citoyenne du XXIe siècle. (...) Ce changement social et économique peut être attribué, du moins en partie, à l'apparition des calculatrices, des ordinateurs personnels et des autres outils technologiques abordables (MEQ, 1996, p. 11).

En 1996, les programmes de mathématique introduisent spécifiquement un grand principe directeur: « Favoriser l'utilisation de la technologie appropriée dans l'exécution d'une tâche » (MEQ, 1996, p. 6). Antérieurement, soit depuis les années '80, des cours spécifiques avaient été mis sur pied pour introduire la technologie, sans moyens directs d'intégrer cette technologie à l'apprentissage des autres matières (MEQ, 1982).

En formation des maîtres, on avait bien sûr la préoccupation d'instrumenter les futurs enseignants, mais l'introduction massive des TBI (Tableaux Blancs Interactifs) dans les écoles à partir de 2007 est venue créer une urgence et une responsabilité dans le milieu universitaire pour mettre à jour cette formation par une prise en compte explicite des outils technologiques que les enseignants devront non seulement s'approprier, mais aussi exploiter de façon optimale dans leur enseignement.

Une préoccupation qui a émergé dès les débuts de l'accessibilité d'outils technologiques numériques dans le milieu de l'enseignement et de l'apprentissage, et encore présente de nos jours, est la pertinence des choix didactiques (Gomel, 1992) et par conséquent leur potentiel pour le développement de la pensée mathématique chez les élèves. On note cependant que certains usages de la technologie n'ont pas été à la hauteur et n'ont pas apporté la plus-value espérée (Karsenti, T., Peraya, D. et Viens, 2002).

Dans le cours « MAT2812: Applications pédagogiques de l'informatique en enseignement et apprentissage des mathématiques », cours destiné aux futurs enseignants de mathématiques au secondaire à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), on vise à développer un esprit critique chez les futurs enseignants en regard de l'exploitation des outils technologiques. On se questionne continuellement sur la pertinence d'utiliser la technologie dans une situation donnée, de même que sur la nature des choix technologiques offrant un potentiel pour les apprentissages souhaités, si c'est le cas. On porte un regard comparatif sur la réalisation de tâches similaires en contexte technologique et avec l'approche traditionnelle papier et crayon.

L'instrumentation des futurs enseignants, amorcée au cours précédent « MAT1812: Progiciels en enseignement et apprentissage des mathématiques » (Hitt, 2018) concerne les surfaces numériques interactives, les applications pour téléphones intelligents et les tablettes, les logiciels d'applications intégrées comme *Microsoft Office* ou ses équivalents, des logiciels spécialisés comme *GeoGebra* (Boileau et Garançon, 2009), *Desmos*, *Wolfram Alpha, Tracker* et autres appliquettes (« applets » en anglais) disponibles dans Internet. On voit aussi poindre à l'horizon des applications de la réalité augmentée et de la réalité virtuelle avec une lunette didactique.

Se sont ajoutés récemment à toutes ces ressources des outils dont nous rêvions tous il y a quelques années, soit le volet 3D de la géométrie dynamique (Boileau, Garançon, Kieran, Lapalme et Côté, 1998, p. 46), de même que le calcul symbolique sur les expressions algébriques.

2. Les choix curriculaires traditionnels ébranlés par le changement

Avec les apports incessants des avancées technologiques, il devient de plus en plus difficile de justifier un choix comme celui de laisser ces technologies hors de la classe. Un tel contexte de formation détonne avec le quotidien des élèves et celui des enseignants et porte un coup sérieux à la motivation scolaire des élèves en les coupant d'une partie de leur réalité.

Mais en même temps, si nous prenons le risque de changer nos pratiques, nous avons la très difficile tâche de maintenir des conditions favorables aux apprentissages attendus par les programmes d'études qui, dans l'ensemble, ne font que peu de place aux outils technologiques actuels, car ceux-ci n'y ont pas encore vraiment trouvé leur niche.

Il a été démontré de façon transparente que les apprentissages attendus lors de la réalisation des tâches deviennent souvent court-circuités par l'usage de la technologie, précisément en raison de son caractère performant. Prenons l'exemple classique de la racine carrée. Sauf à des fins didactiques, il est devenu impensable de réaliser un tel calcul avec l'algorithme papier et crayon traditionnel. Cet objectif d'apprentissage s'est vu imposer une retraite forcée avec l'arrivée des calculatrices. Pourquoi, direz-vous, ne continue-t-on pas à l'enseigner? Il s'agit de culture mathématique, ça permet d'éviter d'être dépendant de la machine, etc. Mais vous voyez bien que la raison s'impose. Le but de l'extraction d'une racine carrée n'est pas l'extraction de cette racine carrée elle-même, mais l'utilisation du résultat pour une tâche ayant une signification souvent extra-mathématique. On ne parle pas ici, évidemment de la transformation des racines, comme le passage de $\sqrt{12}$ à $2\sqrt{3}$, qui constitue un autre contexte, intra-mathématique celui-là.

Mais alors, quelles sont les visées d'apprentissage mathématique qui peuvent s'harmoniser avec la technologie, sans que la technologie ne vienne les dicter? Regardons un non-exemple. Il est certain qu'on ne peut pas demander du travail technique en algèbre en contexte d'utilisation du logiciel de calcul symbolique. En fait, oui, on peut le faire, si on n'a aucun objectif d'apprentissage rattaché à une activité autre que l'appropriation de l'outil lui-même pour en faire éventuellement un instrument au service d'autres tâches, tâches reliées à de nouvelles cibles d'apprentissage. Mais il n'y a ici aucun apprentissage mathématique significatif.

L'impact des technologies sur les aspects curriculaires n'a pas fini de se manifester. Soit on interdit la ressource pour travailler les objectifs en mode papier et crayon ou on la permet et on demande une tâche plus complexe et avec des cibles d'apprentissage redéfinies. Est-ce donc que la technologie dicte en effet les apprentissages réalisables avec elle? Disons plutôt qu'elle offre un potentiel nouveau qu'il est nécessaire d'étudier et de comprendre. Quand on identifie les types d'exploitation possibles des outils technologiques, on peut alors y faire appel pour répondre à des besoins en apprentissage mathématique. L'informatique, tout comme n'importe quelle ressource, doit être instrumentalisée au service des apprentissages visés.

Dès lors se pose le problème des savoirs procéduraux à privilégier chez l'élève dans les situations qui précèdent son accès aux ressources numériques. On a parlé de l'extraction de la racine carrée, mais il y a aussi le calcul explicite avec les nombres à virgule, avec les fractions, la factorisation, la résolution d'équations et de systèmes d'équations, la simplification d'expressions rationnelles et contenant des radicaux, etc.

L'ordinateur peut faire tout ça et plus encore! Est-il réaliste de penser que l'on puisse acquérir une compréhension des rouages internes des processus après avoir demandé à la machine d'en effectuer un très grand nombre d'instanciations pour nous? Ou alors, cette connaissance des rouages ne serait-elle utile qu'à une catégorie d'étudiants? Actuellement, pratiquement tout le monde peut utiliser un ordinateur, mais quel pourcentage de ces utilisateurs peut en programmer un, ou encore avoir une connaissance technique élaborée de son fonctionnement? On comprend que la société va avoir besoin de différents types de compétences mathématiques et algorithmiques, et certains des champs de compétence, de par leur ampleur, ne pourront appartenir à des individus seuls, mais à des communautés.

Ces questionnements ne sont pas encore résolus et il n'existe pas, du moins à notre connaissance, de curriculum exploitant optimalement les ressources technologiques actuelles. Il ne faudra certes pas reproduire les erreurs qui ont été faites avec le rôle dévolu à la calculatrice. Certains élèves ont réalisé, au deuxième cycle du secondaire, qu'ils avaient beaucoup trop délégué à la calculatrice. Leur sevrage allait nécessiter de se réapproprier leur cerveau, conditionné avec une pensée arithmétique et avec la logique de la réponse unique au bout des doigts. Il en est de même pour leur capacité de calcul mental élémentaire et d'activité cérébrale plus complexe.

3. Modélisation de situations, modélisation mathématique et représentations

La modélisation de situations est de nature générale, et vise à mettre en relation sous une nouvelle forme (modèle), les éléments significatifs d'une situation tout en faisant abstraction de tous les autres.

> ... une théorie ou un modèle d'un système donné est une machine dont la mise en fonctionnement permet de produire des connaissances relatives au système modélisé (ou théorisé) (Chevallard, 1992, p. 77).

Tester la robustesse du modèle consiste à faire agir les éléments représentés à l'intérieur de leur domaine de variation. Dès qu'un écart se manifeste dans le comportement du modèle par rapport à la situation qu'il est censé représenter, il est de mise d'étudier cet écart pour tenter de modifier le modèle et d'en améliorer la représentativité. D'un autre côté, un modèle peut sembler valable tout en mettant en œuvre une loi autre que celle que suit la situation réelle, et cette divergence pourrait n'être visible que si l'on tente d'étendre les limites du modèle ou de son application. C'est le cas par exemple d'une approximation linéaire locale d'un phénomène qui suit une loi exponentielle ou autre.

La modélisation mathématique est une façon de réaliser une représentation dynamique d'une situation, en utilisant des éléments du langage mathématique comme les équations (principalement), les graphiques, les tableaux, les schémas, les dessins ou figures, sans oublier le langage courant qui peut être nécessaire pour préciser certains détails. Vous aurez probablement identifié dans cette liste différents outils de représentation reconnus pour favoriser un accès mental aux objets mathématiques qui, rappelons-le, ne sont pas accessibles aux sens humains (Duval, 1993). Ces objets mathématiques, dont des facettes deviennent accessibles par une consignation de certains de leurs attributs dans les limites de registres de représentation sémiotiques, peuvent de ce fait acquérir une existence dans la pensée par la coordination de ces représentations partielles en une construction cognitive.

Cette construction cognitive à partir de représentations des éléments mathématiques de la situation donne par le fait même des accès particularisés aux caractéristiques essentielles mesurables identifiées dans la situation à modéliser et à leurs interactions.

Ce fait aura des conséquences quand ces représentations seront en plus médiatisées par nos outils informatiques, donnant lieu à ce que Balacheff (1993, p. 364) a nommé « transposition informatique ». Certains des paramètres de cette transposition ne sont pas sous le contrôle de l'utilisateur, comme les choix qui ont été faits relativement aux algorithmes internes qui auront à gérer des situations limites et peuvent produire des affichages incompatibles avec ce qu'ils sont supposés représenter. On peut trouver un exemple illustrant bien cette situation chez Boileau et Garançon (2009, p. 125). Voici un autre exemple similaire. On fait tracer le graphe de la fonction $f(x) = \sin(20x)$ dans un programme calculant un point à tous les 2/3 d'unité en abscisse (voir Figure 1). Si ces points sont reliés, on aperçoit une courbe (en rouge) très différente de celle attendue (en vert)! Comme elle représente aussi une fonction sinus, il est facile de passer à côté de l'erreur.

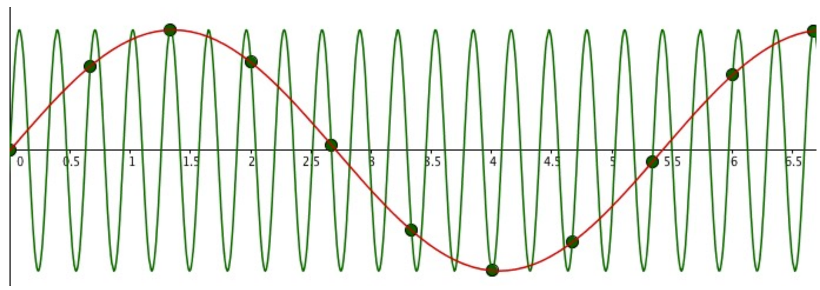


Figure 1. Tracé d'une courbe sans connaître les caractéristiques de l'outil technologique

Une fois qu'on est avisé et conscient des limites, caractéristiques et potentialités des artefacts informatiques auxquels on a accès, leur rôle de médiation s'installe au fil des expérimentations et la genèse instrumentale s'opère. Quand l'instrumentation a atteint un niveau fonctionnel, l'élève ou l'étudiant, le professeur ou le formateur, mettra à profit ses nouveaux schèmes d'action sur les artefacts pour ajouter l'informatique à ses armes de résolution de problèmes en les instrumentalisant pour adapter leur usage à des situations, variées, nouvelles et pourquoi pas intéressantes?

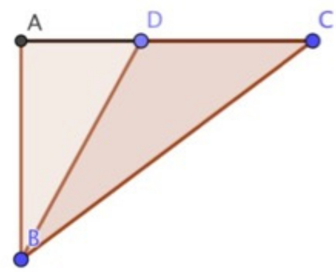
Dans la section suivante, nous verrons d'abord une situation qui peut se représenter géométriquement, algébriquement, ou avec un modèle élémentaire, et qui demande de connaître la relation de Pythagore ou sinon de savoir comment le logiciel peut nous donner la mesure directement. Le but est de trouver comment minimiser le plus possible le coût d'un projet. Nous allons ensuite complexifier le problème pour le rendre plus difficile d'accès si on ne crée pas une représentation ostensive ou virtuelle de l'organisation des relations entre ses éléments constituants. Bref, nous allons tenter de créer un besoin, un attrait, une utilité de l'outil de modélisation mathématique qu'est *GeoGebra*, et particulièrement la possibilité d'agir sur le modèle pour en tirer des informations sur la situation extra-mathématique.

4. Discussion autour d’une situation problème modélisable à l'aide de la technologie

Voici un exemple de situation problème où l'on pense que la technologie peut jouer un rôle pertinent (voir Figure 2).

SITUATION D'ORIGINE

On veut relier un câble téléphonique à un relais situé sous terre. Cependant, le relier en ligne droite supposerait de le positionner entièrement sous terre. Or, le coût pour un câble enfoui est supérieur à une même longueur de câble installée en surface. On pourrait aussi amener le câble à la verticale de la cible et creuser vers le bas. Mais ce n'est pas non plus la solution la plus économique car la longueur de câble y est maximale, ce qui vient faire perdre l'avantage de l'économie en surface. Le problème est donc de trouver la configuration la plus économique, en fonction de la longueur du trajet en surface, et des coûts respectivement en surface et sous terre de l'acheminement du câble.



Le câble se rend à D (en surface) à partir de C et joint ensuite B directement.

Figure 2. Situation problème du câble téléphonique (adaptée du cours MAT2812)

La première chose qui nous vient à l'esprit, c'est qu'il y aura un triangle rectangle dont il faudra calculer l'hypoténuse BD, mais dont la mesure du côté AD n'est pas connue. On pourra ensuite calculer le coût assez facilement en multipliant les longueurs par leurs coûts respectifs d'installation par mètre. Or c'est précisément le résultat de ce calcul que l'on veut minimiser.

Les problèmes d'optimisation de ce type sont monnaie courante au cégep (niveau collégial, 12^{e} et 13^{e} années au Québec, avant les études universitaires). La méthode habituelle de résolution est d'écrire l'équation de la fonction qui représente le coût, et de trouver le point le plus bas de la courbe représentative en sachant que la pente de la droite qui lui est tangente est nulle. Or la pente de la tangente est la valeur de la dérivée en ce point. On va donc trouver en quelle valeur de la variable indépendante la dérivée de la fonction de coût va s'annuler.

De fait, on ne retient en général que cela, et on fait abstraction du reste, car c'est « la méthode » qui est importante pour les étudiants. Ici, même un étudiant de ce niveau pourrait trouver un intérêt à modéliser la situation. En effet, avec un curseur permettant de vérifier le coût en chaque point dans une figure dynamique de *GeoGebra*, il pourrait explorer le continuum des hypothèses et/ou trouver à l'aide du graphique de la courbe représentative le point qui minimise le coût. Or, cette méthode qui remplace l'usage formel et mécanique de la dérivée qu'on annule, devient par le fait même accessible à un élève d'un niveau inférieur (cela ne constitue pas une situation problème pour l'élève de cégep, mais un simple exercice d'application). De plus, la construction de la figure permet d'avoir accès directement aux mesures dans le logiciel, moyennant une échelle adéquate, sans avoir à utiliser la relation de Pythagore! Mais alors, me direz-vous, que reste-t-il? Il reste l'idée du modèle par lequel on représente une situation dans un logiciel de géométrie dynamique, grâce auquel on peut explorer toutes les possibilités de coûts de façon interactive et trouver la plus économique sans devoir sortir du contexte du modèle.

La résolution de ce problème devient donc possible sans faire appel à la dérivée, et même sans faire appel à l'algèbre et à la relation de Pythagore. Elle demande de pouvoir créer un modèle, de savoir calculer le coût total d'une combinaison linéaire de dépenses, et d'identifier la plus petite valeur d'un ensemble, ce qui est à la portée d'un enfant de la fin du primaire.

UNE COMPLEXIFICATION

Pour rendre le problème un peu plus intéressant et en faire une véritable situation problème pour l'élève du secondaire, on peut ajouter une option supplémentaire qui fait que si l'on suit une route existante, la réalisation du tracé en surface coûtera moins cher car les véhicules et les ressources y auront facilement accès. C'est ici que l'on s'aperçoit que cette variante de la situation fait appel à trois dimensions, et que la modélisation 3D pourrait devenir très utile pour affecter nos ressources mentales à la résolution du problème plutôt qu'à la représentation et la visualisation de celui-ci (voir Figure 3).

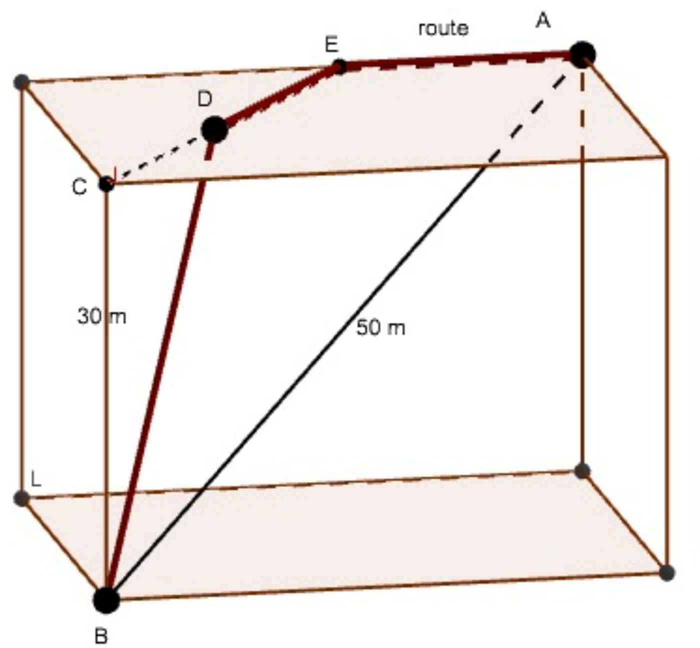


Figure 3. Modélisation du problème du câble en 3 dimensions

Travailler en trois dimensions est satisfaisant dans cet exemple, car on peut tirer du plaisir à manipuler les sommets du trajet polygonal et voir les résultats changer en temps réel (mesures, coût). De plus, l'exploration de l'ensemble des trajets possibles permet de se donner une perception globale des états du système. Dans la prochaine section, nous parlerons de divers moyens de passer de la deuxième à une troisième dimension.

5. Sortir du pays plat

Que vous ayez lu le légendaire et intrigant *Flatland* (Abbott, 1884) ou que vous en ayez pris connaissance par le biais de l'excellent film « Dimensions »[2], vous serez d'accord que sortir du plan ouvre des perspectives infinies! Il est évidemment utile de travailler la modélisation en trois dimensions pour la

---

[2] Pour plus d'informations, vous pouvez accéder au site web : http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

simple raison que ce que nous voulons modéliser se passe (localement) dans un environnement en trois dimensions.

Mais on peut aussi utiliser la troisième dimension en tant que dimension temporelle adjointe à un espace à deux dimensions. Considérons le phénomène d'une *roue qui tourne*. On peut le filmer et l'analyser avec le logiciel *Tracker*[3]. On peut certainement modéliser le déplacement d'un point de la circonférence selon sa position horizontale en fonction du temps, de même que sa position verticale en fonction du temps. Dans les deux cas, nous aurons une belle représentation sinusoïdale qui modélise l'un des aspects du mouvement. Mais si on prévoit exprimer la position horizontale en fonction de la position verticale (ou le contraire), on a un problème car pour une même ordonnée du point suivi, il y a deux possibilités d'abscisse (sauf aux points limites) et on finira par représenter cette relation sous la forme d'un cercle. Mais comment établir le lien entre ce cercle et les deux courbes sinusoïdales?

Si on écrit $x = cos(t)$ et $y = \sin(t)$ on peut suivre le déplacement du point trigonométrique et en arriver à « comprendre » ce qui se passe. On peut aussi éliminer le paramètre t algébriquement. Mais si on ajoute plutôt l'axe temporel comme troisième dimension et que l'on modélise ceci dans *GeoGebra* 3D, non seulement on pourra comprendre le lien entre les variables, mais on pourra littéralement le voir. Une rotation des axes dans l'espace nous permettra de voir chacune des trois relations précitées à partir d'une même ligne courbée dans l'espace, soit une spirale d'enveloppe cylindrique.

Par convention, l'ordre x, y et z des axes suit l'ordre familier RVB, soit rouge, vert et bleu. L'axe bleu est pris ici comme axe temporel. Dans la partie gauche de la Figure 4, on voit la position horizontale d'un point d'un mouvement circulaire en fonction du temps (roue qui tourne, voir page précédente). Il y a ici une subtilité: la dimension « y » disparaît par superposition de tous les plans y = *constante* en un seul, soit celui où y = 0 (tournez la tête vers la gauche et vous verrez le tracé habituel d'une fonction cosinus). À droite, il s'agit de la position verticale y (axe vert) en fonction du temps. On voit le tracé familier du sinus. Pour voir le cercle formé par la rotation du point autour de l'axe du « cylindre », il faut se placer l'œil le long de l'axe du cylindre (voir Figure 4).

[3] Pour plus d'informations, vous pouvez accéder au site web : https://physlets.org/tracker/

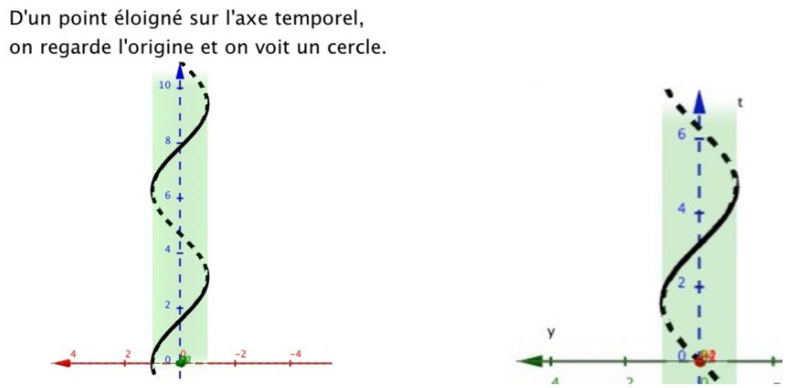


Figure 4. Vision de la dimension temporelle comme une 3e dimension dans la modélisation d'un mouvement circulaire

Il n'y a qu'un pas à faire pour représenter n'importe quelle courbe paramétrique plane (à un paramètre) en prenant nos aises hors du plan et en associant le paramètre en question à la troisième dimension. En supposant que le paramètre évolue avec le temps, il est possible de suivre une chronologie de la construction de la courbe. Nous parlions d'un mouvement en deux dimensions pour lequel on ajoutait la dimension temporelle comme troisième dimension. Dans la prochaine section, nous allons maintenant passer de deux dimensions spatiales à trois dimensions spatiales, sans considérer de dimension temporelle.

6. De nouveaux horizons grâce à la troisième dimension

Nous étudions souvent, avec les futurs enseignants, des relations fonctionnelles à l'intérieur de figures en deux dimensions : on crée ainsi une figure dynamique où le déplacement linéaire d'un point ou d'un curseur entraîne des modifications mesurables dans la figure (distance, aire, périmètre, etc.). Dans l'exemple qui suit, la position du point mobile P sur le segment AB détermine deux carrés respectivement de côtés AP et PB. On peut s'intéresser à plusieurs valeurs dont la variation dépend de la mesure du segment AP, comme ici la somme des aires des carrés.

Dans une autre fenêtre graphique, on répertorie les positions successives du point T dont les coordonnées sont données, en abscisse, par les valeurs de la variable indépendante (mAP) et en ordonnée par celles de la variable dépendante (somme des aires). On peut conséquemment observer les caractéristiques de la courbe qui représente cette relation (minimum, allure, concavité, etc.). Dans la Figure 5 est présentée cet exemple de relation fonctionnelle entre les variables.

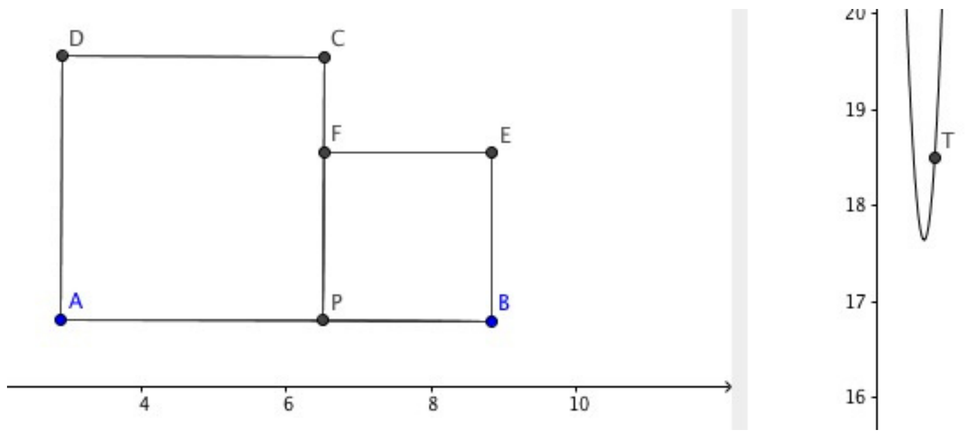


Figure 5. Modélisation de la covariation de la mesure du segment AP et de la somme des aires des carrés

À remarquer qu'il y a une différence conceptuelle entre l'utilisation directe des aires données dans *GeoGebra* par une expression comme poly1+poly2 (mise en relation de cette quantité avec la mesure du segment AP sans présumer du lien qui les unit) et un calcul algébrique directement basé sur la mesure de AP (variable indépendante) et celle du segment AB (paramètre de la situation). Dans le premier cas, on crée vraiment un modèle basé sur l'observation de données qui pourraient provenir d'une situation extra-mathématique alors que dans le deuxième, la relation est déjà exprimée algébriquement et on ne fait que la convertir dans un autre registre de représentation (la figure de gauche devient simplement un accessoire pour parcourir le domaine de la variable indépendante).

On peut aussi demander au logiciel de proposer une courbe d'ajustement en prenant quelques points sur le lieu. Dans le présent cas, il est facile de trouver analytiquement l'équation exacte qui décrit le phénomène mathématique par un raisonnement algébrique sur la figure. Dans ce contexte, il est possible de comparer l'équation théorique avec la courbe d'ajustement proposée par le logiciel. Nous avons de ce fait un moyen supplémentaire de validation. Il s'agit clairement dans ce cas-ci d'une modélisation intra-mathématique, contrairement à l'exemple plus haut de la roue qui tourne (voir Figure 4).

Grâce au volet 3D du logiciel de géométrie dynamique *GeoGebra*, il est maintenant possible d'étendre ce genre d'activité aux phénomènes faisant intervenir trois dimensions, d'obtenir une comparaison du comportement de deux variables qui dépendent d'une même variable indépendante ou de leur évolution comparée en fonction du temps. Une autre variante serait de représenter une courbe dont les 3 coordonnées sont fonction d'un même paramètre. Pour prolonger l'exemple de la Figure 5, on pourrait construire des cubes plutôt que des carrés et s'intéresser à leur volume total, à leur aire latérale en tant qu'ensemble ou à leur aire totale. On pourrait aussi ajouter un paramètre qui modifie leur hauteur pour en faire des prismes rectangulaires et comparer les courbes obtenues pour des valeurs différentes des paramètres.

Mais au-delà de la modélisation de relations fonctionnelles, ce qui pourrait être tout aussi emballant, c'est de revisiter la géométrie synthétique (ou euclidienne) et la géométrie analytique en 3D qui deviendraient alors accessibles au secondaire. Dans le premier cas, on pourrait reconstruire nos connaissances relatives aux droites parallèles dans l'espace (aucun point en commun?), au nombre infini de perpendiculaires à une droite donnée, passant toutes par un même point, aux versions 3D de certains théorèmes; et dans l'autre cas, on pourrait étudier de façon dynamique et visuelle les quadriques[4] avec leurs extrémums, points d'inflexion et point de selle, gradients et dérivées directionnelles, etc. Il y a aussi l'algèbre linéaire avec les opérateurs matriciels, les changements de bases et les transformations de l'espace qui n'attendent qu'à investir nos nouveaux espaces virtuels de modélisation.

Notre appropriation d'une nouvelle dimension ouvre la porte à un tout nouveau contenu d'enseignement qui pourrait remplacer (qu'est-ce qu'on estime pouvoir sacrifier, du moins temporairement?) certains contenus pour conquérir un nouvel espace curriculaire pour les mathématiques des derniers siècles!

7. Bilan et prospectives : situer « Le défi raisonnable »

Qu'il y ait technologie informatique ou pas, un apprentissage en milieu scolaire ne peut pas être laissé au hasard. L'éducation planifiée, soit les apprentissages qui ne sont pas accidentels, est imprégnée de l'intentionnalité (Tardif, 1996) présente dans la formulation des programmes d'études.

---

[4] Une quadrique est le lieu des points qui vérifient une équation polynomiale ayant au moins un terme de degré 2 et comportant trois variables. La sphère en est l'exemple le plus simple.

> La première condition pédagogique, une condition incontournable en vue de susciter des apprentissages signifiants chez les jeunes, touche l'intentionnalité. Il est capital que les démarches d'apprentissage des élèves soient inscrites explicitement dans une intention développementale. L'apprentissage est une activité constructive et cette construction résulte fondamentalement de l'angle privilégié dans le traitement des informations. (...) À partir d'informations semblables, ces trois élèves réalisent des apprentissages fort différents étant donné leur intention initiale. C'est la force, malheureusement pas suffisamment exploitée en classe, de l'intentionnalité en apprentissage (Tardif, 1996, p. 4-5).
>
> Les nouvelles technologies pourraient faire en sorte que les élèves "surfent" constamment sur les informations sans jamais les transformer en connaissances personnelles (p. 3).

Les thèmes majeurs en ce début de millénaire sont la capacité d'adaptation, la compétence à résoudre des problèmes non routiniers et la communication du savoir. Il faudra tenir compte de tout ça dans la revitalisation du curriculum scolaire, particulièrement en mathématique (Corbo, 1994).

Plus que jamais, les didacticiens des mathématiques doivent accepter une hypothèse de restructuration complète des modes de transmission des savoirs curriculaires en raison du nouveau milieu fortement imprégné de la technologie qui continue de s'imposer au cœur de l'institution d'enseignement. Au-delà des connaissances et des savoirs procéduraux, il semble que les contextes de situations problèmes et de modélisation mathématique soient là pour rester. La construction sociale de la connaissance prend aussi de l'ampleur par la facilité de conservation et de partage des traces numériques et par les réseaux sociaux.

Des experts en motivation scolaire[5] nous ont aussi appris, il y a déjà longtemps, qu'une tâche trop facile est aussi démotivante qu'une tâche trop difficile. On a en effet peu d'intérêt à s'engager dans une tâche totalement maîtrisée et qui ne nous apporte rien de nouveau pour nous stimuler intellectuellement car on aura l'impression de perdre notre temps à quelque chose d'inutile. Réciproquement, on hésite à s'engager dans une tâche qui nous apparaît hors d'atteinte car il s'agirait d'un échec assuré et prévisible qui ne ferait que confirmer notre incompétence et porter atteinte à l'estime de soi. Il faut donc s'assurer que la technologie ne vienne pas enlever l'intérêt d'une tâche

---

[5] Pour plus d'informations, vous pouvez visiter le site web : http://rire.ctreq.qc.ca/2017/10/motivation-secondaire-dt/

soit en la rendant trop facile d'un point de vue mathématique, soit trop difficile du point de vue de l'instrumentation.

En contexte technologique, la réalisation d'une tâche peut souvent être remplacée par une procédure pour laquelle la difficulté ne réside plus dans l'essence mathématique de la question mais dans la genèse instrumentale (Rabardel, 1995) des outils technologiques qui permettent justement d'arriver à un résultat en contournant le défi intellectuel que l'enseignant pensait proposer. Un exemple de ce phénomène est la possibilité de trouver l'aire d'une partie d'une figure en effectuant une construction géométrique complexe plutôt qu'un calcul basé sur les formules d'aire des polygones. On voit ici que l'intention de l'enseignant est déjouée par les moyens technologiques qu'il met à la disposition de l'élève. Bien qu'ayant un intérêt non négligeable, les habiletés de construction de l'élève ne font pas partie de l'intention éducative de l'enseignant, qui risque d'assister à l'échec de l'élève dans cette tâche en raison d'habiletés externes à l'objectif visé.

Le défi raisonnable se situe donc dans le lieu d'un équilibre délicat entre la tâche attendue par l'enseignant et les ressources mises à la disposition de l'élève dans son espace de travail. Nos efforts curriculaires devront tenir compte de cet équilibre pour que l'école joue son rôle de développement du citoyen dans toutes ses dimensions dans le contexte de la technologie sans cesse en évolution.

Références

Abbott, E. (1884). *Flatland*. Seeley & Co. Londres.

Aldon, G., Hitt, F., Bazzini, L. et Gellert, U. (2017). *Mathematics and technology*. Repéré à https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-319-51380-5.pdf

Balacheff, N. (1993). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: hommage a Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, 364-370. Repéré à http://telearn.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/06/46/PDF/Balacheff1994Transpo.pdf

Boileau, A. et Garançon, M. (2009). *Outils informatiques pour les enseignants de mathématiques*. Loze-Dion.

Boileau, A., Garançon, M., Kieran, C., Lapalme, J.-B. et Côté, B. (1998). Les coniques vues à travers l'informatique: cinq perspectives. Dans *Actes du colloque du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec. Informatique et enseignement des mathématiques: le point de vue de la didactique*. (pp. 45-64). Montreal: Université Concordia. Repéré à https://www.gdm.quebec/colloque/actes

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73-112. Disponible en https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Corbo, C. (1994). *Préparer les jeunes au 21e siècle: rapport du Groupe de travail sur les profils de formation au primaire et au secondaire*. Québec, Canada : Ministère de l'Éducation du Québec.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

Gomel, J. (1992). L'intégration de l'informatique à l'enseignement. Dans *Troisième rencontre francophone de didactique de l'informatique* (pp. 193-199). Association EPI (Enseignement Public et Informatique).

Gouvernement du Québec. Groupe de travail sur les profils de formation au primaire et au secondaire, et Corbo, C. (1994). *Préparer les jeunes au 21e siècle: rapport du Groupe de travail sur les profils de formation au primaire et au secondaire*. Québec, Canada : Ministère de l'Éducation.

Gouvernement du Québec. (1988). *Fascicule K. Guide pédagogique, primaire, mathématiques. Résolution de problèmes. Orientation générale*.

Hitt, F. (2018). Notes du cours MAT1812-*Progiciels en enseignement des mathématiques* dans le programme de formation des futurs enseignants au secondaire (BES) en mathématiques. Situées sur la plateforme Moodle. Québec, Canada : Université du Québec à Montréal (UQAM).

Hitt, F. (2019). Notes de cours MAT2812 *Applications pédagogiques de l'informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* dans le programme de formation des futurs enseignants au secondaire (BES) en mathématiques. Situées sur la plateforme Moodle. Université du Québec à Montréal (UQAM). Québec, Canada.

Karsenti, T., Collin, S. et Dumouchel, G. (2012). L'envers du tableau: ce que disent les recherches de l'impact des TBI sur la réussite scolaire. *Vivre le primaire*, *25*(2), 30-32.

Karsenti, T., Peraya, D. et Viens, J. (2002). Conclusion: bilan et prospectives de la recherche sur la formation des maîtres à l'intégration pédagogique des TIC. *Revue des sciences de l'éducation*, *28*(2), 459-470.

MEQ. Gouvernement du Québec (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire et enseignement primaire*. Québec, Canada : Ministère de l'Éducation du Québec.

MEQ. Gouvernement du Québec (1996). *Programme d'études. Mathématiques 436*. Québec, Canada : Ministère de l'Éducation du Québec.

MEQ. Gouvernement du Québec (1982). *Programme d'études. Introduction à la science de l'informatique*. Québec, Canada : Ministère de l'Éducation du Québec.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462.

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat*. Québec: Université Laval.

Tardif, J. (1996). Une condition incontournable aux promesses des NTIC en apprentissage : une pédagogie rigoureuse. Dans *Conférence d'ouverture du 14e colloque de l'AQUOPS.* (pp. 1-13).

4 Modelando objetos físicos con *GeoGebra*

José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix[1]

Resumen

Se reportan resultados de una secuencia didáctica aplicada a un grupo de 30 estudiantes universitarios de Ciencias e Ingeniería, en un curso de Geometría Analítica. Ésta culmina en un problema abierto de modelación de un objeto físico mediante la parametrización de superficies, usando *GeoGebra*. La actividad final integra diversos conceptos (vectores, cónicas, funciones y ajuste polinomial), no todos discutidos en el curso, y tiene como base teórica la transformación de representaciones semióticas y las operaciones figurales para la solución de problemas geométricos. La aplicación se llevó a cabo en un centro de cómputo y tuvo una duración de diez horas.

Palabras clave: geometría analítica, parametrización, transformación de representaciones, operaciones figurales.

Résumé

Nous rapportons les résultats d'une séquence didactique appliquée à un groupe de 30 étudiants universitaires en sciences et en génie dans un cours de géométrie analytique. La séquence se termine par un problème ouvert de modélisation d'un objet physique en paramétrant des surfaces, à l'aide de GeoGebra. L'activité finale intègre divers concepts (vecteurs, coniques, fonctions et ajustement polynomial) non tous discutés dans le cours, et a comme base théorique la transformation des représentations sémiotiques et les opérations figuratives pour la résolution de problèmes géométriques. L'application a été réalisée dans un centre informatique et a duré dix heures.

Mots clés : géométrie analytique, paramétrisation, transformation de représentations, opérations figuratives.

Abstract

We report results of a didactic sequence applied to a group of 30 university students of Science and Engineering in an Analytical Geometry course. The sequence ends in an open problem of modeling a physical object by parameterizing surfaces, using GeoGebra. The final activity integrates various concepts (vectors, conics, functions and polynomial adjustment) not all discussed in the course, and has as a theoretical basis the transformation of semiotic representations and the figural operations for the solution of

[1] Universidad de Sonora, México.

geometric problems. The application was carried out in a computer center and lasted ten hours.

Keywords: analytic geometry, parametrization, transformation of representations, figural operations.

1. Introducción

En México los cursos de Geometría Analítica dirigidos a los programas de Ciencias e Ingeniería normalmente contienen dos apartados: una primera parte dedicada a la profundización de los conceptos abordados durante el bachillerato y una segunda parte en la que se abordan los conceptos básicos de la Geometría Analítica del espacio, principalmente curvas y superficies en tres dimensiones. Con frecuencia, la parte dedicada al plano consume gran parte del curso y queda poco tiempo para el estudio de la parte espacial.

En la Universidad de Sonora el curso de Geometría Analítica dirigido a futuros científicos e ingenieros está en proceso de actualización. En su nueva versión se plantea privilegiar el pensamiento geométrico, se reduce el tiempo dedicado al estudio de las cónicas en el plano y los conceptos básicos se discuten en el plano y en el espacio simultáneamente; además, se utiliza el *software GeoGebra* como herramienta de apoyo a lo largo de todo el curso. Lo que presentamos aquí es una secuencia de cuatro actividades, propuesta para este curso de Geometría y aplicada al final del semestre 2018-2; que tiene como propósito la aplicación de manera integrada de algunos conceptos previamente discutidos en el curso y la promoción de las *operaciones figurales*, indispensables para la modelación geométrica.

Lo que reportamos en este capítulo forma parte de una investigación que está en curso y, a pesar de que la secuencia ha sido aplicada en su totalidad, hemos centrado el análisis de resultados en la cuarta actividad de la secuencia, en la que se modelan objetos físicos con *GeoGebra* usando la parametrización de superficies, y que hemos observado de manera más sistemática durante el desarrollo del curso.

2. Referencias teóricas

Partimos de los resultados de Duval (2017) sobre el papel de la transformación de representaciones semióticas en la actividad matemática. En este contexto, se resaltan las características funcionales de las representaciones semióticas: la necesidad de su manipulación y análisis para el desarrollo de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas.

Si se tiene como objetivo el desarrollo de conocimiento sobre los objetos geométricos en el plano y en el espacio, no sería suficiente memorizar las asociaciones entre representaciones gráficas y algebraicas del mismo objeto, más bien es necesario el análisis de los invariantes entre las representaciones en tareas que implican la conversión entre registros de representación. Según Duval (2017), para el desarrollo del conocimiento matemático:

> Primeramente, debemos reconocer las unidades de significado, esto es, los datos o información matemáticamente relevante en el contenido de una representación dada. Segundo, debemos iniciar la transformación de estas unidades de significado ya sea convirtiéndolas hacia otro registro o al realizar operaciones de tratamientos específicos del registro seleccionado. Estas son las dos condiciones cognitivas necesarias para entender y para hacer cualquier cosa en matemáticas (p. 73).

Para el aprendizaje de la Geometría, esto implica una distinción entre distintas maneras de visualizar las figuras geométricas, antes de relacionar el significado de estas representaciones con las representaciones algebraicas. Duval (2017) señala tres distintas características al visualizar figuras geométricas: 1) reconocer *la forma* de la figura, 2) reconocer *el objeto* representado, y 3) a diferencia de otro tipo de figuras, reconocer cómo esta figura es o puede ser *construida*. Al hacer esta distinción, se resalta que “la tercera característica requiere una manera de ver las figuras, que es cognitivamente incompatible con las primeras dos” (p. 57).

El énfasis en el análisis de las variaciones cognitivas implica a su vez la necesidad de aclarar las posibles operaciones sobre los objetos matemáticos en los diferentes registros, para poder aplicarlas, así como comparar y analizar sus efectos en los objetos representados. De tal modo, se vuelve importante interpretar la visualización de figuras geométricas como una operación cognitiva que implica el reconocimiento de los objetos geométricos y sus propiedades en las representaciones asociadas. En este sentido, Duval (2017) propone explicitar las operaciones figurales de visualización que la transformación de formas geométricas permite realizar. Estas operaciones se vuelven fundamentales en la Geometría, ya que “no pueden ser realizadas con otro tipo de figuras, tienen una función heurística en la solución de problemas y dan evidencia de las invarianzas que van en contra de cualquier comparación perceptiva” (p. 47).

Inicialmente podemos considerar las operaciones que permiten la percepción y transformación de unidades figurales (en la recta, el plano o el espacio) en otras de la misma dimensión, más detalladamente, Duval describe esta operación como:

> La división mereológica de una configuración global en *unidades figurales de la misma dimensión* (2D → 2D) y su reconfiguración en otra cuyo contorno general es el mismo o no. Esta operación constituye una de las principales transformaciones heurísticas de las figuras geométricas. Fue utilizada como una prueba convincente de las propiedades matemáticas (2017, p. 61).

Además, y quizás con mayor impacto en el trabajo matemático de los estudiantes, es necesario considerar las operaciones asociadas a la deconstrucción dimensional, ya que “ninguna manipulación de objetos puede simularlas” (Duval, 2017, p. 61).

> La *DECONSTRUCCIÓN DIMENSIONAL de las formas* (**nD** → (**n-1**) **D**) *permite analizar la transformación de una forma dada en otra forma de la misma dimensión, incluso si parece completamente diferente*. La enunciación de las propiedades que justifican esta transformación *considera las unidades figurales del nivel inferior inmediato*: planos secantes para figuras 3D, redes de líneas rectas para las figuras planas, o incluso pares de puntos (un punto y su imagen) para segmentos, curvas, etc. (p. 61).

Bajo esta interpretación, la tarea principal en la enseñanza de la Geometría no sería *construir figuras* sino *deconstruirlas* para reconocer los objetos geométricos y sus propiedades. Esta habilidad es fácilmente ignorada ya que aquellos que saben Geometría la realizan automáticamente, como un reflejo, mientras que no es para nada natural con los estudiantes. Duval concluye que “al no tener consciencia de estas dos operaciones, estudiantes y adultos educados sólo pueden permanecer ciegos ante las representaciones geométricas y esperar que siempre alguien les diga qué hacer” (2017, p. 61). En particular, para el aprendizaje de la Geometría en el espacio, la solución de un problema requiere de la operación de *deconstrucción dimensional*, “es decir, ver la forma en 2D obtenida por la intersección de un sólido con cualquier plano en el espacio, y no alguna habilidad espacial para ‘ver en el espacio’” (p. 65).

Siendo tan importante la operación de deconstrucción dimensional y al mismo tiempo tan difícil de imaginar para individuos que no la han dominado, se vuelve necesaria alguna manera de experimentar los efectos de la operación antes de ser capaces de realizarla mentalmente. Tomando en cuenta lo anterior, las representaciones dinámicas y ejecutables disponibles en ambientes digitales como *GeoGebra* pueden ser implementadas para realizar ambas operaciones figurales; la representación de sólidos tridimensionales permite la manipulación de la perspectiva para identificar las *caras* de los sólidos como proyecciones en planos (primeras dos características de la visualización) y posteriormente hacer y evaluar propuestas de cómo podrían construirse estas proyecciones (tercera característica). La creación y manipulación de representaciones gráficas, por medio de representaciones *ejecutables*, se vuelve entonces un intermediario para la tarea fundamental de la visualización geométrica, ya que como explican Lupiáñez y Moreno (2001), estos ambientes:

> …suministran un amplio abanico de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros. Y lo que es más importante, permiten pasar de unos a otros registros, es decir, permiten la conversión de registros, lo cual supone una inapreciable herramienta de trabajo en educación matemática. En el medio de expresión que suministran las calculadoras [graficadoras], pueden obtenerse propiedades y relaciones matemáticas de esos objetos, distintas a las que se observan mediante papel y lápiz. Por ejemplo, representar funciones en la máquina que resultan prácticamente imposibles de dibujar en el papel, permitiendo así conjeturar propiedades y comprobar visualmente (actividad que puede tener un importante uso didáctico) hechos que escapaban al análisis algebraico (p. 295).

En este punto resaltamos que las características ejecutables de las representaciones de *GeoGebra*, y la conversión automática de representaciones que éstas facilitan, de ninguna manera garantizan la coordinación de registros, como se ha observado en diversas investigaciones como las ya citadas (Hitt, 1998; Lupiáñez & Moreno, 2001) y en abundantes publicaciones posteriores (por ejemplo, Kaput, Noss & Hoyles, 2002; Santos-Trigo, 2011; Santos-Trigo, Moreno-Armella & Camacho-Machín, 2016).

3. Características del curso

El grupo en donde se aplicó la actividad estuvo integrado por 30 estudiantes, 21 de ellos cursaban la carrera de Ingeniería Civil y 9 la carrera de Ingeniería Industrial y de Sistemas. El curso completo de Geometría Analítica se ha ofrecido en un centro de cómputo dotado de 25 computadoras con *GeoGebra* instalado, de las cuales no se usaban todas porque algunos estudiantes llevaban a clase su computadora portátil o usaban la versión de *GeoGebra* para teléfono celular. El curso tuvo una modalidad de curso-taller, en el que los estudiantes han desarrollado actividades sobre todos los temas, combinando la modelación en *GeoGebra* con la discusión de los conceptos propios de la Geometría Analítica. En todos los casos, las actividades resueltas han sido enviadas al profesor por correo electrónico como archivos de *GeoGebra* o de *Word*.

4. Antecedentes inmediatos de la actividad

La actividad que se reporta aquí forma parte de una secuencia de actividades centradas en la parametrización de superficies, esta secuencia estuvo integrada por cuatro partes. En la primera se introducen las nociones básicas sobre parametrización de segmentos y de superficies planas, en las tres restantes se trata de parametrizar un volumen, pero en la segunda el volumen se les proporciona dibujado a mano, en la tercera se les propone un volumen tomado de Internet y en la cuarta ellos escogen libremente el volumen a parametrizar; nuestro reporte solamente incluye las producciones de los estudiantes sobre esta última. La herramienta principal de *GeoGebra* utilizada para la parametrización de superficies es el comando "Superficie", que ha sido utilizado en el trabajo de Solis (s/f) y que permite parametrizar volúmenes a partir de sus proyecciones sobre los planos coordenados. Este comando no aparece en las cajas de herramientas, pero puede introducirse en la barra de entrada de *GeoGebra*, como lo muestra la Figura 1:

Superficie(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro 1>, <Valor inicial 1>, <Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)

Figura 1. El comando, tal como aparece en la barra de entrada de *GeoGebra*

Describiremos ahora con más detalle cada una de las cuatro partes de la secuencia mencionada.

4.1. Primera parte. Parametrización de segmentos y superficies planas

Esta primera parte está dedicada principalmente a la parametrización de segmentos en el espacio, aunque solamente nos interesan aquellos trazados sobre uno de los planos cartesianos y que puedan moverse manteniendo su punto inicial sobre uno de los ejes, de tal modo que puedan usarse para trazar la superficie bajo una función, como el lugar geométrico trazado por un segmento al deslizar uno de sus extremos sobre un eje cartesiano. En la Figura 2a puede observarse uno de los problemas resueltos por los estudiantes en esta primera parte, en el que se construye la parametrización del segmento PQ para que trace la superficie bajo la gráfica de la función $z = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$.

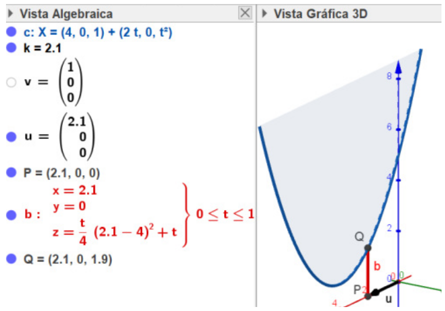


Figura 2a. Respuestas de los estudiantes

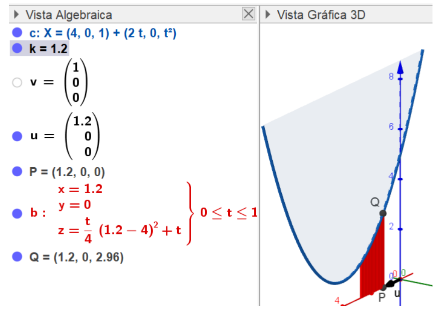


Figura 2b. Adición del deslizador

El segmento PQ se ha parametrizado como una curva en el espacio mediante el comando “Curva” (Figura 3), pero se ha usado un deslizador *k* como variable independiente, para poder mover el segmento sobre el eje X (Figura 2b), la idea aquí es que los estudiantes puedan explicarse cómo funciona el comando mostrado en la Figura 1.

Entrada: **Curva(<Expresión>, <Expresión>, <Expresión>, <Parámetro>, <Valor inicial>, <Valor final>)**

Figura 3. Segmento PQ parametrizado

Con este trabajo, se pretende desarrollar la habilidad de visualizar una superficie plana como una familia de segmentos en un mismo plano, con alturas que dependen de la posición. Se inicia así la práctica de la división de figuras planas en figuras planas y su deconstrucción en figuras unidimensionales.

4.2. Segunda parte. Parametrización de volúmenes bosquejados

En esta parte se han proporcionado a los estudiantes algunos bosquejos de volúmenes, dibujados a mano alzada con algunas especificaciones sobre las curvas que los definen. Se avanza ahora a deconstruir los sólidos en el espacio en las superficies que definen sus *caras*, en este caso la primera cara que se parametriza se describe como la proyección de la figura en el plano XZ. Posteriormente, para graficar la cara seleccionada se deconstruye a su vez en una familia de segmentos: como en la actividad previa, se trabaja con un segmento genérico de la cara seleccionada que se divide en sus componentes vectoriales para parametrizarlo.

Los estudiantes, guiados por el profesor, utilizaron el comando “Superficie” (Figura 1) para graficar las superficies que delimitan estos volúmenes, siempre iniciando con las proyecciones del volumen sobre los planos coordenados. Para graficar, por ejemplo, el volumen mostrado en la Figura 4a, graficaron primero la superficie de la Figura 2b.

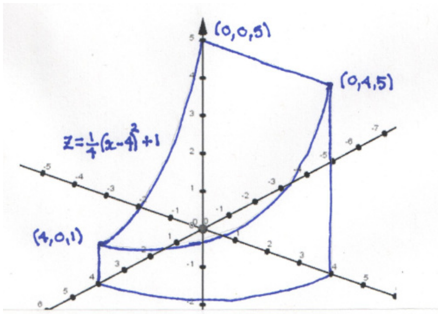


Figura 4a. Volumen dibujado a mano alzada, proporcionado a los estudiantes

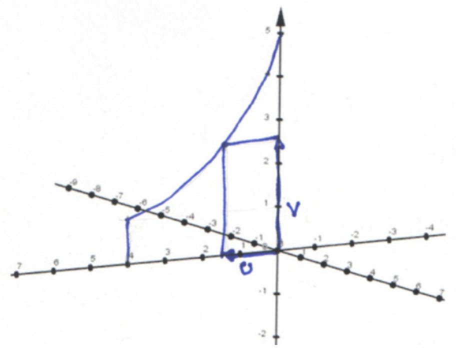


Figura 4b. Proyección del volumen sobre el plano XZ, utilizada por el profesor

Para graficar la superficie de la Figura 4b, primero hay que construir el vector $u = r(1,0,0)$, donde el parámetro r estará sujeto a la restricción $0 \leq r \leq 4$, para que el vector u recorra la base de la superficie. Así, para cada vector u, se definirá un vector v que dependerá de la función $z = \frac{1}{4}(x-4)^2 + 1$; entonces tendremos un vector $v = (0{,}0{,}\frac{1}{4}(x-4)^2 + 1)$. Mientras que para cada valor de r, se pretende que el vector v varíe entre los vectores $(0{,}0{,}0)$ y $(0{,}0{,}\frac{1}{4}(x-4)^2 + 1)$ para que al variar v, $u + v$ trace el segmento paralelo al eje Z que va del extremo de u hasta la función z, entonces se tiene que multiplicar el vector v por un parámetro s tal que $0 \leq s \leq 1$.

La superficie requerida quedará definida como

$$u + sv = r(1{,}0{,}0) + s\left(0{,}0{,}\frac{1}{4}(r-4)^2 + 1\right)$$

$$= (r, 0{,}0) + (0{,}0, s(\frac{1}{4}(r-4)^2 + 1))$$

$$= (r, 0, s(\tfrac{1}{4}(r-4)^2 + 1))$$

con $0 \leq r \leq 4$ y $0 \leq s \leq 1$,

que en *GeoGebra* será capturada como: Superficie$(r, 0, s(\frac{1}{4}(r-4)^2 + 1, r, 0{,}4, s, 0, 1\ )$, que en la vista algebraica se verá como en la Figura 5a y en la vista 3D se verá como en la Figura 3b.

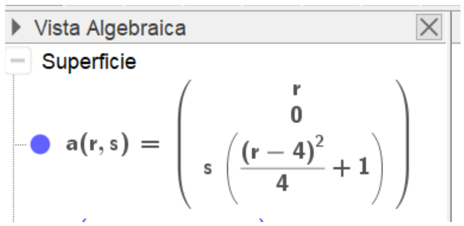


Figura 5a. Representación algebraica de la proyección del volumen en el plano XZ

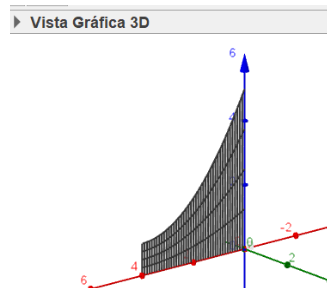


Figura 5b. Representación gráfica de la proyección del volumen sobre el plano XZ

Una vez construida la superficie que se observa en la Figura 5b, ésta puede transformarse sustituyendo el 0 de la parametrización anterior por la expresión $(16 - r^2)$; esto es así porque el arco de circunferencia es parte de la gráfica de la función $y = (16 - x^2)$. Esta nueva superficie puede verse en la Figura 6, después de capturarla en la barra de entrada como $Superficie(r, (16 - r^2), s(\frac{1}{4}(r-4)^2 + 1, r, 0{,}4, s, 0, 1)$.

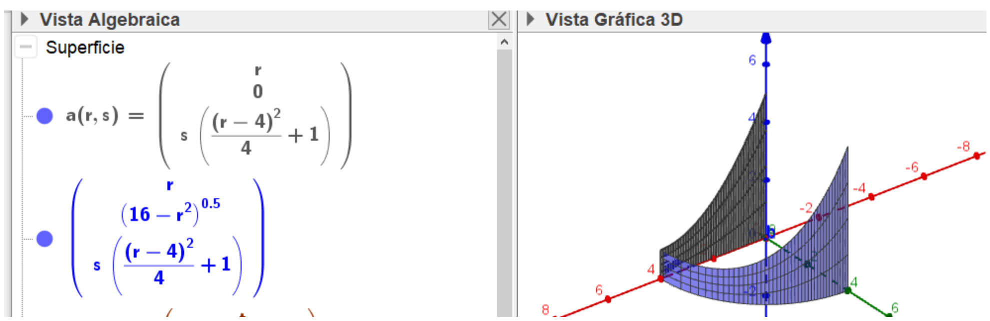


Figura 6. Representación algebraica y gráfica de las dos primeras superficies construidas

Destacamos que el papel de los parámetros se discute en clase para favorecer el tipo de análisis deseado: justificar las propiedades de una figura de tres dimensiones a partir de las propiedades de las figuras bidimensionales que las componen y sucesivamente garantizar las propiedades de las curvas por medio de las características de los vectores que las generan.

Los estudiantes no encontraron grandes dificultades para desarrollar la actividad anterior, pero todas las superficies requeridas eran de "una sola pieza". La modelación de volúmenes más complicados exige que las superficies mismas sean parametrizadas por partes, así que se les propuso otra actividad en la que tuvieran que dividir alguna de las superficies en partes, antes de parametrizarlas; como se verá al final, estas parametrizaciones resultan indispensables para modelar volúmenes más complicados. Esta complicación es consistente con la necesidad de favorecer la otra operación figural de división mereológica. Por las razones anteriores, se les proporcionó el siguiente dibujo a mano alzada, para que parametrizaran el volumen (Figura 7).

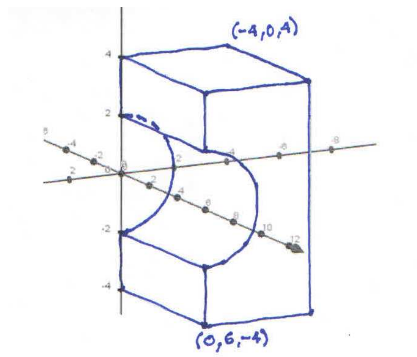


Figura 7. Dibujo a mano alzada del volumen por parametrizar

Aunque las superficies que limitan este volumen son casi todas planas, tal como se tenía previsto los estudiantes tuvieron dificultades para descomponer en partes la proyección sobre el plano XZ. Un ejemplo de esta descomposición tal como la ha desarrollado uno de los estudiantes, puede verse en la Figura 8.

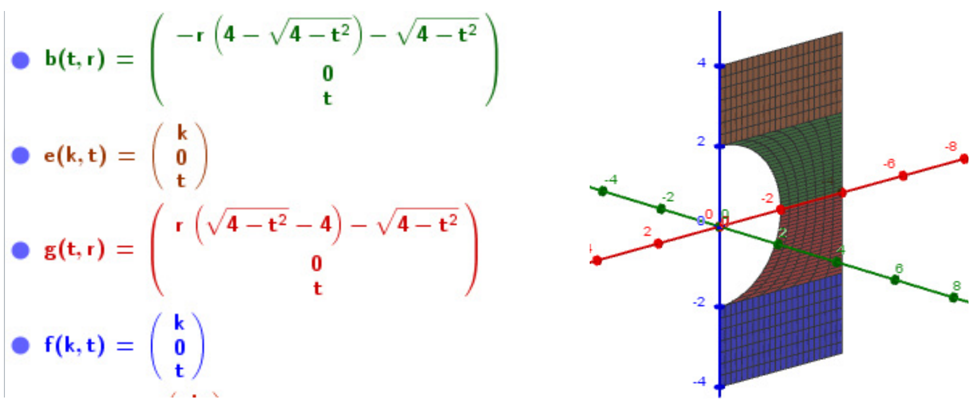


Figura 8. Descomposición en cuatro partes de la superficie antes de parametrizarla

Este tipo de división favorece la asociación entre tipos de superficies y tipos de expresiones algebraicas. Se espera que los estudiantes desarrollen la habilidad no sólo de *partir* figuras tridimensionales en sus caras curvas y planas, sino también dividir las caras en regiones simples y complicadas o *lineales* y *no lineales*.

4.3. Tercera parte. Parametrización de objetos físicos proporcionados

Una vez que han construido algunos volúmenes, los estudiantes han modelado en clase un pequeño tramo de riel ferroviario a partir de dos imágenes tomadas de internet. En la primera de las imágenes, se muestra el perfil del riel (Figura 7a) con las acotaciones técnicas, y en la segunda, se muestra una fotografía del volumen que se pide modelar (Figura 9b).

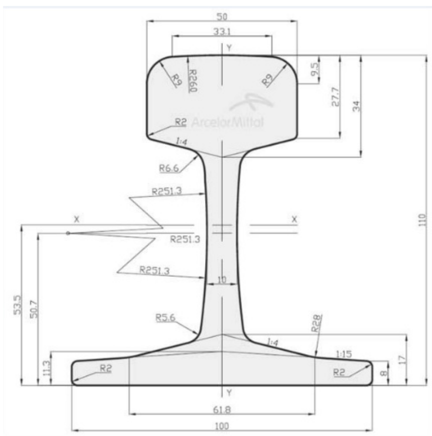


Figura 9a. El perfil del riel ferroviario

Figura 9b. Fotografía del riel ferroviario

En esta actividad los estudiantes han enfrentado dificultades para encontrar las funciones que aproximen por trozos el contorno de la Figura 9b, pero en general han seleccionado funciones con parámetros controlables a través de deslizadores de *GeoGebra*, que les ha permitido encontrar buenas aproximaciones. Para una mayor precisión han copiado la Figura 7a en la vista gráfica de *GeoGebra* y la han aproximado por trozos. Para la obtención de la parametrización, han usado estas mismas funciones y los puntos de intersección entre sus gráficas, pero usando el eje Z en lugar del eje Y de la Vista Gráfica. En las Figuras 10a y 10b pueden verse ejemplos de las curvas usadas para aproximar el contorno del riel y los fragmentos en los que han dividido el perfil para la parametrización.

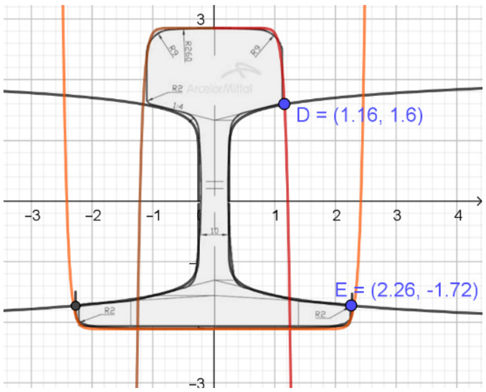


Figura 10a. El perfil del riel ferroviario aproximado a trozos

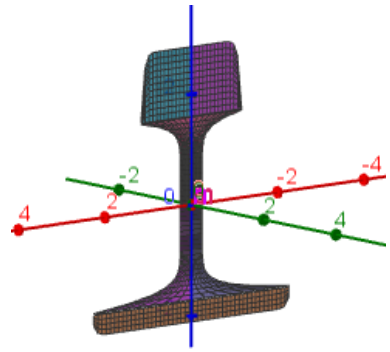


Figura 10b. Proyección del del riel ferroviario sobre el plano XZ

La estrategia de división de las curvas que delimitan la superficie *en partes de curvas conocidas* descansa sobre las características dinámicas de *GeoGebra*. Los estudiantes no parecen utilizar directamente las propiedades de curvatura o concavidad de las gráficas polinomiales, por ejemplo; utilizan en cambio los distintos comandos de *ajuste de curvas* de *GeoGebra*: eligen así funciones polinomiales y trigonométricas en general, y luego manipulan los parámetros o puntos que aparecen como entradas del comando para obtener la forma deseada.

Al final, los estudiantes han podido modelar con éxito el riel ferroviario, una de las versiones construidas por los alumnos del riel completo puede verse en la Figura 11.

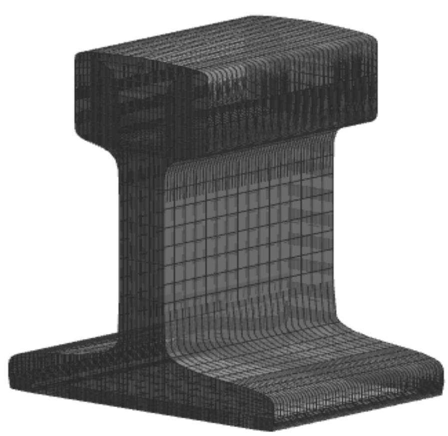


Figura 11. Riel ferroviario completo

4.4. Cuarta parte. Parametrización de volúmenes escogidos libremente por los estudiantes

Finalmente, se propone a los estudiantes la actividad integradora a la que se refiere este trabajo, en ella a cada estudiante se le ha pedido que escoja un objeto, que a su juicio pueda modelar mediante la parametrización de superficies con *GeoGebra*. Las fotografías fueron enviadas por correo electrónico y luego modeladas. Las figuras 12a y 12b muestran dos de las fotografías enviadas por los estudiantes.

Figura 12a. Imagen de una guitarra tomada de Internet

Figura 12b. Fotografía de un encendedor tomada con el celular del estudiante

Durante dos semanas, los estudiantes trabajaron en la construcción del modelo y plantearon en clase las dudas que se les presentaban, mismas que eran aclaradas por el profesor o por otros estudiantes. Aunque *GeoGebra* permite verificar de inmediato si la superficie deseada ha sido bien parametrizada, abundaron las dudas sobre la sintaxis de *GeoGebra* y sobre la especificación del rango de los parámetros usados. Al final los modelos construidos fueron tan sofisticados como los que se muestran en las figuras 13a y 13b.

Figura 13a. Guitarra parametrizada

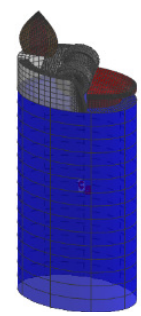


Figura 13b. Encendedor parametrizado

El análisis de los archivos de *GeoGebra* muestra que los estudiantes generan las gráficas de los sólidos eligiendo libremente superficies para formar las caras y curvas para delimitar las superficies.

Además de dividir y deconstruir acertadamente los sólidos, se observa que la estrategia desarrollada por los estudiantes incluye la clasificación de los tipos de superficies según el tipo de expresión algebraica necesaria para generarlas. Por ejemplo, para generar la gráfica de la Figura 14, se observa que el estudiante genera las regiones planas de la figura con expresiones radicales asociadas a circunferencias, $r\sqrt{25-k^2}$ por ejemplo.

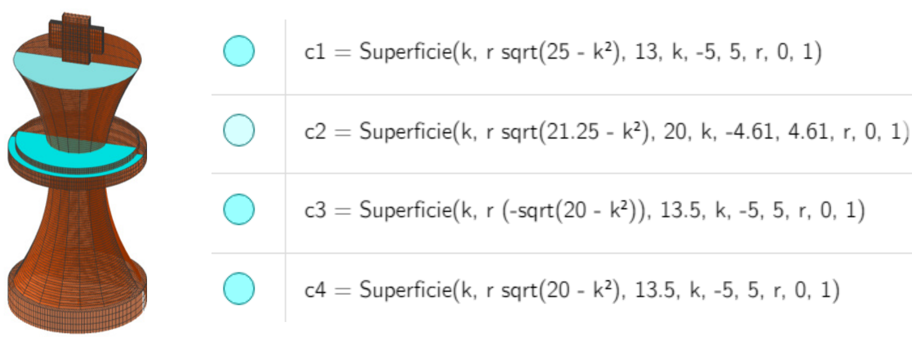
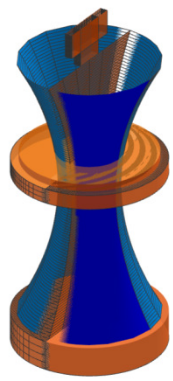


Figura 14. Secciones planas circulares de una figura

Posteriormente, secciones más complejas de las figuras se asocian a tipos de superficies y curvas algebraicas a su vez más complicadas. Por ejemplo, las secciones verticales de la misma figura se pueden interpretar como superficies obtenidas al trazar trayectorias circulares en el plano XY y trayectorias hiperbólicas en los planos perpendiculares a éste. En la siguiente figura se observa que el estudiante divide ahora estas secciones del sólido en cuatro superficies con tales características.



$$d1(k, r) = \begin{pmatrix} r\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right) \\ \sqrt{\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right)^2-\left(r\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right)\right)^2} \\ k \end{pmatrix}$$

$$d2(k, r) = \begin{pmatrix} r\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right) \\ -\sqrt{\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right)^2-\left(r\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right)\right)^2} \\ k \end{pmatrix}$$

$$d3(k, r) = \begin{pmatrix} -r\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right) \\ -\sqrt{\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right)^2-\left(r\left(\frac{1}{31}(k-11)^2+2\right)\right)^2} \\ k \end{pmatrix}$$

Figura 15. Secciones verticales definidas por curvas hiperbólicas

Destacamos cómo los estudiantes pudieron haber utilizado el mismo comando de *superficie* para generar la superficie de revolución, pero esta práctica era señalada por el profesor en las sesiones de clase como la menos útil en el sentido de que sólo funciona con pocas figuras reales; y, al contrario, se fomentaba la técnica de división como la que podría funcionar con cualquier sólido.

5. Conclusiones

La actividad aquí reportada (cuarta de la secuencia) ha resultado enriquecedora y creativa, los estudiantes han trabajado con entusiasmo en ella y su desarrollo les ha exigido desarrollar destrezas para convertir representaciones algebraicas en gráficas y la aplicación de conceptos que se vieron obligados a revisar. A reserva de analizar las producciones de los estudiantes a lo largo de toda la secuencia, centraremos nuestras conclusiones en la integración de conceptos logrados por los estudiantes y en las operaciones figurales que lograron realizar en la última de las actividades.

Los estudiantes han utilizado las cónicas como curvas para aproximar contornos, con las que se modelan las proyecciones del volumen sobre los planos coordenados. Es de resaltar en este aspecto que los ajustes de estas curvas sobre los perfiles de los objetos reales han puesto en juego el significado de los parámetros utilizados a través de los deslizadores. Estos ajustes han obligado a los estudiantes a utilizar algunas funciones reales de variable real, que no están incluidas en el curso, pero que les han resultado familiares gracias a que estaban tomando simultáneamente los cursos de Geometría Analítica y Cálculo Diferencial. A pesar de la poca experiencia con otros tipos de gráficas de funciones, se pudo desarrollar la visualización de sólidos en el espacio y las operaciones figurales buscadas, suponemos que una mayor experiencia con otros tipos de funciones pudiera eficientar los métodos desarrollados, pero no parece ser estrictamente necesaria.

A pesar de que el tema de vectores en dos y tres dimensiones es uno de los primeros temas en este curso, la parametrización de segmentos y superficies planas y no planas ha obligado a los estudiantes a construir parametrizaciones específicas que no formaban parte de su experiencia y ha enriquecido las significaciones de las operaciones con vectores, del producto de un vector por un escalar y en general de las combinaciones lineales de vectores en dos y tres dimensiones. Por lo anterior, consideramos que se alcanza la integración de conceptos geométricos planteada como uno de los objetivos de la propuesta y que se han logrado integrar otros conceptos que no forman parte del curso.

Para la parametrización de objetos físicos, ha resultado indispensable repensar la parametrización de segmentos como lugares geométricos de vectores que se mueven sujetos a las condiciones establecidas por la superficie a parametrizar. Este elemento de la estrategia de graficación de sólidos fue utilizada por todos los estudiantes y la consideramos provechosa, ya que integra ambas operaciones figurales al utilizarse estos segmentos (1D) para graficar superficies (2D) que componen los sólidos (3D), parametrizando a su vez los segmentos al manipular los puntos que los definen.

También se ha requerido la descomposición de objetos tridimensionales en elementos bidimensionales, la descomposición de objetos bidimensionales en partes apropiadas para facilitar la parametrización y, en sentido contrario, se ha tenido que pensar en recomponer los objetos bidimensionales para reconstruir los tridimensionales. Consideramos, adicionalmente, que el carácter abierto de la actividad integradora ha promovido en los estudiantes la construcción de sus propias heurísticas para modelar los objetos físicos que han seleccionado.

Esperamos en el futuro analizar con mayor profundidad las producciones de los estudiantes sobre la secuencia completa de actividades, a la luz de las contribuciones teóricas de Duval (2017) sobre la transformación de las representaciones de un objeto matemático.

Referencias

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking–The Registers of Semiotic Representations*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación matemática 10*(02), 23-45.

Kaput, J., Noss, R., & Hoyles, C. (2002). Developing new notations for a learnable mathematics in the computational era. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 51–75). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lupiáñez, J. L., & Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las Matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Santos Trigo, M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 8*, 35-54.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the mathematical working space framework. *ZDM, 48*(6), 827-842.

Solís, A. (s/f). Gráficas de curvas, superficies y sólidos empleando *GeoGebra*. Consultado el 5 de julio de 2018, en: https://www.academia.edu/31334639/GR%C3%81FICAS_DE_CURVAS_SUPERFICIES_Y_S%C3%93LIDOS_EMPLEANDO_GEOGEBRA.

5 Modelación y uso de tecnología en el contexto de la profesionalización de profesores de matemáticas

Cesar Martínez Hernández[1], María del Carmen Olvera Martínez[2]

Resumen

Se presentan resultados de la aplicación de una tarea de modelación del tipo *Model Eliciting Activities* (Actividades Provocadoras de Modelos) para promover la reflexión matemática de profesores de secundaria. La tarea de modelación involucra trabajo con papel y lápiz y con el uso del *software* de matemática dinámica *GeoGebra*. Además de elementos teóricos sobre la modelación matemática para el diseño de la tarea, su implementación, análisis de datos y presentación de resultados, se tomaron cuenta los episodios de resolución problemas con el uso de tecnologías digitales.

Palabras clave: actividad provocadora de modelos, *GeoGebra*, episodios de resolución de problemas.

Résumé

Les résultats de l'application d'une tâche de modélisation du type Activités élicitant des Modèles sont présentés afin de promouvoir la réflexion mathématique des enseignants du secondaire. La tâche de modélisation consiste à travailler avec du papier et crayon et à utiliser un système de géométrie dynamique. En plus des éléments théoriques sur la modélisation mathématique, pour la conception de la tâche, sa mise en œuvre, l'analyse des données et la présentation des résultats, les épisodes de résolution de problèmes liés à l'utilisation de la technologie informatique ont été pris en compte.

Mots clés : activités élicitant des modèles, GeoGebra, épisodes de résolution de problèmes.

Abstract

This chapter presents the results of a Model Eliciting Activity implementation in order to promote teachers' mathematical reasoning. The Modelling Task involves paper-and-pencil work as well the use of the Dynamic Geometry Software called GeoGebra. Besides the Mathematical Modelling theory perspective, for designing the task, its implementation, the data analysis and showing the results, the problem-solving episodes with the use of digital technologies were used.

Keywords: model eliciting activities, GeoGebra, problem solving episodes.

[1] Universidad de Colima, México (†).

[2] Universidad Juárez del Estado de Durango, México.

1. Introducción

Una parte fundamental de los cursos de profesionalización de profesores gira en torno a robustecer sus conocimientos matemáticos, así como los aspectos pedagógicos relacionados con el contenido matemático. En la literatura se reconocen estas dos vertientes como parte de los tipos de conocimientos que deben poseer (y construir) los profesores. Desde planteamientos clásicos como el de Shulman (1986) y otros más recientes como el llamado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008) destacan estas características. Además de ello, con el surgimiento de las nuevas tecnologías, el uso de éstas en el aula de matemáticas ha surgido como otro elemento a tomar en cuenta para la enseñanza de las matemáticas y, por lo tanto, en la profesionalización del profesor.

Por un lado, algunos planteamientos sobre la profesionalización de profesores de matemáticas se interesan por la modelación matemática como una vía para promover el desarrollo de sus conocimientos. Por ejemplo, Guerrero, Mena y Morales (2018) muestran que en la formación inicial de profesores es posible promover procesos de abstracción y matematización mediante la modelación de situaciones reales. Sin embargo, como es reconocido, existen diferentes aproximaciones a la modelación en el aprendizaje de las matemáticas (ver por ejemplo Kaiser & Sriraman, 2006; Solares, Paulino, Peña, Ortiz, Sandoval, Soriano, *et al*., 2018). Una de tales aproximaciones es la conocida como Modelos y Modelación, en particular las *Model Elicting Activities* (Lesh & Doerr, 2003).

Desde esta perspectiva, estudios como el de Vargas, Reyes y Cristóbal (2018) se han interesado por analizar el potencial de las llamadas *Actividades Provocadoras de Modelos* para desarrollar el conocimiento matemático de profesores en servicio. De acuerdo con estos investigadores, tales tipos de tareas proveen oportunidades para que el profesor modifique, extienda y refine su razonamiento matemático. Sin embargo, la actividad reportada por estos investigadores no involucró el uso sistemático de herramientas tecnológicas.

A este respecto, existen varias compilaciones de estudios que toman en cuenta el uso de herramientas tecnológicas en el desarrollo profesional de profesores (ver por ejemplo Aldon, Hitt, Bazzini & Gellert, 2017). Particularmente, como lo menciona FitzSimons (2017), incorporar el uso de herramientas tecnológicas en la clase de matemáticas implica aspectos como el problema de optimizar su uso para propósitos pedagógicos. En este sentido, es válido entonces preguntar sobre qué elementos deben tomarse en cuenta para caracterizar los cursos de profesionalización de profesores respecto al uso de tecnología. ¿Es suficiente con indicarles el potencial del uso de las nuevas herramientas tecnológicas para su práctica y volverlos expertos en el manejo de ciertas herramientas tecnológicas?

En este sentido, de la misma manera que Villarreal (2019) menciona la necesidad de ofrecer oportunidades de experiencias de modelación matemática a los profesores en formación (y en servicio), planteamos la necesidad de promover en los profesores el uso de herramientas tecnológicas para su propia reflexión matemática. Es decir, de oportunidades donde experimenten por sí mismos el potencial de su uso en el aula de matemáticas con sus estudiantes. De entre los diferentes tipos de herramientas tecnológicas, el uso de Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) ha sido ampliamente estudiado en el contexto de la formación y profesionalización de profesores. Por ejemplo, Martínez y Ulloa (2017) ofrecen evidencia de cómo los profesores en servicio movilizan sus conocimientos matemáticos cuando trabajan en un SGD para la creación y uso de modelos dinámicos que tal tipo de tecnología permite.

De esta manera, en el presente capítulo se reporta el rediseño e implementación de una tarea del tipo *Actividad Provocadora de Modelos* (*Model Eliciting Activities*) que involucra el uso de un SGD para analizar su potencial en el contexto de la profesionalización de profesores. A diferencia de algunos de los antecedentes planteados, en este reporte, por un lado, la Actividad Provocadora de Modelos involucra el uso de un SGD; por otro, para dar cuenta del proceso de modelación y de cómo en este proceso los profesores modifican, extienden y refinan su conocimiento matemático se toman en cuentan los episodios de resolución de problemas y uso de tecnologías digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

Por último, como ya se mencionó, en este trabajo se considera importante dar oportunidad a los profesores de matemáticas de experimentar el potencial del uso de herramientas tecnológicas, en particular desde la perspectiva de la modelación matemática, ya que, como lo menciona Villarreal (2019), la modelación en la formación [y profesionalización] de profesores es importante puesto que en documentos curriculares de la educación secundaria se recomienda la aplicación y modelación para la enseñanza de las matemáticas.

2. Marco teórico y metodológico

2.1 Modelos y Modelación: *Actividades Provocadoras de Modelos*

Una de las aproximaciones a la modelación matemática es la llamada Perspectiva de Modelos y Modelación, en particular las *Actividades Provocadoras* *de Modelos* (Lesh & Doerr, 2003). De acuerdo con estos investigadores, los modelos son esencialmente sistemas conceptuales que consisten en elementos, relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones de cierta situación. Dichos sistemas conceptuales son expresados mediante un sistema de notación externo y son utilizados (los modelos) para construir, describir o explicar el comportamiento de otro sistema, de manera que éste pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente (Lesh & Doerr, 2003).

Dentro de esta perspectiva, un elemento importante son las llamadas *Model Eliciting Activities* (Actividades Provocadoras de Modelos). Se trata de una actividad de resolución de problemas en donde las producciones de los estudiantes van más allá de respuestas cortas; involucran herramientas conceptuales que son compartibles, manipulables, modificables y reutilizables, para construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar matemáticamente sistemas significativos (Lesh & Doerr, 2003).

De acuerdo con Lesh y Doerr (2003), los modelos son desarrollos de los alumnos para construir, describir o explicar matemáticamente sistemas significativos que ellos encuentran en la actividad propuesta. Es decir, en actividades provocadoras de modelos, los alumnos generan herramientas conceptuales que incluyen sistemas descriptivos o exploratorios que funcionan como modelos y revelan aspectos sobre cómo los alumnos interpretan las situaciones de resolución de problemas.

El sistema de notación externo utilizado para dar sentido de la experiencia durante una Actividad puede revelar aspectos tales como: en qué tipo de cantidades piensan los estudiantes, qué tipo de relaciones se consideran importantes, qué tipo de reglas creen ellos que gobiernan las operaciones sobre las cantidades consideradas y sobre las relaciones cuantitativas (Lesh & Doerr, p. 9). Es importante también mencionar que de acuerdo con estos investigadores, los modelos, en tanto que son producciones del individuo que resuelven el problema, residen tanto en la mente como en el medio representacional que utiliza. Así, pensar matemáticamente implica describir situaciones de manera matemática; involucra construir, describir, explicar; trata sobre las cantidades y otros objetos matemáticos; sobre la producción de patrones y regularidades y dar un sentido de estos (Lesh & Doerr, pp. 15-16).

Como se puede observar, las *Actividades Provocadoras de Modelos* resultan fundamentales en la perspectiva de Modelos y Modelación. Para su diseño, Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewski (2003, pp. 43-44), proponen los siguientes seis principios:

Realidad. Se trata de un principio de sentido personal, para ello, la Actividad debe involucrar situaciones cercanas a los estudiantes. Al diseñarla, son útiles los siguientes cuestionamientos: ¿la situación planteada puede realmente suceder en la vida real? ¿La actividad promueve que los estudiantes den sentido a la situación mediante la extensión de sus conocimientos y experiencias personales?

Construcción del modelo. Este principio implica que la situación involucre construir, describir, explicar, manipular, predecir o controlar un sistema estructuralmente significativo. Es decir, la tarea debe asegurar que los estudiantes reconozcan la necesidad de construir, modificar o extender un modelo.

Autoevaluación. El diseño de la actividad debe ser tal que los alumnos sean capaces de juzgar por sí mismos cuándo sus respuestas son adecuadas. A este respecto, es útil seguir los siguientes cuestionamientos: ¿para los estudiantes son claros los criterios para evaluar la utilidad de respuestas alternativas? ¿Para qué propósitos son necesarios los resultados, para quién y cuándo?

Documentación del modelo. Se trata de una externalización del modelo. En este sentido, se busca que la respuesta o solución revele cómo el individuo está pensando sobre la situación, sobre sus supuestos, el objetivo y las posibles vías de solución. Una pregunta importante que debe responder este principio es: ¿en qué tipo de sistemas (objetos matemáticos, relaciones, operaciones, patrones, regularidades) está el individuo pensando?

Prototipo simple/Reutilización del modelo. Referido a este principio, la situación planteada debe ser tan simple como sea posible y que a la vez establezca la necesidad de un modelo significativo para quien lo produce. Para el diseño de la actividad, es útil seguir la siguiente pregunta: ¿la solución proveerá de un prototipo útil para interpretar o dar sentido a situaciones similares?

Generalización del modelo. Este principio sugiere que los estudiantes deben ser alentados para ir más allá de formas de pensamiento con propósitos particulares, se debe promover la producción de modelos reutilizables, compartibles y modificables, y aplicables a un rango más amplio de situaciones.

2.2 Episodios de resolución de problemas

En tanto que la perspectiva de Modelos y Modelación refiere a actividades de resolución de problemas, llamadas *Actividades Provocadoras de Modelos*, otro de los elementos teóricos tomados en cuenta en este trabajo son los Episodios de Resolución de Problemas con el uso de herramientas tecnológicas (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). Lo anterior se debe a que la actividad propuesta involucra el uso de un Sistema de Geometría Dinámica.

De acuerdo con Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013, p. 279), las Tareas Matemáticas (como las Actividades Provocadoras de Modelos) son fundamentales para promover en los profesores y estudiantes el desarrollo y la construcción del pensamiento matemático; para ello, el uso de herramientas computacionales ofrece a los profesores una variedad de formas de representar y explorar tareas matemáticas, lo que puede extender las aproximaciones de resolución basadas en sólo papel y lápiz. De acuerdo con Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013, pp. 286-298), las formas de razonamiento que emergen cuando se usan herramientas computacionales al resolver una tarea, se pueden caracterizar mediante los siguientes Episodios.

Comprensión. Este episodio implica dar sentido a la información dada en la situación, identificar conceptos relevantes, posibles representaciones útiles. El uso de herramientas tecnológicas puede ayudar para explorar y dar sentido a la actividad. Así, la comprensión involucra cuestionarse y pensar en el uso de la herramienta tecnológica para dar sentido y representar la tarea.

Exploración. En este episodio, la herramienta tecnológica provee al individuo de oportunidades para examinar la situación planteada. Por ejemplo, las representaciones posibles con la herramienta tecnológica pueden ser la fuente para generar conjeturas sobre la situación planteada. Con base en el uso de la herramienta tecnológica, el usuario explora el problema a través de acercamientos empíricos.

Búsqueda de múltiples acercamientos. Una vez que el alumno explora mediante acercamientos empíricos, estos forman una base para otros tipos de aproximaciones. Para desarrollar una comprensión conceptual de las ideas matemáticas y resolver problemas de manera eficiente, es necesario pensar en diferentes formas de resolver problemas y de examinar los conceptos matemáticos que involucra la Actividad (Provocadora de Modelos). En este sentido, resolver un problema requiere no sólo pensarlo en distintas formas, sino usar diferentes conceptos y recursos.

Integración. Este episodio consiste fundamentalmente en una reflexión sobre los procesos involucrados en los episodios previos. Esta reflexión puede ser observable a partir de cómo el estudiante, ante situaciones similares, retoma su proceso de resolución de la tarea. Por ejemplo, qué tipo de acercamientos empíricos utiliza, qué aproximaciones (analítica, geométrica, numérica, etc.)

aplica y qué recursos o conceptos utiliza. También, involucra el planteamiento de nuevos problemas como una extensión de la situación analizada.

2.3 Rediseño de una Actividad Provocadora de Modelos

El reporte aquí presentado involucra el rediseño de una actividad sobre las horas de luz solar en cierto día (DePeau III, 2012; Díaz-Leyva, en prensa). El rediseño propuesto de la actividad, llamada "Horas de luz solar", está basado en los seis principios de las Actividades Provocadoras de Modelos. La actividad en cuestión versa sobre el tiempo de luz solar de dos ciudades, medido en determinado día de cada mes del año (día 21) con base en datos disponibles en Internet (www.sunrise-and-sunset.com). El objetivo general es construir un modelo matemático que caracterice el fenómeno propuesto en la situación y que, en el proceso de su construcción, se analice gráfica y algebraicamente el efecto que tiene en la variación de posibles parámetros utilizados en el modelo y durante el refinamiento de éste a lo largo de la actividad. La estructura general de la actividad es la siguiente.

En un primer momento (cuatro preguntas), la situación dada plantea ciertos datos, información parcial obtenida de www.sunrise-and-sunset.com, referente a las horas de luz solar correspondiente a los días 21, de cuatro meses; los cuales deben ser graficados con el uso de *GeoGebra*. A partir de ello, se debe proponer un tipo de función que corresponda a lo observado en la representación gráfica. En esta fase, la cuarta pregunta se incluye con el objetivo de indagar el sentido que le otorga el estudiante (en nuestro caso, profesores en servicio) a la situación planteada.

En un segundo momento (seis preguntas), se pide al alumno que complete la información de los ocho meses faltantes a partir de consultar la página web www.sunrise-and-sunset.com, para tener los datos de las horas de luz solar de los días 21 de cierto año. Con la información completa de los doce meses, se propone utilizar nuevamente *GeoGebra* para graficar los datos adicionales. En esta fase, se promueve un refinamiento de la función (Modelo) inicial propuesta en la primera fase, a partir de observar los datos completos referidos a doce meses. Además, se promueve el uso de deslizadores en *GeoGebra* para analizar el comportamiento de la función (Modelo) refinada que emerja en esta fase, a partir de considerar posibles parámetros que dicha función involucre.

En la tercera fase de la actividad (dos preguntas), se pide al estudiante que construya una nueva función (Modelo) para datos distintos de los analizados en las primeras dos fases, pero bajo la misma situación: tiempo de luz solar en determinada ciudad medido en los días 21 de cada mes de cierto año. El objetivo de esta fase es observar si el alumno propone un modelo similar al de la fase dos, o construye uno distinto. En términos de la resolución de problemas, se pretende observar qué aproximaciones utiliza a partir de lo desarrollado en las primeras dos fases. Es decir, para construir el modelo, ¿el alumno utiliza acercamientos empíricos a través de *GeoGebra*?, ¿utiliza acercamientos analíticos, gráficos, etcétera?

En la cuarta fase (cinco preguntas), se promueve una reflexión del proceso seguido para construir los modelos que representan las dos situaciones planteadas respecto a las horas luz en dos ciudades distintas, así como una reflexión sobre las semejanzas y diferencias de los dos modelos construidos (funciones propuestas). Además, sin que se explicite de manera escrita en la hoja de trabajo, al final se plantea una pregunta de manera verbal para promover también una reflexión sobre su posible práctica docente, es decir, un escenario de enseñanza con los alumnos de los profesores involucrados en este estudio.

El rediseño de la actividad "Horas de luz solar", en las cuatro fases descritas, se alinea a los seis principios de las Actividades Provocadoras de Modelos de la siguiente manera:

Realidad. Dentro de la actividad "Horas de luz solar", el contexto que se propone cumple con este principio desde el momento que se trabaja con datos reales que el estudiante puede recuperar de bases de datos que se actualizan en tiempo real. Debido a las características propias de la duración de la luz solar a lo largo de cada año, es un contexto propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucren periodicidad. En este sentido, la exploración y el análisis del comportamiento de las horas de luz solar en cierto año es una actividad que promueve el estudio de ideas fundamentales, como el uso de diferentes representaciones, de la función seno y/o coseno.

Construcción del modelo. La actividad promueve, de manera inicial, que los profesores construyan un modelo que permita representar los datos correspondientes a un año específico, los cuales previamente ubicaron en el plano cartesiano con ayuda de *GeoGebra*, de esta manera, ponen en juego sus conocimientos para desarrollar su modelo. Posteriormente, a través de las exploraciones del modelo dinámico generado en *GeoGebra*, los profesores se involucran en el refinamiento de su modelo inicial, de tal manera que, independientemente del año, ellos puedan predecir o conocer la cantidad de horas de luz solar que hubo o habrá el día de 21 de un mes y año determinado.

Autoevaluación. Este principio se ve ampliamente potenciado por el uso de *GeoGebra*, ya que las conjeturas que los profesores se formulan durante las exploraciones del modelo dinámico pueden validarse de manera instantánea al mover un deslizador o algún objeto geométrico móvil y observar los efectos que producen esos movimientos o cambios. Así, el profesor puede corroborar o rechazar sus conjeturas o intuiciones iniciales.

Documentación del modelo. En las hojas de trabajo, los profesores argumentan, de manera escrita, las respuestas que reportan a cada una de las preguntas planteadas. Por lo tanto, el diseño de la hoja de trabajo es de gran importancia, pues es ahí donde los participantes explican y describen los recursos, relaciones y procesos que pusieron en juego durante el desarrollo de modelos.

Prototipo simple/Reutilización del modelo. Como una extensión del problema inicial, se planteó el análisis de las horas de luz solar en una ciudad de otro país con la finalidad de que los profesores conecten las relaciones y conjeturas formuladas en la situación anterior con la nueva información y, de esta manera, identifiquen semejanzas y diferencias en el comportamiento de los datos en ambas situaciones.

Generalización del modelo. El análisis de las propiedades y características de la función seno, con ayuda de *GeoGebra*, permite promover en los profesores la generalización del modelo y que lo extiendan al uso de otro tipo de función periódica, como coseno. Además, la discusión de la razón por la cual varía la duración de las horas de luz solar tiene la finalidad de que relacionen el fenómeno geográfico y la ubicación de las ciudades con las características de los modelos matemáticos desarrollados.

2.4 Población participante y descripción del estudio

La toma de datos se llevó a cabo con 11 profesores de secundaria en servicio, con formación inicial distinta –entre ingenieros, normalistas y licenciados en Educación–, así como diferentes años de experiencia docente, tanto de escuelas privadas como públicas del Estado de Colima.

Para la toma de datos, se organizó un taller dirigido a profesores de secundaria sobre el uso de *GeoGebra* para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La toma de datos se llevó a cabo en dos sesiones, en un mismo día, con una duración aproximada de 1.5 horas la primera y 2 horas, la segunda.

Durante el taller, cada uno de los profesores contó con las hojas de trabajo impresas de la Actividad Provocadora de Modelos y tuvo a su disposición una computadora conectada a Internet. No tuvieron restricciones para la búsqueda de información en Internet si lo consideraban necesario.

Durante las dos sesiones del taller, los profesores tuvieron la libertad de trabajar de manera individual o en pareja con discusiones grupales en determinadas preguntas de las cuatro fases de la actividad. En este sentido, el desarrollo se condujo mediante la modalidad de entrevista grupal y ambas sesiones fueron videograbadas. Así, las fuentes de información para el análisis de los datos obtenidos provienen de los registros escritos de la actividad impresa, las video-grabaciones y los archivos (*GeoGebra*) electrónicos generados por los profesores.

3. Presentación y discusión de resultados

En esta sección se presentan, a partir de un primer análisis, los resultados derivados de la implementación, y se da a conocer la manera en que los participantes se basan en las potencialidades del Sistema de Geometría Dinámica (SGD) *GeoGebra* para dar sentido, representar y explorar la tarea. Ésta permitió tener evidencia sobre el proceso de modelación, de cómo los participantes incorporan el uso de *GeoGebra* en los episodios de resolución de problemas que involucran la exploración del enunciado del problema, la identificación de relaciones, la formulación de conjeturas y la búsqueda de argumentos para justificarlas, así como la generación de extensiones del problema al conectarlo con la tarea inicial. En este sentido, se presenta tanto la manera en que los profesores incorporaron *GeoGebra* en su proceso de solución como el análisis de las ideas matemáticas involucradas en la tarea en cada uno de los episodios de la Resolución de Problemas con el uso de tecnologías digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

3.1 Comprensión del problema

La situación que se presentó a los profesores es la siguiente:

En el año 2015, en la ciudad de Monterrey, el día más largo ocurrió el 21 el junio (con trece horas cuarenta y dos minutos de luz solar) y el día más corto fue el 21 de diciembre (con diez horas y treinta minutos de luz solar). Los equinoccios, suceden el 21 de marzo y el 21 de septiembre, en los que el día y la noche son aproximadamente iguales a 12 horas.

A partir de dicha situación, se planteó a los profesores una serie de preguntas con la finalidad de conocer la manera en que interpretaban los datos y qué relaciones y propiedades identificaban en ellos. Se les presentó una tabla con los datos proporcionados en el enunciado (Figura 1) los cuales fueron graficados en *GeoGebra*. Una de las preguntas que se les planteó fue ¿qué tipo de función crees que representan los puntos graficados?, ¿por qué?

Mes	Horas de luz solar
Enero	
Febrero	
Marzo	12.10
Abril	
Mayo	
Junio	13.70
Julio	
Agosto	
Septiembre	12.10
Octubre	
Noviembre	
Diciembre	10.5

Figura 1. Tabla con datos de las horas de luz solar en el año 2015

A partir de lo observado en *GeoGebra*, la principal respuesta que dieron 10 de los 11 los profesores fue que se trataba de una función cuadrática. Algunos argumentos refieren a que existe un máximo y cierta relación entre los puntos graficados, haciendo referencia a cierta simetría, o bien, porque había un cambio de concavidad (Figura 2). Únicamente un profesor, además de la función cuadrática, mencionó que pudiera tratarse de una función senoidal y hace referencia a que un punto (C) que "se sale" de la gráfica (Figura 3).

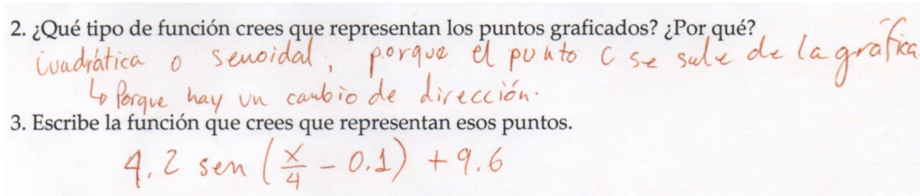
2. ¿Qué tipo de función crees que representan los puntos graficados? ¿Por qué?

FUNCION CUADRADA, DEBIDO QUE PRESENTA UN MÁXIMO, ADEMAS ENTRE LOS DATOS HAY CIERTA RELACIÓN

3. Escribe la función que crees que representan esos puntos.

$F(x) = -Ax^2 + Bx + C \longrightarrow f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 3$

Figura 2. Función cuadrática como propuesta inicial de los profesores



2. ¿Qué tipo de función crees que representan los puntos graficados? ¿Por qué?

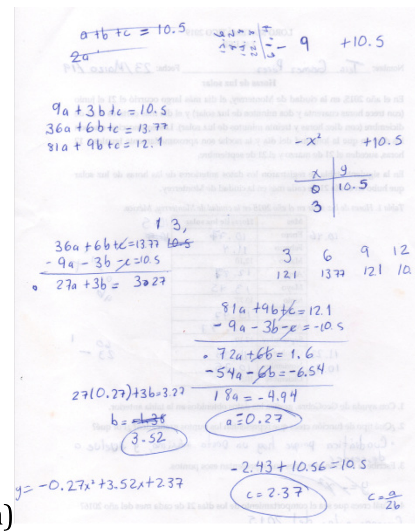
Cuadrática o senoidal, porque el punto C se sale de la gráfica.
↳ Porque hay un cambio de dirección.

3. Escribe la función que crees que representan esos puntos.

$4.2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{4} - 0.1\right) + 9.6$

Figura 3. Función seno, propuesta únicamente por un profesor

Dentro de los métodos utilizados por los profesores para encontrar la expresión de la función se desarrollaron dos: uso de sistemas de ecuaciones para encontrar el valor de los parámetros en la expresión general $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Figura 4a) y, el uso de la ecuación de la parábola vertical (Figura 4b), siendo esta última la más usada.

a) 

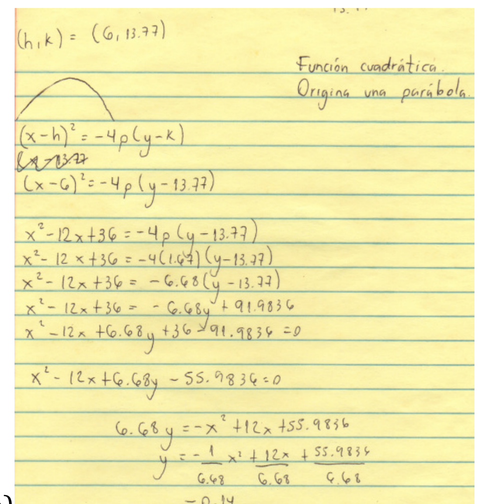
b) 

Figura 4. Métodos algebraicos desarrollados por los profesores

Comentario. En este episodio es posible identificar que los profesores reconocieron las variables involucradas. Particularmente, es necesario señalar que determinaron los meses como variable independiente discreta puesto que la toma del dato es una vez al mes (día 21 de cada mes), lo que facilitó la comprensión y el desarrollo de la actividad al evitar situaciones como los meses con diferente cantidad de días. También resultó enriquecedor el hecho de que los profesores inicialmente pensaran que se trataba de una función cuadrática, pues tuvieron que hacer uso de sus conocimientos previos para conjeturar sobre la simetría de dos puntos, la existencia de un máximo y el cambio de dirección.

3.2 Exploración del problema

Después de que los profesores plantearon una idea inicial del tipo de función que representaban los datos, se les pidió que completaran la Tabla 1 (Figura 1) a partir de la información que debían consultar en la página de Internet **www.sunrise-and-sunset.com** y graficaran los datos obtenidos. Una vez que contaron con la gráfica completa de la situación planteada (horas luz del año 2015), se les cuestionó si mantenían como respuesta la función inicial planteada. En caso contrario, se les solicitó proponer una nueva y justificarla.

Un comportamiento generalizado en los profesores fue recurrir a *GeoGebra* para explorar la función cuadrática, es decir, su propuesta inicial. Algunos asignaron deslizadores para poder variar el valor de los parámetros *a*, *b* y *c*, con la finalidad de encontrar la gráfica que mejor se ajustara a los puntos graficados. En este momento de la actividad, fue necesaria una discusión grupal sobre el uso de deslizadores, a partir de la participación de los profesores con mayor experiencia en el uso de *GeoGebra*. Al no encontrar una gráfica con estas características (Figura 5), su atención se enfocó al último punto (diciembre) e identificaron que: *no se comporta como una cuadrática y parece que "volverá a subir"* (Figura 6)*; hay un punto que "se sale" de la parábola*. Por lo anterior, los comentarios que empezaron a surgir se centraban en que los puntos parecían tener un comportamiento cíclico, esto los llevó a investigar cuál sería el tipo de función que modela un comportamiento cíclico y llegaron a la conclusión de que podrían explorar la función seno.

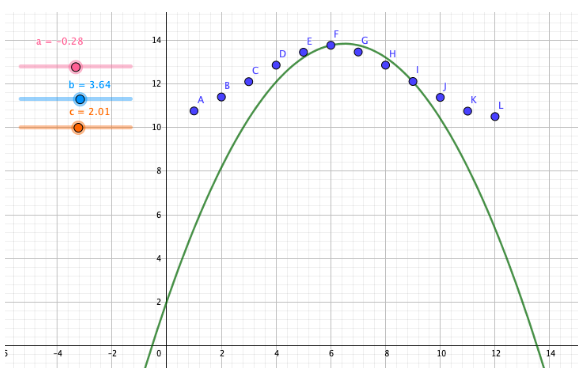
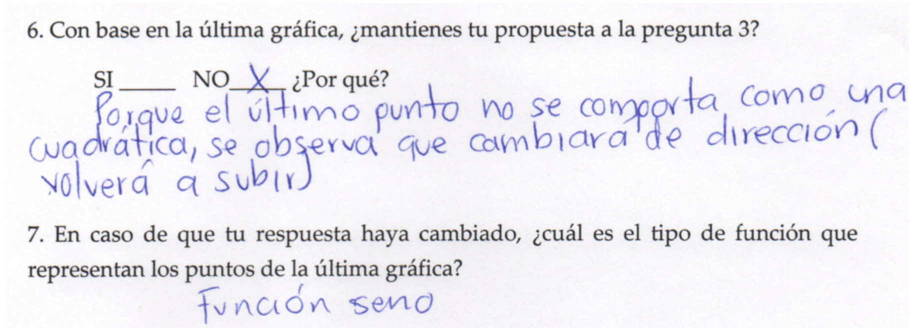


Figura 5. Construcción y exploración de la función cuadrática en *GeoGebra*


6. Con base en la última gráfica, ¿mantienes tu propuesta a la pregunta 3?

SI _____ NO _X_ ¿Por qué?

Porque el último punto no se comporta como una cuadrática, se observa que cambiara de dirección (volverá a subir)

7. En caso de que tu respuesta haya cambiado, ¿cuál es el tipo de función que representan los puntos de la última gráfica?

Función seno

Figura 6. Justificación del cambio en la propuesta inicial

Comentario. Es importante rescatar que cuando los profesores graficaron todos los puntos del año 2015 en *GeoGebra* seguían manteniendo como propuesta la función cuadrática. Fue hasta el momento en que, mediante los deslizadores, trataron de ajustar la gráfica a la función cuadrática a los puntos y, al no lograrlo, comenzaron a buscar argumentos para justificar lo que estaban observando. Es así como *GeoGebra* les permitió rechazar esas intuiciones o conjeturas iniciales que se formularon, provocando que volvieran a analizar el comportamiento de los datos para generar una nueva propuesta.

3.3 Búsqueda de múltiples acercamientos a la solución del problema

Después de la discusión que se generó durante las exploraciones, los profesores investigaron en Internet sobre las características y propiedades de la función seno, como la fórmula general para graficarla en *GeoGebra* y analizar su comportamiento, con el fin de identificar información que fuera útil para modelar una función que representara los datos graficados.

3.4 Primer acercamiento: empírico

De la búsqueda que hicieron los profesores sobre la fórmula general de la función seno encontraron: $y = a\,sen\,b(x - h) + k$ y $f(x) = a\,sen(bx + c) + d$. En ambas fórmulas se contemplan cuatro parámetros, así que procedieron a asignar un deslizador a cada uno para tener una perspectiva más general del comportamiento de la función. De esta manera, encontraron una función aproximada que pasa por todos los puntos, incluso por aquellos que corresponden a los primeros meses del año 2016 (Figura 7).

Durante la búsqueda de los valores aproximados de los parámetros, gracias a la actualización instantánea, que permite *GeoGebra* de la gráfica, los profesores pudieron identificar el efecto que tenía la variación de cada uno de los parámetros en la gráfica. Lo anterior, aunado a la investigación que hicieron en Internet y la discusión grupal sobre su trabajo, les permitió concluir que: el parámetro a es la amplitud de onda, el parámetro b es la frecuencia de onda, el parámetro c es el desplazamiento horizontal, el parámetro d es el desplazamiento vertical. Además, encontraron fórmulas y dedujeron otras que les permitían encontrar los parámetros (Figura 8). En particular, de la comparación entre las expresiones encontradas en Internet, obtuvieron una relación entre los parámetros b, h y c.

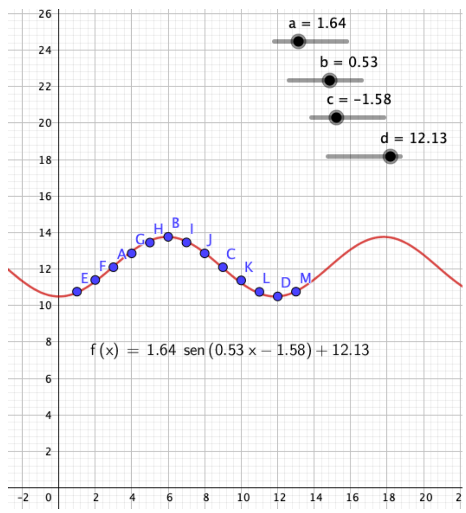


Figura 7. Aproximación empírica a la solución del problema

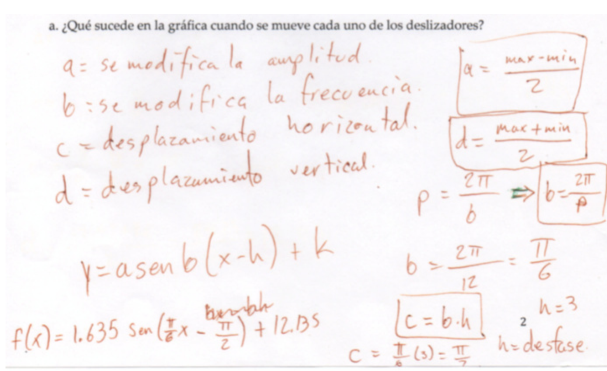


Figura 8. Interpretación y búsqueda de los parámetros de la función seno

3.5 Segundo acercamiento: algebraico

Este acercamiento se desarrolló debido a que los profesores investigaron en Internet fórmulas para encontrar de manera más precisa los valores de los parámetros. La primera fórmula reportada fue:

$$Periodo = \frac{2\pi}{b} \rightarrow b = \frac{2\pi}{periodo}$$

En discusión grupal, al explorar la gráfica de la función mediante la variación de los parámetros (deslizadores), dedujeron otras dos expresiones:

$$a = \frac{valor\ maximo - valor\ minimo}{2}$$

$$d = \frac{valor\ maximo + valor\ minimo}{2}$$

Para determinar el parámetro c (desplazamiento horizontal), del cual, inicialmente, no encontraron fórmula, colocaron el parámetro c en el valor cero y observaron que el valor máximo de la función coincidía con el mes de marzo. Por lo tanto, concluyeron que la función está desplazada 3 meses. Si 12 $meses = 2\pi$, donde 2π es el periodo de la función seno, entonces 3 $meses = \frac{\pi}{2}$. Además, observaron que cuando el desplazamiento es a la derecha el signo es negativo y cuando el desplazamiento es a la izquierda el signo que acompaña al valor de c es positivo. De esta manera, como en la ciudad de Monterrey el desplazamiento horizontal fue hacia la derecha, el desplazamiento es negativo. Así, la función que encontraron de manera algebraica fue: $f(x) = 1.64 * sen\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}\right) + 12.13$.

Además del procedimiento anterior, mediante la comparación de las expresiones $y = a\ sen\ b(x - h) + k$ y $f(x) = a\ sen(bx + c) + d$, donde h es el desfase, dedujeron la fórmula $c = bh$, donde $b = \frac{2\pi}{12}$ y $h = 3$. La Figura 9 muestra la construcción de Marcela en donde, a modo de comprobación, grafica la función encontrada y observa que se aproxima a la encontrada de manera empírica.

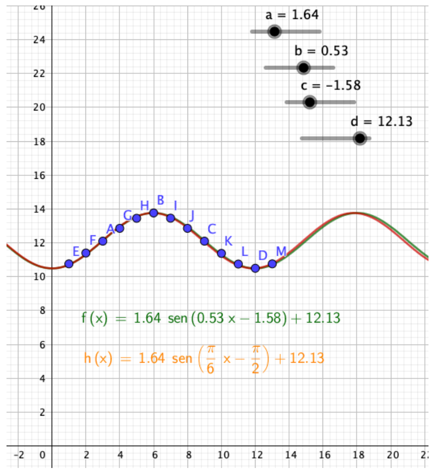


Figura 9. Comparación de las funciones encontradas en los diferentes acercamientos

Únicamente dos profesores reportaron haber encontrado el valor del parámetro c con ayuda de *GeoGebra*, a modo de ensayo y error (Figura 10).

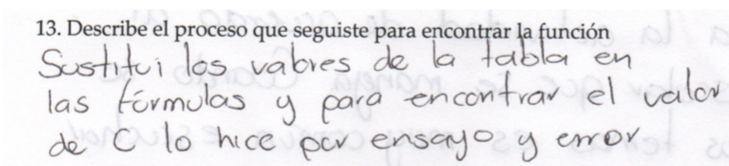

13. Describe el proceso que seguiste para encontrar la función
Sustituí los valores de la tabla en las fórmulas y para encontrar el valor de C lo hice por ensayo y error

Figura 10. Descripción del proceso de los profesores para encontrar la función

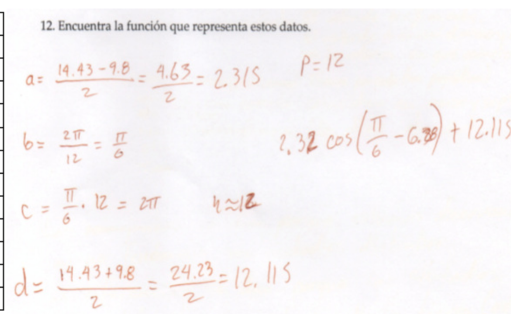
Comentario. En este episodio fue crucial el uso coordinado de las herramientas digitales *GeoGebra* e Internet. Los profesores aprendieron o recordaron la fórmula general de la función seno e identificaron el efecto que tiene en la gráfica la variación de los valores de sus parámetros. A pesar de que durante la búsqueda de información se obtuvieron dos fórmulas que de inicio parecían diferentes, con ayuda de las exploraciones en las construcciones dinámicas, pudieron encontrar las relaciones entre una y otra, principalmente relacionaron que $bh = c$, de manera que fue posible, con ayuda de fórmulas ya establecidas y las relaciones identificadas, encontrar de manera precisa los valores de los parámetros.

3.6 Integración

En este episodio se les proporcionó a los profesores los datos de las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes del año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina, se les pidió que encontraran la función que modelaba estos datos y que describieran su proceso. La finalidad de analizar otra ciudad fue ver de qué manera los profesores lograban conectar las relaciones y conjeturas formuladas en la situación anterior con la nueva información.

El procedimiento inmediato que desarrollaron los profesores fue hacer uso de las fórmulas para calcular los parámetros a, b, c y d (Figura 11). Particularmente, se apoyaron de *GeoGebra* para encontrar “visualmente” el parámetro h y, a partir de éste, calcular c y verificar su resultado (Figura 12). Así, reportaron la función: $f(x) = 2.32 * sen\left(\frac{\pi}{6}x + \frac{\pi}{2}\right) + 12.12$.

Mes	Horas de luz solar
Enero	14.03
Febrero	13.06
Marzo	12.06
Abril	10.98
Mayo	10.15
Junio	9.8
Julio	10.13
Agosto	10.96
Septiembre	12.03
Octubre	13.1
Noviembre	14.03
Diciembre	14.43


12. Encuentra la función que representa estos datos.

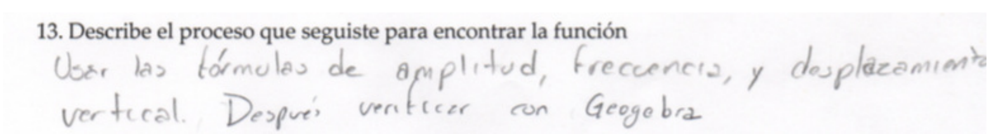
$a = \frac{14.43-9.8}{2} = \frac{4.63}{2} = 2.315$ $P = 12$

$b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ $2.32 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 6.28\right) + 12.115$

$c = \frac{\pi}{6} \cdot 12 = 2\pi$ $h \approx 12$

$d = \frac{14.43+9.8}{2} = \frac{24.23}{2} = 12.115$

Figura 11. Acercamiento algebraico reportado para la ciudad de Buenos Aires


13. Describe el proceso que seguiste para encontrar la función

Usar las fórmulas de amplitud, freccencia, y desplazamiento vertical. Después verificar con Geogebra

Figura 12. Proceso reportado para la ciudad de Buenos Aires

En la última parte de la actividad se les pidió a los profesores que compararan las dos funciones encontradas, describieron las semejanzas y diferencias y, además, trataran de explicar por qué sucedía este fenómeno. Para comparar las funciones, los profesores las graficaron en el mismo plano (Figura 13) y, con base en eso, establecieron como semejanzas: el desplazamiento vertical, el valor del periodo (12 meses), que tienen la misma “estructura” aunque cambie la función, que coinciden en marzo y septiembre; como diferencias: los meses en los que se localizaron los máximos y mínimos, la amplitud, el desplazamiento horizontal, mientras una crece la otra decrece. Es importante mencionar que uno de los profesores propuso como modelo la función coseno para la situación referida a la ciudad de Buenos Aires (Figura 14), con un desfase diferente del propuesto a la función seno; es decir, identifica que la única diferencia respecto a la función seno será en el desfase (ver Figura 11).

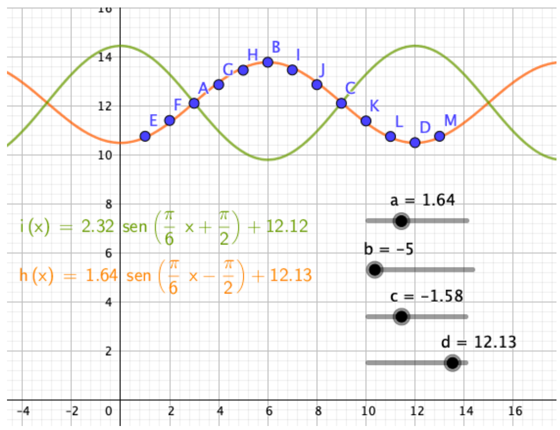
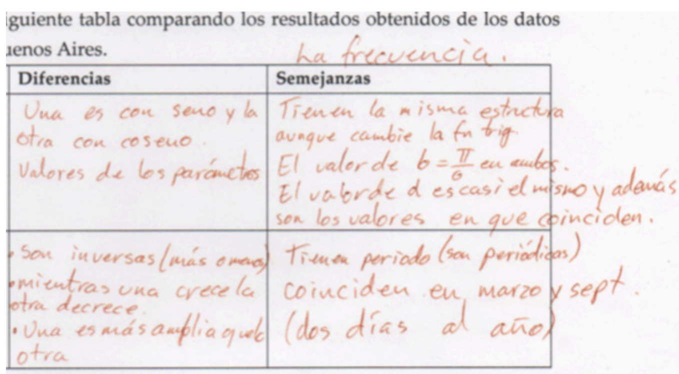


Figura 13. Comparación de las gráficas de las funciones de ambas ciudades


iguiente tabla comparando los resultados obtenidos de los datos
ıenos Aires.

La frecuencia.

Diferencias	Semejanzas
Una es con seno y la otra con coseno. Valores de los parámetros	Tienen la misma estructura aunque cambie la fn trig. El valor de $b = \frac{\pi}{6}$ en ambos. El valor de d es casi el mismo y además son los valores en que coinciden.
• Son inversas (más o menos) • mientras una crece la otra decrece. • Una es más amplia que la otra	Tienen periodo (son periódicas) coinciden en marzo y sept. (dos días al año)

Figura 14. Semejanzas y diferencias identificadas entre las dos funciones encontradas

Una parte importante de la actividad fue no solo quedarse con el reconocimiento de las diferencias y semejanzas en el contexto matemático, sino que se planteó la discusión de ¿por qué sucederá eso? Tres profesores lograron relacionar lo observado con el contexto geográfico, es decir, comentaron que las diferencias se daban porque se estaban analizando ciudades que estaban en distinto hemisferio del planeta y que las horas de luz dependían de qué tan lejos o cerca estaban de los polos (Figura 15).

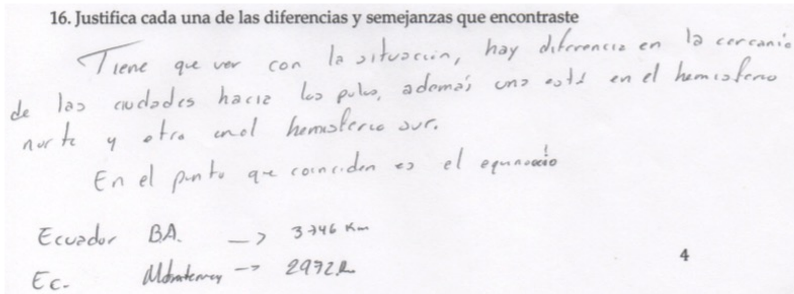


Figura 15. Justificación del fenómeno observado en las gráficas de ambas ciudades

Comentario. Este episodio resultó enriquecedor ya que permitió que los profesores dieran sentido al comportamiento observado en las funciones encontradas para las dos ciudades. Fueron capaces de relacionarlos con las características geográficas de las ciudades. Además, reconocieron que, al tratarse de una función cíclica, se espera que en los próximos años el comportamiento de las horas de luz solar sea similar al analizado. Es importante mencionar que, aunque sólo un profesor lo desarrolló (ver Figura 11), comentaron que también podían explorar la función coseno, pues al tener características semejantes a la función seno se espera que también pueda representar los mismos datos.

4. Conclusiones

La incorporación de tecnologías digitales, como *GeoGebra*, en el proceso de modelación durante la resolución de problemas sobre funciones trigonométricas permitió a los profesores comprobar o rechazar sus intuiciones o conjeturas iniciales generadas durante el primer análisis de los datos y obtener distintos caminos hacia la solución de problema. También, promovió la exploración del comportamiento de la gráfica de la función seno mediante la manipulación de los deslizadores asignados a los parámetros de la misma. Además, con el uso de *GeoGebra*, se construyeron modelos dinámicos precisos con los cuales se pudieron analizar los problemas de una manera geométrica, permitiendo obtener relaciones y conjeturas al identificar variantes e invariantes en los objetos involucrados, para proponer una solución del problema.

En este sentido, la representación dinámica del problema ofreció la oportunidad a los participantes de explorar, identificar conceptos, buscar conjeturas y diversas maneras o argumentos para sustentarlas. En este proceso, utilizaron estrategias asociadas con el uso de *GeoGebra*, como el movimiento de objetos mediante la manipulación de deslizadores. Así, el uso de *GeoGebra* permite que los estudiantes puedan analizar y formular conjeturas con base en las exploraciones que difícilmente se harían a papel y lápiz y, posteriormente, que lleguen a justificarlas a través de argumentos matemáticos.

El uso coordinado de las herramientas digitales favoreció la comprensión de conceptos matemáticos, pues permitió que los profesores integraran contenidos matemáticos, desarrollaran habilidades al resolver problemas y reorganizaran las ideas al establecer relaciones y conexiones entre diferentes representaciones de los conceptos matemáticos involucrados. El uso sistemático de las tecnologías digitales promovió el desarrollo de distintas formas de razonamiento. De manera general, los profesores exhibieron una forma de razonar que reflejaba un tránsito de lo empírico a lo formal. El uso de la herramienta fue crucial para conciliar los argumentos visuales o geométricos con los acercamientos algebraicos para justificar las conjeturas formuladas por los profesores.

El diseño de la actividad favoreció el complemento entre las técnicas que se utilizan en papel y lápiz y la construcción y exploración de modelos dinámicos que representan el problema. Fue también importante la búsqueda de información en Internet como otro de los recursos disponibles para los profesores. Esto favoreció, en los participantes, la construcción o refinamiento de conceptos e ideas matemáticas y sus estrategias en la resolución de problemas. Además, esta actividad es un contexto propicio para promover la interdisciplinariedad, al relacionar conceptos de disciplinas como matemáticas y geografía. Lo anterior, puede ayudar a que el estudiante se sienta motivado e interesado por el tema que va a estudiar y le pueda dar significado a cada uno de los conceptos y relaciones matemáticas involucrados en el estudio de funciones trigonométricas.

Referencias

Aldon, G., Hitt, F., Bazzini, L. & Gellert, U. (Eds.), (2017). *Mathematics and Technology*. Cham, Switzerland: Springer.

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

DePeau III, E. A. (2012). Surise, sunset. En H. Gould, Murray. D. R. & Sanfratello, A. (Eds.), *Mathematical Modeling Handbook* (175-182). Bedford, MA: Consortium for Mathematics and its Applications.

FitzSimons, G. E. (2017). Technology and Teachers' Professional Development: A Comentary. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & U. Gellert (Eds.), (2017). *Mathematics and Technology*. (607-621). Cham, Switzerland: Springer.

Guerrero, C., Mena, J. & Morales, A. (2018). Fostering Transit between Real World and Mathematical World: Some Phases on the Modelling Cycle. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*, 1605-1628.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302-310. Disponible en https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2FBF02652813.pdf

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T. & Zawojewski, J. S. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Martínez, C. & Ulloa, R. (2017). Dynamic Geometry Software and tracing tangents in the context of the mean value theorem: technique and theory production, *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *24*(2), 75-82.

Díaz-Leyva, C. (En prensa). El estudio de las funciones trigonométricas a través de la construcción y exploración de modelos dinámicos en *GeoGebra*. Tesis de Licenciatura no publicada. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Juárez del Estado de Durango.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 279-302.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Solares, A., Preciado A. P., Peña, F., Ortiz, A., Sandoval, M., Soriano, E. *et al*. (2018). Tendencias en Modelación Matemática en Latinoamérica. En T. E. Hodges, G. J. Roy & A. M. Tyminski (Eds.). *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 88-100). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Vargas, V., Reyes, A. & Cristobal, C. (2018). Models and modelling perspective in México, the Michoacán Forest. En T. E. Hodges, G. J. Roy & A. M. Tyminski (Eds.). *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 422-423). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Villarreal, M. (2019). Experiencias de modelización en futuros profesores de matemática. Conferencia presentada en la *XV Conferencia InterAmericana de Educación Matemática* (pp. 1-9). Disponible en http://ciaem-redumate.org/conferencia/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

6 Modelización digital del movimiento uniforme, una aproximación a la función lineal

Armando Hernández Solís[1], Marco Antonio Santillán Vázquez[2], Héctor Pérez Aguilar[3]

Resumen

Modelizamos el movimiento uniforme apoyados en una aplicación de geometría dinámica, pares conceptuales físico-geométricos y un sensor de movimiento para presentar un acercamiento a la función lineal y, con ella, construir relaciones entre variación y acumulación.

Palabras clave: sensor de movimiento, gráficas dinámicas ligadas, pendiente, velocidad, picos.

Résumé

Nous modélisons le mouvement uniforme soutenu par une application de géométrie dynamique, de paires physico-géométriques et d'un capteur de mouvement, afin de présenter une approche de la fonction linéaire et d'établir avec elle des relations entre variation et accumulation.

Mots clés : capteur de mouvement, graphiques dynamiques liés, pente, vitesse, pointes.

Abstract

We model the uniform movement supported by an application of dynamic geometry, physical-geometric pairs and a motion sensor, to present an approach to the linear function and with it, build relationships between variation and accumulation.

Keywords: motion sensor, linked dynamic graphics, slope, speed, spikes.

[1] CCH-UNAM, México.

[2] CCH-UNAM, México.

[3] CCH-UNAM, México.

1. Introducción

Para muchos profesores novatos de secundaria y bachillerato la función lineal se considera trivial, sin problemas de aprendizaje. No es así, el concepto de pendiente, central en estas funciones, presenta dificultades para la generalidad de alumnos de secundaria (Filloy *et al.*, 2008), por estar ligado a la problemática de las razones, proporcionalidad y variación (Freudenthal, 2001). Este trabajo desarrolla un tratamiento para introducir la función lineal a partir de asumir, como Confrey y Malony (2007), que la modelización "puede ser un poderoso organizador para la enseñanza de las matemáticas" (p. 67); nos apoyamos en tecnologías digitales y registros de representación (Duval, 1993) gráfico, numérico, algebraico y verbal.

Objetivos

Desde una interpretación de la modelización (Lesh. & Doerr, 2003) para los niveles de secundaria y bachillerato, utilizamos un sensor de movimiento (SM) y gráficas generadas en un ambiente dinámico, para abordar dos objetivos centrales:

i) Construir la pendiente de la recta y la función lineal, geométrica y físicamente, en forma gráfica-intuitiva.

ii) Construir los pares conceptuales: *pendiente-velocidad*, *picos-discontinuidad* y *acumulación-distancia recorrida.*

2. Perspectiva teórica

Apoyados de un SM los participantes descubren conexiones entre cómo se mueven frente a éste y la gráfica de su movimiento, en realidad, simples rasgos gráficos, como muestran las figuras 2 y 4, rasgos que, en un proceso conjunto de abstracción-generalización, se convierten en signos abstractos: **/ — **, traducibles como pendientes, la esencia de la función lineal. A partir de estas conexiones, una sucesión de actividades o trayectoria de aprendizaje se enfoca en construir relaciones expresables verbalmente en formato condicional $p \rightarrow q$, un paso decisivo para dotar de significado a la pendiente y a la función lineal.

El diseño de actividades plantea una sucesión de acciones con gráficas de distancia/tiempo (d/t), que apoyan a los participantes para asociar mayor o menor pendiente con mayor o menor velocidad y el signo de la pendiente se asocia con el sentido del movimiento: alejarse del SM produce el signo +, acercarse al sensor, produce el signo **—**, permanecer inmóvil, se conecta a pendiente cero.

Nuestro trabajo se apoya en pares conceptuales de componentes física y geométrica, la manipulación de gráficas a través de tecnología digital y una secuencia de construcción del símbolo desde el sentido hacia el significado, en una trayectoria hipotética de enseñanza-aprendizaje y en una interpretación del constructo *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (THA) según Simon (1995), Simon & Tzur (2004) y Gómez & Lupiáñez (2007).

a) Pares conceptuales

Con el SM, construir significado de la función lineal requiere visualizar ciertos rasgos gráficos como segmentos de recta y construir la pendiente del segmento como invariante. ¿Cómo? Reconociendo que el movimiento a velocidad constante de un objeto implica que en cada instante la velocidad es la misma, no cambia, y la gráfica de este movimiento se representa por un segmento de recta en el cual, en cada punto, la pendiente tiene el mismo valor, es invariante, pues el movimiento es constante, de modo que, velocidad constante y pendiente son un par, un elemento del par es referente del otro, uno da significado al otro. El par está fundado en asociar lo visual y lo motriz, la forma como se mueve un sujeto y el rasgo gráfico que insinúa un segmento de recta con una pendiente positiva, negativa o cero. Cuando se abstrae el ruido, los rasgos pueden transformarse en signos gráficos, mostrados en la Figura 3, la idealización de los rasgos se muestra en la Figura 2.

Para alcanzar los objetivos propuestos es indispensable construir un arreglo experimental como el mostrado en la Figura 1.

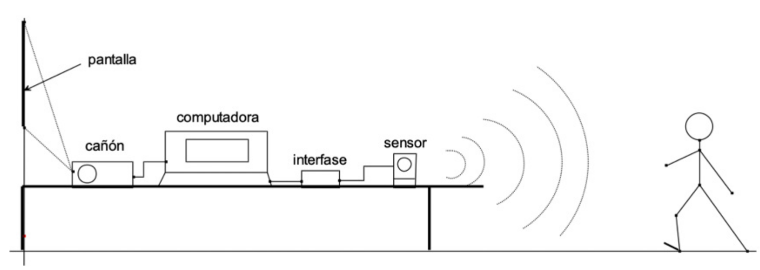


Figura 1. Arreglo experimental

Lo característico del arreglo es que SM, sujeto y pantalla están en la misma línea, permitiendo al participante tener, *frente a sus ojos*, cómo se produce la gráfica de su movimiento en aparente *tiempo real* pues, para fines prácticos, la formación de la gráfica ocurre casi instantáneamente, sin retraso apreciable; pero siempre habrá ruido, señales *parásitas* distintas a la información del movimiento. El ruido es inherente al SM, nunca puede cancelarse.

Discutiendo qué es el ruido y el mecanismo a través del cual éste enmascara la información del movimiento, los participantes pueden abstraerlo, y entonces identifican a la Figura 3 como la idealización de los rasgos de la Figura 2. Además, sustituyendo la palabra “inclinación” –usada por los participantes– por pendiente, ésta es asociada a los segmentos de la Figura 3, es decir, a las pendientes con los signos respectivos.

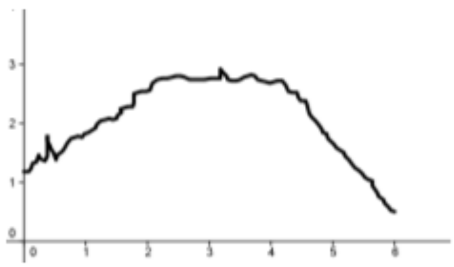


Figura 2. Signos gráficos .

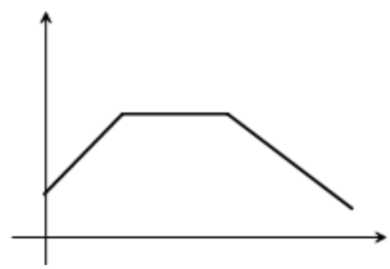


Figura 3. Signos gráficos

m > 0 *m = 0* *m < 0*

Las actividades son diseñadas en sucesión, inician con la familiarización del SM y culminan cuando, moviéndose frente al sensor, los participantes pueden reproducir, aproximadamente, una gráfica dada, como la formada con segmentos de recta de la Figura 4. Cuando un sujeto se mueve frente al sensor y trata de reproducir la gráfica ideal se obtiene una gráfica con rizos (ruido), pero de forma evidente, casi *empalmándose* con la gráfica ideal.

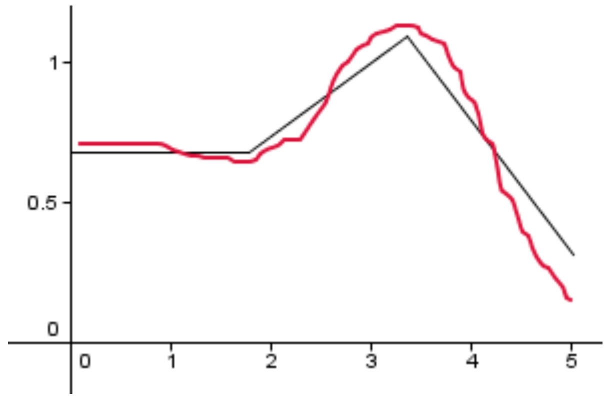


Figura 4. Gráfica

El diseño de actividades con el SM se enfoca en construir el par: *pendiente-velocidad*, en el que los participantes identifican sus componentes como equivalentes y, bajo la orientación de los instructores, se construyen las relaciones entre *área bajo una curva y distancia recorrida*, otro par conceptual; en los dos, un elemento del par es un concepto geométrico y el otro un concepto físico, uno le da significado al otro. Los picos, como los mostrados en las figuras 2, 3 y 4, obligan a *ir más allá*, a tratar la discontinuidad.

b) Representaciones

Para Thom (1973), "el problema al que se enfrenta la enseñanza de las matemáticas no es el del rigor, sino el del 'significado' de los objetos matemáticos" (p. 202). Y para acceder a los objetos matemáticos, debemos representarlos en registros externos, semióticos (Duval, 1993). En este estudio, esencialmente abordamos el contenido de las representaciones en formatos gráfico y numérico, el significado de la gráfica y la tabla numérica, la información sobre cómo se mueve un sujeto. El arreglo experimental, Figura 1, permite al participante ver su movimiento traducido en una gráfica *d/t*, y reconocer en ella rasgos gráficos asociables a formas *específicas* de movimiento: hacia adelante, atrás, permanecer inmóvil, entre otras. Al practicar y observar a sus compañeros, descubre relaciones invariantes que puede verbalizar como: *si me muevo así (de esta forma), genero este tipo de rasgo gráfico,* o *para producir este tipo de rasgo,* *debo moverme de esta forma*.[4] En estas formas gráficas, los segmentos de recta asocian la pendiente con la velocidad, que se llegan a ver como una y la misma cosa; desde luego, esto se facilita porque cuando los sujetos se mueven frente al SM caminan, por lo tanto, su movimiento ocurre casi a velocidad constante.

Para entender la gráfica, el sujeto debe ser competente en leer y traducir coherentemente la información de una representación a otra (Janvier, 1987; Duval, 2006). Una representación gráfica tiene una forma –como la vemos– y un contenido; en este caso de la descripción del movimiento en registros diferentes, las formas no son iguales y los contenidos no son los mismos: cada registro da información distinta del objeto matemático, por ello, deben realizarse actividades entre registros en todas las combinaciones posibles, del registro gráfico al numérico y viceversa; del registro gráfico al algebraico y viceversa, etcétera. Por ejemplo, los participantes identifican en la tabla numérica en qué intervalos de tiempo el sujeto no se movió y su correspondiente parte de la gráfica; en qué zona de la gráfica la velocidad es menor o mayor y a qué valores numéricos corresponden; o discuten por qué la velocidad es negativa. Una actividad importante pide a los participantes moverse frente al sensor para reproducir una gráfica ideal. El sujeto debe leer la gráfica, entender cómo debe moverse para tratar de reproducirla y entonces moverse. El paso siguiente es fundamental, abrir la discusión sobre ¿cómo moverse para formar los picos? ¿Es fácil?, ¿será posible?

c) Sentido y significado

En este trabajo hablamos de sentido como el referente, generalmente material, sobre el que se construye el significado del signo (Schaff, 1978). Por ejemplo, en una gráfica como la mostrada en la Figura 2, el referente, lo que da sentido, es el movimiento de un sujeto específico, Luis o Mario, mientras que el significado de esa gráfica es: el sujeto primero se alejó, luego se detuvo un cierto lapso y regresó. O, idealmente, las pendientes de esa figura, de izquierda a derecha, son: $m > 0$, $m = 0$, $m < 0$, el significado geométrico de esa gráfica. El sentido cambia con el contexto, la misma gráfica en otro contexto puede representar un fenómeno diferente, quizá el comportamiento de la temperatura de un líquido en un intervalo de tiempo. Visto así, no puede haber significado sin sentido previo, sin una referencia base.

---

[4] Desde luego, la verbalización es un registro representacional que también estamos tratando.

d) Trayectorias de enseñanza-aprendizaje

Para lograr un objetivo formulamos un plan, consideramos qué tenemos y qué no, los recursos, la ruta a seguir más adecuada, etcétera. Imaginamos una secuencia de actividad. Por ejemplo, al presentar un tema curricular en el aula, analizamos qué conocimientos y habilidades necesitan los alumnos y entonces diseñamos una secuencia de acciones en donde establecemos un orden y la profundidad de tratamiento de cada paso, metas intermedias y la trayectoria adecuada. Pero la naturaleza del aprendizaje obliga a apoyarnos en elementos teórico-metodológicos que nos orienten sobre cómo ocurre o se favorece el aprendizaje, en dónde hay problemas, por qué, de qué tipo y cómo abordarlos; cómo sacar provecho de las tecnologías digitales para mejorar la enseñanza y apoyar el aprendizaje. Después, evaluar la viabilidad del diseño y entonces hacer correcciones, rediseñar pasos y desechar partes o todo. Este proceso representa una forma de metodología, la planificación de la investigación, un elemento de un *modelo teórico local* (Filloy *et al*., 2008), específico para este trabajo.

3. Desarrollo

Cuando el movimiento es uniforme, su representación cartesiana *d/t* es un segmento de recta y en ésta, la pendiente es la misma en cualquier punto, porque la velocidad es invariante en todo instante, esto es la esencia del par *pendiente-velocidad*, una relación que permite a los participantes en este experimento de enseñanza-aprendizaje (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003; diSessa & Cobb, 2004) usar un elemento del par para dar sentido al otro. En algunas situaciones, el elemento físico del par funciona como referente inicial para dar sentido a la componente geométrica; en otras, la componente geométrica da sentido a la física.

¿Cómo construir relaciones entre distancia y velocidad, entre pendiente y área bajo una curva? Apoyándonos en una forma de representación gráfica que hemos llamado *gráficas ligadas*, caracterizadas porque una está dibujada abajo de otra y los valores de los ejes horizontales son los mismos. Como en la Figura 5, en donde el valor genérico x_o es el mismo en ambas gráficas.

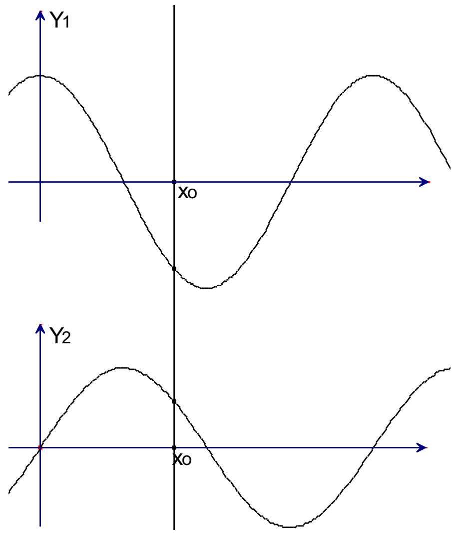


Figura 5. Gráfica

Pero, cuando este tipo de gráficas se construyen en *GeoGebra*, son dinámicas, de modo que, siguiendo las reglas del *software* y de la construcción, una modificación en una se refleja en la otra. De esta forma, pueden diseñarse actividades en donde el sujeto que opera con esta aplicación descubre relaciones entre las dos gráficas, relaciones de naturaleza numérica y gráfica, en las dos direcciones, de arriba hacia abajo y viceversa; relaciones entre la representación gráfica y la numérica en cada gráfica, la de arriba y la de abajo. Con esta herramienta y un diseño adecuado, correcto, se puede apoyar a los estudiantes en la construcción de significados de los objetos matemáticos que pueden favorecer el aprendizaje conceptual.

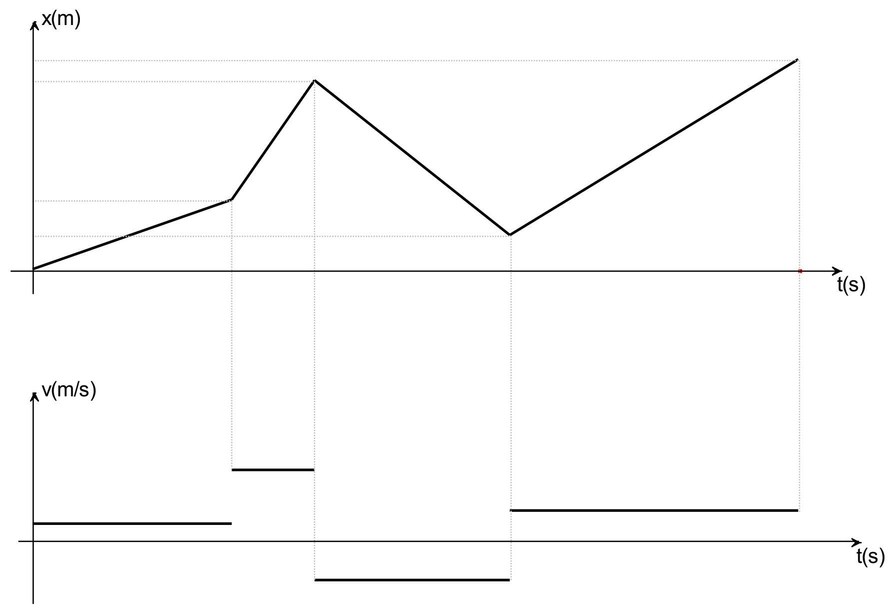


Figura 6. Gráfica Dinámica Ligada

En la Figura 6, como en Hernández & Santillán (2017), la Gráfica Dinámica Ligada (GDL) muestra en la parte superior una gráfica *d/t* y abajo la gráfica de velocidad-tiempo (*v/t)*; en esta última, los segmentos paralelos al eje horizontal, representantes de la velocidad, fueron traducidos como la pendiente de los segmentos de recta de la gráfica superior, entonces cualquier cambio en ésta, modifica la representación de la velocidad correspondiente.

La segunda parte de la secuencia centra la acción de los participantes en manipular la GDL, descubrir relaciones y enunciarlas verbalmente y por escrito, o manipular la gráfica superior para que la inferior adquiera una forma específica, por ejemplo, que en un intervalo la velocidad cambie de signo o adquiera el valor cero. Trabajando en este ambiente se consolidan significados y, desde aquí, las relaciones serán entre variables, para aterrizar en el objeto función.

En este trabajo el término rasgo lo usamos para distinguirlo del signo. El rasgo antecede al signo y al símbolo, es la percepción de algo sin significado ni sentido, es lo inmediato, sólo una manifestación del SM a una cosa enfrente de él. En tanto inmediato, su percepción es instantánea: no está mediada, el sujeto ni siquiera es consciente de lo que ve o percibe. No se trata de reconocer algo, no hay datos o conocimientos previos en la memoria; si fuera el caso, se trataría de identificar o recordar algo.

Para transitar del rasgo al símbolo diseñamos una secuencia de acción, una trayectoria de enseñanza-aprendizaje inspirada en el constructo THA, la cual se caracteriza por: 1) el punto de partida, 2) la ruta o trayectoria, 3) la meta y 4) una conjetura sobre cómo suponemos que sucede o se favorece el aprendizaje y la construcción de significados.

A través de procesos de generalización y abstracción (Dreyfus, 1991; Dubinsky, 1991), de construcción y reconstrucción, los participantes –con la guía del profesor–, traducen estos rasgos en segmentos de recta, signos gráficos ideales, como en la Figura 3. En el marco del sistema cartesiano del SM, los signos son asociados a formas o tipos específicos de movimiento: lento, rápido, hacia atrás, etcétera; y en un nivel simbólico, a las pendientes genéricas básicas:

$$m > 0,\ m = 0,\ m < 0$$

Con el SM las gráficas son acciones motrices representadas y el control del movimiento del cuerpo lleva al sujeto, en cierto sentido, a manipular la gráfica, casi a voluntad. Esta herramienta transforma las señales sónicas en gráficas cartesianas *d/t*, de modo que tales señales aparecen en un fondo, en este caso el sistema cartesiano, contexto en que el ruido y los rasgos gráficos –signos potenciales– tienen sentido y pueden adquirir significado.

Hablamos de hacer sentido al asociar lo percibido, un rasgo gráfico y una acción, moverse, como un primer momento en el camino a la construcción del signo y la comprensión de las gráficas. El significado del signo gráfico es el resultado de la actividad de comprensión, esto es, construir las relaciones entre el fondo o contexto cartesiano en donde el signo se produce y se transforma en símbolo de la acción: la representación del movimiento de un sujeto; pero antes debe percibirse el rasgo, entender que dice algo sobre el movimiento y entonces idealizarlo, en un proceso de abstracción-generalización en donde los términos signo, símbolo y rasgo forman parte de un proceso secuencial de creación-transformación:

rasgo → signo → símbolo

Esta secuencia es una forma de desarrollo de lo simple a lo complejo, en donde abstracción, generalización y síntesis (Dreyfus, 1991) van ganando terreno; en donde el sujeto, poco a poco, ve que el rasgo es un signo (la señal) más ruido, que el signo está en lugar de otra cosa, que puede operar y razonar con él y, sólo entonces, adquiere significado, transformándose en un símbolo matemático, de este modo:

símbolo = signo + significado

Además, en este trabajo, asumimos que el símbolo no preexiste a la acción del sujeto, éste crea el significado y, por lo tanto, el símbolo. Pero, en el principio está la acción (Goethe, 1999), sin la actividad del sujeto no hay construcción de significados ni aprendizaje. Con el SM el rasgo, como en la Figura 2, es la mezcla de información y ruido, el dato que captura el sensor del objeto moviéndose frente a él, la información distancia-tiempo y el ruido, toda señal distinta de la información *d/t* sobre el movimiento del objeto.

Con la orientación del profesor los alumnos pueden abstraer el ruido, *filtrarlo*, entonces y sólo entonces el rasgo se transforma en signo, como en la Figura 3, una idealización, algo en vías de transformarse en símbolo matemático.

Por otra parte, la presentación formal de los conceptos de continuidad y discontinuidad es muy compleja. En matemáticas la continuidad es el núcleo del Análisis, se aborda desde los números reales y es el concepto central de las funciones. En la naturaleza, en el llamado *mundo real* (Blum *et al.,* 2007), solamente en el micro-mundo cuántico podemos encontrar fenómenos en donde aparece la no continuidad, fuera de él no es fácil encontrar ejemplos de discontinuidad. Waldegg (2002), construye un argumento sobre la dificultad para imaginar un tiempo discreto del hecho que, nuestra experiencia perceptual e intuiciones, modeladas a partir de las concepciones que la mecánica clásica ha logrado arraigar en nuestra forma de concebir el mundo, no nos proveen de evidencias que puedan guiar nuestra razón en la dirección de un tiempo discontinuo. En palabras de Leibniz: *Natura non facit saltus.* Sólo con la aparición de la mecánica cuántica, se comenzará a cuestionar la posibilidad de la discontinuidad del tiempo. En física clásica no hay instantes en donde el tiempo no exista, el tiempo es continuo en los fenómenos físicos clásicos y en las gráficas *d/t* no puede haber *hoyos* o huecos (Newman, 1969), en cualquier instante siempre hay una posición, una distancia recorrida y el movimiento siempre está definido, aunque su valor sea cero. Pero, hay gráficas *d/t* con picos, como en la parte superior de la Figura 6 y, para ese valor, los picos se asocian con discontinuidades en la parte inferior de la gráfica *v/t*. Con este tipo de gráficas ligadas, tenemos un modelo que asocia la discontinuidad con algo muy cercano a la experiencia cotidiana.

Moviéndose frente al SM, nadie ni nada puede cambiar instantáneamente de dirección. Nadie, nada, puede formar picos en una gráfica *d/t*; y si fuera posible, las gráficas asociadas a este fenómeno serían como muestra la parte inferior de la Figura 6, en donde la gráfica *v/t* obligadamente *se rompe*, es discontinua. La no continuidad aparece como una acción físicamente imposible: formar un pico cuando algo material se mueve.

En una secuencia de actividad, diseñada adecuadamente, una Gráfica Dinámica Ligada (GDL) es un mediador con gran potencial para descubrir-construir conexiones entre las gráficas superior e inferior, relaciones entre la variación y acumulación, a través de enfoques geométricos y físicos; relaciones entre pendientes y velocidades; áreas y distancias recorridas. En este tipo de gráficas, en los picos no hay pendiente, no está definida; simultáneamente, las discontinuidades están ligadas con los picos y a la imposibilidad de formarlos a partir del movimiento.

4. Diseño experimental

Con el SM y las GDL, los objetivos y la perspectiva teórica generan un ambiente de actividad en donde las acciones guardan cierto orden y determinan una secuencia de actividad apuntando a un objetivo: construir significado de la función lineal.

La actividad experimental fue trabajada con alumnos de bachillerato de 15 y 16 años. Como su participación fue voluntaria, asistiendo regularmente entre 13 y 15 estudiantes, el análisis final de datos se tomó con los asistentes regulares.

En las actividades con el sensor de movimiento, se montó un escenario experimental con una computadora personal, el sensor y un cañón como el mostrado en la Figura 1. Cada estudiante se mueve frente al SM y observa su movimiento en una gráfica cartesiana mostrada en una pantalla, frente al alumno. Aquí, el arreglo experimental es fundamental, pantalla, sensor y sujeto están en línea, la gráfica está frente al sujeto y, como el sistema procesa la información en fracciones de segundo imperceptibles para el ser humano, genera la sensación de que gráfica y movimiento ocurren simultáneamente, una situación con enorme potencial didáctico, explotado en este trabajo. Una vez que los participantes ya han practicado diferentes formas de movimiento y tienen una idea general de las relaciones entre formas gráficas y movimientos, se trabaja con el sensor apagado, entonces un sujeto camina frente al sensor y los demás dibujan en su cuaderno cómo es la gráfica *d/t* de ese movimiento. Se discute y acuerda cuál es la gráfica correcta y el ejercicio se realiza varias veces.

Concluidas las actividades con el SM, el diseño de acciones con las GDL se enfoca en establecer relaciones entre velocidad y distancia recorrida. Llama la atención de los participantes que el área de los rectángulos, base por altura, de la parte inferior de la Figura 6, tiene unidades de distancia, (m/s)(s), que corresponden, en la gráfica superior, a la distancia recorrida (m); esto es, hay una relación entre estas gráficas superior e inferior, entre la distancia recorrida y la velocidad; una relación entre la pendiente del segmento de recta y el área bajo la curva (bajo un segmento horizontal), en este caso, el área de un rectángulo. Para algunos estudiantes, la congruencia de las unidades m/s, m y s, les lleva a ver la relación, a visualizarla.

5. Resultados

Los resultados obtenidos hasta el momento son parciales, pero nos permiten conjeturar la viabilidad de construir significados sobre variación, pendiente, acumulación y función lineal, y relaciones entre ellos. Además, vemos aquí un gran potencial para un acercamiento inicial al teorema fundamental del cálculo en una perspectiva gráfica-intuitiva. Esto es posible por el apoyo que brindan las tecnologías digitales y es mejorable, rediseñando las actividades, poniéndolas a punto en una secuencia de enseñanza-aprendizaje que, también, *dé luz* sobre cómo favorecer el aprendizaje con la tecnología digital. En lo que sigue, listamos algunos resultados obtenidos:

1. Con el SM se construyen nexos iniciales que, en cuanto observaciones aisladas entre movimiento y rasgos gráficos, son débiles y poco significativas. Se requiere de un segundo momento para transformar esos nexos o asociaciones en relaciones necesarias, y entender que cada punto de una gráfica corresponde con una pareja de valores numéricos ligados con variables que se integran en un objeto, del que gráfica y tabla son dos de sus manifestaciones o representaciones. Aquí, las GDL juegan el papel integrador.

2. El SM tiene potencial para apoyar un entendimiento básico del sistema cartesiano y la construcción de significado de gráficas *d/t*. Por ejemplo, cuando se ha solicitado a alumnos de primer año de secundaria moverse frente al SM y reproducir gráficas de este tipo, después de practicar tres o cuatro veces, logran generar gráficas similares a la solicitada, como en la Figura 7.

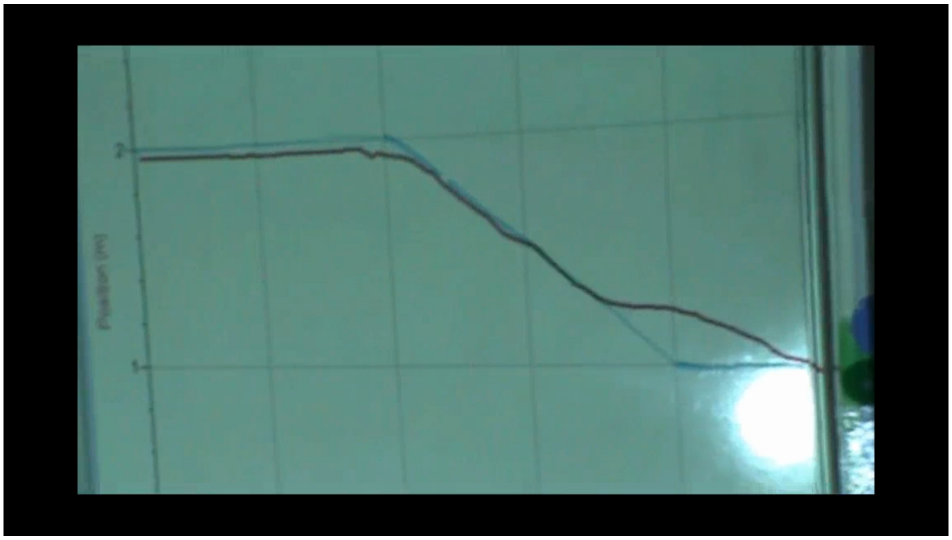


Figura 7. Gráfica generada por los alumnos

Arriba, la gráfica más tenue es la que debe reproducir el participante, moviéndose frente al SM, mientras que la más obscura es la generada con su movimiento.

3. Con facilidad, los participantes identifican el intervalo de una gráfica en donde se alejaron o acercaron al sensor y el correspondiente intervalo en la tabla numérica y pueden realizar la identificación inversa: pasar de la tabla a la gráfica.

4. Utilizando la información numérica, los participantes calculan la pendiente de la recta y la asocian con la velocidad media en ese intervalo.

5. La generalidad de los participantes entiende que es imposible generar picos con el SM. Uno de los argumentos consiste en señalar que cuando se mueven frente al sensor, en el mismo instante no pueden tener velocidad positiva y negativa o que el sentido de su movimiento no puede ser hacia adelante y atrás en el mismo instante.

A continuación, en la transcripción de un clip de video de una actividad utilizamos la letra *P* para referirnos al profesor, *C* para Cristopher, y *U* para Uriel:

P: *Camina frente al sensor de modo que la gráfica que generes* (roja), *empalme con la mostrada en la pantalla* (negra).

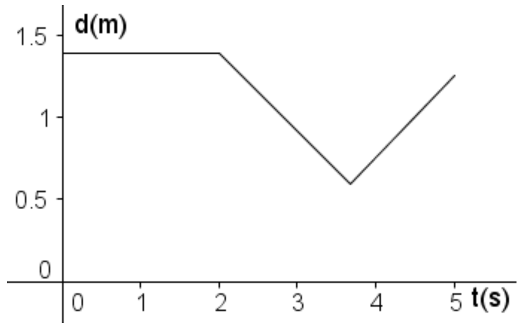


Figura 8. Gráfica solicitada

C camina frente al SM, trata de reproducir la gráfica solicitada, Figura 8, obteniendo la gráfica de la Figura 9.

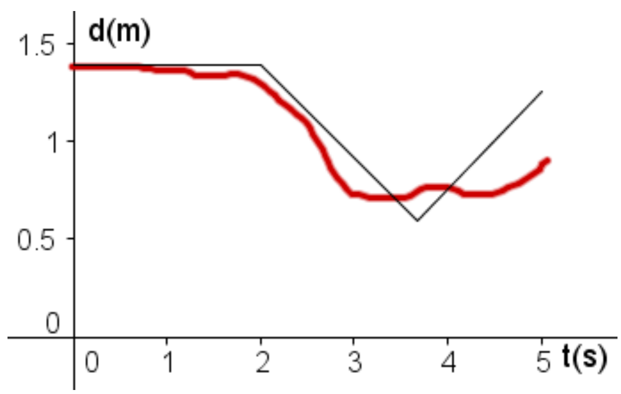


Figura 9. Gráfica obtenida

P: *Una más*.

C Camina nuevamente y obtiene la gráfica mostrada en la Figura 10.

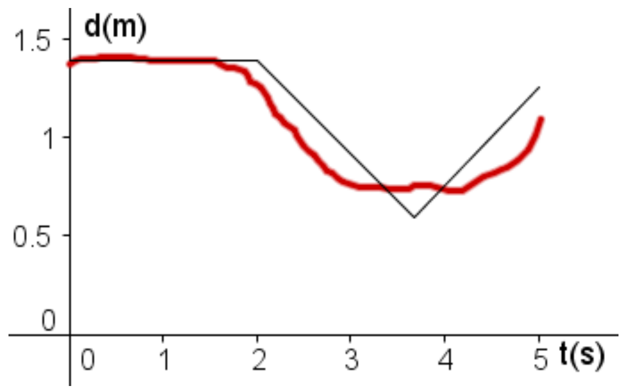


Figura 10. Gráfica generada por *C*

P: *¿Cuál es el pico más difícil de generar, el primero o el segundo?*

Todos los participantes: *El segundo*.

P: ¿Por qué?

C: Tienes que cambiar la velocidad, de ir hacia adelante tiene que regresar en seguida.

C balbucea, duda, en realidad está pensando cómo expresar su respuesta a la pregunta. Identifica correctamente que en un pico las pendientes (velocidades) cambian bruscamente de signo, de **+** → **–**; de **–** → **+** o, de **0** → **–** , o de **–** → **0,** etcétera.

P: *¿En cuánto tiempo tienes que hacer ese cambio para generar el pico?*

C: *En cero segundos*.

Esta respuesta de *C*, *en cero segundos*, nos dice que *C* capta la naturaleza puntual del pico. Una función que describa la gráfica de la Figura 6, debe ser continua en el pico, pero el balbuceo de *C* tiene que ver con el hecho, desconcertante para él, de no saber qué signo tiene la pendiente en el pico. A la izquierda del pico la pendiente tiene un signo o es cero y a la derecha tiene otro signo o es cero, entonces tiene sentido, mucho sentido –dado que la gráfica-función es continua–, preguntarse: ¿qué signo tiene la pendiente en el pico?

Cuando se trabaja con gráficas ligadas, los participantes dicen: *si en la gráfica d/t hay un pico, la gráfica de v/t "se rompe"*, entonces se asocia el pico con la discontinuidad, el punto en donde la gráfica de *v/t* "brinca" de positiva a negativa o viceversa, como muestra la Figura 6, parte inferior.

6. Algunos participantes justifican que el área del rectángulo en la gráfica de v/t es la distancia recorrida. Su argumento: el área del rectángulo es base por altura, la base = tiempo (s), la altura = velocidad (m/s); $d = v\ t$; pero dicen, señalando la gráfica v/t, *de aquí a aquí me moví con esta velocidad, en este intervalo, pero en esta gráfica de d/t, veo que me moví de aquí a acá*. Esta forma de expresarse, señalando la gráfica, termina por convencer a todos los participantes de que la relación existe y no es fortuita.

7. Cuando los participantes tratan de reproducir una gráfica moviéndose frente al sensor, leen la gráfica e identifican que, al iniciar su movimiento, deben colocarse a una cierta distancia del sensor. Por sugerencia de los investigadores, llaman a este punto, sobre el eje vertical, "la ordenada al origen".

8. Hacia el final de la actividad con el sensor, los participantes reconocen que en una gráfica d/t, la pendiente de un segmento representa la velocidad y que la velocidad representa la pendiente del segmento o recta.

9. Las verbalizaciones son un registro de representación importante. Para este trabajo, es un medio por el que los participantes exteriorizan su pensamiento y exhiben cómo están entendiendo la actividad, qué les causa conflicto y por qué. El evidente proceso de comunicación generado por los participantes, registrado en los párrafos de arriba, nos han llevado a estudiar a Hitt y Quiroz (2017) para considerar las representaciones no institucionales o intuitivas y su potencial para apoyar el aprendizaje. En otro momento expondremos a qué hemos llegado.

¿Cómo ocurre la construcción de significados de las gráficas? Los participantes aceptan que el SM no produce gráficos aleatoriamente, *sin ton ni son*. Como cualquier mediador o herramienta, se comporta siguiendo reglas que siempre se cumplen, de acuerdo a ciertas relaciones invariantes o leyes físicas. Entonces, conjeturamos que cuando usan el SM, los participantes asocian ciertas formas de movimiento con los rasgos gráficos. Ellos dicen, señalando la gráfica: "me moví así", "de aquí hasta aquí Rosy no se movió", "en este intervalo me moví más rápido", por ejemplo. Cuando se pide a un participante reproducir una gráfica dada, primero debe leerla, entender la información y resolver: ¿a qué distancia del SM debo colocarme al inicio?, ¿me moveré hacia adelante o atrás?, ¿en qué momento debo detenerme y cuánto?, etcétera. La respuesta a estas interrogantes está basada en lo experimentado y en asociaciones que alcanzan un nivel de relaciones de formato semejante a condicionales como: *si quiero generar este rasgo gráfico, debo moverme así*, o *moviéndome de esta manera, produzco esta forma gráfica*. El formato condicional se exhibe al pedir a los participantes expresar verbalmente cómo pueden reproducir una gráfica o cómo reprodujeron la gráfica solicitada. Además, detrás de la condicional está una relación causa-efecto invariante que lleva a los participantes a pensar que: *para producir este signo, necesariamente debo moverme de esta forma,* o *esta forma gráfica necesariamente está asociada con este tipo de movimiento*.

Desde luego, las cosas son mucho más complejas, las asociaciones visual-motriz se internalizan en juicios que integran ideas, hipótesis, conceptos, estructurados en inferencias del tipo $p \rightarrow q$, que llevan a constituir razonamientos y éstos, nuevos juicios y nuevas inferencias, etcétera (Piaget, 2008), en ciclos que evolucionan. Siguiendo a Eco (2006), podemos hablar de una especie de función semiótica[5] entre el movimiento del sujeto (contenido) y su expresión (el signo gráfico). Entonces, vemos aquí una especie de función semiótica que establece una relación entre signo y significado, la estamos estudiando y valorando su potencial teórico.

Esquemáticamente:

1) Asociar rasgos y formas de moverse →

2) Transformar asociaciones en relaciones →

3) Expresarlas como condicionales→

4) Hacer inferencias →

5) Emitir nuevos juicios →

6) Nuevas ideas, hipótesis, conceptos, etcétera.

Finalmente, cada experimentación lleva a ajustar la trayectoria de enseñanza-aprendizaje y a reestructurar o modificar la conjetura sobre cómo ocurre la construcción de significados.

Referencias

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H-W, Mogens, N. (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education, the 14th ICMI Study*. Springer.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

---

[5] Inspirados en Eco, decimos que existe una función semiótica cuando a cada rasgo gráfico se asocia un único significado R → S.

Confrey, J., Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn, M. Niss (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education, the 14th ICMI Study* (pp. 57-68). Springer.

diSessa, A. A. & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 77-103.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). New York: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). New York: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *IREM de Strasbourg*, Francia, 5, 37-65.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 9.1.*

Eco, U. (2006). *Tratado de semiótica general*. México: Debolsillo.

Filloy, E., Rojano, T., Puig, L. (2008). *Educational Algebra (A Theorical and Empirical Approach)*. Mathematics Education Library, V. 43. Nueva York: Springer.

Freudenthal, H. (2001). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Ernesto Sánchez (ed.), Traducción de Luis Puig. México: DME Cinvestav-IPN.

Goethe, J. W. (2009). *Fausto*. Madrid: Espasa-Calpe.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.

Hernández, A. & Santillán, M. A. (2017). Construcción de relaciones gráficas intuitivas en el estudio de la variación y la acumulación apoyadas con tecnología digital. *VIII CIBEM 2017,* CB-892 (pp. 665-677). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Hitt, F. y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista Colombiana de Educación* (73), 153-177.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh, H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Newman, J. R. (1969). Continuidad. En: *Sigma, El mundo de las matemáticas*. Vol. 6 (p. 346). México: Grijalbo.

Piaget, J. (2008). *Las formas elementales de la dialéctica*. Barcelona: Ed. Gedisa.

Schaff A. (1978). *Introducción a la semántica*. México: Fondo de Cultura Económica.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective*. Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist? En A. Howson (Ed.), Developments in Mathematical Education. *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 159-209). Cambridge: Cambridge University Press.

Waldegg, G. (2002). El tiempo discontinuo. En C. Álvarez y A. Barahona (Compiladores), *La continuidad en las ciencias* (Cap. XI, pp. 262-278). México: UNAM y FCE.

7 Exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales

Agustín Grijalva Monteverde[1], María Teresa Dávila Araiza[2]

Resumen

En los cursos de cálculo de ingeniería, el significado de la integral suele restringirse al desarrollo de algoritmos y a una idea limitada de “área bajo la curva”. Ante esta problemática, proponemos un diseño de actividades didácticas para enriquecer el significado de la integral, mediante el desarrollo de procesos de visualización que parten de la noción de área y promueven la exploración de propiedades de la integral (como función de acumulación) vinculadas al Teorema Fundamental del Cálculo, así como de propiedades elementales de la integral definida. Nos apoyamos en herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Palabras clave: propiedades de la Integral, visualización, *GeoGebra*.

Résumé

Dans les cours de calcul d'ingénierie, le sens de l’intégrale est souvent restreint à l'élaboration d'algorithmes et à une idée limitée d'«aire sous la courbe». Face à cette problématique, nous proposons la création d'activités didactiques pour enrichir le sens de l'intégrale à travers le développement de processus de visualisation qui partent de la notion d'aire sous la courbe et favorisent l'exploration de propriétés de l'intégrale (comme fonction d'accumulation) liées au Théorème Fondamental de l'Analyse, ainsi que des propriétés élémentaires de l'intégrale définie. Nous nous appuyons sur les outils de L'Approche Onto-Sémiotique de la Connaissance et de l'Enseignement des Mathématiques.

Mots clés : propriétés de l'intégrale, visualisation, GeoGebra.

Abstract

In engineering calculus courses, the meaning of the notion of integral usually gets restricted to algorithms and to a limited idea of "area under the curve". To face this situation, we propose a designed didactic activity oriented to develop a wider meaning of the integral, through visualization processes, starting from the notion of area under the curve and promoting the exploration of properties of the integral (as an accumulation function) linked to the Fundamental Theorem of Calculus, as well as of elementary

[1] Universidad de Sonora, México.

[2] Universidad de Sonora, México.

properties of the definite integral. We rely on tools of Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction.

Keywords: integral properties, visualization, GeoGebra.

1. Introducción

Cuando se habla de visualización en matemáticas, parece no existir un consenso de a qué nos referimos. En el diccionario de la RAE encontramos, entre otras, las siguientes definiciones:

- Representar mediante imágenes ópticas fenómenos de otro carácter; p. ej. el curso de la fiebre o los cambios de condiciones meteorológicas mediante gráficas, los cambios de corriente eléctrica o las oscilaciones sonoras con el oscilógrafo, etc.
- Formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto.
- Imaginar con rasgos visibles algo que no se tiene a la vista.

Estas definiciones del diccionario apuntan en un sentido importante, referente a la formación de imágenes, mentales o no, que conduce a diferenciar claramente la palabra visualizar de ver. Sin duda que la visión es muy importante en el desarrollo humano y quizá sea el sentido más importante para el desarrollo cognitivo de un individuo, por lo cual una preocupación ha sido la de construir instrumentos que permitan ver lo que a simple vista es imposible de percibir, como sucede con los objetos lejanos o muy pequeños. Así, se han desarrollado tecnologías que dan acceso a objetos físicos lejanos, como los telescopios que permiten observar los cráteres de la luna o artefactos como los microscopios electrónicos que nos permiten ver objetos tan pequeños como los glóbulos blancos, las bacterias u otros.

En el caso de las matemáticas, las cosas son diferentes pues los objetos matemáticos no son objetos físicos y desarrollar formas para visualizarlos requiere de otras características, fundamentalmente, del uso de representaciones semióticas, lo cual conduce a diferentes investigadores, como Hitt (1998), a plantear que

> La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Investigaciones recientes sobre el papel que juegan los sistemas semióticos de representación en el aprendizaje de conceptos matemáticos, han puesto de

manifiesto la importancia de la articulación entre diferentes representaciones de esos conceptos (p. 23).

Sin embargo, la habilidad para convertir una situación de un sistema semiótico de representación a otro no es un asunto sencillo, y las prácticas matemáticas desarrolladas en el aula de clases y en los libros de texto se orientan con frecuencia sólo en el tratamiento algebraico, predominando los procesos algorítmicos para la resolución de problemas.

Para ilustrar las dificultades de usar representaciones semióticas diferentes a las algebraicas, aún en el caso en que los problemas se simplifican considerablemente en registros diferentes, veamos los siguientes dos casos, extraídos de Grijalva (2007, p. 274):

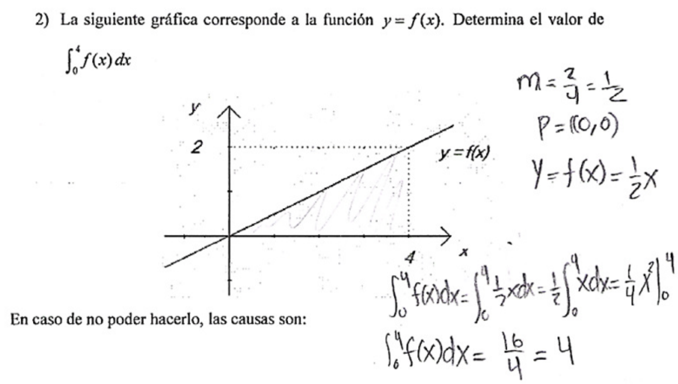


Figura 1. Área de un triángulo calculada mediante una integral

En la Figura 1 se puede observar cómo, a pesar de que el cálculo de la integral podía hacerse obteniendo el área de un triángulo, el estudiante prefirió obtener la ecuación de la recta (función a integrar), obtener una antiderivada y, por último, evaluar en los extremos.

La significación de la integral como antiderivada evaluada en los extremos que se deprende de esta forma de proceder puede observarse también en el caso de otro estudiante, que se muestra en la Figura 2 (Grijalva, 2007, p. 287), aún más extremo respecto del esfuerzo que representa seguir el procedimiento analítico descrito:

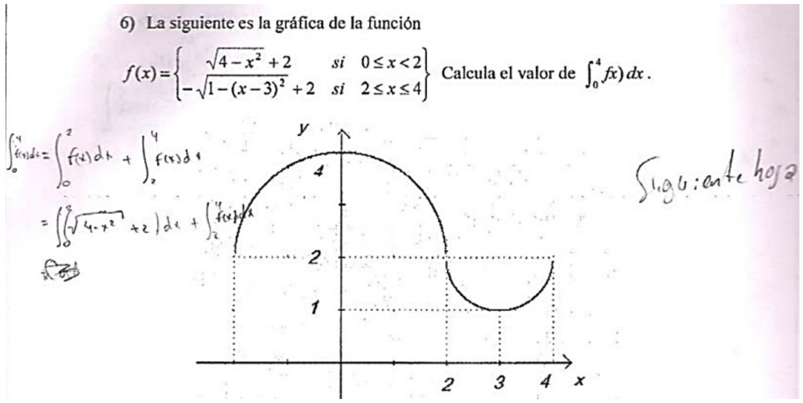


Figura 2. La integral se puede calcular utilizando el área de dos semicircunferencias

En lugar de obtener los valores de las áreas de rectángulos y semicírculos, la respuesta del estudiante fue (Grijalva, 2007, p. 288) como se muestra en la Figura 3.

Por otra parte, aún en aquellos casos en los cuales los estudiantes muestran que entre su significación de integral se incluye la de "área bajo la curva", la ejemplificación limitada a casos en los cuales la función es positiva, más como una ilustración que con el fin de promover el uso del registro geométrico, conduce a significaciones que pueden resultar difíciles de percibir por el profesor. Veámoslo con la respuesta de un estudiante al resolver el problema de calcular la integral de una función dada gráficamente, tomada de Grijalva (2007, p. 14).

Al cuestionar al estudiante sobre las razones para su respuesta, argumentó que el área sombreada es la de la integral de la función, "pues es el área bajo la curva".

Lo sucedido en estos casos y nuestra convicción de la necesidad de promover las habilidades para la visualización y la conversión entre registros de representación semiótica nos ha llevado al diseño de actividades didácticas orientadas en ese camino.

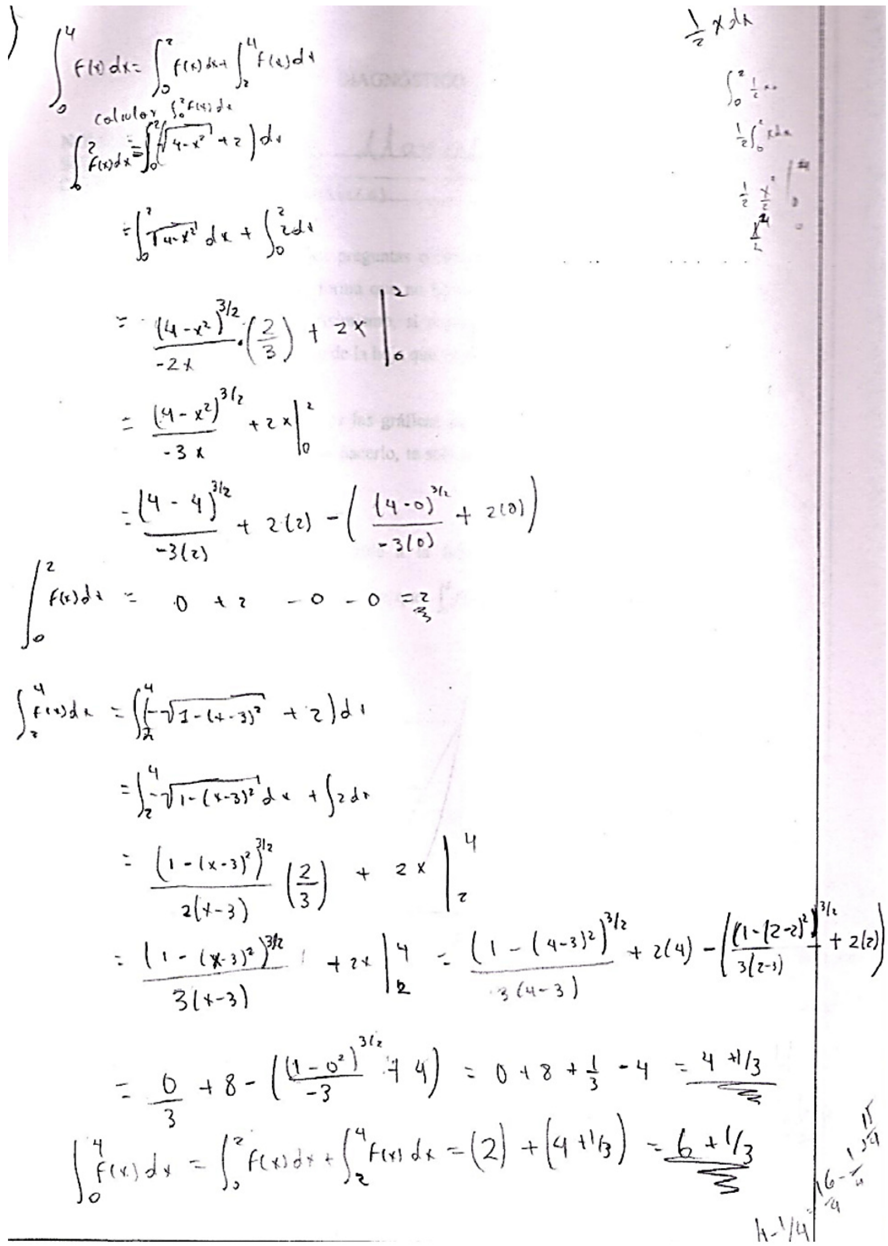


Figura 3. Procedimiento complejo e incorrecto para calcular la integral de la Figura 2

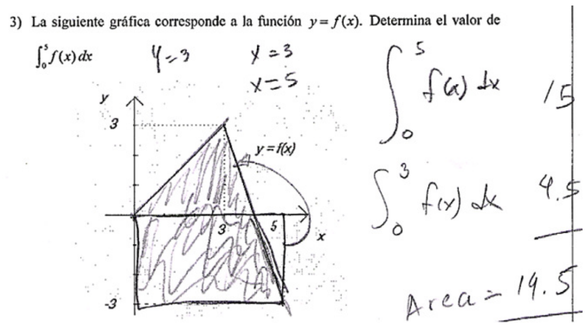


Figura 4. Interpretación de un estudiante sobre la integral como área bajo la curva

Sin embargo, es pertinente señalar que la promoción del uso de la visualización en la enseñanza de las matemáticas ofrece aún resistencias en los medios escolares y particularmente entre los profesores. Eisenberg y Dreyfus (1991) señalan que existen dificultades para el uso de la visualización que se pueden clasificar en tres categorías importantes: culturales, cognitivas y sociológicas, las cuales conducen, por diferentes motivos, a que los profesores prefieran procesos de enseñanza basados en el uso de procesos algorítmicos, eludiendo los procesos visuales, desaparecidos en muchos casos de los textos por los mecanismos de transposición didáctica para adaptar los conocimientos científicos en objetos de enseñanza.

La resistencia a emplear la visualización como una parte importante del diseño de actividades didácticas cotidianas de los profesores, obliga a proporcionar herramientas de análisis para el tratamiento de los objetos matemáticos y el presente trabajo pretende aportar elementos para el caso del estudio de la integral de una función.

2. Aspectos generales de la visualización

La visualización matemática forma parte de la llamada visualización científica y, de acuerdo con Zimmermann y Cunningham (1990, p. 3), consiste en "el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento". En el mismo sentido, Arcavi (1999) –citado en Oropeza y Lezama (2008)– dice que

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito

de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento.

De ambas caracterizaciones de la visualización se desprende que la parte esencial es la formación e interpretación de imágenes mentales o de representaciones semióticas generadas con papel, tecnología o cualquier otro medio empleado para ello. De ahí que la visualización requiera de la habilidad para el tratamiento de representaciones semióticas y de los procesos de conversión entre ellas. Por ejemplo, podemos encontrar un proceso de visualización en el que se hace un proceso de conversión cuando, al tener una expresión como $y = x^2$, nos formamos la imagen de una parábola (Figura 5), la cual representamos geométricamente en unos ejes coordenados, situando su vértice en el origen.

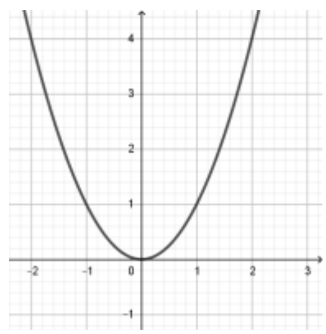


Figura 5. Imagen de la parábola correspondiente a la expresión $y = x^2$

El punto de partida para este proceso de visualización es la consideración de una expresión analítica, que nos lleva a un manejo quizá más familiar de una parábola, destacando la generación de todo un proceso complejo de significaciones asociadas a los signos algebraicos y geométricos involucrados. La expresión $y = x^2$ nos conduce no sólo a *ver* una parábola, sino también la situamos en unos ejes coordenados rectangulares y la situamos con su vértice en el origen y con una abertura o concavidad "hacia arriba". Consecuentemente, nos preguntamos cómo se da este proceso de visualización y el uso que hacemos aquí de las representaciones semióticas analítica y geométrica.

Para responder este tipo de interrogantes recurrimos al trabajo de Peirce (1988) sobre semiótica, quien señala que el signo tiene cuatro características fundamentales: por una parte, todo signo posee una condición representativa, es decir, todo signo está dirigido hacia algo, se refiere a algún objeto o lo representa. Asimismo, todo signo ostenta una condición presentativa, pues tiene una función, es decir, todo signo muestra alguna relación entre el objeto y la representación. Por otra parte, todo signo manifiesta una función interpretativa, pues sin sujeto interpretante no existe el signo. Por último, el signo presenta una condición triádica, referida al propio signo, al objeto y al sujeto interpretante.

Estas características de los signos se condensan en la definición que Peirce realiza al señalar (en traducción libre) que “un signo o representamen, es algo que está para alguien por algo, en algún aspecto o capacidad”.

Los grupos sociales estructuran los signos en torno a reglas expresadas explícitamente o aceptadas implícitamente. En términos generales, como se cita en Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández (2012), Peirce habla de tres tipos de signos:

- Icono: Tienen una relación de semejanza, directa, con el objeto que representan. por ejemplo: pinturas, retratos, mapas.
- Índice: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto). Un rayo, por ejemplo, es índice de tormenta.
- Símbolo: Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla que es independiente de cualquier cualidad física, o contigüidad contextual con el objeto. Ejemplo: palabras, logotipos, señales de tráfico.

En el caso de muchas actividades humanas, es relativamente fácil identificar el tipo de signo que se está usando y eso permite una comunicación visual relativamente sencilla, en la cual la identificación de información que se desea comunicar puede realizarse por medio de imágenes, como las siguientes.

Icono de sol | Índice de tormenta | Símbolo de velocidad

Figura 6. Ejemplos de los tres tipos de signo

Pero en el caso de las matemáticas este proceso es más complejo, pues de inicio, como se señala en Filloy, Puig y Rojano (2008):

> En las expresiones algebraicas encontramos la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras las expresiones como un todo funcionan como un icono (p. 47).

Así en el ejemplo de la expresión $y = x^2$, en su conjunto podemos concebirla como un icono de una parábola, pero x, y, 2 son índices de magnitudes, en tanto el signo = y la posición del dígito 2 son símbolos en el sentido de que son reglas o acuerdos que relacionan objetos entre sí. Si en lugar de $y = x^2$ escribimos $y = 2x$ o simplemente x_2, icónicamente podemos referirnos a una recta o al segundo elemento de una sucesión, modificándose también lo que algunas magnitudes indican y lo que se simboliza con la posición relativa de cada una de ellas.

En el caso que nos ocupa en este trabajo, tenemos que desde la expresión $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ puede reconocerse que en su conjunto existe una representación icónica de la integral de una función, en tanto que las letras F, f, t, a, b, dt son índices de magnitudes y el signo =, así como la posición de a y b, son símbolos que establecen relaciones entre dichas magnitudes.

Así pues, el manejo de los signos o de las representaciones semióticas puede referirse a las expresiones analíticas, a las representaciones geométricas, numéricas, al lenguaje materno, a los gestos y otros, pero en el caso de las matemáticas requerimos, al hablar de visualización, especificar a qué procesos de diseño e interpretación de imágenes nos referimos. Para profundizar en estas ideas, partiendo de la diferenciación entre ver y visualizar, Duval (1995) señala que la *visión* se refiere a la percepción visual y con ello a las imágenes visuales. La visión involucra dos procesos cognitivos, los cuales identifica como función epistemológica y función sinóptica:

> El primero consiste en dar acceso directo a cualquier objeto físico "en persona". Esa es la razón por la que la percepción visual siempre se toma como modelo de la noción epistemológica de la intuición. Nada es más convincente que lo que se ve. En ese sentido, la visión es lo opuesto a la representación, incluso de las "imágenes mentales", porque la representación es algo que se encuentra en lugar de otra cosa (Peirce). Llamaremos a esta función la función epistemológica.
>
> El segundo es bastante diferente. La visión consiste en aprehender simultáneamente varios objetos o un campo completo. En otras palabras, la visión parece dar inmediatamente una comprensión completa de cualquier objeto o situación. En ese sentido, la visión es lo opuesto al discurso, a la deducción, que requiere una secuencia de actos de enfoque en una cadena de afirmaciones. La llamaremos función sinóptica (p. 12).

Por su parte, respecto a la visualización, plantea que ésta se liga más a los procesos de representación:

> En resumen, la visualización, que realiza solo la función sinóptica, no es intuición sino representación. En ese sentido, hay varios registros geométricos posibles para la visualización. La visualización en matemáticas es necesaria porque muestra la organización de las relaciones, pero no es primitiva, porque no es mera percepción visual. En este sentido, se está aprendiendo de los registros geométricos. ¿Hay alguna visión que pueda realizar la función epistémica? Esa es una cuestión filosófica. Desde un punto de vista cognitivo, el hecho esencial es el carácter paradójico del conocimiento matemático, que excluye cualquier recurso a las representaciones mentales como una captación directa de objetos matemáticos, al menos en el contexto didáctico (Duval 1995, pp. 13-14).

3. Enfoque teórico

Como podemos ver, al respecto de la visualización se han desarrollado diferentes maneras de concebirla y se trabajan desde diferentes enfoques teóricos, pero un problema central lo plantea precisamente Duval cuando señala que:

> El uso de la visualización requiere una formación específica, específica para visualizar cada registro. Las gráficas cartesianas de figuras geométricas no están disponibles directamente como pueden ser las representaciones icónicas. Y su aprendizaje no puede reducirse al entrenamiento para construirlos. Esto se debe a la sencilla razón de que la construcción hace que la atención se centre sucesivamente en algunas unidades y propiedades, mientras que la visualización consiste en captar directamente la configuración total de las relaciones y en discriminar lo que es relevante en ella. Con mayor frecuencia, los estudiantes no van más allá de una detención local y no ven a la organización global relevante sino a una representación icónica (Duval, 1995, p. 13).

Este planteamiento global sobre la formación específica para cada registro permite hacer análisis importantes, ligados a los procesos de conversión, pero desde nuestra concepción, al hablar de visualización es imprescindible centrar la atención en la generación e interpretación de imágenes mentales o de imágenes gráficas o geométricas. En tal sentido, se requiere de herramientas funcionales para hacer los análisis de los procesos visuales y usarlos en el diseño de actividades didácticas.

En la elaboración de nuestra propuesta hacemos uso de las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y el Conocimiento Matemáticos (EOS), desarrollado por Godino, Batanero y Font (2007), en el cual se desarrolla una propuesta pragmática, cuya base inicial reposa en la noción de práctica matemática, para referirse a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, pp. 13-14).

Pero, más que las prácticas aisladas, nuestro interés se centra en el desarrollo de los sistemas de prácticas (discursivas u operatorias) que utiliza un sujeto (individuo o comunidad) al abordar un mismo tipo de situaciones problema. Podemos identificar los sistemas de prácticas como aquellos procesos que un sujeto se plantea usar antes de hacerlo. Por ejemplo, ante el problema de determinar el valor de la integral en el siguiente caso (Figura 7):

La siguiente gráfica corresponde a la función $y = f(x)$. Determina el valor de $\int_0^4 f(x)\,dx$

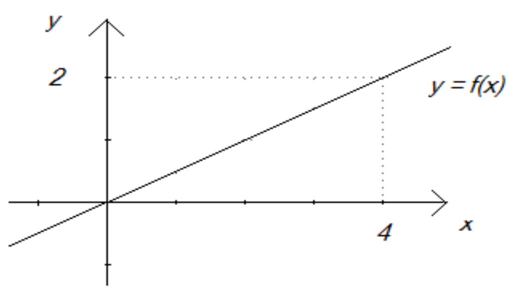


Figura 7. Integral que puede calcularse fácilmente como área (Grijalva, 2007, p. 260)

el sistema de prácticas de un sujeto determinado puede consistir en obtener la ecuación de la recta que aparece en la gráfica, determinar la antiderivada correspondiente y evaluar en los extremos de integración. Otra forma de proceder consiste en determinar el área del triángulo formado por la recta $y = f(x)$, la recta $x = 4$ y el eje de las abscisas. Cada uno de estos sistemas de prácticas corresponde a un significado parcial de la integral.

En el sentido pragmático del EOS, los sistemas de prácticas se conciben como el significado de un objeto matemático y se reconoce la existencia de significados parciales para un mismo objeto matemático. De ahí que entre más sistemas de prácticas puedan desarrollarse para analizar un objeto, se produce una significación más rica de dicho objeto y, en dependencia de la situación que se esté abordando, se puede decidir usar una u otra y, de ser necesario, hacer conversiones entre ellas.

El desarrollo de los sistemas de prácticas cuando se enfrentan a un mismo tipo de situaciones problema hace emerger nuevos objetos matemáticos, distinguiendo en el EOS los siguientes objetos matemáticos primarios: lenguajes, procedimientos, propiedades, argumentos, conceptos y situaciones problema. La combinación de estos objetos primarios da lugar a otros objetos más complejos, por ejemplo, los teoremas y las proposiciones matemáticas. Los objetos matemáticos primarios constituyen, a su vez, los elementos de significado de los objetos matemáticos en general.

Ahora bien, en el caso de los procesos de visualización, ¿cómo se puede usar la caracterización de significado (sistemas de prácticas) y las herramientas de análisis del EOS para analizar los procesos de visualización y realizar diseños de actividades didácticas adecuadas? Para avanzar en este camino, es necesario centrar la atención en los procesos visuales, reconocer las prácticas visuales que se despliegan en la actividad matemática y los objetos visuales que emergen de los sistemas de prácticas visuales.

En el EOS se establece en general que los objetos matemáticos se articulan en configuraciones de objetos y procesos, y en este caso las configuraciones de interés se establecen entre las situaciones problema visuales, el uso del lenguaje visual, de los procedimientos visuales, las propiedades visuales, los argumentos visuales y los conceptos visuales involucrados en el estudio de la integral. Sin embargo, aun centrados en los objetos visuales, para la visualización se requiere de la conversión entre representaciones. Aquí seguimos la idea de Godino *et al*. (2012, p. 113) respecto a que "Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación".

Con base en estas consideraciones teóricas generales, nos proponemos desarrollar actividades para la enseñanza de la integral con apoyo en el *software GeoGebra*, potenciando el uso de objetos visuales en el estudio de la integral de una función y su interrelación con las formas analíticas que tradicionalmente se estudian en los textos y cursos de cálculo diferencial e integral.

4. Diseño de las actividades didácticas

En los cursos de cálculo de ingeniería, es común que el significado de la integral que se promueve se restrinja al desarrollo de algoritmos para calcular antiderivadas o integrales definidas, así como a una idea limitada y poco clara de "área bajo la curva". Una enseñanza que promueve estos significados restringidos de la integral genera que los estudiantes, a su vez, desarrollen significados limitados que los lleven a realizar prácticas matemáticas ineficientes e incorrectas al abordar situaciones problema del cálculo integral, como se discutió en la introducción a este capítulo.

Ante esta problemática, diversos autores han desarrollado propuestas didácticas o de investigación con la mediación de tecnología digital con el propósito de enriquecer el significado de la noción de integral en algún aspecto específico, como Robles, Tellechea y Font (2014), que realizan una propuesta alternativa para el estudio del teorema fundamental del cálculo con el *Applet Descartes*; o la investigación de Jiménez y Mejía (2015) donde se propone a los estudiantes construir funciones de acumulación mediante funciones escalonadas en un contexto intramatemático con el programa *Mathematica*, o la propuesta didáctica de Soto (2011) para el estudio de la integral como el área bajo la curva, mediante la resolución de situaciones problema en contextos extramatemáticos de la ingeniería con la mediación de *GeoGebra*.

El diseño didáctico que proponemos en torno a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la integral consiste en actividades didácticas para enriquecer el significado de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Nuestro diseño tiene la característica de promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática. Para ello, se parte de la noción de área variable en un contexto gráfico y dinámico creado con *GeoGebra*, y se promueve la exploración de propiedades de la integral (como función de acumulación) vinculadas al Teorema Fundamental del Cálculo, así como de propiedades elementales de la integral definida. Para la elaboración del diseño didáctico nos apoyamos en herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

A continuación, esbozaremos algunos elementos centrales del diseño didáctico que proponemos para el estudio de la integral en las carreras de ingeniería, en un ambiente visual y dinámico creado con *GeoGebra*. Comenzaremos por describir las tres partes esenciales de la trayectoria que planteamos para el desarrollo de las actividades y la construcción gradual del significado de la integral que nos interesa promover. Posteriormente, explicaremos a grandes rasgos en qué consisten las actividades y los *applets* diseñados para ellas y, finalmente, discutiremos el análisis *a priori* de algunas de las actividades con las herramientas teóricas del EOS. Es importante resaltar que los objetos matemáticos primarios (situaciones problema, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos) que intervienen y emergen en las actividades son principalmente objetos visuales, representados en un lenguaje gráfico.

Parte 1. El proceso de estudio que proponemos para la integral comienza, en un contexto visual geométrico, con la exploración del área variable de una región delimitada, en el intervalo variable $[a, x]$, por la función f y el eje de las abscisas (Figura 8). El área de la región está dada por *GeoGebra* en el *applet*. La exploración propuesta conduce a la construcción de la gráfica de una función de área, A(x), que se genera por el movimiento de un par ordenado variable que relaciona los valores de x y los valores del área de la región explorada.

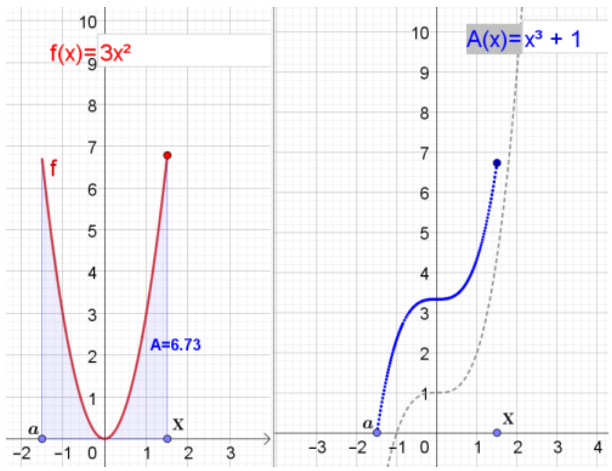


Figura 8. Función $A(x)$ generada por un par ordenado variable (x, A)

El *applet* de la Figura 8 permite al estudiante probar diferentes expresiones algebraicas para determinar la expresión analítica de la función $A(x)$, de manera que, poco a poco, se construya la noción de antiderivada y se determine el papel del extremo izquierdo del intervalo en la expresión analítica de la función $A(x)$.

La función $A(x)$ depende de la función dada f, la variable x y el valor constante a, que corresponde al extremo inferior de un intervalo. La exploración que proponemos se realiza inicialmente con funciones $f(x)$ que son positivas en el intervalo $[a, x]$ (constantes, lineales, cuadráticas, etc.). De estas exploraciones se desprenden cuestiones como las siguientes: ¿Es continua la función $A(x)$? ¿Es diferenciable? ¿Cuál es su derivada? Posteriormente, la exploración se extiende a funciones que toman valores negativos en $[a, x]$, funciones que toman valores tanto positivos como negativos en $[a, x]$ y funciones discontinuas (Figura 9); nuevamente se cuestiona sobre la continuidad y diferenciabilidad de la función

$A(x)$. Se pretende que con estas exploraciones el estudiante desarrolle un significado de integral como función continua y diferenciable (salvo en valores donde f es discontinua).

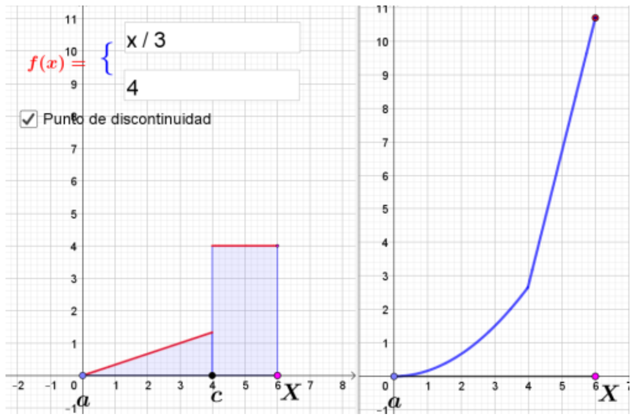


Figura 9. Función $A(x)$ cuando $f(x)$ es discontinua en un valor c

En resumen, durante la primera parte del diseño, con la mediación de *GeoGebra*, se guía al estudiante en el desarrollo de procesos de visualización del área bajo la curva como una magnitud que cambia cuando varía el valor de x, es decir, de la acumulación del área como un proceso de variación (Figura 8). De esta manera buscamos enriquecer el significado de integral como función, y a la vez desarrollar una estrategia para determinar gráfica y algebraicamente a la función integral. El medio dinámico (*applet*) que diseñamos permite gradualmente generalizar los resultados de las exploraciones, al cambiar la función, el intervalo, el punto de discontinuidad, etcétera. También permite extender la noción de función área a la noción más general de función integral para funciones de valores negativos y seguir explorado sus propiedades de continuidad y derivabilidad.

Parte 2. Posteriormente, se plantea la siguiente situación problema: ¿cómo calcular el área variable (encima y debajo del eje de las abscisas) que fue explorada en las actividades anteriores? Para abordar estas situaciones problema se proponen actividades con dos acercamientos distintos: por un lado, se promueven aproximaciones a la región correspondiente mediante una cantidad cada vez mayor de rectángulos de bases iguales y alturas dadas por la función $f(x)$. Por otro lado, se propone un acercamiento que toma como noción central a la *altura promedio* h, la cual permite calcular el área de la región correspondiente como el área de un rectángulo cuya base mide lo mismo que el intervalo $[a, x]$ y su altura es h.

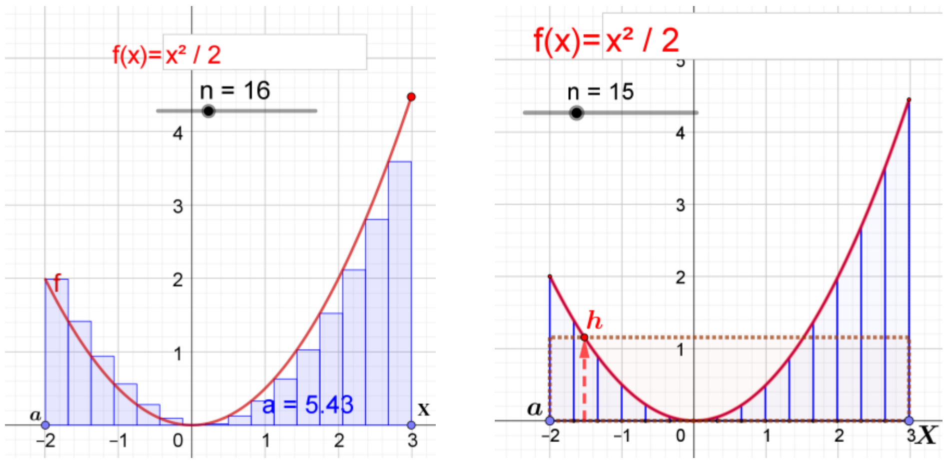


Figura 10. Dos acercamientos al cálculo del área de una región variable asociada a f

En ambos acercamientos (mediante rectángulos y mediante altura promedio) se guía al estudiante para que compruebe que es equivalente considerar los extremos izquierdos de los subintervalos y considerar los extremos derechos. En esta segunda parte del diseño, el trabajo será visual y analítico para calcular, por una parte, la suma de las áreas de n rectángulos cuyo valor se aproxima cada vez mejor al área de la región correspondiente, o bien, el promedio de n alturas que, conforme n crece, se aproximan mejor a la altura promedio h.

Parte 3. Finalmente, se propone el estudio de algunas propiedades básicas de la integral definida, algunas de ellas requerirán del significado de integral vinculado al proceso de aproximación mediante rectángulos; otras requerirán aquel significado ligado al área de la región delimitada por la función y el eje de las abscisas en un intervalo; en otras actividades, jugará un papel importante la altura promedio. Las propiedades de la integral que se estudiarán en el diseño son las siguientes (Leithold, 1998, pp. 347-350):

1. Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, y si k es cualquier constante, entonces $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (Figura 11).

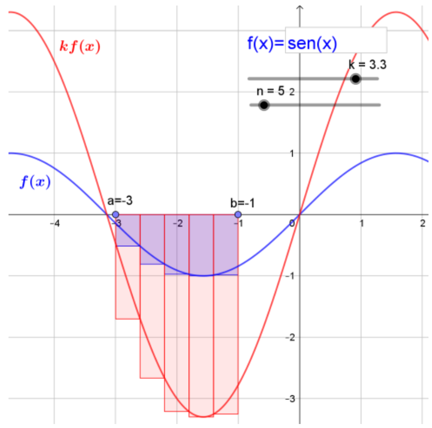


Figura 11. *Applet* para la propiedad 1

2. Si $a > b$ y $\int_a^b f(x)dx$ existe, entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ (Figura 12).

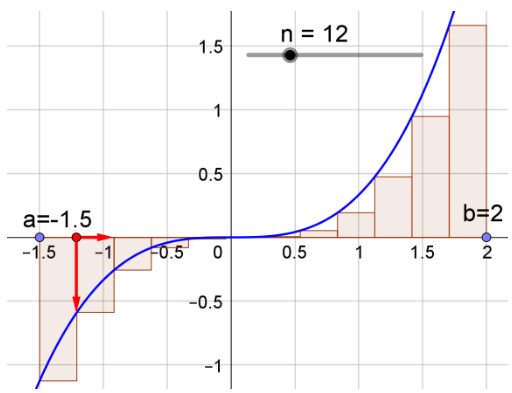


Figura 12. *Applet* con flechas que indican el signo de Δx_i y de $f(x_i)$ al integrar

3. Si las funciones f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $f + g$ es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (Figura13).

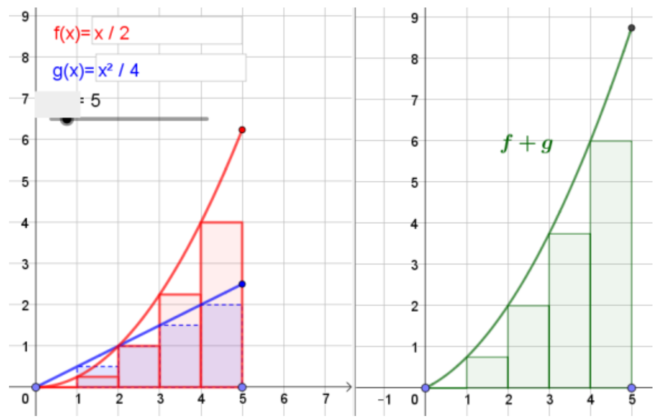


Figura 13. *Applet* para la propiedad 3

4. Si la función f es integrable en un intervalo cerrado que contiene a los tres números a, b y c, entonces, sin importar el orden de a, b y c, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (*applet* en construcción).

5. Adaptada de Spivak (2012, p. 275): si la función f es integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$, y si c es cualquier constante, entonces $\int_b^a f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ (Figura 14).

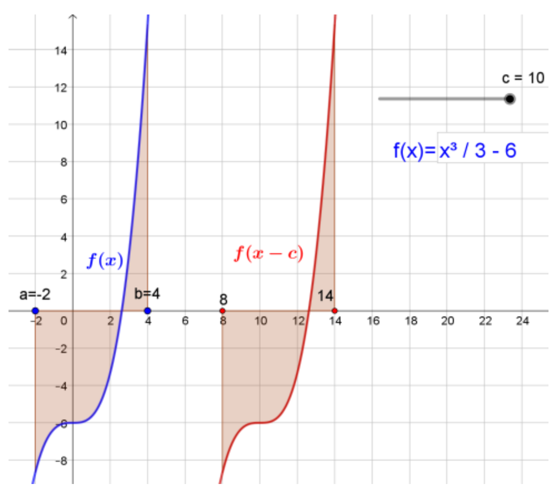


Figura 14. *Applet* para la propiedad 5

a. Análisis de objetos visuales de una de las actividades

En la Actividad 1 "Construcción de la función área", el estudio de la noción de integral comienza en un lenguaje mayormente gráfico, con algunas expresiones analíticas de funciones positivas en el intervalo $[a, x]$, primero funciones constantes, luego lineales y posteriormente cuadráticas. En el *applet* diseñado para esta actividad se presenta una función $f(x)$ en lenguaje gráfico y analítico, definida en un intervalo variable definido por dos puntos variables sobre el eje de las abscisas, a y x (Figura 15).

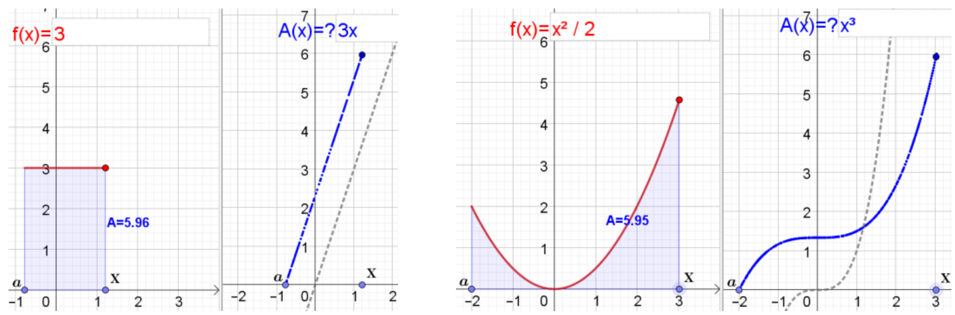


Figura 15. *Applet* para el estudio de la integral a partir de un área variable

Se realiza una exploración gráfica y numérica del área de la región delimitada en el intervalo dado por la gráfica de f y el eje de las abscisas, planteando preguntas como las siguientes: ¿Qué observas en el área de la región sombreada? Describe cómo cambia. Posteriormente, se procede a graficar el par ordenado variable (x, A) en la Vista Gráfica 2 de *GeoGebra*, cuyo rastro genera la gráfica de la función $A(x)$. El estudiante tratará de determinar la expresión analítica de la función $A(x)$ y establecerá una relación entre la expresión analítica de A y de f. Posteriormente, se estudiará la continuidad y diferenciabilidad de la función A. En la actividad 2 se realizará una exploración similar, pero con funciones que toman valores negativos en el intervalo $[a, x]$.

Prácticas matemáticas:

- Describir cómo cambia una magnitud variable.
- Identificar y describir los tipos básicos de variación (constante, creciente/decreciente, creciente con rapidez creciente, creciente con rapidez decreciente, etc.).
- Determinar la expresión analítica de una función simple identificando el efecto en su expresión algebraica al realizar desplazamientos horizontales y verticales.

Objetos primarios	Intervinientes	Emergentes
Situaciones problema visuales y no visuales	-¿Cómo cambia el área de una región R delimitada, en un intervalo variable $[a, x]$, por la gráfica de una función $f(x)$ y el eje de las abscisas? -Construye una función que represente la variación del área, gráfica y analíticamente.	-Determinar la expresión analítica de la función área para una función $f(x)$ en un intervalo $[a, x]$. -Argumentar por qué es continua la función área. -Establecer una relación entre la derivada de la función área y la función $f(x)$. -Exploración de funciones negativas en $[a, x]$ y de funciones que toman valores positivos y negativos en $[a, x]$.
Conceptos visuales	Los siguientes conceptos corresponden a los estudiados en un curso de cálculo diferencial en un lenguaje gráfico pero estático: -Intervalo. -Variable como punto arbitrario en el eje de las ordenadas o de las abscisas. -Función como curva en el plano. -Función continua.	-Área de una región como magnitud variable. -Intervalo variable (segmento delimitado por los valores a y x en el eje de las abscisas). -Variable como punto que se desplaza por el eje de las ordenadas o de las abscisas. -Par ordenado variable (contiene la información de la variación conjunta de dos variables, una en el eje de las abscisas y otra en el eje de las ordenadas). -Función área como relación de covariación del área y la variable x. -Función área como antiderivada de $f(x)$.
Conceptos no visuales	-Función como expresión algebraica. -Función como regla de correspondencia entre dos conjuntos. -Derivada.	-Antiderivada.

Lenguaje visual	-Representación gráfica de funciones, intervalos y variables.	-Gráfica de una función como curva dinámica en el plano, generada por un par ordenado variable.
Lenguaje no visual	-Expresiones analíticas de funciones. -Notación de intervalos, variables, constantes, funciones y derivadas. -Tabla de datos numéricos.	-Representación gráfica y dinámica de la variable x, el área y el intervalo $[a, x]$.
Procedi-mientos visuales		-Graficar un par ordenado variable en *GeoGebra*. -Manipular el valor de a gráficamente para determinar con mayor facilidad la expresión analítica de A(x).
Procedi-mientos no visuales	-Evaluar funciones en un valor específico de x. -Calcular analíticamente la derivada de una función.	-Calcular analíticamente la antiderivada de una función.
Propiedades visuales (Cada una se asocia a una propiedad no visual)	-Monotonía de una función gráficamente. -Continuidad de una función gráficamente. -Diferenciabilidad de una función gráficamente. -Tipos básicos de variación gráficamente.	-La función A(x) es creciente en $[a, x]$ cuando la función f es positiva en ese intervalo. -La función A(x) depende de x, a y f(x). La función A(x) es continua y es diferenciable (salvo en puntos donde f es discontinua). -Relación del extremo izquierdo a con el desplazamiento vertical de la función A(x). -Relación entre $A'(x)$ y f(x) (Teorema Fundamental del Cálculo).

Argumentos visuales	Basados en las propiedades visuales.	Generalización de propiedades con base en la conservación de propiedades al cambiar de función e intervalo.
Argumentos no visuales	Basados en cálculos numéricos y analíticos.	Con base en cálculos numéricos y analíticos.

Tabla 1. Objetos matemáticos primarios visuales de la actividad 1

5. Conclusiones

A partir de la descripción de las actividades, sus *applets* y el entramado de objetos primarios visuales y no visuales involucrado en ellas, se puede reconocer la riqueza y complejidad del significado de integral promovido en las actividades a través de un medio digital que favorece procesos de visualización y, por otro lado, la pobreza del significado de integral que se enseña comúnmente en los cursos de cálculo.

Es importante resaltar el papel de las herramientas del EOS, como los objetos matemáticos primarios visuales, para describir detalladamente la riqueza y complejidad de prácticas matemáticas promovidas en las actividades didácticas.

Una vez llevado a la práctica el diseño de actividades, lo cual se hará con estudiantes de ingeniería, estaremos en condiciones de profundizar en las conclusiones generales.

Referencias

Duval, R. (1995). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for thePsychology of Mathematics Education* (21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico, October 23-26, 1999); see ED 433 998. For a discussion of this paper, see SE 066 317.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach.* New York: Springer.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., & Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2), 109-130.

Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, U. Legaria, México.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, *10*(2), 23-45.

Jiménez, M. P., & Mejía, H. R. (2015). Una orquestación instrumental para el estudio de la integral definida. *El Cálculo y su Enseñanza, 6*, 71-101.

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7a. ed.). México: Oxford University Press.

Oropeza, C., Lezama, J. (2008). La visualización, como estrategia de estudio en el concepto de dependencia e independencia lineal. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 23-31). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Peirce, C. S. & Vericat J. (1988). *El hombre, un signo (el pragmatismo de Peirce)*. España: Editorial Crítica.

Robles, M. G., Tellechea, E., & Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática*, *26*(2), 69-109.

Soto, J. (2011). *Actividades didácticas para la enseñanza de la integral con apoyo de un software de geometría dinámica* (Tesis de Maestría no publicada). Universidad de Sonora, México.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (3a. ed.). Barcelona: Editorial Reverté*.*

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.). (1990). What is Mathematical Visualization? In *Visualization in Teaching and Mathematics*, MAA Series.

8 Investigación basada en el diseño para el estudio de la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales a través de la visualización

José David Zaldívar Rojas[1], Beatriz Adriana Vega Herrera[2]

Resumen

Cuando se inicia el estudio de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL) en Secundaria, comúnmente se enfatizan los métodos algebraicos, con poca atención a argumentos visuales, lo cual provoca significados deficientes relativos a la *solución* del sistema. En este capítulo se reportan los resultados de una investigación basada en el diseño donde se promueve la visualización y la variación de parámetros para la identificación del tipo de solución de un SEL en estudiantes de nivel secundaria. Se reporta que la visualización permitió a los estudiantes significar la noción de solución de un SEL con énfasis en los parámetros que componen a las funciones lineales del sistema.

Palabras clave: visualización, investigación basada en el diseño, sistemas de ecuaciones, secundaria.

Résumé

Lorsque l'étude des Systèmes d'Équations Linéaires (SEL) à l'école secondaire commence, on met généralement l'accent sur les méthodes algébriques, sans trop faire attention aux arguments visuels, ce qui entraîne des significations déficientes liées à la solution du système. Dans cet article, nous rapportons les résultats d'une Recherche Orientée par la Conception qui favorise la visualisation et la variation de paramètres pour l'identification du type de solution d'un SEL, avec des élevés d'école secondaire. Il a été signalé que la visualisation permettait aux étudiants de définir la notion de solution SEL en mettant l'accent sur les paramètres qui constituent les fonctions linéaires du système.

Mots clés : visualisation, recherche orientée par la conception, systèmes d'équations linéaires, secondaire.

Abstract

When the study of the Systems of Linear Equations (SLE) in Secondary School begins, commonly the algebraic methods are emphasized, with little attention to visual arguments, which causes deficient meanings related to the solution of the system. In this article, we report the results of a Design-Based Research where the visualization and variation of parameters is promoted for the identification of the type of solution of an SLE.

---

[1] Universidad Autónoma de Coahuila, México.

[2] Universidad Autónoma de Coahuila, México.

Keywords: visualization, design-based research, equation systems, secondary.

1. Introducción y planteamiento del problema

La presente investigación toma como problemática principal los significados deficientes relativos a la noción de solución de un *SEL* con dos ecuaciones y dos incógnitas que se presentan en estudiantes de nivel Secundaria*.* Se espera que la presente investigación y la propuesta que contiene aporte elementos didácticos a los profesores, que les permitan reflexionar sobre la enseñanza de los SEL de 2x2 (SEL). Dicho tema tiene cabida en el currículo mexicano en el nivel básico Secundaria (13-15 años) y aparece por primera vez durante el segundo grado dentro del eje de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico (SEP, 2011). Aunque podría considerarse un tema "sencillo", tiene la particularidad de que coordina diferentes representaciones cuando se aborda: algebraica, numérica (tabular) y gráfica.

De manera general, el tema de SEL en el nivel Secundaria se aborda por medio de la resolución de problemas que implican el planteamiento de sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde se emplean métodos analíticos para su solución, principalmente: Suma y resta, Igualación o Sustitución. Además, se puede apreciar que hay pocas consideraciones sobre el método gráfico, quizás debido a que en segundo grado aún no se ha contemplado el uso del plano cartesiano, por lo que, si se alcanza a ver el método gráfico, no se discuten las ecuaciones que componen al sistema como funciones lineales. Es decir, en la enseñanza de los SEL se hacen muy pocas referencias a la visualización de las relaciones que guardan las ecuaciones que componen al sistema e incluso a la restricción a no considerar dos o más ecuaciones lineales. De manera que la centración en el ejercicio de los métodos genera que los estudiantes tengan una visión restringida de los significados asociados a la noción de *solución del sistema* (Ochoviet, 2009; Ochoviet y Octak, 2011). Incluso si se aumenta el número de ecuaciones, pero no de incógnitas (3 ecuaciones con dos incógnitas), los estudiantes muestran dificultades en el significado de *solución del sistema.*

Más aún, parecería que cuando se aborda el tema de SEL con dos incógnitas, las ecuaciones con las que se trabajan no tienen nada que ver con la noción de recta como función lineal. Si acaso, a los estudiantes se les presenta el método gráfico para resolverlo a manera de verificar la solución, provocando así que los estudiantes consideren el punto de corte de las rectas como la solución y no como el par ordenado de números reales que verifica todas las ecuaciones del sistema (Ochoviet, 2009).

Con la intención de atender a la problemática anteriormente descrita se propuso un diseño que, en lugar de promover la resolución de un SEL por medio de los métodos tradicionales, se privilegia el uso de la *visualización* de las relaciones lineales que se presentan en el sistema con la intención de generar un significado visual sobre el tipo de solución. Para ello, se toma en consideración que las ecuaciones que componen el sistema son en sí funciones lineales y se trabaja gráficamente con los efectos que tienen los parámetros que las conforman en la gráfica de la función lineal.

Diversas investigaciones han considerado el importante rol de la visualización en la comprensión de diferentes nociones matemáticas (Hitt, 1998; Leinhardt, Zaslavsky, Stein, 1990; Cantoral y Montiel, 2001). Así, dentro de la propuesta se entiende a la *visualización* como *la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz o papel o en algunos casos con computadora) para representar un concepto matemático o problema como una ayuda en la resolución del problema* (Zimmermann y Cunningham, 1991, p. 3).

Dentro de la investigación se asume como hipótesis que la visualización de las relaciones lineales involucradas en el sistema a través de la variación de parámetros permitiría generar nuevos significados asociados a la solución del sistema que posibilitará caracterizar el tipo de solución. Lo anterior permitirá modificar la enseñanza tradicional, empleando en primer lugar la visualización para enseñar un método gráfico *renovado* para posteriormente trabajar con lo analítico. Esta propuesta se basa en las afirmaciones realizadas por Sfard y Linchevski (1994), citadas en Ochoviet (2009), cuando mencionan que: *sin una aproximación funcional a las expresiones algebraicas, es difícil darse cuenta de que un sistema puede tener infinitas soluciones*. De manera que las tareas propuestas en el diseño consideran que cada ecuación del SEL se interprete como una función lineal de la forma $y = mx + b$, donde la visualización de los efectos de los parámetros m y b en la gráfica de función lineal tenga un comportamiento asociado a la solución del sistema.

De manera que el objetivo principal de la presente investigación es diseñar un experimento de Enseñanza para el tema de SEL con base en una aproximación funcional a partir de la variación de parámetros del modelo lineal, donde se promueva la *visualización* para la comprensión de la noción de *solución* del SEL.

En el siguiente apartado se describe la revisión bibliográfica que se realizó al respecto del tema de los SEL. Posteriormente se presenta el encuadre teórico que fundamenta el diseño de la propuesta, la trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) que se diseñó y los aspectos metodológicos de la investigación. Después, se presentan los resultados que se obtuvieron de la experiencia de la implementación de la THA en estudiantes de nivel Secundaria que no habían cursado el tema de los SEL y, finalmente, las conclusiones que se desprenden de la investigación.

2. Revisión bibliográfica

Los SEL aparecen en la enseñanza obligatoria mexicana durante el segundo grado de Secundaria (15-16 años). La principal forma en la cual los libros de texto introducen el tema es a través de la resolución de problemas verbales donde los estudiantes deben elaborar las ecuaciones que corresponden al problema identificando las variables y estableciendo las relaciones entre ellas. Posteriormente se utilizan algunos de los métodos algebraicos para hallar la solución del sistema y responder al problema. Esta apuesta pedagógica de los libros de texto atiende principalmente la memorización del algoritmo para resolver el sistema, pero dejan de lado la discusión de los posibles significados que pudiera tener el tipo de solución que podría obtenerse de un SEL.

Los SEL aparecen como una poderosa herramienta para resolver diversos problemas, además de que es uno de esos contenidos que aparecerá continuamente a lo largo de la vida académica de los estudiantes en temas de niveles superiores o en ingenierías, de ahí que su comprensión es importante.

Entre las principales dificultades que se presentan en relación con la enseñanza y el aprendizaje del tema se tienen, por ejemplo, las referidas por Segura (2004), quien menciona que a pesar de que muchos estudiantes pueden resolver el SEL usando métodos algorítmicos, en varias ocasiones tienen dificultades en el empleo de las operaciones aritméticas más elementales en los problemas de tipo verbal y también para realizar el pasaje correcto de este registro al algebraico. Además, menciona que muchos estudiantes prefieren el empleo de un método algebraico para enfrentar un SEL en lugar de un método gráfico, ya que este último registro es utilizado muy pocas veces para realizar un pasaje al registro algebraico. De hecho, en algunas investigaciones –por ejemplo, Ramírez (1997) citado por Segura (2004)– se manifiesta que el método gráfico al momento de resolver un SEL se considera con un estatus "inferior", puesto que se cuestiona su validez como método.

Con la intención de subsanar las dificultades anteriormente mencionadas, Segura (2004) propone una situación didáctica para estudiantes de Secundaria donde primero se trabaja la articulación de los registros gráficos, verbal y algebraicos, en ese orden. Para ello, plantea un contexto de “laboratorio” donde la solución de un sistema de ecuaciones está dada por la ubicación en un plano cartesiano de cierto virus, el cual debe ser eliminado por rayos láser que estarían representados por rectas. Al partir de la solución del sistema, propone a los estudiantes una serie de tareas donde se deben proponer las ecuaciones de los rayos láser (ecuaciones de las rectas), por lo que motiva el tránsito de lo gráfico a lo algebraico, además de que así los estudiantes no asocian *el objeto sistema de ecuaciones lineales con los métodos de resolución* (Segura, 2004, p. 74).

Otro trabajo que se analizó fue el de Panizza, Sadovsky y Sessa (1999), que presenta una investigación que tuvo como objetivos: *a)* caracterizar la relación que establecen los estudiantes entre las soluciones de un SEL y las soluciones de cada ecuación que lo integra; y *b)* analizar la interpretación de las infinitas soluciones de una ecuación con dos variables como soluciones de los infinitos sistemas que dicha ecuación podría integrar. Estas autoras encuentran que casi todos los estudiantes que entrevistan enfrentaron los problemas que se les presentaron extendiendo sus conocimientos sobre otros objetos, como las ecuaciones de una variable o sistemas lineales con dos variables. Una particularidad que las autoras manifiestan es que los procedimientos usados por los estudiantes tienen una fuerte carga de sus experiencias aritméticas y en muy raros casos se apoyan en el concepto de función.

Dentro del análisis de las autoras se describe cómo los estudiantes tienen dificultades al momento de interpretar resultados como $0 = 0$ o $y = y$, manifestando que en esos casos la ecuación “no tiene solución” o que hay algo mal con su planteamiento algebraico. Asimismo, los estudiantes tienen dificultades para comprender el significado de la solución del sistema, considerando que dicha solución es para ambas ecuaciones que componen el sistema, pero no individualmente para cada ecuación, como si la solución representara un objeto diferente en tanto solución del sistema y solución de una ecuación de dicho sistema. Por último, las autoras concluyen que los fenómenos que observan en los procedimientos de los estudiantes se deben a que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los estudiantes como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números. Esto les da pie a las autoras para configurar una discusión sobre las nociones de *incógnita* y de *variable* dentro del tránsito de la aritmética al álgebra.

Por otro lado, en Ochoviet (2009) se citan dos trabajos que resultan de interés para la problemática que se planteó: los resultados de Sfard & Linchevski (1994) y Sierpinska (2000). En el primero de los trabajos citados por Ochoviet, se afirma, al respecto de las infinitas soluciones en un SEL, que sin una aproximación funcional a dicha noción los estudiantes difícilmente podrían darse cuenta de las infinitas soluciones. Para ello, el estudiante debe estar familiarizado en que cada ecuación del sistema es también una función, y que la gráfica de la misma representa el mismo objeto. Es así como estas autoras consideran que los estudiantes podrían discutir sobre la tautología $0 = 0$, que comúnmente se obtiene cuando los estudiantes trabajan con los métodos puramente algebraicos cuando se enfrentan a los SEL. Sin embargo, esta aproximación funcional pudiera resultar compleja para ellos, por lo que las autoras sugieren que en la enseñanza se debe comenzar por aproximaciones operacionales más que con objetos matemáticos ya hechos, además de diseñarse secuencias con base en enfoques funcionales desde edades tempranas. Por otro lado, Sierpinska aplica un problema que consiste en mostrar tres planos intersectándose en una sola recta. Ante tal representación, los estudiantes afirman que hay una solución única para el sistema, lo cual resultaría en una "generalización" del concepto de solución para sistemas de 2x2 a sistemas de 3x3, aunque no de un modo analítico.

Eslava y Villegas (1998), citados por Ochoviet (2004), afirman que los estudiantes tienen dificultades para identificar las posiciones relativas de tres rectas en el plano cuando se trabaja gráficamente un SEL de tres ecuaciones con dos incógnitas. Esto implica además que los estudiantes no tienen clara la noción de solución de un sistema de ecuaciones, ya que relacionan las intersecciones de las rectas con los ejes cartesianos con la solución al sistema. Asimismo, en varias ocasiones, los estudiantes consideraron la intersección de los pares de rectas que se forman en un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas sin solución, como las soluciones del sistema, esto es, existen tres soluciones. De manera que se relaciona cualquier intersección entre rectas con solución del sistema.

En el trabajo de Ochoviet (2004) se plantea una investigación que busca analizar los significados que los estudiantes tienen de la noción de solución de un SEL. Para ello, propone un instrumento experimental donde se les pregunta lo siguiente (ver Figura 1):

1) A continuación aparecen graficadas las rectas asociadas a un sistema de tres ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? ¿Por qué?

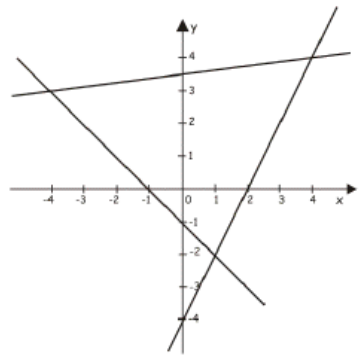


Figura 1. Actividad 1. Tomado de Ochoviet (2004, p. 82)

En esta tarea se presenta un sistema no convencional para lo que son las prácticas habituales de enseñanza del tema, ya que en la mayoría de las veces se presentan sistemas cuadrados. La respuesta de una estudiante ante la pregunta anterior es la siguiente: "En mi opinión tiene 3 soluciones, porque las rectas se cortan en 3 puntos diferentes, los cuales por lo menos en los sistemas de dos ecuaciones (sic) indican la solución" (p. 147).

Como se puede apreciar, el estudiante interpreta punto de corte como solución del sistema, donde dicho error proviene quizás de una generalización incorrecta del caso de los sistemas de 2x2 con solución única. Ante este tipo de respuestas, Ochoviet concluye que los conceptos de "solución de un sistema" y "sistema de ecuaciones lineales", está fuertemente influenciado por el significado que tienen dichas nociones en el ámbito de los SEL de 2x2, lo cual obstaculiza nuevos significados alrededor de los sistemas y su solución. Además, en muchas ocasiones, los estudiantes consideran que una representación de rectas paralelas es la única configuración gráfica de un sistema sin solución, identifican punto de corte con solución del sistema o consideran que un sistema es un conjunto cuadrado de ecuaciones. Como parte final del trabajo de Ochoviet, se brindan algunas recomendaciones didácticas para abordar el tema de solución de un SEL. Entre éstas, la autora menciona que no es recomendable comenzar la enseñanza de los sistemas para el caso 2x2, sino presentarle a los estudiantes más sistemas entre tantos otros con dos incógnitas y una discusión del número de soluciones de un sistema. Este tipo de propuestas, menciona la autora, podría ser apoyado con el análisis de las posiciones relativas de dos, tres o más rectas en el plano.

Ahora bien, de la anterior revisión bibliográfica se pueden obtener las siguientes conclusiones respecto del tema de los SEL:

1. Una de las nociones más importantes dentro del tema es el de Solución del SEL. Dicha noción parece ser un elemento que tiene que discutirse con cuidado, dado que podría generar concepciones erróneas entre los estudiantes, quienes pudieran relacionar *corte de rectas* como *solución del sistema*, lo cual no sería válido en sistemas que no fueran cuadrados, por ejemplo.
2. Es importante considerar un acercamiento al tema no únicamente desde lo algebraico, sino que se debe propiciar una coordinación con lo geométrico en ambos sentidos.
3. Trabajar sistemas que no tengan solución de manera que el estudiante pueda interpretar un tipo especial de sistema y cuáles son las condiciones bajo las cuales se presenta, y no únicamente condiciones algebraicas. Además, se debe resaltar una discusión sobre lo que significa que la solución sea *simultánea*, de manera que verifique cada una de las ecuaciones que componen al sistema.
4. Un acercamiento funcional al tema pudiera resultar en un punto de partida poco explorado, posiblemente porque el tema de función aún no está trabajado en los niveles de secundaria. Este acercamiento funcional al tema permitiría discutir sobre las infinitas soluciones del sistema, aspecto que dentro de lo algebraico resulta complejo para los estudiantes.

La importancia de la revisión anterior radica en la relevancia que le dan al significado de solución por sobre únicamente una versión centrada en los métodos algebraicos para resolver un SEL. Es por ello, que la propuesta contenida en el presente capítulo toma en consideración a la Visualización Matemática como el elemento clave para abordar la noción de solución de un SEL bajo una perspectiva funcional; esto es, considerar de entrada a las ecuaciones que conforman el SEL como funciones y elaborar un trabajo enteramente visual para abordar el comportamiento de las gráficas de las funciones que conforman el sistema según el comportamiento de sus parámetros: la pendiente y la ordenada al origen.

Este acercamiento implica diseñar un *experimento de enseñanza* que nos permitirá organizar el contenido en una THA para el tema en cuestión. Así, la pregunta que guía la investigación es *¿cuáles son los significados y las dificultades que estudiantes de Secundaria presentan ante la noción de solución de un SEL* *cuando se enfrentan a una THA para dicho tema, basada en la visualización y en la variación de parámetros?*

3. Marco conceptual: la visualización matemática

Es a partir de los años ochenta del siglo XX que en la literatura dentro de la disciplina se retomó un especial interés por los temas concernientes a las imágenes mentales, a la visualización y al pensamiento visual en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. Tal interés tuvo que ver también con el incremento de investigaciones constructivistas y el empleo de metodologías cualitativas para investigar procesos del pensamiento asociados al aprendizaje de las matemáticas (Presmeg, 2006). Lo anterior, debido asimismo a la importancia que tiene para el aprendizaje de las matemáticas la habilidad de la visualización matemática en la resolución de problemas. Sin embargo, ésta no es un proceso directo y sencillo ya que requiere de una especial atención para que pueda desarrollarse en los estudiantes. Como De Guzmán (1996) menciona:

> La visualización no es nada más una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podremos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta.

No obstante esta importancia dada a la visualización matemática, diversos autores han señalado que aún existe de parte de los estudiantes una resistencia al uso de consideraciones visuales (Hitt, 1998; Eisenberg & Dreyfus, 1991). Estas resistencias, como mencionan los autores, son debidas en gran medida a que en la enseñanza tradicional predomina un pensamiento algorítmico sobre los argumentos visuales, además de que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente. De igual forma, en muchas ocasiones los mismos profesores son quienes promueven un pensamiento algorítmico por sobre argumentaciones visuales.

En la literatura especializada hay diversos trabajos que caracterizan a la visualización matemática. Por ejemplo, Arcavi (2003) menciona que una caracterización que resalta la importancia de la visualización matemática, tanto como *sustantivo* (el producto, la imagen visual) y como *acción* (el proceso, la actividad), es considerar que *la visualización ofrece un método para ver lo que no se puede ver* (p. 215). Lo anterior implicaría que la visualización *es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, la interpretación, el uso y la reflexión sobre imágenes, diagramas, en nuestra mente, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información y el* *pensamiento, con la intención de desarrollar previamente ideas desconocidas y promover la comprensión* (p. 217).

Lo anterior implica que la visualización permite involucrarnos con los conceptos y sus significados que pudieran fácilmente ser pasados por alto en la solución simbólica de un problema, por ejemplo. De esta manera, se considera que la visualización no solamente es para meramente ilustrar, sino que se reconoce como una componente esencial del razonamiento, de la resolución de problemas, e incluso como una forma de argumentar.

Presmeg (2006), por su parte, considera a la visualización como aquello que incluye procesos de construcción y transformación tanto de imágenes visuales que nos hacemos en la mente, como de todas las inscripciones que tienen una naturaleza espacial que pudieran estar relacionadas en el quehacer matemático. Asimismo, esta autora menciona que su caracterización de este concepto incluye aspectos del pensamiento espacial: *interpretar información figural* y el *procesamiento visual.* Se podría decir entonces que la visualización bajo esta perspectiva se refiere a las imágenes mentales de un problema, de manera que visualizar un problema significaría entender dicho problema en términos de un diagrama o de imágenes visuales.

Uno de los trabajos más citados dentro de la investigación alrededor de la visualización matemática es el de Zimmermann & Cunningham (1991), debido a que es uno de los trabajos donde se condensan diversas aproximaciones sobre dicho tópico y se resaltan los resultados más relevantes. Para estos autores, la visualización en matemáticas va más allá de la "formación de una imagen mental", puesto que lo que interesa *es precisamente la habilidad de los estudiantes para dibujar un diagrama apropiado (con papel y lápiz, o con computadora) para representar un concepto matemático o un problema y usar el diagrama para alcanzar una comprensión, y como una ayuda en la resolución de problemas. En matemáticas, la visualización no es un final en sí mismo, sino un medio hacia un final, que es la comprensión* (p. 3). De manera que la visualización matemática es un proceso de construir imágenes (mentalmente, con papel o lápiz, con computadora) y *usar dichas imágenes efectivamente* para describir o comprender.

Por otro lado, Cantoral y Montiel (2001) caracterizan a la visualización como un proceso del pensamiento matemático y se refiere a la habilidad para *representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental demasiado útil en diversas áreas del conocimiento matemático y científico* (p. 14).

Ahora bien, se considera dentro del presente trabajo a la visualización desde la perspectiva de Cantoral y Montiel (2001), resaltando que es una habilidad y un proceso del pensamiento matemático pero que, además, permite desarrollarlo. A manera de síntesis, se presentan a continuación algunas habilidades que se resaltan en la visualización matemática (ver Tabla 1):

Habilidades propias de la Visualización Matemática
Habilidad para dibujar un diagrama adecuado
Habilidad para transformar información visual
Habilidad para comunicar (verbal o escrito) información visual
Habilidad para documentar información visual
Habilidad para reflejar información visual
Habilidad para representar un concepto matemático
Habilidad para usar diagramas visuales

Tabla 1. Habilidades de la visualización matemática

Además, el interés en los trabajos de Cantoral y Montiel (2001) es debido a que nos permite fundamentar una aproximación al estudio de los SEL cuando se resalta a cada una de las ecuaciones que componen el sistema como una función lineal. Lo anterior, debido a que estos autores trabajan una propuesta de visualización asociada a las gráficas de las funciones y afirman que, para lograr el desarrollo de la visualización en matemáticas, se requiere del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados. Lo anterior entonces posibilita una idea de *operar* con las gráficas de las funciones en analogía con los números o variables, esto es, que es posible operar con las funciones en términos de los comportamientos gráficos de las mismas. Así, adquiere un significado relevante el hecho de *sumar*, *multiplicar* o *dividir* gráficas de funciones. Para lograr tal cometido, es importante que los estudiantes logren significar el efecto que tiene cada uno de los parámetros A, B y C en la gráfica del modelo $F(x) = Af(x - B) + C$, donde F se considera una *transformación* de f.

De esta manera, se propone una reflexión centrada en la comprensión de los efectos de los parámetros que componen a cada una de las funciones lineales del sistema. Más adelante se ampliará esta idea a través del diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje donde se resalten significados de la *solución de un SEL* bajo una perspectiva de visualización de los efectos de los parámetros en el comportamiento gráfico de las funciones que componen el sistema*.* Así, el significado asociado a la solución de un sistema dependerá de las condiciones de los parámetros (pendiente y ordenada al origen) de sus funciones lineales.

4. Marco metodológico: Investigación basada en el Diseño y los experimentos de enseñanza

La Investigación basada en el Diseño (IbD) es un tipo de investigación cuyo objetivo es explicar cómo una innovación educativa funciona tanto a nivel didáctico como organizativo. El término *diseño* hace referencia al diseño instructivo que se elabora, se implementa y se somete a escrutinio de investigación. De manera que el interés se centra en estudiar los problemas de aprendizaje en sus *contextos naturales*, con el propósito explícito de producir modificaciones que lleven a mejores aprendizajes.

Gravemeijer & Von Eerde (2009) mencionan que la IbD también se presenta como un método de investigación cuyo objetivo es permitir a los profesores conocer cómo un enfoque instruccional innovador funciona en un ambiente de clase, con la intención de que dichos profesores puedan adaptarlos en sus propias aulas. La investigación de diseño, entonces, permite la creación de una *teoría local de instrucción* (o al menos, contribuciones teóricas), es decir, una teoría sobre los procesos mediante los cuales es posible apoyar a los estudiantes para que aprendan cierto tema o tópico en matemáticas. La investigación de diseño apuesta entonces por un cambio en el rol del docente, un rol más activo en el cual aporta sus propias contribuciones y establece las normas sociales apropiadas para el salón de clases. En términos generales, la IbD tendría el potencial de establecer un puente entre la práctica educativa y la teoría, puesto que promueve el desarrollo teórico sobre un dominio específico de aprendizaje, tanto como provee de los medios para apoyar el desarrollo de dicho aprendizaje (Bakker & Von Eerde, 2015; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003).

Bakker & Von Eerde (2015) sintetizan las principales características de la IbD como sigue:

- El propósito de la IbD es *desarrollar teorías sobre el aprendizaje y los medios que se diseñan para apoyar a dicho aprendizaje.*
- Tiene una naturaleza *intervencionista,* dado que toma lugar en la ecología del salón de clases directamente.
- Tiene componentes prospectivos y reflexivos que no se requieren separar en un *experimento de enseñanza.* El investigador confronta las

conjeturas (parte prospectiva) con el aprendizaje que observa (parte reflexiva).

- Tiene una naturaleza *cíclica.* Los ciclos generalmente consisten en las siguientes fases: i) Preparación y diseño, ii) implementación del Experimento de enseñanza y iii) Análisis retrospectivo.
- La *teoría desarrollada* tiene que funcionar en dominios y contextos diferentes.

En las tres fases arriba mencionadas, se considera un instrumento para el diseño y posterior análisis: la *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje*[3] (THA). A continuación, se describe cada una de las fases de la IbD y la forma en la cual la THA se relaciona en cada una de ellas (Bakker & Von Eerde, 2015; Gibelli, 2014):

1. Preparación y diseño. Se definen los objetivos de aprendizaje y las condiciones del contexto donde sucederá la intervención; se formulan hipótesis sobre el aprendizaje potencial de los estudiantes y cómo el profesor apoyará durante el proceso de aprendizaje. Se consideran aspectos del contenido matemático del diseño, cómo es abordado escolar y curricularmente, además de las dificultades que los estudiantes presentan cuando se enfrentan a dicho contenido. De esta manera se formula un diseño de instrucción (actividades instruccionales), donde se enfatizan los objetivos a perseguir con el diseño, los medios que lo harán posible y un marco de referencia teórico que fundamenta las actividades.

2. Implementación del Experimento de enseñanza. El diseño de instrucción formulado en la etapa anterior se implementa. En esta fase, el diseño pudiera considerarse como una THA que funciona como guía para el profesor y el investigador durante la implementación y permite realizar ajustes al diseño, de acuerdo a la dinámica y el contexto.

3. Análisis retrospectivo. Se analizan los datos recolectados en la fase previa. Además, se reconstruye una teoría instructiva; esto es, la THA inicial

---

[3] Simón (1995) acuña el término Trayectoria Hipotética de Aprendizaje desde una perspectiva constructivista al aprendizaje, para referirse a las predicciones realizadas por el profesor, así como al camino por el cual el aprendizaje podría proceder. Se considera hipotética porque la trayectoria de aprendizaje real no se conoce de antemano. Le provee al profesor de una racionalidad para escoger un diseño instruccional particular. Una THA tiene tres componentes: el objetivo de aprendizaje que define la dirección, las actividades de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético; en términos de una predicción de cómo la comprensión y el pensamiento de los estudiantes evolucionará en el contexto de las actividades de aprendizaje (p.136).

funciona como una guía para determinar en qué debe enfocarse el investigador durante el análisis. Se confrontan las hipótesis iniciales con las observaciones realizadas en el experimento de enseñanza, de manera que la THA se reformula y el ciclo puede comenzar nuevamente. El objetivo es proveer resultados empíricos que otros puedan ajustar a sus circunstancias locales.

La THA es una de las piezas centrales dentro de los ciclos de la IbD, ya que es donde se materializan las hipótesis sobre el desarrollo del aprendizaje de los estudiantes y se concretan a través de tareas y/o actividades instruccionales. La siguiente Figura 2 presenta los elementos que componen la THA:

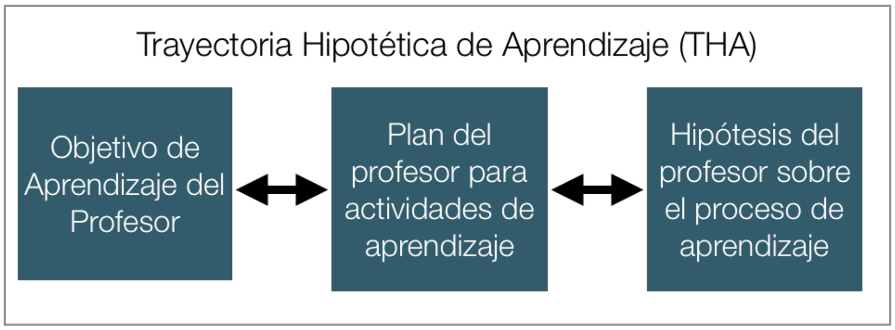


Figura 2. Elementos de la THA. Tomado de Simón (1995). Traducción libre

La inclusión de la IbD dentro de la presente investigación atiende a la necesidad de construir una teoría interna alrededor del aprendizaje de la noción de solución de un SEL, complementada con los aspectos de visualización que se mencionaron en el apartado anterior. Es decir, se proveerá de actividades instruccionales que se espera permitan el desarrollo cognitivo posterior de los estudiantes. A continuación, se describen los elementos particulares de cada fase de la IbD para el tema de solución de un SEL para el nivel Secundaria.

Fase 1. Preparación del Experimento

En esta fase se realizaron las siguientes actividades:

a) Definición del problema y los objetivos específicos de la investigación.
b) Construcción de un examen de diagnóstico para identificar los conocimientos sobre el tema de los SEL. Este examen se aplicó a estudiantes de tercer grado de Secundaria y contenía tareas donde los estudiantes debían resolver SEL de 2x2, así como tareas de

identificación del tipo de solución dadas las gráficas de las ecuaciones que conformaban el sistema.

c) Análisis sobre las dificultades detectadas en los estudiantes de tercer grado con respecto al tema.

d) Revisión bibliográfica en la literatura especializada sobre las dificultades que se presentan en estudiantes cuando se enfrentan al tema de los SEL (este aspecto se presentó en el apartado 2 del presente documento).

e) Elaboración de un diseño instruccional que contenía tareas donde se involucraba la visualización matemática, considerada como el fundamento teórico que marca la dirección del diseño. Este diseño instruccional toma en consideración, además, los aspectos de la revisión bibliográfica sobre la noción de *solución del SEL,* una visión funcional para trabajar los SEL y la variación de parámetros como el elemento central de las discusiones de las tareas que lo componen. Este diseño también se acompañó de objetivos de aprendizaje provisionales para cada tarea, el compendio de las tareas y las hipótesis del profesor sobre el proceso de aprendizaje que se llevaría a cabo.

El examen de diagnóstico se aplicó a una población de 40 estudiantes de tercer grado en tres diferentes secundarias en las ciudades de Saltillo y Ramos Arispe del estado de Coahuila, México. Las edades de los participantes variaban entre los 15 y 16 años. El examen de diagnóstico se dividió en dos partes, una algebraica y otra gráfica, cuyo objetivo era identificar la noción que tienen los estudiantes de tercer grado sobre los sistemas de ecuaciones lineales y sobre la solución simultánea usando el método gráfico; es decir, si podían reconocer el tipo de solución que tiene un SEL. Los resultados del examen diagnóstico se resumen en la Tabla 2:

Dificultades y errores detectados en el examen de diagnóstico
1. Respecto a las operaciones aritméticas. Equivocación en el empleo de signos y operaciones básicas, despejes, etcétera.
2. La noción de variable. Los estudiantes argumentaban que un sistema era una SEL porque aparecían las literales “x” y “y”.
3. El signo igual. Algunos estudiantes argumentaban sobre que unos sistemas no eran SEL puesto que la parte derecha de la igualdad de una de las ecuaciones era cero ($\mathbf{ax} + \mathbf{by} = \mathbf{0}$), lo cual no era correcto. Además, el orden y la disposición de los sistemas era relevante al momento de decidir si era o no un SEL.

4. Dificultades en la resolución del sistema debido a dudas sobre el método a utilizar. Los estudiantes manifestaron que no recordaban cómo era el algoritmo que se sigue para resolver los sistemas.
5. La naturaleza de las ecuaciones del sistema. Sin importar el grado de las variables, algunos estudiantes manifestaron que, si aparecían dos ecuaciones, era suficiente para considerarse un SEL.
6. La noción de solución como corte. Al igual que en Ochoviet (2009), algunos estudiantes manifestaron que un sistema tenía solución cuando se cruzan las gráficas del sistema.

Tabla 2. Resultados principales del examen diagnóstico.

Posterior al análisis del examen diagnóstico y a la revisión bibliográfica se continuó con el diseño instruccional, que incorporaba una innovación con respecto al tema de los SEL. El objetivo general de esta innovación fue que el estudiante sea capaz de reconocer el tipo de solución de un SEL a partir de un análisis de las posibilidades que tenían un par o más de rectas cuando se ubicaban en un plano, pero a través de reconocer los efectos de los parámetros que estaban involucrados en sus ecuaciones. Para ello, el diseño instruccional se dividió en dos partes: la variación de los parámetros en el modelo lineal y un laboratorio con tecnología. En la primera, se inicia a los estudiantes en el estudio de la función lineal de la forma $y = mx + b$, y se hacen variar los parámetros m y b, esto es, considerar m>0, m<0, 0<m<1, etc., al igual que con el parámetro b, y conjeturar sobre sus efectos a través del análisis de patrones gráficos y de la comparación con la gráfica canónica $y = x$ (recta identidad). A continuación, se presenta una tabla que contiene las actividades y tareas que componen el diseño instruccional durante la primera parte y los objetivos (ver Tabla 3).

Actividad	Tareas	Objetivo
$\mathbf{m > 0}$ $\mathbf{b = 0}$	1.1. Completa la tabla y responde	Que el estudiante sea capaz de completar la tabla observando el patrón que se indica para ubicarlos en el plano cartesiano.
	1.2. Clasifica la gráfica	El objetivo de esta tarea es que los estudiantes puedan identificar y clasificar el tipo de gráfica que obtuvieron
	1.3. Relacionar la gráfica con su ecuación	Que el estudiante sea capaz de interpretar una función de dicha gráfica y construir su forma algebraica

	1.4. Completar tablas para diferentes valores positivos de la pendiente	Que el estudiante complete las tablas usando la expresión algebraica y reconozca un patrón gráfico
	1.5. Reconocimiento del tipo de función	Sin realizar las gráficas, el objetivo es que el estudiante prediga el tipo de función que se obtiene
	1.6. Reconocimiento del comportamiento gráfico de las funciones	Que el estudiante analice las gráficas de las funciones que construye y reconozca un patrón gráfico en su comportamiento, para así clasificarlas destacando características
	1.7. Anticipación de una forma gráfica 1.8. Construcción de la gráfica	Que el estudiante sea capaz de anticipar la forma de la gráfica de acuerdo con el valor de la pendiente, sin construir la tabla de valores.
	1.9. Reconocimiento del efecto del parámetro m cuando m>0	Que el estudiante reconozca y argumente que, mientras la pendiente es más grande, el efecto en la gráfica es que la línea recta se "acerca más" al eje y desde los cuadrantes 1 y 3.
$\mathbf{m < 0}$ $\mathbf{b = 0}$	Las tareas 2, 3 y 4, que componen estas actividades, se organizan de la misma manera que para el caso anterior.	Los objetivos de las tareas son los mismos que en el caso anterior, pero en la última tarea el objetivo es que el estudiante reconozca y argumente que mientras la pendiente es más pequeña, el efecto en la gráfica es que la línea recta se "acerca más" al eje y, pero desde los cuadrantes 2 y 4
$\mathbf{0 < m < 1}$ $\mathbf{b = 0}$		El objetivo general de ambas actividades es que los estudiantes reconozcan y argumenten que cuando la pendiente es un valor entre 0 y 1, el comportamiento de la gráfica lineal será "acercarse" cada vez más al eje x. El signo de la pendiente tendrá el mismo efecto que en los casos anteriores.
$\mathbf{-1 < m < 0}$ $\mathbf{b = 0}$		
Tomando $\mathbf{m}$ fijo, $\mathbf{b > 0}$ $\mathbf{b < 0}$	5.1. Completar la tabla y construir la gráfica en el plano	El objetivo es construir la gráfica observando el patrón que se obtiene en la tabla y que se argumente sobre cómo construir la gráfica, pero sin necesidad de realizar la tabla.
	5.2. Reconocer el comportamiento de la gráfica	Que el estudiante sea capaz de observar el corte que se obtiene en el eje y cuando la ordenada es positiva o negativa
	5.3. Trabajo con la función $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$ y su relación con $\mathrm{y} = \mathrm{mx} + \mathrm{b}$	El objetivo es que el estudiante reconozca la misma función lineal representada de otra manera
	5.4. Conjeturar el comportamiento de la gráfica	Se pretende que el estudiante argumente sobre el comportamiento, ahora del corte de las rectas con el eje y cuando se trabaja con la ordenada al origen positiva y negativa
Síntesis de la variación	6.1. Relacionar funciones con gráficas	Esta tarea tiene por objetivo que el estudiante identifique y relacione gráficas en el plano con la ecuación de una función lineal

de parámetros	6.2. Construcción de ecuaciones	Que el estudiante sea capaz de dar una expresión algebraica según la gráfica de una función lineal que le corresponda
	6.3. Análisis de parámetros 6.4. Análisis de parámetros 6.5 Análisis de parámetros	Que el estudiante reconozca los parámetros involucrados en el modelo lineal cuando se presentan diferentes formas ($ax + by = c, y = mx + b$)

Tabla 3. Actividades, tareas y objetivos del diseño instruccional para el estudio de los SEL bajo una perspectiva de visualización

A manera de hipótesis, se espera que con estas actividades que conforman la primera parte del diseño instruccional el estudiante sea capaz de reconocer y predecir el comportamiento de la gráfica de una función lineal a partir de los parámetros que la componen. Dado que los estudiantes han abordado el tema de proporcionalidad directa, es probable que no tengan dificultades al reconocer el sentido de las actividades. Una de las dificultades que pudiera surgir es con respecto a la construcción de las gráficas usando las tablas y la ubicación de puntos en el plano cartesiano.

Hasta este momento del diseño instruccional, no se ha abordado el tema de los SEL; sin embargo, el experimento de enseñanza obliga a que los estudiantes previamente construyan el significado gráfico de los parámetros que componen el sistema cuando se considera un punto de partida funcional. Este aspecto es crucial dentro de las hipótesis de la segunda parte del diseño instruccional. A continuación, se presenta la Tabla 4 que contiene las actividades y tareas que componen la segunda parte del diseño, junto con sus respectivos objetivos.

Actividad	**Tareas**	**Objetivo**
Laboratorio con tecnología 1	7.1. Construcción de rectas en el plano usando *GeoGebra*	El objetivo de esta actividad es que el estudiante analice las condiciones de dos rectas en un plano a partir de la geometría dinámica y que argumente sobre las posibilidades que se presentan cuando dos rectas están en el plano: se cortan, son paralelas o son la misma
Laboratorio con tecnología 2	8.1. Construcción de rectas en el plano usando *GeoGebra*	El objetivo de esta tarea es que el estudiante sea capaz de relacionar la ecuación de una recta con su gráfica usando la geometría dinámica. En esta tarea ya se comienza con el análisis de parejas de funciones, tratadas como sistemas
	8.2. Identificación de los parámetros del sistema	Esta tarea tiene por objetivo que el estudiante identifique características subyacentes con respecto a los valores de los parámetros que se le

		presentan y el tipo de posibilidad que tendrán las parejas de gráficas en el plano
	8.3. Características de las gráficas 8.4. Predicción del comportamiento	Estas tareas tienen por objetivo que el estudiante anticipe el comportamiento del sistema según los valores de los parámetros: si las pendientes son iguales pero diferentes ordenadas, etcétera
	8.5. Comportamiento del sistema	Esta tarea tiene por objetivo que el estudiante identifique las condiciones de los parámetros de dos rectas paralelas o cuando una es múltiplo de la otra (la misma recta)
Solución de un Sistema	9.1. Identificación de los parámetros del sistema	El objetivo es que el estudiante use la expresión algebraica que compone el sistema para determinar el valor de la pendiente y ordenada al origen
	9.2. Clasificación de la solución	El objetivo es que el estudiante, sin realizar tablas ni gráficas, sea capaz de reconocer el tipo de solución del sistema.
Síntesis de la solución de un sistema	10.1. Construcción del sistema	El objetivo de la tarea es que el estudiante, a partir de las gráficas de funciones lineales que conforman un sistema, sea capaz de asignar los valores de los parámetros en la ecuación de la función lineal a partir de una lista de valores dados
	10.2. Tipo de solución	A partir de los sistemas construidos en la tarea previa, que el estudiante reconozca las condiciones del par de rectas y determine el tipo de solución

Tabla 4. Actividades, tareas y objetivos de la segunda parte del diseño instruccional para el tema de SEL

Cabe mencionar que, en las primeras dos actividades, no se pidió a los estudiantes graficar funciones lineales, sino que se utilizó la herramienta "recta por dos puntos" que el programa de geometría dinámica ofrecía. Esta decisión se debió a que se esperaba que los estudiantes primero manipularan gráficamente el comportamiento de las rectas y transformaran posteriormente esta información en términos algebraicos para trabajar ahora la relación gráfica-función y pudieran ser capaces de argumentar sobre los parámetros que conformarían a la ecuación de cada una de las funciones en el plano.

Ahora bien, a manera de hipótesis se considera que el trabajo inicial con gráficas resultará en una comprensión más robusta sobre el tipo de solución de un sistema, puesto que no se define de antemano qué es una solución, sino se habla de las condiciones que cumplen un par de rectas en el plano y qué posibilidades tienen. La geometría dinámica nos posibilita este tipo de reflexiones y promueve la argumentación gráfica y visual entre los estudiantes.

Se espera que los estudiantes puedan identificar rápidamente cuando dos rectas se cortan o no (rectas paralelas) pero no así cuando son "la misma recta".

a) Implementación del Experimento de Enseñanza

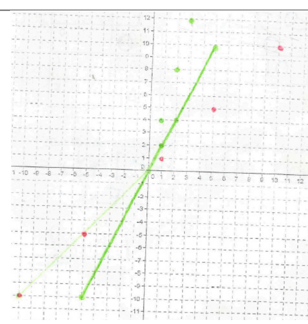
Las actividades y tareas que componen el diseño instruccional tenían por objetivo presentar una alternativa para el aprendizaje de los SEL, en particular, de la solución de un SEL. Para ello se diseñó un punto de partida diferente a lo que presentan comúnmente los planes curriculares o los libros de texto relativos al tema. Se plantea como inicio un acercamiento funcional al tópico a través del análisis gráfico del comportamiento de una función lineal a partir de sus parámetros. Esta innovación permite un acercamiento a la noción de solución de un SEL por medio de la construcción de conjeturas sobre las posibilidades de un par de rectas en el plano cuando se varían los parámetros de cada una de ellas.

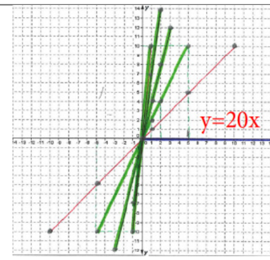
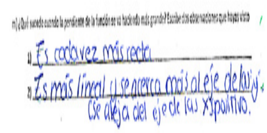
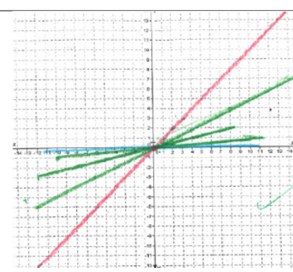
La etapa de implementación del experimento de enseñanza se realizó en el Colegio La Paz de Saltillo, Coahuila (México) durante el ciclo escolar 2015-2016, en donde cursaban cuatro secciones de segundo grado, cuyas edades oscilan entre los 14 años. Se seleccionó al azar una sección, que resultó ser la B, misma que contaba con un total de 25 estudiantes sin previa instrucción en el tema de SEL ni en el tema de función lineal. Las implementaciones de las actividades se realizaron por uno de los autores del presente manuscrito, quien fungió también como la profesora titular de los grupos en dicho Colegio. El periodo de implementación del diseño se realizó una sola vez durante los meses de febrero, marzo –con un periodo intermedio de receso– y mayo. En total se emplearon 10 sesiones de una hora cada una para la implementación del diseño completo. De hecho, este tiempo superó el destinado dentro del programa para dicho tema, sin embargo, dada la viabilidad de contar con el grupo de la profesora-investigadora, se tuvo la libertad de ampliar los episodios de implementación.

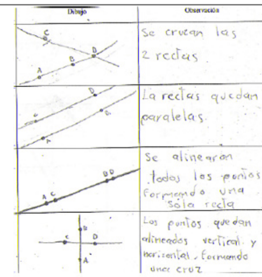
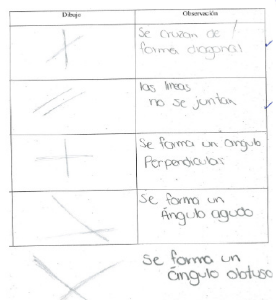
Durante las implementaciones se realizaron videograbaciones y/o grabaciones de audio de las sesiones, se recolectaron las producciones escritas de los estudiantes, las hojas de trabajo en *GeoGebra* y la investigadora-profesora realizó una bitácora de observación durante cada una de las sesiones. Esta información se trianguló en el análisis retrospectivo que se presenta en la próxima sección.

b) Análisis retrospectivo

A continuación, se presenta un *análisis orientado a las tareas* que componen el diseño instruccional, de manera que el énfasis estará en comparar las hipótesis planteadas al inicio –en el diseño– con lo que realmente sucedió durante la implementación. La intención es comparar datos del *aprendizaje "real"* de los estudiantes durante las diferentes tareas que componen el diseño. Para el análisis, se encontró útil la matriz propuesta en Bakker & Von Eerde (2015). La parte izquierda de dicha tabla resume los principales aportes de la fase de diseño, mientras que la parte derecha se llenó con las producciones de los estudiantes durante la resolución de las tareas. Se acompaña esta sección con notas de los investigadores y de las categorías o dificultades que se elaboran en el análisis. La intención de la tabla es mostrar un análisis retrospectivo general e identificar secciones problemáticas del diseño instruccional, así como dificultades de los estudiantes con respecto al tema, que conformarán una THA que pueda replicarse. Cabe mencionar que, por cuestiones de espacio, se considerará el análisis de algunas tareas únicamente.

Diseño instruccional hipotético (THA)			**Trayectoria real de aprendizaje**	
Número de tarea	Formulación de la tarea	Hipótesis sobre cómo los estudiantes responderían	Producciones de los estudiantes	Explicación y conjeturas
1.2	Para $m > 0$ y $b = 0$, clasifica la gráfica	En esta tarea se esperaba que los estudiantes pudieran graficar, con ayuda de la tabla, la gráfica de la función lineal asociada		Aunque los estudiantes fueron capaces de ubicar los puntos en el plano dada la tabla de coordenadas, la gran mayoría no consideró rectas que se prolongan, sino segmentos de recta. Lo anterior posiblemente se deba a que era la primera vez que se enfrentaban al tema de graficar funciones y el uso del plano cartesiano y coordenadas

1.8	Construye la gráfica sin hacer la tabla para $y = 20x$	Se esperaba que los estudiantes, una vez que analizaran el patrón gráfico, serían capaces de proponer una gráfica con una pendiente grande, lo cual implicaría una gráfica lineal que se "pegara" al eje Y	 	Esta tarea fue resuelta únicamente por el 20% de los estudiantes. Algunos destacaron que, cuando el valor aumente, lo que sucedería gráficamente es que la recta se inclinaría tanto que "traspasaría el eje Y". Algunos no pudieron graficar la recta y la ubicaron sobre un eje. No obstante, varios estudiantes pudieron al menos mencionar que la recta se haría cada vez más vertical y se acercaría mucho al eje Y.
2	Para $0 < m < 1$ y $b = 0$ construir la gráfica	Se esperaba que los estudiantes resolvieran la tarea aludiendo a las conjeturas realizadas en la primera tarea y mencionaran que el efecto ahora que tiene la pendiente es "acercar" la recta al eje de las X, pero sin cambiar el hecho de que pasa por el origen y se ubica en los cuadrantes 1 y 3		Aunque la gran mayoría de los estudiantes pudo comparar las gráficas construidas con la identidad e identificar el efecto del valor del parámetro, tuvieron dificultades en el empleo de decimales y fracciones. Muchos estudiantes solicitaban que las fracciones fueran puestas en decimales puesto que era más "cómodo" el trabajo de esa manera. El 20% de los estudiantes concluyó la actividad completa y logró realizar la gráfica de y=0.05x; no obstante, la gran mayoría mencionó cuál sería el efecto,

			pero no pudieron dar la gráfica
7.1	Las gráficas en el plano, ¿qué posibilidades se pueden presentar con el par de rectas?	Se esperaba que los estudiantes manipularan el par de rectas y que relacionaran el comportamiento con lo que se había trabajado en la variación de parámetros. Al ser la primera vez que usarían el *GeoGebra*, se podrían presentar dificultades técnicas en cuanto su uso. Reconocer que una posibilidad que tienen las rectas es ser la misma (estar una "sobre" la otra) pudiera ser la más compleja de proponer.	  La geometría dinámica, aunque se consideró en un inicio una posible dificultad en los estudiantes, no resultó así: estuvieron muy cómodos manipulando dinámicamente lo que se les pidió que construyeran en el ambiente gráfico del *GeoGebra*. En esta tarea una situación que ocurrió y llamó la atención fue que varios estudiantes (más del 50%) puso énfasis en que las posibilidades de un par de rectas estaban determinadas por los ángulos que se forman entre ellas cuando se cruzan. Las rectas paralelas fue de las primeras posibilidades que determinaron los estudiantes, aunque en ocasiones consideraban que un par de rectas eran paralelas cuando no lo eran, pero por la herramienta zoom se confrontó tal consideración. Como se esperaba, sólo algunos estudiantes fueron capaces de determinar que una posibilidad que pudiera presentarse es cuando todos los puntos de ambas rectas coincidieran.

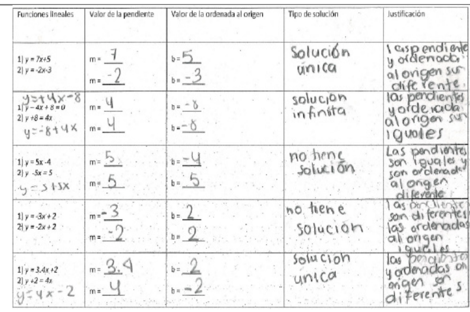
<table>
<tr>
<td>9.2</td>
<td>¿cuál es el tipo de solución del sistema según las ecuaciones que se presentan?</td>
<td>Se esperaba que los estudiantes pudieran reconocer los parámetros de las funciones lineales y visualizaran el comportamiento gráfico para establecer qué tipo de posibilidad guardan las rectas.</td>
<td>

<table>
<tr><th>Funciones lineales</th><th>Valor de la pendiente</th><th>Valor de la ordenada al origen</th><th>Tipo de solución</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td>1) $y = 7x+5$
2) $y = -2x-3$</td><td>m = 7
m = -2</td><td>b = 5
b = -3</td><td>Solución única</td><td>las pendientes y ordenada al origen son diferente.</td></tr>
<tr><td>y=+4x-8
1) $y - 4x + 8 = 0$
2) $y + 8 = 4x$
y=-8+4x</td><td>m = 4
m = 4</td><td>b = -8
b = -8</td><td>solucion infinita</td><td>las pendientes y ordenada al origen son iguales</td></tr>
<tr><td>1) $y = 5x - 4$
2) $y - 5x = 5$
y=5+5x</td><td>m = 5
m = 5</td><td>b = -4
b = 5</td><td>no tiene solución</td><td>Las pendientes son iguales y son ordenada al origen diferente</td></tr>
<tr><td>1) $y = -3x+2$
2) $y = -2x+2$</td><td>m = -3
m = -2</td><td>b = 2
b = 2</td><td>no tiene solución</td><td>Las pendientes son diferentes y las ordenadas al origen iguales</td></tr>
<tr><td>1) $y = 3.4x+2$
2) $y + 2 = 4x$
y=4x-2</td><td>m = 3.4
m = 4</td><td>b = 2
b = -2</td><td>solucion unica</td><td>las pendientes y ordenadas al origen son diferentes</td></tr>
</table>
Para llegar a esta tarea, la profesora-investigadora tuvo que sintetizar con el grupo las ideas que habían revisado hasta ese momento y mencionar que estaban trabajando con un sistema de líneas rectas. Esta es la primera ocasión que a los estudiantes se les mencionaba dicha palabra para referirse al trabajo realizado. Así mismo, se propusieron nombres a cada una de las posibilidades que los estudiantes habían sugerido, siendo nuevamente la de soluciones infinitas la más compleja de identificar y nombrar. Se puede observar del análisis de las producciones que los estudiantes aún tienen dificultades para identificar, por ejemplo, que las expresiones $2x + y = 1$ y $y = -2x + 1$ son equivalentes. De manera que muchos estudiantes aún fallan identificando el valor de la pendiente cuando la ecuación no tiene la forma $y = mx + b$. Esto probablemente es debido a que apenas son las primeras experiencias de los estudiantes con el álgebra y las expresiones equivalentes.
En esta tarea, los estudiantes identifican la solución como el tipo de posibilidad que tienen las gráficas de las rectas.
</td>
</tr>
</table>

Tabla 4. Resultados del análisis retrospectivo

5. Comentarios finales

La IbD orientó la construcción de un diseño instruccional basado en la visualización para el tema de SEL en el nivel Secundaria. Además, dada la naturaleza del tema, el aporte es importante debido a que se motivó a los estudiantes el estudio del SEL usando un experimento de enseñanza que no concordaba con lo señalado en el plan de estudios. De manera que la importancia de la docente-investigadora como agente innovador y de toma de decisiones en su contexto de aula resultó crucial para la implementación sin problemas del diseño. Sin duda que el trabajo no estuvo exento de dificultades y contratiempos que se iban afinando sesión a sesión, lo cual es natural cuando se trabaja con este tipo de metodologías donde se ingresa al contexto natural del aula.

Con respecto a los resultados obtenidos, se considera que la comparación presentada en la Tabla 5 deja ver el avance de los estudiantes y las dificultades que se iban presentando, algunas de las cuales no fueron previstas. Por ejemplo, las que tuvieron los estudiantes con la variación de parámetros. Lo anterior debido quizás a que fue el primer contacto de los estudiantes con el plano cartesiano, ya que no habían llevado el tema de funciones, por lo que se tuvo que trabajar un poco más alrededor de la explicación de cómo se ubican los puntos en él. Otra dificultad tenía que ver con la "recta infinita", ya que los estudiantes trabajaban con segmentos de recta, lo cual puede ser debido a los efectos de la representación tabular y a la cantidad de datos que se usan en las tablas. Es notorio, por ejemplo, que un argumento que apareció fue la relación de la posibilidad de dos rectas en el plano y el ángulo entre ellas. Este aspecto no se esperaba que surgiera, lo cual fue debido a la influencia de los temas de geometría que llevaban en ese momento los estudiantes. No obstante, los estudiantes fueron capaces de proponer patrones de comportamiento y transformar las gráficas con la intención de responder preguntas sobre la anticipación de comportamientos, como cuando se les cuestionaba sobre la forma de la gráfica cuando $m = 20$ o $m = -20$.

Es importante recalcar que la noción de solución del SEL se significó como las posibilidades que tienen las gráficas de las rectas según los valores de sus parámetros y su disposición en el plano. Este argumento fue generado a través de todas las tareas que componen el diseño instruccional inicial. Como se esperaba, el SEL con soluciones infinitas es la más compleja de visualizar y de construir por parte de los estudiantes. Sin embargo, el acercamiento funcional a la noción de solución de un SEL, aporta elementos interesantes para el trabajo posterior. Cabe mencionar también que en ningún momento del desarrollo del experimento de enseñanza se trabajaron los métodos tradicionales para resolver un SEL, sino que estos fueron abordados posterior a la implementación. Lo importante fue que el diseño no se limitó a un argumento algebraico, sino que permitió explorar dinámicamente el comportamiento de las funciones lineales a partir de sus parámetros, que es donde se considera la potencia de las tareas. No obstante, es claro que se requieren tiempos de trabajo largos y continuos con los estudiantes, así como un rediseño de la THA que se genere con base en el análisis retrospectivo.

a) Limitaciones y prospectivas

Algo importante a mencionar es que el diseño instruccional, al ser trabajado bajo la visualización de funciones únicamente, no permitiría analizar sistemas de ecuaciones que involucren rectas verticales de la forma x=k. Esto es un aspecto limitante de la propuesta, sin embargo, podría trabajarse desde una perspectiva gráfica enteramente y sería posible explorar dicho aspecto. Es importante considerar también el tiempo que llevó realizar el experimento de enseñanza, puesto que en ocasiones las limitaciones institucionales pesan en el actuar de los profesores y en el empleo de innovaciones didácticas. Otra limitación a tener en cuenta es que los estudiantes pudieran no tener la experiencia suficiente con el empleo del plano cartesiano, puesto que el tema de función pudiera ser posterior al estudio de los SEL. Este aspecto pudiera revisarse en el rediseño de la THA.

Se espera que los aportes acá vertidos puedan generar el interés de más profesores para implementar el experimento de enseñanza a partir de un rediseño de la THA con la experiencia realizada en este trabajo. El reto siguiente consiste en presentar los resultados –en este caso, la THA que se generó en el ciclo de la IbD implementada– a otros colegas, de manera que puedan ajustarla a sus contingencias locales. La intención al final de cuentas es mejorar los procesos de enseñanza y aportar elementos didácticos en pos del desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes y de diseños de instrucción útiles para los docentes en ejercicio.

Referencias

Arcavi, S. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241.

Bakker, A. & Von Eerde, D. (2015). An Introduction to Design-Based Research with an Example from Statistics Education. En A. Bikner-Ahsbahs *et al*. (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*, (pp. 429-466), Dordrecht: Springer.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México: Prentice Hall.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher. 32*(1), 9-13.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra.* Madrid: Pirámide.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991) On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-14), MAA Notes, No. 19: NCTM.

Gibelli, T. (2014). *La investigación basada en diseño para el estudio de una innovación en educación superior que promueve la autorregulación del aprendizaje utilizando TIC*. Recuperado de: https://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/1440.pdf

Gravemeijer, K. & Von Eerde, D. (2009). Design Research as a Means for Building a Knowledge Base for Teachers and Teaching in Mathematics Education. *The Elementary School Journal, 109*(5), 510-524.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática, 10*(2), pp. 23-45.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. (1990). Functions Graphs and Graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Ochoviet, C. (2009). Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Tesis inédita de doctorado. CICATA, Ciudad de México, México.

Ochoviet, C. y Oktac, A. (2011). Comprender los resultados de investigación: La función docente de investigador en la enseñanza de la matemática educativa. En G. Buendía (Coord.), *Reflexión e Investigación en Matemática Educativa*. México: Editorial Lectorum, 53-80.

Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 453-461.

Presmeg, N. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. En A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-236). Rotterdam: Sense.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7*(01), 49-78.

Simón, M. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

SEP (2011). *Programa de Estudios 2011 Secundaria Matemáticas. Guía para el maestro*. México: Secretaría de Educación Pública.

Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991), *Visualization in Teaching and Mathematics*. USA: MAA Series, 19.

9 Visualizando funciones aproximadas y exactas de acumulación

José Ramón Jiménez Rodríguez[1]

Resumen

Se presenta de manera desglosada y se ejemplifica una idea de Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008), consistente en interpretar la integral como una función de acumulación en un sentido bastante simple, esto es, como una suma que contiene un número grande pero finito de términos relativamente pequeños en magnitud. Este acercamiento permite superar las deficiencias del enfoque tradicional (la integral como antiderivada), creando las bases para que el estudiante desarrolle un significado variacional de la integral.

Palabras clave: pensamiento variacional, razón de cambio, acumulación.

Résumé

Nous présentons en détail et illustrons une idée de Thompson et Silverman (2007) et Kouropatov (2008), consistant en l'intégrale en tant que fonction d'accumulation dans un sens assez simple, c'est-à-dire en tant que somme contenant termes de magnitude relativement faible. Cette approche permet de surmonter les faiblesses de la présentation traditionnelle (l'intégrale en tant que primitive), en créant les bases permettant à l'etudiant de développer une signification variationnelle de l'intégrale.

Mots clés : pensée variationnelle, taux de changement, accumulation.

Abstract

We present in detail and exemplify an idea of Thompson and Silverman (2007) and Kouropatov (2008), consisting in interpreting the integral as an accumulation function in a rather simple sense, that is, as a sum that contains a large but finite number of terms relatively small in magnitude. This approach allows to overcome the deficiencies of the traditional presentation (the integral as antiderivative), creating the bases for the student to develop a variational meaning of the integral.

Keywords: variational thinking, rate of change, accumulation.

[1] Universidad de Sonora, México.

1. Algunas deficiencias del acercamiento tradicional a la integral

Como han señalado varios autores (Orton, 1993; Thompson, 1994; Thompson y Silverman, 2007; Kouropatov, 2008), el enfoque habitual para la enseñanza de la integral, uno de los conceptos fundamentales del Cálculo, no es el que resulta más apropiado para entender sus aplicaciones a múltiples problemas de la ciencia y la tecnología, ni tampoco para favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. Bajo este enfoque, primeramente, se procede a introducir la integral indefinida como una operación inversa a la derivación (antiderivada), y luego se presenta una versión estática del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) en el que aparece la integral definida: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Enseguida se procede a desarrollar el significado geométrico de ésta, como área debajo de una curva. Luego se pasa a estudiar el cálculo de volúmenes, longitudes de arco, masas, etcétera, es decir, las aplicaciones clásicas de la integral definida.

Este enfoque adolece de serias deficiencias, tanto desde el punto de vista didáctico como del lógico (Kouropatov, 2008). En primer lugar, si la integral es una "antiderivada", resulta paradójico constatar que en muchas de las aplicaciones prácticas de la integral es necesario recurrir a diversas técnicas numéricas para calcularla, ya que la antiderivada en cuestión no se puede expresar algebraicamente. En Estadística, por ejemplo, es frecuente el cálculo de distintos valores numéricos de la integral $\int e^{-x^2}dx$, para la cual no existe una expresión algebraica explícita para la antiderivada, que pueda ser sustituida en el TFC.

En segundo lugar, si la integral es una fórmula para calcular un "área", a muchos estudiantes les resulta raro que esa misma fórmula también se emplee para calcular volúmenes y longitudes de arco, y aún mucho más raro que sea la herramienta apropiada para calcular el valor numérico de magnitudes que claramente no son de naturaleza geométrica, como el trabajo mecánico, la distancia recorrida, la carga eléctrica, etcétera. En consecuencia, difícilmente llegan a discernir por sí mismos en qué contextos resulta apropiado recurrir al cálculo de integrales definidas.

En tercer lugar, el acercamiento a la integral como límite de las sumas "superiores" e "inferiores" de Riemann, como está suficientemente documentado en la investigación educativa relacionada con el Cálculo y el Pensamiento Matemático Avanzado, es cognitivamente problemático (Wagner, 2017), dados los varios obstáculos epistemológicos ligados al concepto, que muchísimos estudiantes no pueden superar.

En cuarto lugar, el hecho de privilegiar el estudio de la integral definida, con límites fijos ($\int_a^b f(x)dx$), no solamente obstaculiza la comprensión de la integral como función ($\int_a^x f(t)dt$), sino que favorece la formación y permanencia en la mente de los alumnos de una imagen estática de este importante concepto. Este problema es análogo al que se presenta con el estudio de la derivada en un punto, previo al estudio de la derivada como función.

2. Un enfoque variacional basado en la noción de acumulación

Thompson (1994), así como Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008) han propuesto un acercamiento a la noción de integral que pretende superar estas deficiencias, y a la vez contribuir al entendimiento más profundo de su significado y aplicaciones: *considerar a la integral como una función de acumulación en un sentido simple, como una suma que consta de un gran número de términos relativamente pequeños*. Este enfoque se basa en el hecho de que el concepto de acumulación está en el centro de muchas de las aplicaciones prácticas del Cálculo Integral, y es dinámico porque se enfoca en las *funciones de acumulación* $\int_a^x f(t)dt$, y no en los valores concretos de cierta cantidad acumulada $\int_a^b f(x)dx$. Además, permite establecer una clara conexión entre diferentes conceptos fundamentales: acumulación, integral definida e indefinida, así como sus relaciones con el significado de la derivada como razón instantánea de cambio (Thompson, Byerley y Hatfield, 2013). De este modo, se trata de un enfoque eminentemente variacional.

Una manera de pensar variacionalmente, fundamental durante el estudio del Cálculo, es la idea intuitiva de que, por más rápido o mucho que cambie una magnitud variable, si procedemos a analizarla en pequeños intervalos no tendrá oportunidad de cambiar de manera significativa. Por ello, algunos autores consideran que el Cálculo es una especie de “cámara fotográfica instantánea” para analizar las magnitudes variables. Esta alegoría con una cámara fotográfica de alta velocidad es útil. Tratemos de ilustrarla considerando dos procesos que, en relación con nuestra experiencia cotidiana, transcurren “muy rápido”.

El movimiento de una bala es un buen ejemplo. Las balas de pistola y revólver habitualmente se mueven a una velocidad ligeramente inferior a la del sonido, que es de aproximadamente 340 m/seg. En cambio, las balas de fusil y ametralladora se mueven a velocidades superiores a ésta, en dos o tres veces (hasta 1000 m/seg). Sin embargo, con las tecnologías actuales es posible fotografiar balas de modo que parezcan inmóviles.

El aletear de un colibrí es otro buen ejemplo, muy bello, además. El colibrí bate sus alas unas sesenta veces por segundo. En un sesentavo de segundo mueve sus alas hacia adelante y de regreso hacia atrás una vez. De modo que, si fotografiamos al colibrí con una exposición de 1/60 de segundo, sus alas aparecerán borrosas en la fotografía. Para obtener una imagen nítida de las alas del colibrí es necesario tomar la foto con una exposición de al menos una milésima de segundo.

Estos dos ejemplos nos ilustran de manera elocuente la idea básica del Cálculo para analizar el comportamiento de las magnitudes variables: por más rápido que una magnitud variable cambie, si la observamos en pequeños intervalos no tendrá oportunidad de cambiar mucho, casi no cambiará, y para fines prácticos en ocasiones podremos considerar que no cambia, es decir, que se mantiene constante. De este modo, una magnitud variable que siempre cambia puede ser considerada, de manera simplificada, como una magnitud que se mantiene constante por pequeños intervalos, cambiando su valor constante de un pequeño intervalo a otro.

Las razones de cambio también son magnitudes variables, y quedan comprendidas en esta visión. Una razón de cambio variable puede ser considerada como una razón de cambio que va cambiando por instantes, por pequeños intervalos, manteniéndose constante (o cambiando muy poco, casi sin hacerlo) en el transcurso de cada uno de dichos intervalos. El problema práctico que genera esta interpretación del comportamiento de las magnitudes variables, y que debemos resolver de manera igualmente intuitiva, es el siguiente: ¿cómo podemos determinar o calcular el valor constante (o casi constante) de una magnitud variable en cierto intervalo?

Para acercarnos a una posible respuesta a esta pregunta, consideremos el caso hipotético general de cierta razón de cambio variable $r(x)$ en un intervalo dado de valores de x que van desde cierto valor inicial x_i hasta cierto valor final x_f. Supongamos que, por alguna razón, conocemos los valores exactos de $r(x)$ para cualquier valor permisible de x. ¿Cómo podemos, a partir de esa información, determinar un valor constante para $r(x)$ durante todo el intervalo?

No resulta difícil entender que una decisión o hipótesis racional consiste en tomar el valor exacto $r(x_i)$ de la razón de cambio *al inicio* del intervalo como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo. Esto es equivalente a "congelar" la razón de cambio en todo el intervalo, manteniéndola igual a al valor exacto $r(x_i)$ de dicha razón de cambio al inicio del intervalo. De aquí resulta que otra decisión o hipótesis (también racional) que podemos asumir es tomar el valor exacto $r(x_f)$ de la razón de cambio *al final* del intervalo como el valor constante de dicha razón de cambio para todo el intervalo.

Al entender y comparar las dos situaciones hipotéticas que hemos descrito, la idea que de inmediato se viene a la mente es tratar de compensar de algún modo el hecho de que en ambos casos tomamos un valor numérico para la razón de cambio como constante en todo el intervalo, pero que puede ser mayor o menor que el valor numérico final de dicha razón de cambio. Así pues, promediar estos dos valores parece una buena idea. En otras palabras, una decisión o hipótesis que parece aún más ventajosa que las dos anteriores consiste en tomar *el promedio* de los valores exactos r(x_i) al inicio del intervalo y $r(x_f)$ al final de este, esto es, $\frac{r(x_i)+r(x_f)}{2}$, como el valor constante de $r(x)$ para todo el intervalo.

Por último, consignemos que también es posible una cuarta decisión racional respecto a cómo determinar un valor constante para $r(x)$ en todo el intervalo. Parece razonable suponer que, si dicha razón de cambio en todo momento está cambiando, su valor exacto *a la mitad* del intervalo, esto es, $r\left(\frac{x_i+x_f}{2}\right)$, podría servir como su valor constante para todo el intervalo.

Enfatizamos el hecho de que esta sustitución es racional si el intervalo en cuestión es relativamente pequeño. Cuando analizamos el comportamiento de una razón de cambio en un intervalo de tamaño considerable, podemos aplicar esta misma idea dividiendo dicho intervalo en un conjunto de subintervalos "suficientemente" pequeños, y aplicando en cada uno de ellos cualquiera de las cuatro maneras de sustitución ya descritas, o bien todas. De este modo tendremos que una razón de cambio variable en un intervalo relativamente grande puede ser sustituida por una razón de cambio que es constante por pequeños intervalos. Aquí tenemos el germen de las sumas de Riemann, pero queda claro que el argumento que las sustenta no es geométrico ni está relacionado con el cálculo de áreas: es un argumento estrictamente variacional.

3. Un acercamiento dinámico y variacional al concepto de integral como acumulación

Desde el punto de vista didáctico, la puesta en escena del enfoque propuesto por Thompson y Silverman (2007) y Kouropatov (2008) para el estudio del concepto de integral como acumulación requiere poner atención a varios detalles cruciales. Esta estrategia se desarrolla en dos fases o etapas. En la primera de ellas, a partir de funciones exactas de razón de cambio se construyen *funciones aproximadas de acumulación*, mientras que en la segunda se obtienen *funciones exactas de acumulación* a partir de funciones aproximadas de acumulación (Thompson, Byerley y Hatfield, 2013). Como señalamos anteriormente, la estrategia para implementar este enfoque variacional deberá ser dinámica, lo que significa que tendremos que considerar a x como una auténtica variable, es decir, asumir el hecho de que x toma consecutivamente distintos valores numéricos en distintos momentos, comenzando con su valor inicial $x_0 = a$, pasando por su valor actual x, y llegando hasta su valor final $x_f = b$.

Por esta razón, para aplicar paso por paso esta estrategia dinámica tomaremos como ejemplo ilustrativo el movimiento oscilatorio de una masa atada al extremo de un resorte, observado durante un periodo de 10 segundos y en el que la razón de cambio instantánea que en él figura es la velocidad instantánea de la masa, dada por $v(t) = 5\cos t$. Se trata de encontrar la posición $y(t)$ de la masa, medida con respecto al punto de equilibrio $y_0 = y(0) = 0$.

Analicemos con detalle la aplicación de esta estrategia al problema que acabamos de enunciar. Por razones de espacio, nos restringiremos a la primera fase, aunque al final esbozaremos la segunda.

Primera fase: funciones aproximadas de acumulación

Primer paso. Dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente t, que va desde su valor inicial $t_0 = a$ hasta su valor actual t (esto es, el intervalo $a \leq t$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δt. Está claro que, para poder llevar a cabo este primer paso, es necesario realizar al menos las siguientes tres acciones:

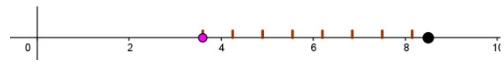
A1. Escoger el valor inicial $t_0 = a$ de la magnitud variable independiente.

A2. Escoger el tamaño Δt de los "pequeños" intervalos en que se dividirá al intervalo de valores numéricos de t, desde su valor inicial $t_0 = a$ hasta su valor actual t.

A3. Dividir el intervalo dado $a \leq t$ en "pequeños" intervalos de tamaño Δt.

La Figura 1 ilustra dos de las muchas formas en que esto puede hacerse, dado que tanto los valores numéricos de a como los de Δt pueden hacerse variar.

$a = 2.35$, $t = 7.35$, $\Delta t = 0.4$.



$a = 3.6$, $t = 8.5$, $\Delta t = 0.65$.

Figura 1. El primer paso de la estrategia dinámica: dividir el intervalo de valores permisibles de la magnitud variable independiente t, desde su valor inicial $t_0 = a$ hasta su valor actual t (esto es, el intervalo $a \leq t$), en "pequeños" intervalos de un mismo tamaño Δt. En los casos que se ilustran, el valor final de la magnitud variable independiente t es $t = 10$

Segundo paso. Expresar analíticamente y graficar la función de razón constante de cambio por intervalos $f(t)$, con la que procederemos a sustituir la razón de cambio siempre variable $v(t)$, en el dominio $a \leq t$.

En un primer momento, la ejecución del segundo paso requiere de la ejecución de al menos las siguientes tres acciones:

A4. Determinar la abscisa del punto inicial del intervalo de tamaño Δt en el que actualmente se ubica el valor de t, independientemente del hecho de que se haya completado o no dicho intervalo. Representemos tal abscisa mediante t_{ini} .

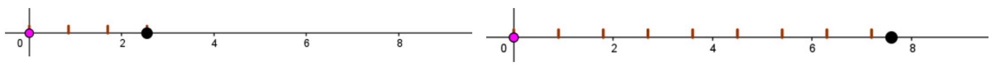
A5. Determinar la abscisa del punto final de este mismo intervalo. Representemos tal abscisa mediante t_{fin} .

A6. Determinar la abscisa del punto medio del mismo intervalo. Representemos tal abscisa mediante t_{med} .

Sólo cuando hayamos ejecutado estas tres acciones, en un segundo momento podremos determinar las respectivas velocidades instantáneas (al inicio, al final o a la mitad de cada intervalo, o bien promediar las velocidades inicial y final en el intervalo), que serán tomadas como la velocidad constante en todo el intervalo, como se detalla más adelante en las acciones $A7$-$A10$.

Determinando el número n *de intervalos*

A su vez, para determinar correctamente las abscisas, tanto de los puntos extremos como del punto medio de cada uno de los "pequeños" intervalos de tamaño Δt, necesitamos previamente determinar el número de tales intervalos que quedan comprendidos entre el valor inicial $t_0 = a$ y el valor actual t. La Figura 2 muestra dos situaciones para el caso más simple en el que $a = 0$.



$a = 0$, $t = 2.55$, $\Delta t = 0.85$.

$n = 3$, $\delta t = 0$.

$a = 0$, $t = 7.6$, $\Delta t = 0.9$.

$n = 8$, $\delta t = 0.4$.

Figura 2. Determinando el número n de subintervalos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de 0 a t

No resulta difícil entender que en este caso son posibles dos situaciones, precisamente las que se ilustran en la Figura 2. En la primera de ellas ocurre que, en el intervalo de 0 a t, el segmento "pequeño" de tamaño Δt queda contenido exactamente un número entero de veces, como en la ilustración de la izquierda de la Figura 2, en donde se pueden observar tres segmentos completos de tamaño $\Delta t = 0.85$, lo que es fácil comprobar dado que $3 \times 0.85 = 2.55$. En otras palabras, tenemos que $\frac{2.55}{0.85} = 3$, o más en general, $\frac{t}{\Delta t} = n$, donde n es un entero positivo (en este caso específico, igual a 3).

En la segunda de las posibilidades, ilustrada en la imagen de la derecha de la Figura 2, el "pequeño" segmento de tamaño Δt queda contenido (en el intervalo de 0 a t) un cierto número entero de veces, pero además queda otro segmento o intervalo "incompleto", es decir, de tamaño menor a Δt. En el caso particular que se ilustra en dicho recuadro se pueden contar 8 intervalos completos de tamaño $\Delta t = 0.9$, y claramente se observa un intervalo "incompleto". Esto lo podemos constatar considerando que $8 \times 0.9 = 7.2$, de modo que el intervalo "incompleto" tiene un tamaño igual a 0.4 unidades. En este caso, $\frac{7.6}{0.9} = 8.44444$, un número fraccionario.

Con el fin de calcular el número n de subintervalos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de 0 a t (o bien de a a t), debemos tomar en consideración los siguientes hechos:

- El valor numérico concreto de t puede ser interpretado geométricamente como la longitud del segmento que une al origen del eje horizontal con el punto que representa al valor actual de t;
- El valor numérico concreto de a puede ser interpretado geométricamente como la longitud del segmento que une al origen del eje horizontal con el punto que representa al valor de a;

- El valor específico de Δt representa la distancia constante entre los puntos de división o, lo que es lo mismo, la longitud de cada subintervalo; y
- El cociente $\frac{t}{\Delta t}$ (o bien el cociente $\frac{t-a}{\Delta t}$) nos da un número fraccionario, cuya *parte entera* representa el número de subintervalos que preceden al (quedan a la izquierda del) subintervalo que contiene a t, mientras que la parte decimal de este cociente corresponde a la *porción fraccionaria* de dicho subintervalo.

Podemos entonces concluir que el número n de intervalos completos de tamaño Δt, comprendidos en el intervalo de 0 a t, estará dado por la expresión

$$n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \ . \tag{1}$$

En esta expresión algebraica, el símbolo [ ] se usa para representar la *parte entera* de un número, en este caso particular, del cociente $\frac{t}{\Delta t}$. Cuando el cociente $\frac{t}{\Delta t}$ no sea un entero positivo, eso significará que además de un cierto número n (determinado mediante (1)) de intervalos completos de tamaño Δt, en el intervalo de 0 a t habrá además un intervalo "incompleto" (es decir, menor que Δt), cuyo tamaño δt está dado por la expresión $\delta t = \text{frac}\left(\frac{t}{\Delta t}\right) \cdot \Delta t$, donde el símbolo frac() se usa para representar la *parte fraccionaria* de un número. Guiándonos por consideraciones de carácter geométrico, no es difícil entender que el tamaño δt del intervalo "incompleto" también se puede determinar mediante la expresión

$$\delta t = t - n\Delta t = t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ . \tag{2}$$

Determinando las abcisas de los puntos de división del intervalo de 0 *a* t

Conociendo el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan contenidos en el intervalo de valores de 0 a t, no resulta difícil determinar las abscisas de cada uno de los respectivos puntos de división de dicho intervalo de valores numéricos (Figura 3).

Figura 3. Determinando las abscisas de los puntos de división del intervalo de valores numéricos de 0 a t

De la Figura 3 resulta obvio que las abscisas de los puntos de división del intervalo comprendido entre 0 y t son las siguientes:

Cuando $a = 0$

$$t_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \cdot \Delta t = 0 \ ,$$

$$t_{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \cdot \Delta t = \Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{3}} = \mathbf{3}\Delta t \ ,$$

$$\vdots$$

$$t_{\boldsymbol{n-1}} = (\boldsymbol{n} - \mathbf{1})\Delta t = \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t \ ,$$

$$t_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ .$$

Cuando $a \neq 0$

$$t_{\mathbf{0}} = a + \mathbf{0} \cdot \Delta t = a \ ,$$

$$t_{\mathbf{1}} = a + \mathbf{1} \cdot \Delta t = a + \Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{2}} = a + \mathbf{2}\Delta t \ ,$$

$$t_{\mathbf{3}} = a + \mathbf{3}\Delta t \ ,$$

$$\vdots$$

$$t_{\boldsymbol{n-1}} = a + \left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t,$$

$$t_{\boldsymbol{n}} = a + \boldsymbol{n}\Delta t = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ .$$

Determinando las abscisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor numérico de t

Considerando todo lo anterior, podemos ahora escribir las expresiones algebraicas correspondientes a las abscisas de los puntos inicial, final y medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor numérico de t. Entonces tenemos que

Cuando $a = 0$

$$t_{\text{ini}} = n\Delta t = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ ,$$

$$t_{\text{fin}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \ .$$

Cuando $a \neq 0$

$$t_{\text{ini}} = a + n\Delta t = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t \ ,$$

$$t_{\text{fin}} = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t \ ,$$

$$t_{\text{med}} = a + \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \frac{\Delta t}{2} \ .$$

Determinando el valor constante de la razón de cambio para cada uno de los subintervalos

Ahora que hemos determinado las abscisas de los puntos extremos y del punto medio del intervalo en el que actualmente se ubica el valor actual de t, podemos continuar la ejecución del segundo paso. Para ello, debemos ejecutar las siguientes acciones:

A7. En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{ini}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right) \quad . \tag{3}$$

En el caso del ejemplo que nos servirá de ilustración, tenemos

$$v(t_{\text{ini}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] \Delta t\right) \quad . \tag{3.1}$$

A8. En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{fin}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \Delta t\right). \tag{4}$$

En el caso del resorte, tenemos

$$v(t_{\text{fin}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] \Delta t + \Delta t\right). \tag{4.1}$$

A9. En cada intervalo de tamaño Δt, el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = v(t_{\text{med}}) = v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad . \tag{5}$$

Para el caso del resorte tenemos

$$v(t_{\text{med}}) = 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right). \tag{5.1}$$

A10. En cada intervalo de tamaño Δt, el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final de dicho intervalo se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo:

$$v_{\text{const}}(t) = \frac{v(t_{\text{ini}}) + v(t_{\text{fin}})}{2} = \frac{v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right) + v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + \Delta t\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right]\cdot \Delta t\right) + v\left(a + \left[\frac{t-a}{\Delta t}\right]\cdot \Delta t + \Delta t\right)\right\}. \tag{6}$$

En el caso del ejemplo que nos servirá de ilustración, tenemos

$$v_{\text{prom}}(t) = \frac{1}{2}\left(5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + \Delta t\right)\right) \quad . \tag{6.1}$$

Ahora que tenemos estas expresiones algebraicas (3.1)-(6.1) para las funciones constantes de razón de cambio por intervalos, nos resta en este segundo paso ejecutar la siguiente acción:

A11. Graficar cada una de las cuatro funciones aproximadas de razón constante de cambio por intervalos, obtenidas en las acciones *A7*-*A10*.

Las gráficas respectivas de velocidad constante por intervalos del movimiento de la masa en el resorte, para el caso particular $a = 0$ y $\Delta t = 0.45$, se muestran enseguida en las figuras 4a-4d. Como se puede apreciar, y es congruente con lo que se esperaba, se trata de *funciones escalonadas*.

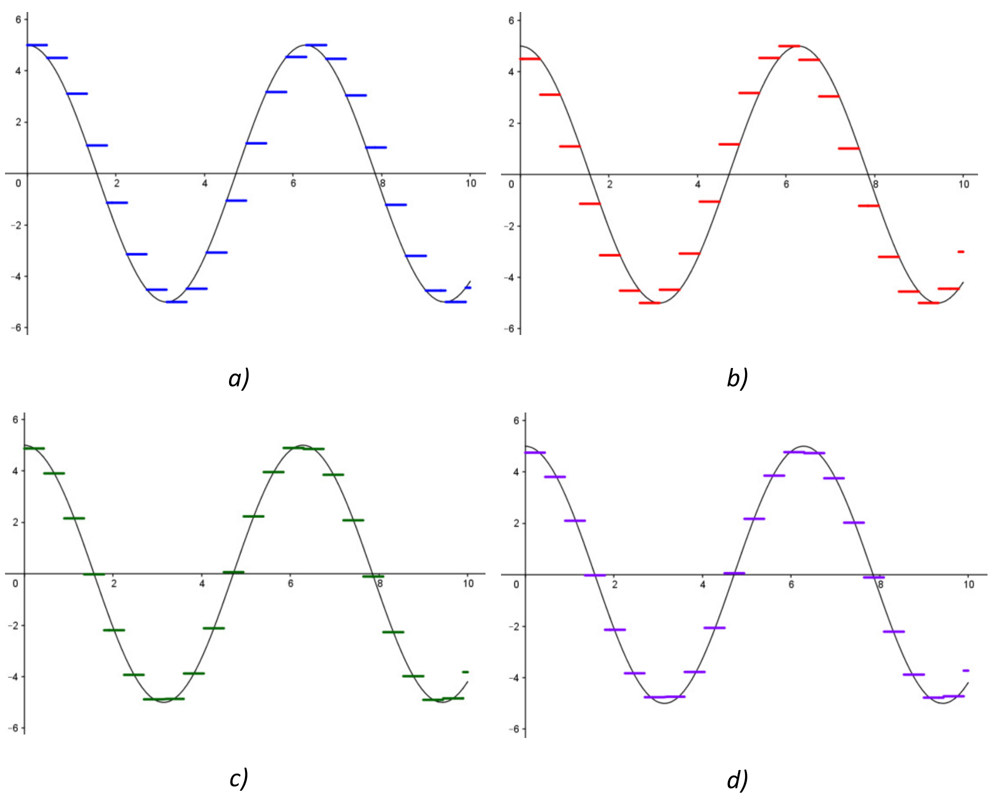


Figura 4 Gráficas de las funciones aproximadas de velocidad constante por intervalos, para el caso $v(t) = 5\cos t$, donde $0 \leq t \leq 10$. En cada intervalo de tamaño Δt, se toma

como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo: *a)* el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo; *b)* el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo; *c)* el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo; y *d)* el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final del intervalo

Obteniendo funciones aproximadas de acumulación, a partir de funciones constantes de razón de cambio por intervalos

Tercer paso. Usamos estos valores constantes de la velocidad en cada subintervalo, para aproximar el valor acumulativo de la magnitud de interés en dicho subintervalo (la contribución de dicho subintervalo a la acumulación total de la magnitud de interés). En el caso del problema que nos ocupa, dicha magnitud es la posición de la pesa en cada momento, medida con respecto al punto de equilibrio, a la que representamos mediante $y(t)$. Para calcular la aportación de cada subintervalo a la acumulación total, es importante tener presente el hecho de que en cada subintervalo la razón de cambio es constante, por lo que basta con multiplicar dicho valor constante de la razón de cambio por la duración del subintervalo, para obtener la acumulación *parcial*. Posteriormente habrá que sumar las aportaciones parciales de todos los subintervalos. Veamos esto con más detalle, para la primera de las funciones aproximadas de razón de cambio.

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta al inicio de cada intervalo.

a) El valor actual de t cae dentro del *primer intervalo*, es decir, $0 \leq t < \Delta t$ o, lo que es lo mismo, $0 \cdot \Delta t \leq t < 1 \cdot \Delta t$, y el número de intervalos completos es $n = 0$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante en este intervalo es $v(0) = 5\cos 0 = 5$, mientras que el tiempo transcurrido es igual al valor de t, por lo que la posición de la pesa está dada por

$$y(t) = 5t \ .$$

b) Pasemos ahora a considerar el caso en que el valor actual de t cae dentro del *segundo intervalo*, lo que quiere decir que $1 \cdot \Delta t \leq t < 2\Delta t$. En estas condiciones, se tiene que $1 \leq \frac{t}{\Delta t} < 2$ y, en consecuencia, $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right] = 1$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante de la pesa en todo este intervalo es igual a $v(\Delta t) = 5\cos \Delta t$. Entonces, para encontrar la posición $y(t)$ de la pesa en cualquier valor de t comprendido entre Δt y $2\Delta t$, deberemos calcular la posición a la que llegó durante el primer intervalo, que ya quedó atrás, y a ésta agregarle la distancia adicional recorrida durante el segundo intervalo. La posición de la pesa al finalizar el primer intervalo es $y_1 = 5\Delta t$.

La distancia adicional recorrida por la pesa en el segundo intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, que según la expresión (3.1) es igual a $5\cos\Delta t$, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - \Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos\Delta t)(t - \Delta t)$, y la posición de la pesa en cualquier instante en este segundo intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)(t - \Delta t)\,.$$

c) Continuemos ahora con el caso en que el valor actual de t cae dentro del *tercer intervalo*; lo que quiere decir que $2\Delta t \leq t < 3\Delta t$ y $n = 2$. De acuerdo con (3.1), la velocidad constante de la pesa en todo este intervalo es igual a $v(2\Delta t) = 5\cos 2\Delta t$. La posición que alcanza la pesa al finalizar el segundo intervalo es $y_2 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este tercer intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - 2\Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos 2\Delta t)(t - 2\Delta t)$, y la posición de la pesa en cualquier instante en este tercer intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)(t - 2\Delta t)\,.$$

d) Veamos ahora el caso en que el valor actual de t cae dentro del *cuarto intervalo*; lo que quiere decir que $3\Delta t \leq t < 4\Delta t$ y $n = 3$. Aquí, la velocidad constante de la pesa es igual a $v(3\Delta t) = 5\cos 3\Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este cuarto intervalo se calcula multiplicando la velocidad constante en este intervalo, por el tiempo durante el cual la pesa se desplaza con esta velocidad constante, que es igual a $t - 3\Delta t$. Entonces $y_{\text{adic}} = (5\cos 3\Delta t)(t - 3\Delta t)$, y la distancia acumulada en los tres intervalos completos anteriores es igual a $y_3 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\cdot\Delta t$. La posición de la pesa en cualquier instante en este cuarto intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 3\Delta t)(t - 3\Delta t)\,.$$

e) Por último, veamos el caso en que el valor actual de t cae dentro del *quinto intervalo*; lo que quiere decir que $4\Delta t \leq t < 5\Delta t$ y $n = 4$. En esta circunstancia, la velocidad constante de la pesa es igual a $v(4\Delta t) = 5\cos 4\Delta t$. La distancia acumulada en los cuatro intervalos completos anteriores es igual a $y_4 = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\cdot\Delta t$. La distancia adicional recorrida por la pesa en este cuarto intervalo es $y_{\text{adic}} = (5\cos 4\Delta t)(t - 4\Delta t)$, y la posición de la pesa en cualquier instante en este quinto intervalo está dada por

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t + (5\cos 4\Delta t)(t - 4\Delta t)\,.$$

Podríamos continuar esta línea de razonamiento hasta concluir con todos los intervalos, pero no es ése nuestro propósito. Nuestro objetivo consiste en encontrar una *fórmula general* para obtener los cinco resultados que ya tenemos, y *todos los resultados posibles*. Por ello, detengámonos por un momento a escudriñar estos resultados particulares en busca de una regularidad, lo que nos ayudará sobremanera para establecer la expresión algebraica general de nuestra función aproximada de acumulación.

La *primera característica* importante que tienen en común todos estos resultados, y que no es difícil percibir, es que *dependen del número* $\boldsymbol{n}$ *de intervalos completos* de tamaño Δt comprendidos entre 0 y el valor actual de t. Analicemos más a fondo esta dependencia.

$n = 0$

$y(t) = 5t \quad ,$

$n = 1$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)(t - \Delta t) \quad ,$

$n = 2$

$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)(t - 2\Delta t) \quad ,$

$n = 3$

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\cdot\Delta t + (5\cos 3\Delta t)(t - 3\Delta t)\,,$$

$n = 4$

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t + (5\cos 4\Delta t)(t - 4\Delta t)\,.$$

La *segunda característica* en común que podemos advertir en estos resultados es que todos ellos *contienen* $n + 1$ *sumandos*.

La *tercera característica* en común consiste en que, de ellos, los primeros n sumandos no dependen de t; *solamente dependen de* Δt. El último de esos sumandos depende tanto del valor actual de t como del valor de Δt.

La *cuarta característica* que podemos advertir en común en estos resultados es que el último de los sumandos que en ellos figura tiene una *misma estructura* que también depende del valor de n: es siempre igual a

$$(5\cos(n\Delta t))(t - n\Delta t) \ .$$

Para convencernos de que esto último es válido para todos los casos, sólo basta reescribir los primeros dos resultados de manera equivalente como sigue:

$n = 0$

$$y(t) = 5\cos(0\Delta t)(t - 0\Delta t) \ ,$$

$n = 1$

$$y(t) = 5\Delta t + (5\cos 1\Delta t)(t - 1\Delta t) \ .$$

Con esto, hemos encontrado la fórmula general para el último de los sumandos. Resta por encontrar una fórmula general para los primeros n sumandos. Analicémoslos entonces con más detenimiento.

La *quinta característica* que podemos encontrar en común en todos los resultados anteriores, en concreto para los n primeros sumandos, es que en cada uno de ellos *aparecen de manera consecutiva los números* $0, 1, 2, \dots, n$. Esto lo podemos apreciar con más claridad si reescribimos el segundo de estos resultados de manera equivalente, como sigue:

$n = 1$

$$y(t) = 5\cos(0\Delta t)\,\Delta t + (5\cos 1\Delta t)(t - 1\Delta t) \ .$$

La *sexta característica* en común que comparten los primeros n sumandos consiste en que todos ellos tienen una *misma estructura*, a saber, el producto de dos factores, el primero de los cuales siempre es $5\Delta t$, mientras que en el segundo figuran de manera consecutiva los cosenos de los números $0, 1, 2, \dots, n-1$ multiplicando a Δt, y que se puede expresar de manera general como sigue:

$$5\cos(0\Delta t)\,\Delta t + (5\cos 1\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + (5\cos(n-1)\Delta t)\Delta t \quad .$$

Hasta aquí hemos hecho un gran avance, ya que hemos podido formular en términos generales la expresión algebraica para la posición $y(t)$ en la que se encuentra la pesa, y esto para cualquier valor permisible de t. Si ahora recordamos que, para cualquier valor actual de t, el número n de intervalos completos de tamaño Δt que quedan comprendidos entre 0 y dicho valor actual está dado por $n = \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$, no será difícil reexpresar nuestros dos resultados generales en términos únicamente de t y Δt. El primero de estos resultados, a saber, la suma de los n primeros términos, se puede reescribir como

$$5\cos(0\Delta t)\,\Delta t + (5\cos 1\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + \left(5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t\right)\Delta t \quad .$$

El $(n+1)$-ésimo termino también se puede rescribir como

$$\left(5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ .$$

Resumiendo, nuestro análisis detallado de algunos casos particulares (los suficientes) nos ha permitido establecer la fórmula general para nuestra función aproximada de acumulación, en este caso, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la pesa con respecto a la posición de equilibrio, en cualquier instante t entre los 0 y los 10 segundos:

$$y(t) = 5\cos(0\Delta t)\,\Delta t + (5\cos 1\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + \left(5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t\right)\Delta t + \left(5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (7)$$

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta al fin de cada intervalo. Un análisis detallado de suficientes casos particulares, similar al que ya hemos realizado en el apartado anterior y que por razones de espacio no consignaremos aquí, nos permite establecer la fórmula general correspondiente a este segundo caso para nuestra función aproximada de acumulación, es decir, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la masa atada al resorte con respecto a la posición de equilibrio, en cualquier instante t comprendido entre los 0 y los 10 segundos:

$$y(t) = (5\cos 1\Delta t)\Delta t + (5\cos 2\Delta t)\Delta t + (5\cos 3\Delta t)\Delta t$$
$$+ \cdots + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\Delta t + (5\cos(t))\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \ . \qquad (8)$$

Velocidad constante por intervalos, igual a la velocidad exacta a la mitad de cada intervalo. En este tercer caso, la distancia $y(t)$ a la que se encuentra la pesa con respecto al origen, en cualquier instante t comprendido entre los 0 y los 10 segundos, está dada por

$$y(t) = 5\cos\left(0 \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(1 \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + 5\cos\left(2 \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t +$$
$$5\cos\left(3 \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t + \cdots + 5\cos\left(\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right) \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}\right)\Delta t +$$
$$5\cos\left(\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t + t}{2}\right)\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right). \qquad (9)$$

Velocidad constante por intervalos, igual al promedio de las velocidades exactas al inicio y al final de cada intervalo. En este caso tenemos

$$y(t) = \frac{5\cos(0\Delta t) + 5\cos(1\Delta t)}{2}\Delta t + \frac{5\cos(1\Delta t) + 5\cos(2\Delta t)}{2}\Delta t +$$
$$\frac{5\cos(2\Delta t) + 5\cos(3\Delta t)}{2}\Delta t + \cdots + \frac{5\cos\left(\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right] - 1\right)\Delta t\right) + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)}{2}\Delta t +$$
$$\frac{5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) + 5\cos(t)}{2}\left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right] \cdot \Delta t\right). \qquad (10)$$

Es sabido que las expresiones algebraicas (7)–(10) se pueden escribir de manera compacta utilizando la notación sigma. Las correspondientes expresiones compactas son:

$$y(t, \Delta t) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} 5\cos\big((i-1)\Delta t\big) \cdot \Delta t + 5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right) \cdot \left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right), \qquad (7a)$$

$$y(t, \Delta t) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} 5\cos(i\Delta t) \cdot \Delta t + 5\cos(t) \cdot \left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right), \qquad (8a)$$

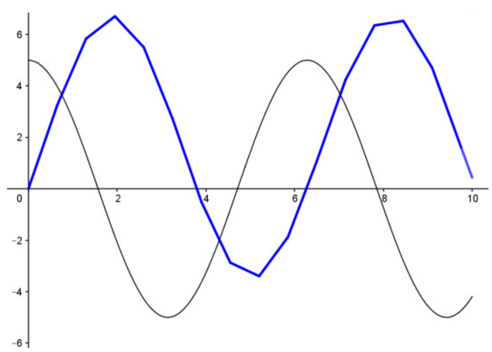
$$y(t, \Delta t) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} 5\cos\left((2i-1)\frac{\Delta t}{2}\right) \cdot \Delta t + 5\cos\left(\frac{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t + t}{2}\right) \cdot \left(t - \left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right),$$

$$(9a)$$

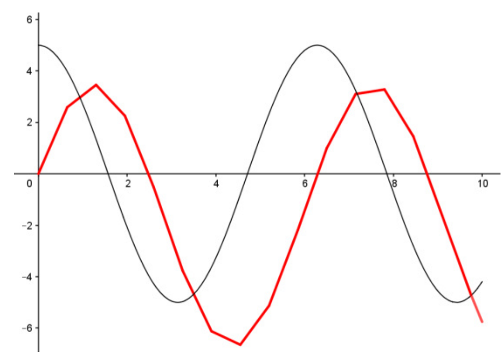
$$y(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}\frac{5\cos\big((i-1)\Delta t\big)+5\cos(i\Delta t)}{2}\Delta t+$$

$$+\frac{5\cos\left(\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)+5\cos(t)}{2}\cdot\left(t-\left[\frac{t}{\Delta t}\right]\Delta t\right)\ . \qquad (10a)$$

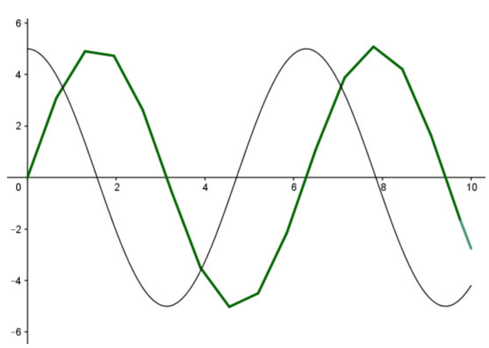
Representación gráfica de las funciones aproximadas de acumulación. Con ayuda de algún *software* CAS que incluya un comando para calcular sumatorias no solo numéricamente, sino también en forma algebraica, es posible obtener, a partir de las expresiones algebraicas (7a) – (10a), las gráficas correspondientes a las cuatro funciones aproximadas de acumulación que es posible definir en cada situación, así como también calcular sus valores numéricos. La representación gráfica de nuestras funciones aproximadas de acumulación se muestra en la Figura 5, para el caso particular en que $a=0$ y $\Delta t=0.65$.

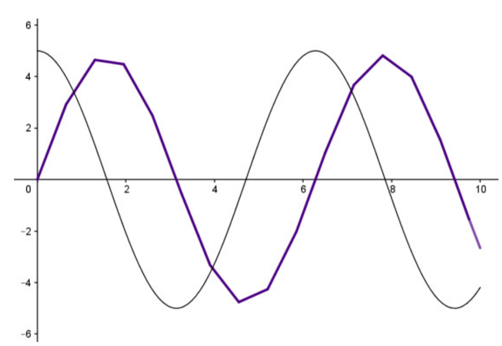


a)



b)





c) *d)*

Figura 5 Gráficas de las funciones aproximadas de acumulación $y(t)$, dadas por las expresiones algebraicas (7a)–(10a), para el caso $v(t) = 5\cos t$, donde $0 \leq t \leq 10$. En cada intervalo de tamaño Δt, se toma como el valor constante de la velocidad para todo ese intervalo: *a)* el valor exacto de la velocidad instantánea al inicio de dicho intervalo; *b)* el valor exacto de la velocidad instantánea al final de dicho intervalo; *c)* el valor exacto de la velocidad instantánea en el punto medio del intervalo; y *d)* el promedio de los valores exactos de la velocidad instantánea al inicio y al final del intervalo

Como se puede apreciar, estas gráficas son poligonales y, a medida que Δt se hace cada vez más pequeño, tienden a sobreponerse entre sí. La exploración dinámica de la gráfica permite generar en los estudiantes la idea, y a veces la convicción, de que las cuatro funciones aproximadas de acumulación tienden hacia una y la misma función: aquella que resulta al sobreponerse las cuatro gráficas hasta tornarse "prácticamente indistinguibles" en la pantalla, y que es también la que proporcionaría el mismo valor numérico que cada una de las cuatro funciones aproximadas. Ésta sería la *función exacta de acumulación*.

4. Conclusión. Algunas dificultades del enfoque dinámico

A pesar del atractivo didáctico y cognitivo que posee este enfoque variacional para el concepto de integral, su enseñanza y aprendizaje no están exentos de dificultades. Como los mismos Thompson y Silverman (2007) han señalado, una de las mayores dificultades que muestran los estudiantes para comprender la idea de acumulación consiste en entender cuáles son los "pedacitos" que se están acumulando. La segunda dificultad importante consiste en trascender una comprensión coloquial de la acumulación para pasar a su comprensión matemática (variacional). La tercera dificultad importante, documentada por los mismos autores (Thompson y Silverman, 2007), consiste en la falta de familiaridad del estudiante con la forma algebraica abierta de representación de las funciones de acumulación.

La puesta en escena del enfoque dinámico requiere de la máxima atención y concentración del profesor, quien debe sistemáticamente dirigir la atención de los estudiantes hacia ciertos detalles fundamentales. En primer lugar, es más importante hacer que x cambie, en vez de concentrar la atención en Δx, que también debe cambiar haciéndose cada vez más pequeño, pero "en segunda instancia"; la visión privilegiada debe centrarse en x cambiando. En otras palabras, a diferencia del enfoque tradicional, se deberá hacer que x cambie en el primer plano, dejando "constante" el valor de Δx, en lugar de *dejar fijo* el valor de x y permitir que Δx cambie haciéndose cada vez más pequeño.

En segundo lugar, se deberá enfatizar el hecho de que $f(x)$ es una razón instantánea de cambio de cierta magnitud variable $F(x)$, y que esta razón instantánea siempre cambia. Entonces, para obtener un valor aproximado de la acumulación que esta razón de cambio produce, deberemos tomarla como si fuera constante en *pequeños intervalos* de tamaño Δx. La cuestión de cómo determinar ese valor *constante* en cada *pequeño intervalo*, como hemos visto, puede ser resuelta recurriendo a las ricas intuiciones de los estudiantes, quienes habitualmente proponen tomar el valor al inicio de cada intervalo, al final del mismo, a la mitad de cada intervalo, promediar los valores inicial y final, o alguna otra variante. Posteriormente estas intuiciones pueden servir de base para la formalización del concepto.

En tercer lugar, es importante enfatizar el hecho de que las funciones de acumulación, como tales, se pueden graficar, y que en la versión *en grueso* (con Δx relativamente *grande*) sus gráficas son líneas poligonales (quebradas), mientras que en la versión *en fino* (con Δx suficientemente *pequeño*) son más parecidas a curvas que se superponen entre sí. Esto contribuye a la formación de una imagen geométrica dinámica de las funciones de acumulación (integrales), como poligonales que gradualmente se van aproximando o tienen como límite a cierta curva suave. Y, por último, también es importante enfatizar que las funciones de acumulación tienen una razón de cambio: cuando algo se acumula, lo hace con cierta intensidad. Este último punto nos remite al significado variacional del Teorema Fundamental del Cálculo, que tiene que ver con las funciones de acumulación y su razón de cambio, y no tanto con los valores de la integral y los valores de la antiderivada de la función integrando, como habitualmente se resalta en el enfoque tradicional, predominantemente calculístico.

Referencias

Kouropatov, A. (2008) Approaches to the integral concept. The case of high school calculus. Recuperado en junio de 2016 desde http://www.yess4.ktu.edu.tr/Yerme Pappers/Anatoli *Kouropatov.*pdf

Orton, A. (1993). Students' understanding of integration*. Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Thompson, P. W., Byerley, C., y Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to calculus made possible by technology. *Computers in the Schools*. 30: 124-147.

Wagner, J. F. (2017). Students' obstacles to using Riemann sum interpretations of the definite integral. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(3), 327-356. Disponible en línea en http://link.springer.com/article/10.1007/s40753-017-0060-7.

10 Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones

César Fabián Romero Félix[1]

Resumen

Se presentarán los fundamentos y las características principales de un par de secuencias didácticas diseñadas para la enseñanza del método de Newton-Raphson y el método de bisección para encontrar raíces de funciones de una variable real. Las actividades son diseñadas para apoyar a estudiantes de cursos de Cálculo Diferencial y Álgebra superior en el área de Ingeniería o de Ciencias de Computación. Se plantea favorecer el desarrollo de estructuras mentales de conceptos matemáticos de ambas asignaturas como: variable, relación funcional, polinomios, raíces, derivada y aproximación numérica a partir de la aproximación sistemática a la solución de problemas de modelación.

Palabras clave: cálculo diferencial, álgebra superior, raíces de funciones, visualización, métodos numéricos.

Résumé

Les principes fondamentaux et les caractéristiques principales d'une paire de séquences didactiques conçues pour l'enseignement de la méthode de Newton-Raphson et de la méthode de bissection pour trouver les racines des fonctions d'une variable réelle seront présentés. Les activités sont conçues pour aider les étudiants en calcul différentiel et en algèbre supérieure dans les domaines de l'ingénierie ou de l'informatique. Dans la proposition, il est proposé de favoriser le développement de structures mentales de concepts mathématiques des deux sujets, tels que: variable, relation fonctionnelle, polynômes, racines, approximations dérivées et numériques; de l'approche systématique à la solution des problèmes de modélisation.

Mots clés: calcul différentiel, algèbre supérieure, racines de fonctions, visualisation, méthodes numériques.

Abstract

The fundamentals and main characteristics of a pair of didactic sequences designed for the teaching of the Newton-Raphson and bisection methods to find roots of functions of one real variable will be presented. The activities are designed to help students of Differential Calculus and Advanced Algebra in Engineering or Computer Science. The proposal aims to favor the development of mental structures of mathematical concepts from both courses such as: variable, functional relation, polynomials, roots, derivative

[1] Universidad de Sonora, México.

and numerical approximation; from the systematic approach to the solution of modeling problems.

Keywords: differential calculus, advanced algebra, roots of functions, visualization, numerical methods.

1. Introducción y antecedentes

En esta propuesta, se plantean dos secuencias de enseñanza orientadas a la construcción y exploración de un par de métodos numéricos para la aproximación de raíces de funciones, en particular de polinomios. La propuesta está dirigida a estudiantes de las áreas de Ingeniería y Ciencias de Computación (CC), al compartir ellos algunas necesidades en su formación matemática. De tal manera, se propone el desarrollo de los métodos de bisección y de Newton-Raphson (N-R) con la intención de favorecer el desarrollo de conceptos y habilidades que se plantean como objetivos en cursos de Cálculo Diferencial y Álgebra Superior, comúnmente centrados en el desarrollo del concepto de variable y relaciones entre variables, incluyendo ambos el estudio de problemas y técnicas de optimización. Por ejemplo, los programas de estas materias en la Universidad de Sonora (UNISON), para el área de Ingeniería, mencionan lo siguiente:

Programa	Contenido Sintético	Objetivos	Habilidades
Álgebra	Polinomios de grado *n* en una variable. Raíces reales y complejas. Derivada de un polinomio y multiplicidad de raíces. Construcción de un polinomio de grado *n* a partir de sus raíces. Representación gráfica de un polinomio y sus raíces. Multiplicidad de raíces. Teorema Fundamental del Álgebra.	Mostrar las limitaciones de los métodos algebraicos cuando se resuelven ecuaciones de grado mayor que dos. Articular la representación gráfica y algebraica de un polinomio, enfatizando la noción de raíz. Conocer y aplicar un método sencillo para aproximar las	Graficar con *software* todas las raíces de un polinomio. Graficar polinomios como funciones reales de variable real y estimar gráficamente cada una de sus raíces reales. Aproximar las raíces reales de un polinomio.

	Método de bisección para aproximar raíces.	raíces reales de un polinomio.	
Cálculo Diferencial	Gráficas de funciones. Problemas de optimización Introducción al concepto de derivada. Reglas de derivación: suma, producto, cociente. Teoremas sobre derivadas. Criterios de máximos y mínimos. Monotonía, concavidad, puntos de inflexión. Aplicaciones de máximos y mínimos en problemas geométricos, físicos y de la Ingeniería.	Explicar el concepto de derivada como pendiente de la recta tangente, como velocidad instantánea y en general, de razón instantánea de cambio, en otros contextos. Aplicará los criterios de optimización que involucran derivadas, en la resolución de problemas físicos, geométricos y relacionados con los principales temas de la Ingeniería	Calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado. Utilizar *software* dinámico para reforzar el concepto de derivada en un punto y de función derivada. Encontrar máximos y mínimos de una función, monotonía, concavidad, puntos de inflexión. Modelar y resolver problemas de optimización geométricos, físicos y de la Ingeniería.

Tabla 1. Extracto de los programas de Cálculo I y Álgebra de la UNISON (disponibles en mat.uson.mx)

A partir de la interpretación de estas directrices generales en los programas de las materias mencionadas, se observa que, para la formación de estos estudiantes, es de gran importancia el desarrollo de conocimientos y habilidades relacionados con la modelación y optimización de relaciones entre variables numéricas. Así mismo, se pueden reconocer la intención de integrar el uso de herramientas digitales en el aprendizaje matemático, aunque aparentemente se limiten al uso de *software* de graficación. A partir de estos dos puntos, se considera apropiado integrar el uso de herramientas digitales para resolver problemas de optimización, dentro del contexto de modelación en Ingeniería y CC.

En esta propuesta, el desarrollo de métodos numéricos es visto como un medio para el desarrollo de las habilidades arriba descritas; y para su implementación se plantea el uso de las herramientas de *GeoGebra* para minimizar las dificultades asociadas al desarrollo del *pensamiento computacional*.

1.1 Pensamiento computacional: programación y matemáticas

El estudio de métodos numéricos es propuesto a partir de la interpretación de las habilidades y los conocimientos necesarios para crear, evaluar y comparar métodos numéricos recursivos. Compartimos la interpretación de Wing (2008) en la que "el pensamiento computacional es un tipo de pensamiento analítico [que] comparte con el pensamiento matemático la manera general en la que se pueden aproximar soluciones a problemas" (p. 3717). Igualmente, las relaciones señaladas por la autora entre el desarrollo científico, tecnológico y social demandan una visión del pensamiento computacional de manera transversal en la educación y no aislada dentro de las ciencias computacionales.

En este sentido, el desarrollo del pensamiento computacional, en particular de técnicas de programación iterativas y recursivas, puede ser visto como un objetivo en la formación académica en todos los niveles. En educación superior, en la UNISON por ejemplo, se contempla promover la *competencia genérica* de *alfabetización y literacidad digital* como parte de uno de *los cuatro pilares de la educación* (UNISON, 2018, p. 35).

El crecimiento de las Ciencias de Computación ha mostrado, por otro lado, que el desarrollo incluso de sus conceptos más elementales puede ser problemático para los estudiantes. McCauley, Grissom, Fitzgerald y Murphy (2015) muestran que, en particular, el desarrollo de algoritmos recursivos, prácticamente en cualquier lenguaje, resulta contraintuitivo para estudiantes de programación. Las tareas de programación en lenguajes formales implican la formación de proposiciones, el uso de condicionales, operaciones lógicas y manipulación de variables por medio de la sintaxis particular del lenguaje; situaciones en las que tanto estudiantes principiantes como experimentados muestran dificultades (McCauley *et al*., 2015, p. 40).

Tomando en cuenta las dificultades para el aprendizaje de la programación en computadoras, se han realizado diversas propuestas de enseñanza de programación en ambientes posiblemente más intuitivos para los estudiantes. Para los fines de este capítulo, destacamos propuestas como las de Martín-Caraballo y Tenorio-Villalón (2015), que muestran la posibilidad de construir, de manera simple, los métodos de bisección y de N-R en particular, en el ambiente gráfico-algebraico-dinámico de *GeoGebra* y su posible accesibilidad para estudiantes sin experiencia en programación. En el mismo sentido, se prevé que la visualización mediada por este *software* dinámico podría minimizar las dificultades para el aprendizaje de métodos numéricos, permitiendo la construcción de *ciclos iterativos* y *recursividad* sin las complejidades del estudio formal de estos métodos de computación (ver por ejemplo Lappas & Kritikos, 2018).

2. Elementos teórico-metodológicos

La teoría APOE analiza el desarrollo cognitivo en el aprendizaje de las matemáticas como una extensión de las ideas de Piaget sobre *abstracción reflexiva* (Arnon *et al*., 2014). Se describe la abstracción reflexiva en términos de las *concepciones* que le dan nombre a la teoría: *Acción, Proceso, Objeto y Esquema*, y se analizan también los *mecanismos* mentales que las generan y relacionan: *interiorización, coordinación, reversión, encapsulación,* etcétera. Piaget describía también abstracciones empíricas y pseudo-empíricas. Las diferencias entre los tres tipos de abstracción se pueden describir en términos de la actividad de los sujetos: la abstracción empírica genera conocimiento a partir de la observación de *Objetos externos*, como la idea de color o peso que se obtienen después de percibir a través de los sentidos esas características intrínsecas de los Objetos; la abstracción pseudo-empírica va un paso más allá: después de actuar sobre los Objetos, el sujeto les atribuye propiedades que no eran originalmente parte de ellos, como la cardinalidad de un conjunto obtenida tras la correspondencia uno a uno con elementos de otro conjunto que el sujeto ha ordenado; por último, la abstracción reflexiva consiste en la obtención de propiedades a partir de acciones mentales o físicas, de manera consciente, pudiendo incluir la separación entre la forma y el contenido, obteniendo abstracciones cada vez en un plano superior del conocimiento (Dubinsky, 1991, pp. 97-99).

Las estructuras y los mecanismos de abstracción reflexiva permiten describir la construcción del conocimiento matemático, en términos generales, como una progresión. Las relaciones entre estas estructuras y los mecanismos son representadas con el siguiente diagrama.

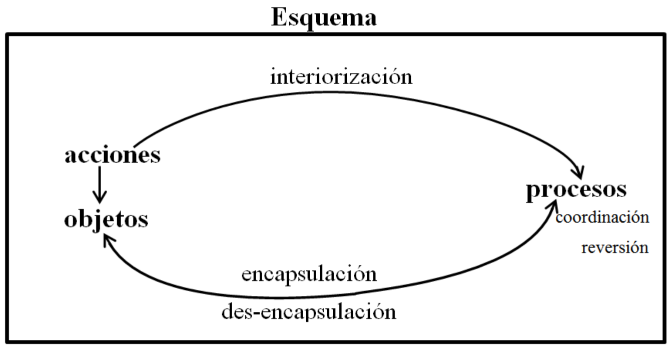


Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon *et al*., 2014, p. 18)

La teoría propone que el desarrollo de las construcciones mentales sigue un *ciclo auto-retroalimentado*, logrando con cada iteración del ciclo concepciones de mayor complejidad y generalidad (Arnon *et al*., 2014. pp. 18-26). Se puede tomar como inicio del ciclo Acciones sobre Objetos ya existentes, éstas son realizadas de manera externa al sujeto, manteniendo siempre los mismos pasos y en el mismo orden.

La manera inicial de desarrollar concepciones Proceso es la *interiorización* de las Acciones. Teniendo una concepción Proceso dejan de ser necesarios los estímulos externos para realizar las Acciones y se obtiene también control interno sobre las partes de éstas; se pueden imaginar u omitir pasos y revertir su orden mentalmente. También, se pueden coordinar concepciones Proceso para formar nuevos Procesos, por ejemplo: el Proceso de derivada se puede coordinar con el Proceso composición de funciones para obtener el Proceso de la *regla de la cadena*.

Al enfrentarse a la necesidad de aplicar Acciones a lo que se percibe como un Proceso, se inicia el mecanismo de *encapsulación*; con ella, los Procesos dejan de ser Acciones interiorizadas y llegan a ser entes por sí mismos, Objetos. Cuando se ve el Proceso como un todo, al cual se le pueden aplicar Acciones, y se construyen estas nuevas Acciones para aplicarlas de manera externa o mental, se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Por ejemplo, para el caso de transformación lineal, la encapsulación permite realizar composiciones, ver a las transformaciones como elementos de algún conjunto y, con ello, formar un espacio vectorial de transformaciones lineales entre otros dos espacios (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012, p. 227).

El análisis de estas estructuras y mecanismos permite proponer y evaluar *caminos cognitivos* que podría seguir un estudiante para desarrollar un significado particular; tal caracterización del aprendizaje se denomina *descomposición genética* y se utiliza como guía para el diseño e implementación de la enseñanza. Resaltamos que una descomposición genética se considera *preliminar* hasta que se haya comprobado empíricamente que los estudiantes en efecto pueden desarrollar las construcciones mentales señaladas, apoyados en los mecanismos también descritos en ella.

Las relaciones entre elementos teóricos (DGP) y prácticos (propuesta de enseñanza) descritos arriba, llevan a proponer un ciclo de investigación con tres etapas: *análisis teórico*, *diseño e implementación de enseñanza*; y *recolección y análisis de datos* (Arnon *et al*., 2014, p. 93). El análisis teórico tiene como producto una descomposición genética preliminar (DGP), cuyos componentes permiten proponer un diseño de enseñanza; los resultados de la implementación del diseño permiten evaluar tanto la validez de la DGP como la eficacia de la propuesta de enseñanza. Las relaciones entre las etapas permiten diversos grados de libertad para la implementación de estudios sobre el aprendizaje y la enseñanza, facilitando el enfoque en resultados teóricos sobre estructuras mentales o en resultados prácticos sobre la enseñanza, siendo este capítulo del segundo tipo. De tal manera, la propuesta aquí presentada corresponde al producto de la segunda etapa del ciclo de investigación de APOE.

En este sentido, el proyecto inició con el análisis de los resultados sobre dificultades de aprendizaje reportadas en la literatura y la revisión de propuestas de intervención didáctica para la enseñanza de métodos numéricos. Lo anterior permitió seleccionar el par de métodos numéricos que podrían ser accesibles y útiles para los estudiantes y, posteriormente, el planteamiento de una DGP. De esta forma, la DGP para el aprendizaje de cada método está informada por las dificultades de aprendizaje encontradas en la literatura y plantea un camino cognitivo que podría llevar a superarlas. Antes de mostrar la DGP, se describen los antecedentes más importantes.

2.1 Abstracción reflexiva y pensamiento matemático en ambientes computacionales

Desde los inicios del desarrollo del marco APOE (según Arnon *et al*., 2014), se considera a la programación como un ambiente mediante el cual se pueden desarrollar y manifestar concepciones matemáticas desde elementales a avanzadas. De tal manera, se desarrolló el ambiente de programación ISETL, con el objetivo de utilizarlo como herramienta pedagógica en la enseñanza de las matemáticas (p. 59). El lenguaje de ISETL se diseñó para que coincidiera con el lenguaje de una clase de matemáticas y está orientado a objetos, en el sentido de que permite la definición de objetos (numéricos o abstractos) y de operaciones sobre los objetos, a partir de algunas operaciones fundamentales.

Interpretamos que, en el contexto educativo de la comunidad donde se fomentó este énfasis en la programación dentro de la clase de matemáticas, se parte de los resultados de décadas de acciones para integrar elementos del pensamiento computacional en la educación, en particular la programación básica. Dadas las condiciones actuales de los programas educativos en México, no podemos asumir que los estudiantes tengan alguna experiencia de programación con lenguajes formales, por lo que no nos parece coherente el uso de ISETL con los estudiantes a los que se dirige la propuesta.

Por otro lado, en estudios como el de Martín-Caraballo y Tenorio-Villalón (2015) se muestra que, con el apoyo de ambientes dinámicos como *GeoGebra*, los estudiantes pueden participar en una discusión grupal en la que se obtienen los elementos de los métodos de aproximación sin necesidad de programar de manera inicial, y que posteriormente podrían automatizarse utilizando pruebas lógicas y ciclos. Destacamos que en estas experiencias se logra que los estudiantes planteen hipótesis sobre el funcionamiento, la confiabilidad y la convergencia de los métodos, y que se puede promover que tales afirmaciones "…estén basadas en razonamientos teóricos, pero esto no es posible hasta que los estudiantes entiendan los métodos y los procedimientos involucrados en su aplicación. Éstas serían las ventajas y beneficios de usar *GeoGebra* al explicar los métodos numéricos" (p. 64).

2.1.1 Ciclos y recursividad en ambientes de programación

Utilizando el marco APOE se han realizado estudios sobre el desarrollo del pensamiento computacional (Cetin, 2015; Cetin & Dubinsky, 2017), estableciendo relaciones entre este tipo de pensamiento y el pensamiento matemático. En particular se ha estudiado la comprensión de ciclos simples y ciclos anidados como estructuras mentales, proponiendo una descomposición genética que contempla cuatro etapas: *pre-Acción, Acción*, *Proceso*, *Objeto* ciclo simple y *Objeto* ciclos *anidados* (Cetin, 2015):

> Pre-Acción: Esta etapa no se incluyó en la versión preliminar de la descomposición genética, pero los datos empíricos mostraron que es necesario añadir una nueva etapa para describir las construcciones de los

> estudiantes que están por debajo de la concepción de la Acción de un ciclo de un nivel. Las personas limitadas a esta etapa no pueden expresar correctamente la sintaxis de un ciclo. Son conscientes de que una tarea se repetirá una y otra vez, pero no pueden usar ciclos para construir códigos en ejecución.
>
> Acción: [Los individuos] pueden expresar adecuadamente la sintaxis de un ciclo y pueden usarla para resolver problemas relativamente simples. Sin embargo, el concepto de ciclo de un nivel tiene una naturaleza estática en esta etapa. Los individuos expresan iteraciones explícitamente de una manera paso a paso.
>
> Proceso: La Acción de iteración de la etapa anterior se interioriza como un Proceso. Una concepción del Proceso del ciclo de un nivel tiene una esencia más dinámica. El cuerpo del ciclo se realiza repetidamente hasta que la prueba indica que la iteración se detiene. Los individuos pueden imaginar iteraciones sin ejecutar realmente cada paso de la iteración.
>
> Objeto: Los individuos perciben el proceso de la etapa anterior como una totalidad en la que se establecen los límites de las variables de control (entrada), el ciclo se ejecuta hasta que la prueba le dice que se detenga (proceso) y después se realiza el final (salida). Por lo tanto, el ciclo puede considerarse como una función o procedimiento con la entrada, el proceso y la salida indicados. Esto completa la construcción del ciclo de un nivel. Por lo tanto, el individuo puede construir un ciclo de nivel n insertando un ciclo de nivel (n – 1) en un ciclo de un nivel o viceversa (pp. 162-166).

Después de analizar las concepciones mostradas por los estudiantes, Cetin (2015) plantea algunas conclusiones sobre el aprendizaje de ciclos y ciclos anidados. En particular, señala que:

> Aunque el estudiante cree que tiene un problema en los ciclos de dos niveles, el punto de vista teórico de APOE sugiere que el estudiante podría tener un problema con el entendimiento de la concepción de objeto para el ciclo de un nivel porque un ciclo de dos niveles es idéntico al ciclo de un nivel, en donde al menos una de las instrucciones del cuerpo del ciclo es un ciclo de un nivel de acuerdo con la descomposición genética.
>
> Los resultados de este estudio mostraron que el ciclo anidado de n niveles requiere construir la comprensión de la etapa del objeto. Hay una gran cantidad de evidencia de que los estudiantes generalmente tienen dificultades para lograr el nivel de comprensión del objeto (p. 167).

A partir de estos antecedentes se plantea que, dadas las dificultades para desarrollar las construcciones y los mecanismos asociados a la iteración y recursividad en programación, es necesario diseñar ambientes digitales que permitan el desarrollo de métodos iterativos de manera accesible para estudiantes con o sin experiencia en programación. Dadas las características del lenguaje utilizado en los *guiones* de *GeoGebra*, compuesto de comandos predefinidos y relacionados con las representaciones gráficas y algebraicas, para el presente diseño se parte del supuesto de que la construcción de los métodos iterativos, sin requerir el uso de un lenguaje formal de programación, atendería estas dificultades.

2.2 Descomposición genética preliminar

De manera similar a la construcción de ciclos, se propone que el aprendizaje de los métodos numéricos pase por las etapas de Acción, Proceso y Objeto, de manera que los estudiantes eventualmente puedan pensar en las aproximaciones como un método mejorable o perfectible. Describiremos las etapas de las DGP en términos de la actividad de un estudiante en cada etapa.

El trabajo en esta secuencia requiere que los estudiantes cuenten al menos con las siguientes *construcciones previas*:

Objetos	Números y variables reales Funciones y derivadas (como funciones)
Acciones	Condicionales y pruebas lógicas Propiedades de orden de los números reales Raíces de funciones (en particular polinomios)
Procesos	Funciones de una variable Derivada Puntos críticos de funciones como raíces de la derivada Gráficas de funciones

Tabla 2. Construcciones previas para secuencia de bisección

Las concepciones que se plantean iniciarán como manipulaciones de números, aplicando funciones de manera selectiva, a partir de la prueba lógica del cumplimiento de propiedades de funciones, en particular de las preimágenes del cero. De tal manera, se propone el desarrollo como en la siguiente tabla.

Acción	El estudiante aproxima el valor de la raíz para una función dada realizando los siguientes pasos:

	1. Identifica un intervalo que contiene a la raíz 2. Divide el intervalo en dos partes iguales 3. Selecciona el subintervalo que contiene a la raíz, evaluando los cambios de signo en los extremos 4. Propone como mejor aproximación, el punto medio del subintervalo elegido 5. Evalúa qué tan cerca se llegó a la solución del problema, evaluando la función en el valor encontrado
Proceso	• Se interioriza la acción anterior al notar que la aplicación iterativa de los pasos, como una secuencia que se repite, permite obtener cada vez mejores aproximaciones. • Se concibe que la aplicación del método podría ser una sola instrucción dentro de un procedimiento más complejo • Se concluye que, eventualmente, el error de la aproximación es tan pequeño como se desee
Objeto	Al concebir la posibilidad de que el proceso se aplique como un todo, sin tener que realizar los pasos de uno en uno, se da prioridad al posible valor al que se acercan las aproximaciones, sobre la manera en la que se aproxima su valor. Esto permite manipulación del método, de manera que pueda: 1. Definirse la aplicación de *n-repeticiones* sin tener que realizarlas una a la vez, o necesitar ver los pasos 2. Definirse la raíz de la función como *el resultado final* de la aplicación del método iterativo 3. Comparar la convergencia con otros métodos 4. Modificar el método para mejorar su *velocidad de convergencia*

Tabla 3. Descomposición Genética Preliminar del Método de Bisección

Destacamos que, en las etapas Acción y Proceso, el método implica hacer algo, mientras que en la etapa Objeto el método se asocia más con su resultado y su posible modificación.

Para la construcción del segundo método se utilizan prácticamente las mismas concepciones previas que la anterior, añadiendo un par de objetos geométricos y una idea intuitiva de infinitesimal como valor *despreciable* comparado con un valor *significativo.*

Objetos	Números y variables reales Funciones y derivadas (como funciones) Puntos y rectas en el plano
Acciones	Condicionales y pruebas lógicas Propiedades de orden de los números reales Raíces de funciones (en particular polinomios)
Procesos	Funciones de una variable Derivada Puntos críticos de funciones como raíces de la derivada Gráficas de funciones Operaciones sobre puntos y rectas en el plano

Tabla 4. Construcciones previas para secuencia de N-R

De manera similar, el método de N-R se plantea con las mismas tres etapas, manipulación de valores numéricos aplicando funciones de forma selectiva y la posterior coordinación de propiedades de funciones y derivadas para definir un método eficaz de aproximación. Las concepciones planteadas para este método son las siguientes:

Acción	El estudiante aproxima el valor de la raíz para una función dada realizando los siguientes pasos: 1. Identifica un valor cercano a la raíz 2. Identifica un problema lineal cuya solución es similar a la solución buscada 3. Resuelve el problema lineal y propone tal solución como una mejor aproximación 4. Evalúa qué tan cerca se llegó a la solución del problema, a través de la función en el valor encontrado

Proceso	– Se interioriza la acción anterior al notar que la aplicación iterativa de los pasos, como una secuencia que se repite, permite obtener cada vez mejores aproximaciones. – Se concibe que la aplicación del método podría ser una sola instrucción dentro de un procedimiento más complejo Se concluye que, eventualmente, el error de la aproximación es tan pequeño como se desee
Objeto	El éxito al aplicar el proceso repetidas ocasiones permite concentrarse en el resultado de la aplicación y las características de éste; ello permite la manipulación del método, de manera que el estudiante pueda: 1. Definir la aplicación de *n-repeticiones* sin tener que realizarlas una a la vez, o necesitar ver los pasos *2.* Definir la raíz de la función como *el resultado final* de la aplicación del método iterativo 3. Comparar la convergencia con otros métodos *4.* Modificar el método para mejorar su *velocidad de convergencia*

Tabla 5. Descomposición Genética Preliminar del Método de N-R

La similitud entre las descripciones de las concepciones Proceso y Objeto de ambas DGP se atribuyen a que, para describirlas, es importante que no se dependa ya de los pasos específicos de las Acciones. Esto implica que los estudiantes deberían también notar que ambos métodos son formas similares de aproximar el mismo valor para una función dada.

2.3 Criterios para el diseño de enseñanza

En la segunda etapa del ciclo de investigación, se desarrolló el diseño de la propuesta, esta estructura bajo el *ciclo de enseñanza* propuesto desde el marco de APOE: **A**ctividades, discusión grupal en **C**lase y **E**jercicios (ACE por sus siglas en inglés). Desde el marco APOE (Arnon *et al.*, 2014, p. 58) se plantea que el trabajo individual o en pequeños equipos puede favorecer el inicio del desarrollo de las concepciones descritas en una DG, mientras que en una discusión grupal se puede fomentar la identificación de las propiedades generales obtenidas al resolver casos distintos, la posibilidad de modificar los resultados obtenidos o los métodos mismos con los que se obtuvieron; en general, favorecer los mecanismos que permitan pasar de una estructura a la siguiente en la DG. Finalmente, la etapa de ejercicios permite al mismo tiempo reforzar las construcciones realizadas, aplicándolas a nuevos casos, y como un primer instrumento de evaluación, para observar si los estudiantes de manera individual pueden aplicar las concepciones descritas en la DG para resolver problemas.

Siguiendo el planteamiento de ciclos ACE, la propuesta diseñada consta de dos ciclos. Cada uno inicia con una sección de actividad, en la cual se promueven las estructuras a nivel Acción e inicio de proceso para cada método; después, en la etapa de discusión se abordan nuevos problemas y se promueve la interiorización para terminar de construir el Proceso y avanzar a la etapa de Objeto. Por último, en la sección de ejercicios se busca refinar la construcción de las concepciones y la evaluación preliminar del desarrollo de las concepciones en términos del desempeño de los estudiantes al resolver problemas. De tal manera, las dos secuencias mencionadas en el resto del documento corresponden a estos dos ciclos ACE.

3. Propuesta de enseñanza

Para facilitar la implementación de las secuencias, y como elemento fundamental por sus características dinámicas y la inclusión de un lenguaje elemental de programación, las actividades se diseñan como *hojas de trabajo dinámicas* organizadas dentro de un *grupo* de *GeoGebra*.

En la descripción de cada actividad, se hará mención de *funciones* en general, aunque para un curso de Álgebra superior se pueden considerar como polinomios.

3.1 Método de Bisección

3.1.1 Actividad y discusión grupal

La primera actividad plantea el problema de *automatizar* el procedimiento intuitivo de utilizar la herramienta *zoom,* usando la rueda de desplazamiento del ratón, para acercarse a la raíz de una función en la vista gráfica de *GeoGebra*; en caso de no contar con un ratón con rueda de desplazamiento, se podría usar la herramienta de *aproximar* de *GeoGebra*. A partir de este problema inicial, se continúa en tres etapas: desarrollar una idea intuitiva del método, convertir la idea intuitiva en un método cuantitativo y, finalmente, automatizar el método como un método iterativo.

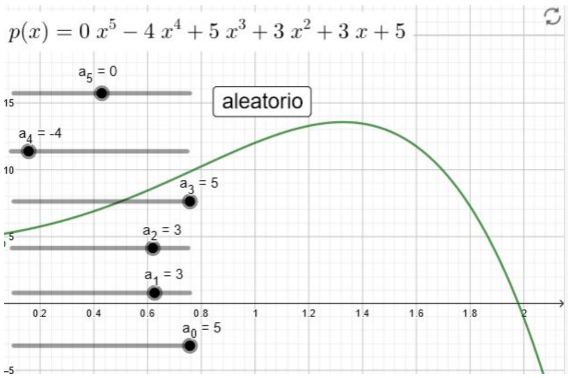
Se plantea a los estudiantes el problema de automatizar el procedimiento de *hacer zoom* sobre una gráfica para averiguar sus raíces. Para la etapa de Acción se plantea el trabajo con tablas, comprobando visualmente que las operaciones aplicadas a los valores numéricos generan el mismo efecto que el *zoom* aplicado directamente. En la etapa de Proceso se buscan tratamientos algebraicos que permitan *arrastrar* las celdas y generar el mismo resultado. Finalmente, introduciendo la herramienta de *botón* se exploran maneras de realizar el mismo procedimiento, pero ahora con sólo un clic, a partir de instrucciones simples. De manera general, las etapas para construir las estructuras mentales seguirían el siguiente orden, señalando como Ai, Pi_i y Oi el paso i-ésimo para construir la Acción, Proceso y Objeto, respectivamente.

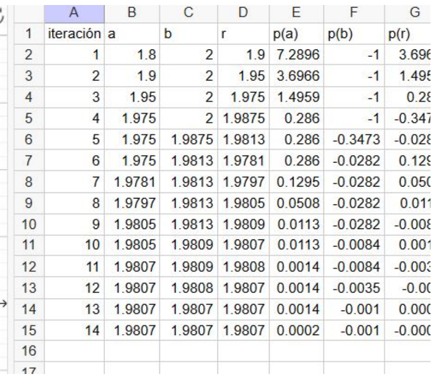
A1. Se plantea la tarea en equipos de dar instrucciones a un compañero para que, sin ver la pantalla de *GeoGebra*, use el ratón para hacer *zoom* en una raíz de la función graficada.

A2. A partir de una discusión grupal, se definen las operaciones que se aplican con el ratón al realizar los acercamientos de manera sucesiva, notando que es la repetición de dos pasos: desplazar el cursor a la izquierda o derecha y aplicar *zoom*. Se destaca aquí que en cada repetición es necesario decidir a qué lado desplazar el cursor, por medio de la comparación de posición relativa entre el cursor y la raíz.

A3. Definidos los dos pasos del método, se plantea el problema de cuantificarlos para convertirlos en cálculos numéricos. Se define así tomar un valor cercano a la raíz, como valor inicial de referencia para hacer las comparaciones. Se destaca que, si el valor elegido no es la raíz, será necesario un criterio para elegir un mejor candidato.

A4. Comparando con la interpretación gráfica, se propone definir un intervalo inicial que contenga a la raíz, evaluar la función en los extremos y el punto medio del intervalo para decidir cuál valor está más cerca de la raíz. Para facilitar estos cálculos, se facilita una hoja de trabajo de *GeoGebra* (Figura 2).





	A	B	C	D	E	F	G
1	iteración	a	b	r	p(a)	p(b)	p(r)
2	1	1.8	2	1.9	7.2896	-1	3.696
3	2	1.9	2	1.95	3.6966	-1	1.495
4	3	1.95	2	1.975	1.4959	-1	0.28
5	4	1.975	2	1.9875	0.286	-1	-0.347
6	5	1.975	1.9875	1.9813	0.286	-0.3473	-0.028
7	6	1.975	1.9813	1.9781	0.286	-0.0282	0.129
8	7	1.9781	1.9813	1.9797	0.1295	-0.0282	0.050
9	8	1.9797	1.9813	1.9805	0.0508	-0.0282	0.011
10	9	1.9805	1.9813	1.9809	0.0113	-0.0282	-0.008
11	10	1.9805	1.9809	1.9807	0.0113	-0.0084	0.001
12	11	1.9807	1.9809	1.9808	0.0014	-0.0084	-0.003
13	12	1.9807	1.9808	1.9807	0.0014	-0.0035	-0.00
14	13	1.9807	1.9807	1.9807	0.0014	-0.001	0.000
15	14	1.9807	1.9807	1.9807	0.0002	-0.001	-0.000
16							
17							

Figura 2. Bisección-hoja de trabajo 1

P1. Se comparan los resultados de manera grupal, observando que, sin importar la función graficada, se pudo aproximar al menos una raíz. Se destaca aquí que, en el paso de comparación de las evaluaciones, cotejar el signo de las imágenes es suficiente para decidir el siguiente valor posible de la raíz.

P2. Tras la repetición del método para comprobar que en la función dada se pueden encontrar todas las raíces reales, se discute la naturaleza repetitiva del método y cómo sería útil que el programa repitiera automáticamente los pasos, dada su simplicidad. Se introduce aquí la herramienta de botón de *GeoGebra*, que permite la ejecución de una lista de comandos, de manera ordenada.

P3. Tras definir un par de valores iniciales que definen un intervalo (a, b) que contiene a la raíz, se construye un primer botón que aplique los pasos realizados manualmente, ahora de forma directa con tres comandos en su guion, habiendo definido sa, sb y sr, como los signos de las imágenes de a, b y r, respectivamente:

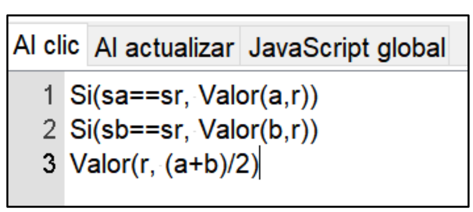


Figura 3. Guion para el botón de bisección

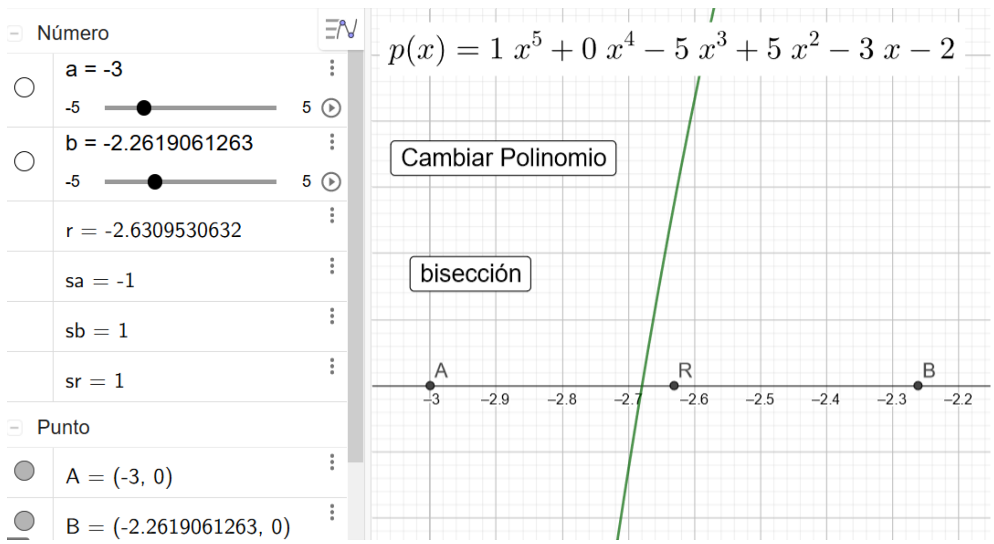


Figura 4. Botón de bisección

O1. Se discute grupalmente qué representa cada clic al botón construido y si genera la misma aproximación para *r* que el método manual.

O2. Para continuar la automatización, se discute qué es necesario para que con un solo clic *GeoGebra* aproxime la raíz buscada, resaltando que cuando se realiza manualmente el usuario necesita hacer clic repetidas ocasiones. Se introduce aquí el comando *repite(comando),* ejemplificando cómo este comando genera el tipo de salida buscada.

O3. Los estudiantes definen un segundo botón que repite *j-veces* la ejecución del primer botón, obteniendo en un solo clic aproximaciones *suficientemente cercanas* a la raíz buscada.

O4. Habiendo desarrollado el método iterativo, con *j* repeticiones, se discuten las ventajas y deficiencias del método de bisección para aproximar raíces de funciones. En particular, se plantean polinomios con raíces pares para explorar qué sucede al aplicar el método, observando que éste no permite aproximar tales raíces. Dependiendo del grupo, esta primera propiedad se relaciona con teoremas o propiedades de funciones y continuidad.

O5. Como segunda exploración, se plantea buscar las raíces de la derivada del polinomio y comparar los resultados en esta segunda función con los de la primera, para rescatar la relación entre derivadas y optimización del curso de Cálculo. Se pretende así concluir que el método se puede extender para aproximar raíces pares, si se buscan en la función derivada en lugar de la original. Se plantea entonces la tarea de definir un tercer botón que aproxime raíces pares.

En la lista anterior, como se mencionó anteriormente, la etapa de actividad individual o en equipos pequeños abarca la construcción de la Acción, en cuyo último paso se podrían tener ya elementos del Proceso. A partir de la etapa P1, se trabaja de manera grupal, mostrando cada equipo su propuesta de solución al grupo y opinando sobre las demás.

3.1.2 Ejercicios

Del trabajo anterior, cada estudiante ha construido botones que le permiten aproximar raíces pares e impares, por lo que se plantea como ejercicios que ellos intenten buscar una función con raíces reales que no se le puedan aproximar mediante bisección, o que en su defecto encuentren todas las raíces de una lista de funciones dadas.

3.2 Método de Newton-Raphson

Este método descansa sobre la propiedad de *linealidad local* de funciones diferenciables, por lo que se requiere de una concepción Proceso de derivada que permita identificar tal propiedad en las gráficas de funciones. Así mismo, los Procesos sobre resolución de ecuaciones lineales se aplican para obtener cada aproximación de las raíces.

3.2.1 Actividad y discusión grupal

Se sistematiza la búsqueda de raíces de funciones, pero ahora aprovechando la linealidad local de funciones diferenciables. Una exploración visual permite a los estudiantes deducir que, partiendo de un valor *cercano* a la raíz, resolver un problema lineal permite aproximar el valor de la raíz de la función (Figura 5). Se incluyen también tareas de comparación entre los dos métodos.

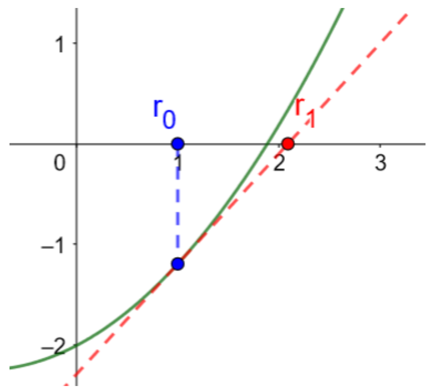


Figura 5. Representación gráfica del método N-R

De manera similar, se realizan cálculos en el registro tabular comprobando los efectos gráficos, se busca la generalización de las operaciones y, finalmente, se construye un botón que aplica una iteración del método. Las etapas para construir cada concepción se describen de manera similar a la primera secuencia.

A1. Se inicia la secuencia planteando el problema de aproximar el valor de la raíz de una función a partir de la comparación de las rectas tangentes para valores cercanos a la raíz con la gráfica de la función. Esta comparación permite observar que, suficientemente cerca, las tangentes y la función tienen prácticamente la misma intersección con el eje X.

A2. A partir de la primera exploración gráfica, se plantea el problema de construir en *GeoGebra*, con herramientas geométricas, una versión dinámica del valor cercano a la raíz y la tangente que le corresponde en la gráfica de la función. Esto, para explorar qué sucede cuando se cambia el valor inicial por el cruce con el eje X, como valor posible de la raíz de la función.

A3. Para sistematizar las aproximaciones, se propone a los estudiantes llevar un registro de los valores posibles de la raíz, distinguiéndolos por el valor obtenido al evaluar la función, considerando este segundo valor como el error para esa aproximación. Las producciones de los estudiantes en este paso serían como las de la siguiente figura:

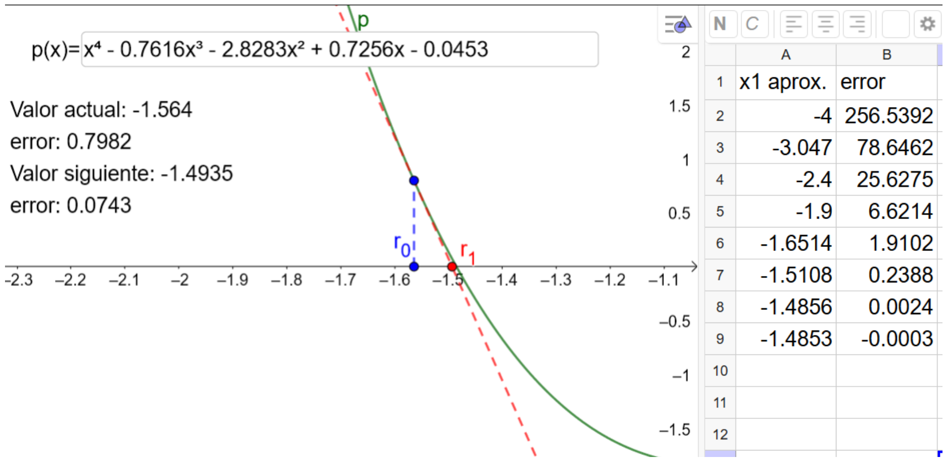


Figura 6. Método gráfico de N-R

A4. Tras observar que el método sí aproxima las raíces, se compara con el método de bisección, en términos de facilidad de los cálculos y velocidad de convergencia, en términos intuitivos, como la cantidad de iteraciones promedio para llegar a un error menor que un valor dado. Se espera que en esta etapa los estudiantes supongan que el método de N-R es menos eficiente, al necesitar los objetos geométricos.

A5. Se procede a la cuantificación del método geométrico, al plantear el problema de describir el valor de *r1* en términos de *r0* (usando las etiquetas de la Figura 6). Se retoma aquí la relación entre las rectas tangentes y las derivadas de funciones, para llegar a una expresión algebraica del tipo:

$$r_1 = r_0 - \frac{p(r_0)}{p'(r_0)}$$

P1. Una vez obtenida la expresión algebraica recursiva, se construye el botón correspondiente que aplica una iteración del método. Se plantea ahora la comprobación de los puntos de comparación del paso NR4, con la intención de observar que este segundo método puede llegar más rápido a una aproximación con el mismo error, al contar los clics, y que no está limitada a la aproximación de raíces impares.

P2. De manera similar al método de bisección, se construye a continuación un botón que repita una cantidad determinada de veces la aproximación. El comando que se utiliza es de la forma: Repite(j, EjecutaAlClic(botón1)), habiendo definido previamente el valor *j*.

P3. Como última construcción, se plantea a los estudiantes el problema de hacer que un botón aplique alguno de los métodos hasta minimizar el error a un valor determinado, a diferencia de la repetición de un número dado de veces. Puede haber varias soluciones a este problema, una de ellas consiste en crear dos botones con los mismos pasos del botón inicial, y que uno haga clic en el otro si el error actual es menor que el error deseado:

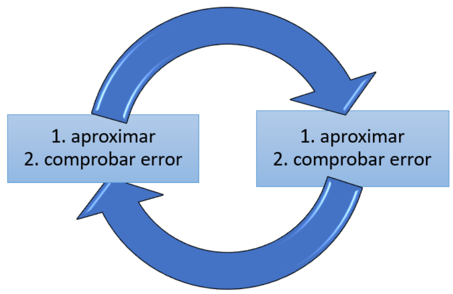


Figura 7. Botones recursivos

P4. Otra opción sería construir un solo botón y que se llame a sí mismo. Con estudiantes de CC puede ser provechoso explorar y discutir las diferencias entre métodos iterativos y métodos recursivos (ver, por ejemplo, Foltynowicz, 2007).

P5. Habiendo resuelto la automatización del método y observado que no es necesario aplicar el método a la derivada para aproximar las raíces, se plantea la exploración sobre la derivada para observar qué sucede. Se espera notar que, al aplicar el método sobre la derivada de la función, se aproximan los puntos críticos de la función, en lugar de las raíces.

P6. Para finalizar, se propone a los estudiantes explorar cómo se relaciona la posición del valor inicial con la velocidad de convergencia, tanto para raíces como para puntos críticos. Los resultados de esta exploración inician la discusión grupal.

O1. Para explorar las limitaciones del método de N-R, se discute qué sucede si el valor inicial para aproximar las raíces corresponde a un punto crítico de la función (como en la Figura 8). Se pretende concluir que el método falla necesariamente, dada la relación algebraica entre el valor inicial y el siguiente, a partir del cociente sobre la derivada evaluada en el valor actual.

O2. La discusión avanza a decidir qué sucede al alejarse del punto crítico, por ejemplo, en una función con dos o más raíces alrededor del punto crítico (ver

Figura 8) y caracterizar la raíz que el método encontraría, a partir de la posición relativa del valor inicial y los puntos críticos de la función.

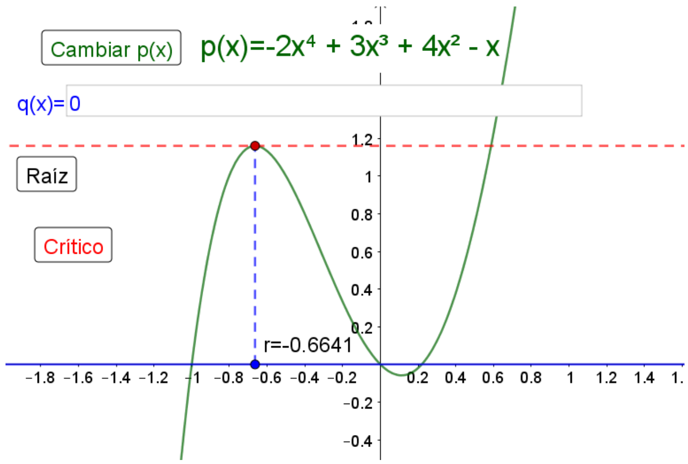


Figura 8. Puntos críticos en el método N-R

O3. Se concluye que el método de N-R permite al mismo tiempo encontrar las raíces, máximos y mínimos de una función derivable.

3.2.2 Ejercicios

De manera similar a la actividad previa, los estudiantes utilizan sus propias construcciones de *GeoGebra* para aproximar todas las raíces de una lista de funciones dadas, o argumentar por qué no pueden ser aproximadas. Además, se aplica un *examen* (Figura 9) en el que los estudiantes construyen desde cero uno de los métodos en *GeoGebra* para factorizar un polinomio con raíces reales.

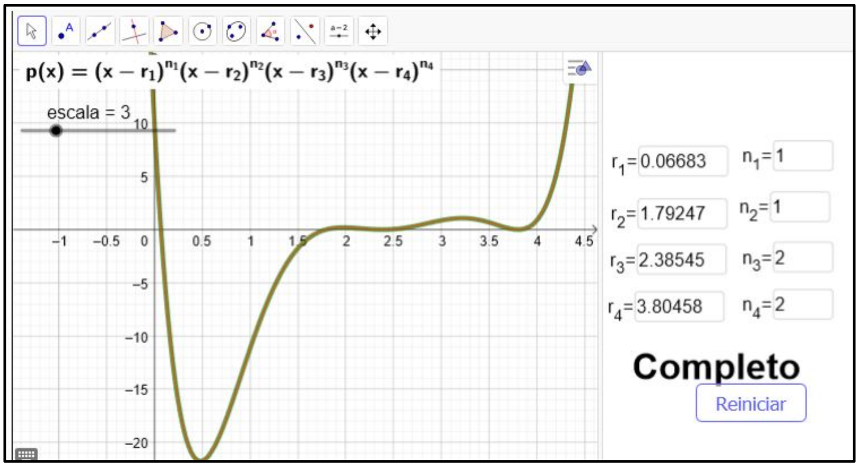


Figura 9. Examen de factorización de polinomios

4. Implementación y resultados preliminares

Para la tercera etapa del ciclo de investigación, las secuencias fueron implementadas parcialmente con tres grupos, dos de ingeniería y uno de CC de la UNISON. Particularmente, la primera secuencia se aplicó sólo con un grupo de ingeniería y no se pudieron atender las últimas dos etapas de Objeto; de manera similar, la secuencia de N-R se aplicó por completo sólo con el grupo de CC, y en el tercer grupo se implementaron hasta la etapa Proceso ambas actividades. Atendiendo el enfoque cíclico de APOE, se considera esta implementación como un *pilotaje* que permitirá el refinamiento de la propuesta y del análisis teórico de las construcciones mentales desarrolladas por los estudiantes, en una posterior implementación de la propuesta en su totalidad.

Se decidió evaluar las respuestas generadas por los estudiantes en las hojas de trabajo de cada actividad, en términos de las estructuras mentales declaradas para cada significado. Posteriormente, se evaluó el uso de las distintas concepciones en el análisis y la solución de un problema de aproximación elegido por los estudiantes.

Se observó que los tres grupos pudieron realizar la mayoría de las construcciones en *GeoGebra* que se abordaron en clase, siendo el caso más problemático el de los botones recursivos, que sólo fue construido por un equipo del grupo de CC.

Se confirmó que, si los estudiantes no podían referirse a los objetos matemáticos representados y manipulados en las construcciones de *GeoGebra*, difícilmente podían terminar de construir las herramientas propuestas y no participaban en las discusiones grupales; esto permitió identificarlos como estudiantes que necesitan apoyo extra. En general, se pudieron superar las dificultades de construir los casos generales o automáticos, tras la repetición de los casos manuales, trabajando en lápiz y papel, y después en las tablas de *GeoGebra*.

El trabajo en lápiz y papel, y luego en tablas dinámicas, permitió la construcción de concepciones Acción de los métodos, manifestándose en la necesidad inicial de los estudiantes de calcular una a una cada iteración.

Los botones que realizan una sola iteración parecieron funcionar como facilitadores del mecanismo de interiorización al permitir que, durante su manipulación y combinación con otros comandos, se generaran botones que realizan las iteraciones un determinado número de pasos. En los primeros casos se resolvieron problemas como el siguiente:

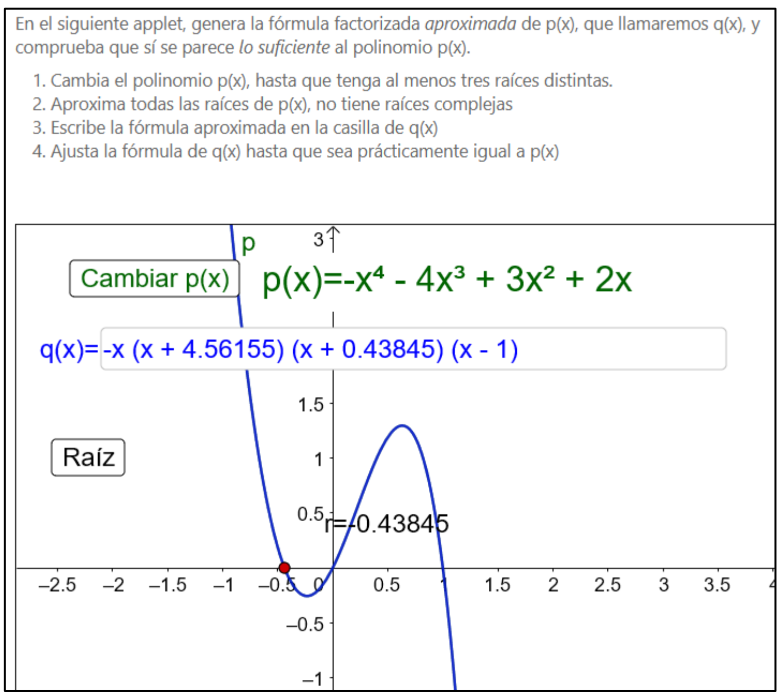


Figura 10. Ejemplo de Proceso simple con un botón para una iteración

Para el desarrollo y evaluación de los procesos avanzados se planteó a los estudiantes la búsqueda de raíces y puntos críticos de funciones con fórmulas más complicadas que polinomios, como en la siguiente figura:

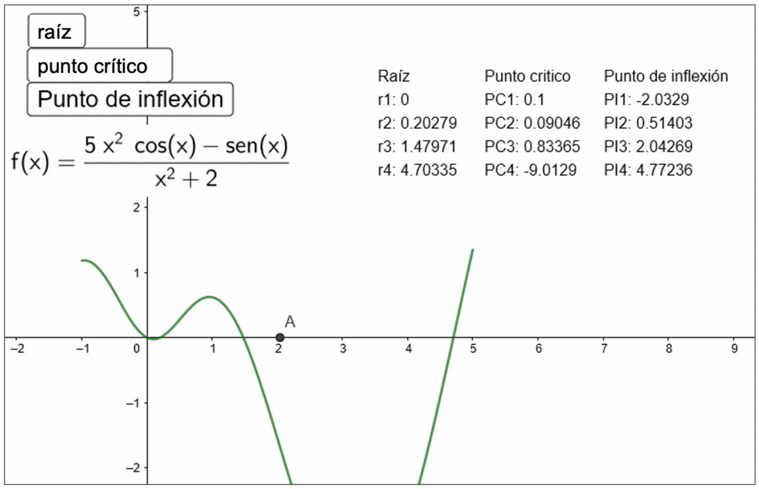


Figura 11. Ejemplo de construcción de Proceso avanzado con uso de la derivada (disponible en ggbm.at/pmb2afkb)

La discusión sobre las características de los métodos permitió confirmar que los estudiantes se podían imaginar la ejecución de las iteraciones y, al discutir los casos extremos o fuera del rango de los métodos, argumentar utilizando las relaciones entre los objetos matemáticos empleados.

5. Conclusiones

Aunque el desarrollo del pensamiento computacional conlleva sus propias dificultades (ver Cetin & Dubinsky, 2017; Wing, 2008), se plantea que favorecer algunos de sus elementos en cursos de Matemáticas es de beneficio para ambas áreas del conocimiento.

Tras una prueba piloto con tres grupos de estudiantes (Cálculo I y Álgebra en ingeniería, y Álgebra en Ciencias de la Computación), se observó que la propuesta es accesible para estudiantes con poca o nula experiencia en programación y que les permitió mejorar algunos conocimientos sobre Cálculo y Álgebra.

La visualización mediada por *GeoGebra* permitió la búsqueda de patrones, y la combinación de la hoja de cálculo con la programación de botones facilitó la interiorización de Acciones en Procesos. El análisis de casos especiales y la construcción de botones avanzados permitió también la coordinación de

Procesos simples en Procesos avanzados y, en algunos casos, la encapsulación en objetos.

La evaluación detallada de la prueba piloto permitirá el planteamiento de *Descomposiciones Genéticas* para los métodos, tentativamente como Procesos avanzados que surgen de la coordinación de varios Procesos simples, así como el refinamiento de la intervención para reducir dificultades de aprendizaje; esto, como la iteración del ciclo de investigación propuesto en APOE en la que se implementen ambas secuencias y se puedan evaluar todos las etapas de construcción con el mismo grupo, validar la DGP y las secuencias de enseñanza.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. doi:10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

Cetin, I. (2015). Students' understanding of loops and nested loops in computer programming: An APOS theory perspective. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 15*(2), 155-170.

Cetin, I., & Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 47*, 70-80. doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.004

Foltynowicz, I. (2007). Recursion versus iteration with the list as a data structure. *Informatics in Education-An International Journal, 6*(2), 283-306.

Greene, J. M. (1992). Locating three-dimensional roots by a bisection method. *Journal of Computational Physics, 98*(2), 194-198.

Lappas, P. Z., & Kritikos, M. N. (2018). Teaching and Learning Numerical Analysis and Optimization: A Didactic Framework and Applications of Inquiry-Based Learning. *Higher Education Studies, 8*(1), 42-57.

McCauley, R., Grissom, S., Fitzgerald, S., & Murphy, L. (2015). Teaching and learning recursive programming: a review of the research literature. *Computer Science Education, 25*(1), 37-66.

Martín-Caraballo, A. M., & Tenorio-Villalón, Á. F. (2015). Teaching numerical methods for non-linear equations with Geogebra-based activities. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 10*(2), 53-65.

Universidad de Sonora (2018). Modelo Educativo 2030 de la Universidad de Sonora. Recuperado de www.unison.mx/marco-normativo/

Wing, J. M. (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, *366*(1881), 3717-3725.

11 Desarrollo del pensamiento geométrico de profesores de matemáticas de secundaria en México

María Antonieta Rodríguez Ibarra[1], Gisela Montiel Espinosa[2]

Resumen

Uno de los objetivos de la secundaria es desarrollar el pensamiento matemático en sus estudiantes. Parte importante de éste es el geométrico, el cual considera la diversidad de formas en que piensan las personas para construir nociones geométricas. En experiencias de trabajo con profesores se han mostrado limitaciones al resolver tareas geométricas, lo cual se puede deber a que no han tenido la oportunidad de desarrollar su pensamiento geométrico, y esto se ve reflejado en sus prácticas docentes y en el aprendizaje de sus estudiantes. En este capítulo, presentamos una propuesta encaminada a estudiar el desarrollo del pensamiento geométrico de los profesores mediante la confrontación del aprendizaje personal y colectivo.

Palabras clave: pensamiento geométrico, escuela secundaria, desarrollo profesional docente.

Résumé

Un des objectifs de l'école secondaire c'est développer la pensée mathématique des élèves. Une partie importante de ceci est la pensée géométrique; cette compris comme la diversité des façons dont les gens pensent construire des notions géométriques. Les expériences de travail avec les enseignants ont montré des difficultés dans la résolution de tâches géométriques et n'ont pas eu l'occasion de développer leur pensée géométrique, ce qui se reflète dans leurs pratiques pédagogiques et dans l'apprentissage de leurs élèves. Dans ce chapitre, nous présentons une proposition visant à développer la pensée géométrique des enseignants par la confrontation des apprentissages personnels et collectifs.

Mots clés : pensée géométrique, école secondaire, développement professionnel des enseignants.

Abstract

One of the objectives of the middle school is to develop the mathematical thinking of the students. An important part of this is geometric; wich considerate the diversity of ways in which people think to construct geometric notions. In workshop experiences with teachers have shown limitations in solving geometric tasks and have not had the opportunity to develop their geometric thinking which is reflected in their teaching

[1] Universidad de Sonora, México.

[2] CINVESTAV, México.

practices and in the learning of their students. In this chapter, we present a proposal aimed at developing the geometrical thinking of teachers through the confrontation of personal and collective learning.

Keywords: geometrical thinking, middle school, teacher development.

1. Introducción

Dentro del currículo escolar mexicano el estudio de la geometría se presenta desde edades tempranas. Principia en el primer tramo de la educación básica, que abarca desde preescolar a secundaria, iniciando el alumno sus estudios a los cuatro años y culminándolos aproximadamente a los 15 años. Al ser una parte de las Matemáticas presente en gran parte del currículo escolar, se esperaría que estudiantes que han cursado el nivel básico y medio superior, hayan desarrollado un pensamiento geométrico apropiado para resolver problemas acordes a su nivel. Sin embargo, la realidad es diferente, experiencias de trabajo con alumnos y profesores de secundaria, así como diversas evaluaciones estandarizadas dan cuenta de que existen problemas al enseñar y aprender aspectos relacionados con el pensamiento geométrico.

La problemática principal radica en que la matemática escolar tiende a priorizar los procesos aritméticos, algebraicos y analíticos (según el nivel educativo); dejando de lado aquellos vinculados con la forma, el espacio y la medida, que es uno de los ejes en los que se divide la educación matemática en secundaria y donde se abordan principalmente los contenidos geométricos; esto provoca que diagramas, mapas, gráficos o figuras se conviertan, en el mejor de los casos, en representaciones ilustrativas de los conceptos matemáticos. Es decir, la matemática escolar no da la oportunidad de desarrollar el pensamiento geométrico porque está centrada en el dominio de objetos cuya institucionalización es predominantemente algebraica. Desafortunadamente, sí demanda de ellos, sobre todo en las evaluaciones estandarizadas, nacionales e internacionales, donde nos hemos visto desfavorecidos.

En muchos salones de clase, las construcciones con regla y compás han desaparecido, a pesar de que es ésta una buena manera de aprender a analizar propiedades geométricas; nociones como congruencia, semejanza y simetría son fundamentales para argumentar, la cual es una de las competencias matemáticas más descuidadas en el nivel básico de nuestro país.

Consideramos que el trabajo geométrico es fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico. Promover los procesos de construcción, las argumentaciones geométricas, validaciones con y sin uso de tecnología.

Respecto a las evaluaciones que se aplican a los estudiantes mexicamos, por mencionar algún resultado, en la prueba PLANEA 2017, aplicada en alumnos de 3er grado de secundaria, se obtuvo que un 8.6% de los estudiantes se ubican en el nivel III de logro; en el cual se establece que deben "resolver problemas relativos con la imaginación espacial (sólidos de revolución)" (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2017, p. 10).

Respecto a las evaluaciones aplicadas a los profesores en servicio, no existe mucha información; sin embargo, en diferentes experiencias de trabajo con los profesores se ha encontrado que los maestros muestran limitaciones al enfrentarse a tareas geométricas diferentes a las típicamente escolares. Por lo que consideramos que, dada la diversidad de factores que afectan su práctica profesional, el docente no ha logrado modificar el enfoque de enseñanza basado en el dominio de contenidos, principalmente referido a definiciones y algoritmos.

En este capítulo, presentamos una propuesta encaminada a estudiar el pensamiento geométrico de los profesores promoviendo situaciones de confrontación, es decir, situaciones donde el saber matemático escolar le sea insuficiente para dar respuesta a la tarea y, por lo tanto, tenga la necesidad de dar argumentaciones más allá de las típicamente escolares.

2. Pensamiento geométrico

Uno de los principales objetivos de la escuela secundaria mexicana es desarrollar el pensamiento matemático de sus estudiantes, tal como se declara en el Plan y Programas de estudio, SEP (2017).

> Pensamiento matemático se denomina a la forma de razonar que utilizan los matemáticos profesionales para resolver problemas provenientes de diversos contextos, ya sea que surjan en la vida diaria, en las ciencias o en las propias matemáticas. Este pensamiento, a menudo de naturaleza lógica, analítica y cuantitativa, también involucra el uso de estrategias no convencionales, por lo que la metáfora pensar "fuera de la caja", que implica un razonamiento divergente, novedoso o creativo, puede ser una buena aproximación al pensamiento matemático. En la sociedad actual, en constante cambio, se requiere que las personas sean capaces de pensar lógicamente, pero también de tener un pensamiento divergente para encontrar soluciones novedosas a problemas hasta ahora desconocidos. (p. 158).

Otra caracterización del pensamiento matemático es la reportada por Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015, p. 13): "usaremos el término pensamiento matemático para referirnos a la diversidad de formas en que piensan las personas que se interesan por identificar, caracterizar o modelar conceptos y procesos propiamente matemáticos en ámbitos diversos".

Como parte del pensamiento matemático se encuentra el pensamiento geométrico, pero a diferencia de lo que sucede con nociones como pensamiento algebraico, pensamiento variacional o pensamiento trigonométrico, para los cuales es posible encontrar algunas caracterizaciones y/o acercamientos en la literatura de la especialidad, para el pensamiento geométrico aparecen una serie de nociones en las que concurren acercamientos realizados desde la investigación sobre el aprendizaje, la enseñanza, los procesos cognitivos, aquellos que intentan generar modelos teóricos, etcétera, sin que fuera posible encontrar alguna (al menos en la revisión bibliográfica efectuada).

Tomando como base las dos caracterizaciones del pensamiento matemático, nos referiremos al término *pensamiento geométrico* como las diversas formas de pensar o razonar de las personas para construir, identificar, caracterizar nociones geométricas en diferentes ámbitos.

Con la intención de profundizar acerca del pensamiento geométrico, se ha realizado una revisión de investigaciones que lo abordan, tomando como base lo reportado por Sinclair, Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens (2016). En su investigación realizan una revisión de la literatura acerca de la geometría educativa de los últimos años, reportando siete grandes categorías. Consideramos que dos de ellas son de relevancia para nuestra investigación: desarrollo y tendencias en el uso de teorías, y avances en la comprensión del razonamiento visoespacial.

Dentro de las aportaciones teóricas encontramos: Niveles de Razonamiento de Van Hiele, Espacios de Trabajo Geométrico de Kuzniak (2004), Duval, entre otros. Ha sido también de nuestro interés conocer diferentes posturas acerca del papel que juega el razonamiento visoespacial (Healy y Powell, 2013) en el desarrollo del pensamiento geométrico, encontrando diferentes términos para referirse a éste, tales como visualización (Clements, 2012), pensamiento espacial (Newcombe y Stieff, 2012), entre otros. Tienen en común la habilidad de imaginar ya sea de manera estática o dinámica objetos y sus interacciones.

Figura 1. Niveles de razonamiento de Van Hiele. Elaboración propia con base en Alfonso (2003)

2.1 La visualización

En este apartado nos centraremos en la noción de visualización mencionada por diversos autores, por considerar que es fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico. Durante los últimos años, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas han aparecido teorías cognitivas cuyos conceptos básicos no tienen el mismo significado, a pesar de que utilizan terminología parecida; esto sucede con nociones como visualización, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento o visión espaciales (Torregosa (2007).

Duval (1998) menciona que "Enseñar geometría es más complejo y comúnmente menos exitoso que enseñar operaciones numéricas o álgebra elemental; entonces, ¿por qué enseñar geometría a todos los estudiantes? O más aún, ¿por qué enseñar geometría?" (p. 37).

Para dar respuesta a este tipo de cuestionamientos, Duval explica que se debe considerar la complejidad cognitiva de la actividad geométrica y que ésta considera tres procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas:

> Visualización: proceso de considerar las representaciones espaciales, las exploraciones heurísticas de una situación compleja y para ilustrar una proposición o enunciado.
>
> Construcción mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como modelo en la que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que los representan.

Razonamiento: en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración y explicación.

Los tres procesos se pueden trabajar de manera separada, de tal forma que la visualización no dependa de una construcción: hay acceso a las figuras, de cualquier manera, que hayan sido construidas. Y aun si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas.

"La visualización generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual" (Hershkowitz, 1989, p. 75). Tal es así que es un componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por otra parte, una imagen visual, en virtud de su concreción, "es un factor esencial para crear la sensación de auto evidencia e inmediatez" (Fischbein, 1987, p. 101).

Zazkis *et al*. (1996) describen a la visualización como "el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos" (p. 441).

Cantoral y Montiel (2002) mencionan "La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta" (p.2).

La revisión bibliográfica realizada nos ha permitido dar cuenta de que hay evidencia acerca de una problemática relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en distintos niveles. Aunque socialmente se acepta que es difícil aprender y enseñar matemáticas, asumimos que solamente la investigación en el campo de la Matemática Educativa podrá darnos los elementos para tomar acciones y decisiones con sustento en ese terreno.

Otro aspecto a señalar de la revisión es que se ha podido detectar cómo los diferentes enfoques teóricos se han planteado el problema de estudiar el razonamiento geométrico, estableciendo ya sea niveles, procesos o etapas que den indicios del razonamiento geométrico de las personas. Además, podemos identificar que a pesar de que los enfoques que se incluyeron en esta revisión centran su atención en el razonamiento o pensamiento geométrico, cada uno lo hace analizando diferentes aspectos. Sin embargo, identificamos en común el importante papel que se le asigna a la interacción con la representación de los objetos geométricos.

3. Fundamentación teórica

3.1 Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

Dada la problemática planteada en los apartados anteriores y las características de nuestra propuesta, tomaremos como base algunos constructos teóricos que propone la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013).

La teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional. Dado que este conocimiento se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor (Cantoral, 2013, p. 62).

Abundando sobre este tópico:

> La socioepistemología, como sistema teórico para la investigación en Matemática Educativa, se ocupa específicamente del problema que plantea la conformación del saber matemático. Es importante precisar que en este enfoque asumimos la legimitidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico y culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana (Cantoral, 2013, p. 26).

El papel del profesor: cambio de relación con el saber

Bajo este enfoque teórico el papel del profesor es fundamental, Montiel y García (2007) lo mencionan:

> El papel del profesor en esta perspectiva es mucho más activo y propositivo, pues sobre él o ella recae más la responsabilidad del diseño y coordinación de las situaciones de aprendizaje. Actualmente se considera al profesor como un profesional reflexivo, que decide, diseña, aplica y experimenta estrategias de acción para lograr el aprendizaje de sus alumnos. De manera que aprender matemáticas no se reduce a recordar fórmulas, teoremas o definiciones para resolver problemas mediante la imitación de las explicaciones del profesor en clase o con apego a los métodos ilustrados en los textos escolares. (p. 6)

La teoría socioepistemológica propone "un cambio en la centración: dejar de analizar exclusivamente a los conceptos matemáticos para empezar a analizarse juntamente con las prácticas que acompañan a su producción y que hacen posible su trascendencia de una generación a otra" (Cantoral, 2013, p. 46), precisando que la descentración del objeto no implica su abandono, como se muestra en la Figura 2.

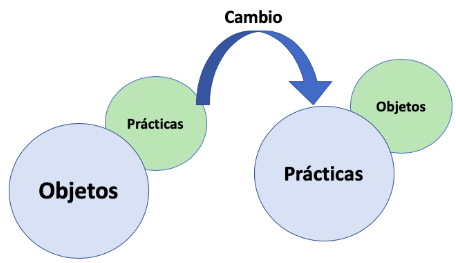


Figura 2: Representación gráfica de la descentración del objeto. Elaboración propia, basada en Reyes-Gasperini (2016)

En la socioepistemología se sostiene que

> Al momento de introducir el saber al aula se producen discursos que facilitan la comunicación de los conceptos y procedimientos matemáticos y en consecuencia el saber se *despersonaliza y descontextualiza*. En este proceso que se permite la formación de consensos sobre qué y cómo enseñar, que se alcanzan a costa de una pérdida en el sentido y significado original del saber, reduciéndolo a temas aislados, cuidadosamente secuenciados denominados "contenidos" o "unidades temáticas" de una asignatura. Estos discursos, que validan la introducción del saber matemático al sistema educativo, y que legitiman un nuevo sistema de razón, reciben el nombre genérico de discurso Matemático Escolar (dME) y son vistos como medio para lograr una participación consensada en el ámbito didáctico (Cantoral, 2013, p. 26).

Es este dME lo que lleva a los docentes a repetir las mismas clases aun con escasos logros en el aprendizaje de sus estudiantes.

4. La propuesta

Como se mencionó al inicio del capítulo, nuestro interés es elaborar una propuesta encaminada a desarrollar el pensamiento geométrico de los profesores de matemáticas de secundaria mediante la confrontación del aprendizaje personal y colectivo. Para lo cual se han diseñado, al momento, dos situaciones de aprendizaje en el sentido en que las plantea Cantoral (2013), donde menciona:

> El sentido que damos al término situación proviene de la Psicología, para la cual la expresión "estar en situación" es utilizada para describir el estado que vive el individuo cuando asume plenamente el rol que la situación provoque. Así se utilizan las expresiones: "participar de una situación de diálogo", "ser parte de una situación de entrevista", "vivir una situación de confrontación", "estar en situación de aprendizaje", y así un largo etcétera.
>
> Como se puede advertir, hay un doble uso del término situación en la descripción anterior, primero como el dispositivo que desata la acción del individuo (la situación) y luego como el propio estado que induce el diseño (estar en situación).

La Situación de aprendizaje, es una herramienta didáctica que propicia en el profesor la problematización de la matemática escolar: cuestiona el estatus de la matemática como una verdad única y como un conocimiento acabado, para admitir que es susceptible de construcción y, por lo tanto, de resignificación (Reyes-Gasperini, 2016).

4.1 Situaciones de aprendizaje propuestas

Las dos situaciones diseñadas al momento tienen las siguientes características

- Promueven la estimación
- Se abordan contextos extramatemáticos
- Se utilizan modelos geométricos para dar explicaciones de la situación
- Consideran el uso de materiales manipulables y tecnología

En ambas situaciones, se trata de dar solución a cuestionamientos no típicamente escolares, en donde los profesores tengan que poner en juego su pensamiento geométrico. Se busca que el profesor reconozca que, si bien algunas tareas son de una naturaleza, por ejemplo, algebraica o aritmética, se pueden trabajar de otras formas de interacción matemática con el fin de desarrollar una diversidad de saberes.

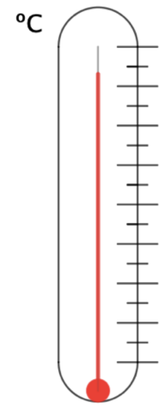
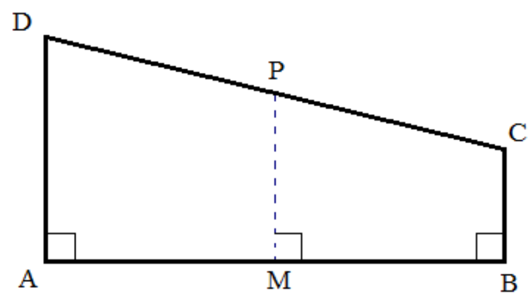
Estimando la temperatura. La actividad consiste en que, conocidas las temperaturas de dos lugares, ¿será posible estimar la temperatura de un punto que esté entre ellos?, ¿qué consideraciones se tienen que tomar? Se pone a discusión si es posible diseñar un mecanismo que dé solución al planteamiento inicial. La actividad considera el uso de material manipulable, así como un *applet* de *GeoGebra*.	
La media artimética La actividad inicia con el planteamiento de una situación, formulada a partir de una gráfica de barras proporcionada por el INEGI, en la cual están representados los datos arrojados por los censos de población realizados en nuestro país en los últimos cincuenta años. Para resolver la situación se requiere usar una interpretación geométrica de la media aritmética de dos números. Posteriormente se usan materiales manipulables para buscar la relación geométrica entre dos cantidades y su media aritmética. Finalmente, se usa el *software GeoGebra* para estudiar las relaciones que se conservan invariantes en las figuras construidas con el material manipulable.	

Tabla 1. Situaciones de aprendizaje propuestas

5. Conclusiones

Las dos situaciones de aprendizaje propuestas se han puesto en escena con grupos reducidos de profesores; los maestros han manifestado que el trabajar con situaciones no típicamente escolares en donde se pongan en uso diferentes nociones geométricas, en algunos casos, resulta desafiante pues no están acostumbrados a ello. Además, advierten que si se quisiera llevar estas mismas situaciones al aula, evidentemente tendrían que sufrir adaptaciones con el fin de ajustarse a los tiempos de clase y planeación de los cursos, lo cual es una constante preocupación en ellos.

Actualmente se está diseñando un taller para profesores de matemáticas de secundaria en donde se pongan en escena las situaciones de aprendizaje de donde se puedan recabar datos. Nos interesará analizar las producciones matemáticas de los profesores para reconocer momentos de confrontación-resignificación.

Referencias

Afonso, M. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de la Laguna. España.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002) *Visualización y pensamiento matemático*. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. doi: 10.12802/relime.13.1810

Cantoral, R., y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16*(2), 694-701.

Duval R. (1998) Geometry form a cognitive point a view. In: C. Mammana and V. Villani (eds.). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51), Dordrecht/ Boston Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Education Approach*. Dordrecht, Holland: Reidel.

Healy, L., y Powell, A. (2013). Understanding and overcoming “disadvantage” in learning mathematics. In: M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. Leung (Eds.), *Third international Handbook of Mathematics Education* (pp. 69-100). International Handbooks of Education. New York: Springer.

Hershkowitz, R. (1998). Reasoning in Geometry. Section I. About Reasoning in Geometry. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21th Century: An IMCI study* (pp. 29-36). Nethertland: Kluwer Academic Publishers.

Kuzniak, A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. (Note pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris, France : Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII.

Reyes-Gasperini, D., & Cantoral, R. (2016). Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa? *Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación*, *2*(11).

Secretaría de Educación Pública (2017). *Plan y programas de estudio*. Educación Secundaria, México: SEP.

Sinclair, N., Bussi, M. G. B., De Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), 691-719.

Teachers College Columbia University (2012). *Mathematical Modeling Handbook*. Consultado el 08/01/2019 en http://www.iitgn.ac.in/mcm/cd/Mathematical%20Modelling%20Handbook/pdf/Modeling_Handbook_Full.pdf

Torregrosa G. (2007) *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* *10*(2), 275-300.

Zazkis, R., *et al*. (1996) Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 435-457.

12 Enseñanza del uso de la tecnología como herramienta para promover la creatividad en un acercamiento sociocultural del aprendizaje

Fernando Hitt[1]

Resumen

En este escrito, queremos enfatizar el uso de la tecnología como herramienta para fortalecer la creatividad en matemáticas en la resolución de problemas no rutinarios, ligada al trabajo en colaboración desde una perspectiva vytgoskiana. El acercamiento sociocultural del aprendizaje en un medio tecnológico requiere de interpretaciones puntuales tanto del trabajo de Vygotsky, como el de sus seguidores en épocas más recientes, que muestren cómo promover el pensamiento divergente ligado a la creatividad en el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de problemas, y enseguida el convergente para proponer una solución al problema planteado. Queremos resaltar aspectos teórico-prácticos que sirvan para guiar el aprendizaje y la creatividad y la importancia del diseño de actividades en un medio tecnológico acorde al marco teórico.

Palabras clave: resolución de problemas no rutinarios, creatividad, pensamiento divergente, pensamiento convergente, desarrollo de actividades encadenadas en un entorno tecnológico.

Résumé

Dans ce manuscrit, nous voulons mettre l'accent sur l'utilisation de la technologie comme outil pour renforcer la créativité en mathématiques dans la résolution de problèmes non routiniers, liés au travail collaboratif dans une perspective vytgoskienne. L'approche socioculturelle de l'apprentissage dans un environnement technologique nécessite des interprétations spécifiques à la fois du travail de Vygotsky et de celui de ses disciples dans des temps plus récents, montrant comment promouvoir une pensée divergente liée à la créativité dans l'apprentissage des mathématiques en résolution problèmes puis convergent pour proposer une solution au problème. Nous voulons mettre en évidence les aspects théoriques-pratiques qui servent à guider l'apprentissage et la créativité et l'importance de concevoir des activités dans un environnement technologique selon le cadre théorique.

Mots clés: résolution de problèmes non-routiniers, créativité, pensée divergente, pensée convergente, élaboration d’activités enchainées dans milieu technologique.

[1] Université du Québec à Montréal, Canada.

Abstract

In this document, we want to emphasize the use of technology as a tool to strengthen creativity in mathematics in solving non-routine problems, linked to collaborative work from a Vytgoskian perspective. The sociocultural approach to learning in a technological environment requires specific interpretations of both Vygotsky's work and that of his followers in more recent times, showing how to promote divergent thinking linked to creativity in learning mathematics in problem-solving and then convergent thinking to propose a solution to the problem. We want to highlight theoretical-practical aspects that serve to guide learning and creativity and the importance of designing activities in a technological environment according to the theoretical framework.

Keywords: non-routine problem solving, creativity, divergent thinking, convergent thinking, development of chained activities in a technological environment.

1. Introducción

A principios del siglo XX, los psicólogos se interesaron en el estudio de la inteligencia ligada a la creatividad y a la resolución de problemas. En esta efervescencia, Wallas en 1926 propone un modelo ligado a la resolución de problemas. Wallas, en su modelo sobre el proceso general de resolución de un problema, propone cuatro etapas:

1. La preparación
2. La incubación
3. La iluminación
4. La verificación

Debemos señalar que los problemas que utilizaban en esa época para analizar la inteligencia eran de tipo *puzzle* (rompecabezas), por ejemplo, el problema de construir cuatro triángulos equiláteros con nueve cerillos, y una vez construidos, solicitar nuevamente la construcción de cuatro triángulos equiláteros, pero esta vez con seis cerillos.

Estas cuatro etapas del modelo de Wallas llamaron la atención de los matemáticos, y así Hadamard (1945) se pronunció en favor de esta caracterización, enfatizando la segunda etapa como característica de los matemáticos que conservan en memoria un problema durante periodos muy largos, dejando al subconsciente trabajar en la resolución de un problema matemático, hasta que la iluminación (el *eureka*) haga acto de presencia.

Durante medio siglo de discusión entre los psicólogos sobre qué es la inteligencia y cómo medirla, se proporcionaron definiciones diferentes sin llegar a un consenso. Guilford (1950; 1967) llegó a detectar 120 tipos de habilidades que lo llevaron a su modelo multidimensional sobre la inteligencia. En él, Guilford integra las nociones de producción divergente (ligada a la creatividad) y producción convergente (ligada a la integración del conocimiento). Este agrandamiento de la problemática trajo consigo la departamentalización, generando una corriente en los años cuarenta del siglo XX ligada a preocuparse por desarrollar la inteligencia en el aula en edades tempranas (Brownell, 1942; 1947), con ella –la inteligencia– ligada a la resolución de problemas aritméticos. Es así que nacen también las orientaciones sobre la resolución de problemas en la escuela secundaria y preuniversitaria con el modelo de Polya (1945):

1. Comprender el problema,
2. Concebir un plan,
3. Poner el plan a ejecución,
4. Examinar la solución obtenida.

El paso del estudio de la inteligencia desde la psicología general al contexto del estudio de la inteligencia en el aula de matemáticas promovió el abandono de los problemas de tipo *puzzle* y el diseño de otro tipo de problemas ligados al aprendizaje de las matemáticas.

Por el lado del avance social, aparece el modelo de Osborn (1959) quien, desde una perspectiva de la vida diaria, proporciona un modelo para la resolución de problemas. Su modelo (orientación del proceso) para resolver un problema, consiste en lo siguiente:

1. Orientación: comprender el problema,
2. Preparación: selección de datos,
3. Análisis: relacionar los datos,
4. Ideación: producción de ideas (*brainstorming*)
5. Incubación: madurar las ideas dejando trabajar al subconsciente,
6. Síntesis: creación de la solución,
7. Verificación: evaluación de la solución.

Si realizamos una comparación entre los tres modelos, el de Wallas, el de Polya y el de Osborn, la noción de problema es diferente. Para Wallas, el problema debiera ser de tipo *puzzle* para que fuera fácilmente entendible por un auditorio grande; él estaba centrado en analizar la inteligencia en general. Para

Polya, en su obra de 1945, el problema pareciera de corte cerrado[2], un ejemplo que proporciona es calcular la diagonal entre dos esquinas opuestas de un aula (considerando que los alumnos solamente han visto la relación de Pitágoras en el plano). En cambio, para Osborn (un hombre de negocios), el problema podría tener varias soluciones (p.e., dependiendo de cómo se seleccionen los datos), además de la necesidad de producir varias ideas (brainstorming) antes de la incubación. Así, podemos concluir que, dependiendo de la tarea, un modelo es más pertinente que otro. Por ejemplo, si estuviéramos en el contexto de una matemática realista, sería más apropiado utilizar el de Osborn.

Al pasar a la enseñanza, esos modelos han servido para proporcionar a los alumnos ideas generales en la resolución de problemas; sin embargo, el trabajo de Schoenfeld (1985) muestra contundentemente que no debemos fiarnos en seguir un modelo de corte lineal cuando se trata de resolver problemas no rutinarios, ya que los sujetos en el estudio de Schoenfeld y en general en la resolución de problemas no rutinarios, no siguen *un patrón* (esto va en la línea de Polya de 1954 y 1961). Schoenfeld (1985) solicitó la resolución de un problema y observó el tiempo que pasaba un alumno en alguna de las etapas y cuándo cambiaba de una etapa a otra (ver Figura 1).

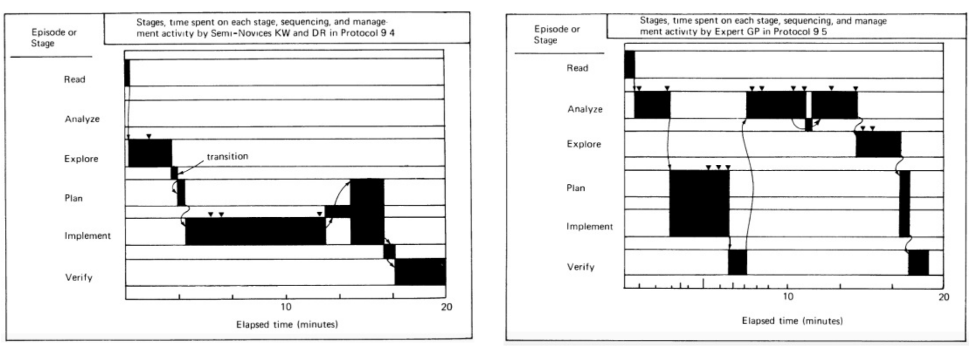


Figura 1. Tomado de Schoenfeld (1985, figuras 9.3B y 9.4B, páginas 303 y 312)

[2] La discusión sobre el trabajo de Polya la hemos restringido a su obra *How to solve it* (1945). Los libros posteriores escritos por Polya, *Mathematics and plausible reasoning* (1954) y *Mathematical discovery* (1961), muestran una gran riqueza en el aprendizaje de las matemáticas que no estaba plasmada en su obra de 1945 y en donde la creatividad está mucho más presente que en la obra de ese año.

En los diferentes estudios que hemos mencionado en esta introducción, vemos que los intereses de los investigadores coinciden en analizar la inteligencia, la creatividad y la resolución de problemas centrados en el trabajo individual. Guilford (1950) enfatiza la importancia de promover la creatividad en la formación de los ciudadanos, rescatando la idea de Dewey (1909) sobre la inteligencia social. Por ejemplo, Thorndike (1920), también interesado en esta noción, la define:

> By social intelligence is meant the ability to understand and manage men and women, boys and girls –to act wisely in human relations" (p. 228).
>
> Por inteligencia social se entiende la capacidad de comprender y gestionar hombres y mujeres, niños y niñas, para actuar sabiamente en las relaciones humanas (p. 228).

Guilford[3] (1950) insiste:

> Probablemente sea solo la idea del común de la gente que la persona creativa esté dotada de una cualidad peculiar que las personas comunes no tienen. Esta concepción puede ser descartada por los psicólogos, muy probablemente por consentimiento común. La convicción psicológica general parece ser que todos los individuos poseen en algún grado todas las habilidades, excepto la aparición de patologías. Por lo tanto, se pueden esperar actos creativos, no importa cuán débiles o infrecuentes sean, de casi todos los individuos. La consideración importante aquí es el concepto de continuidad (p. 446).

Analizando esta idea de continuidad, de creatividad y de inteligencia social, podemos mencionar el trabajo de Bourdieu (1980), citado por Hitt & Quiroz (2019a), en donde Bourdieu aborda la construcción de *habitus,* no en el sentido de automatismos sin reflexión, sino como estructuras cognitivas que permiten abordar problemas de la vida diaria. El *habitus* es construido en un medio sociocultural. Así, Bourdieu[4] (1980) menciona:

---

[3] It is probably only a layman's idea that the creative person is peculiarly gifted with a certain quality that ordinary people do not have. This conception can be dismissed by psychologists, very likely by common consent. The general psychological conviction seems to be that all individuals possess to some degree all abilities, except for the occurrence of pathologies. Creative acts can therefore be expected, no matter how feeble or how infrequent, of almost all individuals. The important consideration here is the concept of continuity (p. 446).

[4] Les conditions associées à une classe particulière de conditions d'existence produisent des *habitus*, systèmes de *dispositions* durables et transposables, structures structurées

> El condicionamiento asociado a una clase particular de condiciones de vida producen *habitus*, sistemas de disposiciones duraderos y transponibles, estructuras estructuradas predispuestas a funcionar como estructuras estructurantes, es decir, como principios generativos y organizadores de prácticas y de representaciones que pueden estar objetivamente adaptadas a su propósito, sin asumir el objetivo consciente de los fines y el control expreso de las operaciones necesarias para alcanzarlos, objetivamente "establecidos" y "regulares" sin ser de ninguna manera el producto de la obediencia a las reglas, y ser todo esto, orquestado colectivamente sin ser el producto de la acción organizadora de un director de orquesta (p. 91).

En la sección siguiente, queremos señalar la importancia de reflexionar en la enseñanza desde un punto de vista sociocultural, enfocando nuestra atención al desarrollo de una inteligencia social ligada a un *habitus*, es decir, promover la creatividad y la resolución de problemas desde la perspectiva de un continuo; centrado en un trabajo en colaboración en el aula de matemáticas. Así, el *habitus*, en cierta manera, estará directamente ligado al desarrollo de una "inteligencia social en el aula de matemáticas".

2. Aprendizaje en colaboración desde una perspectiva sociocultural

Iniciaremos con el trabajo de Vygotsky (1932) con relación al concepto de "Zona de desarrollo próximo" que, en principio, tiene que ver con el aprendizaje en colaboración. Para Vygotsky, de acuerdo a Kozulin (Vygotsky, p. 186): "…el aprendizaje no se produce en una situación de aislamiento, sino en una situación de colaboración…". La ZPD, como la define Vygotsky, es "distancia que existe entre el nivel de un individuo en la resolución de problemas cuando los resuelve solo y cuando es guiado por otra persona más competente".

Esta definición es claramente entendible en el contexto de los niños pequeños que son guiados por los adultos o un profesor. El niño con menor conocimiento evoluciona acortando la distancia entre su conocimiento sobre un contenido dado y el conocimiento del adulto. Sin embargo, considerando al aula

---

prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire en tant que principes générateurs et organisateurs de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement adaptées à leur but sans supposer la visée consciente de fins et la maîtrise expresse des opérations nécessaires pour les atteindre, objectivement « réglées » et « régulières » sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, et étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre (p. 91).

de matemáticas o de ciencias como una micro sociedad, el trabajo en colaboración no necesariamente se realiza con adultos; por ejemplo, el trabajo en equipo y la discusión en gran grupo son parte del trabajo en colaboración. Tampoco podríamos asegurar, en general, que existe una distancia entre un estudiante y otro con respecto a un conocimiento dado.

Los estudiantes en igualdad de circunstancias podrían contar con una concepción, digamos a la manera que la define Balacheff & Gaudin (2010), que consiste en un conocimiento ligado a cierto tipo de problemas, operaciones, sistemas de signos y un elemento de control sobre la actividad matemática ligada a esos problemas. Así, es difícil de concebir la noción de distancia cuando se aplican estas ideas al trabajo en equipo en el aula. Debemos aclarar que Vygotsky (1932) incluso menciona en su introducción el trabajo de Durkheim (1898) sobre las representaciones colectivas, generando en Francia la investigación sobre las representaciones sociales que en cierta medida están ligadas, finalmente, al trabajo de Bourdieu (1980). Precisando, lo que queremos discutir en este capítulo es sobre la creación de un *Medio de Desarrollo del Conocimiento* (MDC a partir de ahora) para el desarrollo de un tipo particular de *habitus* ligado a una inteligencia social.

Bajo el enfoque que le queremos proporcionar al aula de matemáticas o de ciencias como una micro sociedad, nos interesa también relacionar las ideas de Ilyenkov (1977), quien, haciendo referencia a Espinoza, señala[5]:

> Pensar no es el producto de una acción, sino la acción misma, considerada en el momento de su ejecución… (p. 21).

Esto nos lleva a pensar en las corrientes actuales sobre “Embodied cognition”[6] (conocimiento corporal), en donde mente y cuerpo forman el conocimiento.

Estas citas y definiciones en aislado podrían dar la impresión de colocar a las personas o individuos como constructores aislados sobre su conocimiento. Sin embargo, estas definiciones si las pensamos al interior de una teoría sociocultural como la vygotskiana, podemos ponerlas en contexto escolar, considerando el aula de matemáticas y ciencias como una micro sociedad. De acuerdo a Kozulin (2000), Vygotsky utiliza la actividad como mecanismo

---

[5] Thinking is not the *product* of an action but the *action itself*, considered at the moment of its performance (p. 21).

[6] Embodied cognition is the theory that many features of cognition, whether human or otherwise, are shaped by aspects of the entire body of the organism (Wikipedia).

explicativo de la conciencia, Kozulin (p. 25) afirma sobre Vygotsky: *Un individuo sólo adquiere consciencia de sí mismo en las interacciones con otros individuos y a través de ellas*.

Bajo este enfoque vygotskiano, para la construcción del conocimiento, la comunicación entre los estudiantes en el aula de matemáticas y de ciencias es imprescindible. Aún más, de acuerdo con el trabajo de Voloshinov sobre la construcción del signo, podemos mencionar lo expresado por Hitt & Quiroz (2017, p. 7): "Voloshinov considera que la comunicación es el motor principal para la construcción del signo". Voloshinov[7] insiste:

> Los signos pueden surgir solo en territorio interindividual. Es un territorio que no se puede llamar "natural" en el sentido estricto de la palabra: no surgen signos entre dos miembros de la especie Homo sapiens. Es esencial que los dos individuos se organicen socialmente, que compongan un grupo (una unidad social); solo entonces en este medio, pueden tomar forma los signos entre ellos (p. 12).

Es aquí donde emerge el importante rol que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático. Nuevamente, considerando el aula como una micro sociedad, el uso de representaciones en la comunicación entre alumnos y con el profesor es imprescindible para la construcción de conceptos matemáticos y resolución de problemas no rutinarios.

La comunicación debe considerarse, bajo esta perspectiva, como una actividad rica que incluye el lenguaje, las representaciones con sus diferentes características (interna-externa), el lenguaje corporal (gestos) y el uso de instrumentos tecnológicos (Arzarelo, 2006; Bartolini, Bussi & Mariotti, 2008).

Recordando que nuestro objetivo es la creación de un MDC en el aula de matemáticas, podemos mencionar nuevamente a Vygotsky (1932) citado por Wertsch (1988): "La instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo. Entonces, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentra en proceso de maduración" (p. 87).

La instrucción, después de un siglo de las ideas de Vygotsky, ha tomado

---

[7] Signs can arise only on *interindividual territory*. It is territory that cannot be called "natural" in the direct sense of the word: signs do not arise between any two members of the species *Homo sapiens*. It is essential that the two individuals be *organized socially*, that they compose a group (a social unit); only then can the medium of signs take shape between them (p. 12).

muchas formas. Nuestra intención es la de promover la interacción entre los alumnos en el aula, que entre ellos mismos despierten el funcionamiento de factores en la zona de desarrollo próximo y que el adulto, en este caso la profesora o el profesor de matemáticas, sirva como guía en la construcción del signo y de conceptos en general, en una instrucción de reinvención guiada a la manera de Freudenthal (1991).

3. Rol de las representaciones en un acercamiento sociocultural del aprendizaje

La discusión anterior sobre la importancia del uso de las representaciones en la comunicación entre los alumnos en el aula de matemáticas nos lleva a la búsqueda de una definición de representación apropiada en este contexto. Davis, Young & McLoughlin (1982) presentan la siguiente:

> A representation may be a combination of something written on paper, something existing in the form of physical objects, and a carefully constructed arrangement of ideas in one's mind (p. 54).
>
> Una representación puede ser una combinación de algo escrito en papel, algo existente en forma de objetos físicos y una disposición cuidadosamente construida de ideas en la mente (p. 54).

Esta definición nos recuerda la cita de Ilyenkov sobre Spinoza. Es nuestro propósito de utilizar esta definición de representación en el contexto del aula, pensada como una micro sociedad y como uno de los elementos a considerar para la construcción de un "Medio de Desarrollo del Conocimiento" (MDC).

En la Figura 2 hemos adaptado la figura utilizada por Hitt & Quiroz (2017). En ella, no sólo expresamos la idea de que un conocimiento está ligado a la mente y al cuerpo, sino también al medio en donde se realiza el desarrollo del conocimiento (MDC). También expresa que una representación está ligada a una concepción y sus representaciones van más allá del individuo. Metafóricamente, los individuos son triángulos, la concepción y las representaciones asociadas a la concepción en un individuo están en una esfera que contiene al individuo y que se interseca con las concepciones y representaciones de otros individuos en un proceso de comunicación. La elipse constituye el aula de matemáticas en donde otras representaciones sobre un concepto dado podrían emerger junto con la concepción y las representaciones del profesor, y el resto, la representación social aceptada en la sociedad en general.

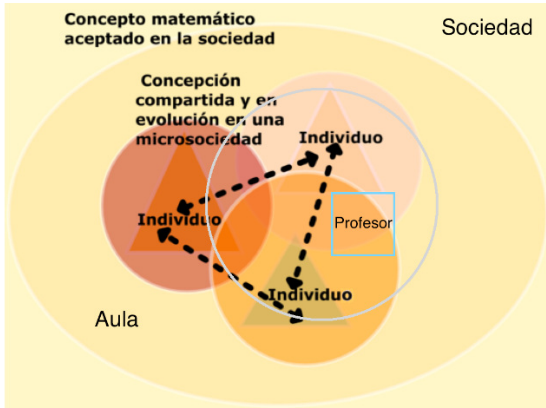


Figura 2. Figura adaptada de Hitt & Quiroz (2017)

Para crear el MDC se ha desarrollado el método de enseñanza ACODESA, que incluye cinco etapas bien definidas (ver Hitt 2007; Hitt & González-Martín 2015; Hitt, Saboya & Cortés, 2017; Hitt & Quiroz, 2017; Hitt & Quiroz, 2019a y Hitt & Quiroz, 2019b). Así, en el aula de matemáticas, frente a una actividad, podemos resumir las acciones de los estudiantes en:

1. Trabajo individual
2. Trabajo en equipo
3. Discusión en gran grupo
4. Autorreflexión (reconstrucción individual de lo realizado en clase)
5. Proceso de institucionalización (de parte del profesor).

Bajo este marco teórico general inmerso en un acercamiento sociocultural del aprendizaje, queremos ahora realizar un análisis sobre la visualización matemática y el rol que juega en la construcción de un *habitus* y, por consecuencia, en la resolución de problemas en un medio tecnológico.

4. La tecnología como herramienta para promover la creatividad en el aula de matemáticas

La literatura en didáctica de las matemáticas (Zimmermann & Cunningham, 1991; Eisenberg & Dreyfus, 1991; Vinner, 1989; Hitt, Soto y Quiroz, 2019, entre otros) señala la importancia de la visualización matemática y sus repercusiones en el *curriculum*.

Precisamente en la década de los noventa hubo una explosión de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias. Bajo ese impulso tecnológico, se empezaron a construir paquetes de cómputo para modelar fenómenos físicos y mostrar en pantalla diferentes ventanas con diferente tipo de representaciones del mismo objeto matemático. Al mismo tiempo, se refinaron teorías sobre representaciones y construcción del conocimiento, teorías (por ejemplo, la de Duval 1995, 2006) que hacían un énfasis especial en la actividad de pasar de una representación a otra y sobre la importancia de analizar variables visuales en una representación gráfica para hacerlas corresponder con unidades significativas de una representación algebraica (Duval, 1995).

A finales del siglo XX los investigadores empezaron a encontrar otro tipo de problemas: el uso de la tecnología requiere de la construcción de esquemas de acción sobre el artefacto en uso (génesis instrumental según Rabardel, 1995), que permitan la interpretación y la utilización de diferentes representaciones en la resolución de problemas. Ejemplos de ese tipo de problemas los podemos analizar en el trabajo de Guin & Trouche (1999) o el de Tall (2000). Veamos con un poco más de precisión cuál era el tipo de problema ligado a la resolución de problemas en un medio tecnológico; tomaremos como ejemplo el proporcionado por Guin et Trouche (1999, pp. 197-198). En una experimentación con dos grupos de alumnos preuniversitarios, se les solicitó la siguiente actividad, 50 alumnos utilizando calculadora y 50 alumnos sin calculadora:

$$\text{“Calcular } \lim_{x \to \infty} ln\, x + 10 \sin x\text{”}$$

Los resultados fueron los siguientes. Con calculadora y representaciones gráficas: 10% de éxito, y sin calculadora: 100% de éxito.

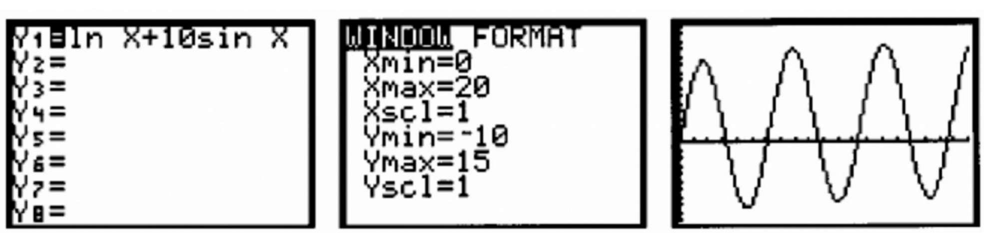


Figura 3. Representación de la función *ln(x) + 10 sin(x)* (Guin & Trouche, 1999)

Es con estos resultados de investigación que el marco teórico de Rabardel (1995) sobre la génesis instrumental toma fuerza. La apropiación de la tecnología requiere de procesos de construcción de esquemas que relacionan las acciones del sujeto al artefacto, *proceso de instrumentalización* (en nuestro caso, sujeto-calculadora), y el artefacto impone maneras de uso al sujeto (en nuestro caso, calculadora-sujeto), *proceso de instrumentación*.

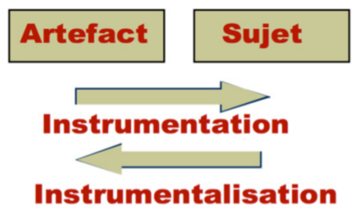


Figura 4. Génesis instrumental ligada a los procesos de instrumentación e instrumentalización (Rabardel, 1995)

Analizando el ejemplo de Guin & Trouche (1999), vamos a introducirnos más a fondo en nuestra problemática. La actividad de Guin & Trouche en un medio tecnológico implica la lectura de gráficas. En el caso de los estudiantes en la experimentación de Guin & Trouche, pareciera que el problema es más complejo que el solicitar varias pantallas.

Desde el punto de vista de Duval necesitaríamos tener a la vista la representación gráfica y fijar nuestra atención en las variables visuales pertinentes para asociarlas a las unidades significativas (ver Figura 4).

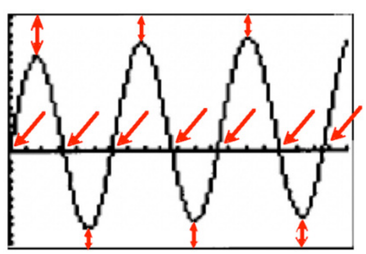


Figura 5. Representación de la función *ln(x) + 10 sin(x)* y variables visuales

No parece evidente que las variables visuales que podemos observar en la representación gráfica nos proporcionen una idea de asociación a las unidades significativas de la expresión algebraica.

Si analizamos desde el punto de vista de Krutetskii (1976), citado por Hitt, Soto, Quiroz (2019), él considera que un alumno "visualizador", al observar una figura se hace una representación mental de la situación y es capaz de transformarla mentalmente para proporcionar una respuesta. En este caso, Krutetskii (1976) le proporciona una prioridad a las representaciones mentales. No sabemos, del 10 % de los alumnos que tuvieron éxito en el experimento de Guin & Trouche, si tenían o no habilidades de visualización a la manera de Krutetskii.

La discusión anterior nos lleva a intentar descubrir una definición más amplia sobre la visualización. Así, nos encontramos con una nueva definición sobre la visualización, proporcionada por Zimmermann & Cunningham (1991): visualizar está ligado a la producción de representaciones asociadas a lo observado por el alumno, ya sea desde un punto de vista mental o producciones en papel o computadora. Zimmermann & Cunningham (1991) consideran entonces importantes los procesos mentales junto con las producciones de los alumnos.

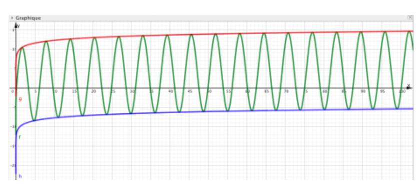
Regresando al problema de Guin & Trouche (1999), entonces nos parece importante revisar qué procesos son adecuados para proporcionar una respuesta. Iniciamos con el enunciado, "Calcular: $\lim_{x\to\infty}(ln\ x + 10 \sin x)$"; si utilizáramos la calculadora como en el caso de los estudiantes de Guin & Trouche, la representación gráfica no proporciona mucha información sobre las variables visuales. Es decir, tendríamos que realizar un proceso inverso: analizar la representación algebraica para obtener mayor información sobre las unidades significativas que podríamos asociar a las variables visuales.

Mentalmente podríamos realizar un tratamiento de la información en el registro algebraico, pasar de las unidades significativas del registro algebraico al gráfico y posteriormente proporcionar una respuesta (ver Figura 6).

$$\mathbf{-1 \le \sin x \le 1 \ \Rightarrow}$$

$$\mathbf{-10 \le 10 \sin x \le 10 \ \Rightarrow}$$

$$\mathbf{\ln(x) - 10 \le \ln(x) + 10 \sin x \le \ln(x) + 10 \ \Rightarrow}$$



$$\mathbf{\lim_{x\to\infty}(\ln(x) - 10) \le \lim_{x\to\infty}(\ln(x) + 10 \sin x) \le \lim_{x\to\infty}(\ln(x) + 10\,) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{+\infty \le \lim_{x\to\infty}(\ln x + 10 \sin x) \le +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}(\ln x + 10 \sin x) = +\infty}$$

Figura 6. Representación de la función *ln(x) + 10 sin(x)*

Para predecir un resultado, sería el concepto ligado al "Teorema de la torta" (o Teorema del sándwich) el que nos proporcione la idea intuitiva y formal para predecir que "cuando *x* se hace cada vez más grande, la función no tiene límite" o, en otras palabras que son de gran confusión para los estudiantes, que "el límite es igual a +∞".

En términos generales, podemos decir que se ha realizado una coordinación entre los objetos matemáticos y acciones fuera y dentro del medio tecnológico. Analicemos lo anterior con el acercamiento teórico de Vérillon & Rabardel (1995). De acuerdo con estos autores, el proceso de resolución (en este caso el cálculo del límite), nos obliga a realizar una interacción entre sujeto, objeto (en este caso resolución de un límite) e instrumento (en este caso calculadora o *GeoGebra*), es decir que el objeto ha pasado por un instrumento (S(i)-O) en términos del modelo de Vérillon & Rabardel (1995). Así, poco a poco en este proceso de resolución, la coordinación entre los diferentes componentes crea un esquema de acción que permite llegar a la solución.

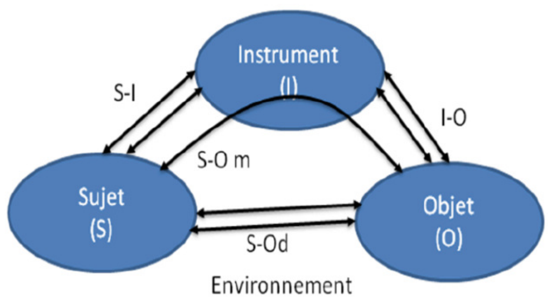


Figura 7. Interacción sujeto-instrumento-objeto (Vérillon & Rabardel, 1995, p. 85)

4.1 El NCTM (1988) y el desafío: ¿Pueden sus estudiantes de enseñanza media resolver este problema?

El NCTM de 1988, precisamente poco antes de que la visualización matemática se pronunciara como un elemento importante de desarrollar en los alumnos, apareció el *Yearbook de Álgebra* con un problema al final de cada capítulo, con la pregunta: ¿Pueden sus estudiantes de enseñanza media resolver este problema?

Uno de esos problemas es el siguiente (NCTM, p. 19). Encontrar los valores de *x* tal que

$$(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1.$$

4.2 Análisis a priori

El problema fue pensado para que los estudiantes siguieran un camino algebraico. Si el estudiante utiliza la tecnología, se está frente a la situación de la Figura 8.

$$(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$$

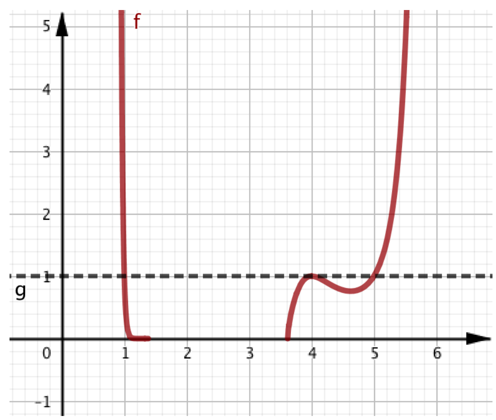


Figura 8. Representación de las dos funciones asociadas a la ecuación

Si consideramos que $f(x) = (x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20}$ y $g(x) = 1$ (Figura 8), un análisis de las variables visuales de la representación gráfica de la Figura 8, nos indica que *x = 1, x = 4* y *x = 5*, son solución de la ecuación *f(x) = 1=g(x)* (es decir *f(1)=1; f(4)=1; f(5)=1*). Prosiguiendo con el análisis desde un punto de vista tecnológico, dependiendo de la versión de *GeoGebra* y/o de la computadora, se podría caer en la situación de la Figura 9. En el caso de la primera columna de la Figura 9, pareciera que no hay solución a la ecuación al definir $f(x) = (x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20}$, sin embargo, si utilizamos una nueva función $f(x) = (x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} - 1$, con el resultado mostrado en la segunda columna de la Figura 9, podríamos estar contentos de que nuestra conjetura a partir del análisis visual de la Figura 8 coincida con el resultado proporcionado por *GeoGebra*.

$\boldsymbol{f(x) = (x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20}}$ $\boldsymbol{f(x) = (x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1}$

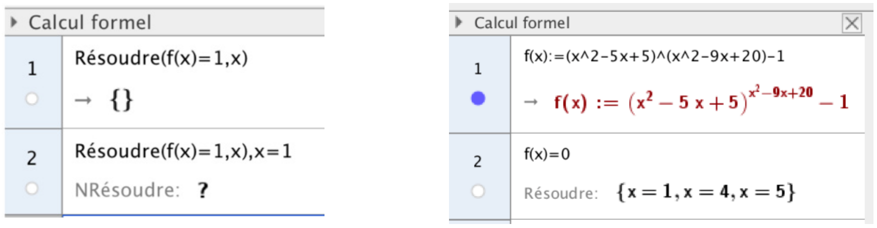


Figura 9. Resultado de la ecuación con dos versiones diferentes de *GeoGebra*

¿Debemos conformarnos con los resultados obtenidos en la segunda columna de la Figura 5, con el uso de la tecnología?

Siempre es necesario realizar una coordinación con los procesos algebraicos.

Ahora bien, si proponemos la función

$$f(x) = (x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20}$$

y queremos resolver la ecuación *f(x) = 1*, es necesario construir una estrategia de resolución. La estrategia es la de dividir el problema en varias etapas:

1) Resolver la ecuación $(x^2 - 5x + 5) = 1$, soluciones, *x = 1, x = 4*.

2) Resolver la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$, y verificar que las soluciones cumplan con $x^2 - 5x + 5 \neq 0$. Soluciones *x = 4, x = 5*.

3) Resolver $x^2 - 5x + 5 = -1$, y verificar que las soluciones (a lo más sólo puede haber dos soluciones) cumplan que $x^2 - 9x + 20 = \pm 2 \pm 4 \pm 6 \ldots$ Soluciones *x = 2, x = 3*.

Conclusión: desde un punto de vista algebraico: *x = 1, x = 2*, *x = 3, x = 4*, y *x = 5*, son soluciones de la ecuación *f(x) = 1*.

Esto nos coloca en una situación de contradicción entre los resultados obtenidos desde un punto de vista tecnológico y los resultados algebraicos. ¿Qué hacer en una situación como ésta? (en los datos que proporcionaremos en la sección siguiente, en una población de estudiantes de primer año de universidad hubo diferentes reacciones a una situación similar).

Podríamos regresar a *GeoGebra* y tratar de encontrar una explicación geométrica de la situación, ya que hasta aquí podríamos decir que hemos intentado analizar las variables visuales y correspondientes unidades significativas sin llegar a proporcionar una respuesta al enigma. La génesis instrumental nos permite explicar la construcción de esquemas de acción para apropiarse de la tecnología. Sin embargo, estamos frente a un fenómeno que exige una explicación profunda para disipar la contradicción entre los dos resultados obtenidos.

¿Cómo explicar esto desde un punto de vista visual?

Podemos utilizar la tecnología como herramienta en la resolución de problemas, que exige el paso a otra etapa más allá de la génesis instrumental; es decir, utilizar la tecnología como herramienta. Lo que proponemos es realizar un tratamiento de representaciones gráficas con *GeoGebra*, siguiendo una estrategia similar a la de lápiz y papel. Es decir, analizando cada una de las representaciones gráficas de los polinomios involucrados en la ecuación (ver Figura 10).

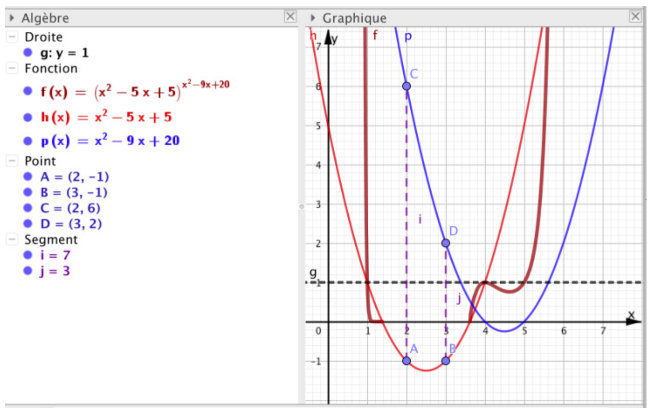


Figura 10. Representación de los polinomios involucrados en la ecuación

La Figura 10 nos muestra que el polinomio $h(x) = x^2 - 5x + 5$ tiene dos ceros para $x \cong 1.382$ *y* $x \cong 3.618$, y que el polinomio toma valores negativos para valores de x en el intervalo $]1.382, 3.618[$. Estos valores negativos, al ser elevados a una potencia positiva (de acuerdo a la representación gráfica del polinomio correspondiente), proporcionará valores complejos, excepto para *x = 2* y *x = 3*, se obtiene *f(2) = 1* y *f(3) = 1*. Así, podemos construir la siguiente secuencia de acciones (Figura 11) ligada al proceso de resolución.

Problema → representación gráfica → respuesta incompleta y retorno a la búsqueda de la solución algebraica → solución al problema desde un punto de vista algebraico, contradictorio a la solución gráfica → retorno al ambiente tecnológico en una búsqueda de estrategia visual para explicar el resultado → La función restringida al dominio de los números reales es discontinua y los puntos de la curva (2,1) y (3,1), son puntos

aislados de la curva y por tanto el paquete *GeoGebra* no logra representarlos en pantalla por las limitaciones del número de pixeles.

Figura 11. Secuencia en la resolución del problema, mostrando el paso de una representación a otra

Este proceso, si lo hubiera producido un individuo, podría esquematizarse, en forma general, con la figura de Vérillon & Rabardel (Figura 7), sin embargo, nuestra problemática está centrada en el aula de matemáticas como una micro sociedad para crear MDC. ¿Podríamos utilizar el mismo esquema Vérillon & Rabardel para modelar las acciones de los estudiantes resolviendo la misma actividad en el aula de matemáticas?

Antes de pasar a esta discusión, una vez que se ha encontrado una explicación visual, ¿es posible construir más problemas del mismo estilo, en donde se proceda a la inversa? Es decir, ¿es posible la construcción de polinomios de segundo grado con ciertas características que permitan la visualización parcial de algunas soluciones de una ecuación?

Precisamente, en una posición de una enseñanza de las matemáticas bajo un acercamiento del "Enquiry-based learning[8] (IBL)" (Aprendizaje basado en la indagación, PRIMAS, 2011) es posible generar actividades para encontrar nuevas ecuaciones con las características del problema planteado por el NCTM. Así, la actividad bajo un acercamiento de instrucción de reinvención guiada (Freudenthal, 1991), promovería la construcción de ecuaciones bajo un proceso como el mostrado en la Figura 12.

---

[8] Proyecto PRIMAS (2011): Inquiry Based Learning (IBL) is the term widely accepted to refer to a way of teaching and learning mathematics and science in which students are supposed to proceed in the way mathematicians and scientists actually work (p. 7).

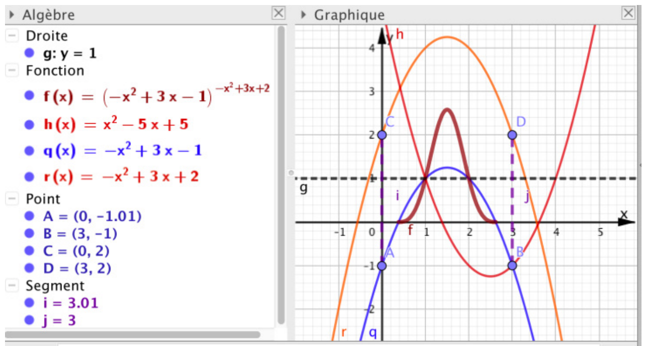


Figura 12. Construcción de la ecuación con soluciones reales *x = 0, x = 1, x = 2, x = 3*

La Figura 13 muestra el proceso de resolución desde un punto de vista algebraico.

Ahora bien, si proponemos la función

$$f(x) = (-x^2 + 3x - 1)^{-x^2+3x+2}$$

y queremos resolver la ecuación *f(x) = 1*, *x* variable real, es necesario construir una estrategia de resolución. La estrategia es la de dividir el problema en varias etapas:

1) Resolver la ecuación $(-x^2 + 3x - 1) = 1$, soluciones, *x = 1, x = 2*.

2) Resolver la ecuación $-x^2 + 3x + 2 = 0$, y verificar que las soluciones cumplan con $-x^2 + 3x - 1 \neq 0$. Soluciones $x = \frac{-\sqrt{17}+3}{2}$, $x = \frac{\sqrt{17}+3}{2}$.

3) Resolver $-x^2 + 3x - 1 = -1$, y verificar que las soluciones (a lo más sólo puede haber dos soluciones) cumplan que $-x^2 + 3x + 2 = \pm 2 \pm 4 \pm 6 \ldots$ Soluciones *x = 0, x = 3*.

Conclusión: desde un punto de vista algebraico: $x = \frac{-\sqrt{17}+3}{2}$, *x = 0, x = 1, x = 2, x = 3*, $x = \frac{\sqrt{17}+3}{2}$, son soluciones de la ecuación *f(x) = 1*. Dominio$_f$= $\left\{\frac{-\sqrt{17}+3}{2}, \frac{\sqrt{17}+3}{2}\right\} \cup \left[\frac{-\sqrt{5}+3}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right]$

Figura 13. Proceso de resolución del problema desde un punto de vista algebraico

5. Dificultades en la promoción del uso de la tecnología como herramienta en la resolución de problemas

Hemos discutido en la sección 2, la importancia de realizar una enseñanza ligada a un acercamiento sociocultural del aprendizaje, enseguida, en la sección

3, hemos realizado un análisis del rol de las representaciones bajo un enfoque sociocultural, en la sección 4 hacemos referencia a trabajos sobre la visualización matemática y la importancia de utilizar la tecnología como herramienta en la resolución de problemas bajo un enfoque del IBL y la instrucción de reinvención guiada. En esta sección, también proporcionaremos una gran importancia al medio tecnológico en la resolución de problemas no rutinarios y, al mismo tiempo, profundizaremos en los aspectos teóricos sobre un acercamiento sociocultural y tecnológico del aprendizaje de las matemáticas.

En un curso de tecnología de la Universidad del Quebec en Montreal (UQAM), en donde se enseña la resolución de problemas en un acercamiento tecnológico, se propuso el problema discutido en la sección precedente (ver Figura 14).

Encontrar los valores de x real, tal que $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$.

Figura 14. Enunciado del problema solicitado para trabajar individualmente

En una experimentación informal con 26 estudiantes (en 2018), se les propuso resolver el problema en forma individual y la utilización de *GeoGebra* en caso necesario. No se obtuvo una solución completa con los 26 estudiantes, sus respuestas se dividieron en presentar el conjunto solución con dos o cuatro elementos exclusivamente. La computadora (en este caso *GeoGebra*) solamente fue utilizada para verificar, y como *GeoGebra* sólo proporciona una respuesta parcial, los alumnos allí se detuvieron.

Estos resultados nos impulsaron a realizar un cambio en la redacción del enunciado, esperando promover en una nueva población mejores resultados. Nuestro objetivo en esta actividad modificada (2019) fue promover el uso de *GeoGebra* como herramienta de exploración, y no como un paquete de verificación.

Encuentre los valores reales de la variable x que satisfacen la ecuación: $(-x^2 + 3x - 1)^{-x^2+3x+2} = 1$

a) Desde un punto de vista algebraico (papel-lápiz: haga una digitalización de su trabajo, o utilice *Word*),

b) Desde un punto de vista visual (explique y capture pantallas de las representaciones), *c)* Desde un punto de vista del cálculo formal (explique y capture pantallas de las representaciones).

Figura 15. Enunciado del problema solicitado para trabajar en equipo

Recordemos que el enunciado (Figura 14) era directo, y en esta ocasión (Figura 15) se han añadido tres preguntas en donde se les solicita a los alumnos un uso explícito de diferentes representaciones (algebraica y gráfica) y un uso de *GeoGebra* como herramienta (preguntas *b)* y *c)*).

Entonces, en esta ocasión, se decidió solicitar a 37 estudiantes que trabajaran en equipo con la consigna de que era una tarea obligatoria que se consideraba como parte de la calificación de un curso. Se les propuso la formación libre de equipos de dos personas. Los estudiantes decidieron con quién trabajar y es así como se formaron 22 equipos (algunos estudiantes trabajaron solos).

Nuestra intención era que bajo la consigna de formar parte de la nota final de un curso y de promover el trabajo en equipo, los estudiantes llegarían en mayoría a hacer un mejor uso de la herramienta tecnológica y, de paso, resolver el problema. Sin embargo, los resultados no fueron tan satisfactorios como se pensó (ver Tabla 1).

	Dos soluciones	Cuatro soluciones	Seis soluciones
	EQ1, EQ3, EQ4, EQ8, EQ9, EQ10, EQ11, EQ13, EQ14, EQ16, EQ17, EQ19, EQ20, EQ18	EQ2, EQ5, EQ22, EQ6, EQ12, EQ15, EQ21	EQ7
Total 22 equipos	14 equipos	7 equipos	1 equipo

Tabla 1. Resultados en la resolución de la tarea no rutinaria

Este resultado nos muestra que el uso de *GeoGebra* como herramienta es pobre en los estudiantes, aun y cuando en esta ocasión, explícitamente se les ha solicitado una coordinación más estrecha entre diferentes representaciones que emergen del trabajo papel y lápiz y paquete de cómputo *GeoGebra*.

6. La variable tecnológica como elemento promotor del aprendizaje en un medio sociocultural y la importancia de promover en el aula un MDC

En las secciones precedentes, hemos realizado un análisis de elementos teóricos que permiten explicar fenómenos de aprendizaje en un medio socio cultural y tecnológico. En esta sección, nos proponemos profundizar en el acercamiento teórico-práctico, al percatarnos de que el uso de la tecnología como herramienta en la resolución de problemas no es espontáneo en nuestros estudiantes (ver discusión en la sección 5).

En las secciones precedentes hemos explicitado nuestra posición sobre un acercamiento sociocultural del aprendizaje. Hemos mostrado que el uso de la tecnología como herramienta no emerge de manera natural en nuestros estudiantes, y de allí la necesidad de profundizar en aspectos teórico-prácticos para mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Retomando el trabajo de Vygotsky, de Voloshinov y de Ilyenkov sobre la importancia del trabajo en colaboración, queremos integrar también el acercamiento de Leontiev (1978). Lo que nos interesa de Leontiev (ver Hitt & Quiroz, 2017) es la importancia que él le imprimió a la acción en el quehacer de una tarea, y que esas reflexiones lo llevaron a proponer un marco teórico sobre la importancia de considerar los siguientes elementos:

- La orientación de la acción, que es guiada por los motivos que emergen al enfrentar una tarea y que ello determina el tipo de acción.
- La ejecución de la tarea, que consiste en realizar cierto tipo de acciones (mentales o físicas) que van a permitir la construcción mental de esquemas, las *operaciones*.

Las operaciones como esquemas mentales de comportamiento son las que permitirán en el futuro realizar una acción de acuerdo con el reconocimiento de la tarea. Leontiev, inmerso en un contexto sociocultural del aprendizaje, afirma que las acciones estarán restringidas si no se promueve la comunicación entre los individuos.

Nuestra discusión hasta el momento ha querido hacer énfasis en la necesidad de promover la comunicación en el aula para promover los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Nuestra experiencia en la promoción del trabajo en colaboración en el aula de matemáticas, nos ha mostrado la necesidad de organizar el trabajo en este espacio para mayor eficiencia en la construcción del conocimiento matemático y científico; es por ello que en la sección 3 de este documento insistimos en la importancia de utilizar un método de enseñanza como ACODESA. Al introducir el trabajo de Voloshinov sobre la construcción del signo a través de la comunicación entre pares, nos llevó a la definición de Davis, Young & McLoughlin (1982): una representación puede ser una combinación de algo escrito en papel, algo existente en forma de objetos físicos y una disposición cuidadosamente construida de ideas en la mente (p. 54).

Esta definición, al ponerla en un contexto de aprendizaje en colaboración, por ejemplo, utilizando las cinco etapas de ACODESA, nos ha llevado a una nueva definición ligada a las producciones de los estudiantes en el aula de matemáticas o de ciencias (Hitt & Quiroz, en prensa), que especifica una evolución de una representación funcional-espontánea inicial (trabajo individual) y su evolución en un trabajo en colaboración (ver Figura 16). En esta figura, se presentan las cinco etapas de ACODESA y la evolución de las representaciones de los estudiantes desde su primera representación en trabajo individual RS_1, hasta la representación socialmente construida (RSC) en la cuarta etapa de ACODESA.

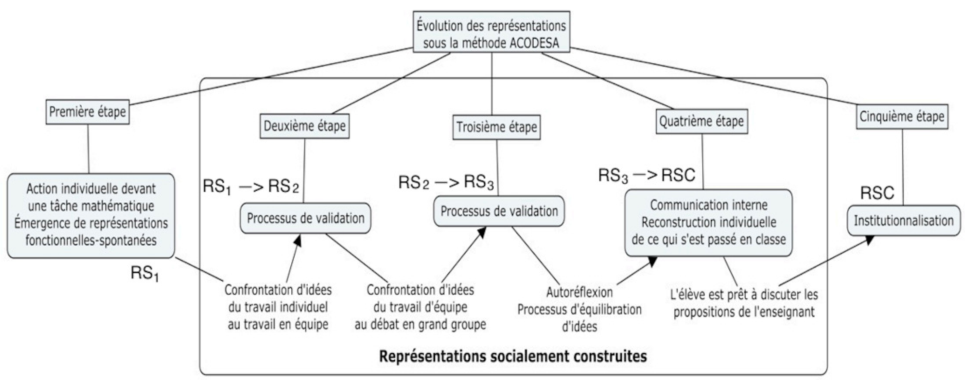


Figura 16. Tomado de Hitt & Quiroz (2019b) sobre la representación socialmente construida en el aula siguiendo ACODESA como método de enseñanza

Otro elemento que hemos considerado en nuestra discusión es la importancia de la tarea. Hemos visto que un enunciado en el contexto de la resolución de problemas como el propuesto en el libro del *YearBook* del NCTM limita el desempeño de los estudiantes en los procesos de promoción de la visualización matemática. El rediseño de la actividad, en donde se solicita explícitamente utilizar el paquete *GeoGebra* en una tarea similar (ver sección 5) y el trabajo en equipo, tiene mejores resultados, pero su impacto no es tan fuerte como se esperaría al haber rediseñado la actividad y promovido el trabajo en parejas. Los procesos de visualización necesitan de un mejor ambiente de trabajo en equipo seguido de la discusión en gran grupo y de un proceso de autorreflexión para poder promover la visualización matemática antes de que el profesor inicie el proceso de institucionalización.

Estos resultados parciales, junto con el acercamiento teórico-práctico del método de enseñanza ACODESA y las nuevas consideraciones sobre las representaciones socialmente construidas, nos obligan a proponer un nuevo refinamiento de la tarea que se adapte al uso de ACODESA y que permita la evolución de las representaciones para llegar a la representación socialmente construida, a la generación de procesos de visualización matemática y al uso de la tecnología como herramienta. En cierto modo, le estamos proporcionando una manera operativa de hacer evolucionar las representaciones iniciales de los alumnos a la representación socialmente construida.

6.1 ¿Cómo refinar la actividad para ser utilizada con el método de enseñanza ACODESA?

Sin entrar en detalles (la proposición será ampliada en el libro de actividades que acompaña este volumen), consideraremos una actividad dividida en etapas de acuerdo con ACODESA (ver Anexo). La actividad estará dividida en diferentes páginas para trabajar en el aula. Suponiendo que hemos realizado un refinamiento de la actividad para ser utilizada en el aula con ACODESA, ahora lo que queremos es mostrar en conjunto todas las consideraciones teóricas discutidas en este documento.

6.2 Análisis retrospectivo

El punto de vista teórico-práctico que hemos empleado en las diferentes secciones nos lleva a discutir las diferentes etapas de ACODESA cuando se utiliza en el aula de matemáticas, de la siguiente manera:

1) Etapa de trabajo individual

En esta primera etapa, un estudiante frente a una tarea matemática produce las primeras representaciones que, de acuerdo a Hitt & Quiroz (2019b), se han llamado representaciones funcionales –espontáneas, como lo hemos señalado con el acercamiento de Liontev y la definición de Davis *et al.*–; estas representaciones funcionales-espontáneas tienen características internas y externas.

2) Etapa de trabajo en equipo

En esta segunda etapa, un estudiante en un proceso de validación con otros estudiantes está en posibilidades de refinar su conocimiento y de hacerlo evolucionar (Vygotsky, Liontev, Voloshinov, Lyenkov), incluyendo las representaciones iniciales. Posibles contradicciones se pueden encontrar, y la discusión entre los miembros del equipo puede promover un refinamiento del conocimiento inicial de cada estudiante. Se produce generalmente en esta etapa una trasformación de las representaciones iniciales. La ZPD de Vygotsky es utilizada de manera diferente. En principio, la relación joven–adulto se ha sustituido por la relación estudiante-estudiantes y, eventualmente, estudiantes-profesor. Es la creación inicial de un MDC (Medio de Desarrollo del Conocimiento). En esta etapa es importante la distribución del trabajo: utilizar una sola calculadora o computadora, que un estudiante sea responsable de redactar las discusiones, otro debe prepararse para la presentación en gran grupo.

3) Etapa de discusión en gran grupo

Esta etapa se caracteriza por el refinamiento de los procesos de validación. Las diferentes proposiciones de los equipos pueden generar un debate rico en argumentos. Nuevamente es el enriquecimiento del MDC al pasar a esta etapa. El profesor debe comportarse como guía en la discusión. Es posible que haya nuevamente un refinamiento de representaciones para validar los procesos de resolución. Al finalizar esta etapa se recogen las producciones de los alumnos y se distribuyen nuevos formularios de la misma tarea para la siguiente etapa.

4) Etapa de autorreflexión (reconstrucción individual de lo realizado en clase).

En esta etapa se consolidan los logros obtenidos en la discusión en gran grupo. Debemos ser conscientes de que los consensos en el aula son efímeros. En esta etapa de reconstrucción de lo realizado en clase, es posible que algunos alumnos regresen a su posición original (ver Hitt, Saboya & Cortés, 2017). Es aquí que es considerada la representación socialmente construida (RSC).

5) Etapa de institucionalización

El profesor realiza un resumen de las representaciones de los alumnos y es aquí donde presenta la resolución de la actividad desde el punto de vista institucional. Los resultados obtenidos en otras experimentaciones muestran que el profesor en esta etapa no tiene dificultades para introducir las representaciones oficiales. Los estudiantes están mejor preparados para analizar las proposiciones del profesor.

Así, un MDC está compuesto por:

1) Un conjunto de alumnos de cara a una tarea matemática,
2) Una tarea matemática que ha sido diseñada con base en una metodología de enseñanza y un marco teórico,
3) Un método de enseñanza acorde a un acercamiento sociocultural del aprendizaje.

7. A manera de conclusión

En este documento hemos querido poner en relieve la importancia de crear medios de desarrollo del conocimiento (MDC) y hemos puesto en contexto el método de enseñanza ACODESA bajo un enfoque sociocultural del aprendizaje en un medio tecnológico.

El análisis que hemos realizado en las diferentes secciones tiene un hilo conductor de manera que se muestren las tareas matemáticas y científicas no como un proceso de evaluación de conocimientos adquiridos. El problema que seleccionamos del *YearBook* de la NCTM es típico de un acercamiento como tal; incluso en el libro, al final de cada capítulo, se enuncia de esa manera cada uno de los problemas propuestos: *Can your students solve this problem?* Por el contrario, con las transformaciones del enunciado del problema hemos querido construir una actividad: actividad que en un medio sociocultural del aprendizaje tiene como objetivo promover la evolución de un conocimiento. Tomamos la visualización matemática y la tecnología como herramienta y como problemática, con la intención de promover la visualización al considerar la computadora y el paquete *GeoGebra* como herramienta en un acercamiento IBL (Aprendizaje basado en la indagación) y en un proceso de reinvención guiada, y no como un paquete para verificar. En cierto modo nos estamos colocando en una educación prospectiva y no retrospectiva. El estudiante en este nuevo enfoque, es más un productor que reproductor.

Remerciements. Nous remercions tout particulièrement le XVIIe Groupe de travail Québec-Mexique 2017-2019, qui permet une communication plus étroite entre les chercheurs du Mexique et du Québec.

Referencias

Arzarelo, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process. *Relime*, especial issue, 267-299.

Balacheff, N. & Gaudin N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. In F. Hitt, D. Holton and P. Thompson (Eds.), *Recherche in College Mathematics Education*, Volume VII, 207-234.

Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris: Éditions de Minuit.

Brownell W-A. (1942). Problem solving. In N.B. Henry (Ed.), *The psychology of Learning* (41st Yearbook of the National Society for the Study of Education. Part 2, pp. 415-443). Chicago: University of Chicago press.

Brownell, W. A. (1947). The place and meaning in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal*, *4*, 256-265.

Davis, R., Young, S. & McLoughlin, P. (1982). The roles of "understanding" in the learning of mathematics. Final report of the NSFG. https://archive.org/stream/ERIC_ED220279/ERIC_ED220279_djvu.txt. Retrived 15th february 2016.

Dewey, J. (1909). *How we think*. New York: Dover.

Durkheim, É. (1898). Representations individuelles et représentations collectives. *Revue de Métaphysique et de Morale*, tome VI, numéro de mai 1898, 1-22.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Neuchâtel: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37), MAA Series, No. 19. USA.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Guilford, J. P. (1950). Creativity. *American Psychologist*, *5*, 444-454.

Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Hadamard, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris: Gauthier-Villars.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris: Hermès.

Hitt, F. & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt, F., Saboya, M. and Cortés C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetic-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Hitt, F., and Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*. *73*, 153-177.

Hitt, F. y Quiroz, S. (2019a). La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Núñez, M. Saboya y J. L. Soto (Eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 1-25). México: AMIUTEM.

Hitt, F. & Quiroz, S. (2019b). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

Hitt, F., Soto, J., Quiroz, S. (2019). Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos. En S. Quiroz, E. Núñez, M. Saboya y J. L. Soto (Eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 1-25). México: AMIUTEM.

Ilyenkov, E. (1977). *Dialectical logic, essays on its history and theory*. Moscú: Progress Publishers. Retraived from http://www.aworldtowin.net/documents/Ilyenkov_Dialectical_Logic.pdf, May 21th, 2019.

Kozulin, A. (2000). Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural. Traducción de Psychological Tools (1998), Harvard University Press. Cognición y desarrollo humano, Editorial Paidós.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press.

Leontiev, A. (1978). Activity, counciousness, and personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

National Council of Teachers of Mathematics. (1988). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, Reston, VA, USA: NCTM.

Osborn, A. F. (1959). *L'imagination constructive.* Paris: Dunod.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princetown: Princetown University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* Volume I & II. Princeton University Press.

Polya, G. (1961/1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (vol. I & II). New York: John Wiley and Sons.

PRIMAS. (2011). The PRIMAS project: Promoting inquiry-based learning (IBL). In mathematics and science education across Europe (2007-2013). European Union. Retraived October 16, 2019. https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/PRIMAS_Final-material-collection.pdf

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted April 5, 2016.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(3), 210-230.

Thorndike, E. L. (1920). Intelligence and its use. *Harper's Magazine*, 140, 227-235·

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, *10*(1), 77-10.
Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*, 149-156.
Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*. Translated by L. Matejka and I. R. Titunik. Cambridge, MA: Harvard University Press.
Vygotsky, L. (1932/1962). *Thought and Language.* Cambridge, Mass.: MIT Press.
Wallas, G. (1926). *The art of thought*. New York: Harcourt, Brace and Company.
Wertsch, J. V. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.
Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization? In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). *19*, USA: MAA Series.

Anexo: Visualización matemática y *GeoGebra*

Portada	
Nombre del alumno: ________________________ Nombre de los miembros del equipo: ________________________ Grupo: ______________ Fecha: ______________	Instrucciones: ▪ Para la primera actividad individual, utiliza tinta azul. ▪ Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza tinta roja. ▪ En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza tinta verde. Visualización y resolución de problemas

Página 1 – Situación y trabajo individual (1ª etapa)

1. A continuación se presenta el enunciado siguiente[9]. Encuentre todos los valores reales que satisfagan la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$.

a) Antes de pasar a un desarrollo algebraico, inicia tu reflexión sobre lo que se te solicita, analizando cuidadosamente los elementos que constituyen la expresión algebraica de manera que te permita construir una estrategia de ataque.

Enunciar la estrategia global de ataque al problema:

---

[9] Problema del National Council of Teachers of Mathematics (1988, p. 19). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, Reston, VA, USA: NCTM.

b) Una vez que has construido una estrategia, intenta comprender mejor la situación desde un punto de vista gráfico (utiliza *GeoGebra*). Inicia un proceso de visualización, buscando los elementos clave de la representación gráfica que te puedan ayudar en ese proceso y que te permitan ligarlo con la estrategia de ataque.

c) Si la representación gráfica es compleja, es conveniente analizar la expresión algebraica en partes. Por ejemplo, analizar la representación gráfica del polinomio $x^2 - 5x + 5$ y del polinomio $x^2 - 9x + 20$, intentando visualizar los elementos pertinentes, que permitan proporcionarle un sentido visual a la ecuación $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$. Este proceso te permitirá construir una estructura cognitiva de control sobre los procesos algebraicos.

Página 2 – Trabajo en equipo (*GeoGebra* y trabajo papel y bolígrafo con diferente color de tinta) (2ª etapa).

2. Discute con tus compañeros de equipo los resultados que has encontrado en el trabajo individual. ¿El trabajo en equipo proporciona nuevas ideas? ¿Una nueva estrategia de ataque?
3. De acuerdo a la estrategia, resolver algebraicamente lo solicitado.

Página 4 – Trabajo en equipo (*GeoGebra* y trabajo papel y bolígrafo con diferente color de tinta) (3ª etapa)

4. Discute con tus compañeros de equipo el proceso visual de manera que te permita construir un enunciado similar para la resolución de una ecuación que contenga varias soluciones enteras (no necesariamente todas).

a) ¿Cuál sería la proposición del equipo de una nueva ecuación de la forma $(p(x))^{q(x)} = 1$?

b) ¿Qué soporte gráfico podrías proporcionar para mostrar la construcción de la ecuación? Proporciona una explicación y una evidencia visual utilizando *GeoGebra* y capturando pantallas para apoyar tu explicación.

c) ¿Cuál es la solución algebraica?

El profesor recoge todas las producciones de los alumnos y proporciona un nuevo cuestionario

4ª Etapa de autorreflexión (reconstrucción individual de lo realizado en clase)

5. En un nuevo cuestionario, resuelve individualmente la misma actividad, y proporciona una ecuación diferente a las encontradas en el trabajo en equipo y en gran grupo de las etapas precedentes.

5ª Etapa proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las estrategias de resolución de la actividad y explica la importancia de los procesos de visualización (con apoyo tecnológico) para promover la construcción de una estructura de control sobre la actividad matemática en la resolución de problemas del mismo tipo al realizado en esta actividad.

13 Interacciones digitales en la comprensión del límite de una función en un punto a través de las nociones de aproximación y tendencia

Sergio Alexander Guarin Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea[1]

Resumen

En este capítulo presentamos algunos resultados que forman parte de una investigación que tuvo por objetivo: diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades para caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, con estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia. Aquí reportamos el diseño, la implementación y caracterización de uno de los talleres de la secuencia de actividades, en el que se exploraron las nociones de aproximación y tendencia con *GeoGebra*, al igual que el nivel de comprensión alcanzado.

Palabras clave: comprensión, límite, aproximación, tendencia, tecnología.

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats qui font partie d'une investigation dont l'objectif était: de concevoir, mettre en œuvre et évaluer une séquence d'activités pour caractériser les niveaux de compréhension du concept de limite d'une fonction en un point, avec des étudiants participant à un cours de calcul différentiel dans lequel les notions d'approximation et de tendance sont explorées. Nous rapportons ici la conception, la mise en œuvre et la caractérisation de l'un des ateliers de la séquence d'activités, dans lequel les notions d'approximation et de tendance ont été explorées avec *GeoGebra*, ainsi que le niveau de compréhension atteint.

Mots clés : compréhension, limite, approximation, tendance, technologie.

Abstract

In this chapter we present some results that are part of an investigation that aimed to: design, implement and evaluate a sequence of activities to characterize the levels of understanding of the concept of limit of a function at a point, with students who participate in a Differential Calculus course in which the notions of approach and tendency are explored. Here we report the design, implementation and characterization of one of the workshops of the sequence of activities, in which the notions of approach and tendency were explored with GeoGebra, as well as the level of understanding.

[1] Universidad Industrial de Santander, Colombia.

Keywords: understanding, limit, approximation, tendency, technology.

1. Introducción

Las matemáticas de la educación superior han generado un amplio campo de investigación en educación matemática, en el que investigadores como Sierpinska (1987), Tall (1991), Dreyfus (1991), Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) han estudiado sobre aspectos cognitivos asociados a la comprensión de conceptos fundamentales del Cálculo.

Específicamente en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial, Tall (1992), Artigue (1998), Blázquez y Ortega (2000), Hitt (2003), entre otros, han compartido reflexiones que hablan de las dificultades de aprendizaje en torno al concepto de límite; entre ellas, específicamente se destacan las dificultades generadas por el lenguaje y el uso de términos como *límite*, *tender* o *aproximarse*. Cornu (1991) afirma que estas dificultades no sólo recaen en su complejidad o riqueza, sino en entender que todos los aspectos cognitivos del concepto no se pueden aprender a partir de su definición matemática, debido a que no se hace uso de la idea de aproximación. Al respecto, Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev (1994) plantean desde su obra que la idea del límite equivale a lo siguiente:

> …para determinar el valor exacto de una magnitud determinamos primero, no la magnitud en sí, sino una aproximación a ella. Sin embargo, no hacemos una única aproximación sino una serie de ellas, cada una de las cuales es más precisa que la anterior. Del examen de esta cadena de aproximaciones, esto es, del examen del proceso mismo de aproximación, determinamos unívocamente el valor exacto de la magnitud. Por este método, que es en esencia profundamente dialéctico, obtenemos una constante fija como resultado de un proceso o movimiento (p. 95).

La perspectiva de Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev, aunque conserva el rigor, es más dinámica y no está ligada al formalismo, además es una opción más favorable en la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

En ese sentido, autores como Tall (1991) y Blázquez (1999) concuerdan en que para entrar en contacto con algún concepto matemático es necesario recurrir a los distintos sistemas de representación (aritméticos, geométricos algebraicos, métricos, gráficos, analíticos, gestuales, etcétera.). Sin dichos sistemas no hay acceso posible a los objetos matemáticos. Aún más, no sólo no hay acceso, sino que dichos objetos no tienen una existencia previa, independiente de sus representaciones (Moreno, 2014).

Asimismo, las representaciones generadas mediante el uso de herramientas tecnológicas "ofrecen la posibilidad de examinar tareas matemáticas desde distintas perspectivas que incluyen aproximaciones visuales, gráficas, numéricas y algebraicas" (Santos-Trigo, 2010, p. 310). Además, la interacción con tecnologías digitales permite: la utilización de imágenes visuales de las ideas matemáticas y la observación de comportamientos o relaciones trascendentes en un problema; organizar y analizar los datos del problema; y representar datos en distintos sistemas como el tabular, gráfico y numérico (Santos-Trigo, 2007).

Por consiguiente, durante el proceso de aprendizaje de las matemáticas, las tecnologías digitales influyen en la forma en que se aprende y en el aprendizaje mismo. En términos de Moreno (2002), "el conocimiento construido no es independiente de los instrumentos de mediación empleados" (p. 13); en otras palabras, no hay actividad cognitiva al margen de la mediación instrumental.

Por lo planteado anteriormente, el trabajo que aquí se reporta hace parte de una investigación en la cual nos preguntamos ¿cómo comprenden el concepto de límite de una función en un punto, estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial de la UIS en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia con el uso de *GeoGebra*?

2. Aspectos teóricos y metodológicos

La investigación que aquí se reporta tuvo como objetivo diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades que permitiera caracterizar los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en estudiantes que participan de un curso de Cálculo Diferencial en el que se exploran las nociones de aproximación y tendencia con el uso de *GeoGebra*.

2.1 Teoría para la comprensión matemática

La teoría de comprensión matemática propuesta por Pirie y Kieren (1989) asume la comprensión como un todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado de una reorganización de las estructuras del conocimiento. Además, se constituye una herramienta que actúa como un lente, a través del cual puede observarse el proceso de evolución de la comprensión matemática de un individuo o de un grupo individuos, que está compuesta por ocho niveles 1) conocimiento primitivo; 2) Creación de la imagen; 3) Comprensión de la imagen; 4) Observación de la propiedad; 5) Formalización; 6) Observación; 7) Estructuración; 8) Invención que conforma su aspecto descriptivo. La teoría, además, aporta tres características que permiten dar cuenta de dicha comprensión: *i) folding back*, *ii)* límites de alta de necesidad y *iii)* complementariedades de la acción y expresión.

Los aspectos antes mencionados se usaron para realizar el análisis *a priori* de cada uno de los talleres. El análisis nos permitió caracterizar previamente los niveles de comprensión que podrían alcanzar los estudiantes que desarrollaran la secuencia, específicamente sobre el concepto de límite de una función en un punto. En la Tabla 1 se muestra la caracterización lograda para el nivel de Creación de la imagen.

Creación de la imagen del concepto de límite de una función en un punto	
COMPLEMENTARIEDADES	
ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce imágenes del concepto de límite de forma mental, verbal, escrita (gráfica, tabla de valores).	Determina la existencia del límite de manera gráfica o numérica.
Reconoce numéricamente que es posible aproximarse a un número real tanto como se quiera.	Interpreta que, para un número en la recta numérica, es posible aproximarse tanto como se quiera por derecha y por izquierda.
Interpreta la aproximación al límite por izquierda y derecha en un punto analizando la gráfica de la función.	Justifica la existencia del límite de una función en un punto a partir de la gráfica de la función.
Realiza aproximaciones numéricas por izquierda y derecha en un punto **c** en el dominio de la función.	Interpreta la tendencia como una aproximación que "es posible mejorarla".
Explica qué se entiende por aproximación y tendencia en una función.	Justifica la diferencia entre aproximación y tendencia de una función.

Tabla 1. Caracterización *a priori* del nivel de Creación de la imagen

2.2 Nociones que rodean el concepto de límite

El concepto de límite ha sido particularmente difícil de enseñar y aprender, propio del PMA con una posición central en el análisis matemático, fundamental en la teoría de aproximación, de continuidad y del Cálculo Diferencial e Integral (Cornu, 1991). En ese sentido, investigaciones realizadas por Blázquez y Ortega (2002) usan las nociones de aproximación y tendencia (desde la perspectiva matemática) con el fin de plantear una definición del concepto de límite funcional que los estudiantes recuerden fácilmente, las cuales se precisan de la siguiente manera:

> Aproximación: Una variable, que toma sus valores en un conjunto numérico, puede aproximarse a un cierto número si los errores absolutos que se cometen, considerando los valores de la variable como aproximaciones del número, son cada vez menores.
>
> Tendencia: La variable tiende a un número cuando los valores son aproximaciones del número y además se aproximan más que cualquier otro valor, es decir, cualquier aproximación se puede mejorar con valores de la variable (p. 14).

Según Blázquez y Ortega (2002), el primer acercamiento que tienen los estudiantes con el concepto de límite de una función es a través de la noción de aproximación y mediante la concepción dinámica del límite de una función:

> Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se escribe $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando "x" se tiende al número "a", siendo distinto de "a", sus imágenes "f" tienden a "L" (p. 14).

Teniendo en cuenta los aspectos señalados por Cornu (1991), Blázquez y Ortega (2002), nos centramos en potenciar el proceso de representación en los estudiantes mediante el desarrollo de las actividades.

2.3 Proceso de representación

Concebimos, tal como lo exponen Fiallo y Parada (2018), que las representaciones son diferentes expresiones (numéricas, simbólicas y formales, gráficas o verbales) que permiten al estudiante apropiarse o comunicar su comprensión, para sí mismo y para los demás, sobre los objetos de estudio del Cálculo Diferencial: cambio y variación.

De esta forma, habremos de considerar cinco tipos de representación: cuatro desde el punto de vista formal: algebraica, numérica, gráfica (incluyendo en esta categoría la representación digital) y el lenguaje natural, y una que desde el sentido formal de las matemáticas no es considerada como representación: las acciones motrices. Así, el proceso de representación se interpreta como:

i. La creación y el uso de representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas o para modelar diferentes fenómenos y situaciones en contextos matemáticos o no matemáticos.
ii. La descodificación, codificación, traducción, interpretación y distinción de las distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticos.
iii. La descodificación e interpretación de las representaciones algebraicas, numéricas y gráficas, y la comprensión de la relación de éstas con las representaciones en lenguaje natural.
iv. La elección y transformación de los diferentes tipos de representación según las situaciones planteadas.

El proceso de representación es evidenciado a través de acciones que dan cuenta del desarrollo de habilidades. Rueda (2016) plantea que éste se puede evidenciar a través de las habilidades de reconocimiento, interpretación, construcción, transformación (tratamiento y conversión) y coordinación de las representaciones de los objetos matemáticos.

2.4 Aspectos metodológicos

La investigación de la que se abstrae el presente documento fue de corte fenomenológico y de tipo experimental, adoptó un proceso metodológico que inició con la revisión teórica y de un estudio preliminar, elementos que nos permitieron realizar el diseño y análisis de la secuencia de actividades, y finalizó con la selección del caso de estudio y el análisis de los datos a la luz de los aspectos teóricos.

El diseño de los talleres que hacen parte de la secuencia de actividades tuvo en cuenta los aspectos metodológicos descritos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean un curso de precálculo en la UIS que integra actividades organizadas secuencialmente alrededor de uno o dos problemas, trabajo individual, trabajo en equipo y debate en el aula, al igual que la manipulación de medios computacionales con el trabajo realizado a papel y lápiz. La secuencia presenta una estructura intencional que responde a las siguientes fases:

- Información y exploración libre: planteamiento de un problema que el estudiante explora con sus presaberes, de manera intuitiva y buscando una aproximación a la solución.
- Socialización de resultados: discusión en grupo de las estrategias utilizadas para la solución del problema planteado, aclaración de dudas y validación de resultados.

- Exploración dirigida: exploración de un archivo de *GeoGebra* y orientación guiada por preguntas para que el estudiante vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados percibidos en las diferentes representaciones que le ofrece el *software*.
- Explicación: debate, discusión y reflexión de las ideas expuestas, de manera que se llegue al objetivo de la actividad, que es la construcción del conocimiento; en esta fase el papel del docente es la promoción del debate y la participación de los estudiantes.
- Tarea retadora: planteamiento de una situación contextualizada donde el estudiante tiene que aplicar lo aprendido, pero no de manera mecánica.

Veamos cómo, a partir de las nociones de aproximación y tendencia y mediante la interacción digital (Actividad de exploración dirigida, ver Figura 1), se pretende que surja de manera natural la idea de límite, lo que debe ser aprovechado para empezar a discutir este concepto en un curso de Cálculo Diferencial.

Exploración Dirigida
Actividad 3
3.1 Abra el archivo **Act-3.1.ggb**, mueva el punto P en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia.

a) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a 0°, 90°, 180°, 270° y 360°? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.
b) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 0º, 90º, 180º, 270º y 360º? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

3.2 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 1. Actividad 3. Exploración Dirigida

En esta actividad y con el archivo "Act-3.1.ggb" se busca que el estudiante observe y decida sobre la existencia de las razones trigonométricas $sen(\alpha)$, tan (α), sec (α) cuando el ángulo α es igual a $0°, 90°, 180°, 270°\ y\ 360°$. En este caso, el estudiante puede tomar cada una de las longitudes del triángulo rectángulo que se forma al mover el punto P sobre la circunferencia de radio 5. Por ejemplo, si $\alpha = 90°$, $sen(90°) = \frac{y}{r} = \frac{5}{5} = 1$ (ver Figura 2), pero si calcula $\tan(90°) = \frac{y}{x} = \frac{5}{0}$, y en ese punto no está definido el valor para la tangente.

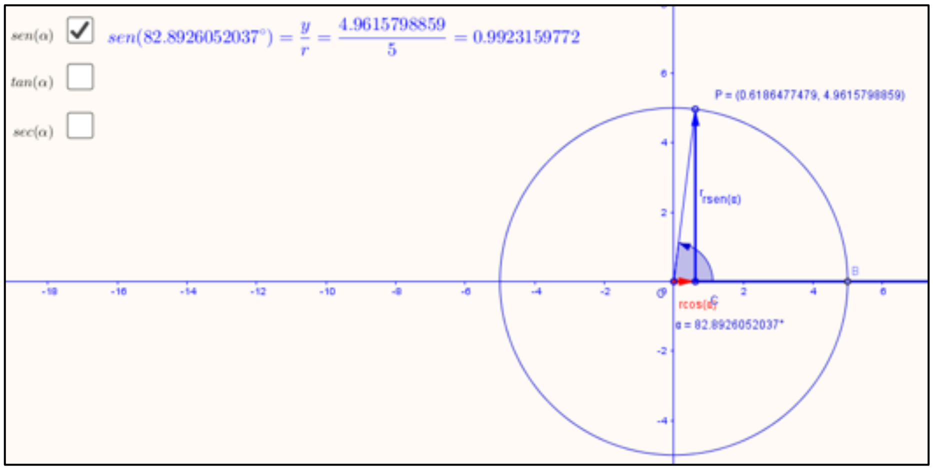


Figura 2. Archivo de *GeoGebra* para la Actividad 3

En ese sentido, en el ítem b de la actividad se busca observar cómo el estudiante decide sobre la tendencia de las razones trigonométricas $sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a $0°, 90°, 180°, 270°$ y $360°$. Al realizar la exploración del archivo, al mover el punto P sobre la circunferencia, puede visualizar la variación de las coordenadas de ese punto y, a su vez, cómo varían cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ a medida que P se aproxima a los ángulos cuadrantales tanto por derecha como por izquierda.

Respecto a la tendencia de los valores tomados por las razones trigonométricas, se debe tener en cuenta que no es fácil que el estudiante, al analizar algunas aproximaciones de α a los ángulos cuadrantales, logre identificar el valor al que tiende cada una de las razones. Esto se debe, entre otras cosas, a las limitaciones del *software*, porque los valores observados son finitos y las razones tienden a $0, 1, -1, \infty, -\infty$ según las cifras decimales y el ángulo al que se aproxime α (ver Figura 3). Por ello, se les debe solicitar a los estudiantes mejorar las aproximaciones de α en los ángulos cuadrantales, para evidenciar que entre más aproximaciones se hacen a estos ángulos, los valores siguen aumentando o disminuyendo (cuando tienden a infinito o menos infinito), o tienden a $0, 1, -1$.

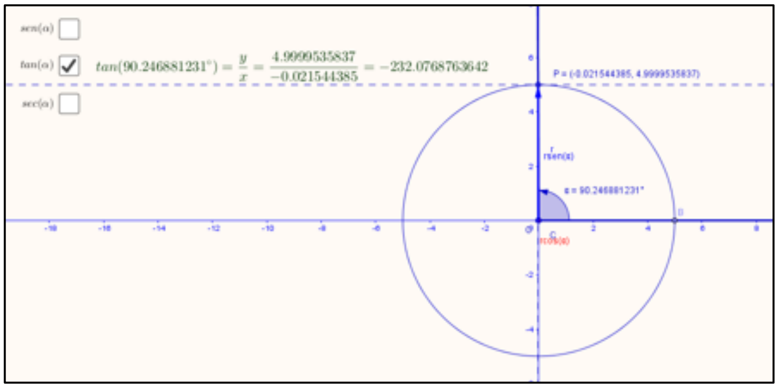
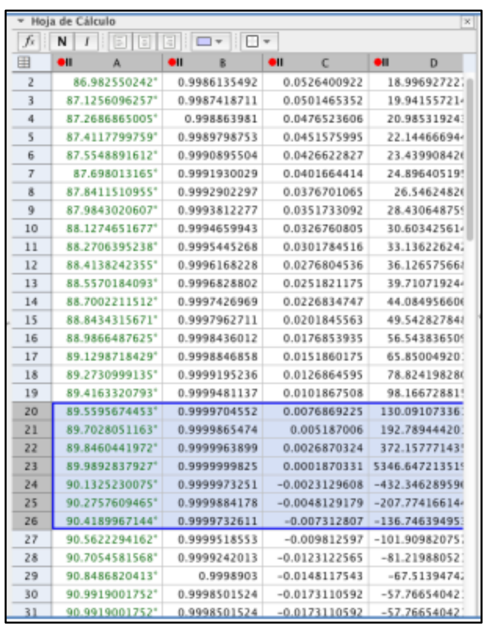


Figura 3. Simulación para la tan(90°)

Por otra parte, los estudiantes ante esta actividad se pueden apoyar de la hoja de cálculo de *GeoGebra* (registrando por ejemplo 20 datos, ver Figura 4) para identificar de manera numérica a qué valores tienden $sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando α se aproxima a los ángulos cuadrantales. Esta actividad permite que los estudiantes logren coordinar cada una de las representaciones (gráfica y numérica) y así puedan argumentar matemáticamente lo qué está sucediendo con cada una de las razones.



Hoja de Cálculo

	A	B	C	D
2	86.982550242°	0.9986135492	0.0526400922	18.9969272
3	87.1256096257°	0.9987418711	0.0501465352	19.9415572
4	87.2686865005°	0.998863981	0.0476523606	20.98531924
5	87.4117799759°	0.9989798753	0.0451575995	22.1446669
6	87.5548891612°	0.9990895504	0.0426622827	23.4399084
7	87.698013165°	0.9991930029	0.0401664414	24.8964051
8	87.8411510955°	0.9992902297	0.0376701065	26.5462482
9	87.9843020607°	0.9993812277	0.0351733092	28.4306487
10	88.1274651677°	0.9994659943	0.0326760805	30.6034256
11	88.2706395238°	0.9995445268	0.0301784516	33.1362262
12	88.4138242355°	0.9996168228	0.0276804536	36.1265756
13	88.5570184093°	0.9996828802	0.0251821175	39.7107192
14	88.7002211512°	0.9997426969	0.0226834747	44.0849566
15	88.8434315671°	0.9997962711	0.0201845563	49.5428278
16	88.9866487625°	0.9998436012	0.0176853935	56.5438365
17	89.1298718429°	0.9998846858	0.0151860175	65.8500492
18	89.2730999135°	0.9999195236	0.0126864595	78.8241982
19	89.4163320793°	0.9999481137	0.0101867508	98.1667288
20	89.5595674453°	0.9999704552	0.0076869225	130.0910733
21	89.7028051163°	0.9999865474	0.005187006	192.7894442
22	89.8460441972°	0.9999963899	0.0026870324	372.1577714
23	89.9892837927°	0.9999999825	0.0001870331	5346.6472135
24	90.1325230075°	0.9999973251	−0.0023129608	−432.3462895
25	90.2757609465°	0.9999884178	−0.0048129179	−207.7741661
26	90.4189967144°	0.9999732611	−0.007312807	−136.7463949
27	90.5622294162°	0.9999518553	−0.009812597	−101.9098207
28	90.7054581568°	0.9999242013	−0.0123122565	−81.2198805
29	90.8486820413°	0.9998903	−0.0148117543	−67.5139474
30	90.9919001752°	0.9998501524	−0.0173110592	−57.7665404
31	90.9919001752°	0.9998501524	−0.0173110592	−57.7665404

Figura 4. Hoja de cálculo para la Actividad 3

3. La comprensión del límite de una función en un punto a través de las nociones de aproximación y tendencia con el uso de *GeoGebra*

En este apartado describiremos el diseño y el análisis de los resultados encontrados para uno de los talleres que hace parte de la secuencia de actividades. En este taller se ilustran las nociones de aproximación y tendencia de manera dinámica, con el fin de lograr un acercamiento a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto. En primera instancia, se plantean actividades de exploración de las nociones de manera unidimensional (recta numérica), luego proponemos una actividad en un contexto geométrico para analizar ambas nociones y, por último, se plantea una situación de tipo funcional donde se evidencia la relación entre aproximación y tendencia. Se propone que en todas estas actividades se use *GeoGebra*.

Al finalizar el desarrollo de las cinco actividades de este taller, se espera que los estudiantes hayan logrado estar en el nivel de creación de la imagen para el concepto de límite de una función en un punto. A continuación, describiremos cada una de las actividades con el análisis de la comprensión evidenciada por Kevin (el caso de estudio).

En los resultados que se presentan, algunas de las figuras cuentan con las siguientes convenciones: recuadros amarillos para mostrar las complementariedades de la acción y recuadros rojos para las complementariedades de la expresión realizadas por Kevin en las hojas de trabajo, además de los episodios de las entrevistas y videos de clase.

En la Actividad 1 (ver Figura 5), se tiene como objetivo identificar la comprensión del estudiante sobre la noción de aproximación.

Exploración Libre
Actividad 1

1.1 Considere los siguientes valores $\frac{501}{100}, \frac{5001}{1000}, \frac{50001}{10000}, \frac{500001}{100000}, \dots$ para la variable a, y $\frac{499}{100}, \frac{4999}{1000}, \frac{49999}{10000} \dots$ para la variable b.

a) ¿A qué valor se aproximan las variables a y b? **Justifique** su respuesta.
b) ¿Qué relación existe entre la variable a y la variable b? **Justifique** su respuesta.

1.2 Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 5. Actividad 1 del Taller de aproximación y tendencia

En los razonamientos mostrados por Kevin al responder la Actividad 1 se evidencia que, entre las acciones hechas por el estudiante, está la conversión de un número racional a número decimal al realizar la representación decimal de los valores de cada una de las variables, que logró ubicar estos valores en la recta numérica y así pudo identificar la existencia de las dos sucesiones numéricas, tal como se muestra en los recuadros amarillos de la Figura 6.

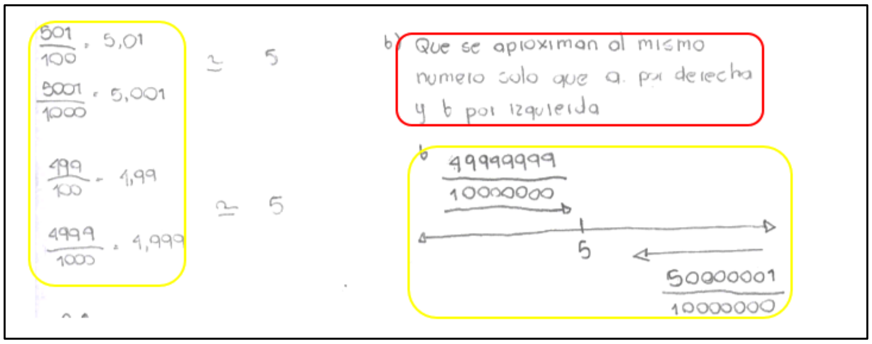


Figura 6. Solución de Kevin a la Actividad 1

En la entrevista realizada a Kevin (K), cuando el Investigador (I) indagó sobre sus respuestas, respondió como se muestra a continuación:

- I: ¿Qué significado tienen las flechas que están al lado de 5?
- K: Es que aquí los valores de b se acercan a 5 por izquierda y los valores de a se acercan, pero por derecha.
- I: ¿Por qué agregó más ceros y más nueves a esos valores?
- K: Pues ahí no pasa nada, sólo que entre más ceros el valor va a estar más cerca de 5, pero no va a ser 5; de igual manera con los nueves.
- I: Entonces, ¿cuál sería un valor próximo a 5 por izquierda?
- K: 4,9 es próximo a 5, pero 4,9999999 es más próximo a 5.
- I: ¿Cuantos nueves debe tener ese valor para que sea más próximo?
- K: Pues $4,\overline{9}$ así será más próximo a 5 por izquierda.

En ese sentido, la complementariedad de la expresión realizada por Kevin se evidencia al expresar “que entre más ceros el valor va a estar más cerca de 5 pero no va a ser 5; de igual manera con los nueves”, dando cuenta de que logró identificar la existencia de las dos sucesiones numéricas que se aproximan a 5: una a izquierda y otra a derecha.

Para la Actividad 2 (ver Tabla 2) se tenía como objetivo ilustrar las nociones de aproximación y tendencia por medio de *GeoGebra*, mediante la exploración dirigida.

Exploración Dirigida Actividad 2 2.1 Abra el archivo Act-2.1.ggb y use el deslizador "a" para explorar la construcción. **a)** Describa el comportamiento de los puntos verdes $\boldsymbol{A_n}$ respecto al punto rojo $\boldsymbol{A}$. **b)** ¿Qué sucede con la distancia de cada punto verde $\boldsymbol{A_n}$ respecto al punto rojo $\boldsymbol{A}$? **c)** ¿Qué concluye del comportamiento de los puntos verdes $\boldsymbol{A_n}$ respecto al punto rojo $\boldsymbol{A}$? Justifique su respuesta.	2.2 Abra el archivo Act-2.2.ggb y responda la primera pregunta antes de utilizar el deslizador. **a)** ¿Qué observa sobre la recta numérica? **b)** Deslice el punto "m" con la tecla ← y describa lo observado. **c)** ¿Cambió su opinión con lo observado inicialmente? **d)** ¿Se puede construir un punto más próximo del punto rojo? ¿Existe otro? ¿Es único? ¿Cuántos puntos se pueden construir más próximos al punto rojo? **e)** ¿Qué sucede si se construyen más puntos próximos al punto rojo? Justifique su respuesta.

Tabla 2. Actividad 2 del Taller de aproximación y tendencia

En la primera parte de la actividad 2 (ver recuadro amarillo de la Figura 7), el estudiante, al manipular el deslizador observa que la distancia entre A_1 y A es $|A - A_1| = 0{,}5$; para un punto más adelante, como lo es A_5, la distancia es $|A - A_5| = 0{,}0313$. A partir de ese momento reconoce que los demás puntos que van apareciendo están uno encima de otro, de modo que para el último punto registrado en la tabla, en este caso A_{10}, se encuentra a una distancia de $|A - A_{10}| = 0{,}0100$. Estos acercamientos que se visualizan al mover el deslizador y mediante lo observado en la tabla de valores que registra la distancia de cada uno de los puntos verdes respecto al punto rojo, le permiten a Kevin reconocer que "los puntos verdes $\mathrm{A_n}$ se aproximan a A", además de que logró identificar "que cada que aparece un nuevo punto $\mathrm{A_n}$, éste está más cerca del punto rojo (A) aproximándose por izquierda".

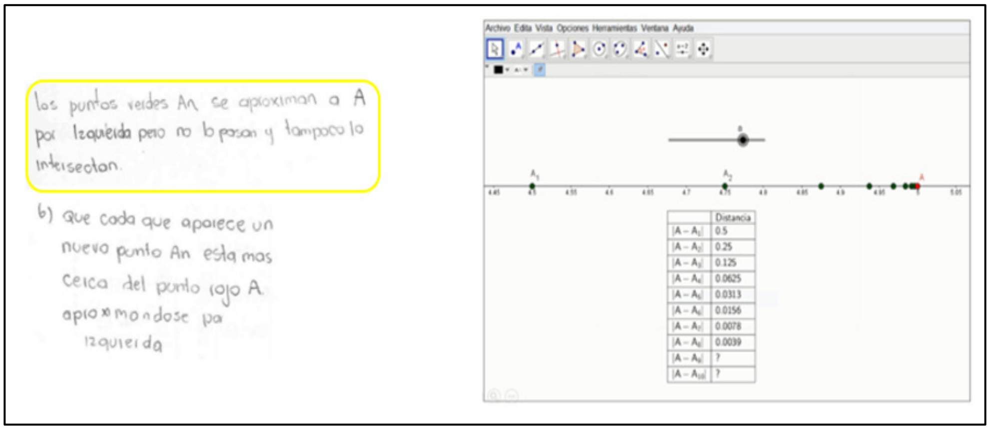


Figura 7. Solución de Kevin al ítem *a* y *b* de la Actividad 2.1

Esta acción le permitió a Kevin interpretar que, entre más cerca se encuentren los valores de A_n de A, "la distancia estará más cerca de cero" (ver recuadro rojo de la Figura 8); con ello hace referencia a la disminución de la distancia entre los puntos verdes respecto al punto rojo.

En esta actividad, el estudiante reconoce que es posible aproximarse a un punto en la recta numérica a partir de la disminución de la distancia entre los dos puntos, comparando cada una de las magnitudes respecto a la anterior.

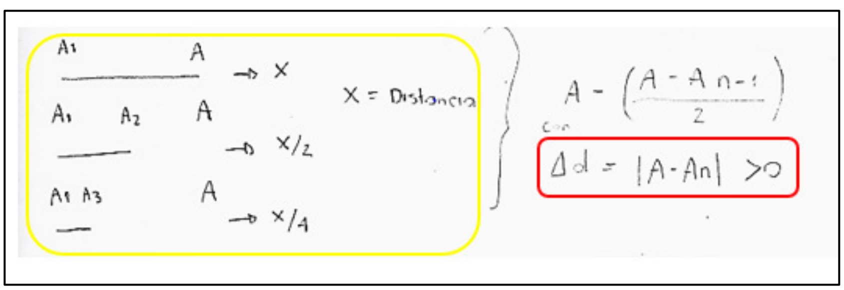


Figura 8. Respuesta de Kevin al ítem *c* de la actividad 2.1

Para la segunda parte de la Actividad 2 (ver Cuadro 1), se trabajó con un archivo en *GeoGebra*, en el cual lo primero que se observa son *tres puntos* sobre la recta numérica (Momento 1, ver Figura 9), luego, mediante el *zoom* (generado al mover controladamente el deslizador "m"), se visualiza la existencia de otros puntos a izquierda y derecha del punto rojo.

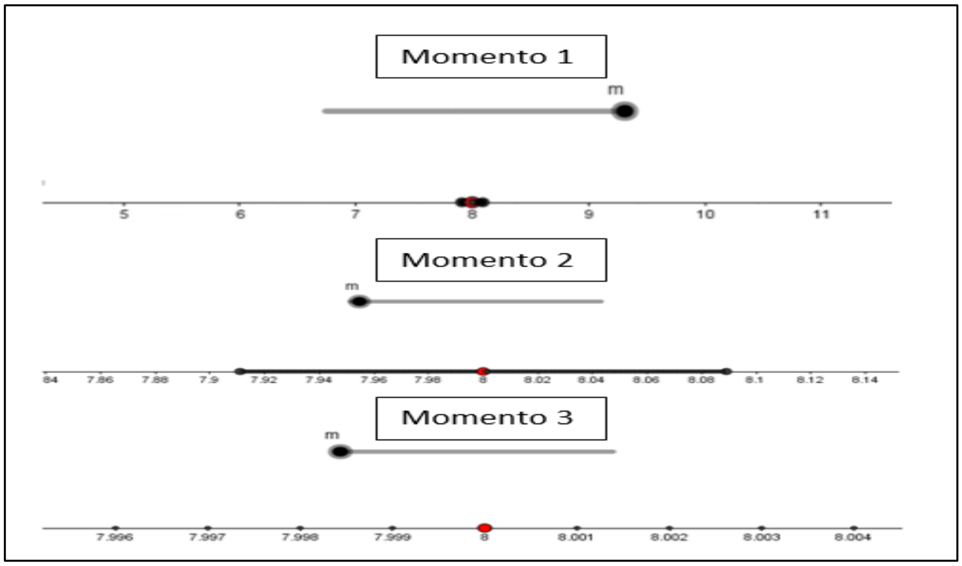


Figura 9. Archivo en *GeoGebra* para la actividad 2.2

En la Figura 10 (ver recuadro amarillo), se muestra que el estudiante inicialmente pensaba que los puntos grises estaban muy cerca de 8, pero luego de utilizar el deslizador cambió su opinión, debido a que logró identificar y explicar que había "una serie de puntos que están a menor distancia que los iniciales". En dicha expresión, se evidencia que el estudiante logra comprender que existe una tendencia hacia el punto rojo.

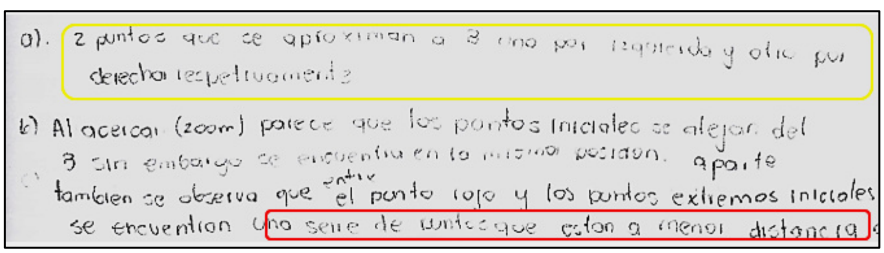


Figura 10. Respuesta de Kevin al ítem *a* y *b* de la actividad 2.2

En ese sentido, Kevin justifica la existencia de tendencia a partir de que siempre es posible construir un punto "más" próximo a 8 "porque la recta numérica es infinita" (ver Figura 11).

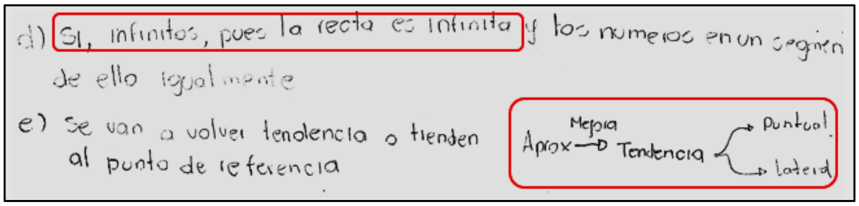


Figura 11. Respuesta de Kevin al ítem *c* y *d* de la Actividad 2.2

Mediante las expresiones de Kevin evidenciadas en la Actividad 2.2, se logra identificar que él diferencia la aproximación de la tendencia, al expresar que *"existe tendencia cuando la aproximación mejora"*, otras expresiones a esta actividad se dieron en el siguiente episodio:

- I: ¿Existe alguna relación entre aproximación y tendencia?
- K: Aproximación, por ejemplo: 2,9 es próximo de 3.
- I: ¿Cuándo existiría tendencia?
- K: Pues cuando los valores están más cercanos a 3, por ejemplo $2,\overline{9}$.

En el anterior episodio se evidencia cómo el estudiante entiende y diferencia las nociones de aproximación y tendencia, lo cual en términos de Blázquez (1999), la aproximación se reconoce a través de la disminución del error, mientras que la tendencia requiere que cualquier aproximación distinta del valor al que se tiende se pueda mejorar tanto como se desee.

Por otra parte, se evidencia que el estudiante expresa que $2,\overline{9}$ es un valor más cercano de 3, pero ese valor no es 3. Según Tall (1986), la dificultad que se presenta al reconocer esta igualdad proviene de la escritura decimal de un número (posiblemente ilimitado) y el número mismo. Además, ante esta igualdad el autor expresa que se debe realizar la distinción entre proceso y objeto, porque ayuda a comprender la distinción entre 2,999 …, que se entiende como un proceso, mientras que 3 se entiende como un objeto. De manera similar, las nociones de infinito potencial e infinito actual permiten explicar que esta igualdad no es aceptada fácilmente.

La Actividad 3 (ver Figura 12) es de carácter exploratorio en el plano bidimensional, se propone con el fin de analizar la relación entre las nociones de aproximación y tendencia a partir de la exploración en *GeoGebra*.

Exploración Dirigida
Actividad 3
3.1 Abra el archivo **Act-3.1.ggb**, mueva el punto P en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia.

a) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a 0°, 90°, 180°, 270° y 360°? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

b) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $sen(\alpha), \tan(\alpha), \sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 0°, 90°, 180°, 270° y 360°? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

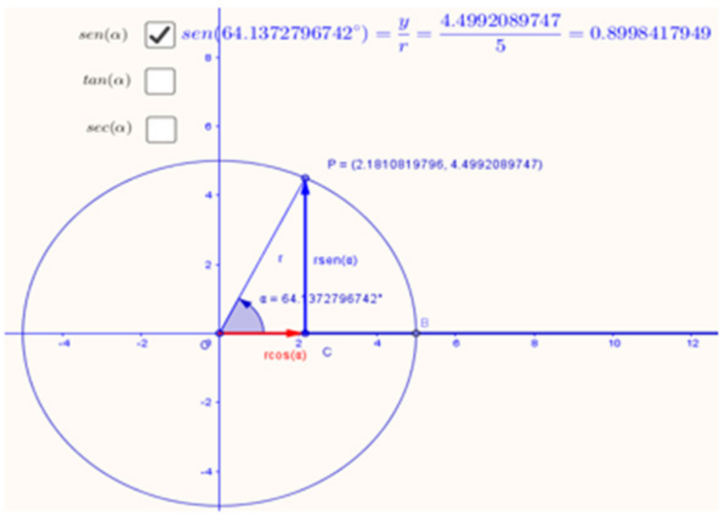


Figura 12. Actividad 3 del Taller de aproximación y tendencia

En ese sentido, para la primera parte de la actividad Kevin toma los valores de las longitudes de x, y, r que varían al mover el punto P sobre la circunferencia de radio 5, acción que le permite justificar los valores que toman las razones trigonométricas en los ángulos cuadrantales (ver Figura 13). Por ejemplo, si $\alpha = 90°$, $sen(90°) = \frac{y}{r} = \frac{5}{5} = 1$, pero al momento de calcular $tan\,(90°)$ y $sec(90°)$ se encuentra que éstas son "indefinidas, porque su expresión queda $\frac{5}{0}$".

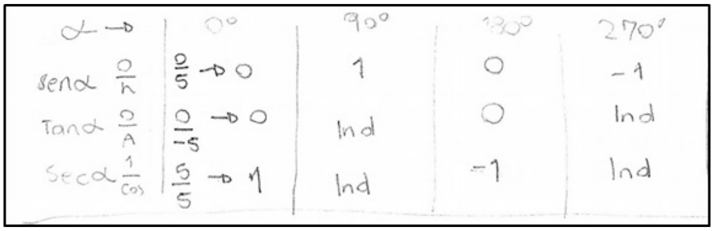


Figura 13. Respuesta de Kevin al ítem *a* de la Actividad 3

Con el fin de analizar el por qué esas expresiones son indeterminadas se plantea el ítem *b* de la actividad (ver Figura 12), donde se logra evidenciar cómo el estudiante decide sobre la tendencia de las razones trigonométricas. En este caso, Kevin analizó el valor que toma $sen(\alpha)$ y $tan(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 90° tanto por derecha como por izquierda (haciendo uso de la hoja de cálculo de *GeoGebra*), tal como se observa en los recuadros amarillos de la Figura 14.

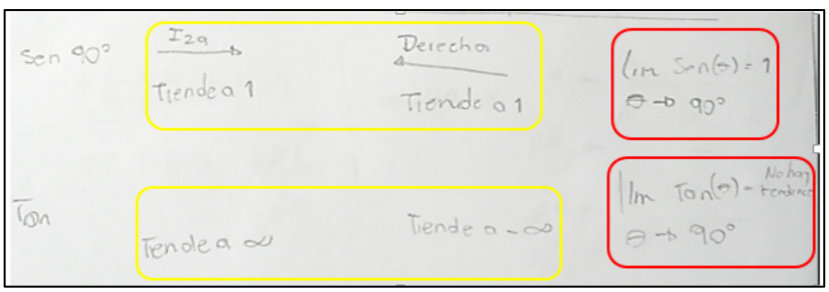


Figura 14. Respuesta de Kevin al ítem *b* de la Actividad 3

Con las complementariedades de la acción y expresión realizadas por Kevin, se pudo corroborar que el estudiante logra identificar la tendencia de los valores de las razones trigonométricas a medida que α se aproxima a los ángulos cuadrantales, tal como se muestra a continuación:

- I: ¿Qué valor toma sen(α) cuando nos aproximamos a 90° por izquierda y por derecha?
- K: Las flechas que realicé indican que α tiende por izquierda y por derecha a 90°. Eso hace que sen(α) tienda a 1, porque por izquierda tiende a 1 y por derecha también. Por lo tanto, el límite existe y es 1.
- I: Tiende a 1 o es igual a 1.
- K: Es 1, porque la variable tiende a 90° y entonces es igual a 1.

Es de resaltar que, en esta actividad, el uso de la hoja de cálculo que ofrece el *software* interactivo de *GeoGebra* contribuyó de manera dinámica en la construcción del concepto intuitivo de límite. Al respecto, Fernández (2010) expone que la hoja de cálculo puede ser un apoyo importante para que el estudiante construya una idea de aproximación, porque le permite realizar una representación tabular, además de generar un acercamiento al concepto de límite de una función en un punto.

En los razonamientos expuestos por Kevin para la Actividad 4 (ver Figura 15), se puede evidenciar que logró establecer aproximaciones a un valor "x", relacionando las aproximaciones en el dominio de la función, con la tendencia de $f(x)$ a través del registro numérico (en una tabla de valores para $(x_i, f(x_i))$ que se muestra en la Figura 16.

Exploración Dirigida
Actividad 4
4.1. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$

a) Abra GeoGebra y en la hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la izquierda y dibuje en rojo los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
b) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por izquierda? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
c) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable "x" se aproxima a 3 por la izquierda? **Justifique** su respuesta
d) En la misma hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la derecha y dibuje en azul los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
e) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por derecha? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
f) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable "x" se aproxima a 3 por la derecha? **Justifique** su respuesta.
g) Cuando nos aproximamos a $x = 3$. ¿A qué valor tiende $f(x) = x^2 - 1$? **Justifique** su respuesta.

4.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Figura 15. Actividad 4 del Taller de aproximación y tendencia

Para lo anterior, Kevin fue refinando aproximaciones en el sentido de ir buscando una mejor aproximación a 3 que indique la existencia de tendencia a medida que las aproximaciones laterales coincidan en un mismo punto.

Hoja de Cálculo

	A	B
1	2.9	7.41
2	2.99	7.9401
3	2.999	7.994001
4	2.9999	7.99940001
5	2.99999	7.9999400001
6		
7		
8	3.00001	8.0000600001
9	3.0001	8.00060001
10	3.001	8.006001
11	3.01	8.0601
12	3.1	8.61

Figura 16. Respuesta de Kevin al ítem *a* de la actividad 4

El estudiante, durante esta actividad, logró construir dos sucesiones numéricas, una que se aproxime a 3 por derecha y otra por izquierda (ver Figura 16), de modo que la distancia entre los valores tomados y 3 se aproximan a cero (acción que se muestra en el recuadro amarillo de la Figura 17). De modo que la función $f(x)$ toma valores más cercanos a 8. El mismo razonamiento es presentado cuando Kevin analiza los valores próximos a derecha de 3.

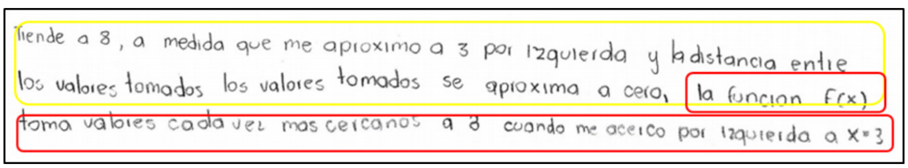
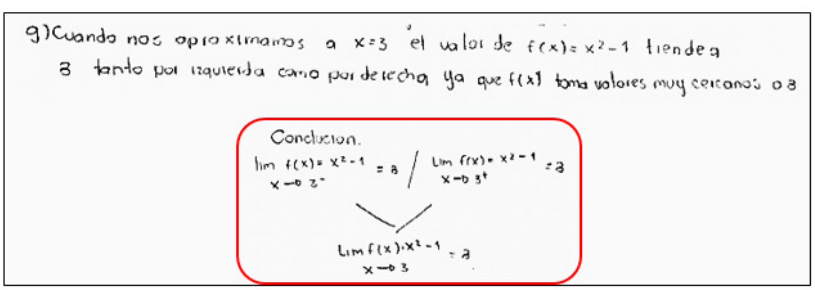

Tiende a 8, a medida que me aproximo a 3 por izquierda y la distancia entre los valores tomados los valores tomados se aproxima a cero, la funcion f(x) toma valores cada vez mas cercanos a 8 cuando me acerco por izquierda a x=3

Figura 17. Respuesta de Kevin al ítem *b* de la actividad 4

Estas aproximaciones que realizó el estudiante le permiten justificar que, a medida que "se aproxima a $x = 3$, f(x) tiende a 8 por izquierda y por derecha" (realizando dos flechas que indican tendencia), y ese valor sería el límite de la función en ese punto (ver recuadro rojo de la Figura 18).


g) Cuando nos aproximamos a x=3 el valor de f(x)= x²-1 tiende a 8 tanto por izquierda como por derecha ya que f(x) toma valores muy cercanos a 8

Conclusion.

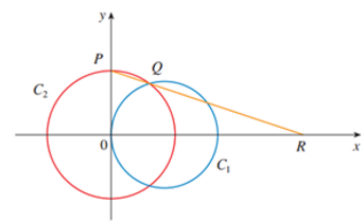
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = x^2-1 = 8$ / $\lim_{x \to 3^+} f(x) = x^2-1 = 8$

$\lim_{x \to 3} f(x) = x^2-1 = 8$

Figura 18. Respuesta de Kevin al ítem g de la Actividad 4

Por último, la Actividad 5 (ver Figura 19) se planteó de manera retadora con el propósito de identificar cómo el estudiante interpreta la relación entre la aproximación y la tendencia que se genera al variar "r" de la circunferencia C_2, con la ubicación del punto R en el plano cartesiano.

Tarea Retadora
Actividad 5
En la Figura se muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x-1)^2+y^2=1$ y una circunferencia C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0,r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x.



¿Qué le sucede a R al contraerse C_2; es decir cuándo r se aproxima a 0 ?

Figura 19. Actividad 5 del Taller de aproximación y tendencia

De acuerdo con el análisis de las respuestas de Kevin frente a las actividades relacionadas con las nociones de aproximación y tendencia, en la Tabla 3 se describen las complementariedades de la acción y la expresión identificadas para el Nivel 2 de Creación de la imagen, asociado al límite de una función en un punto a través del proceso de representación.

COMPLEMENTARIEDADES	
ACCIÓN	EXPRESIÓN
Reconoce numéricamente que es posible aproximarse a un número real tanto como se quiera.	Explica que es posible aproximarse a un valor c en la recta numérica, a través de la disminución de la distancia.
Reconoce la aproximación al límite por izquierda y derecha en un punto analizando la gráfica de la función.	Interpreta la existencia del límite de una función en un punto a partir de la gráfica de la función.
Realiza aproximaciones numéricas en un punto c por izquierda y por derecha.	Interpreta la tendencia como una aproximación que es posible mejorar tanto como se quiera.

Da ejemplos de aproximación y tendencia.	Explica la diferencia entre aproximación y tendencia.
Construye tabla de valores para reconocer las tendencias finitas o infinitas cuando el límite tiende al infinito.	Justifica por qué el límite de una función existe de acuerdo a su representación gráfica y tabular.

Tabla 3. Complementariedades de la acción y la expresión

4. Reflexiones

La comprensión de un concepto matemático, según Thom y Pirie (2006), surge cuando se realizan acciones (físicas o mentales) con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto. En ese sentido, Kevin ha logrado *crear imagen* para el concepto de límite a través de las complementariedades de la acción, en las que se destacan el uso de diferentes tipos de representación, en especial la hoja de cálculo de *GeoGebra*; además, fue capaz de analizar el límite de una función como lo que sucede cerca del punto y no en el punto.

Por otra parte, Kevin muestra complementariedades de la expresión al realizar distinción entre las nociones de aproximación y tendencia, con base en la disminución de la distancia (haciendo referencia a calcular el error absoluto), que cada vez puede ser mejorada, y también logra establecer aproximaciones en el dominio y en el rango de la función a través del registro numérico y gráfico.

El diseño de las actividades planteadas en este taller permitió favorecer la creación de la imagen del concepto de límite de una función en un punto, que se pudo describir a través de las complementariedades de la acción y expresión. La actividad mediada por *GeoGebra* y las diferentes representaciones posibilitadas en el taller, le permitieron a Kevin identificar y diferenciar las nociones de aproximación y tendencia; además, establecer aproximaciones a un valor "x", relacionando las aproximaciones en el dominio de la función con los valores que toma $f(x)$ para esas aproximaciones. Al igual que Blázquez y Ortega (2002), se evidencia que este primer acercamiento es más entendible por los estudiantes debido a la simplicidad con la que se presenta.

La interacción con los medios tecnológicos en el transcurso de las actividades (orientación dirigida) que requerían de la exploración de un archivo en *GeoGebra* permitió que los estudiantes encontraran respuesta a las actividades y superaran obstáculos en la construcción de imágenes del concepto, además de que, para crear la imagen del límite de una función en un punto, el estudiante se apoyó en las diferentes representaciones que ofrece *GeoGebra* para tener una mejor visualización.

Referencias

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, M. (1994). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140), Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (ed.), *Actas del III SEIEM*. Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8*(30), 67-82.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Fernández, J. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones* (Tesis de Maestría). España: Universidad de Granada.

Fiallo, J. & Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación.* Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers.* Morelia, México: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Moreno-Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, L. (2014). *Educación matemática: del signo al pixel*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505-528.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación* (Tesis de Maestría). Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. D.F., México: Trillas.

Santos-Trigo, M. (2010). A mathematical problem-solving approach to identify and explore instructional routes based on the use of computational tools. In J. Yamamoto, J. Kush, R. Lombard & J. Hertzog (Eds.), *Technology Implementation and Teacher Education: Reflective Models* (pp. 208-313), Hershey PA: IGI Global.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371-397.

Tall, D. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive Computer Graphics* (Thesis Ph. D). University of Warwick. England.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1992). Students' difficulties in calculus. In *Proceedings of Working Group*. Québec, Canada: ICME-7.

Thom, J., y Pirie, S. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of Mathematical Beaver*, *25*, 185-195.

14 Un dispositif cyclique pour la formation de futurs enseignants de mathématiques au secondaire à travers des situations d'investigation : une illustration de ce qui se fait au Québec

Fernando Hitt, Mireille Saboya[1]

Resumen

Desde 2001 en la escuela primaria y 2004 en la escuela secundaria, el plan de estudios de Quebec se ha basado en competencias. Ha habido un cambio en la formación del profesorado, de matemáticas centradas en la resolución de problemas a la formación basada en la resolución de situaciones problema para el desarrollo de competencias de los estudiantes. En este texto presentamos un dispositivo por ciclos de entrenamiento en torno a la modelación matemática. Nuestro objetivo es trabajar la primera competencia disciplinaria en este campo, que se titula *Resolver una situación-problema*. La competencia transversal de corte intelectual (aplicable a todas las disciplinas) es la de *Resolver problemas*, así como la competencia transversal de orden metodológico corresponde a *Explotación de las tecnologías de la información y la comunicación* (MELS, 2005a). Además, en este dispositivo tenemos en cuenta el currículo de Quebec (MEQ, 2001), que se basa en tres marcos teóricos de aprendizaje (constructivismo, cognitivismo y socioconstructivismo), así como en diversas investigaciones. Estas consideraciones nos han llevado a un modelo de enseñanza basado en situaciones de investigación que tienen un componente tecnológico y siguen el método de enseñanza ACODESA. Estas situaciones se dieron en tres cursos de didáctica en la formación inicial de futuros profesores de matemáticas en la Universidad de Quebec en Montreal. Se basan en experimentos en un entorno de secundaria que luego se utilizan en la formación inicial. Las reflexiones realizadas con los futuros profesores nos han regresado a la secundaria para experimentar con situaciones reorganizadas, en un proceso cíclico que comprende varios viajes de ida y vuelta entre la escuela secundaria y la formación inicial. Damos a conocer en el presente texto sobre este sistema de formación, que considera el impacto de la experimentación tanto en las escuelas como en la formación del profesorado para construir cursos de formación inicial, bajo la óptica de lo que viven los estudiantes de secundaria y los futuros profesores en matemáticas.

Palabras clave: formación docente, tecnología, ACODESA, modelización, investigación y formación cíclica.

[1] Université du Québec à Montréal, Canada.

Résumé

Depuis 2001 au primaire et 2004 au secondaire, le curriculum du Québec est axé sur les compétences. On est passé d'une formation des enseignant(e)s en mathématiques centrée sur la résolution de problèmes à une formation basée sur la résolution de situations-problèmes visant le développement de compétences chez les élèves. Dans ce texte, nous présentons un dispositif qui comprend une formation par cycles autour de la modélisation mathématique. Nous visons un travail sur la première compétence disciplinaire en mathématiques qui s'intitule « Résoudre une situation-problème », la compétence transversale d'ordre intellectuel (applicable à toutes les disciplines) « Résoudre des problèmes », ainsi que sur la compétence transversale d'ordre méthodologique « Exploiter les technologies de l'information et de la communication » (MELS, 2005a). De plus, dans ce dispositif, nous prenons en compte le curriculum québécois (MEQ, 2001) qui s'appuie sur trois cadres théoriques de l'apprentissage (constructivisme, cognitivisme et socioconstructivisme) ainsi que sur différentes recherches. Ces considérations nous ont amenés vers un modèle d'enseignement qui repose sur des situations d'investigation, situations qui ont une composante technologique et qui suivent la méthode d'enseignement ACODESA. Ces situations ont pris place dans trois cours de didactique de la formation initiale de futurs enseignants de mathématiques à l'Université du Québec à Montréal. Elles reposent sur des expérimentations en milieu scolaire au secondaire qui sont par la suite exploitées en formation initiale, les réflexions menées auprès des futurs enseignant(e)s nous ont amenés à retourner à l'école secondaire pour expérimenter des situations réaménagées et ce, dans un processus cyclique comprenant plusieurs allers retours entre l'école secondaire et la formation initiale. Nous rapportons dans ce texte ce dispositif de formation qui prend en compte les retombées des expérimentations à la fois en milieu scolaire et en formation afin de bâtir les cours de formation initiale sous la lunette de ce que vivent en mathématiques les élèves du secondaire et les futurs enseignant(e)s.

Mots clés : formation des enseignants, technologie, ACODESA, modélisation, recherche et formation par cycles.

Abstract

Since 2001 in elementary school and 2004 in secondary school, the Quebec curriculum has been competency-based. There has been a shift from teacher training in mathematics focused on problem-solving to training based on situations-problem solving aimed at developing students' competencies. In this text, we present a device that includes training by cycles around mathematical modeling. We aim to work on the first disciplinary competence in mathematics which is entitled "Solving a situation-problem", the transversal intellectual competence (applicable to all disciplines) "Solving problems", as well as on the transversal competence of methodological order "Exploiting information and communication technologies" (MELS, 2005a). In addition, in this device, we take into account the Quebec curriculum (MEQ, 2001) which is based on three theoretical learning frameworks (constructivism, cognitivism and socioconstructivism) as well as on various researches. These considerations have led us to a teaching model that is based on investigative situations, situations that have a technological component and that follow the ACODESA teaching method. These situations took place in three didactics courses in the initial training of future mathematics teachers at the University of Quebec in Montreal. They are based on experiments in a secondary school environment which are then used in initial training. The reflections carried out with future teachers have led us to return to secondary school to experiment with reorganized situations in a cyclical process comprising several back and forth trips between secondary school and initial training. We report in this text this training system which takes into account the impact of experiments both in schools and in training in order to build initial training courses under the lens of what secondary students and future teachers of in mathematics.

Key-words: teacher training, technology, ACODESA, modeling, research and cycle training.

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous souhaitons présenter un dispositif de formation mis en place, à l'Université du Québec à Montréal (UQAM), dans trois cours de didactique des mathématiques destinés à des futurs enseignants du secondaire, *Didactique de l'algèbre, Didactique de la variable et des fonctions* et *Applications pédagogiques de l'informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques*. Il s'agit d'un dispositif par cycles qui prend appui sur des expérimentations en milieu scolaire au secondaire, résultats qui sont réinvestis en formation auprès de futurs enseignants au secondaire. L'exploitation de ces résultats auprès des étudiants universitaires amène à revoir l'expérimentation menée avec les élèves du secondaire et invite ainsi à un retour en milieu scolaire à la lumière de ce qui a été vécu en formation. On peut dire qu'il s'agit d'un dispositif qui s'appuie sur une formation en mouvance, une formation revue à partir de ce que vivent en mathématiques les élèves du secondaire et les futurs enseignants. Ces différents cycles *milieu scolaire-formation* nous ont amené à considérer les *situations d'investigation* (Hitt et Quiroz sous presse). Celles-ci ont la particularité de comporter une composante technologique et de suivre la méthode d'enseignement ACODESA (Apprentissage Collaboratif, Débat et Autoréflexion; Hitt, 2007). Mais avant de présenter les situations d'investigation et le dispositif de formation par cycles, attardons-nous sur quelques recherches menées principalement au Canada, en France et aux États-Unis et qui s'intéressent à l'utilisation de la technologie en salle de classe. Ces recherches sont à la base de la prise en compte d'une composante technologique dans les situations d'investigation.

Dans les années 80 et au début des années 90, la notion de représentation a vécu un développement majeur (Janvier, 1987; Duval, 1988, 1993, 1995; Zimmermann et Cunningham, 1991). À l'époque, la technologie avait montré son efficacité pour la présentation de plusieurs représentations dans les écrans de calculatrices et d'ordinateurs. Les changements curriculaires ont par la suite commencé à prendre en compte cette efficacité technologique (e.g. « Triple representation model » de Schwarts, Dreyfus et Brukheimer, 1990) et les manuels scolaires ont profité des théories constructivistes pour lancer une nouvelle approche d'enseignement (e.g. « Calculus. Graphical, Numerical, Algebraic » de Finney, Thomas, Demana et Waits ,1994).

Au Québec, la communauté éducative avait pensé que la technologie pourrait résoudre beaucoup de problèmes d'apprentissage et les autorités éducatives se sont laissées porter par cette vague enthousiaste. Ainsi, on peut voir des affirmations comme la suivante :

> La technologie ne garantit pas la réussite de l'élève en mathématique, car les calculatrices et l'ordinateur, comme le traitement de texte pour un écrivain, ne sont que des outils. ***Toutefois, elle permet à l'élève d'acquérir et de comprendre les nouveaux concepts plus rapidement*** [Nous avons mis en gras la phrase qui nous interpelle] (Ministère de l'Éducation du Québec, 1999, p. 6).

Chez les chercheurs, l'enthousiasme a été de courte durée. En effet, ils se sont rendus compte qu'il fallait étudier plus en profondeur les problèmes émergents qui surgissent quand on utilise la technologie dans la classe de mathématiques (Guin et Trouche, 1999; Tall, 2000; Artigue, 2002), et ainsi déceler les éléments qui empêchent l'apprentissage des mathématiques. Par exemple, Guin et Trouche (1999) souligne :

> Let us refer to a significant example, concerning the following question to 100 students 18 years old: $\lim_{x \to \infty} \ln x + \sin x$. All student responses were correct in the modality without the calculator (50 students). On the other hand, confronted with the rather disturbing graph produced by the calculator, students could not come to terms with the inconsistency of the results displayed by the machine: in this case only 10% of the answers were correct (50 students). (p. 197).

Deux principaux problèmes sont soulevés:

a) Un problème lié à la formation des enseignants qui résistent à l'utilisation de la technologie dans la classe de mathématiques. Guin et Trouche

(1999) affirment: "Nevertheless, no more than 15% of the teachers include graphic calculators in their teaching, in spite of the fact that all students have a graphic calculator in scientific classrooms" (in the Fifth and Sixth Form, p. 195).

b) Les problèmes de conversion entre représentations. Guin et Trouche (1999) remarquent à cet effet: "There is an unavoidable gap between 'real' mathematics and the image reflected by calculators (at the graphic level as well as at the numerical level)" (p. 198).

Nous pensons que ces problèmes liés à l'utilisation de la technologie devraient être considérés dans la formation des enseignants du XXI^{e} siècle et par ricochet prendre en considération les diverses représentations sous-jacentes. Dans la prochaine section, nous allons présenter des cadres théoriques sur les représentations qui permettent de mieux comprendre les problèmes d'apprentissage des élèves signalés par Artigue (2002), cadres qui ont guidé notre choix vers les *situations d'investigation*, situations qui prennent place dans le dispositif de formation par cycles qui est l'objet de ce texte.

2. Cadres théoriques sur les représentations

2.1 Une théorie constructiviste centrée sur les représentations

La théorie de Duval (1993, 1995) sur les représentations continue à être un cadre utilisé dans la recherche en didactique des mathématiques. Il repose sur le passage de la Sémiosis à la Noésis, passage qui s'attarde aux processus de traitements et de conversions entre représentations et qui permet l'articulation de différents registres (voir Figure 1). Ce cadre, basé sur le constructivisme, intègre de façon cohérente les notions d'abstraction empirique et abstraction réfléchissante de Piaget avec les processus de conversion entre représentations et la coordination de registres de représentation.

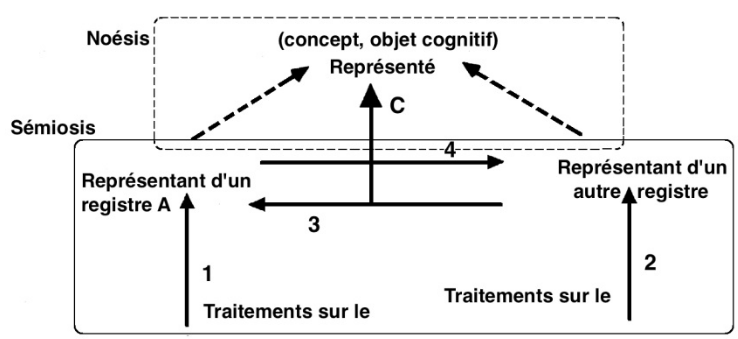


Figure 1. Adaptation de la figure utilisée par Duval (1993, p. 44), Sémiosis, Noésis et registres de représentation

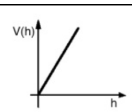
Duval (1993) définit comme suit un registre de représentation :

> Pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre les trois activités cognitives fondamentales liées à la sémiosis :
>
> 1. La formation d'une représentation identifiable.
> 2. Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée.
> 3. La conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre (p. 40-41).

Donc, à partir d'un seul système sémiotique, par exemple l'arithmétique, on peut construire plusieurs registres de représentation et les traitements sont différents pour chaque registre. Ainsi, les représentations 0,25, ¼ et 25 x 10^{-2} appartiennent à des registres différents, les opérations qui sont des traitements arithmétiques se faisant de différente façon dans chacun de ces registres, décimal, fractions et nombres écrits en notation scientifique (Duval, 1993).

Lors de la construction d'un concept mathématique, les registres peuvent être à la base de difficultés d'apprentissage. Ces registres définissent des représentations institutionnelles qui sont les représentations que l'on trouve dans les manuels scolaires, les écrans d'ordinateur et qui sont utilisées par l'enseignant(e) en classe. Ainsi, la notion de registre chez Duval implique l'étude, la construction et la conversion de représentations institutionnelles.

Le dispositif par cycles a débuté par une première expérimentation sur le concept de fonction auprès d'enseignants de mathématiques du secondaire (Hitt 1998). Prenant appui sur la théorie de Duval, nous avons fait ressortir des difficultés d'apprentissage qui reposent sur les processus de conversion entre représentations chez des enseignant(e)s qui sont des fois défaillants (voir Figure 2). Les résultats obtenus lors de cette expérimentation étaient partagés avec les futurs enseignants de mathématiques une fois qu'ils avaient eux-mêmes faits ces tâches.

<table>
<tr><td colspan="3">Dans les représentations graphiques ci-dessous, la variable indépendante est la hauteur identifiée par h et le volume la variable dépendante désignée par V(h). Dessinez un récipient qui est en lien avec la représentation graphique proposée. Justifiez votre choix.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Dessinez un récipient
24/28 réponses correctes</td><td>Nous pouvons remarquer ici que les enseignant(e)s ont majoritairement bien répondu à la question et associent un récipient convenable au tracé proposé.</td></tr>
</table>

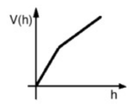
	Dessinez un récipient **11/28 réponses correctes**	Par contre, dans ce cas, peu d'enseignant(e)s dessinent un récipient adéquat. Le graphique présente un changement dans la forme du récipient qu'il est difficile à interpréter par les enseignant(e)s.

Figure 2. Réponses à deux questions posées à des enseignant(e)s et qui impliquent une conversion entre représentations

2.2 Un changement de paradigme : vers une approche socioculturelle

À la même époque, dans les années 90, d'autres chercheurs proposent une approche socioculturelle de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques (diSessa, Hammer, Sherin et Kolpakowski, 1991). Ces derniers ont décidé de proposer à des élèves des situations problèmes pour favoriser l'émergence d'idées et de représentations présentes dans la classe. Dans une approche papier crayon, ils demandent à un groupe d'élèves de 6e année du primaire de schématiser une situation proposée. Une équipe d'élèves répond à la question demandée par diSessa et coll., en faisant une schématisation en tirets (voir Figure 3).

"A motorist is speeding across the desert, and he's very thirsty. When he sees a cactus, he stops short to get a drink from it. Then he gets back in his car and drives slowly away".

"Mitchel explained that his key idea was to use the slant of the segment to represent speed: 'If the line is horizontal, he's going really really fast. And the further up the line slants, the slower it goes. And then when it gets like this (vertical), it is a stop".

Figure 3. Situation tirée de diSessa *et al.* (1991, p. 131)

Nous pouvons remarquer que les élèves ont isolé deux variables : le temps et la vitesse. À partir des explications données par l'un des élèves de l'équipe, les chercheurs ont noté la présence d'une covariation entre les deux variables : *le temps qui augmente et la vitesse qui dépend du temps.* Tout nous laisse croire que la ligne horizontale représente le temps et/ou le chemin parcouru par le conducteur (distance parcourue), et la position des segments représente la valeur de la vitesse. Cette représentation n'est pas une représentation institutionnelle appartenant à un registre dans le sens de Duval. L'explication de l'élève (voir Figure 3) a du sens pour les élèves et il est important de la retenir car elle fait preuve d'une interprétation créative de la situation. Ces représentations sont nommées des représentations spontanées associés aux représentations mentales fonctionnelles, non reconnues par la communauté mathématique, elles ont toutefois du sens pour celui qui les construit (Hitt, 2006). Notre dispositif de formation a été teinté par l'approche socioculturelle. En effet, l'émergence de ces représentations, spontanées et fonctionnelles sont celles qui sont visées quand les élèves et futurs enseignants résolvent des situations d'investigation, l'objectif des situations d'investigation étant d'amener les élèves et étudiants vers les représentations institutionnelles.

Ainsi, à la fin du XXe et au début du XXIe siècle, coexistent des théories constructivistes centrées sur les représentations institutionnelles et des théories socioculturelles basées sur l'émergence de représentations spontanées (diSessa et coll., 1991). L'approche technologique à travers des processus d'instrumentalisation et d'instrumentation est également présente (Rabardel, 1995 ; Guin et Trouche, 1999, 2002).

3. L'approche privilégiée au Québec

Pour le monde de l'éducation, certains chercheurs penchent pour l'utilisation d'une théorie locale constructiviste qui puise aux idées de Vygotsky (Boutin, 2004). D'autres, par exemple Legendre (2008), proposent plutôt un prolongement d'un constructivisme qui sera utile pour l'apprentissage, celui-ci étant lié au cognitivisme sans toutefois développer un cadre théorique, mais plutôt un cadre pratique qui retient les approches cognitivistes et constructivistes. La tendance qui prend forme dans le monde de l'éducation au Québec est le socioconstructivisme (MELS, 2005a). Ainsi, le Ministère de l'Éducation du Québec explicite que :

> Le socioconstructivisme a servi de cadre de référence pour l'élaboration des programmes de la formation générale de base des jeunes. La réforme curriculaire de la formation générale des adultes s'inscrit dans ce même cadre comme paradigme épistémologique, tout en retenant des éléments des conceptions cognitiviste et constructiviste (MELS, 2005b, p. 12).
>
> Le Programme de formation s'appuie sur différents courants théoriques qui traitent de l'apprentissage et qui ont en commun la reconnaissance du rôle déterminant de celui qui apprend dans l'édification de ses compétences et

> de ses connaissances. Parmi ces courants, le cognitivisme, le constructivisme et le socioconstructivisme offrent des points de vue particulièrement éclairants… (MELS, 2007, p. 17).

Jonnaert (2009) proclame que l'approche socioconstructiviste favorise le développement des compétences. Par contre, von Glasersfeld suggère de « faire table rase », c'est-à-dire, de commencer depuis le début par construire un cadre théorique d'un constructivisme social (il a appelé ainsi l'approche socioconstructiviste suivie au Québec), comme prolongement du constructivisme (von Glasersfeld, 2004, p. 294) en définissant les opérations élémentaires intellectuelles dans l'apprentissage comme a été fait avec le constructivisme de Piaget (p.e. abstraction réfléchissante).

Ainsi, le Ministère de l'Éducation du Québec décide de débuter le XXIe siècle avec une réforme appelée le « *Renouveau pédagogique* » et annonce une approche par compétences, en priorisant le socioconstructivisme tout en gardant un lien avec le constructivisme et le cognitivisme.

Au cœur de cette réforme en mathématiques apparaît la notion de situations problèmes. Comme le précisent Bednarz (2001, 2002) et Lajoie et Bednarz (2012, 2016), les différentes réformes scolaires vécues au Québec pendant le XXe siècle sont centrées sur la résolution de problèmes. La réforme en cours, mise en place en 2001pour le primaire et en 2004 pour le secondaire, présente toutefois une rupture avec l'ancien programme passant de l'atteinte d'objectifs au développement de compétences en priorisant le socioconstructivisme. Trois compétences disciplinaires sont nommées en mathématiques (MELS, 2007) :

> 1re compétence disciplinaire : Résoudre une situation-problème,
>
> 2e compétence disciplinaire : Déployer un raisonnement mathématique,
>
> 3e compétence disciplinaire : Communiquer à l'aide du langage mathématique.

C'est la première compétence « Résoudre une situation-problème » qui nous intéresse dans ce texte. Le ministère définit une situation-problème comme suit :

> *Sens de la compétence Résolution d'une situation–problème*
>
> Qu'est-ce qui caractérise une situation-problème ? En mathématique, une situation - problème doit satisfaire à l'une ou l'autre des conditions suivantes :

- la situation n'a pas été présentée antérieurement en cours d'apprentissage;
- l'obtention d'une solution satisfaisante exige le recours à une combinaison non apprise de règles ou de principes dont l'élève a fait ou non l'apprentissage;
- le produit, ou sa forme attendue n'a pas été présenté antérieurement (p. 19).

Cette première compétence disciplinaire implique selon le ministère :

a) Décoder les éléments qui se prêtent à un traitement mathématique,
b) Représenter la situation-problème par un modèle mathématique,
c) Élaborer une solution mathématique,
d) Valider la solution,
e) Échanger l'information relative à la solution (p. 5).

Ces cinq éléments sont ce que le ministère nomme les composantes de la compétence. Comme nous l'avons précisé, Lajoie et Bednarz (2012, 2016) soulignent une rupture de ce programme avec les précédents, celui-ci prenant en considération la notion de complexité véhiculée par les situations problèmes. Cette complexité est décrite par Lajoie et Bednarz (2016) comme suit :

> Notre examen de différentes situations-problèmes expérimentées en contexte scolaire à des fins d'évaluation de la compétence à résoudre des situations-problèmes montre que ces dernières sont souvent élaborées sur le même modèle : celui d'un projet à mener, faisant intervenir de multiples données et plusieurs contraintes, et sollicitant pour sa réalisation l'aide de l'élève (p. ex. organisation d'un voyage; projet de rénovation de la piscine municipale; projet d'aménagement d'un parc; contribution à la réduction du CO2 dans l'environnement de l'école). Dans ces situations, toujours associées à un énoncé couvrant plusieurs pages, où se côtoient de multiples données, des informations données sous divers modes (en mots, sous forme d'illustrations, de tableaux, de graphiques, etc.), l'élève est appelé à jouer le rôle d'un « responsable » qui doit prendre en charge ce projet (p. 13-14).

En allant dans le même sens, une analyse du type de situations-problèmes provenant du ministère, montre que celles-ci ont été élaborées pour développer des stratégies d'organisation de données plutôt que le recours à des conjectures, prédictions, généralisations et preuves (Saboya, Hitt, Quiroz et Antoun, sous presse). Ainsi, tout semble indiquer que les situations-problèmes présentées par le ministère, visent une pensée convergente plutôt qu'une pensée divergente telle que véhiculée par la définition de la 1ère compétence « Résoudre des situations-problèmes ».

Une question émerge dans cet état de faits : le changement de la résolution de problèmes à la résolution de situations-problèmes, ne requiert-il pas une utilisation de la technologie qui soutient les élèves dans cette résolution?

Nous retenons ainsi l'importance d'un travail sur les situations-problèmes et sur l'utilisation de la technologie, ce qui rejoint les propos du Ministère du Québec. En effet, en plus de la compétence en mathématiques « Résoudre une situation problème », celui-ci explicite comme compétences transversales[2] « La résolution de problèmes » qui est classée dans les compétences d'ordre intellectuel et la compétence « Exploiter les technologies de l'information et de la communication » qui est d'ordre méthodologique.

De plus, les visées autour de la première compétence disciplinaire « Résoudre une situation-problème » vont dans le sens de l'importance de partir autant que possible de situations tirées de la vie réelle, de situations concrètes, de situations appartenant à ce que le ministère nomme les domaines généraux de formation[3]. La modélisation mathématique apparaît ainsi comme un incontournable pour la résolution de ces situations.

Du côté des manuels scolaires de l'école secondaire, de nouveaux manuels ont fait leur apparition en 2007-2008. Jusqu'en 2007, l'utilisation de la calculatrice scientifique et des didacticiels tels que Cabri-géomètre étaient privilégiés dans les manuels de l'ancienne réforme, ceux-ci étant intégrés à la résolution de problèmes. Une analyse globale des manuels scolaires en cours montre une continuité dans les outils technologiques proposés dans l'ancienne réforme et ne prenant pas en considération l'approche par la résolution de situations-problèmes. Ainsi, les auteurs de manuels proposent l'utilisation de la calculatrice pour amener les élèves à faire des représentations graphiques des fonctions et ils proposent l'utilisation d'Excel pour les suites numériques. Toutefois, ils ne font pas appel à ces outils pour la résolution de situations-

---

[2] Un compétence transversale est une compétence qui est commune à toutes les disciplines (langues, mathématiques et sciences, histoire et géographie, arts,…).

[3] Le programme de formation de l'école québécoise distingue cinq domaines généraux de formation. Ces domaines sont *Santé et bien-être; Orientation et entreprenariat; Environnement et consommation; Médias; Vivre-ensemble et citoyenneté*. Les domaines généraux de formation « permettent de cerner les apprentissages essentiels au développement d'un regard lucide sur les grandes composantes de la réalité » (MELS, 2007, p. 1), ils sont de plus « des leviers pour motiver les élèves, soutenir leurs apprentissages et guider leur éducation citoyenne » (p. 2).

problèmes. Cabri-géomètre est suggéré comme outil de vérification et non pas comme outil de découverte.

Ainsi, l'enseignant(e) fait face à une problématique complexe. D'une part, la définition de situation-problème tirée des documents ministériels amène vers le déploiement d'une pensée divergente. D'autre part, la résolution des situations-problèmes proposées par le ministère tend vers une pensée convergente. La pensée divergente implique implicitement l'émergence de représentations non institutionnelles (du type fonctionnelles-spontanées) dans un processus de modélisation mathématique. Si tel est le cas, comment amener les élèves à passer aux représentations institutionnelles dans un contexte de développement de compétences dans un contexte cognitiviste, constructiviste et/ou socioconstructiviste?

Comme possible réponse, nous proposons les *situations d'investigation* qui comprennent une composante technologique et s'appuient sur la méthode d'enseignement ACODESA (Apprentissage Collaboratif, Débat et Autoréflexion, Hitt 2007). Ces situations d'investigation sont au cœur d'un dispositif de formation qui prend en considération les expérimentations menées en milieu scolaire et celles auprès des futurs enseignant(e)s de mathématiques au secondaire dans des allers retours qui enrichissent les cours de formation et décrivent, ce faisant, un dispositif de formation par cycles.

4. Un dispositif de formation par cycles autour des situations d'investigation

4.1 Les situations d'investigation

Dans un projet de recherche qui a débuté en 2007, nous avons cherché à mieux comprendre les problèmes d'apprentissage vécus par les élèves de l'école secondaire autour de la notion de situation-problème et du concept de fonction. La modélisation mathématique était au centre de nos préoccupations. Nous cherchions à faire émerger les représentations non institutionnelles (fonctionnelles-spontanées) et institutionnelles, à favoriser l'articulation de ces représentations (institutionnelles ou non) et à les faire évoluer dans un environnement d'apprentissage collaboratif chez les élèves du secondaire (Hitt et González-Martín, 2015). Les situations qui ont de telles caractéristiques ont été nommées par la suite des situations d'investigation (Hitt et Quiroz, sous presse). Ces situations font appel au processus de modélisation mathématique et peuvent être schématisées comme suit (voir Figure 4).

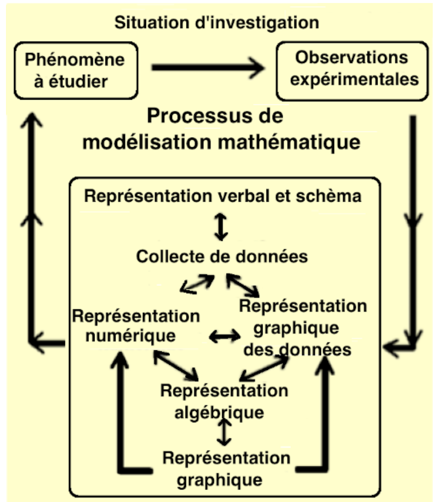


Figure 4. Les situations d'investigation dans un processus de modélisation mathématique

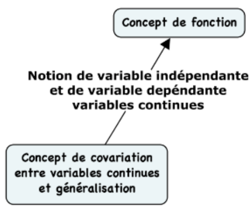
Ainsi, les situations d'investigation (pour les distinguer des situations-problèmes du Ministère) requièrent un processus de modélisation où l'émergence de représentations non institutionnelles (pensée divergente) est possible. La résolution de ces situations qui se fait dans un milieu socioculturel, va favoriser l'évolution de ces représentations vers les représentations institutionnelles. Les situations d'investigation s'appuient sur la méthode ACODESA (Hitt, 2007).

4.2 Une recherche menée en milieu scolaire

Une expérimentation (Hitt et González-Martín, 2015) a été menée auprès d'élèves de 14-15 ans autour de la covariation entre variables, concept qui est considéré comme un préalable au concept de fonction (Carlson, 2002). Cette expérimentation a pris place avant l'enseignement formel sur les fonctions. Cinq situations ont été vécues par les élèves (voir Figure 5), situations qui impliquent le recours à différentes représentations[4]. Pour faire émerger les représentations

[4] Quelques activités ont été inspirées de versions préliminaires de Janvier C., Janvier B. et Charbonneau C. liées au cours de Didactique de la variable et des fonctions de l'Université du Québec à Montréal.

non institutionnelles, nous avons proposé aux élèves d'utiliser si nécessaire du matériel (un compas, du fil, des bâtonnets en bois, etc.) et l'enseignant a suivi la méthode d'enseignement ACODESA (Hitt, 2007) auprès des élèves. Ces situations ont été par la suite utilisées par d'autres enseignants après l'expérimentation.



Situation\Représentation	Schéma	Verbale	Graphique	Algébrique
Le photographe	√	√	X	X
Le randonneur	√	√	√	X
Le jacuzzi	√	√	√	√
Les carrés	√	√	√	√
Les ombres	√	√	√	√

Figure 5. Situations misant sur un travail autour de la covariation entre variables

Les résultats de cette recherche a permis de relever l'importance d'utiliser du matériel pour motiver l'abstraction (voir Figure 7), de porter une attention aux gestes produits par les élèves (Arzarelo, 2006), à la médiation sémiotique en mathématiques (Voloshinov, 1973; Radford, 2003, 2011; Bartolini-Bussi et Mariotti, 2008). À titre d'exemple, nous présentons la situation du randonneur (voir Figure 6).

> Un randonneur entreprend une longue randonnée en forêt. Il suit une piste fermée (ou un circuit) qui lui permet de revenir à son point de départ à la fin de la randonnée. Durant sa promenade, il ne repasse jamais au même endroit de la forêt et il ne fait qu'un seul tour de piste.
>
> Un poste de secours est situé à lue randonnée en forêt. Il suit une piste fermée (ou un c mât avec un drapeau permet au randonneur de repérer l'emplacement du poste de secours quel que soit l'endroit où il se trouve sur la piste.
>
> Trace une piste de ton choix et place le poste de secours à l'intérieur en respectant l'énoncé.
>
> Ma piste de randonnée est :
>
> Comment interagissent les variables *distance entre le randonneur et le poste de secours* et *distance parcourue par le randonneur*? Justifiez.

Figure 6. Mise en situation de l'activité du randonneur

Voici quelques images des pistes choisies par les élèves (une piste carrée fait avec un fil flexible), la représentation de cette piste par des bâtonnets fixés à un fil et le déploiement du fil pour obtenir une représentation graphique du parcours (qui est une représentation spontanée/institutionnelle).

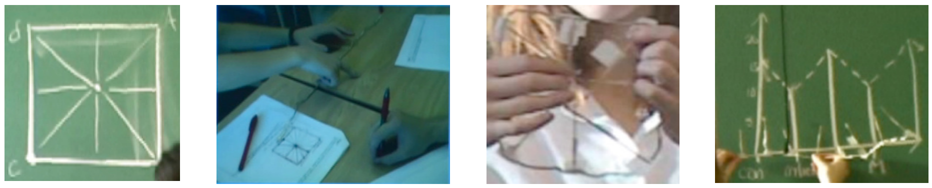


Figure 7. Différents choix d'une piste, de la position du randonneur et manipulation d'objets physiques

Une fois ces résultats obtenus en salle de classe au secondaire, les situations ont été proposées aux futurs enseignants dans le cours de *Didactique de la variable et des fonctions* à l'UQAM. Les étudiants ont vécu ces situations comme s'ils étaient des élèves et nous les avons animées en suivant la méthode d'enseignement ACODESA. Nous avons dégagé avec eux la façon de mener ces situations, le choix des questions posées et leur intention. Des productions d'élèves issues de la recherche (Hitt et González-Martín, 2015) et des extraits de transcription d'explications d'élèves ont été présentés aux futurs enseignants pour dégager le potentiel des situations en termes de passage des représentations non institutionnelles aux institutionnelles mais également des limites.

La réflexion menée avec les futurs enseignants a permis de retenir deux aspects :

a) Revivre ces situations (voir Figure 5) en formation initiale mais cette fois-ci en utilisant la technologie. En effet, celle-ci permet une approche dynamique et amène à une institutionnalisation plus riche.
b) Débuter un travail sur la notion de covariation entre variables (comme préalable au concept de fonction) en amont de la troisième année du secondaire (élèves de 14-15 ans). Nous avons visé un travail dès la première année au secondaire dans des situations de généralisation (élèves de 12-13 ans).

Ces constats ont amené un nouveau cycle d'expérimentations auprès des élèves de première année du secondaire (élèves de 12-13 ans) et des futurs enseignants en mathématiques. Une formation par cycles prend place qui s'appuie sur les réflexions suscitées autour d'expérimentations au secondaire et en formation initiale dans des allers retours qui alimentent les cours de formation initiale (voir Figure 8). Cette schématisation prend en considération la première expérimentation menée auprès d'enseignants (Hitt, 1998) et dont nous avons parlé dans la section 2.1, un questionnaire avait été soumis à des enseignants autour du concept de fonction suite à des observations en formation initiale.

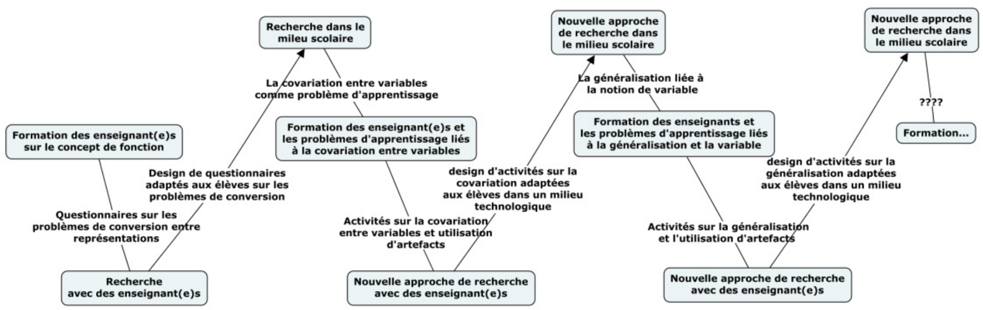


Figure 8. Dispositif de formation qui repose sur un processus cyclique en vue d'alimenter la recherche et la formation des enseignant(e)s

Ce processus cyclique repose sur un modèle pour lequel la formation des enseignant(e)s et la recherche en milieu pratique sont intimement liés.

4.3 Un réinvestissement en formation initiale

Suite aux réflexions menées avec les futurs enseignants autour de ce qu'ils ont vécu avec la situation du randonneur, la situation a été réaménagée pour tenir compte de la composante technologique et a donné place à la situation de la voiture télécommandée (voir Figure 9) qui a été expérimentée avec les futurs enseignants dans le cours de *Didactique de la variable et des fonctions*.

La voiture télécommandée

Des amis décident de participer à un concours de voitures télécommandées. Afin de s'entrainer, ils décident de tracer le circuit que la voiture devra suivre en s'imposant les contraintes suivantes :

- *La personne avec la télécommande devra se tenir à l'intérieur du circuit ;*
- *Le circuit doit être fermé et ne comporter aucun croisement, aucune boucle.*

Trace un circuit de ton choix et place la personne avec la télécommande à l'intérieur du circuit en respectant les contraintes.

Ma proposition de circuit est :

Comment interagissent les variables *distance parcourue par la voiture* et *distance entre la personne et la voiture*? Justifiez.

Figure 9. Activité du randonneur réaménagée : la voiture télécommandée

Cette situation prend en compte le dispositif lié à un processus de modélisation mathématique où les représentations institutionnelles et non institutionnelles sont au cœur de l'activité avec une composante technologique et suivant le modèle ACODESA. C'est là qu'est né le design des situations d'investigation.

Ainsi, en formation initiale dans le cours avant mentionné, il est demandé aux étudiants en suivant la méthode ACODESA de choisir une piste, celle-ci sera à la base de la construction d'un graphique discret à partir d'une corde et par la suite à la construction à main levée de la courbe au complet (Figure 10 à gauche). Les étudiants procèdent également à une simulation avec *GeoGebra* (Figure 10 à droite). La Figure 10 présente le travail fait par une équipe d'enseignants en formation, ils représentent le tracé en considérant deux positions différentes de la personne qui tient la télécommande.

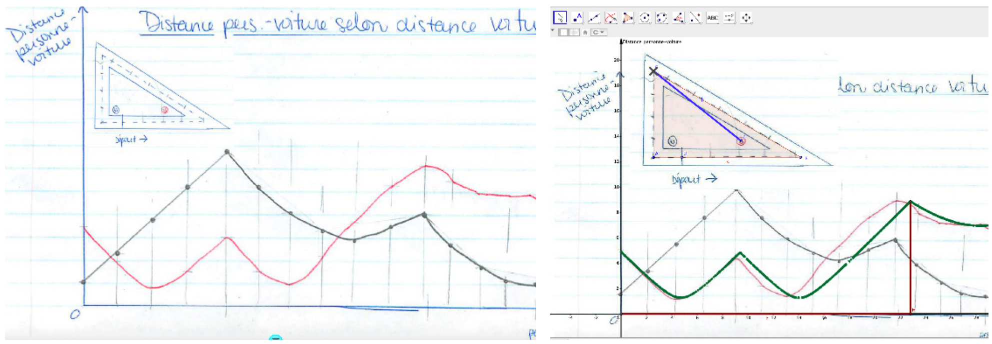


Figure 10. Productions d'une équipe d'enseignant(e)s en formation, qui à partir d'une piste choisie, utilisent la corde pour construire le graphique à main levée (approche papier crayon) et sur GeoGebra (approche technologique)

Dans la phase d'institutionnalisation d'ACODESA, nous soumettons aux futurs enseignants les résultats des différentes équipes produites dans GeoGebra (Figure 10 droite) et nous proposons d'utiliser la technologie dans l'interprétation des représentations graphiques à travers la question suivante : selon la représentation graphique, où se trouve la personne qui tient la télécommande ? Pour répondre à cette question, les étudiants doivent prendre en considération la distance parcourue par la voiture et la distance entre la personne et la voiture (voir Figure 11)

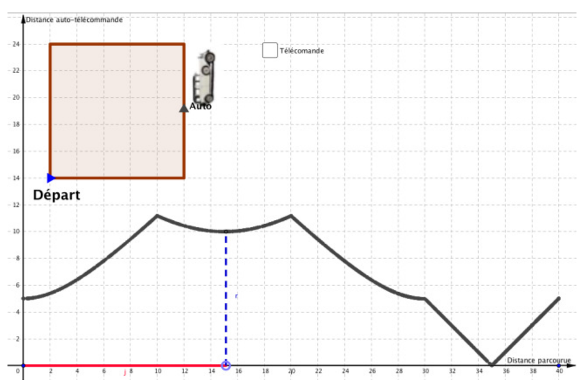
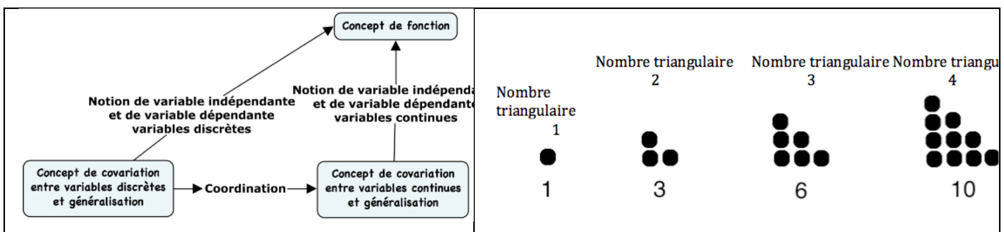


Figure 11. Utilisation de la technologie dans l'étape d'institutionnalisation d'ACODESA

Comme nous l'avons vu dans la section 4.2, la réflexion autour des situations de covariation (dont la situation du randonneur) nous a amené à considérer un travail sur la covariation entre variables en amont de la troisième année du secondaire. Une expérimentation dans une classe de première année du secondaire (élèves de 12-13 ans) a pris place dans ce sens, expérimentation qui s'inscrit dans le dispositif de formation par cycles, les résultats obtenus enrichissant le contenu du cours *Didactique de l'algèbre* en formation initiale de l'UQAM.

4.4 Un retour en milieu scolaire autour de la généralisation algébrique

Dans le cours *Didactique de l'algèbre* qui prend place à la deuxième année de formation initiale à l'UQAM, plusieurs situations de généralisation algébrique sont travaillées, situations qui visent la construction d'un symbolisme par les élèves et les futurs enseignants et la construction de formules. Une expérimentation menée en milieu secondaire suite aux réflexions explicitées dans les sections précédentes, a permis de mettre en lumière au-delà de la construction d'un symbolisme, une emphase sur la covariation dès les premières années du secondaire. L'expérimentation en milieu secondaire a été menée autour des nombres polygonaux avec des élèves de 12-13 ans (première année du secondaire, Hitt, Saboya et Cortés ,2016, 2017). L'expérimentation a pris place plus particulièrement autour des nombres triangulaires. Nous proposons dans la Figure 12, les premières questions de la situation d'investigation proposée aux élèves et reliées au travail papier crayon (travail individuel et en équipe).



Travail individuel puis en équipe (questions papier-crayon avant la technologie)

1) Observe bien ces nombres. Quel est le cinquième nombre triangulaire ? Représente-le. Explique la façon dont tu as procédé.

2) D'après toi comment sont construits ces nombres triangulaires ? Qu'observes-tu ?

3) Quel est le 11^{e} nombre triangulaire ? Explique comment tu fais pour le trouver.

4) Tu dois écrire un courriel COURT à un ami pour lui décrire comment procéder pour calculer le nombre triangulaire 83. Décris ce que tu lui écrirais. TU N'AS PAS À FAIRE LES CALCULS !
5) Et pour calculer n'importe quel nombre triangulaire, comment ferait-on (on veut encore ici un message COURT).

Figure 12. Une situation d'investigation autour des nombres triangulaires

Les résultats de cette recherche sont utilisés dans la formation des enseignants dans le cours *Didactique de l'algèbre* et comme modèle pour la construction de situations d'investigation dans un milieu technologique, dans le cours *Applications pédagogiques de l'informatique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* de l'UQAM. Il y a ainsi un retour des résultats obtenus auprès des élèves au secondaire en formation initiale permettant une cohérence entre différents cours de didactique des mathématiques de la formation.

Ces différentes expérimentations soulignent l'importance des représentations non institutionnelles dans la résolution de problèmes non routiniers. Nous avons ainsi consolidé notre approche théorique sur les représentations non institutionnelles. De plus, une attention est portée sur les processus de généralisation et sur l'importance de s'attarder à la transition des élèves du primaire au secondaire, plus précisément, à la transition de l'arithmétique à l'algèbre. Nous visons dans ce sens une continuité entre l'arithmétique et l'algèbre dans ce que nous avons nommé la « pensée arithmético-algébrique » (Hitt, Saboya et Cortés, 2016, 2017).

Ainsi, le dispositif de formation que nous décrivons ici repose sur des expérimentations par cycles, expérimentations qui alimentent la réflexion sur la modélisation en mathématique. Dans ce sens, certaines des situations proposées dans le cours *Didactique de l'algèbre* ont été reprises selon le modèle des situations d'investigation. Nous avons conçu six situations d'investigation (voir Figure 13) autour du développement de la pensée arithmético-algébrique avec l'utilisation des iPad et de GeoGebra. Ces situations visent la 6e année du primaire (10-12 ans) et la première année du secondaire (12-14 ans).

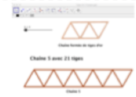
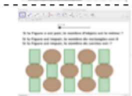
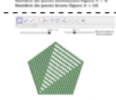
Représentation / Activité	Dessin/Schéma	Verbale	Généralisation	Approche technologique au choix
Le restaurant de Marcel	√	√	√	
Bijouterie « El Dorado »	√	√	√	
Le carré bordé	√	√	√	
Les rectangles et les cercles	√	√	√	
Le jardin de citrouilles	√	√	√	
Les nombres polygonaux (triangulaires, carrés, pentagonaux, etc.)	√	√	√	

Figure 13. Activités sur la covariation entre variables discrètes (6e au primaire et 1er au secondaire)

Une expérimentation a été menée récemment autour de ces situations au Mexique avec des élèves du troisième cycle du primaire et nous sommes en train d'analyser les données. Nos hypothèses reposent sur le fait que ces situations favorisent :

a) Une généralisation algébrique qui émerge dans une approche socioculturelle de l'apprentissage, et dans un milieu papier crayon et technologique.

b) Le développement d'une pensée covariationnelle entre variables discrètes avant le concept de fonction. La covariation étant un concept préalable à celui de fonction.

c) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans un processus naturel de modélisation mathématique qui s'appuie sur une pensée arithmético-algébrique.

Ce dispositif de formation par cycles a permis l'élaboration de situations d'investigation qui touchent à la généralisation algébrique à travers la covariation entre variables discrètes et qui prend place à différents niveaux du secondaire. Ces situations d'investigation visent une meilleure compréhension du concept de fonction (voir Figure 14). Les résultats obtenus autour de l'expérimentation autour des six activités de généralisation (voir Figure 13) va avoir des retombées sur la formation initiale des enseignants, bouclant le dernier cycle du dispositif de formation que nous avons décrit dans ce texte.

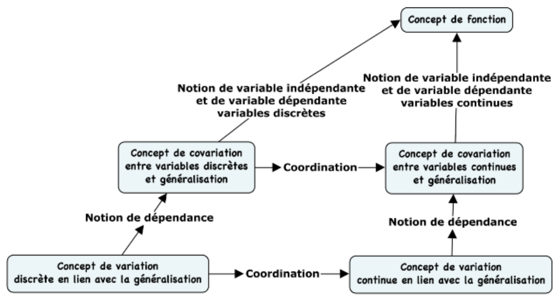


Figure 14. Étapes dans la construction de concepts comme prélude au concept de fonction dans une approche liée à la pensée arithmético-algébrique

5. Conclusion

Conscients du « renouveau pédagogique » du Québec, nous avons cherché à répondre à l'ambivalence qui existe entre le désir d'un travail sur des situations-problèmes qui exigent une pensée divergente et aux propositions de situations du ministère qui amènent plutôt à une pensée convergente. Nous proposons dans ce sens un travail autour des situations d'investigation qui visent une construction sociale des connaissances. Les futurs enseignant(e)s possèdent ainsi un bagage intéressant en ce qui concerne un travail autour du concept de fonction à différents niveaux scolaires, des situations mais également une façon de piloter ces situations en classe qui prend en considération l'émergence de représentations non institutionnelles de la part des élèves.

En ce qui concerne la modélisation mathématique et l'émergence de représentations non institutionnelles lors de la résolution de situations-problèmes, le cadre théorique local sur les représentations de Janvier (1987) ou de Duval (1993, 1995) n'est pas directement applicable et cela a impliqué la construction d'un nouveau cadre théorique local. Nous avons proposé un dispositif lié à la modélisation mathématique qui vise des allers retours entre des expérimentations en milieu scolaire et des réflexions avec les futurs enseignant(e)s à l'université. Ce dispositif repose sur l'élaboration de situations d'investigation qui vont favoriser les processus de modélisation mathématique à travers l'utilisation de la technologie comme outil et avec la méthode d'enseignement ACODESA.

Ainsi, dans ce texte, nous avons montré, en prenant un exemple sur le concept de fonction, l'importance de concevoir la formation des enseignant(e)s à l'intérieur d'un processus cyclique en incluant la technologie, qui va des réflexions suscitées dans les cours de formation des enseignant(e)s, à des expérimentations dans la classe de mathématiques, à un retour sur les contenus des cours de la formation des enseignant(e)s et ainsi de suite, processus qui nous a amené à concevoir la notion de pensée arithmético-algébrique.

Finalement, un point important à signaler, c'est de voir que la formation prend sens à travers ce dispositif de formation sur la pratique et s'appuie sur des situations d'investigation. Il y a ainsi un lien fort entre théorie et pratique procédant ainsi à une didactique en formation ancrée à la pratique.

Remerciements. Nous remercions tout particulièrement le XVII^{e} Groupe de travail Québec-Mexique 2019-2021, qui permet une communication plus étroite entre les chercheurs du Mexique et du Québec.

Références

Artigue, M. (2002). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire : les leçons de quelques ingénieries didactiques. In D. Guin et L. Trouche (Eds.), *Calculatrices symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique* (p. 277-349). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Arzarelo, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process. *Relime*, special issue, 267-299.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.

Bednarz, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants: Le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *1*(1), 61-80.

Bednarz, N. (2002) Pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes au Québec au XXème siècle. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (*ZDM*) *34*(4), 146-157.

Boutin, G. (2004). L'approche par compétences en éducation : un amalgame paradigmatique. *Connexions*, 81, 25-41.

Carlson, M. (2002). Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In Hitt, F. (Ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 63-77). Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN. Mexico.

diSessa, A., Hammer, D., Sherin, B. et Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing : Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior, 10*, 117-160.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchâtel: Peter Lang.

Finney, R., Thomas, G., Demana, F. et Waits, B. (1994). *CALCULUS.* Graphical, Numerical, Algebraic. De. Addison-Wesley.

Guin, D. et Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Guin, D. et Trouche, L. (Éds.) (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg, Vol. 11, 253-268.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt, F. et Quiroz, S. (sous presse). Enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico. En S. Quiroz, E. Núñez, M. Saboya y J-L. Soto (Eds.), *Investigaciones teórico-prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico*. AMIUTEM, México.

Hitt, F., Saboya, M. et Cortés C. (2016). Arithmetic-algebraic work space to promote free transit between the arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM Mathematics Education*.

Hitt, F., Saboya, M. et Cortés, C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Jonnaert, P. (2009). *Compétences et socioconstructivisme. Un cadre théorique*. Bruxelles : De Boeck.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *12*(2), 178-213.

Lajoie, C. et Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du 21e siècle au Québec : rupture ou continuité ? *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 16(1), 1-27.

Legendre, M-F. (2008). Un regard socioconstructiviste sur la participation des savoirs à la construction du lien social. *Éducation et francophonie*, *36*(2), 63-79. doi:10.7202/029480ar

Ministère de l'Éducation du Québec (1999). *Programme d'étude S, Mathématique 426 transitoire*. Québec, Canada : Gouvernement de Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (2001). *La formation à l'enseignement : les orientations, les compétences professionnelles*. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (2005a). Cadre théorique. Curriculum de la formation générale de base. *Apprendre tout au long de la vie*. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (2005b). *Le socioconstructivisme, un cadre de référence pour un curriculum par compétences*. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (2007). *Un programme de Formation pour le XXIe siècle, 2e Cycle du Secondaire*.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Radford, L. (2003). On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger and V. Cifarelli (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (pp. 49-79). Ottawa: Legas Publishing.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non – symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebrization, Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Dordrecht: Kluwer.

Saboya, M., Hitt, F. Quiroz, S., et Antoun, Z. (sous presse). La pensée arithmético-algébrique comme transition du primaire au secondaire : des situations d'investigation dans lesquelles modélisation et technologie jouent un rôle central. *Actes de l'EMF 2018*, Paris.

Schwartz, B., Dreyfus, T. et Brukheimer, M. (1990). A model of the function concept in a three-fold representation. *Computers Education*, *14*(3), 249-262.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. *12*(3), 210-230.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*. Translated by Matejka, L. and Titunik, I. R. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Von Glasersfeld, E. (2004). Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. In P. Jonnaert et D. Masciota (Éds.), *Constructivisme choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-323). Presses de l'Université du Québec.

Zimmermann, W. et Cunningham, S. (Eds). (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. *19*, USA: MAA Series.

15 Intervenciones docentes en el trabajo con ACODESA en el aula de matemáticas

Samantha Quiroz Rivera[1], Fernando Hitt[2]

Resumen

En el presente capítulo se analizará el papel de las intervenciones del docente en la construcción de conocimiento matemático en aulas escolares. Específicamente se muestra la aplicación de cinco Situaciones de Investigación (SI) dirigidas al desarrollo de la noción de variable y procesos de generalización en alumnos de sexto grado de educación primaria. Se ha reportado anteriormente que, ante el planteamiento de las SI, los alumnos forman representaciones funcionales espontáneas, que a través del método de enseñanza ACODESA evolucionan hacia *representaciones grupales*. El objetivo principal del presente capítulo es reflexionar sobre el rol que desempeñó el docente en este tránsito y evolución de estas representaciones.

Palabras clave: representaciones, ACODESA, estudios socioculturales.

Résumé

Dans ce chapitre, nous analyserons le rôle des interventions des enseignants dans la construction des connaissances en mathématiques dans les classes. En particulier, on présente l'application de cinq Situations de Recherche (SI) visant á développer la notion de variable et processus de généralisation chez les élevés de sixième année du primaire. Il a déjà été signalé qu'avant l'approche des SI, les élèves formaient des représentations fonctionnelles spontanées qui, grâce á la méthode d'enseignement ACODESA, évoluaient vers des *représentations de groupe*. L'objectif principal de ce chapitre est e réfléchir au rôle joué par l'enseignant dans ce transit et dans l'évolution de ces représentations.

Mots clés : représentations, ACODESA, études socioculturelles.

Abstract

In this chapter we will analyze the role of teacher's interventions in the construction of mathematical knowledge in school classrooms. Specifically, is shown the application of five Research Situations (SI) aimed at the development of the notion of variable in sixth grade students of primary education. It has been previously reported that before the SI approach, the students form spontaneous functional representations, which through the ACODESA methode, evolve toward what was called *a group representation*. The main

---

[1] Universidad Autónoma de Coahuila, México.

[2] Université du Québec à Montréal, Canada.

objective of this chapter is to reflect on the role played by the teacher in this transit and evolution of these representations.

Keywords: representations, ACODESA, sociocultural study.

1. Introducción

El estudio del aprendizaje humano se acentúa en el siglo XX con una serie de experimentos que buscaban comprender el cambio de comportamiento de las personas ante diferentes estímulos. Así, el conductismo se conforma como la primera corriente teórica del siglo que desplaza ideas relativas a la introspección, que fueron acuñadas por perspectivas estructuralistas (Ormroad, 2005).

Si bien los científicos conductistas pudieron aplicar una metodología de investigación objetiva para brindar resultados científicos interesantes, en los años sesenta se hizo notorio un descontento masivo hacia una psicología basada exclusivamente en el estudio de estímulos y respuestas. Este descontento dio pie al surgimiento del cognitivismo. Los estudios de Tolman, así como del grupo alemán de la Gestalt y de Piaget, hacen referencia a este movimiento (Ormrod, 2005).

Por muchas décadas los estudios cognitivistas fueron dirigidos hacia investigaciones de corte constructivista donde se pretendía reconocer el papel activo del sujeto en la construcción de su propio conocimiento, mediante el entendimiento de sus estructuras mentales. Sin embargo, a la par de estos esfuerzos, se inició una escuela que busca comprender las implicaciones de la sociedad en dicha construcción, es decir, el papel de los pares y de la interacción con otros seres humanos a través del lenguaje en el aprendizaje de las personas.

Esta escuela fue conformada por investigadores soviéticos como Vygotksy (1962), quien a su vez fue influenciado por las ideas de Voloshinov (1973) y los trabajos en colaboración con Leontiev (1978). Si bien fue producido casi al mismo tiempo del constructivismo de Piaget, gran parte de este legado –la traducción y publicación de los productos de la escuela soviética– fue tardío por diversas circunstancias políticas, lingüísticas y geográficas.

Esta postura, donde es central la componente social en la construcción del conocimiento, ha tenido repercusiones en diferentes disciplinas incluida la Didáctica de las Matemáticas. Así, específicamente en el estudio del conocimiento matemático, son diversos los autores que se han preocupado por este cambio de paradigma desde un constructivismo hacia un socio-costructivismo, entre ellos destacan Coob, Yackel y McClain (2000), Radford (2003), D'Ambrossio (2000) y Hitt (2013).

Pese a estos esfuerzos, von Glasesfeld (2004) establece que aún son necesarios estudios encaminados a disponer de *un modelo teórico* detallado del funcionamiento de la interacción social en la misma perspectiva que ya se tiene con el constructivismo, por ejemplo, las nociones piagetianas de *abstracción empírica* y *abstracción reflexiva*.

En el presente capítulo buscamos reconocer las ideas de Voloshinov (1973), Leontiev (1978), Vygotsky (1962) entre otros autores, para apoyar el entendimiento de los procesos de construcción social del conocimiento en el aula de matemáticas. Específicamente nos interesa rescatar, dentro de una implementación en un aula de sexto grado de primaria, el rol que juega el docente en estos procesos sociales. Para ello, rescatamos ideas relacionadas con el método de enseñanza ACODESA, así como la evolución de representaciones, que han estado presentes en anteriores trabajos (v.g., Hitt y Quiroz, 2019).

2. La metodología ACODESA en el aula de matemáticas

En el año 2011, los estudios de Hitt dieron a conocer una propuesta de método de enseñanza que busca generar en el aula espacios de discusión, colaboración y debate científico, con el propósito de apoyar procesos de construcción social del conocimiento matemático. Este método de enseñanza se ha denominado ACODESA (Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico, Autorreflexión), el cual permite organizar la actividad en el aula, considerando cinco grandes etapas donde la organización y forma de trabajo de los alumnos cambia con el propósito de promover la interacción de los mismos.

Los procesos que se desencadenan en cada una de esas etapas de ACODESA se han reportado en anteriores investigaciones y se muestran a continuación. Añadimos una sección previa a las etapas de la metodología y que necesita desarrollarse: el diseño de la Situación de Investigación.

a) Diseño de la Situación de Investigación

La implementación en el aula del método ACODESA requiere del diseño de una *situación* donde se describa un contexto que sea un problema para los alumnos. Algunas características de estas situaciones son:

> La situación es de interés para los alumnos y podría parecer a simple vista, que la situación está fuera del mundo de las matemáticas. La matemática

emerge en la acción, cuando los alumnos inician los procesos de resolución de la situación.
El problema involucra el desarrollo de formas útiles de pensar, describir, explicar e interpretar las relaciones, los patrones y regularidades de los datos, metas y soluciones que se puedan usar.
El producto es un artefacto complejo o bien una herramienta conceptual que necesita ser desarrollada para usarse en varias situaciones estructuralmente similares (Hitt y Quiroz, 2017).

De acuerdo con Soto, Hitt y Quiroz (2019), la situación que se plantee deberá propiciar la formación de representaciones iniciales y no institucionales para los alumnos, debido a que su planteamiento promueve un pensamiento diversificado en los estudiantes. En ocasiones es posible utilizar la tecnología para entender mejor la situación, sin que ella proporcione la respuesta.

Es posible hacer un símil entre las Situaciones de Investigación y las Actividades generadoras de modelos propuestas por Lesh y Yoon (2007). Estas actividades son definidas por los autores como situaciones que, para ser comprendidas, involucran algunos tipos de sistemas matemáticos interesantes que en ocasiones (aunque no siempre) existen fuera del mundo de las matemáticas. El aspecto más problemático de estas tareas involucra el desarrollo de formas de pensar útiles que describan, expliquen o interpreten relaciones relevantes, patrones o regularidades, donde puedan ser usadas herramientas matemáticas. El producto es un artefacto complejo o herramienta conceptual, que necesita desarrollarse para usarse en una variedad de situaciones estructuralmente similares.

Ahora bien, la diferencia principal entre ambos tipos de situaciones estriba en la forma en que finalmente se implementan en el aula de clase, ya que las Situaciones de Investigación son diseñadas para llevarse a cabo siguiendo una metodología de debate científico, colaboración e intercambio de ideas como ACODESA.

a) Trabajo individual

Después de leer la SI, los alumnos trabajan individualmente por un período de aproximadamente quince minutos. Como la SI está diseñada para provocar un pensamiento diversificado, se invita a los alumnos a plasmar sus ideas iniciales en una hoja de papel y con apoyo de una pluma de un color designado. Las representaciones que emergen en este momento tienen características específicas, entre ellas, son iniciales, individuales, funcionales ante la situación y difícilmente institucionales.

En trabajos anteriores se ha reportado que estas representaciones iniciales e intuitivas ante la resolución de una *situación de investigación* son de gran importancia en el proceso de aprendizaje, y que pasarlas por alto conduciría a ignorar parte de la construcción de conceptos matemáticos y a olvidar la importancia de las concepciones de los estudiantes (Hitt y Quiroz, 2017).

Así, estas primeras representaciones tienen un carácter funcional y espontáneo, ya que sirven de manera natural y persiguen una meta inicial de aprendizaje. Es importante resaltar que las características funcionales pueden ser mentales, orales, kinestésicas o esquemáticas fruto de la acción, y, por otro lado, están ligadas a una componente espontánea o externa (Hitt y Quiroz, 2019). Estas representaciones son llamadas Representaciones Funcionales Espontáneas (RF-E).

Esta etapa individual permite a los alumnos prepararse para una discusión posterior con los miembros de su equipo de trabajo, ya que sin esta preparación existe una influencia de las ideas de algún miembro del equipo en los demás compañeros. Es decir, esta etapa permite a los alumnos tener una comunicación más eficiente con sus compañeros (Hitt y González-Martín, 2015; Hitt, Saboya y Cortés, 2017).

b) Trabajo en equipo

En un segundo momento de la implementación, ACODESA propone la formación de equipos de trabajo para la discusión de ideas entre pares. La formación de los equipos es tarea del docente, quien puede componer los grupos de la manera más conveniente, sin embargo, se recomienda el trabajo en equipos de máximo tres personas (Prusak, Hershkowitz y Shwarz, 2013, Hitt *et al*. 2015).

Durante este momento, los alumnos ya tienen cada uno una RF-E que elaboró en la primera etapa de trabajo individual, por lo que se pide a los estudiantes que discutan sus representaciones y procedimientos utilizados con sus compañeros de equipo. Esta etapa es fundamental en los trabajos de Batkjim-Voloshinov, quienes consideran como necesaria la comunicación en la construcción de signos.

En esta etapa, las primeras RF-E sufren cambios debido al diálogo entre los alumnos. Por ello, se propone un consenso entre los miembros del equipo sobre los procedimientos y las acciones para la comprensión de la SI, así como sobre la representación que hicieron (Hitt y Quiroz, 2017). Los cambios realizados en este primer momento de diálogo apoyan la construcción del concepto matemático, sin embargo, en esta etapa –que tiene una duración aproximada de 25 minutos–, dicho proceso apenas es iniciado.

c) Discusión grupal

En este momento, los alumnos de los diferentes equipos de trabajo comparten de manera grupal sus discusiones y conclusiones realizadas. Esto puede hacerse mediante la exposición de sus procedimientos y resultados, así como de sus representaciones en el pizarrón.

Esta etapa es de gran importancia cuando es utilizado el método de enseñanza ACODESA puesto que un *debate científico* puede emerger en el aula, con ideas diversas que necesitan ser asimiladas por los estudiantes. Por tanto, es un momento crucial del docente para conducir la discusión hacia un debate científico, promoviendo un diálogo más rico en el aula de clases. Así, la comunicación y validación para la co-construcción se establece en este *diálogo científico.* (Legrand, 2001, Hitt *et al*., 2015).

El debate en el aula lleva a la formación de nuevas representaciones más refinadas que las anteriormente producidas y los procesos de validación se vuelven a llevar a cabo mediante las discusiones. Estas nuevas representaciones son compartidas por todos los alumnos del aula de clases y suelen poseer características distintas a las primeras RF-E que se elaboraron en la etapa individual. Esta etapa puede durar aproximadamente 45 minutos.

d) Autorreflexión

La auto-reflexión es la penúltima etapa de ACODESA. Se solicita a los alumnos que reconstruyan individualmente lo que han hecho en las etapas anteriores. Esto puede llevarse a cabo de distintas maneras, por ejemplo, la reconstrucción en casa como parte de la tarea de los alumnos, o en clases posteriores en el aula de matemáticas. El tiempo posterior a la sesión ha variado en diferentes investigaciones, desde unas horas hasta semanas y meses, cuando se ha querido medir la estabilidad del conocimiento adquirido (Hitt, Saboya & Cortés, 2017).

Esto se hace considerando que el consenso en el aula de matemáticas es efímero y frágil, como mencionan Thompson (2002), Hitt *et al*. (2015) y Karsenty (2003). Por ello, es importante reconstruir el resultado obtenido para promover una estabilidad en el conocimiento de los alumnos.

En esta etapa es posible observar que la producción de representaciones ha experimentado un cambio importante desde las primeras RF-E. Este cambio es debido a un diálogo constante, primero entre los miembros de los equipos, luego entre el grupo completo y, por último, en la misma reconstrucción individual. De acuerdo con las ideas de Hitt y Quiroz (2019), la evolución de estas representaciones provoca que dejen de ser llamadas RF-E para convertirse en Representaciones Socialmente Construidas (RSC), que surgen cuando los alumnos resuelven una SI por un trabajo individual, y después en colaboración (Hitt y Quiroz, 2019).

e) Proceso de institucionalización

Por último, el proceso de institucionalización sucede cuando el docente, considerando las ideas y producciones realizadas por los alumnos –así como la evolución de sus representaciones–, provee las representaciones oficiales. Durante este proceso no se deja de lado el diálogo constante con los alumnos, quienes en ocasiones han llegado por ellos mismos a este tipo de representaciones institucionales.

3. El docente en la construcción social del conocimiento

Un factor clave en el aula de matemáticas, es sin duda, el docente y sus acciones. Diversos estudios han apuntado la mirada hacia ellos con el fin de comprender mejor las implicaciones que tienen en el aula de matemáticas. Así, investigaciones como la de Wing y Anderson (2009) muestran que los docentes de matemáticas llevan a cabo su enseñanza siguiendo los conocimientos adquiridos durante su formación, así como en sus experiencias como alumnos de matemáticas.

En investigaciones relacionadas con la modelación matemática que, como se mencionó en el apartado anterior, es una estrategia que plantea problemas con características similares a las SI, se ha mostrado que es preponderante la implementación de contenidos referidos a modelación en el currículo docente. Asimismo, se pone de manifiesto que esto produciría impactos positivos en el modo de ver el mundo matemático de los docentes (Bonotto, 2007; Galbraith, 2007).

En el estudio de Quiroz y Rodríguez (2016), se muestra cómo las concepciones que poseen los docentes sobre la enseñanza de las matemáticas distan mucho de los postulados básicos de la modelación, ya que se caracterizan por un énfasis en la memorización de contenidos y fórmulas, así como con la consideración de alumnos pasivos que recopilan el conocimiento que el docente debe transmitir.

Es importante mencionar que esta forma de dirigir el trabajo en el aula no es parte del discurso oral de los profesores, quienes poseen nociones teóricas referidas a la construcción del conocimiento, así como a la construcción social del mismo. Estas nociones teóricas, sin embargo, no son siempre reflejadas en sus prácticas diarias en aulas escolares (Quiroz y Rodríguez, 2016).

Radford (2013) muestra, en un ejemplo de clase donde se pretende la construcción social entre alumnos de educación primaria, cómo el rol del docente estriba en el planteamiento de preguntas que permitan al alumno la generación de ideas que devuelvan a ellos (equipos de trabajo) el diálogo principal. Así, para Radford (2013), es posible que la discusión del grupo quede sin resolverse, ya que los docentes no optan por hacer uso de su posición de poder y definir el conflicto. Así, la cuestión de poder es tomada con respeto y responsabilidad, donde se pretende que el docente exponga su punto de vista y se marche a discutir con otros grupos.

La presente investigación se suma a los esfuerzos por comprender el impacto de las intervenciones docentes en la construcción social del conocimiento matemático.

4. Metodología

La investigación está enmarcada en un paradigma fenomenológico. Específicamente, el presente estudio sigue una metodología cualitativa de corte descriptivo ya que se pretende comprender los fenómenos que suceden en el aula de clases.

El objetivo principal de la presente investigación es comprender las características de las intervenciones docentes en la construcción social del conocimiento matemático cuando se pone en marcha el método de enseñanza ACODESA. Ello responderá a la pregunta que rige el estudio: ¿qué características poseen las intervenciones docentes en el aula de matemáticas, cuando se lleva a cabo la construcción social de un contenido matemático a través del método de enseñanza ACODESA?

Para ello, se diseñaron e implementaron cinco *Situaciones de Investigación* referidas al aprendizaje de la noción de variable y procesos de generalización con alumnos de sexto grado de educación primaria. Las cinco SI fueron implementadas en un lapso de un mes y medio, de acuerdo con los tiempos permitidos por la institución educativa. Para el presente estudio, se seleccionó la última SI denominada *Rectángulos y círculos* ya que, cuando ésta se llevó a cabo, los alumnos tenían más experiencia luego de cuatro implementaciones, por lo que la discusión entre ellos y el docente fue académicamente más productiva. Se presenta en la siguiente tabla la SI seleccionada:

Situación de Investigación	
Título	Planteamiento
Rectángulos y círculos	Tenemos una serie de rectángulos y círculos arreglados como lo muestra la figura más abajo. Queremos conocer el número de círculos y rectángulos de las siguientes figuras sin necesidad de contarlos uno por uno.

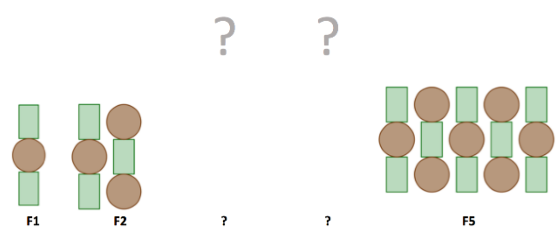
Página 2 – Situación y trabajo individual

Tenemos una serie de rectángulos y círculos arreglados como lo muestra la figura más abajo.

Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo, y en gran grupo.

Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicada por la profesora.

Enseguida te mostramos las dos primeras figuras y la quinta.



1. Calcula el número de rectángulos y de círculos de la Figura 3.
2. ¿Tienes necesidad de realizar un dibujo para calcular el número de rectángulos y de círculos de la 4ª figura?
3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de rectángulos y círculos de la 5ª figura?

Tabla 1. Extracto de la Situación de Investigación (ver situación completa en el libro de actividades)

En el trabajo con la SI, específicamente luego del trabajo en equipo, los alumnos tenían la posibilidad de manipular en el programa *GeoGebra* el número de figuras de la situación, con el fin de corroborar sus resultados. Esta manipulación se llevó a cabo por medio de tabletas electrónicas.

Para la muestra de la investigación, se seleccionó a un equipo de trabajo conformado por tres alumnos de sexto grado de primaria en una institución pública al norte de México. Estos alumnos tenían edades oscilantes entre los 11 y 12 años. De acuerdo con el docente del aula, estos alumnos se caracterizaban por su poca disposición y motivación hacia el estudio de las matemáticas, así como por sus bajos puntajes en exámenes de esta asignatura. Así mismo, el docente que llevó a cabo la sesión poseía características muy distintivas:

- Tenía formación inicial como profesor de educación primaria y una formación continua de dos posgrados relacionados con la didáctica de las matemáticas.
- El docente estuvo implicado en el diseño de las SI.
- No es el docente titular del grupo, sino que accedió a asistir solamente a estas clases, por lo que no conocía a los alumnos de antemano.
- Conoce el método de enseñanza ACODESA, así como las bases teóricas del mismo.

Para la recolección de datos, se utilizaron las producciones de los alumnos y la transcripción de la sesión de clase, que fue videograbada. El análisis de los mismos se realizó mediante una triangulación de ambos instrumentos de recolección de datos en conjunto con la teoría que sustenta el estudio.

5. Resultados

Los resultados se presentan siguiendo las primeras tres etapas de ACODESA, donde el principal foco son las intervenciones docentes. Ya que en la etapa 4, de autorreflexión, los alumnos trabajaron individualmente en sus casas como tarea escolar.

a) Diseño de la situación de investigación

Previo al trabajo en el aula, el docente quien implementó la SI estuvo implicado en el diseño de la misma. El trabajo colegiado entre docente e investigadores permitió una mejor comprensión por parte del primero de los objetivos que se pretendían. Además, es importante resaltar la formación misma del docente elegido (experto en didáctica de las matemáticas).

La experiencia del docente en el trabajo con niños de sexto grado permitió que las actividades diseñadas fueran adaptadas para un mejor trabajo en el aula de clases. Sus conocimientos sobre los mismos alumnos, su desarrollo, sus intereses y el contexto donde se situaba la escuela también aportó información que fue de utilidad para el diseño de la SI.

b) Trabajo individual

En el aula de clase, la primera parte de la sesión estuvo destinada al trabajo individual. El docente inició leyendo a los alumnos la SI mientras todos estaban organizados en filas como normalmente trabajan con su profesor de grado:

> Docente –Tenemos una serie de rectángulos y círculos arreglados como lo muestra la figura más abajo. Te invitamos a realizar un trabajo individual, luego en equipo, luego en gran grupo y finalmente un regreso a la reflexión individual, <u>allí va</u>: enseguida te mostramos la primera figura y la quinta, <u>que están allá abajo dibujadas.</u> <u>Aquí no importa el color, ¿cierto? Porque son círculos y rectángulos</u>.
>
> Alumnos –No.
>
> Docente –Entonces, número uno, calcule <u>usted solito</u> el número de círculos y rectángulos de la Figura 3. <u>Aquí viene la 1 (señala), aquí viene la 2 (señala), la tres no viene dibujada, ¿verdad que no?</u>
>
> Alumnos –No.
>
> Docente –<u>Bueno, ¿cuántos círculos tendrá la 3? y ¿cuántos rectángulos tendrá la 3?</u>

Subrayamos en los diálogos anteriores las partes que el docente añadió al mismo planteamiento de la situación en su lectura, con motivo de hacerlo más claro para los alumnos. Por ejemplo "(figuras) que están allá abajo dibujadas", o "aquí viene la 1, aquí viene la 2, la tres no viene dibujada".

Además, se resalta el hecho de que el docente trata de involucrar a los mismos alumnos para validar que se está entendiendo el mismo planteamiento con preguntas como "¿verdad que no?" o "¿cierto?".

Por último, para recordar el hecho de que el trabajo inicial es individual, el docente argumenta: "Calcule usted solito…". En esta etapa se espera que los alumnos inicien la formación de $R_{F\text{-}E}$, por lo que la docente comenta con los alumnos:

> Docente –Si usted quiere dibuje, si usted quiere cuente en la mente, usted puede hacer lo que usted quiera, pero dígame cuántos círculos y cuántos rectángulos tendrá la Figura número 3.

Esta indicación del docente promueve que los alumnos realicen diferentes representaciones y hace notar que no se espera de ellos una representación institucional. Antes de que el docente termine la oración anterior, los alumnos en su pupitre, de manera individual, inician sus respuestas ante la pregunta planteada. En este momento el docente aguarda unos minutos en el escritorio para después pasearse entre las filas observando el trabajo de cada uno de los alumnos.

Cuando todos los alumnos tienen una respuesta, y sin validar cuál de ellas es correcta, el docente continúa:

> Docente –La pregunta que sigue dice "¿tiene usted necesidad de hacer un dibujo para calcular el número de rectángulos y círculos de la Figura 4?"
>
> Alumnos – (algunos) No.
>
> Docente –Bueno, si sí, pues dibújelo; si no, póngame allí, ¿cuántos rectángulos y cuántos círculos necesito para la Figura 4? Si usted quiere puede dibujarlos, si no, como usted quiera, pero póngame allí ¿cuántos necesito para la número 4?
>
> Alumno O –¿hago lo mismo que hice aquí? (en la pregunta anterior, donde dibujó).
>
> Docente – Si usted quiere hacerlo, haga el dibujo.

Es posible apreciar que el docente utiliza constantemente argumentos donde resalta que serán bienvenidas diferentes representaciones y procedimientos para dar solución a esa pregunta. A pesar de estos comentarios, un alumno pregunta si puede seguir usando dibujos como en la pregunta anterior, a lo que el docente contesta positivamente. De nuevo, el docente camina por los lugares para observar las respuestas de los alumnos, sin hacer intervenciones, a menos que un alumno tuviera una duda en el planteamiento de la pregunta. Por ejemplo, uno de los alumnos que dibuja los círculos y rectángulos pregunta: "¿le pongo lo que me salió?" a lo que el docente responde afirmativamente. Después de unos momentos, una vez que todos los alumnos tienen una respuesta, el docente continúa:

> Docente –¿Cómo hago yo para calcular el número de círculos y rectángulos de la Figura 5? De la 5. Si usted ya tiene una estrategia, escríbala, no le ponga nada más "5 y 6", "6 y 7", póngale cómo los obtuvo, cómo le hizo. Para la Figura 5, ya hicimos de la 3 y de la 4, ahora de la 5. ¿cuántos círculos y cuántos rectángulos hay? y ¿cómo le hizo?

En esta tercera pregunta, el docente hace hincapié en que los alumnos registren no solamente una respuesta numérica, sino también que escriban su procedimiento. Mientras los alumnos escriben, el docente recorre las filas, y de nuevo existen preguntas sobre si es posible dibujar las figuras. El docente contesta positivamente ante estos cuestionamientos.

Con esto se da por terminada la primera etapa de la clase. Todos los alumnos tienen sus respuestas en las tres preguntas anteriores; sin embargo, el docente no valida como correcta o incorrecta ninguna de ellas, sino que permite que los alumnos plasmen sus ideas iniciales, lo que conforman sus RF-E.

c) Trabajo en equipo

Esta etapa de la clase inicia cuando el docente pide a los alumnos reunirse en equipos de trabajo de tres personas. Los alumnos ya saben el equipo donde trabajarán, puesto que son los mismos de sesiones anteriores con otras SI. Una vez reunidos en equipos, el docente sigue con la lectura de la SI:

Docente –Vamos a leer la pregunta que sigue, que es la número 4, dice: "Analice el trabajo de sus compañeros para encontrar diferentes estrategias que le permitan calcular el número de rectángulos y de círculos de la Figura 6. A ver, pregúntele a sus compañeros ¿cómo le hicieron? Y calcule en el equipo ¿cuántos círculos hay en la Figura 6? y ¿cuántos rectángulos hay? en la 6.

Los alumnos inician la discusión. Presentamos la del equipo 1, seleccionado para esta investigación:

Alumno M –Cada dos figuras se hacen 3 (círculos), ¿y si es impar?

Alumno A –¿Y si hacemos el dibujo de la 6? Acá yo ya tengo el de la 6 (lo muestra). Me salió 9 y 9 (círculos y rectángulos) (voltea con el docente buscando aprobación).

Docente (Observa a los demás alumnos sin mencionar palabra alguna o gesto alguno.)

Alumno A –1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (cuenta y señala los círculos en el dibujo).

Docente –Una estrategia es hacer el dibujo.

Alumno A –Sí, yo lo hice acá.

Docente –Y, ¿hay otra estrategia diferente que no sea dibujar?

Alumno M –Sí.

Alumno A –Tiene que haber otra.

Alumno M – No, mira éste, si es par va a estar fácil; si es impar, no.

Docente –¿Si es par va a estar fácil? ¿Cómo le hacemos?

Alumno M –Multiplicamos por la mitad de la figura, por 2.

Docente –La mitad de la figura son 3.

Alumno M –Por eso, la figura es 6, la mitad son 3, 3 por 2 son…

Alumno A –6.

Alumnos M –¡Ah, ya me revolví!

Alumno A –Es la mitad, 3 por 3, 9 y ya.

Docente –Entonces ¿cómo, cómo? Otra vez…

Alumno M –Es que las dos figuras (Figura 2) hacen 3, 3 rectángulos y 3 círculos.

Alumno A –(Dirigido al docente) ¿Y tenemos que anotar las dos estrategias que tengamos?

Docente –Ajá (gesto de asentir).

Alumno A –Entonces tenemos que hacer el dibujo…

Docente –…y el número de rectángulos y el número de círculos. Puede poner la respuesta de volada, pero lo importante es, ¿cuál es la estrategia?

Alumno M –Rectángulos son 9 y círculos también.

Docente –Son 9 y 9, ¿está de acuerdo *Alumna V* (Alumna del equipo que no se había involucrado)?

Alumna V –(Gesto de asentir).

Resaltaremos varias intervenciones del docente en el diálogo anterior:

- Primeramente, su negación a validar las respuestas de los alumnos, a pesar de que ellos mismos buscan en él una palabra o gesto ante sus preguntas.
- En segundo lugar, la mayoría de las intervenciones del docente se realizan en forma de preguntas, donde cuestiona a los alumnos con el fin de reconocer sus ideas y puntos de vista. Así, en los dos minutos que dura la conversación anterior, se contabiliza un total de seis preguntas hechas por el docente.
- En algunas intervenciones del docente, éste hace saber a los alumnos que no entendió el diálogo con el propósito de que ellos piensen de nuevo la idea. Es el caso de la línea "¿cómo, cómo? Otra vez". Ante esta cuestión, los alumnos buscan explicar sus ideas con palabras, lo que en ocasiones provoca que ellos mismos se den cuenta de sus errores.
- Involucra en el diálogo a los alumnos que no están siendo partícipes de la discusión, como en el caso de la alumna V que, si bien estaba atenta, no había intervenido hasta este momento.

En un momento posterior, el docente vuelve al equipo de trabajo, y los alumnos discuten sobre la segunda estrategia:

Alumno M –En cada dos figuras vienen 3 (rectángulos).

Alumno A –Sí.

Docente –¿En cada dos figuras hay 3 y 3 (rectángulos y círculos)?

Alumno A –Porque mira, si ponemos otras dos acá y dos acá (refiriéndose a añadir columnas a la figura de la hoja de papel), 3, 6, 9, sí es como le hizo la Alumna V.

Alumno M –Sumándole de 2 en 2. ¿sí es esa? (dirigido al docente)

Docente –Pues si esa le gusta.

En esta intervención el docente de nuevo añade una pregunta que provoca una reflexión en los alumnos. Además, a pesar de que se logró un consenso en el equipo de trabajo, los miembros del equipo siguen buscando la aprobación del docente. Sin embargo, éste no les corrobora o niega la validez de su respuesta, sino que les deja saber que es aceptado su procedimiento si ellos así lo consideran correcto.

Continuando con el trabajo en equipo, se pide que calculen el número de rectángulos y de círculos en la Figura 13. En esta ocasión, los alumnos del equipo tienen una respuesta anotada, y el docente se acerca a ellos para que le expliquen su resolución:

Alumno M –Depende en lo que termine, le vas a sumar, si 2 círculos o 1 rectángulo, porque cuando es par, nomás lo multiplicas por 3 y es la respuesta, pero si es impar, le restas 1 a la figura, como (por ejemplo) aquí es 13…

Docente –Le resto uno, son 12…

Alumno M –Le resto uno, son 12, lo multiplico por 3 y sale 18, y depende en qué termine, si termina en círculos le sumo los dos círculos y el rectángulo se lo sumo también. Haz de cuenta, si son dos círculos, se lo sumo a los círculos, si es un rectángulo, se lo sumo a los rectángulos.

En este momento, los alumnos han llegado al consenso de que las figuras impares pueden terminar en dos círculos y un rectángulo, o dos rectángulos y un círculo, es decir, que existen ambas posibilidades. Sin embargo, el docente reconoce que sólo puede suceder una de ellas. Por este motivo, las intervenciones del docente buscan que el equipo reflexione sobre este tema, por ello sus preguntas inician de la siguiente manera:

Docente –A ver, pero ¿este es par o es impar? (apunta a una figura dibujada, la número 4)

Alumno M –Es par.

Docente –Es par, como el de arriba.

Alumno M –Sí, y el otro termina con rectángulos aquí y círculo…

Docente –Ese es impar.

Alumno M –Sí, este es impar porque es 5. Y este, haz de cuenta, los rectángulos de aquí se le suman a este, al anterior, porque se le restó 1. Se le suma y da 20, y el círculo se le suma y da 19.

Docente –¿O sea sumo 2 rectángulos y 1 círculo?

Alumno M –Y si termina en otra figura, haz de cuenta, terminó en círculos en las orillas, se le suman dos círculos y 1 rectángulo.

Docente –¿Pero si termina en círculos no es par?

Alumno M –No…

Alumno A –Sí….

Alumno M -¿Puede terminar de otra forma, no?

Docente –Este termina en círculos y es par, ¿no?

Alumno M –Sí

Docente –Ahora acá (mueve la hoja), este es par y termina en círculos.

Alumno M –Sí es cierto, nomás se le suman 2 (cuando es impar)

Docente - Este no termina en círculos (apunta la Figura 5).

Alumno M –Porque es impar. Nomás se le suman dos rectángulos y un círculo y ya, todo el tiempo.

Docente –¿Está de acuerdo, joven? (dirigido al alumno A)

Alumno A –(Asiente).

El docente en este momento dirige la mirada de los alumnos en otras figuras anteriores, con el objetivo de que ellos mismos reconozcan un patrón en el comportamiento de las figuras, dependiendo si son pares o impares. Para el alumno M, es sorprendente llegar a la conclusión de que las figuras impares siempre terminarán con una fila de dos rectángulos y un círculo. Sin embargo, el alumno A parece no sorprenderse ante esta discusión.

En una última parte del trabajo en equipo, los alumnos trabajan manipulando la tableta electrónica. En este momento las intervenciones del docente se dedican a responder preguntas propias del manejo de esta tecnología. Ellos logran comprobar sus respuestas con el uso del *applet* realizado con *GeoGebra* (ver Quiroz & Hitt en el libro de actividades que acompaña el presente libro).

d) Trabajo en grupo

Para terminar la sesión del día, se pide a los diferentes equipos que compartan sus resultados con los compañeros de otros equipos, y es el docente quien guía la discusión:

Docente –Empezamos con el equipo 2, pásele. Aquí está el marcador.

Alumno K –(pasa al frente y toma el marcador).

Docente –A ver, el equipo de allá (equipo 1), escuche por favor. ¿Estrategia para la número 30?

Alumno K –Le estábamos contando … (cuentan su estrategia, que consistió en dibujar y contar las figuras una por una).

Docente –Muy bien, siéntense chicos, les salió bien. A ver, vamos a escuchar la estrategia del equipo 3. Pásele, y escuche la estrategia del equipo 3 porque es diferente a la de los demás.

Alumna I –(Dibuja en el pizarrón su representación y explica su procedimiento, que consiste en multiplicar el número de figura por 3 y luego dividirlo entre 2 para saber los círculos y los rectángulos de cualquier figura).

Docente –Muy bien. Ahora, pregunta: esa estrategia funciona para 30, ¿funcionará para la Figura 31?

Alumno M –No.

Docente –¿Cómo le haríamos para 31?

Alumna I –31 por 3, 93, entre 2, 41.5.

Docente –¿Y cómo le hacemos allí?

Alumno M –No se puede.

Docente –No podemos tener una figura a la mitad ¿verdad? ¿pero hay una manera?

Alumno A –Sí.

Docente –Entonces esta estrategia del equipo 3 sirve para números…

Alumna I –Pares.

Alumno A –Nosotros tenemos dos (estrategias).

Docente –Entonces vamos a escuchar al equipo 1. Muy bien al equipo 3.

Alumno A –(Pasa a dibujar su representación.)

Docente –A ver, pero que nos la explique, ¿verdad? Está muy largo.

Alumno M –(Explica su procedimiento.)

En esta parte de la clase, el docente toma decisiones referentes a varios aspectos del trabajo en equipo, entre ellas:

- Primeramente, analiza cuál de los equipos tiene el procedimiento más rico y permite que otros equipos pasen antes de ellos. Esto permite a los otros equipos explicar bien sus procedimientos.
- El docente selecciona como segundo equipo para pasar a explicar, al equipo 3, quien tiene una estrategia para contabilizar figuras pares, pero no impares. Por ello, el docente problematiza el hecho de utilizar esta estrategia en una figura impar, lo que hace que los alumnos del equipo se den cuenta de que es necesario encontrar cómo resolver este tipo de figuras.
- El equipo con la estrategia de números impares pasa al final y se establece un diálogo largo con sus compañeros, donde muestran sus resultados.
- En todo momento el docente sigue planteando preguntas a los equipos de trabajo. Además, apoya en la explicación de los procedimientos para los otros equipos, ya que en ocasiones los alumnos hablan en voz muy baja por estar frente a la clase.
- Por último, el docente busca retroalimentar positivamente a cada equipo de trabajo con palabras de aliento que los motiven a continuar su trabajo.

e) Conclusiones

El presente estudio mostró una experiencia en el aula de matemáticas de educación primaria donde el método de enseñanza ACODESA se aplicó con el fin de que los alumnos aprendieran las nociones de variable y procesos de generalización. Para ello se diseñaron cinco *Situaciones de Investigación* y se implementaron en un período de un mes y medio en una primaria pública mexicana.

Durante esta implementación se buscó reconocer la formación de *Representaciones Funcionales-Espontáneas,* así como de *Representaciones Socialmente Construidas* mediante una construcción social del conocimiento. Específicamente, en la presente investigación se puntualizaron algunas de las intervenciones del docente en los diálogos de un equipo de trabajo. Ello permite reflexionar sobre las características de dichas intervenciones docentes y sus implicaciones en el diálogo de los alumnos que llevarán a construir contenidos matemáticos.

Fue posible apreciar que las principales características que tuvieron las intervenciones docentes fueron:

- Al momento de plantear la SI, el docente buscó en todo momento añadir, a la lectura de la misma, algunas frases e ideas que permitieran un mejor entendimiento de la situación por parte de los alumnos. Además de realizar preguntas para conocer si todos prestaban atención ante el enunciado planteado.
- En el momento del trabajo en equipo, el docente permitió que los alumnos dieran respuesta a sus interrogantes haciendo hincapié en que, cualquier forma de respuesta sería aceptada, lo que hacía ver a los alumnos que no se esperaba de ellos la formación de representaciones institucionales.
- Abstinencia de validar o invalidar respuestas a pesar de la insistencia de los alumnos. Esto es, no decirles a los alumnos si su respuesta era correcta o incorrecta con la utilización de palabras o gestos hacia ellos.
- La mayoría de las intervenciones del docente en la clase, fueron en forma de pregunta. Así, el docente caminaba entre los equipos y realizaba diversas cuestiones a los alumnos con el fin de que ellos explicaran sus procedimientos y discutieran ciertos aspectos que él consideraba importante. Estas preguntas devolvían a los alumnos su rol activo en la construcción de su conocimiento.
- Las preguntas planteadas por el docente se conformaban como un catalizador de la discusión entre los mismos compañeros del equipo, quienes al responderlas se generaban más preguntas, mismas que iniciaban el diálogo entre sus compañeros.
- En la discusión grupal, el docente analizó y eligió el orden en que los equipos pasaban a explicar sus procedimientos y representaciones, con base en la riqueza y profundidad de sus respuestas. Así, buscó que los equipos cuyas respuestas eran más cercanas a la institucional, participaran al final.

En la sesión presentada, fue posible observar que en la formación de RF-E, así como su evolución hacia la RSC, las intervenciones del docente forman un factor importante en el método de enseñanza ACODESA. Reconocemos como un aspecto necesario continuar con investigaciones que busquen la comprensión de estos procesos de diálogo entre los mismos alumnos y el docente, en la construcción del conocimiento matemático.

Referencias

Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(32), 185-192. doi:10.1007/978-0-387-29822-1_18

Coob, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds. 2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Mahwah, New Jersey: LEA.

D'ambrosio, U. (2000). A Historiographical Proposal for Non-Western Mathematics. In Selin H. (eds) *Mathematics Across Cultures. Science Across Cultures: The History of Non-Western Mathematics* (pp. 79-92). Dordrecht: Springer.

Galbraith, P. (2007b). Beyond the low hanging fruit. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(25), 79–88. doi:10.1007/97803872982216

Hitt, F. (2011). Construction of mathematical knowledge using graphic calculators (CAS) in the mathematics classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(6), 723-735.

Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg, Vol. 18, pp. 9-27.

Hitt, F. & González-Martín, A.S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Hitt, F. & Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 153-177.

Hitt, F. et Quiroz, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 24, 75-106.

Karsenty, R. (2003). What adults remember from their high school mathematics? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 117-144.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study,* pp. 127-135, Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Leontiev, A. (1978). Activity, consciousness, and personality. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Lesh, R., & Yoon, C. (2007). What is distinctive in (our views about) models & modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching? In W. Blum, P.L. Galbraith, H.W. Henn & M. Niss (Eds), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 161-170). New ICMI Study Series, vol 10. Boston: Springer.

Ormrod, E. (2005). *Aprendizaje humano*. España: Pearson.

Prusak, N., Hershkowitz, R. & Schwarz, B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 266-285.

Quiroz, S. (2015). *Concepciones de modelación matemática de docentes en formación de educación primaria* (Tesis inédita de doctorado). Escuela de Educación, Humanidades y Ciencias Sociales del Tecnológico de Monterrey, Monterrey, México.

Quiroz, S. & Rodríguez, R. (2016). Análisis de la praxeología de modelación matemática en libros de texto de educación primaria, Educación Matemática, *27*(1), 45-80.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro, pp. 3-12. Granada, España: Comares.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In F. Hitt (Ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

Vygostky, L. (1962). *Thought and Language.* Cambridge, Ma.: MIT Press.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*. Translated by Matejka, L. and Titunik, I. R. Cambridge, Ma.: Harvard University Press.

Von Glasersfeld, E. (2004). Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. In P. Jonnaert et D. Masciotra (Éds.), *Constructivisme choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-323). Québec : Presses de l'Université du Québec.

Wing, Y., y Anderson, J. (2009). Beyond the curriculum: The mathematical beliefs of pre-service primary teachers in Hong Kong. In L. Sparrow, B. Kissane y C. Hurst (Eds.), *Shaping the Future of Mathematics Education Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 657–664). John Curtin College of the Arts.