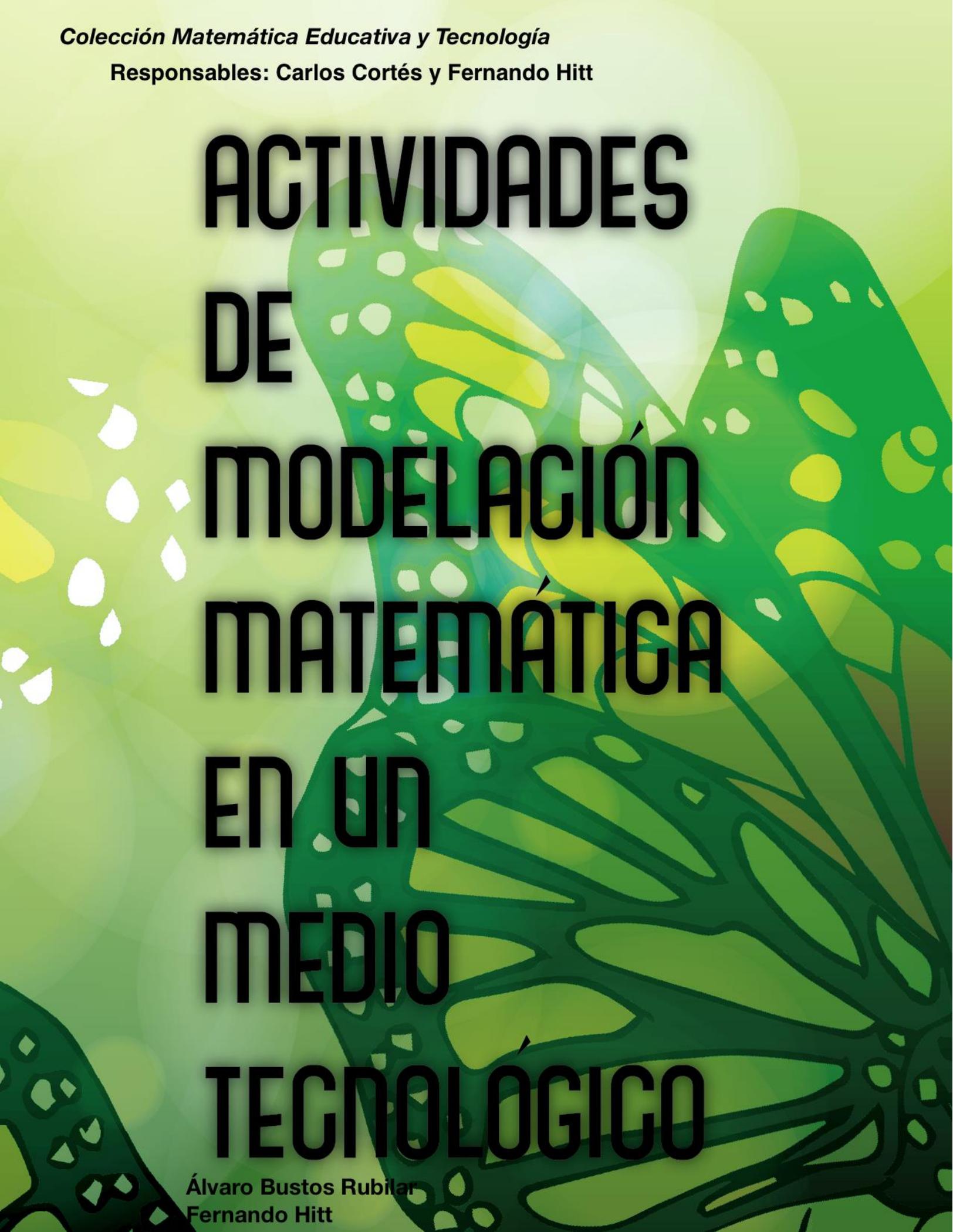


*Colección Matemática Educativa y Tecnología*

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt



# ACTIVIDADES DE MODELACION MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLOGICO

Álvaro Bustos Rubilar  
Fernando Hitt

*Colección Matemática Educativa y Tecnología*

***Actividades de modelación matemática  
en un medio tecnológico***

**Comité editorial (versión electrónica)**

Álvaro Bustos Rubilar

Fernando Hitt

Editores de la colección Matemática Educativa y Tecnología  
José Carlos Cortés Zavala  
Fernando Hitt

**Comité Editorial del libro: Actividades de modelación matemática en un  
medio tecnológico (versión electrónica)**

Álvaro Bustos Rubilar

*Universidad de Valparaíso*

Fernando Hitt

*Université du Québec à Montréal*

Primera edición: Marzo 2019 (México)

---

*Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico*

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

---

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio

Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

© 2019

© **CC-BY-NC-ND**

## Índice

<b>Prefacio y actividades por capítulo</b>	<b>Página</b>
Prefacio	v
<b>Capítulo 1.</b> La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Fernando Hitt Espinosa, Mireille Saboya, Samantha Quiroz Rivera, Álvaro Bustos Rubilar y Zita Antun</i>	1
Remarque. Activités en espagnol et français.	25
<b>Capítulo 2.</b> Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía, Fernando Hitt Espinosa y Samantha Quiroz Rivera</i>	43
<b>Capítulo 3.</b> El aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt Espinosa, Álvaro Bustos Rubilar, Mireille Saboya y Zita Antun</i>	57
<b>Capítulo 4.</b> Entendimiento de postulados básicos de la perspectiva de modelos y modelación por profesores en formación	
Diseño de actividades: <i>Verónica Vargas Alejo y César Cristóbal Escalante</i>	63
<b>Capítulo 5.</b> La inclusión de GeoGebra en el diseño de secuencias didácticas en matemáticas	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía</i>	73
<b>Capítulo 6.</b> Proceso de representación del cambio y la variación: exploraciones digitales	
Diseño de actividades: <i>Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Leal y Nelson Javier Rueda</i>	81
<b>Capítulo 7.</b> Utilización de sensores CBR2 para el estudio de situaciones funcionales a nivel secundaria y universitario	
Diseño de actividades: <i>Valériane Passaro, Ruth Rodríguez Gallegos, Mireille Saboya y Fabienne Venant</i>	85
Remarque. Activités en espagnol et français.	99
<b>Capítulo 8.</b> Actividades de aprendizaje para entender el concepto de función Derivada y Función integral a través de las razones de diferencias y las acumulaciones	
Diseño de actividades: <i>José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera y Eréndira Núñez Palenius</i>	113

<b>Capítulo 9.</b> Variación lineal y movimiento: de la experiencia corporizada a los significados institucionales Diseño de actividades: <i>María Teresa Dávila y Agustín Grijalva Monteverde</i>	159
<b>Capítulo 10.</b> Problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et apport de la méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive Diseño de actividades: <i>Pedro Rogério Da Silveira Castro</i> Remarque. Activités en français.	167
<b>Capítulo 11.</b> La ecuación lineal con dos variables: una propuesta para su aprendizaje en la escuela secundaria mexicana Diseño de actividades: <i>Ana Guadalupe del Castillo y Silvia E. Ibarra Olmos</i>	175
<b>Capítulo 12.</b> Tecnología y usos de las gráficas: una experiencia de modelación del movimiento con estudiantes de bachillerato Diseño de actividades: <i>José David Zaldívar Rojas</i>	197
<b>Capítulo 13.</b> Una forma de enseñanza y aprendizaje: Objetos Para Aprender Diseño de actividades: <i>Ricardo Ulloa Azpeitia</i>	201
<b>Capítulo 14.</b> Secuencia didáctica para el cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución: el caso de recipientes y sandía Diseño de actividades: <i>Rafael Pantoja Rangel, Rosaura Ferreyra Olvera y Rafael Pantoja González</i>	203
<b>Capítulo 15.</b> Geogebra comme outil d'exploration en enseignement de la géométrie Diseño de actividades: <i>Loïc Geeraerts y Denis Tanguay</i> Remarque. Activités en français.	205

## Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolini Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros “Matemática Educativa y Tecnología”. Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-práctico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa  
José Carlos Cortés Zavala

## Referencias

- Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Groupe PME, v. 2, 17-24. Seoul: PME.
- Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.
- Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.
- English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.



## Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen “iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable”, en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al “animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura”. Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

“[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente”.

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de “modelo tabular” y “modelo gráfico” a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, “puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo” (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a “un modelo” fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en “pesar figuras” para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del géomtra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los “Objetos Para Aprender”, como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM



# 1 LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN UN MEDIO SOCIOCULTURAL Y TECNOLÓGICO

## Capítulo teórico

Fernando Hitt Espinosa<sup>1</sup>, Samantha Quiroz Rivera<sup>2</sup>

**Actividades desarrolladas en relación con este capítulo en otros estudios por:**

Fernando Hitt Espinosa<sup>1</sup>, Samantha Quiroz Rivera<sup>2</sup>, Mireille Saboya<sup>1</sup>, Álvaro Bustos Rubilar<sup>3</sup>, Zita Antun<sup>1</sup>.

### El restaurante de Marcelo

Página 1. El restaurante de Marcelo	
<p>Nombre del alumno: _____</p> <p>Nombre de los miembros del equipo: _____ _____ _____</p> <p>Grupo: _____</p> <p>Fecha: _____</p>	<p><b>Instrucciones:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma negra o azul.</li> <li>▪ Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.</li> <li>▪ Después de discutir con el grupo, si tú modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><b>El restaurante de Marcelo</b></p> <div style="text-align: center;">  </div>

### Página 2. Trabajo individual

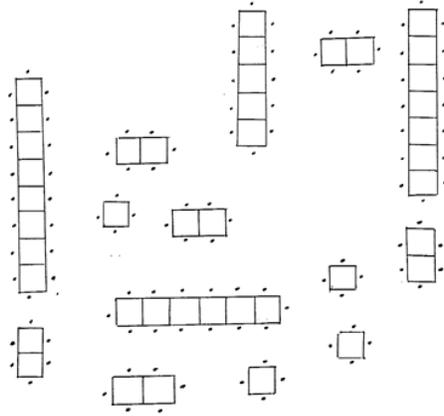
#### Página 1 - Situación

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que coloca en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:

<sup>1</sup> Département des Mathématiques, Université du Québec à Montréal.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila.

<sup>3</sup> Instituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso.



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los pondrá. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin tener la necesidad de contar cada vez el número de sillas.



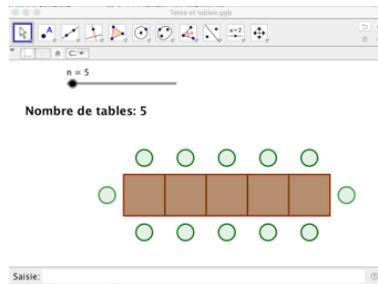
1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas ?
2. Si buscamos el número de personas para colocar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o sabrías alguna manera rápida de hacerlo ?
3. Y para 15 mesas, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de personas sin necesidad de dibujar

**Página 3. Trabajo en equipo**

4. En equipo, discute las estrategias que usaste para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿todos usaron la misma estrategia? Encuentra al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.
5. Una vez que escribiste las estrategias y que vieron que son correctas, utiliza alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

**Página 4. Trabajo en equipo**

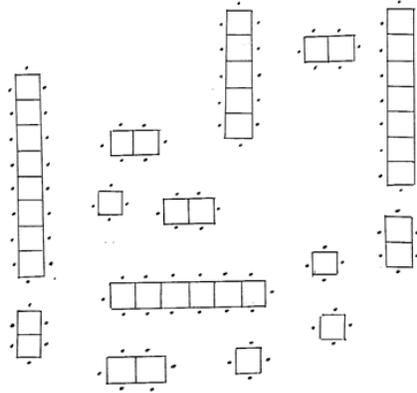
6. La aplicación GeoGebra te mostrará el número de personas que se pueden sentar alrededor de las mesas no importa que tan grandes sean. Utilízalo para verificar tus respuestas del problema 5.



7. Escribe un mensaje escrito a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.
8. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar.

### Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que ubica en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber donde los podrá colocar. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin contar las sillas.



1. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 4 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
2. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 15 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
3. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 21 mesas y después de 54 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
4. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

**Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora**

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

## Joyería «El Dorado»

### Página 1. Joyería «El Dorado»

Nombre del alumno:

\_\_\_\_\_

Nombre de los miembros del equipo:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

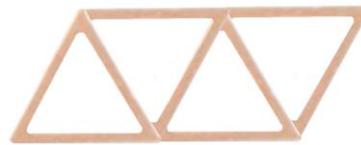
Grupo: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.
- Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.
- En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.

#### Pulsera y cadenas de oro



### Página 2. La situación

En la joyería «El Dorado», Samantha fabrica cadenas de oro en forma triangular como las siguientes:



Ella confecciona pulseras de diferentes tamaños de la cadena. Samantha compra las barritas de oro que ella tiene necesidad, sin necesidad de contar cada 6barrita una a una. Ella quisiera encontrar el número de barritas que necesita sin estar obligada a contar las barritas una a una (¡es demasiado tiempo!). Envía un mensaje a Samantha en el cual le explicas cómo ella podría hacer para encontrar rápidamente el número de barritas que necesita según el número de eslabones deseados sin estar obligada a contarlas una a una.

**Página 3. Trabajo individual**

1. Calcula el número de barras necesarias, si se te solicita 3 eslabones en forma de triángulo.
2. Si se busca el número de barras necesarias para 4 eslabones de forma triangular, ¿Tienes necesidad de realizar un dibujo para encontrarlos o existe una manera rápida de proceder?
3. Para 15 eslabones en forma triangular, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de barritas sin necesidad de contarlas una a una y sin necesidad de dibujar?

**Página 4. Trabajo en equipo**

4. En equipo discute las estrategias que han encontrado para calcular el número de barras para una cadena de 15 eslabones en forma triangular. ¿Los procedimientos de cada uno de los miembros del equipo son iguales? Encuentre al menos 2 estrategias para calcular el número de barras necesarias para una cadena o pulsera de 15 eslabones triangulares.
5. Una vez que han escrito las diferentes estrategias y que han decidido que ellas son correctas, utilícenlas cada una de ellas para calcular el número de barras necesarias para una cadena o pulsera de 21 eslabones y otra de 54 eslabones triangulares.

### Página 5. Trabajo en equipo

6. La aplicación que pueden utilizar con *GeoGebra* les proporciona en forma directa el número de eslabones en forma triangular. Utilícela para verificar sus resultados de la pregunta anterior.



*Pulseras formadas de barritas de oro*



*Pulsera con 6 triángulos, entonces tiene 13 barritas*



*Figura 3 que muestra una pulsera con 6 triángulos*

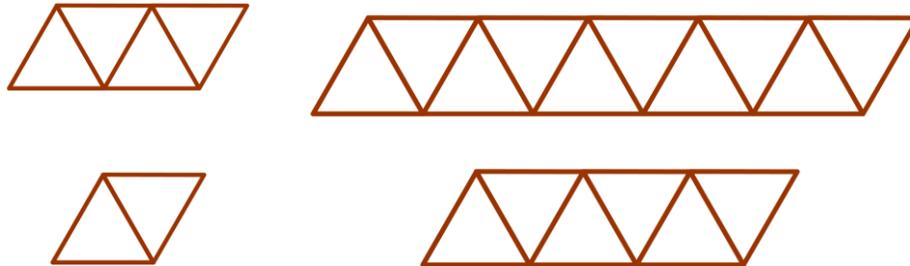
7. Escribe un mensaje en palabras que permita a Samantha calcular el número de barras necesarias para cualquier número de eslabones triangulares.
8. Los mensajes son largos para leer. Samantha está de prisas, ella desea que tú le proporciones algo corto indicando las operaciones a realizar en tú mensaje. Escribe un mensaje corto para Samantha.

### Comentario para el maestro: Discusión con toda la clase

Discutir lo que se ha realizado en las primeras etapas de la investigación en un consenso basado sobre la argumentación y la validación. Escribir en una tabla las diferentes estrategias producidas. Es importante iniciar por aquellas estrategias erróneas para que los alumnos tengan la oportunidad de discutir, rechazar o validar por toda la clase. Todas las producciones de los alumnos se recolectan una vez finalizada la discusión.

### Página 6. Trabajo individual - Autorreflexión

En la joyería «El Dorado», Samantha fabrica pulseras y cadenas de oro en forma de eslabones de triángulos, como los siguientes:



Ella realiza pulseras y cadenas de diferente tamaño. Samantha compra las barras de oro por pieza. Ella quisiera encontrar el número de barras que necesita sin tener que contar las barras una a una (¡es muy largo el proceso!). Te solicitamos enviar un mensaje a Samantha en el cual le vas a explicar cómo podría hacerle para encontrar rápidamente el número de barras que necesita según el número de eslabones deseados sin estar obligada a contarlas una a una.

1. Calcular el número de barras necesarias para 4 eslabones en forma triangular. Explica las estrategias que has utilizado.
2. Calcula el número de barras para 15 eslabones en forma triangular. Explica las estrategias que has utilizado.
3. Calcula el número de barras para 21 eslabones y para 54 eslabones en forma de triángulo. Explica las estrategias que has utilizado.
4. Calcula el número de barras necesarias para cualquier número de eslabones. Explica las estrategias que has utilizado.

### Página 7. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

## Las ventanas con vitrales alrededor

### Página 1. Las ventanas con vitrales alrededor

Nombre del alumno:

\_\_\_\_\_

Nombre de los miembros del equipo:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.
- En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.

#### Las ventanas con vitrales alrededor

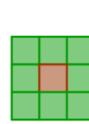


Figura 1

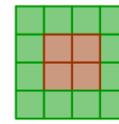


Figura 2

### Página 2. Situación

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabrican tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadros cafés en el centro y cuadros verdes alrededor. Aquí mostramos algunos ejemplos:

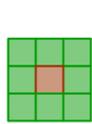


Figura 1

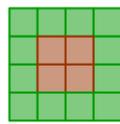


Figura 2

?

?

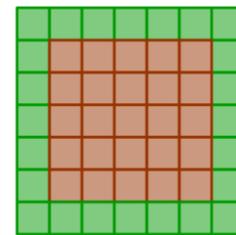


Figura 5

Los trabajadores necesitan contar el número de cuadros color verde alrededor del gran cuadrado café de la ventana y los cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadros de color verde para cualquier tamaño de ventana?

1. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 3 cuadros cafés de lado (o 5 cuadros color verdes de lado).
2. Si buscamos el número de cuadros color verde para una ventana que tiene 4 cuadros cafés de lado (o 6 cuadros color verde de lado), ¿necesitas un dibujo para encontrar la respuesta o encontraste una manera rápida de proceder?

- Y la ventana de 15 cuadros cafés de lado (o 17 cuadros color verde de lado), ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de cuadros color verde en total sin tener que contar uno a uno y sin tener que dibujar?

### Página 3. Trabajo en equipo

- En equipo, discutan las estrategias que utilizaron anteriormente para calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana que tenga 15 cuadros cafés de lado. ¿Todos utilizaron la misma estrategia? Encuentren al menos 2 estrategias para calcular el número de cuadros color verde para una ventana que tiene 15 cuadros cafés de lado.
- Una vez que han escrito diferentes estrategias y que han decidido que son correctas, utiliza alguna de estas estrategias para calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana de 23 cuadros cafés de lado y otra ventana de 58 cuadros cafés de lado.

### Página 4. Trabajo en equipo

- cualquier número de cuadros cafés de lado. Pueden utilizarlo para verificar sus respuestas de la sección anterior.

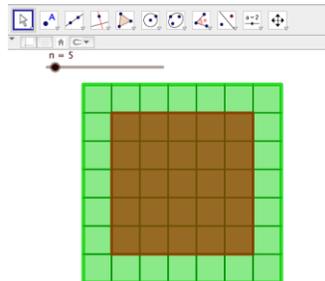


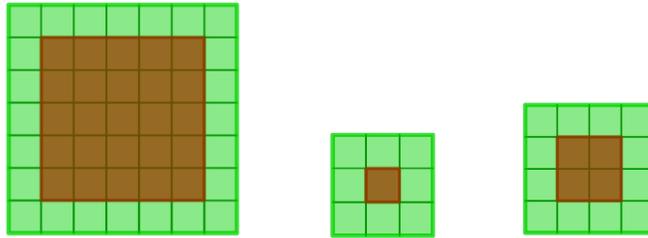
Figura 5

Número de cuadrados en el centro = 25  
 Número de cuadrados en el borde = 24

- Escribe un mensaje con palabras que permita calcular el número de cuadros color verde necesarios para una ventana para cualquier número de cuadros cafés de lado.
- Los mensajes son largos a leer, escriban el mensaje simplificado utilizando solo operaciones.

**Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión**

Tengo un amigo que tiene una pequeña fábrica de ventanas. Las ventanas que se fabrican tienen forma cuadrada y se componen de pequeños cuadros cafés en el centro y cuadros verdes alrededor. Aquí hay algunos ejemplos:



Hay trabajadores que necesitan contar el número de cuadros color verde alrededor de la ventana y cuentan uno por uno. ¿Podrías ayudar a los trabajadores a encontrar una manera de calcular rápidamente el número de cuadros color verde para cualquier tamaño de ventana?

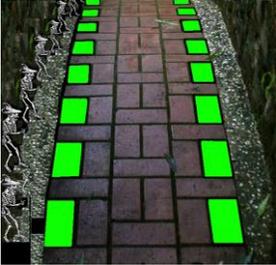
1. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 4 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.
2. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 15 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.
3. Calcula el número total de cuadros color verde si tenemos 23 y 58 cuadros cafés de lado. Explica la estrategia que utilizaste.
4. ¿Cómo podemos calcular el número de cuadros color verde necesarios para cualquier número de cuadros cafés de lado? Explica la estrategia que utilizaste.

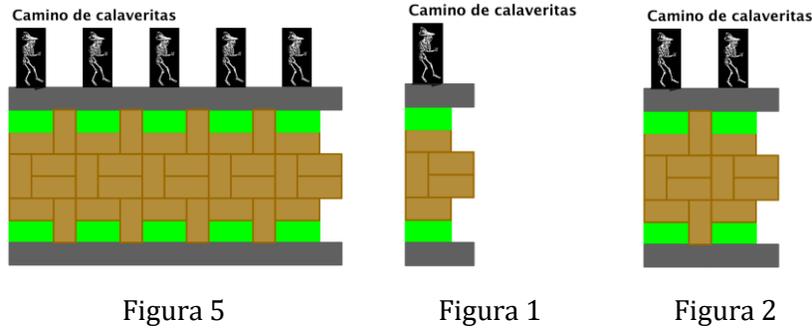
**Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora**

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

## El camino de las calaveritas

Página 1. El camino de las calaveritas	
<p>Nombre del alumno: _____</p> <p>Nombre de los miembros del equipo: _____ _____ _____</p> <p><b>Grupo:</b> _____</p> <p><b>Fecha:</b> _____</p>	<p><b>Instrucciones:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.</li> <li>▪ Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza una pluma roja.</li> <li>▪ En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.</li> </ul> <p style="text-align: center;"><b>El camino de las calaveritas</b></p> 

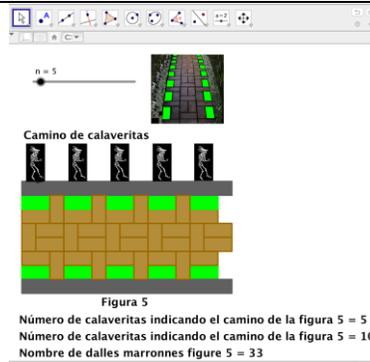
Página 2. trabajo individual – Situación
<p>En México todo mundo se prepara para la fiesta de día de muertos. En el parque de la comunidad, el director responsable del parque decide realizar un “camino de calaveritas” como lo muestra la foto. Él quisiera colocar calaveritas a todo lo largo del camino, ladrillo verde luminoso y una calaverita para mostrar el camino durante la noche, y ladrillos marrones para el resto.</p>  <p>El problema comienza cuando el director quiere saber el precio para hacer el camino, y contar las calaveritas, los ladrillos luminosos verdes, y los ladrillos marrones, para comprarlos.</p> <p>Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo y discusión de toda la clase. Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicado por tu profesora.</p> <p>Enseguida, te mostramos un modelo que ha hecho la compañía de ladrillos y también, la persona que lo ha hecho muestra dónde serían colocadas las calaveritas.</p> <p>El director está interesado en calcular el número de ladrillos verdes, el número de ladrillos marrones, el número de calaveritas de acuerdo a cada figura.</p> <p>Te mostramos varias figuras para que veas el modelo realizado por el fabricante de ladrillos:</p>



1. Calcula el número de calaveritas de la tercera figura.
2. ¿Tienes necesidad de dibujar la cuarta figura para calcular el número de calaveritas?
3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de calaveritas de la 5ª figura, sin contar las calaveritas una a una?
4. Calcula el número de ladrillos luminosos de la 3ª figura.
5. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos luminosos de la 4ª figura?
6. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos luminosos de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?
7. Calcula el número de ladrillos marrones de la 3ª figura.
8. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos marrones de la 4ª figura?
9. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos marrones de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?

### Página 3. Trabajo en equipo

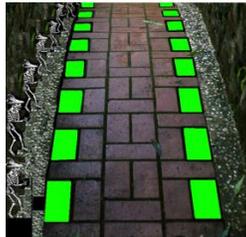
10. Analizar el trabajo de tus compañeros para encontrar diferentes estrategias que te permitan de calcular el número de calaveritas, de ladrillos luminosos y de ladrillos marrones de la 6ª figura. Escribe cada una de las estrategias.
11. Una vez tiene sus estrategias, y que han decidido que son correctas, calcula con cada una de las estrategias el número de calaveritas, el número de los ladrillos luminosos y el número de ladrillos marrones para la 12ª figura. ¿Cuál es su resultado con cada estrategia que han utilizado? ¿Obtienen el mismo resultado con cada estrategia?
12. Utiliza la aplicación GeoGebra para verificar si sus estrategias corresponden a los resultados proporcionados por la aplicación GeoGebra. Si los resultados no corresponden, busca una explicación.



13. Escribe un mensaje escrito donde expliques cómo podría calcular el número de calaveritas, de ladrillos luminosos y de ladrillos marrones para cualquier figura de acuerdo a la misma forma como lo has trabajado antes.
14. Los mensajes son muy largos. Escribe el mismo mensaje simplificado indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar.

#### Página 4. Trabajo individual - Autorreflexión

En México todo mundo se prepara para la fiesta de día de muertos. En el parque de la comunidad, el director responsable del parque decide realizar un “camino de calaveritas” como lo muestra la foto. Él quisiera colocar calaveritas a todo lo largo del camino, ladrillo verde luminoso y una calaverita para mostrar el camino durante la noche, y ladrillos marrones para el resto.



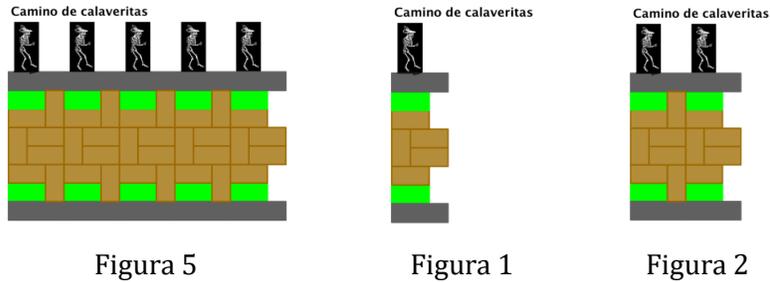
El problema comienza cuando el director quiere saber el precio para hacer el camino, y contar las calaveritas, los ladrillos luminosos verdes, y los ladrillos marrones, para comprarlos.

Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo y discusión de toda la clase. Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicado por tu profesora.

Enseguida, te mostramos un modelo que ha hecho la compañía de ladrillos y también, la persona que lo ha hecho muestra dónde serían colocadas las calaveritas.

El director está interesado en calcular el número de ladrillos verdes, el número de ladrillos marrones, el número de calaveritas de acuerdo a cada figura.

Te mostramos varias figuras para que veas el modelo realizado por el fabricante de ladrillos:



1. Calcula el número de calaveritas de la tercera figura.
2. ¿Tienes necesidad de dibujar la cuarta figura para calcular el número de calaveritas?
3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de calaveritas de la 5ª figura, sin contar las calaveritas una a una?
4. Calcula el número de ladrillos luminosos de la 3ª figura.
5. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos luminosos de la 4ª figura?
6. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos luminosos de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?
7. Calcula el número de ladrillos marrones de la 6ª figura.
8. ¿Tienes necesidad de dibujar para calcular los ladrillos marrones de la 12ª figura?
9. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de ladrillos marrones de la 5ª figura sin contarlos uno a uno?

### **Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora**

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

## Rectángulo y círculos

### Página 1. Rectángulo y círculos

Nombre del alumno:

\_\_\_\_\_

Nombre de los miembros del equipo:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

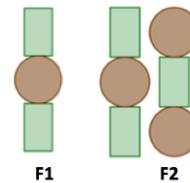
Grupo: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta utiliza una pluma roja.
- En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.

#### Rectángulos y círculos



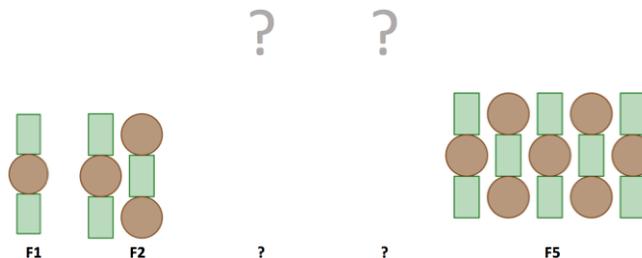
### Página 2. Trabajo individual - Situación

Tenemos una serie de rectángulos y círculos arreglados como lo muestra la figura más abajo.

Te invitamos a efectuar un trabajo individual, después en equipo, y en gran grupo.

Finalmente, un regreso a una reflexión individual como será indicada por la profesora.

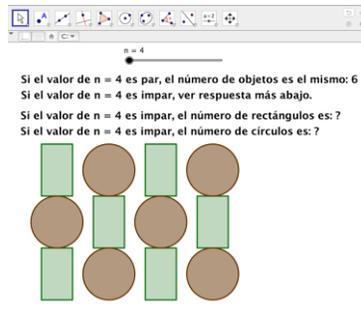
Enseguida te mostramos las dos primeras figuras y la quinta.



1. Calcula el número de rectángulos y de círculos de la figura 3.
2. ¿Tienes necesidad de realizar un dibujo para calcular el número de rectángulos y de círculos de la 4ª figura?
3. ¿Puedes encontrar una estrategia para calcular el número de rectángulos y círculos de la 5ª figura?

### Página 3. Trabajo en equipo

4. Analizar el trabajo de tus compañeros para encontrar diferentes estrategias que te permitan de calcular el número rectángulos y de círculos de la 6ª figura. Escribe cada una de las estrategias.
5. Una vez que tengan sus estrategias, y que han decidido que son correctas, calcula con cada una de las estrategias el número de calaveritas, el número de los ladrillos luminosos y el número de rectángulos y de círculos de la 12ª figura. ¿Cuál es su resultado con cada estrategia que han utilizado? ¿Obtienen el mismo resultado con cada estrategia?
6. Ahora, calcula con tus estrategias el número de rectángulos y de círculos para la 13ª figura.
7. Utiliza la aplicación GeoGebra para verificar si sus estrategias corresponden a los resultados proporcionados por la aplicación GeoGebra. Si los resultados no corresponden, busca una explicación.



8. Una vez que hayas terminado la etapa precedente, proporciona a tus compañeros un procedimiento o una fórmula que les permita de calcular el número de rectángulos y de círculos para cualquier figura de acuerdo con la misma forma como lo han hecho antes.

### Página 4. Discusión en gran grupo

9. Discusión de lo que han hecho los equipos en las primeras etapas. Intenta comprender los procedimientos de tus compañeros basado en la argumentación y la validación.

### Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión

Un nuevo cuestionario será utilizado por cada alumno para trabajar en casa. Se trata de reconstruir los resultados que permitan de resolver la actividad.

**Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora**

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

## Números triangulares

### Página 1. Números triangulares

Nombre del alumno:

\_\_\_\_\_

Nombre de los miembros del equipo:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Grupo: \_\_\_\_\_

Fecha: \_\_\_\_\_

#### Instrucciones:

- Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma azul.
- Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.
- En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.

#### Números triangulares



### Página 2. Trabajo individual - Situación

Hace mucho, mucho tiempo (hacia el año 520 antes de Cristo), un matemático llamado Pitágoras fundó una escuela en una isla de la Grecia antigua. Sus alumnos y él estaban fascinados por los números y la geometría. Uno de sus descubrimientos consistía en representar los números por figuras geométricas. Por ejemplo, ellos se percataron que ciertos números podían ser representados en triángulo. Ellos dirían que 1, 3, ?, ? y 10 son los primeros números triangulares ya que se pueden representar por puntos colocados en forma de triángulos, como se muestra enseguida.



?

?



Triangular 1

Triangular 2

Triangular ¿?

Triangular ¿?

Triangular 5

*Primera actividad (Trabajo individual y luego en equipo)*

1. Observa bien esos números. ¿Cuál es el 3er número triangular? Representalo. Explica la manera como lo has realizado.
2. ¿Te puedes imaginar el 4º número triangular sin realizar un dibujo?

### Página 3. Trabajo en equipo

3. De acuerdo con tu opinión, ¿cómo están contruidos esos números triangulares? ¿Qué observas?
4. ¿Cuál es el 11º número triangular? Explica cómo puedes hacerlo para encontrarlo.
5. Tú debes escribir un mensaje CORTO a un amigo para describirle cómo realizar los cálculos para el triangular 83. Describe lo que le escribirías. NO TIENES NECESIDAD DE REALIZAR LOS CALCULOS.
6. Y para calcular cualquier número triangular, cómo se haría (se quisiera otra vez aquí otro mensaje CORTO).

### Página 4. Trabajo individual

#### 7. Segunda actividad

Utiliza las mismas ideas que has encontrado antes, pero esta vez, en un ambiente de tecnología (EXCEL). Ver la figura en Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombres polygonaux						
2	Position	1	2	3	4	5	
3	Triangulaire	1					
4							
5							

¿Qué harías para encontrar el 6º, 7º y 8º números triangulares?

Te es posible calcular:

El número triangular 30: \_\_\_\_\_

El número triangular 83: \_\_\_\_\_

El número triangular 120: \_\_\_\_\_

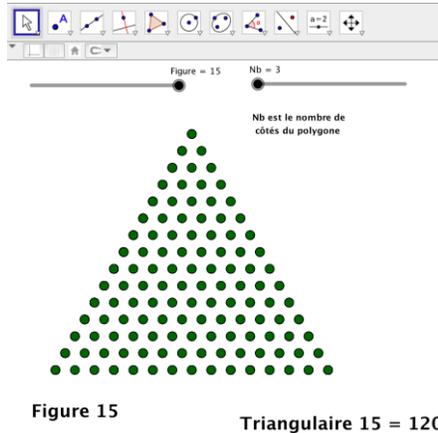
¿Cómo lo has realizado?

8. ¿Cuáles son las limitaciones y las posibilidades de esta forma de proceder?
9. Proporciona las operaciones para calcular cualquier número triangular.

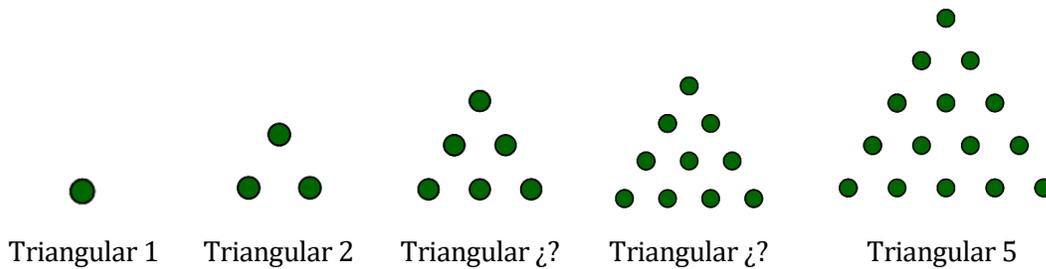
## Página 5. Trabajo en equipo

### 10. Tercera actividad (en equipo)

Utiliza la aplicación *GeoGebra* para esta tercera actividad. Solamente tienes que seleccionar el número triangular que deseas y la aplicación te mostrará el resultado.



a) En seguida mostramos los primeros cinco números triangulares:



Encuentra una fórmula para calcular el valor numérico de cualquier número triangular. Tú puedes utilizar la aplicación *Poly* para ayudarte a encontrar la fórmula.

PROCEDIMIENTO (OPERACIONES)

Escribe la regla o fórmula que has encontrado:

**Página 6. Trabajo en equipo**

11. Utilizando tu resultado, calcula los siguientes números triangulares.

Posición	Valor correspondiente
Triangular 10	
Triangular 20	

Con tu fórmula, ¿puedes calcular el número triangular 120?

Triangular 120 = \_\_\_\_\_

**Página 7. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora**

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

