Colección Matemática Educativa y Tecnología

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt

ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLÓGICO

Álvaro Bustos Rubilar

Fernando Hitt

Colección Matemática Educativa y Tecnología

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Primera edición: Marzo 2019 (México)

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio
Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

Índice

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolinni Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros “Matemática Educativa y Tecnología”. Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-practico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa
José Carlos Cortés Zavala

Referencias

Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Groupe PME, v. 2, 17-24. Seoul: PME.

Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.

Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen "iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable", en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al "animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura". Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

> "[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente".

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de "modelo tabular" y "modelo gráfico" a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, "puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo" (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a “un modelo” fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en “pesar figuras” para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del geómetra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los “Objetos Para Aprender”, como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM

2 DISTINCIÓN ENTRE EJERCICIO, PROBLEMA Y SITUACIÓN PROBLEMA EN UN MEDIO TECNOLÓGICO Y EJEMPLOS EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS

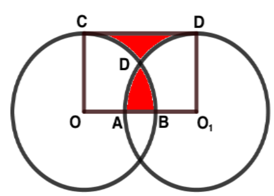
Actividades capítulo 2: Guía para el profesor

José Luis Soto Munguía[1], Fernando Hitt Espinosa[2], Samantha Quiroz Rivera[3]

La visualización matemática es una habilidad que se puede desarrollar en los alumnos, para mayor precisión, ver capítulo 2: Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos, en donde se discuten los trabajos de investigación de Krutetski 1976, Presmeg, Eisenberg & Dreyfus 1991, Zimmerman & Cunninham 1991, entre otros. Es por ello que es importante proponer actividades en acorde a esta habilidad, como lo ha propuesto el propio Krutetski.

A continuación se presentan algunas actividades que van da acuerdo a lo señalado en el capítulo 2 del libro: *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico*.

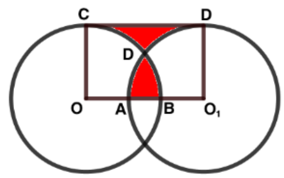
Actividad en lápiz y papel

Página 1. Cálculo de la distancia entre los centros de dos círculos particulares	
Nombre del alumno: ____________________ Nombre de los miembros del equipo: ____________________ ____________________ ____________________ **Grupo:** __________ **Fecha:** __________	<u>**Instrucciones**</u>: ▪ **Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.** ▪ **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.** ▪ **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.** **Cálculo de la distancia entre O y O'** 

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora.
[2] Département des Mathématiques, Université du Québec à Montréal.
[3] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila.

Página 2. Situación y reflexión individual

Se considera el diagrama siguiente, en el cual las dos figuras sombreadas tienen la misma área. Se solicita encontrar el valor de la distancia entre el centro del círculo O y el centro del círculo O'.



Página 3. Trabajo individual

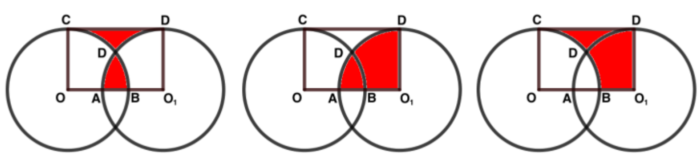
Discute con tus compañeros de equipo las diferentes estrategias utilizadas y verifica que han obtenido el mismo resultado.

Si no han obtenido el mismo resultado, discutir sobre los posibles errores cometidos, hasta llegar a un consenso.

Página 4. Trabajo en gran grupo

Los alumnos presentan sus resultados y los validan ellos mismos, hasta llegar a un consenso del resultado y/o demostración.

El profesor proporciona la respuesta correcta, realizando un proceso visual como el señalado en el capítulo (ver figura más abajo) y proporcionando el proceso numérico asociado al visual.



Área del rectángulo igual a dos veces el área de la cuarta parte del círculo unitario, por lo tanto, área igual $2(\pi/4) = \pi/2$. Dado que el lado del rectángulo mide 1, la distancia solicitada es $\pi/2$.

Actividad en lápiz, papel, regla, tijeras y tecnología

Nuevamente en un proceso de visualización matemática, Polya propuso su problema que tiene varias soluciones. Nosotros solamente hemos mostrado una.

Página 1. Dividir el área de una cruz en tres partes para formar un rectángulo

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

Grupo: ____________

Fecha: ____________

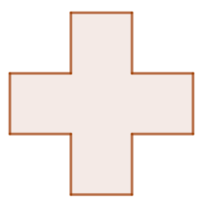
Instrucciones:

- **Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Dividir la cruz para formar un rectángulo

Página 2. Situación y reflexión individual

Exclusivamente con dos cortes se debe cortar la cruz que se presenta a continuación de manera que se obtengan dos cuadrados de área igual que puedan formar un rectángulo al unirse.



Página 3. Trabajo en equipo

Discute con tus compañeros de equipo las diferentes estrategias utilizadas y verifica que han obtenido el mismo resultado.

Si no han obtenido el mismo resultado, discutir sobre los posibles errores cometidos, hasta llegar a un consenso.

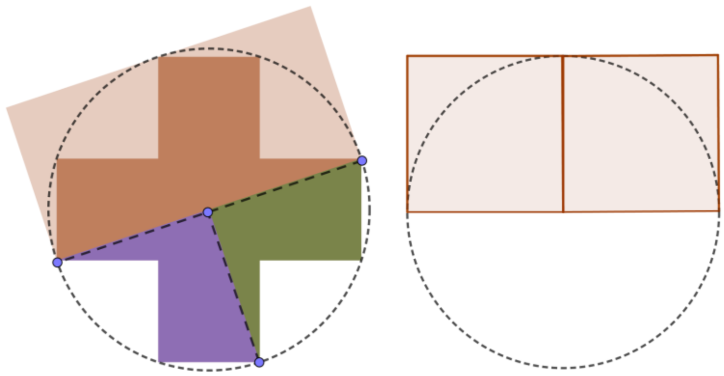
En caso necesario, utiliza el archivo *GeoGebra* que acompaña la actividad, para que les permita simular cortes para visualizar alguna estrategia.

Página 4. Trabajo en gran grupo

Los alumnos presentan sus resultados y los validan ellos mismos, hasta llegar a un consenso del resultado y/o demostración.

En caso necesario, permitirles a los expositores de utilizar el archivo *GeoGebra* que acompaña la actividad, para que les permita simular cortes para visualizar la estrategia sugerida por los equipos.

El profesor proporciona la respuesta correcta, realizando un proceso visual como el señalado en el capítulo (ver figura más abajo) y proporcionando el proceso numérico asociado al visual.



Actividad en lápiz, papel, regla y un trozo cuadrado de papel

<table>
<tr><th colspan="2">Página 1. Doblez de un trozo de papel (parte 1)</th></tr>
<tr>
<td>
Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

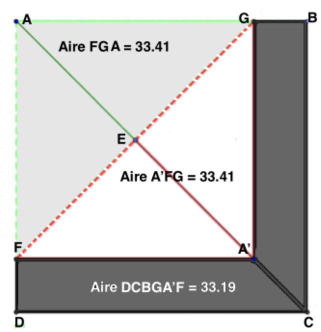
____

____

Grupo: ___________

Fecha: ___________
</td>
<td>
<u>Instrucciones</u>:

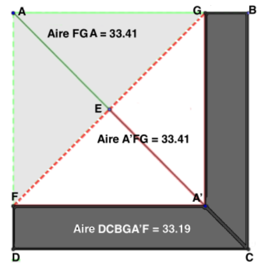
Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.
Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.
En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.

Doblez de un trozo de papel cuadrado


</td>
</tr>
</table>

Página 2. Situación y reflexión individual

Un trozo cuadrado de papel ABCD es blanco por enfrente y obscuro por el reverso, tiene un área de 20 cm^2. La esquina D es doblada sobre el punto A´ que permanece sobre la diagonal AC, de tal modo que el área visible total es ½ de color blanco y ½ de color negro. ¿A qué distancia está A´ de la línea del doblez?



Página 3. Trabajo en equipo

Discute con tus compañeros de equipo las diferentes estrategias utilizadas y verifica que han obtenido el mismo resultado.

Si no han obtenido el mismo resultado, discutir sobre los posibles errores cometidos, hasta llegar a un consenso.

Página 4. Trabajo en gran grupo

Los alumnos presentan sus resultados y los validan ellos mismos, hasta llegar a un consenso del resultado y/o demostración.

El profesor proporciona la respuesta correcta, realizando un proceso visual como el señalado en el capítulo (ver figura más abajo) y proporcionando el proceso numérico asociado al visual.

Sea $x = \overline{DG}$. El área del triángulo ΔFDG (rectángulo isósceles) es un tercio de 400 cm^2. O sea $\frac{base \times altura}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{400}{3}$. Lo cual implica $x = 20\sqrt{\frac{2}{3}} \cong 16.33$. Debemos calcular la diagonal del cuadrado construido con el doblez y dividir entre dos. $\frac{Diagonal}{2} = \frac{\sqrt{x^2+x^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\,x}{2} \cong 11.55$. Respuesta 11.55 cm.

Actividad en lápiz, papel, regla, una hoja de papel tamaño carta y tecnología

Página 1. Doblez de una trozo de papel

Nombre del alumno:

____

Nombre de los miembros del equipo:

____

____

____

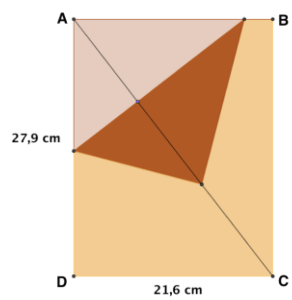
Grupo: ____________

Fecha: ____________

Instrucciones:

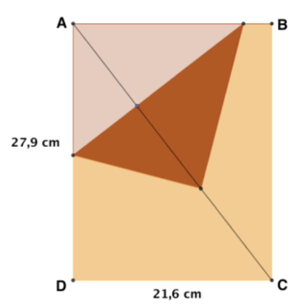
- **Para la primera actividad individual, utiliza una pluma azul.**
- **Para el trabajo en equipo, si modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja.**
- **En el trabajo en grupo, si modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde.**

Doblez de una hoja de papel



Página 2. Situación y reflexión individual

Se toma una hoja de papel y se traza una diagonal. Considerando dos extremos opuestos, se dobla la esquina (digamos A) de la hoja de manera que esa esquina A recorra la diagonal AC (ver Figura) y de que el área de la superficie del triángulo formado al doblar el papel (superficie obscura), sea igual al área del hexágono irregular (superficie más clara) formado una vez realizado el doblez. ¿A qué distancia de la línea del doblez se encuentra el punto A cuando la igualdad se ha alcanzado? ¿Cuál es el área del triángulo que deberá ser igual al área del hexágono irregular?



Página 3. Situación y reflexión individual

a) Es conveniente la construcción de una estrategia para atacar el problema.

b) El uso de una hoja de papel es un buen comienzo para iniciar la modelación de la situación.

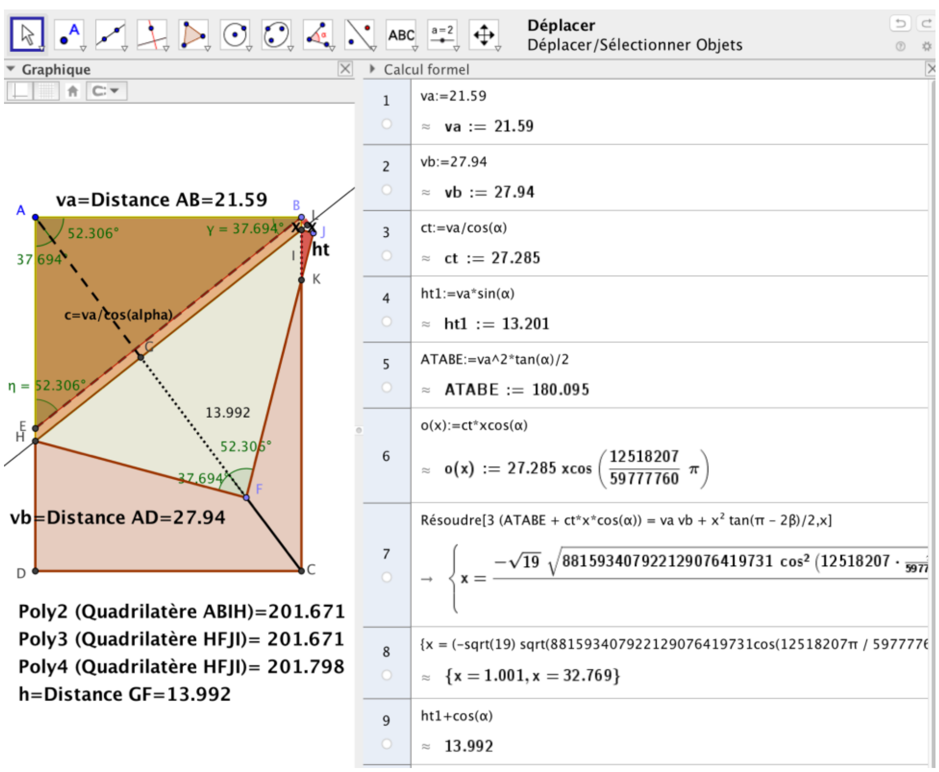
c) Utilice una notación adecuada que le permita modelar la situación.

Página 4. Situación y discusión en equipo
d) ¿Se ha llegado a una estrategia adecuada en la discusión en equipo?
e) ¿Es posible modelar la situación?
f) ¿Sería conveniente el uso de tecnología que pudiera proporcionar más información para la posible solución del problema? (por ejemplo, el uso de GeoGebra)

Página 5. Situación y discusión en equipo y enseguida en gran grupo
a) Si se hubiera llegado a una solución desde un punto de vista visual con tecnología, ¿sería posible encontrar una justificación algebraica?

Una vez llegado a un consenso en el aula, el profesor recoge todo lo realizado por los alumnos y solicita que rehagan la actividad como un proceso de autorreflexión (individual) solicitando al estudiante la reproducción de los resultados encontrados en la discusión en gran grupo.

Posterior a esta etapa, el profesor puede proporcionar una demostración del resultado (consultar archivo correspondiente), tomando en consideración las producciones de los alumnos.



El doblez está a una distancia de 13,992 cm de la punta F de la hoja (ver figura).

Las pirámides financieras

Material necesario para la secuencia:

1. Una computadora por equipo, con GeoGebra instalado.

Inicio

Actividad 1. Trabajo individual

Los fraudes financieros piramidales, conocidos también como Esquemas Ponzi, deben su nombre a un estafador de ascendencia italiana, radicado en Boston, quien se enriqueció en 1920, con una compañía de inversiones a costa de la ruina de sus inversionistas. Los Esquemas de Ponzi tienen un mecanismo de funcionamiento muy sencillo:

Los primeros inversionistas obtienen atractivas ganancias, gracias a los recursos aportados por nuevos clientes, casi siempre convencidos por estos primeros. Para que el sistema funcione se requiere entonces que exista siempre gente dispuesta a invertir, pero llega un momento en el que ya no hay manera de conseguir quien invierta, entonces la empresa se colapsa.

Aunque el truco parece bastante burdo, año con año surgen en todo el mundo nuevas variantes de los esquemas de Ponzi, estafando a grandes cantidades de ciudadanos incautos. Uno de los casos más impresionantes se presentó en Albania[4] en 1997, el colapso de las empresas financieras fraudulentas, perjudicaron a las dos terceras de la población, provocaron la insurrección de la población y la caída del gobierno en turno.

---

[4] Una descripción más detallada del caso puede verse en: Christopher Jarvis, C. The Rise and Fall of Albania's Pyramid Schemes. Finance & Development [en línea]. Marzo de 2000, Vol. 37, No. 1. [Fecha de consulta: 18 de octubre de 2018]. Disponible en: http://www.imf.org/external/pubs/ft/fandd/2000/03/pdf/jarvis.pdf.

1. Si estás de acuerdo en que una financiera piramidal colapsará tarde o temprano, explica cuál será la causa principal del colapso:

____

____

____

Desarrollo

Actividad 2. Trabajo en equipo

Veremos aquí cómo funcionan las cadenas de inversión financiera y por qué invariablemente resultan fraudulentas.

Para explicar el funcionamiento de estas pirámides, usaremos el ejemplo hipotético de una empresa que se funda en la Ciudad de Hermosillo para dedicarse a este negocio.

Una persona, de nombre Timoteo Vil, conocido en el bajo mundo como Timo Vil, crea una "empresa de inversión" y la titula Dinero Gratis. La empresa vende bonos de inversión de $5000.00 con la promesa de regresar al mes la inversión con un 100% de ganancia, es decir $10000 en total; la única condición para pagar los $10000 al inversionista, es que éste lleve a la empresa otros cuatro inversionistas, que compren también un bono de $5000.00 cada uno, sujetos a las mismas reglas de inversión.

Supongamos que en la Cd. de Hermosillo existen aproximadamente 100 000 personas con la disposición y los fondos para invertir en la empresa Dinero Gratis. Como puede verse en la Tabla 1, la empresa inicia con Don Timo y cuatro inversionistas que aportan 5 mil pesos cada uno. El mes siguiente estos cuatro inversionistas consiguen otros cuatro cada uno, es decir hay 4^2 nuevos inversionistas. Al final del primer mes, los cuatro primeros han cumplido su trato, por lo cual reciben 10 mil pesos cada uno, es decir $4^1 \times 10$ miles de pesos entre todos, Don Timo en cambio recibe $4^2 \times 5$ miles de pesos de los 16 nuevos inversionistas.

En la Tabla 1 se muestra cómo evoluciona, durante los primeros cuatro meses, la situación financiera de Dinero Gratis.

Mes	Personas involucradas	Ingresos de la empresa	Egresos de la empresa	Ganancias de la Empresa
0	$1 + 4^1 =$	$4^1 \times 5 =$	0	
1	$1 + 4^1 + 4^2 =$	$4^2 \times 5 =$	$4^1 \times 10 =$	
2	$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 =$	$4^3 \times 5 =$	$4^2 \times 10 =$	
3	$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 =$	$4^4 \times 5 =$	$4^3 \times 10 =$	
4	$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 =$	$4^5 \times 5 =$	$4^4 \times 10 =$	

Tabla 1. Los ingresos, egresos y ganancias en miles de pesos

2. Analiza en tu equipo los cálculos indicados en cada columna y expliquen por qué las indicaciones son coherentes con el funcionamiento de la empresa.

En la Tabla 1 puede observarse que los cálculos de cada renglón están relacionados con los cálculos del renglón siguiente. Fijemos la atención particularmente en la segunda columna, para la cual los cálculos pudieran ser más laboriosos, habría por lo menos dos maneras de realizar estos cálculos:

Método 1. Las series de la segunda columna se denominan *series geométricas* y existe una fórmula para calcular esta suma, hasta el $(n+1)-$ésimo término.

3. Investiguen en internet la fórmula

$$1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \_\_\_\_\_\_\_\_, \qquad (1)$$

y úsenla para realizar los cálculos de la columna 2, solicitados.

Método 2. Si

$$S_3 = 1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4$$
$$\text{y } S_4 = 1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5,$$

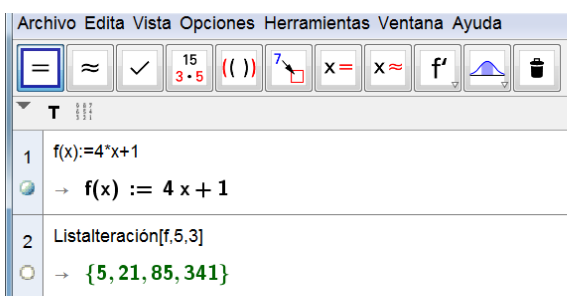
entonces la relación más simple entre S_3 y S_4, puede escribirse como:

$$S_4 = S_3 + 4^5, \qquad (2)$$

aunque también la relación podría establecerse como:

$$S_4 = 1 + 4(1 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4) = 1 + 4S_3 \qquad (3)$$

Esta última relación parece más complicada que (2), pero tiene la ventaja de que puede ser automatizada fácilmente en un Sistema de Cálculo Simbólico (CAS por sus siglas en Inglés). En la vista "Cálculo Simbólico" de GeoGebra, por ejemplo, capturamos en dos renglones:



En el primer renglón hemos definido la función f(x):=4x+1, como lo haríamos con cualquier función, excepto porque usamos el símbolo ":=" (que significa sustitución), en lugar del signo "=", pero en el segundo renglón el comando "ListaIteración(<Función>, <Valor inicial>, <Número de iteraciones>)", para capturar el renglón "ListaIteración(f, 5, 3)" lo que indica al CAS que tome el valor inicial $x = 5$, y luego itere los cálculos 3 veces, GeoGebra hará los siguientes cuatro cálculos:

$$x = 5$$

$$f(5) = 4(5) + 1 = 21$$

$$f(21) = 4(21) + 1 = 85$$

$$f(85) = 4(85) + 1 = 341$$

4. Usen el Cálculo Simbólico de GeoGebra para llenar la Tabla 1.
5. ¿Cuál de los dos métodos prefieren usar para hacer los cálculos? Justifiquen su respuesta.

6. Luego usen cualquiera de los dos métodos para continuar con los cálculos extendiendo la Tabla 1 (añadiendo renglones). Respondan en su equipo la pregunta: ¿hasta qué mes habrá que extender la Tabla 1, para explicar el colapso de Dinero Gratis?

7. ¿Cuál es la causa principal del colapso de la empresa?

8. ¿Cuál es el total de personas que invierten en Dinero Fácil?

9. ¿Cuántos de los inversionistas obtienen los $10000 prometidos?

10. ¿Cuántos de los inversionistas pierden su inversión?

11. ¿Cuál es el monto de la ganancia obtenida por Don Timo Vil, antes de darse a la fuga?

12. Supongamos que tu equipo recibe un correo electrónico de alguien que quisiera invertir en una empresa financiera piramidal como la mencionada aquí. Redacten (en media cuartilla) equipo la respuesta que darían al correo electrónico.
13. Expongan ante el resto del grupo la respuesta redactada.

Cierre

Actividad 3. Trabajo grupal

En el problema planteado aquí la solución depende en gran parte de que podamos sumar los términos de una progresión geométrica, usualmente a esta suma se le llama *serie geométrica*.

Mientras que una progresión geométrica, tiene la forma:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n$$

Una serie geométrica tiene la forma:

$$a + ar + ar^2 + \ ar^3 +, \dots, +ar^n$$

Aunque en el problema abordado aquí, $a = 1$, $r = 4$ y n era un número por determinar.

Puesto que esta serie puede escribirse en forma factorizada como:

$$a(1 + r + r^2 + \ r^3 + \ \dots + r^n),$$

donde a es una constante, el problema se reduce prácticamente a calcular $(1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n)$

El **Método 1** está basado en que se puede encontrar una expresión algebraica para S, en donde:

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n$$

Pero si multiplicamos S por r, tendremos:

$$rS = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}$$

Y restando S de rS, obtenemos:

$$\begin{aligned} rS &= \quad r + r^2 + r^3 +, \ldots, + r^n + r^{n+1} \\ -S &= -1 - r - r^2 - r^3 -, \ldots, - r^n \\ rS - S &= -1 + r^{n+1} \end{aligned}$$

Luego factorizando S en el lado izquierdo de la igualdad, tenemos:

$$S(r-1) = -1 + r^{n+1}$$

O bien:

$$S = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

Y concluimos finalmente que

$$aS = a(1 + r + r^2 + r^3 +, \ldots, + r^n) = a + ar + ar^2 + ar^3 +, \ldots, + ar^n = a\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

En cambio, en el **Método 2**, se ha introducido una función recursiva para realizar los cálculos con ayuda de GeoGebra. Una función como ésta puede introducirse porque la suma de la serie geométrica hasta el n-ésimo término, puede hacerse depender de la suma hasta el término anterior, es decir:

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1} + r^n,$$

puede escribirse como:

$$S_n = 1 + r(1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n-1}),$$

y por lo tanto:

$$S_n = 1 + rS_{n-1},$$

lo cual nos permite definir la función recursiva:

$$f(x) := 1 + rx.$$

14. Abre la vista “CAS” de GeoGebra y captura en un renglón la expresión “f(x):=10x +1" y oprime la tecla “enter”, en un segundo renglón captura la expresión “ListaIteración(f, 1, 10)” e igualmente oprime la tecla “enter”. ¿A qué serie geométrica corresponden los valores que GeoGebra está calculando?