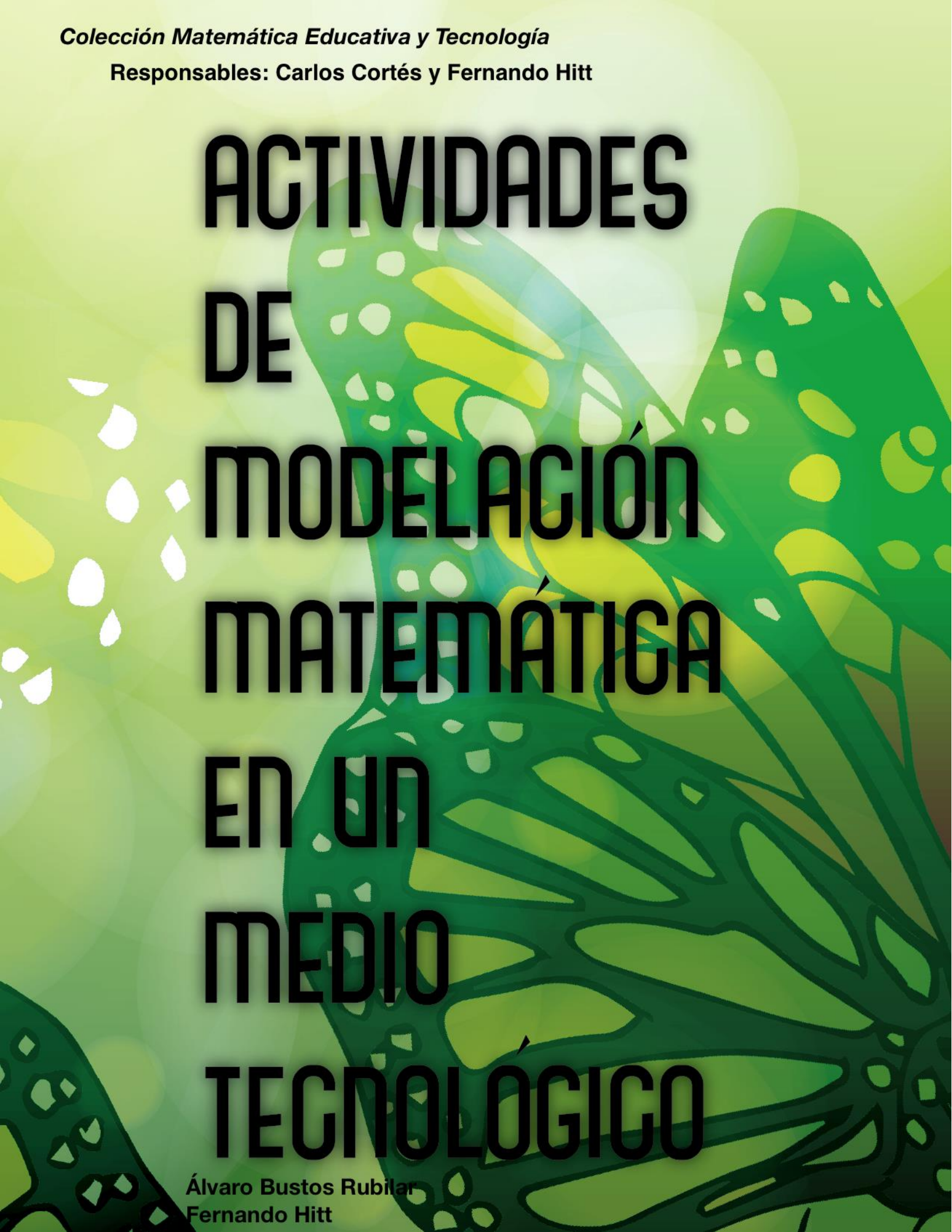


Colección Matemática Educativa y Tecnología

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt

The background of the cover features a vibrant green color palette. Large, stylized leaves with intricate vein patterns are layered across the right and bottom portions of the image. On the left side, a series of white, teardrop-shaped elements are arranged in a semi-circular arc, resembling a stylized sunburst or a cluster of dew drops. The overall aesthetic is clean, modern, and nature-inspired.

ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLOGICO

Álvaro Bustos Rubilar
Fernando Hitt

Colección Matemática Educativa y Tecnología

***Actividades de modelación matemática
en un medio tecnológico***

Comité editorial (versión electrónica)

Álvaro Bustos Rubilar

Fernando Hitt

Editores de la colección Matemática Educativa y Tecnología
José Carlos Cortés Zavala
Fernando Hitt

**Comité Editorial del libro: Actividades de modelación matemática en un
medio tecnológico (versión electrónica)**

Álvaro Bustos Rubilar

Universidad de Valparaíso

Fernando Hitt

Université du Québec à Montréal

Primera edición: Marzo 2019 (México)

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio

Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

© 2019

© **CC-BY-NC-ND**

Índice

Prefacio y actividades por capítulo	Página
Prefacio	v
Capítulo 1. La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Fernando Hitt Espinosa, Mireille Saboya, Samantha Quiroz Rivera, Álvaro Bustos Rubilar y Zita Antun</i>	1
Remarque. Activités en espagnol et français.	25
Capítulo 2. Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía, Fernando Hitt Espinosa y Samantha Quiroz Rivera</i>	43
Capítulo 3. El aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt Espinosa, Álvaro Bustos Rubilar, Mireille Saboya y Zita Antun</i>	57
Capítulo 4. Entendimiento de postulados básicos de la perspectiva de modelos y modelación por profesores en formación	
Diseño de actividades: <i>Verónica Vargas Alejo y César Cristóbal Escalante</i>	63
Capítulo 5. La inclusión de GeoGebra en el diseño de secuencias didácticas en matemáticas	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía</i>	73
Capítulo 6. Proceso de representación del cambio y la variación: exploraciones digitales	
Diseño de actividades: <i>Sandra Evelyn Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Leal y Nelson Javier Rueda</i>	81
Capítulo 7. Utilización de sensores CBR2 para el estudio de situaciones funcionales a nivel secundaria y universitario	
Diseño de actividades: <i>Valériane Passaro, Ruth Rodríguez Gallegos, Mireille Saboya y Fabienne Venant</i>	85
Remarque. Activités en espagnol et français.	99
Capítulo 8. Actividades de aprendizaje para entender el concepto de función Derivada y Función integral a través de las razones de diferencias y las acumulaciones	
Diseño de actividades: <i>José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera y Eréndira Núñez Palenius</i>	113

Capítulo 9. Variación lineal y movimiento: de la experiencia corporizada a los significados institucionales	
Diseño de actividades: <i>María Teresa Dávila y Agustín Grijalva Monteverde</i>	159
Capítulo 10. Problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et apport de la méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive	
Diseño de actividades: <i>Pedro Rogério Da Silveira Castro</i>	167
Remarque. Activités en français.	
Capítulo 11. La ecuación lineal con dos variables: una propuesta para su aprendizaje en la escuela secundaria mexicana	
Diseño de actividades: <i>Ana Guadalupe del Castillo y Silvia E. Ibarra Olmos</i>	175
Capítulo 12. Tecnología y usos de las gráficas: una experiencia de modelación del movimiento con estudiantes de bachillerato	
Diseño de actividades: <i>José David Zaldívar Rojas</i>	197
Capítulo 13. Una forma de enseñanza y aprendizaje: Objetos Para Aprender	201
Diseño de actividades: <i>Ricardo Ulloa Azpeitia</i>	
Capítulo 14. Secuencia didáctica para el cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución: el caso de recipientes y sandía	
Diseño de actividades: <i>Rafael Pantoja Rangel, Rosaura Ferreyra Olvera y Rafael Pantoja González</i>	203
Capítulo 15. Geogebra comme outil d'exploration en enseignement de la géométrie	
Diseño de actividades: <i>Loïc Geeraerts y Denis Tanguay</i>	
Remarque. Activités en français.	205

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolini Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros “Matemática Educativa y Tecnología”. Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-práctico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa
José Carlos Cortés Zavala

Referencias

- Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group PME*, v. 2, 17-24. Seoul: PME.
- Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.
- Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.
- English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen “iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable”, en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al “animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura”. Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

“[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente”.

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de “modelo tabular” y “modelo gráfico” a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, “puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo” (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a “un modelo” fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en “pesar figuras” para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del geómetra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los “Objetos Para Aprender”, como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM

3 EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN UN MEDIO SOCIOCULTURAL Y TECNOLÓGICO

Actividades capítulo 3: Guía para el profesor

Samantha Quiroz Rivera¹, Fernando Hitt², Álvaro Bustos Rubilar³ Mireille Saboya², Zita Antoun²

Introducción

La literatura actual en didáctica de las matemáticas señala la importancia de promover el desarrollo de estrategias en los procesos de generalización en edades tempranas. Se sabe que niños en los primeros años de primaria son capaces de conjeturar y construir estrategias ligadas a la generalización en la resolución de problemas.

En este sentido, se diseñaron una serie de actividades para utilizar en el aula de matemáticas con el fin de promover la generalización como prelude al aprendizaje del álgebra (ver el conjunto completo de actividades que se desarrollaron por el equipo arriba mencionado). A continuación, se muestra una de esas actividades.

El restaurante de Marcelo

Página 1. El restaurante de Marcelo	
Nombre del alumno: _____ Nombre de los miembros del equipo: _____ _____ _____ Grupo: _____ Fecha: _____	Instrucciones: ▪ Para este primer trabajo individual, utiliza una pluma negra o azul. ▪ Para el trabajo en equipo, si tú modificas tu respuesta, utiliza una pluma roja. ▪ Después de discutir con el grupo, si tú modificas tu respuesta de nuevo, utiliza una pluma verde. El restaurante de Marcelo 

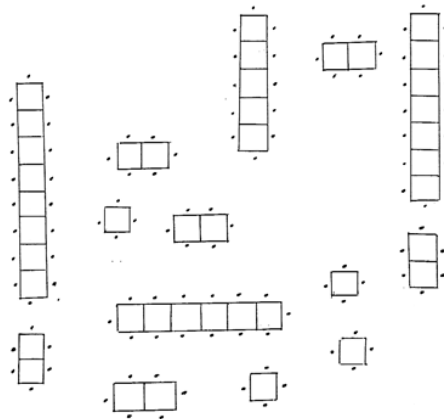
¹ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila.

² Département des Mathématiques, Université du Québec à Montréal.

³ Instituto de Matemáticas, Universidad de Valparaíso.

Página 2. Trabajo individual**Página 1 – Situación**

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que coloca en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber dónde los pondrá. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin tener la necesidad de contar cada vez el número de sillas.



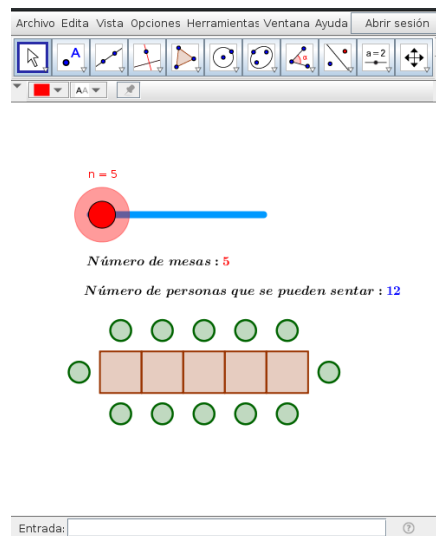
1. ¿Cuántas personas se pueden sentar alrededor de 3 mesas ?
2. Si buscamos el número de personas para colocar alrededor de 4 mesas, ¿necesitas hacer un dibujo para encontrar la respuesta o sabrías alguna manera rápida de hacerlo ?
3. Y para 15 mesas, ¿puedes encontrar una estrategia para calcular rápidamente el número de personas sin necesidad de dibujar

Página 3. Trabajo en equipo

4. En equipo, discute las estrategias que usaste para calcular el número de personas que pueden sentarse alrededor de 15 mesas. ¿todos usaron la misma estrategia? Encuentra al menos 2 estrategias para hacer este cálculo.
5. Una vez que escribiste las estrategias y que vieron que son correctas, utiliza alguna de ellas para calcular el número de personas que pueden comer en 21 mesas y después en 54 mesas.

Página 4. Trabajo en equipo

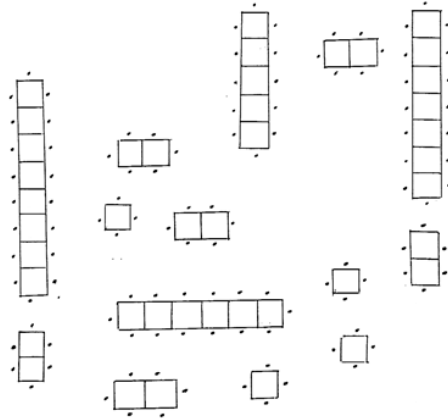
6. La aplicación GeoGebra te mostrará el número de personas que se pueden sentar alrededor de las mesas no importa que tan grandes sean. Utilízalo para verificar tus respuestas del problema 5.



7. Escribe un mensaje escrito a Marcelo donde le explicas cómo podría calcular el número de personas para sentar alrededor de una mesa no importa qué tan grande sea.
8. Los mensajes son muy largos. Marcelo necesita mensajes que le indiquen las operaciones que debe realizar más fácilmente. Escribe el mismo mensaje, pero simplificado, indicando qué operaciones Marcelo necesita realizar.

Página 5. Trabajo individual - Autorreflexión

Marcelo es el dueño de un restaurante. En su restaurante Marcelo tiene mesas que ubica en diferentes lugares donde se sientan sus clientes cuando llegan. Las mesas son de diferentes tamaños: grandes, pequeñas y medianas. Están colocadas de la siguiente manera:



A Marcelo le gustaría no tener que contar cada vez que llegan los clientes, el número de sillas de cada mesa para saber donde los podrá colocar. Marcelo requiere tu ayuda. A él le gustaría encontrar una manera de calcular rápido el número de clientes que puede sentar alrededor de cada mesa, teniendo en cuenta el número de mesas sin contar las sillas.



1. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 4 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
2. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 15 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
3. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de 21 mesas y después de 54 mesas. Explica la estrategia que utilizaste.
4. Calcula el número de personas que podemos sentar alrededor de cualquier cantidad de mesas. Explica la estrategia que utilizaste.

Página 6. Proceso de institucionalización realizado por el profesor o profesora

El profesor o profesora efectúa un análisis de la producción de los alumnos, acentuando los procesos de evolución de las representaciones espontáneas de los alumnos y su acercamiento en sus procesos aritméticos o algebraicos. En fin, el profesor o la profesora proporciona a los estudiantes los procesos aritméticos y algebraicos en tanto que procesos de generalización basados en los procesos numéricos de los alumnos y llegando a una expresión algebraica que permita el cálculo directo.

