Colección Matemática Educativa y Tecnología

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt

ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLÓGICO

Álvaro Bustos Rubilar
Fernando Hitt

Colección Matemática Educativa y Tecnología

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Comité editorial (versión electrónica)

Álvaro Bustos Rubilar

Fernando Hitt

Editores de la colección Matemática Educativa y Tecnología
José Carlos Cortés Zavala
Fernando Hitt

Comité Editorial del libro: Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico (versión electrónica)

Álvaro Bustos Rubilar

Universidad de Valparaíso

Fernando Hitt

Université du Québec à Montréal

Primera edición: Marzo 2019 (México)

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio
Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

© 2019
© CC-BY-NC-ND

Índice

Prefacio y actividades por capítulo	**Página**
Prefacio	v
Capítulo 1. La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: *Fernando Hitt Espinosa, Mireille Saboya, Samantha Quiroz Rivera, Álvaro Bustos Rubilar y Zita Antun*	1
Remarque. Activités en espagnol et français.	25
Capítulo 2. Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos	
Diseño de actividades: *José Luis Soto Munguía, Fernando Hitt Espinosa y Samantha Quiroz Rivera*	43
Capítulo 3. El aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: *Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt Espinosa, Álvaro Bustos Rubilar, Mireille Saboya y Zita Antun*	57
Capítulo 4. Entendimiento de postulados básicos de la perspectiva de modelos y modelación por profesores en formación	
Diseño de actividades: *Verónica Vargas Alejo y César Cristóbal Escalante*	63
Capítulo 5. La inclusión de GeoGebra en el diseño de secuencias didácticas en matemáticas	
Diseño de actividades: *José Luis Soto Munguía*	73
Capítulo 6. Proceso de representación del cambio y la variación: exploraciones digitales	
Diseño de actividades: *Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Leal y Nelson Javier Rueda*	81
Capítulo 7. Utilización de sensores CBR2 para el estudio de situaciones funcionales a nivel secundaria y universitario	
Diseño de actividades: *Valériane Passaro, Ruth Rodríguez Gallegos, Mireille Saboya y Fabienne Venant*	85
Remarque. Activités en espagnol et français.	99
Capítulo 8. Actividades de aprendizaje para entender el concepto de función Derivada y Función integral a través de las razones de diferencias y las acumulaciones	
Diseño de actividades: *José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera y Eréndira Núñez Palenius*	113

Capítulo 9. Variación lineal y movimiento: de la experiencia corporizada a los significados institucionales
Diseño de actividades: *María Teresa Dávila y Agustín Grijalva Monteverde* 159

Capítulo 10. Problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et apport de la méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive
Diseño de actividades: *Pedro Rogério Da Silveira Castro* 167
Remarque. Activités en français.

Capítulo 11. La ecuación lineal con dos variables: una propuesta para su aprendizaje en la escuela secundaria mexicana
Diseño de actividades: *Ana Guadalupe del Castillo y Silvia E. Ibarra Olmos* 175

Capítulo 12. Tecnología y usos de las gráficas: una experiencia de modelación del movimiento con estudiantes de bachillerato
Diseño de actividades: *José David Zaldívar Rojas* 197

Capítulo 13. Una forma de enseñanza y aprendizaje: Objetos Para Aprender 201
Diseño de actividades: *Ricardo Ulloa Azpeitia*

Capítulo 14. Secuencia didáctica para el cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución: el caso de recipientes y sandía
Diseño de actividades: *Rafael Pantoja Rangel, Rosaura Ferreyra Olvera y Rafael Pantoja González* 203

Capítulo 15. Geogebra comme outil d'exploration en enseignement de la géométrie
Diseño de actividades: *Loïc Geeraerts y Denis Tanguay*
Remarque. Activités en français. 205

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolinni Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros “Matemática Educativa y Tecnología”. Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-practico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa
José Carlos Cortés Zavala

Referencias

Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). Proceedings of the 31st Conference of the International Groupe PME, v. 2, 17-24. Seoul: PME.

Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.

Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.

English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.

Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *3*, 195-227.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen "iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable", en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al "animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura". Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

> "[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente".

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de "modelo tabular" y "modelo gráfico" a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, "puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo" (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a "un modelo" fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en "pesar figuras" para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del geómetra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los "Objetos Para Aprender", como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM

4 ENTENDIMIENTO DE POSTULADOS BÁSICOS DE LA PERSPECTIVA DE MODELOS Y MODELACIÓN POR PROFESORES EN FORMACIÓN

Actividades capítulo 4: Guía para el profesor

Verónica Vargas-Alejo[1], César Cristóbal-Escalante[2]

Actividad Provocadora de Modelos [APM] "El Hotel".

La información que se proporciona a los estudiantes para realizar esta actividad es la que muestran las Figuras 1, 2 y 3. No se da más, y no se restringe a los estudiantes en el uso de recursos que consideren útiles para responder lo que se pide. Esta actividad se basa en Aliprantis y Carmona (2003).

Actividad propuesta

¡Al agua patos!

Chetumal, Quintana Roo. ¡Que vengan los bomberos que me estoy quemando! Así, igual como dice esta canción nos encontramos todos los habitantes de esta hermosa ciudad al estar pasando uno de los veranos más cálidos de los últimos años.

Por esta razón es que hoy les hablaré de una excelente opción para divertirse sanamente con la familia en estos días de tanto calor: el Parque Ecológico de Xul-Ha. Este parque se encuentra muy bien ubicado, a un kilómetro de la ciudad, rumbo al pueblo mágico de Bacalar.

El parque cuenta con tirolesas, albercas de distintas profundidades, cada una con toboganes que harán la delicia de aquellos lugares para quienes les gustan las emociones fuertes. También podemos disfrutar del acceso a la laguna de Bacalar tanto para nadar como para divertirse con el uso de balsas y kayak. Rentamos chalecos salvavidas, pero sobretodo tenemos vigilancia extrema en el área de las albercas y la laguna para que usted pueda sentirse seguro de que su familia pasará un día inolvidable sin contratiempos.

Pero eso no es todo, encontraremos además áreas verdes con juegos infantiles, tienda de recuerdos, agencia de turismo y restaurante de riquísima comida propia del Caribe mexicano.

Para las familias que deseen disfrutar de la diversión que ofrece el parque por más de un día, el Parque cuenta con servicio de hotel. Son cuarenta limpias y bonitas habitaciones, todas ellas con aire acondicionado, televisión e internet, las cuales se ponen a disposición de los visitantes.

Por todo lo anterior, les recomiendo ampliamente que visiten el Parque Ecológico de Xul-Ha, se divertirán además de que fomentarán el desarrollo de este sitio turístico que tanto beneficio trae para las comunidades cercanas al lugar.

Y al agua patos!!

Figura 1. Artículo de periódico.

[1] Universidad de Guadalajara.
[2] Universidad de Quintana Roo.

Por favor contesta las siguientes preguntas referentes al artículo periodístico que acabas de leer.

1. ¿Qué atracciones y servicios ofrece el parque ecológico a sus visitantes?

2. ¿Qué beneficios crees que trae el parque a las comunidades cercanas?

3. Escribe tres opciones por las que te gustaría quedarte hospedado en el Parque Ecológico Xul-Ha.

Figura 2. Preguntas de contexto.

Ayúdanos

Alberto May vive en la ciudad de Chetumal, Municipio de Othon P. Blanco del estado de Quintana Roo. Acaba de heredar un Parque Ecológico que ofrece servicio de hotel.

El señor May se dedica al negocio de la construcción, por lo cual no tiene ninguna experiencia en la administración de Parques ni hoteles. Por esta razón ha decidido cerrar el lugar.

Al enterarse las comunidades cercanas al Parque de esta decisión se presentaron ante el señor May para pedirle que no cerrara el parque, puesto que atrae mucho turismo que representa importantes ingresos para la comunidad, así como un buen número de empleos para las personas que viven en ella. Así le propusieron que si decidía no cerrar el lugar, la comunidad lo asesoraría en los diversos aspectos que conllevan la administración y manejo del Parque. Afortunadamente, el Sr. May aceptó gustoso.

Actualmente, el hotel del Sr. May cuenta con 40 habitaciones. Se sabe que si cobra $1200.00 por habitación por noche, se tendrá cupo lleno (es decir, se ocupará la totalidad de las habitaciones). Sin embargo, también se sabe que por cada $50 que se aumente el precio, una habitación quedará desocupada. Además, el señor May debe pagar $200 pesos por noche, por cada habitación ocupada, por el costo de limpieza y mantenimiento.

El Sr. May quisiera saber qué tarifa debe cobrar por cada habitación para poder obtener la máxima ganancia posible, aún cuando eso signifique tener una o varias habitaciones desocupadas.

Ayuda al Sr. May escribiéndole una carta donde le expliques, con la información que se tiene, cuánto debería cobrar por cada habitación por noche para obtener las mayores ganancias posibles. Explica bien el método que utilizaste para realizar estos cálculos para que el Sr. May pueda calcular la tarifa en el futuro y siempre obtenga las mayores ganancias posibles.

Con tu valiosa ayuda, el Sr. May obtendrá buenas ganancias y sobre todo la comunidad del lugar seguirá contando con sus ingresos y con sus empleos.

Figura 3. Problema.

El uso didáctico de esta actividad en el aula radica en las diferentes formas en que puede ser abordada por los estudiantes. Discutir o reflexionar sobre las distintas formas para obtener las respuestas, incide en el desarrollo de los conocimientos y habilidades de los estudiantes.

Explorar la situación permite a los estudiantes entender la problemática. Hacer suposiciones o considerar casos particulares es algo que deben aprender a realizar los estudiantes.

La exploración numérica con lápiz y papel sensibiliza y permite reconocer la importancia del uso de la computadora y de la utilización de diversos procedimientos. La organización de la información y de los procesos permite reconocer la secuencia de operaciones y la relación entre la información proporcionada. Lo tedioso de los cálculos y la disposición de equipo y conocimiento de software lleva a elaborar procedimientos en la computadora.

La Actividad Provocadora de Modelos puede resolverse utilizando una tabla de datos (Tabla 1). En la fila 12 se observa que cuando el hotel tiene 30 habitaciones ocupadas, la Ganancia es máxima.

E12 =C12-D12

	A	B	C	D	E
1	Habitaciones ocupadas	Costo de la habitación	Ingreso	Egreso	Ganancia
2	40	1200	48000	8000	40000
3	39	1250	48750	7800	40950
4	38	1300	49400	7600	41800
5	37	1350	49950	7400	42550
6	36	1400	50400	7200	43200
7	35	1450	50750	7000	43750
8	34	1500	51000	6800	44200
9	33	1550	51150	6600	44550
10	32	1600	51200	6400	44800
11	31	1650	51150	6200	44950
12	30	1700	51000	6000	45000
13	29	1750	50750	5800	44950
38	4	3000	12000	800	11200
39	3	3050	9150	600	8550
40	2	3100	6200	400	5800
41	1	3150	3150	200	2950
42	0	3200	0	0	0

Tabla 1. Procedimiento tabular para resolver la APM “El Hotel”

Un modelo gráfico que se puede construir a partir de los datos de la Tabla 1, es el de la Figura 1. Donde el eje y representa la Ganancia y el eje x, la cantidad de habitaciones ocupadas.

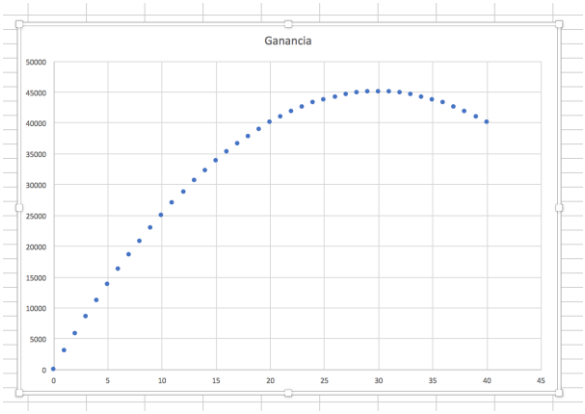

Figura 4. Procedimiento gráfico para resolver la APM "El Hotel".

Aunque podrían también obtenerse las gráficas a partir de los datos de las columnas B, C y D (Tabla 1), correspondientes al costo de la habitación, ingreso y egreso.

Un modelo algebraico para esta situación se construye de la siguiente forma:

Considerando que: $Ganancia = Ingreso - egreso$

Tanto la ganancia como el ingreso y el egreso dependen del número de habitaciones ocupadas o desocupadas.

Si representamos con n el número de habitaciones desocupadas, entonces

$40 - n$ representa el número de habitaciones ocupadas y

$1200 + 50n$ es el precio en que renta cada habitación.

El ingreso consiste en multiplicar el precio de cada habitación por el número de habitaciones ocupadas. Por ello, el ingreso es representado por:

$$I(n) = (1200 + 50n)(40 - n)$$

El egreso es determinado por el pago por mantenimiento y limpieza de las habitaciones ocupadas, esto es $E(n) = 200(40 - n)$.

Por lo tanto, la ganancia es:

$$G(n) = (1200 + 50n)(40 - n) - (200)(40 - n)$$

Al realizar las operaciones y simplificar:

$$G(n) = -50n^2 + 1000n + 40000$$

Finalmente, la función $G(n)$ puede derivarse para obtener la ganancia máxima, la cual corresponde a $n = 10$. Donde n es la cantidad de habitaciones desocupadas.

Al considerar el número de habitaciones (h) ocupadas en lugar de las desocupadas se obtiene a la ganancia como una función que depende de h: $G(h)$.

Algunas preguntas interesantes que se pueden explorar son las siguientes: ¿Cómo es la gráfica de $G(n)$? ¿Cómo es la gráfica de $G(n)$ respecto de $G(h)$? ¿Cuál es el dominio de la función?

Actividad Provocadora de Modelos: La Afore

En las Figuras 5, 6 y 7 se presenta la APM. Esta actividad se describe con mayor detalle en Tec-Escalante y Vargas-Alejo (2015).

EL ECONOMISTA

Lunes 8 de Septiembre de 2014 | 00:04

En México no se ahorra suficiente para la jubilación

Según HSBC, 43% de las personas jubiladas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para este momento.

YURIDIA TORRES / EL ECONOMISTA
SEP 19, 2013 | 17:23
Foto: Shutterstock

Una casa en la playa, otra en las montañas, viajes continuos, tiempo con los hijos y nietos; así sueñan que será su vejez muchas personas y anhelan el día en que llegue el monto de su retiro laboral; recibir esa pensión mensual, que seguramente alcanzará para pagar todos los caprichos que deseen.

La realidad es que no será así. No siempre es así. De acuerdo con el informe de HSBC "El futuro del retiro, la vida después del trabajo", 43% de las personas retiradas en México no ha logrado alcanzar las metas y aspiraciones que se fijó para el momento de su retiro laboral. La razón es que los jubilados tienen menos dinero del que esperaban recibir y entonces sus sueños, viajes, regalos, casas, siguen siendo eso, sueños. El hecho es que los mexicanos ahorran poco para su retiro, afirmó Eduardo Varón, director de Distribución de Banca Premier de HSBC México.

"Es importante utilizar todos los mecanismos que se tienen disponibles para ahorrar; el estudio dice que las personas apuestan mucho a las pensiones de gobierno, a las afores, a los esquemas privados de retiro, pero una de las recomendaciones es que las personas diversifiquen las fuentes de ahorro para su pensión", dijo.

PROPUESTAS

Entre las medidas propuestas para fomentar una seguridad social universal en el país, están el impulso al ahorro voluntario de las personas, con una cuenta en alguna afore.

Recientemente, el Presidente de México propuso que por cada aportación voluntaria de las personas registradas en el Sistema de Ahorro para el Retiro y afiliadas al IMSS, el gobierno federal pondrá una fracción del monto que la persona ahorre.

El retiro de sus sueños

Recomendaciones que se deben tomar en cuenta antes de pensionarse:

NO SE APRESURE. Existe la percepción entre las personas retiradas de haberse apresurado en dejar un empleo pagado. Muchas personas retiradas que ven el trabajo como un medio importante para mantener el cuerpo y la mente activos.

DIVERSIFIQUE. En la actualidad, los jubilados tienen tres diferentes fuentes de ingreso en el retiro, al decidir sabiamente no depositar en un solo lugar la generación de sus ingresos. Separar sus fuentes de ingreso en el retiro y los riesgos asociados significa que no se tienen todos los huevos en una misma canasta.

CONSIDERE A SU FAMILIA. Mientras muchas personas aspiran a viajar mucho durante su retiro, cerca de la mitad de los trabajadores actuales esperan tener responsabilidades financieras con otros, incluso estando retirados. Esto incluye responsabilidades financieras continuas con sus hijos adultos, así como respaldar a padres mayores en un estado delicado.

Figura 5. Artículo de periódico.

Preguntas de comprensión

¿Qué aspiraciones tienes para el momento de tu jubilación?

¿Por qué las personas jubiladas en México no logran alcanzar las metas y aspiraciones que se fijaron para este momento?

¿Qué recomendaciones son importantes seguir antes de jubilarse?

Figura 6. Preguntas de contexto.

Problema 1. Ayuda a Mateo

Mateo un chico Chetumaleño de 19 años, acaba de obtener su primera oportunidad de trabajo como cajero.

En la firma del contrato le dieron una pequeña orientación sobre el pago de su sueldo, el cual es de $1400 mensual. Le explicaron brevemente sobre las deducciones que se le deben de realizar conforme a la ley. Entre ellas la cuota obrera para cesantía y vejez con la cual le descuentan el 1.125% de su salario para aportarla a su fondo de ahorro para el retiro. La encargada de recursos humanos le comenta que este fondo genera un interés el cual se acumula al fondo al final de cada mes, esto dependiendo de la AFORE que elija.

Siendo su primer trabajo, Mateo sale de la firma del contrato con la duda de cómo elegir ello. Solicita información vía correo electrónico a la AFORE XXI Banorte donde tú eres parte del equipo de atención a clientes, por lo que deberás redactar una carta donde le ayudes a aclarar sus dudas a Mateo, explicándole detalladamente tus procedimientos:

1. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
2. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
3. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del cuarto mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
4. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
5. ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
6. ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra?

Cuentas con la siguiente información:

La aportación total a una cuenta de Afore está compuesta por la parte del patrón 5.15%, la del empleado 1.125% y del Gobierno Federal 0.225%, calculado del Salario Base del empleado.

El rendimiento que genera tu fondo de ahorro, se acumula al capital final de cada intervalo de tiempo previsto.

Requisitos para tener derecho a pensión por cesantía (vejez) para la Ley de 1997, Articulo 162 de la Ley del Seguro Social

Tener 65 Años Cumplidos,
Tener como Mínimo 1,250 Semanas de Cotización.
Cumplir con los requisitos anteriores a la Ley del '73, (son los mismo)

Información de AFORES

AFORE	RENDIMIENTO	COMISION %
Sura	11.45	1.21
Profuturo	11.12	1.27
Banamex	10.85	1.16
MetLife	10.81	1.39
XXI Banorte	10.72	1.1
Principal	10.55	1.36
Azteca	8.9	1.45
Coppel	7.96	1.49
Afirme Bajío	7.61	1.4
Inbursa	5.79	1.17
FUENTE: CONSAR.		

Figura 7. El problema.

De manera semejante a la APM "El Hotel", el uso didáctico de esta actividad en el aula radica en las diferentes formas en que puede ser abordada por los estudiantes. Discutir o reflexionar sobre las diferentes formas para obtener las respuestas, incide en el desarrollo de los conocimientos y habilidades de los estudiantes.

Esta APM conlleva un proceso recursivo. La vía para resolverlo puede ser puramente numérico (sin uso de tablas), numérico usando tablas (Figura 8), numérico con tablas y gráficos (Figura 9) y algebraicos. Los procedimientos en detalle pueden obtenerse en Tec-Escalante y Vargas-Alejo (2015).

El uso de uno de estos métodos depende de los conocimientos y habilidades previos de los estudiantes. La exploración numérica es fundamental para identificar la recursividad en la situación. Quienes ya han tenido experiencias podrían reconocer la naturaleza recursiva en el proceso de cálculo. Las preguntas planteadas tienen la función de llevar a explorar ese aspecto de la actividad, así como las ventajas de seguir los procedimientos de manera organizada por medio de tablas.

Procedimiento numérico. Los estudiantes podrían comenzar a responder las preguntas planteadas en el problema acudiendo a una forma recursiva en la que sólo realicen operaciones numéricas obteniendo los montos ahorrados al final de cada periodo. Esto lo podrían realizar directamente en la calculadora, sin tomar nota de las estructuras matemáticas, sin observar algún patrón, de la siguiente forma:

En el primer pago de Mateo (cero meses transcurridos), sólo le realizan el descuento a ingresar a su fondo de ahorro que es de $91.

Transcurrido el primer periodo, Mateo tendrá la aportación del periodo al fondo más el monto inicial aportado con su 9.62% (0.0962) de rendimiento; es decir:

$$91+91+0.0962\ (91)= 182+8.7542= 190.75$$

Para el monto del fondo de ahorro a final del segundo periodo véase la Figura 8. La dificultad quizá iniciaría al intentar contestar la última pregunta planteada en el problema. Los estudiantes deberían cuestionarse ¿Es necesario hacer todos los cálculos? ¿No hay alguna otra manera de obtener la cantidad solicitada? ¿Existe alguna fórmula? Esto podría apoyar para que los estudiantes organizaran la información en forma tabular, e incluso utilizar la hoja de cálculo elaborando un procedimiento para hacer la tabla (Figura 8).

Forma numérica recursiva

Aportación inicial

91

Monto al final del primer periodo:

91+91+0.0962 (91)= 182+8.7542= 190.75

Monto al final del segundo periodo:

91+190.75+0.0962 (190.75)=300.10

Monto al final del tercer periodo

91+300.10+0.0962 (300.10)=419.96

¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?

⋮

Monto del fondo al final del doceavo periodo

91+1902.08+ 0.0962 (1902.08)= 2176.06

Representación tabular de los estudiantes

Periodos transcurridos	Rendimiento	Monto del sueldo a fondo	Monto del periodo anterior	Intereses ganados de monto anterior	Monto final del periodo
0	0.0962	91	0.00	0.00	91.00
1	0.0962	91	91.00	8.75	190.75
2	0.0962	91	190.75	18.35	300.10
3	0.0962	91	300.10	28.87	419.97
4	0.0962	91	419.97	40.40	551.38
5	0.0962	91	551.38	53.04	695.42
6	0.0962	91	695.42	66.90	853.32
7	0.0962	91	853.32	82.09	1026.41
8	0.0962	91	1026.41	98.74	1216.15
9	0.0962	91	1216.15	116.99	1424.14
10	0.0962	91	1424.14	137.00	1652.14
11	0.0962	91	1652.14	158.94	1902.08
12	0.0962	91	1902.08	182.98	2176.06
13	0.0962	91	2176.06	209.34	2476.40

Figura 8. Procedimientos recursivos y tabulares para resolver la APM "La Afore".

Procedimiento algebraico. De forma análoga al procedimiento numérico con tablas, pero sin utilizar la hoja de cálculo, se puede elaborar un procedimiento algebraico, que se puede utilizar para responder todas las preguntas. El procedimiento en la hoja de cálculo también puede ser utilizado de esta forma, y se puede usar cuando cambian las condiciones iniciales como el salario mensual y la tasa de interés que paga la Afore.

Si denotamos por M_k el monto en el fondo de Mateo al final del k-ésimo mes, por i la tasa de interés que paga la Afore cada mes, y si M_0 es la aportación mensual al fondo. Se tiene lo siguiente:

Al iniciar el mes 1 se tendrá en el fondo M_0.

Al finalizar el mes 1 se tendrá $M_1= M_0 + M_0+M_0i = M_0 + M_0(1+i)$

Al finalizar el mes 2 se tendrá $M_2= M_0 + M_1+ M_1i= M_0 + M_1(1+i)$ sustituyendo M_1 se tiene $M_2= M_0 + [M_0 + M_0(1+i)](1+i)= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2$

Al finalizar el mes 3 se tendrá $M_3= M_0 + M_2+ M_2i= M_0 + M_2(1+i)$ sustituyendo M_2 se tiene $M_3= M_0 + [M_0 + M_0(1+i) + M_0(1+i)^2](1+i)= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2+ M_0(1+i)^3$

Se puede observar el patrón y conjeturar que el monto en el fondo al terminar el cuarto mes es: $M_4= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2+ M_0(1+i)^3+ M_0(1+i)^4$

Y que al final del k-ésimo mes el monto del fondo será:

$M_k= M_0 + M_0(1+i)+ M_0(1+i)^2+ \ldots+ M_0(1+i)^{k-1}+ M_0(1+i)^k =$

$= M_0 [1 + (1+i)+ (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots +(1+i)^k]$

En este punto se puede introducir la serie geométrica con razón r:

$$1+r+r^2+r^3+\ldots+r^n=\frac{r^{n+1}-1}{r-1} \quad \text{que lleva a}$$

$$M_k = M_0[\frac{(1+i)^{k+1}-1}{(1+i)-1}] = M_0[\frac{(1+i)^{k+1}-1}{i}]$$

Obteniéndose así una relación funcional útil para responder cualquier pregunta relacionada con la cantidad de dinero que tendrá Mateo al cabo de cualquier cantidad de años.

Comparación de modelos y extensión hacia el análisis del ahorro para otras AFORES. Como respuesta a la pregunta ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra? el alumno podría calcular el monto que tendría Mateo para los mismos periodos que se indican en las preguntas anteriores a éste, pero eligiendo AFORES con diferentes rendimientos. El maestro podría orientar la discusión hacia reflexionar la pregunta ¿Funcionan los modelos construidos para analizar el ahorro utilizando otras AFORES?

Con ello se pretende apoyar la comparación del monto final ahorrado considerando distintas AFORES y propiciar la construcción de modelos gráficos que permita al estudiante refinar sus *ciclos de comprensión* respecto a los conceptos matemáticos: variación y función, al comparar y analizar una familia de problemas. Debido a que el estudiante ya realizó un análisis a lápiz y papel de la situación, esta sección es recomendable abordarla de nuevo con el apoyo de software donde se trabajen hojas de cálculo y graficación (EXCEL, GeoGebra). Con la meta de ahorrar tiempo en los cálculos que ya se analizaron anteriormente, e invertirlo mejor en el análisis de la situación y conceptos matemáticos desde modelos diferentes (Figura 9).

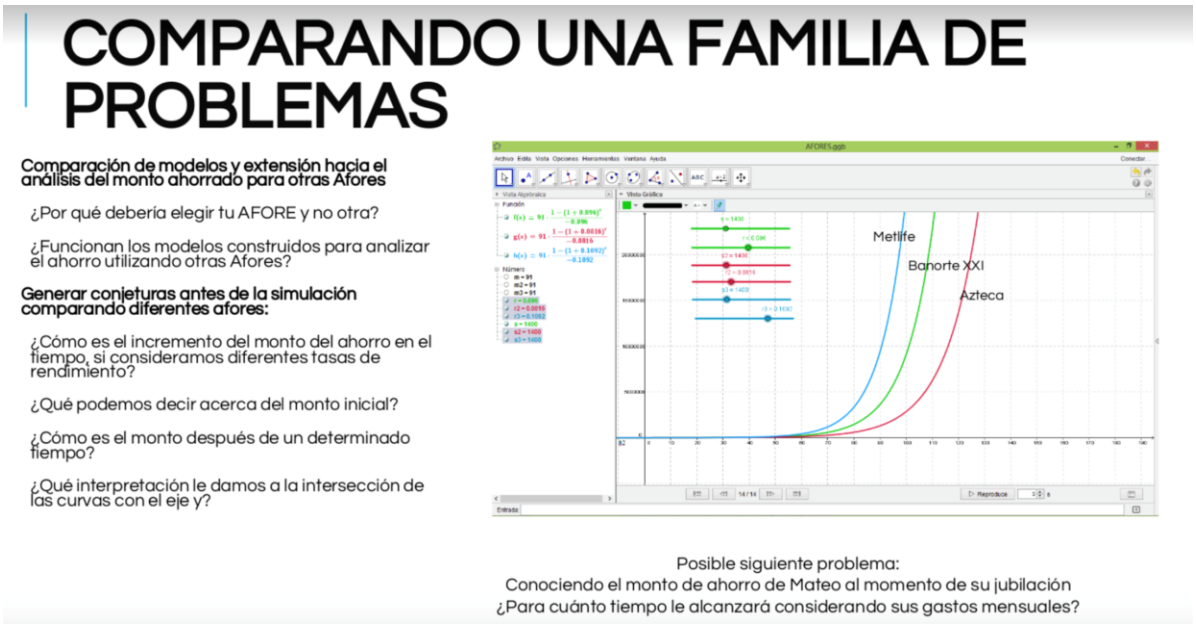

Figura 9. Procedimiento gráfico para resolver la APM “La Afore”.