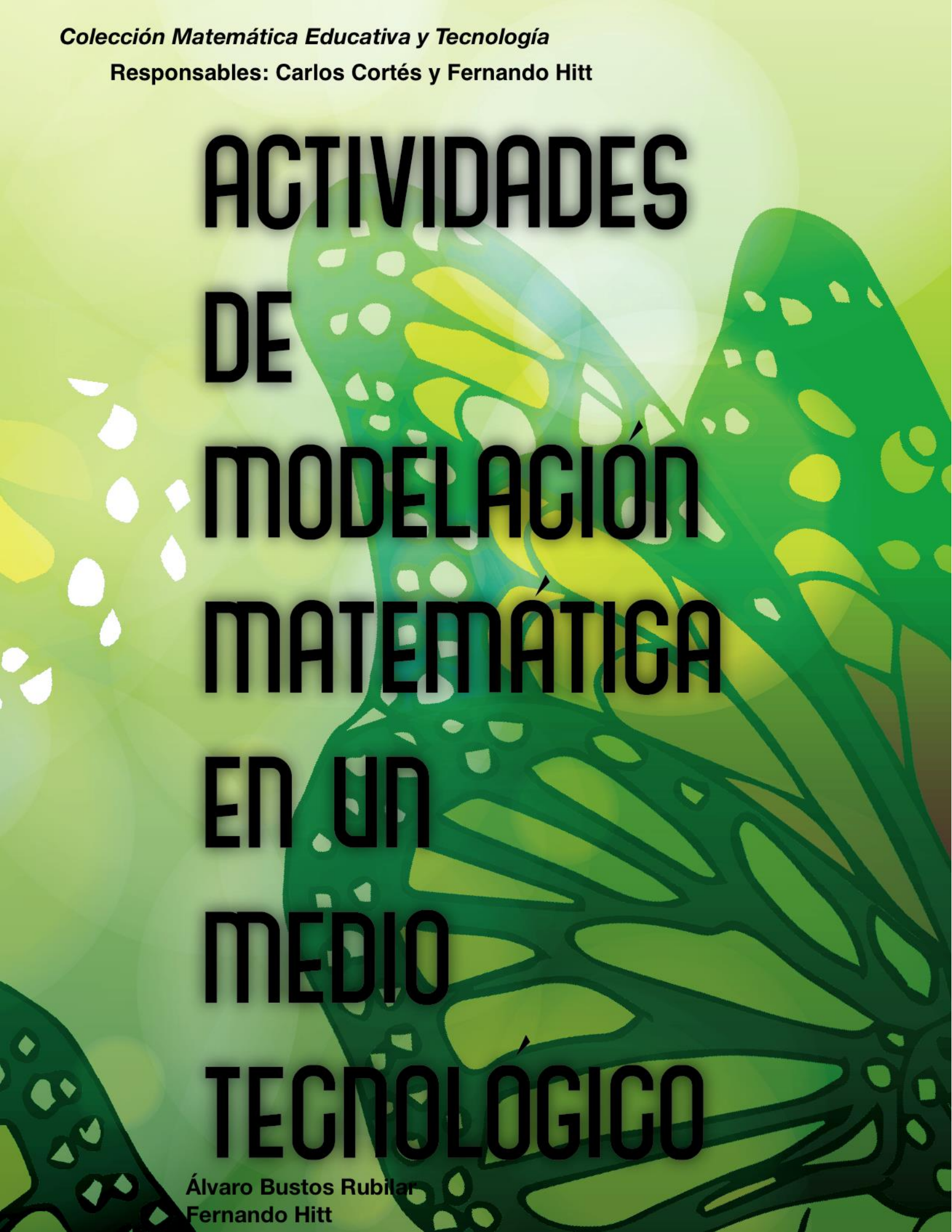


Colección Matemática Educativa y Tecnología

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt



ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLOGICO

Álvaro Bustos Rubilar
Fernando Hitt

Colección Matemática Educativa y Tecnología

***Actividades de modelación matemática
en un medio tecnológico***

Comité editorial (versión electrónica)

Álvaro Bustos Rubilar

Fernando Hitt

Editores de la colección Matemática Educativa y Tecnología
José Carlos Cortés Zavala
Fernando Hitt

**Comité Editorial del libro: Actividades de modelación matemática en un
medio tecnológico (versión electrónica)**

Álvaro Bustos Rubilar

Universidad de Valparaíso

Fernando Hitt

Université du Québec à Montréal

Primera edición: Marzo 2019 (México)

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio

Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

© 2019

© **CC-BY-NC-ND**

Índice

Prefacio y actividades por capítulo	Página
Prefacio	v
Capítulo 1. La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Fernando Hitt Espinosa, Mireille Saboya, Samantha Quiroz Rivera, Álvaro Bustos Rubilar y Zita Antun</i>	1
Remarque. Activités en espagnol et français.	25
Capítulo 2. Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía, Fernando Hitt Espinosa y Samantha Quiroz Rivera</i>	43
Capítulo 3. El aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt Espinosa, Álvaro Bustos Rubilar, Mireille Saboya y Zita Antun</i>	57
Capítulo 4. Entendimiento de postulados básicos de la perspectiva de modelos y modelación por profesores en formación	
Diseño de actividades: <i>Verónica Vargas Alejo y César Cristóbal Escalante</i>	63
Capítulo 5. La inclusión de GeoGebra en el diseño de secuencias didácticas en matemáticas	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía</i>	73
Capítulo 6. Proceso de representación del cambio y la variación: exploraciones digitales	
Diseño de actividades: <i>Sandra Evelyn Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Leal y Nelson Javier Rueda</i>	81
Capítulo 7. Utilización de sensores CBR2 para el estudio de situaciones funcionales a nivel secundaria y universitario	
Diseño de actividades: <i>Valériane Passaro, Ruth Rodríguez Gallegos, Mireille Saboya y Fabienne Venant</i>	85
Remarque. Activités en espagnol et français.	99
Capítulo 8. Actividades de aprendizaje para entender el concepto de función Derivada y Función integral a través de las razones de diferencias y las acumulaciones	
Diseño de actividades: <i>José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera y Eréndira Núñez Palenius</i>	113

Capítulo 9. Variación lineal y movimiento: de la experiencia corporizada a los significados institucionales	
Diseño de actividades: <i>María Teresa Dávila y Agustín Grijalva Monteverde</i>	159
Capítulo 10. Problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et apport de la méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive	
Diseño de actividades: <i>Pedro Rogério Da Silveira Castro</i>	167
Remarque. Activités en français.	
Capítulo 11. La ecuación lineal con dos variables: una propuesta para su aprendizaje en la escuela secundaria mexicana	
Diseño de actividades: <i>Ana Guadalupe del Castillo y Silvia E. Ibarra Olmos</i>	175
Capítulo 12. Tecnología y usos de las gráficas: una experiencia de modelación del movimiento con estudiantes de bachillerato	
Diseño de actividades: <i>José David Zaldívar Rojas</i>	197
Capítulo 13. Una forma de enseñanza y aprendizaje: Objetos Para Aprender	201
Diseño de actividades: <i>Ricardo Ulloa Azpeitia</i>	
Capítulo 14. Secuencia didáctica para el cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución: el caso de recipientes y sandía	
Diseño de actividades: <i>Rafael Pantoja Rangel, Rosaura Ferreyra Olvera y Rafael Pantoja González</i>	203
Capítulo 15. Geogebra comme outil d'exploration en enseignement de la géométrie	
Diseño de actividades: <i>Loïc Geeraerts y Denis Tanguay</i>	
Remarque. Activités en français.	205

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolini Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros “Matemática Educativa y Tecnología”. Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-práctico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa
José Carlos Cortés Zavala

Referencias

- Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group PME*, v. 2, 17-24. Seoul: PME.
- Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.
- Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.
- English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen “iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable”, en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al “animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura”. Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

“[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente”.

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de “modelo tabular” y “modelo gráfico” a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, “puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo” (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a “un modelo” fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en “pesar figuras” para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del geómetra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los “Objetos Para Aprender”, como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM

7a UTILIZACIÓN DE SENSORES CBR2 PARA EL ESTUDIO DE SITUACIONES FUNCIONALES A NIVEL SECUNDARIA Y UNIVERSITARIO

Actividades (nivel preuniversitario) capítulo 7: Guía para el profesor

Valérie Passaro¹, Ruth Rodríguez Gallegos², Mireille Saboya³, Fabienne Venant⁴

DOCUMENTO PARA LOS PROFESORES

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:

Estudio del desplazamiento de una persona

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD:

Desarrollar la comprensión del concepto de función a través un cuestionamiento sobre la covariación entre dos variables en una situación real.

GRADO ACADÉMICO DONDE SE PUEDE IMPLEMENTAR:

Finales de secundaria (14-17 años)

CONTENIDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS:

Función, covariación, representación gráfica, modelación

DURACIÓN APROXIMADA: 75 minutos

MATERIALES NECESARIOS:

- Para los alumnos: Cada equipo dispone de un CBR2, de un labQuest⁵, y de papel con pegamento sobre el que se puede escribir y que se podrá pegar al suelo.
- Para el profesor: Ordenador, proyector, CBR2, labQuest

RECOMENDACIONES PARA EL DOCENTE:

Los alumnos trabajan en equipos de 3 o 4.

¹ Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canadá – passaro.valeriane@uqam.ca

² Tecnológico de Monterrey - México - ruthrdz@itesm.mx

³ UQAM – Canadá – saboya.mireille@uqam.ca

⁴ UQAM – Canadá – venant.fabienne@uqam.ca

⁵ El labQuest es una máquina que recupera los datos tomados por el sensor para tratarlos. Aquí, utilizamos el labQuest para representar gráficamente la distancia entre la persona y el sensor en función del tiempo.

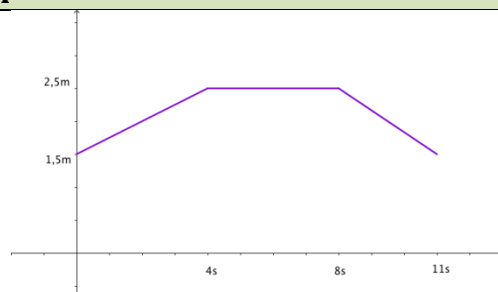
Fase 0. Presentación de la situación a los alumnos

Es a menudo útil de saber cómo varía, a lo largo del tiempo, la distancia entre un objeto y un punto de referencia fijo. Por ejemplo, cuando un radar aéreo percibe la presencia de un avión, los captores que evalúan la distancia entre este avión y la torre de control permiten evitar colisiones. Para comprender como analizar el desplazamiento de un objeto a lo largo del tiempo, **vamos a estudiar el desplazamiento de una persona.**

Descripción de la actividad

Fase I: Exploración de la tecnología y de la situación

Situación: Esta gráfica representa la distancia horizontal entre la persona y el sensor en función del tiempo.



Consigna

“Tienes que reproducir esta gráfica haciendo ustedes mismos el desplazamiento frente al sensor que está colocado sobre el escritorio”.

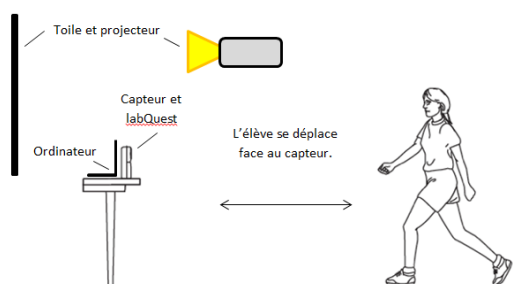
Desarrollo

En gran grupo.

El profesor presenta la situación a los alumnos.

Pide a unos cuantos alumnos de hacer varios ensayos delante de la clase (solo se utiliza un sensor, la gráfica es proyectada delante de la clase, ver la figura aquí abajo) para que todos vean cómo funciona un sensor.

El profesor propone a los alumnos de experimentar y de discutir entre ellos sobre lo que observan.



Recomendaciones para el profesor

- Dejar que los alumnos se apoderen de la situación y del funcionamiento del sensor sin forzar un análisis, que es precoz en esta fase. Aquí nos referimos a un análisis de la coordinación entre las acciones y el aspecto de la gráfica.
- Proponer a varios alumnos ir delante de la clase para que de un ensayo a otro intenten obtener una gráfica, la más ajustada posible a la que propone el sensor.

Fase II: Interpretación gráfica

Situación: Esta otra gráfica representa la distancia horizontal entre la persona y el sensor en función del tiempo (otro desplazamiento de una persona).

Ejemplos de gráficas que pueden ser propuestas:



Consigna

“Tienes que escribir un texto para explicar, a una persona que no tiene la gráfica bajo los ojos, la manera en la que tiene que desplazarse frente al sensor para reproducir exactamente esta gráfica”.

Desarrollo

Equipos de 3 o 4 alumnos.

Cada equipo dispone de un CBR2 y de un LabQuest.

El profesor proporciona la consigna y **atribuye una gráfica diferente a cada uno de los equipos**.

Deja a los alumnos trabajar, asegurándose que el texto escrito sobre la hoja no contenga ninguna representación gráfica.

Recomendaciones para el profesor

- Incitar los alumnos a explicar su razonamiento a los otros miembros del equipo y a entenderse sobre las instrucciones a dar a una persona **que no ve la gráfica**.
- Sugiere a los alumnos de probar su descripción experimentándola con el CBR2.
- Sugiere de preparar la gráfica dividiéndola en diferentes partes y sugiere de analizar la variación de la distancia para cada una de estas partes.

Fase III: Apropriación de una descripción verbal y anticipación de la gráfica

Situación: Aquí se describe un desplazamiento producido por otro equipo....

(cada equipo recibe la descripción de otro equipo, ver el ejemplo dado anteriormente).

Consigna

A. “Sin el CBR2, tienes que leer el texto y asegurarte de entender la sucesión de las acciones que se tienen que realizar. Un miembro del equipo debe producir este movimiento (los otros deben asegurarse que corresponde bien al texto) para poder volverlo a hacer después con el sensor

Desarrollo

Equipos de 3 o 4 alumnos.

El profesor proporciona la consigna a los alumnos y distribuye los textos producidos por ellos, asegurándose que cada equipo no reciba su propio texto.

Deja a los alumnos trabajar, asegurándose que

delante de toda la clase”.	entienden y respetan bien el contenido del texto.
B. “Producir un esbozo de la gráfica asociada al desplazamiento que acabas de trabajar (distancia en función del tiempo) ”.	Primero en un trabajo individual y después compartido con los otros miembros del equipo.
Recomendaciones para el profesor	
A. Dejar que los alumnos se apropien del texto e identifiquen, si necesario, lo que falta o los errores. B. Incitar los alumnos a comparar sus gráficas, explicando la manera en la que han pasado de la descripción con palabras a la gráfica.	

Fase IV: Validación/invalidación de las descripciones verbales y de las gráficas anticipadas, y análisis del comportamiento de los incrementos	
Situación: Cada equipo ha recibido una descripción de un desplazamiento, queremos ahora producir la gráfica asociada y ver si corresponde bien a la gráfica inicial.	
Consigna	Desarrollo
“Para cada equipo, un alumno viene delante de la clase para reproducir el movimiento descrito tal y como lo practicó. Debemos después comparar la gráfica obtenida a la que fue dada inicialmente al equipo que produjo el texto”.	En gran grupo. Un alumno por equipo viene a reproducir el movimiento (puede haber como máximo 3 ensayos). Cuando el equipo está satisfecho de la gráfica obtenida (consideran que el alumno ha efectuado el desplazamiento conforme a lo que describía el texto), el profesor muestra la gráfica inicial. Pide a los alumnos comparar las dos gráficas y de explicar, si hay, las diferencias.
Recomendaciones para el profesor	
• Escoger previamente, en la fase III, dos o tres descripciones por las que el análisis será profundizado. • Plantear preguntas para conducir a los alumnos a localizar e interpretar los puntos característicos. • Plantear preguntas sobre el comportamiento de los incrementos para conducir a los alumnos a: 1) Calificar el desplazamiento asociado a un segmento de recta ascendente o descendente. 2) Calificar el desplazamiento asociado a las curvas abiertas hacia arriba y a las curvas abiertas hacia abajo.	

Análisis a priori

Fase I
En esta fase, los alumnos exploran espontáneamente la tecnología y se apoderan de la situación. Mientras que un alumno se desplaza, los demás le observan y prestan atención al rastreo simultáneo de la gráfica. Esta percepción de la relación de dependencia y de las variaciones simultáneas de las variables tiempo y distancia, favorece el trabajo sobre la covariación que será solicitado en las otras fases de la actividad. Aunque los alumnos establezcan estrategias para ajustar la curva que ellos trazan con el sensor a la que es propuesta por el sensor, el objetivo no es aún el de concientizar y de

formular claramente estas estrategias. Durante esta fase se requiere una coordinación entre los registros *gráfico* y *experiencia*. Apoyándonos en los estudios de Passaro (2015) y de Carlson (2002), prevemos que los alumnos adopten un enfoque estático (correspondencia) sobre la gráfica, localizando puntos característicos (la ordenada del punto de abscisa 0 por ejemplo). Sin embargo, como la gráfica se traza simultáneamente al desplazamiento, los alumnos podrían empezar a hacer inferencias sobre la velocidad y así recurrir a un enfoque dinámico sobre la gráfica (covariación).

Fase II

En esta fase, los alumnos deben de explicar las estrategias que han surgido en la fase I. La tarea exige que los alumnos coordinen los registros *gráfico* y *verbal* pasando eventualmente por el registro de la *experiencia*. Como el texto tiene que ser suficiente para que una tercera persona efectúe el buen desplazamiento para trazar la gráfica propuesta, los alumnos deben de componer descripciones detalladas, no pueden contentarse dando informaciones estáticas como “Al empezar, colócate a un metro”, deben de indicar a la persona como desplazarse. El CBR2 ofrece la posibilidad a los alumnos de validar, de invalidar o de ajustar los elementos de su descripción, particularmente en lo que concierne la variación. Un ejemplo de descripción que podría ser producida por un equipo de alumnos para la gráfica B es: “Al principio, colócate a 3 metros del sensor. Cuando el cronómetro se ponga en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos, después disminuye tu velocidad durante 2 segundos hasta que estés a un metro del sensor. Quédate después inmóvil durante 2 segundos y retrocede rápidamente hasta el punto de salida, pero disminuyendo tu velocidad durante 2 segundos y párate a 2 metros del sensor”.

Fase III

Parte A

En la parte A de esta fase, los alumnos deben visualizar el movimiento a partir de la descripción escrita. Después, el alumno que hace el movimiento debe de transponer esta visualización en la experiencia real (*embodiement*). Esta coordinación entre los registros *verbal* y *experiencia* puede favorecer la anticipación del aspecto de la gráfica asociada.

Parte B

En la parte B, cada alumno debe trazar un esbozo de la gráfica de la situación. Esta tarea exige una coordinación entre los registros *verbal* y *gráfico*. En el momento de conversar entre los miembros del equipo, la coordinación entre estos dos registros se profundiza cuando los alumnos explicitan las asociaciones que efectúan entre elementos significativos del texto y las variables visuales de la gráfica. Entre los errores posibles, se puede anticipar la confusión entre el “objeto origen” (la trayectoria de la persona) y el “objeto meta” (el trazado de la gráfica que muestra como varía la distancia en función del tiempo, Janvier 1993). Así, un alumno podría trazar un segmento horizontal, cuando la persona se desplaza en línea recta a velocidad constante, el trazado será entonces asociado a la trayectoria de la persona.

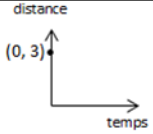
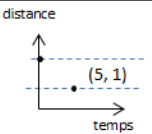
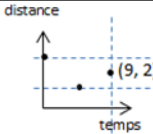
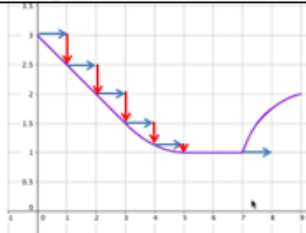
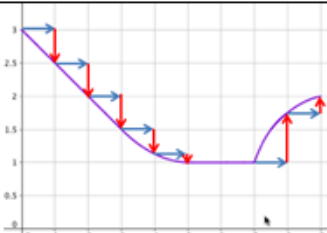
Fase IV				
La coordinación entre los tres registros presentes en esta fase (experiencia, descripción verbal y gráfica) va a ser reforzada por la confrontación entre la gráfica inicial y la producida después de haber interpretado el texto. Además, se pone en evidencia la correspondencia entre los elementos de cada uno de estos registros. En primer lugar, los alumnos pueden resaltar los elementos significativos asociados a los puntos característicos (el enfoque correspondencia). Por ejemplo, en el modelo de la descripción presentado anteriormente, el profesor podría resaltar tres extractos y poner en evidencia la asociación entre los elementos significativos de los registros <i>verbal</i> y <i>gráfico</i> (ver Tabla 1).				
Tabla 1. Asociación entre los elementos significativos del registro verbal y las variables visuales del registro gráfico para los puntos característicos (enfoque correspondencia)				
Registro verbal	Descripción asociada a la experiencia	Al inicio, colócate a 3 metros del sensor	hasta que llegues a 1 metro del sensor	e ir a 2 metros del sensor
	Interpretación de la descripción para la conversión hacia la gráfica	El punto (0, 3) pertenece a la gráfica de la función. La ordenada para el punto de abscisa 0 es 3.	El punto (5,1) pertenece a la gráfica de la función. El mínimo es 1 y la imagen es [1, 3].	El punto (9, 2) pertenece a la gráfica de la función. El dominio es [0, 9].
Registro gráfico	Gráfica			
El profesor debe en segundo lugar, conducir a los alumnos a caracterizar el aspecto de la curva entre los puntos y el desplazamiento asociado. Como lo han mostrado Passaro (2015) y Carlson (2002), los alumnos hacen espontáneamente referencia a la velocidad y a la aceleración para describir de forma más precisa el desplazamiento. Por ejemplo, para el trazado curvado ascendiente abierto hacia arriba, un alumno podría decir “retrocede yendo cada vez más rápido” o también “retrocede acelerando”. En la descripción presentada anteriormente, el profesor podría recuperar tres extractos y conducir a los alumnos a interpretarlos para favorecer la conversión hacia la gráfica (ver Tabla 2).				

Tabla 2. Asociación entre los elementos significativos del registro y las variables visuales del registro gráfico para saber cómo se deben unir los puntos (enfoque covariacional) conversión

Registro verbal	Descripción asociada a la experiencia	Cuando el cronómetro se ponga en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos después disminuye tu velocidad durante 2 segundos.	Quédate inmóvil durante 2 segundos.	Retrocede rápidamente al punto inicial, pero disminuyendo tu velocidad durante 2 segundos.
	Interpretación de la descripción para la conversión hacia la gráfica	Sobre $[0, 5]$ la función es decreciente. Sobre $[0, 3]$ la función es lineal, está representada por un segmento de recta oblicuo descendiente. Sobre $[3, 5]$ la función está representada por una curva abierta hacia arriba.	Sobre $[5, 7]$ la función es constante, está representada gráficamente por un segmento horizontal.	Sobre $[7, 9]$ la función es creciente. Está representada por una curva abierta hacia abajo abrupta al principio pero después cada vez menos abrupta.
Registro gráfico	Gráfica			

La interpretación sugerida necesita no obstante una experiencia en interpretar gráficamente los conceptos de velocidad y de aceleración. Además, haciendo las experiencias con el desplazamiento, los alumnos pueden observar que es difícil saber cómo efectuar la buena aceleración. El profesor debe aprovechar esta oportunidad para profundizar el análisis de la variación de la distancia ayudándose de los incrementos cuantificados (ver el ejemplo en la Tabla 3).

Tabla 3. Interpretación de la gráfica mediante los incrementos

Descripción asociada a la experiencia	Cuando el cronómetro se pone en marcha, avanza hacia el sensor a velocidad constante durante 3 segundos, después disminuye tu velocidad durante 2 segundos.	Retrocede rápidamente al principio, pero después disminuye tu velocidad durante 2 segundos.
Análisis de los incrementos sobre la gráfica		
Descripción del comportamiento de los incrementos	A velocidad constante: → A cada segundo, la distancia disminuye de 0.5 metros. La disminución de la velocidad: → Durante el primer segundo, la distancia disminuye de 0.4 metros y después durante el segundo segundo, la distancia disminuye de 0.1 metros.	Retrocede rápidamente y después disminuye tu velocidad: → Durante el primer segundo la distancia aumenta de 0.75 metros cuando la segunda distancia aumenta de 0.25 metros.
Interpretación en el registro experiencia	“Haz un paso delante a cada segundo de la manera siguiente: - hacer 3 pasos de 0.5 m (50 cm) - hacer 1 paso de 0.4 m (40 cm) y después un paso de 0.1 m (10 cm)”.	“Haz un paso detrás a cada segundo de la manera siguiente: - hacer 1 paso de 0.75 m (75 cm) - hacer 1 paso de 0.25 m (25 cm)”.

7b**UTILIZACIÓN DE SENSORES CBR2 PARA EL ESTUDIO DE SITUACIONES FUNCIONALES A NIVEL SECUNDARIA Y UNIVERSITARIO****Actividades (nivel preuniversitario) capítulo 7: Guía para el profesor**

Ruth Rodríguez Gallegos⁶, Valériane Passaro⁷, Mireille Saboya⁸, Fabienne Venant⁹

NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:

Estudio del cambio de temperatura en agua hirviendo

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD:

Acercar/mostrar a los alumnos al fenómeno de enfriamiento de agua hirviendo, sensibilizarlos al método experimental y hacerles ver su relación con la parte teórica/analítica.

GRADO ACADÉMICO DONDE SE PUEDE IMPLEMENTAR:

Finales de secundaria (14-17 años) y universitario (18-20 años)

CONTENIDOS MATEMÁTICOS ABORDADOS:

Función, covariación, representación gráfica, modelación, Ecuación Diferencial, representación simbólica

DURACIÓN APROXIMADA: 75 minutos**MATERIALES NECESARIOS:**

- Para los alumnos: Cada equipo dispone de un sensor de temperatura, una calculadora con posibilidades gráficas TI-Nspire CX CAS, un vaso.
- Para el profesor: Cafetera con agua hirviendo y una laptop con el emulador de la TI para dar instrucciones.

RECOMENDACIONES PARA EL DOCENTE:

Los alumnos trabajan en equipos de 3.

⁶ Tecnológico de Monterrey - México - ruthrdz@itesm.mx

⁷ Université du Québec à Montréal (UQAM) - Canadá - passaro.valeriane@uqam.ca

⁸ UQAM - Canadá - saboya.mireille@uqam.ca

⁹ UQAM - Canadá - venant.fabienne@uqam.ca

Descripción de la actividad

Fase I – Experimentando para conocer mejor el contexto térmico a modelar	
Situación: Conocer el fenómeno a modelar y encontrar una gráfica con ayuda del sensor de temperatura que represente la temperatura del agua en función del tiempo.	
Consigna	Desarrollo
Debes de intentar encontrar la gráfica en la calculadora/Interface que permita representar la temperatura vs el tiempo.	En equipo de 3 alumnos. El profesor introduce en clase la necesidad e importancia de estudiar la manera en que cambia la temperatura de los objetos, y precisa que nos interesaremos en conocer el enfriamiento del agua hirviendo, como un fenómeno más donde el cambio está presente y precisar la manera en que la magnitud temperatura varía. Se les invita a los alumnos que, mediante una práctica experimental detallada paso a paso, midan la temperatura en el tiempo con ayuda de un sensor de temperatura.
Recomendaciones para el profesor	
Dejar a los alumnos conocer la situación y cómo funciona la interface (calculadora gráfica TI Nspire CX CAS) y el sensor de temperatura. Hacer emerger los procesos intuitivos y los primeros razonamientos para pensar en el fenómeno. En la etapa posterior se pedirá a los alumnos que precisen, tanto la razón de cambio de la temperatura en el tiempo, así como la función analítica de la temperatura en función del tiempo.	
Fase II – Estableciendo el modelo matemático y su solución	
Situación: Establecer el modelo matemático (ED) que permita representar el cambio de la temperatura respecto al tiempo.	
Consigna	Desarrollo
Deberás establecer una ED que permita modelar el cambio de temperatura respecto al tiempo t.	Trabajo en equipos de 3 alumnos. El profesor apoya en guiar a los alumnos en reflexionar cómo cambia la temperatura en el tiempo y la manera de expresarlo matemáticamente. Los alumnos trabajan en escribir la ED y toman en cuenta diversos factores que influyen como la temperatura del medio ambiente y/o temperatura inicial del agua hirviendo.
Recomendaciones para el profesor	
Se sugiere intentar dejar que los alumnos propongan la variación al nuevo modelo de ED que se pretende estudiar. Generalmente en este año universitario, más de la mitad de la población sabe que se debe “ajustar el modelo” pero no sabe cómo justificar tal movimiento. En diálogo grupal se unen argumentos de los alumnos para justificar “en conjunto” la nueva ED.	

Fase III – Resolviendo la ED para conocer la Temperatura en función del tiempo t	
Situación: Resolución matemática del modelo matemático (la ED) para identificar la solución de la Temperatura en todo tiempo.	
Consigna	Desarrollo
Resuelve el modelo matemático previamente establecido con apoyo de algún método analítico. Encuentra la solución general y particular de la misma.	Trabajo en equipo de 3 personas. El profesor permite que los alumnos resuelvan la ED establecida previamente haciendo uso de algún método visto en clase. Si la actividad se desarrolla en las primeras sesiones del curso, podrá utilizar el método analítico de variables separables. En esta parte es muy importante resaltar que los datos de inicio de cada equipo pueden/deben ser diferentes, respecto a la temperatura del medio ambiente y/o la inicial por lo que se espera tener resultados distintos (aunque similares) para cada equipo.
Recomendaciones para el profesor	
En este momento es una oportunidad de volver a repasar el método analítico de variables separables en un contexto diferente a Crecimiento y Decrecimiento exponencial, además en un contexto diferente y con una ED que varía de la estructura original que ellos conocen. Es importante precisar la diferencia entre variables y parámetros dentro de la ED.	

Fase IV – Validar el modelo teórico vs el experimental	
Situación: Se pide a cada equipo comparar la gráfica de la temperatura obtenida por ellos en la solución particular y el modelo teórico con la gráfica obtenida por el sensor.	
Consigna	Desarrollo
Se te pide comparar la gráfica obtenida desde el modelo teórico (gráfica de la solución particular) con la obtenida por el sensor de temperatura. ¿Qué puedes decir de ambas gráficas? Se te pide comparar el valor de la temperatura en un tiempo t determinado (entre 0 y 15 minutos) haciendo uso del modelo teórico. Observa el valor que reporta el sensor y concluye sobre esta comparación. Se sugiere mejorar para que esta diferencia (en caso de haberla) sea mínima.	Los alumnos comparan y se espera se observe la similitud pero que a su vez identifiquen las diferencias que permitan avanzar en la comprensión del significado de una solución de una ED. Cada equipo expone su comparación, sugerencias de mejora y sobre todo los nuevos valores con el modelo ajustado.
Recomendaciones para el profesor	
Se pide a los alumnos comparar el valor de la temperatura en un tiempo preciso. En la práctica se pregunta por $t = 15$ minutos (900 segundos). En realidad, es un pretexto para que ellos comparen y reflexionen sobre la validez de su modelo. Generalmente existen diferencias importantes entre el	

valor reportado por el modelo teórico y el experimental. Se pregunta entonces a los alumnos a qué puede causar en el fenómeno tal diferencia, sus respuestas suelen ser variadas, desde “errores” desde lo teórico (en realidad se deben recalcular los parámetros; k principalmente) y a veces de manipulación del sensor, de lectura de “valores iniciales”. Se espera una síntesis de la institucionalización sobre la coordinación de los registros analítico y gráfico, en el caso del estudio del cambio de temperatura (enfriamiento) en el agua hirviendo.

Análisis a priori

Fase I

Los alumnos han estudiado magnitudes que cambian (crecen o decrecen exponencialmente) a través de un comportamiento de tipo exponencial. Esto permite explicar que los alumnos suelen proponer modelos como $\frac{dT}{dt} = k * T(t)$ o modelos del tipo exponencial $T(t) = P e^{rt}$ (aprendido desde la preparatoria) ó $T(t) = C e^{kt}$ visto en las clases previas de este mismo curso (donde k representa una constante de proporcionalidad). Un argumento que suele nacer en algunos alumnos de manera muy intuitiva es el de determinar que en esta ocasión la temperatura no puede descender totalmente hasta cero sino que debe ser hasta la temperatura del medio ambiente, en nuestro caso, la temperatura del salón de clase. Esto es un elemento muy importante que ellos conocen incluso de otras clases como Física ó Termodinámica.

Fase II

Los alumnos suelen proponer modelos como $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$. Algunas posibles variaciones son el que se desee precisar la k como un parámetro negativo $\frac{dT}{dt} = -k * (T(t) - T_M)$ desde la misma ED. En ocasiones solo invierten el orden dentro de las diferencias como $\frac{dT}{dt} = k * (T_M - T(t))$. A lo anterior se le conoce verbalmente como “la forma en que cambia la temperatura en el tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo $T = T(t)$ (agua hirviendo en este caso) y la del medio ambiente T_M ”. La ED esperada es $\frac{dT}{dt} = k * (T(t) - T_M)$ con el correspondiente valor inicial de la temperatura $T(t = 0) = T_0$. Es importante precisar que habrá ligeras variaciones del valor de T_M (suele pasar para salones muy amplios) pero sobre todo en T_0 (esto depende de la lectura de los propios alumnos sobre este dato).

Fase III

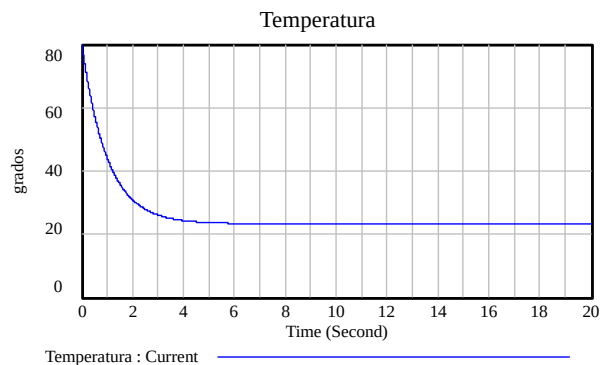
Los alumnos resuelven la ED a través del primer método visto en el curso (y el único hasta el momento visto) llamado Variables Separables, el cual consiste en separar la variable dependiente Temperatura T y la variable independiente tiempo t en ambos lados de la ED, lo que conduce a la ecuación siguiente en la que C es una constante:

$$T(t) = T_M + C e^{kt}$$

Posteriormente, en los problemas en contexto como éste, nos interesa más tener la solución

particular, es decir, precisar los valores de C y k .

Ejemplo: Si la temperatura inicial es 80 grados centígrados y la de medio ambiente 23 grados centígrados, la solución particular se vería como:



Fase IV

Se pretende comparar los resultados teóricos y los experimentales de un modelo matemático. Si las condiciones lo permiten se podrán sugerir modificaciones al modelo de la solución particular (condiciones iniciales) para que los alumnos puedan disminuir las diferencias entre uno y otro. En ese caso, tendrían que replantear la solución. Se puede compartir una tabla de diferencias entre valores obtenidos por los alumnos:

Equipos	Temperatura calculada a los 900 segundos	Temperatura registrada por los sensores	Diferencia
9 y 10 (A los 600 s)	57.38°C	62°C	4.62
1 y 12	47.63°C	55.2°C	7.57
13	50°C	53.8°C	3.8
6	50.31°C	53.8°C	3.49
2 y 8	47.18°C	53.4°C	6.22
7	48.89°C	52.6°C	3.71
5 y 11	43.48°C	54.0°C	10.52
3 y 4	47.73°C	54.7°C	6.97

