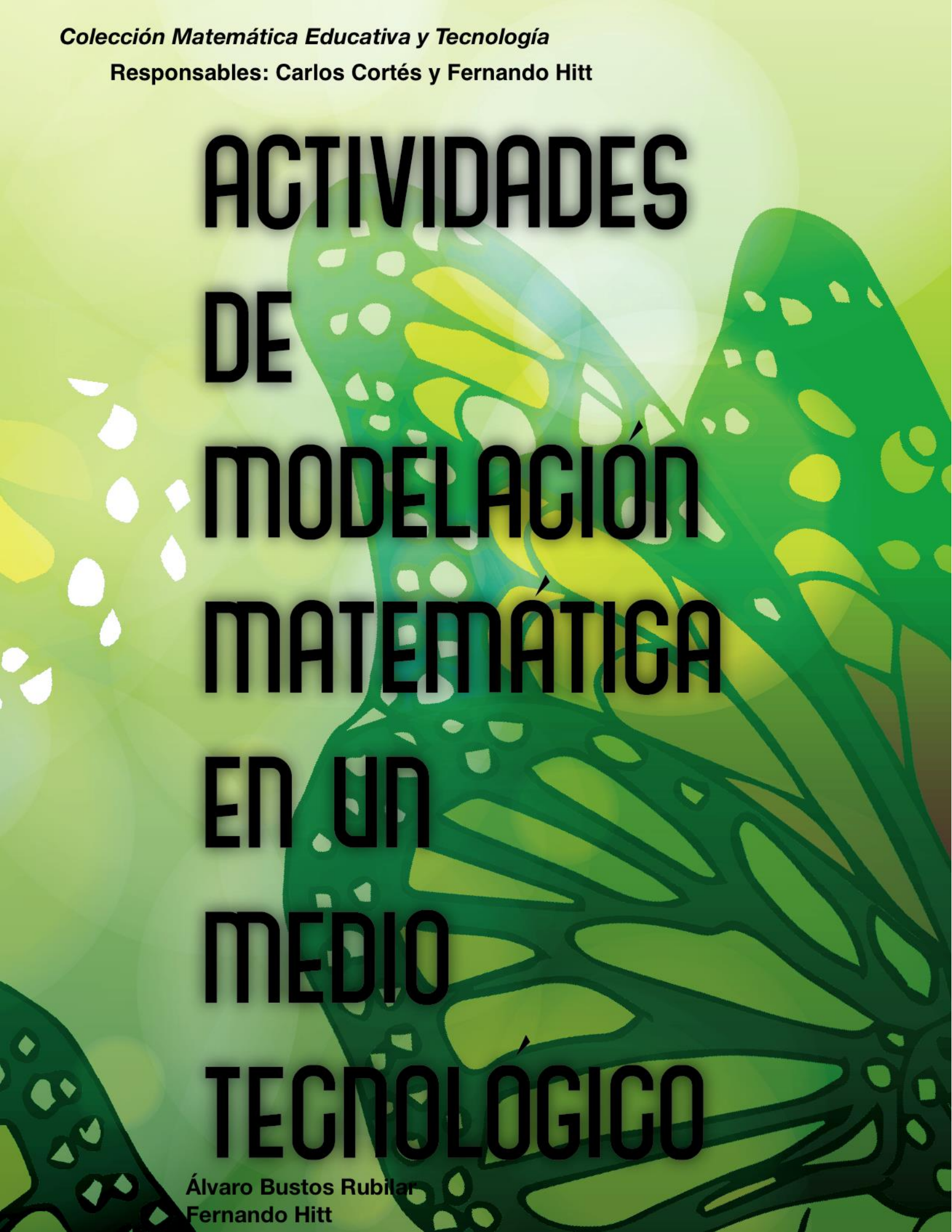


Colección Matemática Educativa y Tecnología

Responsables: Carlos Cortés y Fernando Hitt



ACTIVIDADES DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN UN MEDIO TECNOLOGICO

Álvaro Bustos Rubilar
Fernando Hitt

Colección Matemática Educativa y Tecnología

***Actividades de modelación matemática
en un medio tecnológico***

Comité editorial (versión electrónica)

Álvaro Bustos Rubilar

Fernando Hitt

Editores de la colección Matemática Educativa y Tecnología
José Carlos Cortés Zavala
Fernando Hitt

**Comité Editorial del libro: Actividades de modelación matemática en un
medio tecnológico (versión electrónica)**

Álvaro Bustos Rubilar

Universidad de Valparaíso

Fernando Hitt

Université du Québec à Montréal

Primera edición: Marzo 2019 (México)

Actividades de modelación matemática en un medio tecnológico

Versión electrónica

Bustos, A. y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM, 2019

322 p; 23 x 17 cm – (Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-1-8

Diseño portada: Claudia Miranda Osornio

Imprime: Morevallado

Impreso en México / Printed in Mexico

© 2019

© **CC-BY-NC-ND**

Índice

Prefacio y actividades por capítulo	Página
Prefacio	v
Capítulo 1. La enseñanza de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Fernando Hitt Espinosa, Mireille Saboya, Samantha Quiroz Rivera, Álvaro Bustos Rubilar y Zita Antun</i>	1
Remarque. Activités en espagnol et français.	25
Capítulo 2. Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía, Fernando Hitt Espinosa y Samantha Quiroz Rivera</i>	43
Capítulo 3. El aprendizaje de las matemáticas en un medio sociocultural y tecnológico	
Diseño de actividades: <i>Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt Espinosa, Álvaro Bustos Rubilar, Mireille Saboya y Zita Antun</i>	57
Capítulo 4. Entendimiento de postulados básicos de la perspectiva de modelos y modelación por profesores en formación	
Diseño de actividades: <i>Verónica Vargas Alejo y César Cristóbal Escalante</i>	63
Capítulo 5. La inclusión de GeoGebra en el diseño de secuencias didácticas en matemáticas	
Diseño de actividades: <i>José Luis Soto Munguía</i>	73
Capítulo 6. Proceso de representación del cambio y la variación: exploraciones digitales	
Diseño de actividades: <i>Sandra Evelyn Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Leal y Nelson Javier Rueda</i>	81
Capítulo 7. Utilización de sensores CBR2 para el estudio de situaciones funcionales a nivel secundaria y universitario	
Diseño de actividades: <i>Valériane Passaro, Ruth Rodríguez Gallegos, Mireille Saboya y Fabienne Venant</i>	85
Remarque. Activités en espagnol et français.	99
Capítulo 8. Actividades de aprendizaje para entender el concepto de función Derivada y Función integral a través de las razones de diferencias y las acumulaciones	
Diseño de actividades: <i>José Carlos Cortés Zavala, Lilia López Vera y Eréndira Núñez Palenius</i>	113

Capítulo 9. Variación lineal y movimiento: de la experiencia corporizada a los significados institucionales	
Diseño de actividades: <i>María Teresa Dávila y Agustín Grijalva Monteverde</i>	159
Capítulo 10. Problèmes d'apprentissage du calcul différentiel et apport de la méthode de Fermat pour une approche d'enseignement plus intuitive	
Diseño de actividades: <i>Pedro Rogério Da Silveira Castro</i>	167
Remarque. Activités en français.	
Capítulo 11. La ecuación lineal con dos variables: una propuesta para su aprendizaje en la escuela secundaria mexicana	
Diseño de actividades: <i>Ana Guadalupe del Castillo y Silvia E. Ibarra Olmos</i>	175
Capítulo 12. Tecnología y usos de las gráficas: una experiencia de modelación del movimiento con estudiantes de bachillerato	
Diseño de actividades: <i>José David Zaldívar Rojas</i>	197
Capítulo 13. Una forma de enseñanza y aprendizaje: Objetos Para Aprender	201
Diseño de actividades: <i>Ricardo Ulloa Azpeitia</i>	
Capítulo 14. Secuencia didáctica para el cálculo del volumen por el método de sólidos de revolución: el caso de recipientes y sandía	
Diseño de actividades: <i>Rafael Pantoja Rangel, Rosaura Ferreyra Olvera y Rafael Pantoja González</i>	203
Capítulo 15. Geogebra comme outil d'exploration en enseignement de la géométrie	
Diseño de actividades: <i>Loïc Geeraerts y Denis Tanguay</i>	
Remarque. Activités en français.	205

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

La Matemática Educativa como disciplina científica investiga sobre el aprendizaje de las matemáticas para revolucionar la enseñanza de las mismas. Desde un punto de vista tecnológico, desde las últimas décadas del siglo XX, la tecnología exhibió, en pantallas de calculadoras y de computadoras, su eficiencia técnica al mostrar en forma dinámica diferentes representaciones de un concepto matemático. Con este hecho, las teorías sobre la construcción de conceptos fundamentadas en la noción de representación se hicieron cada vez más sólidas. Así mismo, la resolución de problemas y el movimiento de la matemática realista de la escuela de Freudenthal impulsó la modelación matemática haciendo uso de tecnología (Blum, Galbraith, Henn & Niss, Eds. 2007, English 2007). Si bien la tecnología es utilizada en la vida diaria de los individuos en forma eficaz, falta mucho para que ello se realice en el aula de matemáticas.

La enseñanza de las matemáticas con tecnología necesitaba de un marco teórico ligado a esta problemática, el trabajo de Rabardel (1995) proporcionó una respuesta para entender cómo funciona el organismo humano frente a un artefacto, desarrollando la noción de génesis instrumental, teoría del aprendizaje adaptada al aprendizaje de las matemáticas por Guin & Trouche (1999). Esta teoría con raíces vygostkianas mostró que la apropiación de artefactos y su transformación en herramienta para la resolución de problemas no es una tarea fácil (Bartolini Bussi & Mariotti 1999, 2008, Arzarello & Paola 2007).

Conscientes de la importancia de promover la investigación práctica sobre el uso de tecnología en el aula de matemáticas, hemos creado la colección de libros “Matemática Educativa y Tecnología”. Cada producto de esta serie estará integrado por dos libros uno que contendrá un acercamiento teórico-práctico y el otro será una versión práctica que sirva de apoyo en el aula al profesor de matemáticas. Las obras producidas en el marco de esta colección serán puestas a disposición de los profesores y podrán descargarlos vía Internet.

Editores de la colección

Fernando Hitt Espinosa
José Carlos Cortés Zavala

Referencias

- Arzarello, F. & Paola, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group PME*, v. 2, 17-24. Seoul: PME.
- Bartolini Bussi, M. and Mariotti, M. (1999). Semiotic mediation: From history to mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics* 19(2): 27-35.
- Bartolini Bussi M. G., & Mariotti M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective, In L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New Jersey: LEA.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. & Niss, M. (Eds. 2007). *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.
- English L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July, 2015, Hobart, Australia.
- Guin, D. & Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 195-227.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Armand Colin. HAL: hal-01017462, consulted 5 april 2016.

Prefacio

Al pasar las páginas de este libro detengo mi mirada en los vocablos representación, modelación y problema; me doy cuenta de que son términos centrales que insertos en la presente obra se convierten en construcciones teóricas muy elaboradas. Su enunciación en contextos específicos, enmarcada por las diversas teorías seleccionadas por los autores, los convierte en términos polisémicos cuyos significados podrán ser develados a través de la lectura y el seguimiento de las actividades aquí presentadas.

Hablar de representación (o alguna de sus variantes) no es sólo remitirnos a cualquiera de las catorce acepciones que ofrece el Diccionario de la Real Academia Española (DRAE, 2017), hacerlo involucra necesariamente establecer vínculos con alguna teoría cognitiva, de aprendizaje, de enseñanza o bien con alguna corriente metodológica que sitúa el concepto en un escenario perfectamente delimitado. Así, por ejemplo, Hitt y Quiroz (Capítulo 1, pág. 7) se proponen “iniciar la construcción de elementos teóricos específicos para una teoría sociocultural del aprendizaje, considerando la noción de representación como pilar indispensable”, en tanto que, Castro (Capítulo 10, pág. 267) remite exclusivamente a las representaciones gráficas en los albores de su surgimiento, sobre todo por resaltar como referente el trabajo desarrollado por Fermat y Descartes.

Por su parte, Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14) emplean el término representación como una imagen que sustituye a la realidad y vincula ésta a otras formas de representación (externas): acercamiento numérico, gráfico o analítico, que puede tener un tópico matemático, interpretación a la que también aluden Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2, pág. 29) y Cortés, López y Núñez (Capítulo 8, 204).

Parada y Fiallo (Capítulo 6, 144) enuncian que: al “animar el punto P los estudiantes ven, a través de la *filmación*, el comportamiento del punto que representa el volumen en función de la altura”. Asimismo, en un pie de gráfica asignan la cualidad de representación a la imagen de una caja sin tapa.

De lo expuesto desprendo que los autores conciben como una representación, en el texto, a una imagen, un punto, una gráfica, una tabla o un procedimiento.

El concepto modelo (o alguna variante) es bastante cercano al de representación, algunos participantes de este texto los emplean como sinónimos, ya sea de forma explícita o implícita.

Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 86) citan a Lesh y Doerr (2003, pág. 10) para ofrecer una definición del segundo de los conceptos mencionados:

“[Los modelos] son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados mediante el uso de sistemas de notación externa, y que son utilizados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –de tal forma que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente”.

Más adelante, Vargas-Alejo y Cristobal-Escalante (Capítulo 4, pág. 95 y 96) asignan el nombre de “modelo tabular” y “modelo gráfico” a las producciones numérica y gráfica que resultan de un proceso computacional.

Los términos simulación y modelación guardan entre sí una estrecha relación en el compendio de artículos, por ejemplo, Soto (Capítulo 5) emplea el primer vocablo para referirse a una situación creada con base en los elementos y las relaciones entre éstos, provenientes desde otra situación previamente enunciada. Explicita el autor que la exploración y la observación de la simulación, a la cual llama modelo dinámico, “puede sistematizarse para identificar las variables, las constantes y las relaciones que intervienen en el modelo” (pág. 123).

Passaro, Rodríguez, Saboya y Venant (Capítulo 7); Dávila y Grijalva (Capítulo 8); Del Castillo e Ibarra (Capítulo 9); Zaldívar (Capítulo 10) relacionan la modelación con situaciones problemáticas relativas a fenómenos de variación.

En lo que concierne al concepto problema, Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2) presentan una reseña de la ruta de la resolución de problemas como núcleo didáctico dentro del aula de matemáticas; algo similar ocurre en Hitt y Quiroz (Capítulo 1), quienes discuten la diferencia entre ejercicio, problema, situación problema, situación de búsqueda y problema de modelación. Desencadenan el recorrido con una formulación propia, la situación de investigación, actividad que proponen para ser utilizada en el marco de la metodología Acodesa (Aprendizaje en Colaboración, Debate científico y Autorreflexión).

Los problemas, representaciones y modelos se encuentran en diversos momentos del desarrollo histórico del conocimiento matemático. Por ejemplo, los llamados tres problemas clásicos: la trisección de un ángulo, la duplicación de un cubo y la cuadratura de un círculo, mantuvieron ocupados, en la búsqueda de su solución, a los estudiosos de la época en que fueron formulados. También, se sabe que el equivalente a “un modelo” fue empleado por Arquímedes para la demostración de teoremas matemáticos, acercamiento que él llama el Método, que consiste en “pesar figuras” para establecer relaciones que validan las afirmaciones que se enuncian; es un modelo mecánico de planteamientos geométricos.

En cuanto a las representaciones, otro hombre de ciencia, Galileo, emplea segmentos rectilíneos y figuras geométricas para explicar gráficamente los razonamientos que sustentan las demostraciones de proposiciones acerca del movimiento de los cuerpos.

Es claro que los tres conceptos comentados: representación, modelo y problema, tienen en la historia un uso distinto al que ocupan en la presente obra. Aquí, se presentan con un andamiaje teórico que les da soporte para su uso en las aulas de matemáticas. Se distinguen planteamientos generales como es La teoría de la actividad de Leontiev (Capítulo 2), La Teoría Socioepistemológica (Capítulo 12) y otras de alcance local: la Teoría de los Registros Semióticos de Representación desarrollada por Duval (Capítulo 7, Capítulo 8), la Perspectiva de Modelos y Modelación (Capítulo 4), el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Capítulo 6), y, el Paradigma del geómetra-físico (Capítulo 15).

La metodología de enseñanza que se emplea es diversa. La mayoría de los autores de la presente obra: Hitt y Quiroz (Capítulo 1); Soto, Hitt y Quiroz (Capítulo 2); Quiroz, bustos y Hitt (Capítulo 3); Cortés, López y Núñez (Capítulo 8); Da Silveira (Capítulo 10); Pantoja, Ferreyra y Pantoja (Capítulo 14), organizan el desarrollo de sus propuestas de aula con base en las etapas de Acodesa. Resulta interesante la forma en que el autor de la propuesta relaciona el tipo de representación con las diferentes etapas en que se divide el proceso metodológico. También se utilizan otras formas de organización y realización de la secuencia didáctica como es la propuesta de Díaz-Barriga que emplean Soto (Capítulo 5) y del Castillo e Ibarra (Capítulo 11).

Emplear una fotografía como estrategia para relacionar una de las propiedades extensivas de la materia, el volumen, con un concepto matemático, la integral definida, y, con un procedimiento geométrico, la rotación de una superficie que genera la representación de un sólido, es posible realizarlo gracias al avance tecnológico, sobre todo computacional, ocurrido esto en los últimos cincuenta años.

La mayoría de los proyectos de investigación y propuestas didácticas incluidos en el libro utilizan software como herramienta para el desarrollo de las actividades, es preponderante el uso de la aplicación de Matemáticas dinámicas GeoGebra (Capítulos 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 14 y 15). Otros emplean dispositivos de recolección de datos, específicamente sensores de movimiento (Capítulos 7 y 12) y voltaje (Capítulo 7).

En cuanto a los tipos de actividades con software de geometría dinámica, Geeraerts y Tanguay (Capítulo 15) mencionan algunos, entre ellos: a) Editor de figuras, b) Editor de figuras geométricas dinámicas, c) Herramientas de experimentación empírica, y d) Ilustración de los elementos de enseñanza, las explicaciones y los razonamientos dirigidos a los estudiantes. Ulloa (Capítulo 13), por su parte, propone, los “Objetos Para Aprender”, como una forma de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con apoyo de tecnología.

Dentro de la obra se distingue, de manera general, que los autores diseñaron sus actividades con la intención de hacer exploraciones sistemáticas guiadas acerca de tópicos específicos de matemáticas, como puede verse más detalladamente en el compendio específico.

La presente obra puede funcionar como un valioso apoyo para estudiantes de posgrado en aspectos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, para profesores de las diferentes asignaturas que conforman la disciplina y para investigadores en Matemática Educativa y Educación matemática.

La agradable sensación que en mi ha dejado la lectura de las más de cuatrocientas páginas del texto y el seguimiento de las actividades que componen el libro de actividades concomitante a este volumen me llama a releerlo. Sé que la interpretación será distinta y que la cercanía a los interesantes planteamientos que los autores aportan será cada vez más estrecha.

Esnel Pérez Hernández

Instituto GeoGebra AMIUTEM

8 ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCION DERIVADA E INTEGRAL A TRAVES DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: Guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala¹, Lilia López Vera², G. Eréndira Núñez Palenius¹

Actividad 1: Diferencias

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Diferencia Matemática

Parte I (con lápiz y papel): Concepto General

La diferencia matemática es el resultado de restar, en donde se resta un sustraendo de un minuendo. Por ejemplo, la diferencia entre 3 (sustraendo) y 8 (minuendo) es 5.

En la vida cotidiana cuando se expresa una diferencia, típicamente se refiere a la diferencia entre un valor inicial (sustraendo) y un valor final (minuendo). *Es decir, la diferencia es igual al valor final menos el valor inicial.*

a) Completa la siguiente tabla. Pase el texto de la columna 1 a una sintaxis matemática en la columna 2 y escriba el resultado de la diferencia en la columna 3.

Texto	Sintaxis	Diferencia
Una cuenta de ahorros tiene \$2383.87 al inicio del mes y \$2873.92 al final. ¿Cuál fue la diferencia a lo largo del mes?		
Se saca un pedazo de carne a descongelar, al sacarse del congelador se encuentra a -3°C y después de 5 horas se encuentra a 24°C . ¿Cuál es la diferencia de temperatura después de las 5 horas?		
Un automóvil contiene un tanque de 90 litros. Se llena al comienzo de la semana, al final de ella se observa que el tanque contiene 32.3 litros. ¿Cuál es la diferencia de litros en el tanque a lo largo de		

¹ Facultad de Físico Matemáticas, Universidad Michoacana.

² Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León.

la semana?		
------------	--	--

- b) Observe las diferencias de los tres (3) casos del inciso anterior, ¿existe una diferencia con signo negativo? En caso afirmativo, ¿qué representa con respecto a la cantidad (aumenta o disminuye)?

--

- c) ¿Qué concluyes a partir del inciso anterior con respecto al signo de la diferencia? Considere signos positivos, negativos y valores de cero.

--

- d) En la siguiente tabla en la primera columna se encuentra una secuencia de cinco (5) números, observe la tendencia uniforme (si existe alguna) y anótela en la segunda columna.

Secuencia	Observaciones
2, 4, 6, 8, 10	
45, 38, 31, 24, 17	
-8.75, -3.5, 1.75, 7, 12.25	
1, 9, 17, 27, 41	

Considere el conjunto de datos, en donde i corresponde a una variable independiente mientras tanto u corresponde a la variable dependiente. Por lo tanto, u_i corresponde a u evaluada en cualquier valor de i . Por ejemplo, u_3 indica el valor de u cuando i es 3 lo cual es 14.

i	1	2	3	4	5	6
u_i	8	11	14	17	20	23

- e) Utilizando el conjunto de datos mencionado, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Representación Algebraica	Resultado
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_2$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		

$u_4 - u_1$		
-------------	--	--

En matemáticas el operador delta (Δ) representa un cambio. Siendo un operador matemático, puede aplicarse a cualquier variable. Por ejemplo, Δx representa un cambio en x mientras que ΔT representa un cambio en T (muchas veces dicha variable representa una temperatura).

f) Considerando el concepto de Δ y utilizando el conjunto de datos, complete la siguiente tabla.

Sintaxis	Δu	Δi
$u_5 - u_4$		
$u_2 - u_1$		
$u_3 - u_1$		
$u_5 - u_3$		
$u_3 - u_6$		
$u_4 - u_1$		

g) Analice la tabla del inciso f, ¿hay una relación con respecto a Δi y Δu ? ¿qué puede concluir?

--

h) Exprese su observación del inciso g en forma matemática (fórmula). ¿Se cumple en cada caso de la tabla?

--

Parte 2 (con CAS): Formulación de Δx y Δy

Si una variable y depende de una variable x , de tal manera que cada valor de x determina exactamente un valor de y , entonces se dice que **y es una función de x** . Cuatro métodos comunes para la representación de funciones son: numéricamente por tablas, geométricamente por gráficas, algebraicamente por fórmulas y/o verbalmente. Una **función** f es una regla que asocia una salida única con cada entrada. Si la entrada es denotada por x , entonces la salida es denotada por $f(x)$ (se lee como “ f de x ”). Para una entrada dada x , la salida de la función f se denomina el valor de f en x . Algunas veces se denomina la salida por una sola letra, por ejemplo y , y se escribe como $y = f(x)$. Esta ecuación expresa y como una función de x ; la variable x se llama la **variable independiente** de f , y la variable y se llama la **variable dependiente** de f .

Las coordenadas cartesianas son un sistema de coordenadas de dos dimensiones, denominado como el plano cartesiano, utilizado para la representación gráfica de una función. En el eje horizontal, conocido como el eje “x”, se encuentran las variables independientes mientras que en el eje vertical, conocido como el eje “y”, se encuentran las variables dependientes. Siendo un plano, cada punto se puede expresar por sus coordenadas (x, y).

- a) Introduzca la expresión $\frac{5x-6x*x+x^2}{x}$ a la hoja de CAS y presione **enter**, ¿qué observa? ¿qué sucede? ¿Para qué puede ser útil la observación anterior?

Una herramienta útil dentro del sistema CAS, es el comando “Sustituye”, . Dicho comando



se elige presionando el icono .

- b) Considere la función $2x^2 + 5x - 2$. Llene la siguiente tabla con los valores de x respectivos.

Valor de x	Operación con lápiz	Resultado de CAS
-3		
-2		
-1.25		
-0.5		
0		
0.25		
0.89		

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala³, Lilia López Vera⁴, G. Eréndira Núñez Palenius³

Actividad 2: Pendientes

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Pendiente

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Pendiente y Rectas

a) Un carro recorre 245 kilómetros con 18 litros de gasolina.

1. Si el mismo carro gasta 30 litros de gasolina, ¿qué distancia viajó?

2. Explique la lógica utilizada en el problema anterior y las suposiciones hechas.

3. ¿Cuál es la razón de cambio en kilómetros por litros de gasolina y qué significa?

4. Utilizando el dato original, 18 litros para 245 kilómetros y el dato del problema 1, grafique dichos puntos y trace la recta. Formule una expresión matemática para la pendiente.

³ Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.

⁴ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

5. ¿Qué relación hay entre una razón de cambio y una pendiente?

El modelo matemático más sencillo para relacionar dos variables es la **ecuación lineal** $y = mx + b$. Esta ecuación se llama *lineal* porque su gráfica es una línea. Cuando $x = 0$, se obtiene:

$$y = m(0) + b = b$$

Por lo tanto, la línea cruza el eje y en $y = b$. En otras palabras, el intercepto y es $(0, b)$. La inclinación o pendiente es m . La pendiente de una línea no vertical es el número de unidades que la recta sube (o cae) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha, como se observa en la figura 1 y 2.

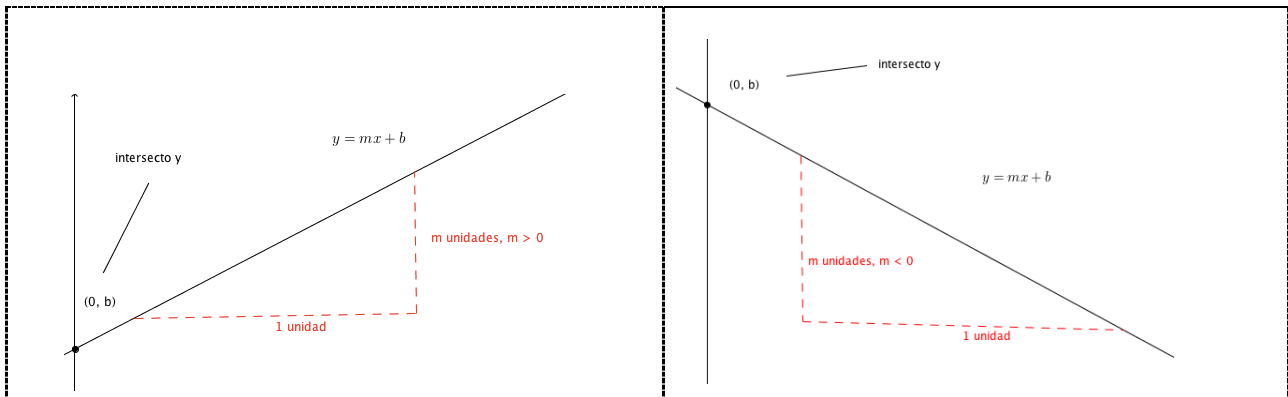


Figura 1. Línea recta con pendiente positiva **Figura 2.** Línea recta con pendiente negativa

b) Considere la ecuación de la recta, $y = 2x + 3$. Identifique la variable independiente y la variable dependiente. Elija por lo menos 5 valores dependientes y haga una tabla con los valores independientes correspondientes.

c) Grafique la línea recta expresada por la ecuación $y = 2x + 3$.

d) Considere los puntos $(6, 9)$ y $(0, 11)$. Sin hacer ningún cálculo responda ¿la pendiente es positiva o negativa? Compruebe gráficamente y después analíticamente.

- e) Utilizando los puntos generales, (x_n, y_n) , donde n es n -ésimo punto. Calcule la pendiente entre el punto 1 (x_1, y_1) y 2 (x_2, y_2) .

- f) Exprese la ecuación de la pendiente para los puntos generales del inciso e utilizando el concepto de Δ .

Parte II (con CAS): Aplicación

La datación por radiocarbono es una técnica de datación radiométrica que utiliza el isótopo carbono-14 para la determinación de la edad de materiales que contienen carbono. Los siguientes datos obtenidos experimentalmente, demuestran la cantidad de C-14 para un material a lo largo del tiempo.

Antigüedad del Material (miles de años)	Cantidad de C-14
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

a) Complete la siguiente tabla considerando el rango de años dado.

Rango	Diferencia de Años	Diferencia de C-14	Pendiente
6 - 14			
6 - 12			
6 - 10			
6 - 8			

b) Utilizando la pendiente y su intervalo respectivo, calcule la cantidad de C-14 a 7 años (7c) y compárelo con la cantidad a 7 años real (7r).

Rango	7c	7c - 7r
6 - 14		
6 - 12		
6 - 10		
6 - 8		

c) ¿Qué observaciones tiene? ¿qué pendientes calculan mejor el valor de 7c?

d) ¿A qué se debe la observación del inciso anterior?

e) Para calcular la cantidad de C -14 a 9.5 años, ¿cuál pendiente de los siguientes rangos utilizaría? (6 - 10, 7 - 10, 8 - 10, 9 - 10) ¿Por qué?

f) Calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

Utilizando la hoja de cálculo ingrese los datos experimentales del problema anterior dentro de esta sección. Para elegir la hoja de cálculo seleccione **Vista**, y después **Hoja de Cálculo**. En la celda que tiene la letra A (celda superior) ingrese los años y llame dicha columna “yrs”

y en la celda que contiene la letra B ingrese los datos de C-14 y llame dicha columna “C14”.

Dentro de **Menú**    , elija **Datos y Estadísticas**  y seleccione **“Análisis de regresión de dos variables”** Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione **“Modelo de Regresión”**. Dentro de estas opciones existen varios ajustes disponibles.

g) Haga un ajuste de datos utilizando **Lineal ($mx + b$)**. ¿Qué sucede? Repita el ajuste utilizando **exponencial**. ¿Cuál se ajusta mejor?

h) Repita el procedimiento para una **A: Regresión exponencial...** ¿Qué información aparece? ¿Se llega a la misma conclusión que en el inciso g?

i) Utilizando la ecuación de mejor ajuste, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

j) Utilice la pendiente del rango 9 – 10 años para calcular la cantidad de C-14 a 9.3 y 9.6 años. Utilizando como rango 9.3 – 9.6 años, calcule la cantidad de C-14 a 9.5 años.

k) Considere la cantidad de C-14 calculada a 9.5 años del inciso f), k), y j). ¿Cuál es la mejor aproximación? ¿Por qué?

l) Con sus palabras explique la observación anterior.

m) Exprese por medio de una expresión algebraica lo que acaba de decir.

Parte III (Simbolización): Desarrollo simbólica de la Pendiente

a) En el $\square$ introduzca un símbolo que represente los datos.

$\square$	$\square$
0	15.30
1	13.56
2	12.01
3	10.64
4	9.43
5	8.35
6	7.40
7	6.56
8	5.81
9	5.15
10	4.56
11	4.04
12	3.58
13	3.17
14	2.81
15	2.49
16	2.21
17	1.95

b) Escriba la operación necesaria para calcular la pendiente entre 6 y 14.

c) ¿Cómo llama o expresa simbólicamente la ecuación anterior?

d) ¿Cómo queda la expresión simbólica anterior cuando se evalúa en 9.5 años?

e) ¿Cómo se expresa lo anterior para cualquier valor?

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala⁵, Lilia López Vera⁶, G. Eréndira Núñez Palenius⁵

Actividad 3: Pendiente como Función

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Desarrollo Matemático de $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Parte I (Simbólica): Desarrollo Preliminar

- a) Una forma convencional de describir una pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Observe la forma convencional y la suya de la actividad pasada, ¿Cuál prefiere usar? ¿Por qué?

La pendiente también se puede escribir como $\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$, o $\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$, o $\frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}$, o $\frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}$, donde **m** y **n** son subíndices. Si $y_n = f(x_n)$ y $n = 10$, se puede escribir como $y_{10} = f(x_{10})$.

- b) Escriba la pendiente $\frac{f(x_{10}) - f(x_9)}{x_{10} - x_9}$ introduciendo la variable **n**.

- c) Para la pendiente $\frac{f(x_{15}) - f(x_8)}{x_{15} - x_8}$, ¿qué valor le daría a **n**?

⁵ Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.

⁶ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

- d) Si $\Delta x = x_{n+1} - x_n$, ¿a qué es igual x_{n+1} ? Expresé la pendiente del inciso b, utilizando los términos Δx y x_n .

Parte II (con lápiz y papel): Introducción de h

- a) Compare la ecuación obtenida en el inciso d de la parte I, ¿es diferente a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$? Si es diferente, ¿a qué se debe dicha diferencia?

- b) Observando la figura 1, ¿qué representa y a qué es igual h ?

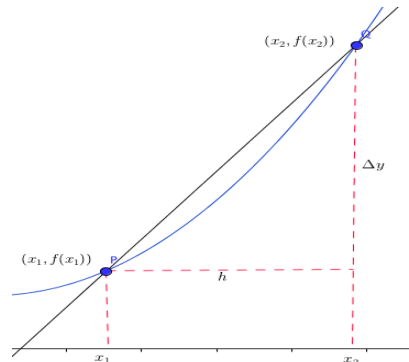


Figura 1. Introducción del concepto ligado al valor h

- c) Utilizando h , ¿cómo queda la expresión de la pendiente?

- d) Considere la función, $f(x) = x^2 + 2x$. ¿Cómo se expresa $f(x_1)$, $f(x_1+\Delta x)$ y $f(x_1+h)$?

- e) Considerando $f(x) = x^2 + 2x$ y Δx o h , ¿cuál es la ecuación de la pendiente del inciso c? (No es necesario reducir algebraicamente)

- f) Si el primer punto es $(1, 3)$, exprese la ecuación del inciso anterior con este punto. ¿Qué observa de esta ecuación?

Parte III (con CAS): Variación de h

- a) Utilizando la hoja de cálculo, en la primera columna incluya los valores de Δx o h mientras que en la segunda columna va la pendiente. Utilice la ecuación de la pendiente del inciso f de la parte II. Como en cualquier hoja de cálculo, en la parte gris de la columna gris se puede expresar la función de la pendiente en donde Δx o h equivale a la variable “a”, ya que es el valor de la columna A. Complete la tabla.

	A	B
♦		
1	0.1	
2	0.01	
3	0.001	
4	0	
5	-0.001	
6	-0.01	
7	-0.1	

- b) ¿Qué observa cuando Δx o $h = 0$? ¿A qué se debe ese valor?

- c) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números positivos?

d) ¿A qué número se acerca la pendiente cuando Δx o h se acerca a cero a partir de los números negativos?

e) Observando las respuestas a los incisos c y d, ¿llega a la misma conclusión?

f) Cuando Δx o h tiende a cero, ¿a qué tiende la pendiente?

g) Considere la observación del inciso anterior, ¿es igual al valor cuando Δx o $h = 0$?

h) ¿Qué puede concluir de las observaciones de los incisos f y g?

i) ¿Cómo puede definir este tipo de análisis (analítico o gráfico)? Explique su razonamiento.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala⁷, Lilia López Vera⁸, G. Eréndira Núñez Palenius⁷

Actividad 4: Límites

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto Informal del Límite

Suponga que quiere calcular la velocidad promedio al viajar en una carretera recta. Si pasa el kilómetro 100 a las 12:00 y el kilómetro 140 a las 12:30:

- a) Escriba la operación que realiza para obtener la cantidad que se viajó y para saber en cuánto tiempo se viajó.

- b) Utilizando las expresiones del inciso anterior, **escriba la operación** para calcular la velocidad promedio.

- c) Explique qué es una pendiente y escriba la expresión.

⁷ Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.

⁸ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

d) Relacione la velocidad promedio con la ecuación de la pendiente. ¿Qué observa?

Por otra parte, aun que la velocidad promedio es una cantidad fija, es casi seguro que la velocidad instantánea (la velocidad indicada por el velocímetro), varía de un momento a otro.

Se lanza verticalmente una piedra del piso a una velocidad de 96 ft/s. Despreciando la resistencia del aire, la posición de la piedra después de t segundos está dada por la función:

$$s, t = -16t^2 + 96t$$

La posición s es medida en pies con $s = 0$, corresponde al piso mientras que t representa el tiempo en segundos.

e) Escriba las operaciones para calcular la velocidad promedio y calcule la velocidad promedio entre el intervalo de tiempo, i) $t = 1$ y $t = 3$, ii) $t = 1$ y $t = 2$, iii) $t = 1$ y $t = 1.5$.

f) Observe los resultados de i, ii, y iii. ¿Qué diferencia observa?

g) Escriba la ecuación para la velocidad promedio de la piedra entre el intervalo „ $t=0$., t ..

Al calcular la velocidad promedio, se utilizó la posición del objeto a dos puntos distintos. Para la velocidad instantánea solamente se utiliza un punto distinto. Como se verá en la siguiente sección, la velocidad instantánea se calcula a partir de velocidades promedios.

h) Si nos interesa calcular la velocidad instantánea a $t_0 = 1$, se calcula la velocidad promedio sobre el intervalo $[1, t]$. Escriba la ecuación de la velocidad promedio.

La velocidad instantánea en el punto $t = t_0$, se determina al calcular la velocidad promedio en el intervalo $[t_0, t_1]$. Cuando t_1 se acerca a t_0 , la velocidad promedio típicamente se acerca a un número único, el cual es la velocidad instantánea. Lo anterior significa, que es un instante en donde el intervalo es muy pequeño. Este número se conoce como un límite, el cual se puede expresar matemáticamente como:

,v instantanea.= „lim- $t \rightarrow t_0$.-, v promedio.

- i) Sustituya la velocidad promedio del inciso h, de la expresión de la velocidad instantánea. En donde $t_0 = 1$.

- j) Calcule la velocidad instantánea utilizando la expresión anterior.

Parte II (con CAS): Concepto Informal del Límite

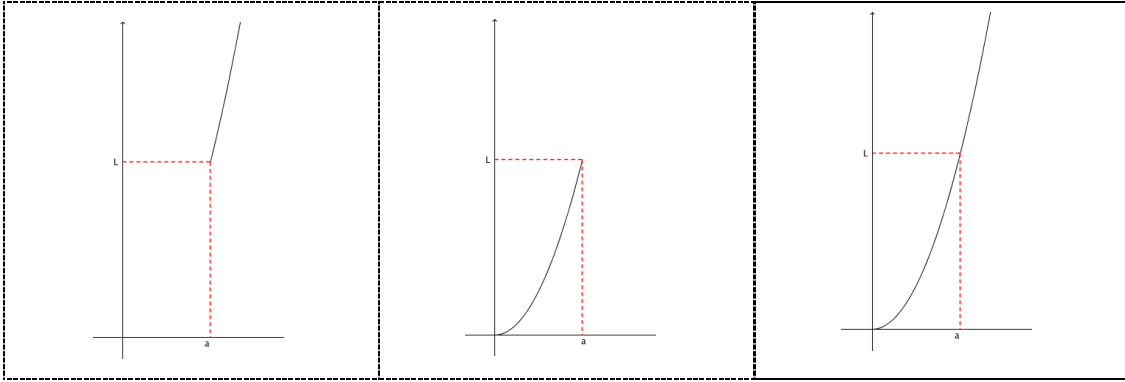
El límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se refiere a un límite de *dos-lados*; cuándo $f(x)$ se acerca a L para valores de $x < a$ y para $x > a$. Para algunas funciones, es conveniente analizar límites de *un lado* denominados límites de mano izquierda y de mano derecha. La definición se puede resumir como:

1. **Límite de mano derecha:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x > a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x > a$, se escribe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la derecha es igual a L .
2. **Límite de mano izquierda:** Suponga que f es definida para todos los valores de x cercanos a a y $x < a$. Si $f(x)$ es arbitrariamente cercana a L para todos valores suficientemente cercanos a a con $x < a$, se escribe $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ y se dice que el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a por la izquierda es igual a L .

El l-imite de una función existe cuando el límite por la izquierda es igual que el límite por la derecha es decir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ siempre y cuando $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

a) Considere las siguientes gráficas y relacione la gráfica con el tipo de límite que se está tomando.

i) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$; ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$; iii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$



b) Grafique la función $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$. Observe la gráfica y la ecuación de la función, ¿existe algún valor de x que no puede tomar? ¿Cuál es y por qué?

c) Compruebe utilizando lo siguiente: Coloque un punto sobre la gráfica de la función y deslice ese punto a lo largo de la gráfica, observe que coordenadas tiene el punto ¿Qué sucede cuándo $x = 2$?

d) Utilizando un incremento de trazo de 0.01, complete la siguiente tabla.

x	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2	2.01	2.02	2.03	2.04	2.05
y											

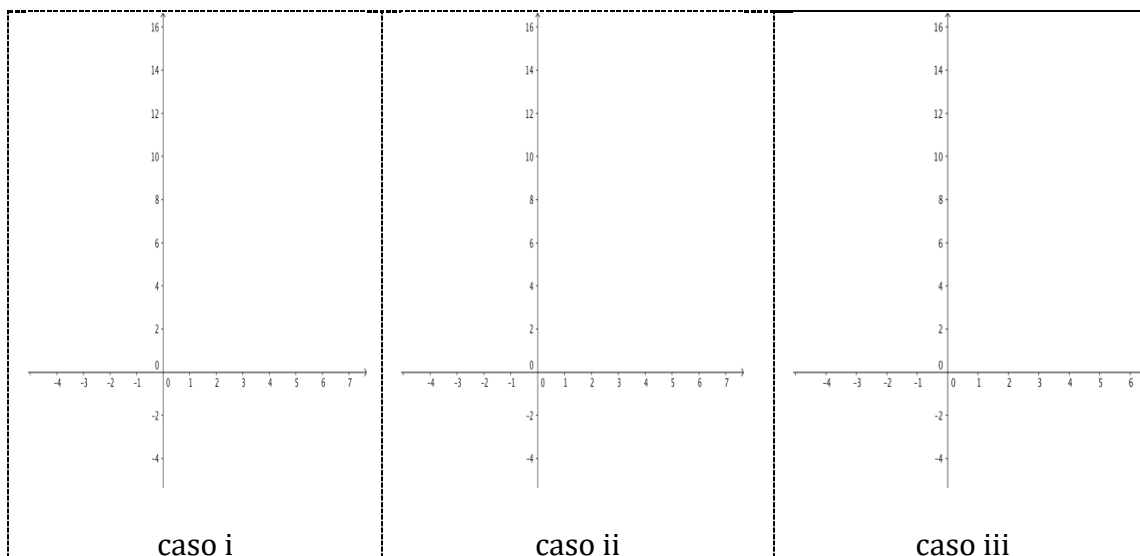
Considere las expresiones: i) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

e) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso i)?

f) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso ii)?

g) De la tabla anterior, ¿qué valores utilizaría para el caso iii?

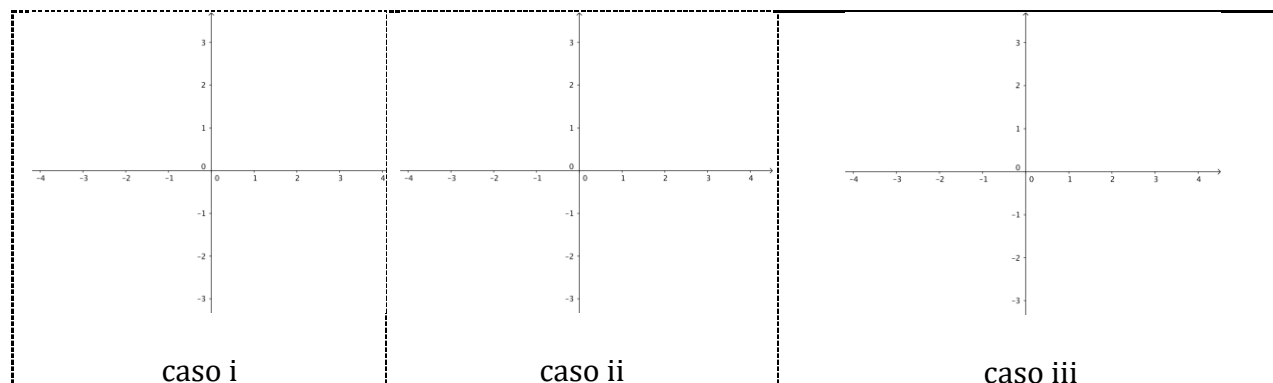
h) Represente gráficamente los casos i, ii, y iii.



i) Repita el inciso d para la función, $f(x) = \frac{|x|}{x}$. (Para introducir el módulo de valor absoluto, utilice `abs(x)`).

x	-0.05	-0.04	-0.03	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y											

j) Represente gráficamente: i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$, ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$



k) Relacione el inciso h y el j; ¿qué observa?

l) Encuentre el valor de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, utilizando las repuestas de los incisos del d al h.

m) Encuentre el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ utilizando las respuestas de los incisos i y j.

n) ¿Qué relación existe entre el límite, límite de la derecha y límite de la izquierda?

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala⁹, Lilia López Vera¹⁰, G. Eréndira Núñez Palenius⁹

Actividad 5: Líneas Secantes y Tangentes

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

Parte I (con lápiz y papel): Concepto de Línea Secante y Tangente

a) Complete la siguiente tabla. Donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P_1	P_2	$y_2 - y_1$	$x_2 - x_1$	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	(8, 9)			
(3, 0.875)	(6, 2)			
(3, 0.875)	(5, 1.125)			
(3, 0.875)	(4, 1)			
(3, 0.875)	(3.5, 0.984375)			
(3, 0.875)	(3.1, 0.908875)			
(3, 0.875)	(3.05, 0.892828)			
(3, 0.875)	(3.01, 0.878713)			
(3, 0.875)	(3.005, 0.876866)			
(3, 0.875)	(3.001, 0.875375)			

⁹ Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.

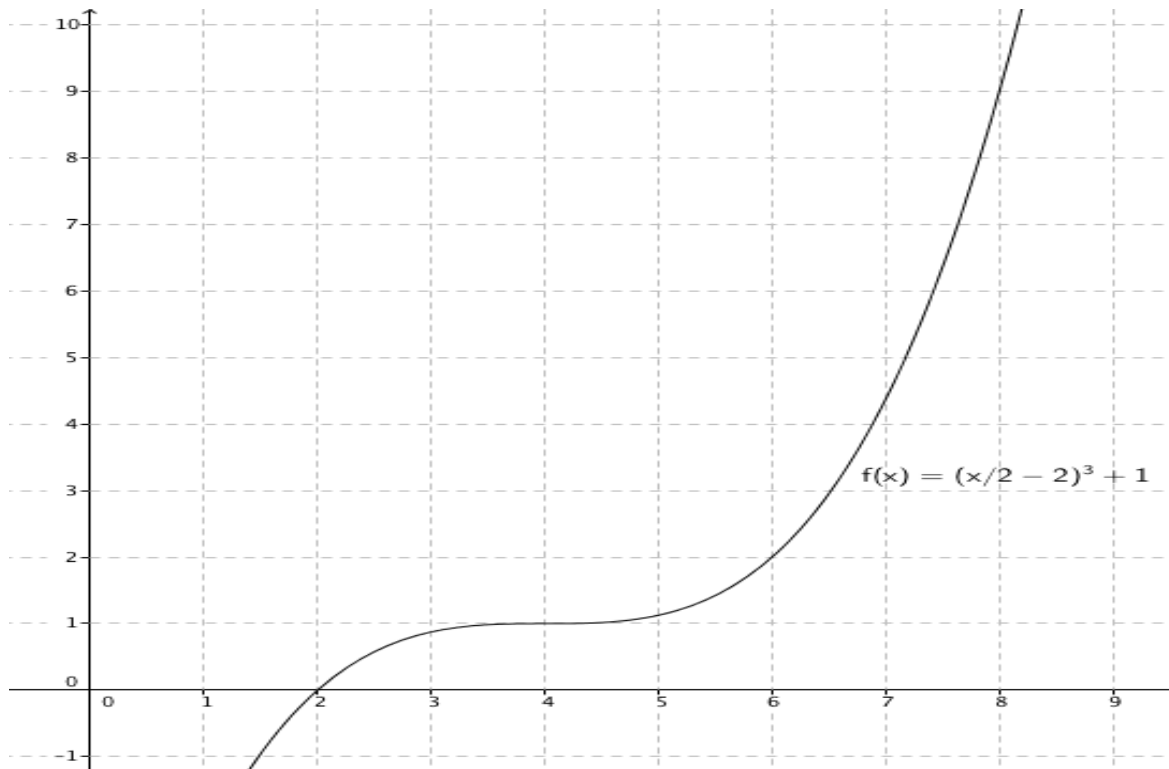
¹⁰ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

b) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior, en la siguiente gráfica.

c) Complete la siguiente tabla, donde $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$

P ₁	P ₂	y ₂ - y ₁	x ₂ - x ₁	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3, 0.875)	(8, 9)			
(5, 1.125)	(8, 9)			
(6, 2)	(8, 9)			
(7, 4.375)	(8, 9)			
(7.5, 6.35938)	(8, 9)			
(7.9, 8.41488)	(8, 9)			
(7.95, 8.70375)	(8, 9)			
(7.99, 8.94015)	(8, 9)			
(7.995, 8.97004)	(8, 9)			
(7.999, 8.994)	(8, 9)			

d) Grafique las líneas rectas de la tabla anterior en la siguiente gráfica.



e) Observe las tablas del inciso a y c, ¿qué observa de las diferencias de x ?

f) ¿Qué significa " $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ "?

g) ¿Cuáles de los siguientes casos, representan que la diferencia de x tiende a cero?

i) 1

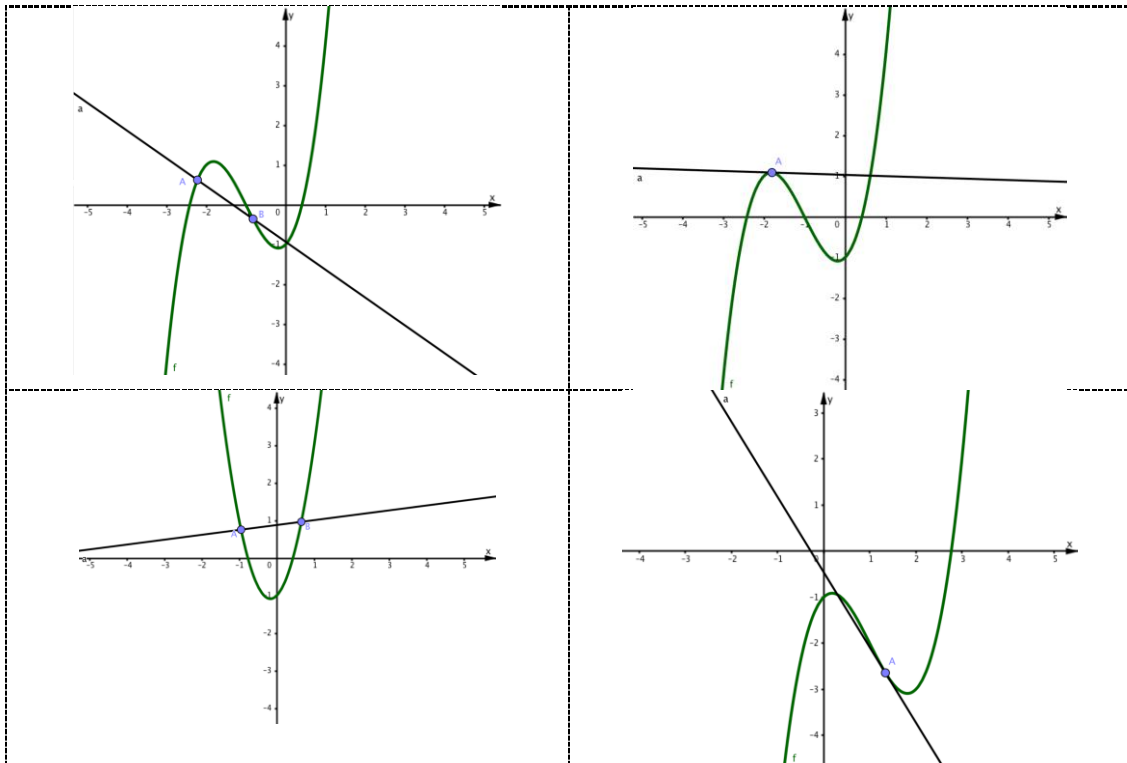
ii) 0.4

iii) $x_2 - x_1 \rightarrow 0$

iv) 0.00001

v) $\frac{1}{10000}$

h) Relacione los siguientes conceptos, con su correspondiente gráfica: línea secante y línea tangente.

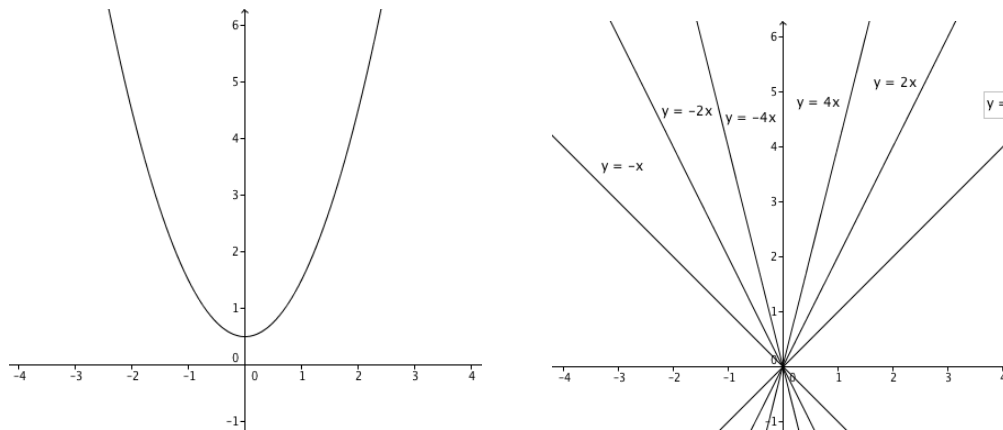


- i) Con sus palabras y utilizando como referencia el inciso anterior, explique el concepto de línea secante y línea tangente.

- j) ¿Qué entiende por velocidad promedio y velocidad instantánea?

- k) Considere la función $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$ y los incisos a y c, ¿cuál es la pendiente de la tangente en $x=3$ y $x=8$?

- l) Considere la función $y = x^2 + 0.5$. En la siguiente gráfica, trace la línea tangente en $x = -2, -1, 1, \text{ y } 2$.



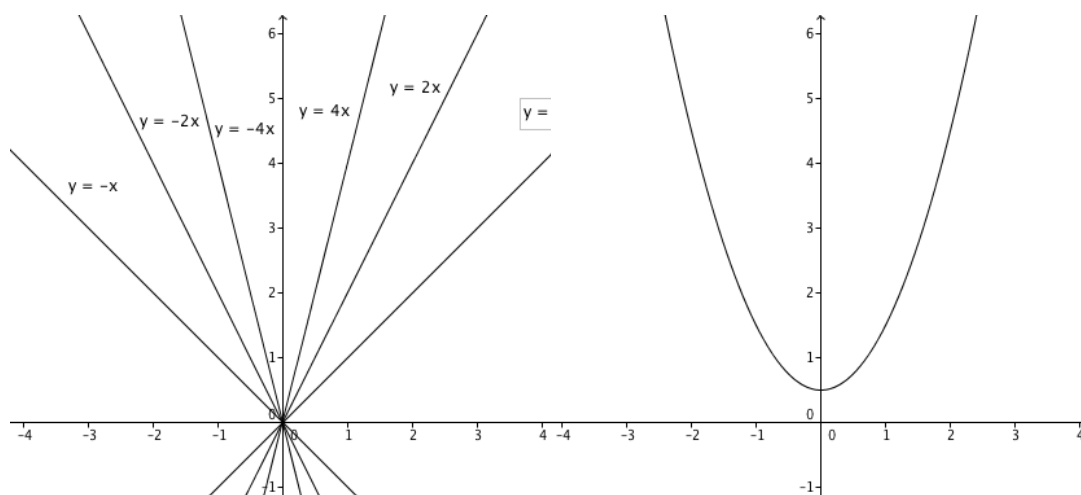
- m) Utilizando la gráfica con las líneas rectas (figura de la derecha), aproxime el valor de la pendiente de las tangentes con apoyo de escuadras.

Tangente en (x)	Pendiente aproximada
-2	
-1	
1	
2	

- n) Calcule las pendientes de las líneas tangentes en los puntos indicados y muestre la operación realizada.

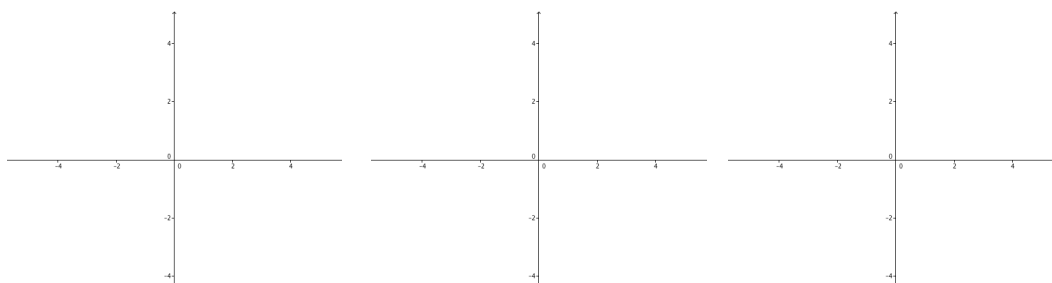
Tangente en (x)	Operación	Pendiente
-2		
-1		
1		
2		

- o) Utilizando las pendientes de la tabla anterior, trace la línea tangente en el punto correspondiente, apoyándose en las rectas de referencia.



- p) Compare las líneas tangentes trazadas en los incisos “l” y “o”, ¿qué observa?

- q) Considere las funciones $-x^2$, x^3 y e^x . Trace las curvas correspondientes y las tangentes en los puntos: $x = -2, 0, 1, 2$ y 3 . Complete la tabla indicando la pendiente de la tangente.

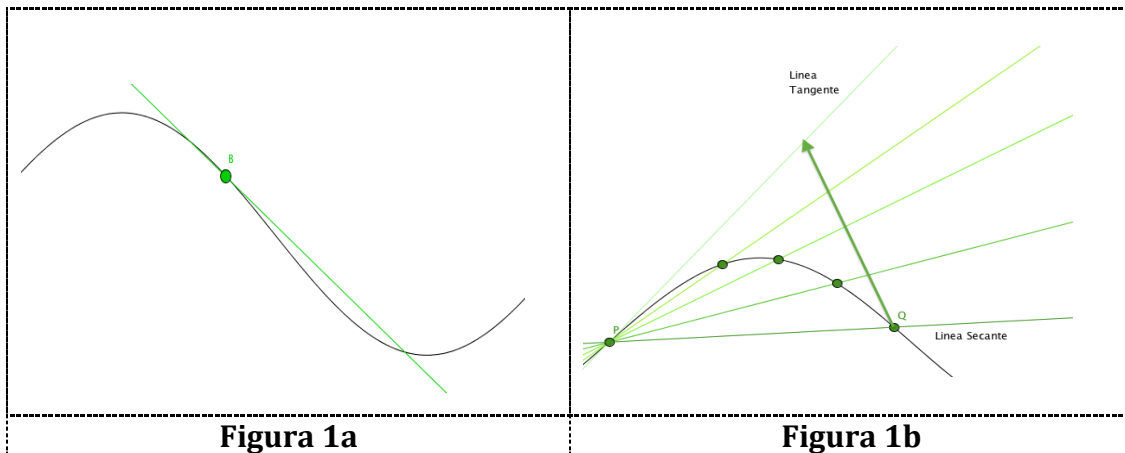


x	$-x^2$	x^3	e^x
-2			
0			
1			
2			
3			

r) Elija la mejor frase para completar la declaración:

Las pendientes en una gráfica de cualquier función son: siempre iguales, siempre diferentes, a veces iguales o a veces diferentes.

En geometría euclidiana, una línea es tangente a un círculo si intersecta a dicho círculo solamente en un punto. Esta definición es adecuada para círculos, pero no apropiada para curvas en general. Observando la figura 1a, la línea tangente para el punto A toca la curva en otros puntos.



Observando lo anterior, debemos encontrar otra definición para la aplicación de líneas tangentes para curvas. Para este fin, observe la figura 1b. Nos interesa la línea tangente en la curva en el plano xy. La línea que pasa por P y Q, es una línea secante. Si movemos el punto Q a lo largo de la curva hacia el punto P, entonces la línea secante girará hacia una *posición limitante*. Dicha *posición limitante*, es lo que se llama, línea tangente en el punto p.

Parte II (con CAS): Relación a Límites

En el problema anterior, la pendiente de la línea tangente para el punto (3, 0.875) se calculó gráficamente. Analíticamente la pendiente se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1 - 0.875}{x - 3} = \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$$

a) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla.

	A	B
♦		$\frac{\left(\frac{a}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{a - 3}$
1	2.9	
2	2.95	
3	2.99	
4	2.995	
5	2.999	
6	3	
7	3.001	
8	3.005	
9	3.01	
10	3.05	
11	3.1	

b) ¿A qué es igual $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$?

c) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 0.125}{x - 3}$? Explique su razonamiento.

d) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en $x = 3$, ¿qué observa?

e) ¿Cómo sería la pendiente para la función $y = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^3 + 1$ en el punto (8, 9)?

f) Utilizando la hoja de cálculo dentro de CAS, complete la siguiente tabla. La columna B contiene la ecuación de la pendiente obtenida del inciso anterior.

	A	B
♦		□
1	7.9	
2	7.95	
3	7.99	
4	7.995	
5	7.999	
6	8	
7	8.001	
8	8.005	
9	8.01	
10	8.05	
11	8.1	

g) ¿A qué es igual $\lim_{x \rightarrow 8^-} m$ y $\lim_{x \rightarrow 8^+} m$?

h) Con base en los cálculos anteriores, ¿a qué es igual $\lim_{x \rightarrow 8} m$? Explique su razonamiento.

i) Compare el límite del inciso c y la pendiente de la tangente en $x = 8$, ¿qué observa?

j) ¿Qué relación observas entre la pendiente de la tangente en un punto para una función y el límite de la misma en el mismo punto?

k) ¿A qué se debe lo anterior?

Parte III (Simbolización): Ecuación de la Pendiente de la Línea Tangente

La pendiente de una línea secante se puede expresar de la siguiente manera:

$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a) Explique en sus palabras, qué es la pendiente de la tangente.

b) Escriba una expresión algebraica que simbolice lo que acaba de decir en el inciso anterior.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala¹¹, Lilia López Vera¹², G. Eréndira Núñez Palenius¹¹

Actividad 6: Función Derivada

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

Parte I (Simbolización): Ecuación Convencional de la pendiente de la Tangente

Una forma convencional de expresar la pendiente de la línea tangente es la siguiente:

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} m_{sec}$$

- a) Compare la ecuación convencional anterior, con la que usted escribió en la actividad pasada (inciso b de la parte III). ¿Observa diferencias? Si es un sí, ¿cuáles son?

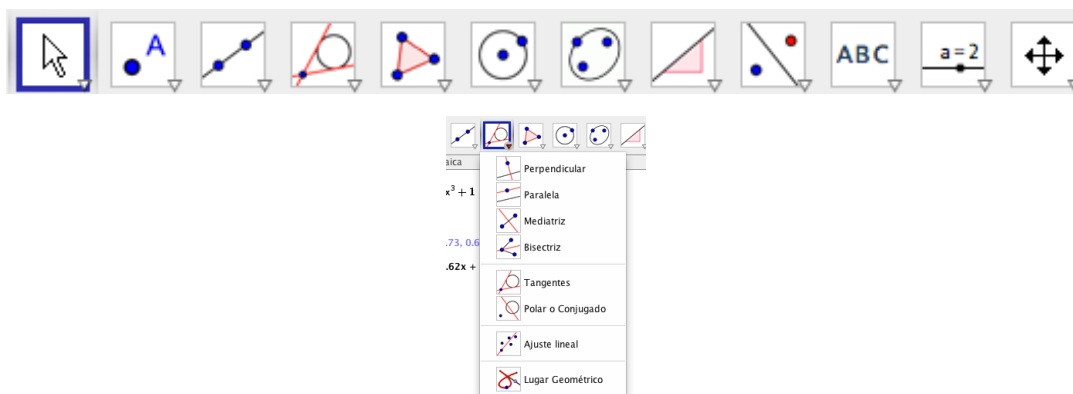
- b) Si hay diferencias, ¿es porque faltó considerar algo? En caso afirmativo, ¿qué fue?

¹¹ Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.

¹² Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

Parte II (con CAS): Función de las Pendientes de la Línea Tangente

Grafique la función x^3+1 , coloque un “punto” sobre la función, Dentro del “menú de grafica”



Seleccione “Tangente” y seleccione el punto sobre la función para que aparezca la tangente. Posteriormente mida el valor de la pendiente. Haga un punto que tenga coordenadas (x,m).

Abra una hoja de cálculo, llene la columna A con los valores de “x” y la columna B con los

valores de “m”. Dentro de **Menu** , elija **Datos y Estadísticas**

 y seleccione “Análisis de regresión de dos variables” Ahora deben aparecer los datos graficados.

Se puede hacer un ajuste de datos para los datos graficados. Dentro de la gráfica, presione “Modelo de Regresión”.

- a) De los pasos anteriores, se obtuvo una ecuación de cuarto orden. Escriba los coeficientes de la ecuación.

x^4 :

x^1 :

x^3 :

x^0 :

x^2 :

- b) Observe los valores de los coeficientes, ¿se pueden reducir o eliminar unos? ¿Por qué?

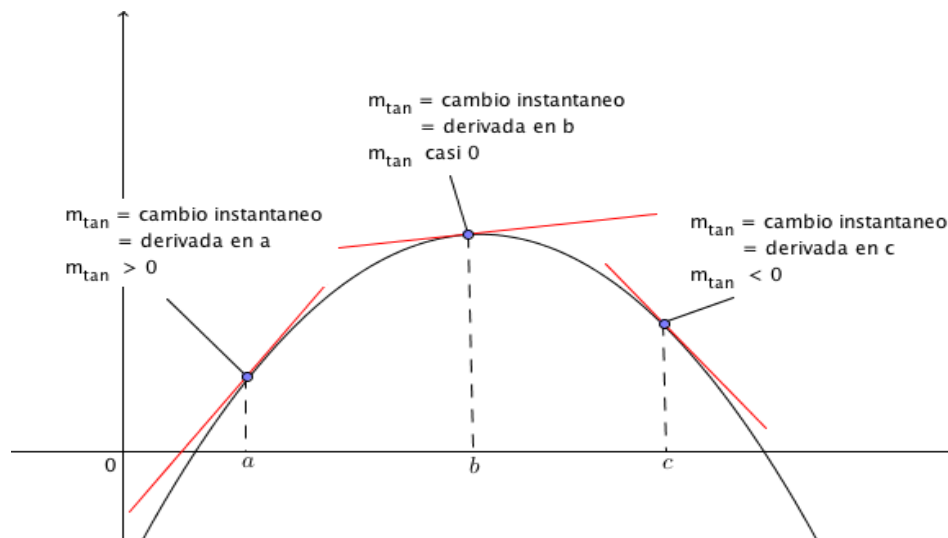
c) Considerando lo anterior, ¿cómo queda la ecuación?

d) Se obtuvo una gráfica de x_t contra m_t . ¿Qué representa m_t ?

e) Considerando su respuesta del inciso anterior, ¿qué representa la función obtenida en el inciso a?

Parte III (con lápiz y papel): Concepto de Derivada

En los incisos anteriores, se calculó la pendiente de una línea tangente en un punto fijo de la curva. Si este punto se mueve a través de la curva, la línea tangente también cambia y por lo general, su pendiente cambia (vea figura 1). Por esta razón, la pendiente de la línea tangente para la función f también es una función de x , llamada la derivada de f .



Dejamos que f' (se lee como f prima) denote la función derivada para f , lo cual significa que $f'(a)$ cuando exista, es la pendiente de la línea tangente para la gráfica de f en $(a, f(a))$. Utilizando la definición anterior para la pendiente de la línea tangente, tenemos:

$$f'(a) = m_{tan} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En términos más generales, se puede reemplazar el a con x para llegar a la definición de la función derivada. La derivada de f es la función:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista. Si $f'(x)$ existe, decimos que f es diferenciable en x . Si f es diferenciable en cada punto del intervalo abierto I , decimos que f es diferenciable sobre I .

Para encontrar la derivada de la función $f(x) = x^3 + 1$, hacemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - (x^3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3hx + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3hx + h^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(x) = 3x^2$

a) Relacione la ecuación $f'(x)$ obtenida con su función de la parte II, ¿qué observa?

Otras notaciones que se manejan son las siguientes:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Además de $f'(x)$ y $\frac{dy}{dx}$, otras formas comunes de escribir la derivada incluyen:

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad D_x f(x), \quad y \quad y'(x)$$

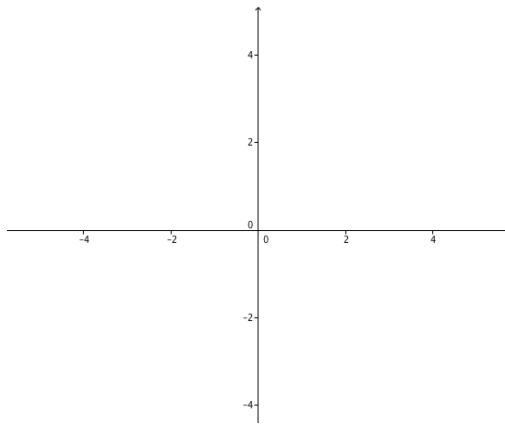
b) ¿Cuál es la derivada de una constante?

c) Considere la función, $f(x) = 3$. Grafique la función, ¿qué representa?

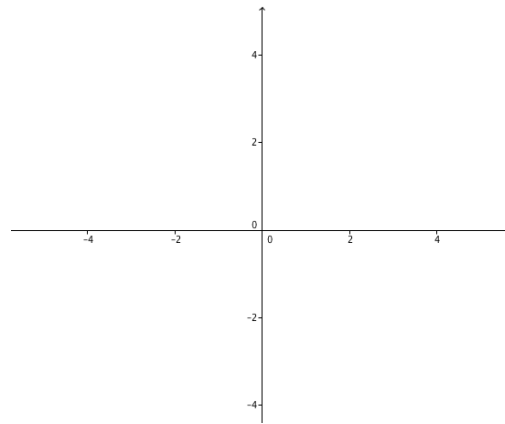
d) ¿Cuál es la derivada de la función, $f(x) = 3$ y por qué?

e) Derive las siguientes funciones: x , x^2 , x^4 y x^7 . Observando las derivadas, ¿cómo puede deducir $\frac{d}{dx}x^n$?

- f) Considere la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$. Grafique la función $f(x)$ en el eje de la izquierda y $f'(x)$ en la derecha. Además, escriba la ecuación de $f'(x)$ debajo de la gráfica.



$$f(x) = x^3 + x^2 + x$$



$$f'(x) =$$

- g) Utilizando la información anterior, calcule la pendiente de la tangente de $f(x)$ en el punto $x = 3$.

- h) ¿Qué información utilizó para responder el inciso anterior? ¿Por qué?

- i) Supongan que $f(x)$ y $f'(x)$ están dados, ¿qué indica $f'(3)$ con respecto a la función $f(x)$?

- j) Si $f(x)$ está definida, ¿cómo calcularía la pendiente de la tangente en cualquier punto de x ? Explique su procedimiento.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE PARA ENTENDER EL CONCEPTO DE FUNCIÓN DERIVADA Y FUNCIÓN INTEGRAL A TRAVÉS DE LAS RAZONES DE DIFERENCIAS Y LAS ACUMULACIONES

Actividades capítulo 8: guía para el profesor

José Carlos Cortés Zavala¹³, Lilia López Vera¹⁴, G. Eréndira Núñez Palenius¹³

Actividad 7: Aplicaciones

Líder:

Calculadora:

Hoja de Trabajo:

Número de Equipo:

Hora de Inicio:

Hora de Terminación:

A. Puntos Críticos y Su Significado

Parte I (con lápiz y papel): Análisis de Funciones: Creciente, Decreciente y Concavidad

Los términos *creciente*, *decreciente* y *constante* son utilizados para describir el comportamiento de una función al moverse de la izquierda a la derecha. Su comportamiento depende de los valores de $f(x)$.

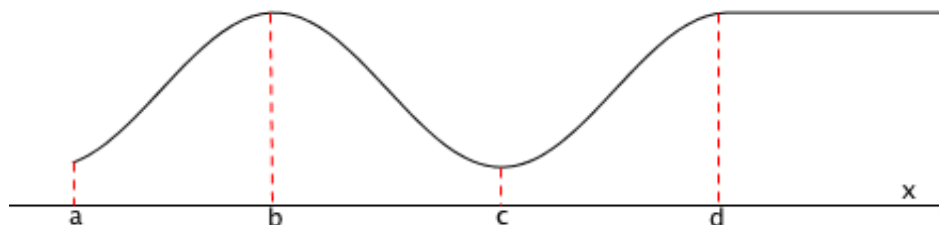


Figura 1.

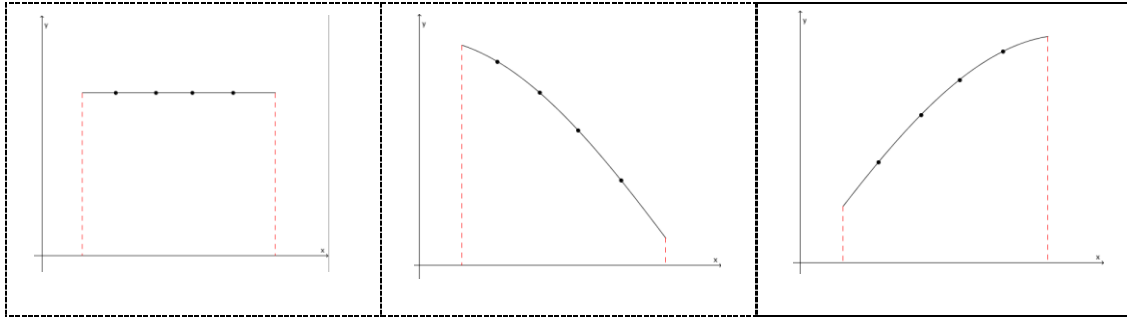
a) Considere la figura 1, completa la siguiente tabla con los términos *creciente*, *decreciente* o *constante*.

Intervalos de x	Comportamiento de la función
a – b	
b – c	
c – d	
d – ∞	

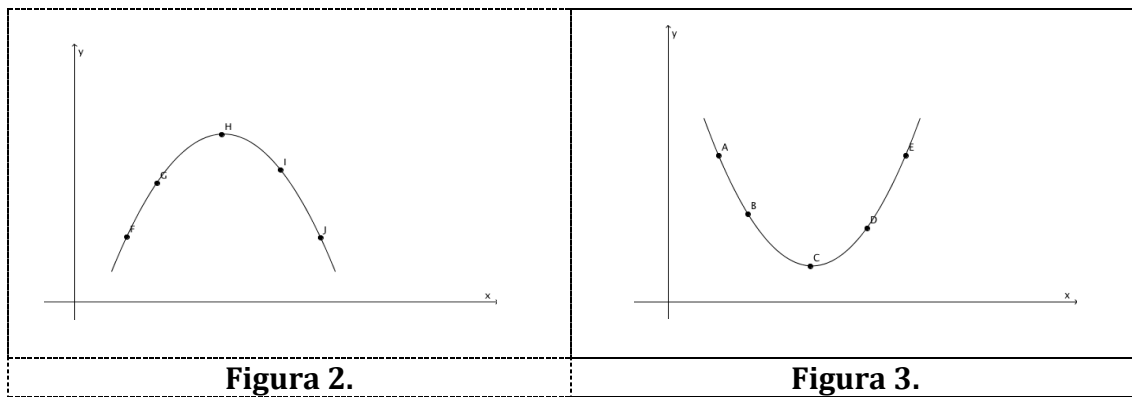
¹³ Facultad de Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana, México.

¹⁴ Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, México.

- b) En cada una de las siguientes figuras se encuentran 4 puntos. Para cada punto trace la tangente.



- c) Considere las tangentes del inciso anterior. ¿Qué puede concluir de los valores de las tangentes para una función *creciente*, *decreciente* y *constante*?



- d) Observe la figura 2, ¿qué representa el punto C (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

- e) Observe la figura 3, ¿qué representa el punto H (máximo o mínimo)? ¿Qué observa con respecto a las tangentes de cada uno de los puntos de esa figura?

- f) Recordando que una derivada representa una tangente y analizando sus respuestas de los incisos d y e, ¿qué es el valor de la derivada en un máximo o mínimo? Este punto se conoce como un punto crítico.

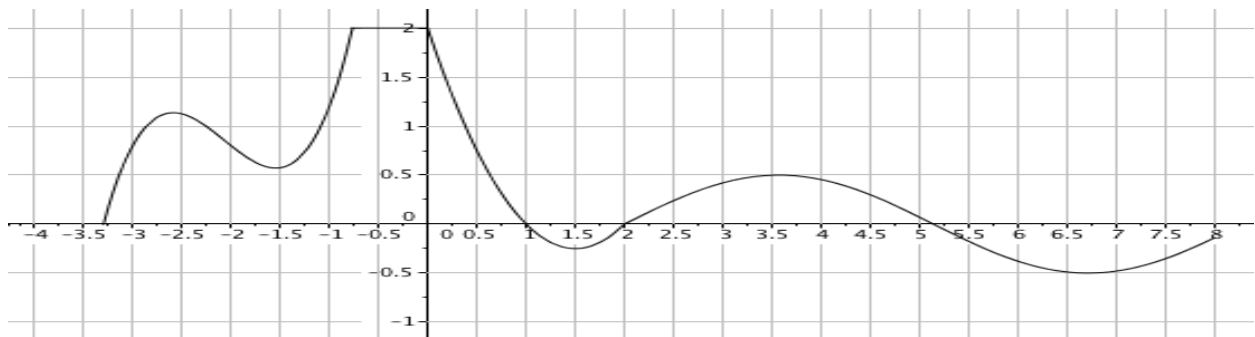


Figura 4.

- g) Observando la figura 4, ¿cuáles serían los puntos críticos de la primera derivada? ¿Por qué?

- h) Considere la figura 4, completa la siguiente tabla. En la columna “Intervalo”, escriba los intervalos que están separados por los puntos críticos. La columna “Comportamiento” se refiere a si la función es creciente o decreciente y la columna “Valor de f'' ” se refiere a si la derivada es positiva o negativa.

Intervalo	Comportamiento	Valor de f'

i) ¿Qué relación encuentra entre el comportamiento de la función y el valor de la derivada?

j) Observe la figura 4 y los incisos anteriores, si existe un punto crítico, ¿cómo se puede clasificar como máximo o mínimo con respecto a la primera derivada?

k) Regrese a la figura 4, ¿en qué valores de x existen mínimos? ¿En qué punto se encuentra el mínimo absoluto?

l) De la figura 4, ¿en qué valores de x existen máximos? ¿En qué punto se encuentra el máximo absoluto?

- m) ¿Qué entiende como un máximo/mínimo absoluto y un máximo/mínimo relativo? Matemáticamente ¿cómo se expresa su observación?

Aunque el signo de la derivada de f indica en dónde la gráfica de f es creciente o decreciente, no indica la dirección de la *curvatura*. Por ejemplo, la función es creciente en ambos lados del punto en la figura 5, pero en el lado izquierdo tiene una curvatura hacia arriba (“retiene agua”) y en el lado derecho tiene una curvatura hacia abajo (“derrama agua”). En intervalos donde la gráfica de f tiene una curvatura hacia arriba se dice que f es *cóncava hacia arriba*, y en intervalos donde la gráfica de f tiene una curvatura hacia abajo se dice que f es *cóncava hacia abajo*. La curvatura también se conoce como la concavidad.

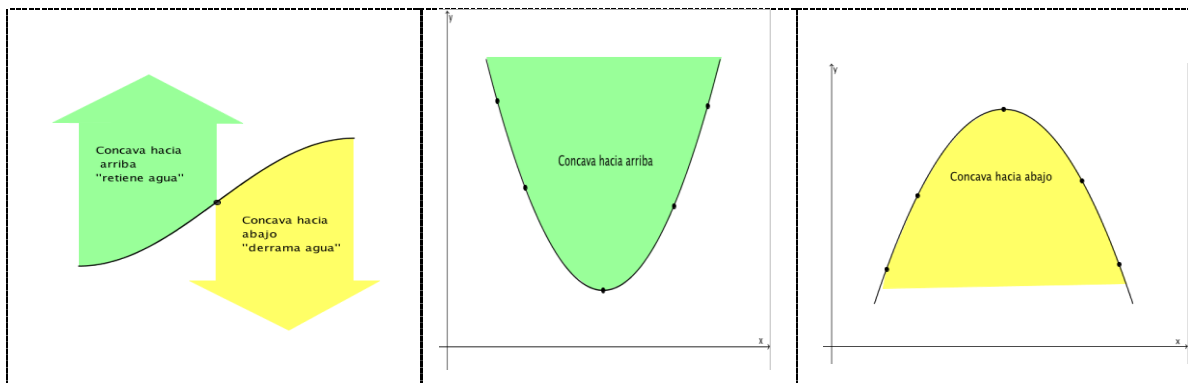


Figura 5.

- n) Para las figuras en los puntos indicados, estime y trace la línea tangente correspondiente.

- o) Observe su respuesta del inciso n, ¿qué observación tiene con respecto a las pendientes para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo (las pendientes aumentan o disminuyen)? ¿A qué conclusiones llega con respecto al valor de la derivada de la función f' para curvas cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo?

p) Si la primera derivada f' es creciente, ¿cómo será la segunda derivada f'' ?

q) Si f' es decreciente, ¿cómo será f'' ?

r) ¿Qué relación existe entre el valor de la segunda derivada f'' con respecto a la concavidad de la función f ?

Parte II (con CAS): Comprobación Gráfica

a) Grafique la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ¿Qué tipo de concavidad observa? ¿Cambia la concavidad en algún intervalo? Compruebe su observación utilizando la segunda derivada de la función.

b) Grafique la función $f(x) = x^3$. ¿Qué observa de la concavidad? ¿Cambia en algún punto? ¿Cuál es la segunda derivada de la función?

- c) Considere los incisos a y b, en el punto donde cambia la concavidad, ¿cuánto vale la segunda derivada en dicho punto?

- d) Elija dos (2) puntos de la función del inciso b, uno en donde hay concavidad hacia arriba y otro en donde hay concavidad hacia abajo. ¿Qué valores toma la segunda derivada en dichos puntos?

En los incisos anteriores, se observa que hay un punto donde cambia la concavidad, dicho punto se conoce como el *punto de inflexión*.

- e) Si en un punto de inflexión hay un cambio de concavidad y observando la respuesta del inciso anterior, ¿cuáles serían los intervalos de concavidad?

Grafique las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $f'(x)$ y $f''(x)$ en la misma pantalla. Utilice como referencia las gráficas para responder los siguientes incisos.

- f) ¿Qué relación observa entre la primera derivada y la función? Considere los máximos y mínimos y los intervalos crecientes y decrecientes en su respuesta.

- g) ¿Qué relación observa entre la segunda derivada y la función? Considere los máximos y mínimos, concavidad y los intervalos de concavidad.

En los incisos anteriores, se observa la importancia de encontrar los ceros de una ecuación. En el sistema CAS, existe el comando “x=”. Dicho comando encuentra los ceros de la función.

- h) Introduzca x^3+4x^2+x-6 , x y posteriormente oprima el icono “x=” , ¿qué sucede y qué representan esos valores? Compruebe esos valores.

Para los siguientes incisos utilice los comandos “x=” , **derivar**  y sustituye , etc. pero sin utilizar la gráfica. Además considere que $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2$.

- i) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos? ¿Cuáles son los intervalos y, los máximos y mínimos?

- j) ¿Qué procedimiento utilizaría para encontrar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión? ¿Cuáles con los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión?

- k) Compruebe los incisos j y k al graficar la función dentro del sistema CAS. ¿Observa algunas diferencias?

- l) Reflexione sobre la actividad y resuma el efecto que tienen las derivadas (primera y segunda) sobre la gráfica de la función.

