



COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

# Matemáticas

# 1

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos

Jorge Ruperto Vargas Castro  
María Antonieta Rodríguez Ibarra  
Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez  
Martha C. Villalva Gutiérrez  
Silvia Elena Ibarra Olmos  
Agustín Grijalva Monteverde  
Maricela Armenta Castro  
Ramiro Ávila Godoy  
Manuel Alfredo Urrea Bernal  
José Luis Soto Munguía  
José María Bravo Tapia

PRIMER SEMESTRE  
REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

# Matemáticas 1

**Bufete de Asesoría en Educación  
Matemática de la Universidad de Sonora:**

- Jorge Ruperto Vargas Castro
- María Antonieta Rodríguez Ibarra
- Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez
- Martha C. Villalva Gutiérrez
- Silvia Elena Ibarra Olmos
- Agustín Grijalva Monteverde
- Maricela Armenta Castro
- Ramiro Ávila Godoy
- Manuel Alfredo Urrea Bernal
- José Luis Soto Munguía
- José María Bravo Tapia



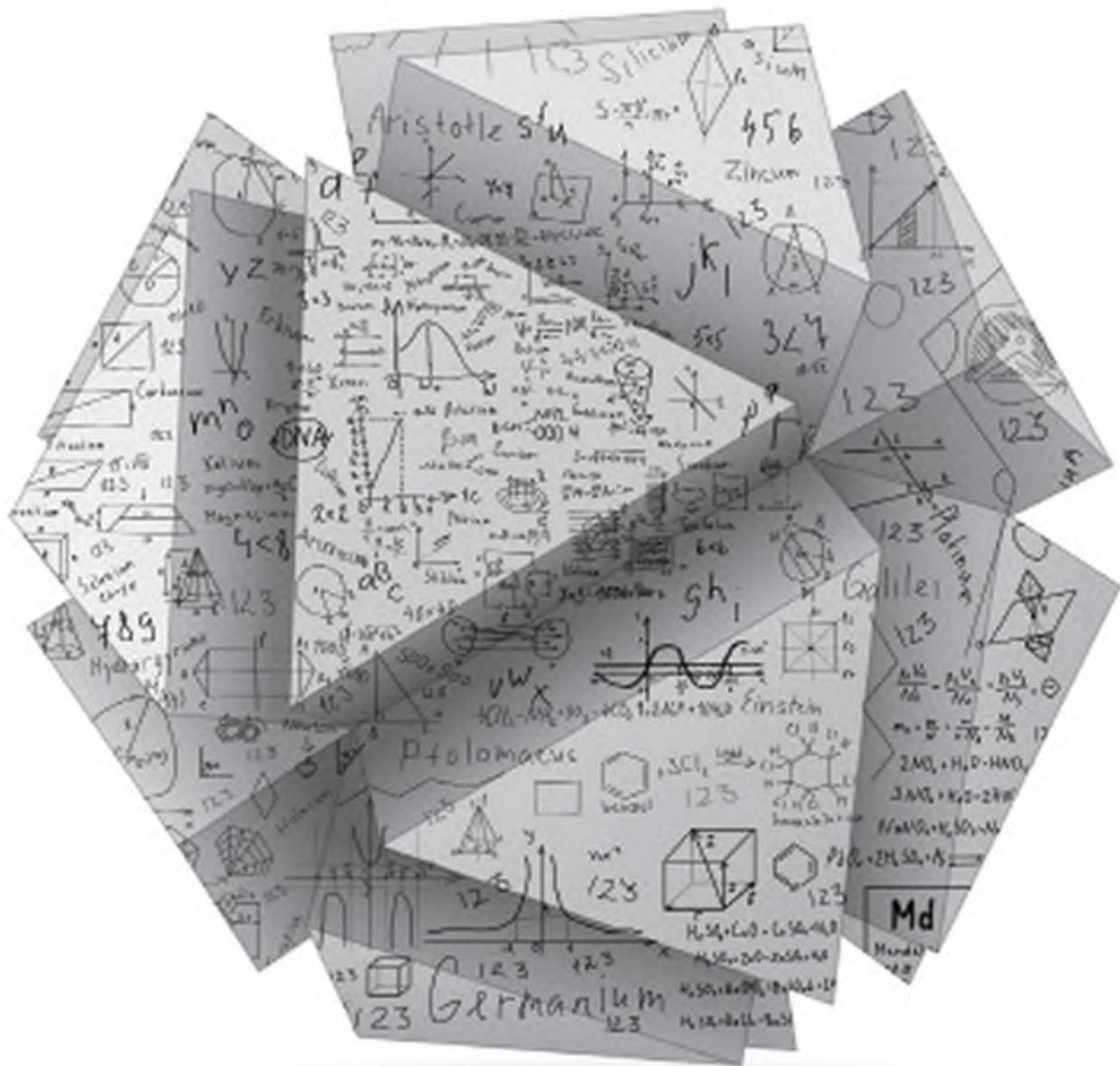


COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

# Matemáticas

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos

# 1



## COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

### Director General

Profr. Julio Alfonso Martínez Romo

### Director Académico

Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

### Director de Administración y Finanzas

C.P. Jesús Urbano Limón Tapia

### Director de Planeación

Ing. Raúl Leonel Durazo Amaya

**Desarrollo Editorial:** Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.

**Coordinación Editorial:** LDG. Luis Ricardo Sánchez Landín

**Edición:** LDG. Yolanda Yajaira Carrasco Mendoza

### Coordinación General:

Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

### Supervisión Académica:

Vanesa Guadalupe Angulo Benítez

### Coordinación Técnica:

Rubisela Morales Gispert

### Revisores:

Margarita León Vega

Concepción Valenzuela García

Joaquín Miranda Gil

Raúl Amavizca Carlton

Miguel Ángel Barceló Lara

**Contenido:** Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

## MATEMÁTICAS 1

### Bufete de Asesoría en Educación

#### Matemática de la Universidad de Sonora:

Jorge Ruperto Vargas Castro

María Antonieta Rodríguez Ibarra

Ana Guadalupe del Castillo Bojórquez

Martha C. Villalva Gutiérrez

Silvia Elena Ibarra Olmos

Agustín Grijalva Monteverde

Maricela Armenta Castro

Ramiro Ávila Godoy

Manuel Alfredo Urrea Bernal

José Luis Soto Munguía

José María Bravo Tapia

### Derechos Reservados:

Copyright ©, 2014 Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Bld. Agustín de Vildósola, • Sector Sur

Hermosillo, Sonora. México. • C.P. 83280

**ISBN: 978-607-730-035-9**

---

#### Primera Edición: 2014

Se terminó la impresión de esta obra en Junio del 2014.

En los talleres de *Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.*

Lambda No. 216 • Fraccionamiento Industrial Delta • C.P. 37545

León, Guanajuato, México.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro No. 3681

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Bld. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México

La edición consta de 12,689 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico

<i>Mensaje del Gobernador</i> .....	IX
<i>Presentación</i> .....	X
<i>Estructura metodológica de los textos</i> .....	XI
<i>Atributos de las competencias genéricas de la asignatura</i> .....	XIV
<i>Competencias disciplinares de la asignatura</i> .....	XV
<i>Mapa de la asignatura</i> .....	XVI

## **BLOQUE 1: RESUELVE PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Empleo y desempleo de los jóvenes en México.....	02
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> ¿Por qué es importante la herramienta algebraica?.....	11
<b>Problemas</b> .....	22
<b>Autoevaluación</b> .....	24
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 1</b> .....	28

## **BLOQUE 2: UTILIZA MAGNITUDES Y NÚMEROS REALES**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> La medición: ¿sobre objetos físicos o matemáticos?.....	30
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Datos de salud reproductiva en los jóvenes y tasa de crecimiento poblacional.....	43
• <b>Secuencia didáctica 3:</b> Relación proporcional directa e inversa.....	53
<b>Problemas</b> .....	62
<b>Autoevaluación</b> .....	64
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 2</b> .....	68

## **BLOQUE 3: REALIZA SUMAS Y SUCESIONES DE NÚMEROS**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Representaciones algebraicas.....	70
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Sucesiones y series.....	75
<b>Problemas</b> .....	84
<b>Autoevaluación</b> .....	86
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 3</b> .....	90

# Contenido

## BLOQUE 4: REALIZA TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS I

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Las expresiones algebraicas y cálculo de área y volúmenes.....	92
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Los polinomios y los procedimientos para sumarlos y multiplicarlos.....	102
• <b>Secuencia didáctica 3:</b> Las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales.....	115
Problemas .....	126
Autoevaluación .....	129
Reflexiones generales relacionadas con el bloque 4 .....	134

## BLOQUE 5: REALIZA TRANSFORMACIONES ALGEBRAICAS II

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Productos notables.....	136
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Factorización.....	145
Problemas .....	160
Autoevaluación .....	164
Reflexiones generales relacionadas con el bloque 5 .....	168

## BLOQUE 6: RESUELVE ECUACIONES LINEALES I

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Interpretando información.....	170
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Las funciones lineales.....	178
• <b>Secuencia didáctica 3:</b> Ecuaciones lineales .....	186
Problemas .....	196
Autoevaluación .....	200
Reflexiones generales relacionadas con el bloque 6 .....	202

## BLOQUE 7: RESUELVE ECUACIONES LINEALES II

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Los sistemas de ecuaciones lineales. Parte 1.....	204
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Métodos para resolver SEL 2x2. Parte 2.....	216
Problemas .....	224
Autoevaluación .....	228
Reflexiones generales relacionadas con el bloque 7 .....	230

## **BLOQUE 8: RESUELVE ECUACIONES LINEALES III**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Transportando maquinaria.....	232
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Plaguicidas e insecticidas.....	243
<b>Problemas</b> .....	252
<b>Autoevaluación</b> .....	255
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 8</b> .....	256

## **BLOQUE 9: RESUELVE ECUACIONES CUADRÁTICAS**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Caída libre y tiro vertical.....	258
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Cultivo de chiltepín Sonorense.....	278
• <b>Secuencia didáctica 3:</b> Arcos en arquitectura e ingeniería .....	287
<b>Problemas</b> .....	296
<b>Autoevaluación</b> .....	304
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 9</b> .....	308

<b>Glosario</b> .....	309
<b>Referencias bibliográficas</b> .....	319





### **Joven estudiante:**

Hoy Sonora es más fuerte. Y una de sus principales fortalezas es, precisamente la enseñanza.

Gracias a tu esfuerzo, junto al de tus padres y maestros, nuestros alumnos y estudiantes son ahora primer lugar nacional de educación por tercer año consecutivo.

Este logro nos enorgullece a todos y es el ejemplo más noble de lo que resulta cuando todos trabajamos unidos, de común acuerdo.

Quiero decirte que Sonora seguirá depositando inversión, recursos y esfuerzos a la educación: nuevas preparatorias y universidades, así como la apertura del Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa ya son una realidad.

Una realidad que nos impulsa en el camino de mayor certeza y futuro, el de tu educación.

Sigue adelante en tus estudios. Puedes estar seguro que nosotros, desde el Gobierno de Sonora, redoblabamos esfuerzos a favor de una mejor enseñanza para todos.

**Guillermo Padrés Elías**  
GOBERNADOR DE SONORA  
2009 - 2015



**SONORA**  
★ ★ ★ ★ ★  
2014 | AUSTERIDAD, TRANSPARENCIA  
Y BUEN GOBIERNO



# Presentación

**E**l Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, de acuerdo con los cambios curriculares impulsados en el país, ha adoptado el modelo educativo basado en competencias.

Sobre el significado de la palabra competencia existen diferentes versiones y formas de referirse al término, pero en todas se establece que se trata de la conjunción de actitudes, valores, habilidades y conocimientos que una persona desarrolla, de tal manera que pueda enfrentar y resolver problemas, particularmente problemas no escolares. De esta manera, en la escuela se pone énfasis no sólo en los conocimientos que un estudiante pueda construir, sino fundamentalmente en su capacidad para aplicarlos en la resolución de problemas en diferentes ámbitos: familiares, laborales, profesionales, científicos y otros.

En el caso particular de este primer Módulo de Matemáticas que el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora pone a tu disposición, se presentan una serie de temáticas que deberán ayudarte a construir y desarrollar las competencias disciplinares específicas de las matemáticas como: el manejo de datos numéricos; la interpretación de información presentada de forma verbal, gráfica, numérica y algebraica; la modelación matemática de diferentes situaciones que se presentan en otros campos del conocimiento y de la vida diaria en general, por citar algunas.

También deberás desarrollar competencias genéricas que se refieren a la capacidad para articular las formas de pensamiento que vas desarrollando y los conocimientos que vas adquiriendo en las diferentes materias, por ejemplo: competencias para comunicar, para utilizar las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, para trabajar en forma colaborativa, para diseñar estrategias de solución a un problema y escoger la que se considere mejor o más adecuada, y otras más que contribuyen a tu formación integral.

Esta visión se centra en la resolución de problemas como estrategia para aprender, dejando atrás el aprendizaje memorístico. Es muy importante entonces que en este módulo trabajes atendiendo a las indicaciones del mismo y de tu profesora o profesor, trabajando en ocasiones de forma individual, en otras en pequeños equipos y en otras en discusiones grupales. Cada una de esas dinámicas tiene propósitos establecidos, relacionados con el desarrollo de conocimientos, habilidades, actitudes y valores. Este Módulo está dividido en 9 bloques temáticos. Se centra, en su parte matemática, en el desarrollo de competencias ligadas a conocimientos básicos de álgebra. En cada

# Presentación

bloque se presentan algunas secuencias de actividades didácticas que se organizan en secciones como sigue:

- **Inicio:** En esta parte las actividades que se proponen tienen el propósito de rescatar los conocimientos, actitudes y habilidades que se requieren para el nuevo conocimiento a estudiar.
- **Desarrollo:** Las actividades de esta sección plantean situaciones o problemas que te conducirán a construir nuevos conocimientos y desarrollar nuevas habilidades, en concordancia con la temática central del bloque.
- **Cierre:** En esta sección se hace un recuento de lo aprendido en las actividades de Desarrollo, se organizan y sistematizan todos los conocimientos matemáticos que surgieron en la secuencia.

Al final de cada bloque se presentan dos secciones más. En la primera, denominada Problemas, se propone precisamente una lista de problemas que pueden servir para ejercitar lo aprendido en el bloque y, en ciertos casos, para usar creativamente lo que has aprendido en problemas novedosos. En la segunda, denominada Autoevaluación, se encuentran una serie de problemas y de preguntas para la reflexión individual.

Para que la última sección te sea de utilidad es necesario que la respondas individualmente, señalando lo que ya aprendiste, tus dudas y las dificultades que aún tengas. La autoevaluación cumplirá mejor su función si tus respuestas y reflexiones las compartes con tus compañeros de clase y las comentas con tu profesor o profesora.

Finalmente, es importante enfatizar que para alcanzar los propósitos de este Módulo es indispensable tu dedicación, atención y disposición para estudiar.

LOS AUTORES





Sitios Web recomendados o confiables que puedes consultar por tu cuenta vía internet para que puedas ampliar tus conocimientos.

BLOQUE  
6



En la página Web del Congreso del Estado de Sonora aparece, entre otras la Ley de Ingresos del Estado. En ella, en el Artículo 212 G-7 encontramos una tabla que indica la manera en cómo se realiza el cálculo de la depreciación de un automóvil.

*Ley de Ingresos del Estado de Sonora*  
Artículo 212 G-7

Modelo del vehículo	Factor de depreciación
2012	0.850
2011	0.725
2010	0.600
2009	0.500
2008	0.400
2007	0.300
2006	0.225
2005	0.150
2004 y anteriores	0.075

Tabla 6.3

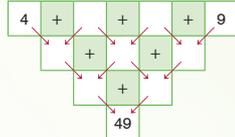
a) Asigna tres valores hipotéticos a los precios de factura de tres diferentes tipos y modelos de automóvil, para que calcules en cada caso cuál es el valor de esos vehículos en 2013.

b) Si un automóvil es modelo 2005 y su valor en 2013 es de \$ 485,000.00, ¿cuál fue su valor original?

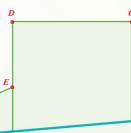
Compramos un vehículo modelo 2006, con valor actual de \$ 514,500.00, ¿cuál fue su precio de factura?



1. Encuentra los dos números naturales que faltan en el primer renglón y que permitan completar el siguiente arreglo numérico. Los números buscados son tales que su diferencia es igual a 2. Al igual que en los arreglos anteriores, las operaciones están indicadas por las flechas.



2. Sobre un segmento  $AB$  de longitud 10, se ubica un punto  $P$ . Se construye el cuadrado  $PBCD$  y luego se construye el triángulo rectángulo  $APE$ , donde  $E$  es punto medio del lado  $PD$  del cuadrado, tal como se muestra en la figura.



El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas: léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

**Problema 1.** En el rango de edad de 25 a 29 años (ver **Tabla 1.1**), al calcular el porcentaje de la población económicamente activa que está desocupada, el resultado es 6.92 %.

**¿Cuál será el porcentaje de la población económicamente activa ocupada en este rango?**

**Solución:**



Sirve para ejercitar lo aprendido en el bloque y, en ciertos casos, para usar creativamente lo que has aprendido, en problemas novedosos.



Serie de problemas y preguntas para la reflexión individual, es necesario que la respondas individualmente, con honestidad y plantear tus dudas y dificultades a tu profesor o profesora y compañeros de clase.

## COMPETENCIAS A DESARROLLAR

**BLOQUE 1**

**BLOQUE 2**

**BLOQUE 3**

**BLOQUE 4**

**BLOQUE 5**

**BLOQUE 6**

**BLOQUE 7**

**BLOQUE 8**

**BLOQUE 9**

1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

**BLOQUE 1**

**BLOQUE 2**

**BLOQUE 3**

**BLOQUE 4**

**BLOQUE 5**

**BLOQUE 6**

**BLOQUE 7**

**BLOQUE 8**

**BLOQUE 9**

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

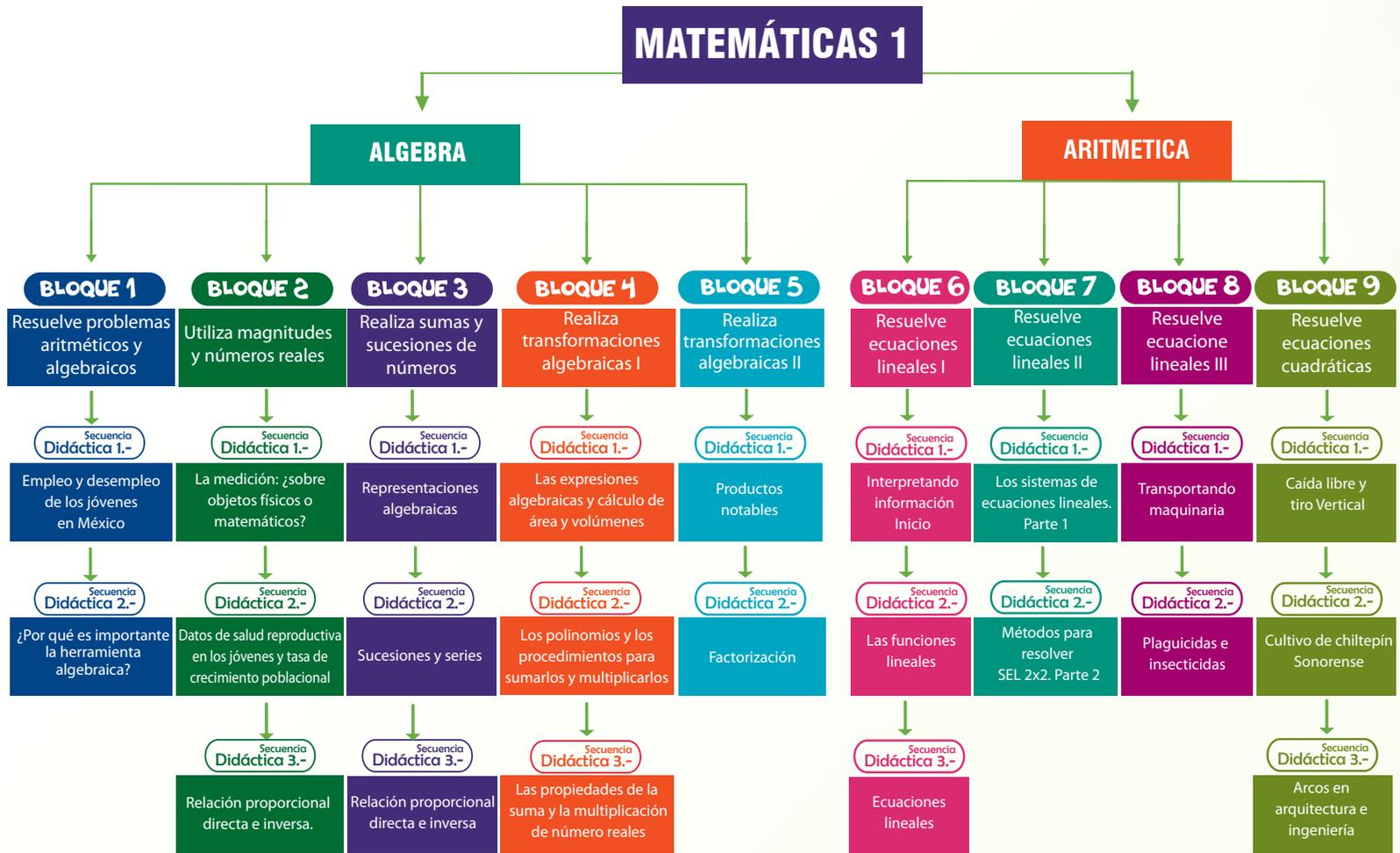
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

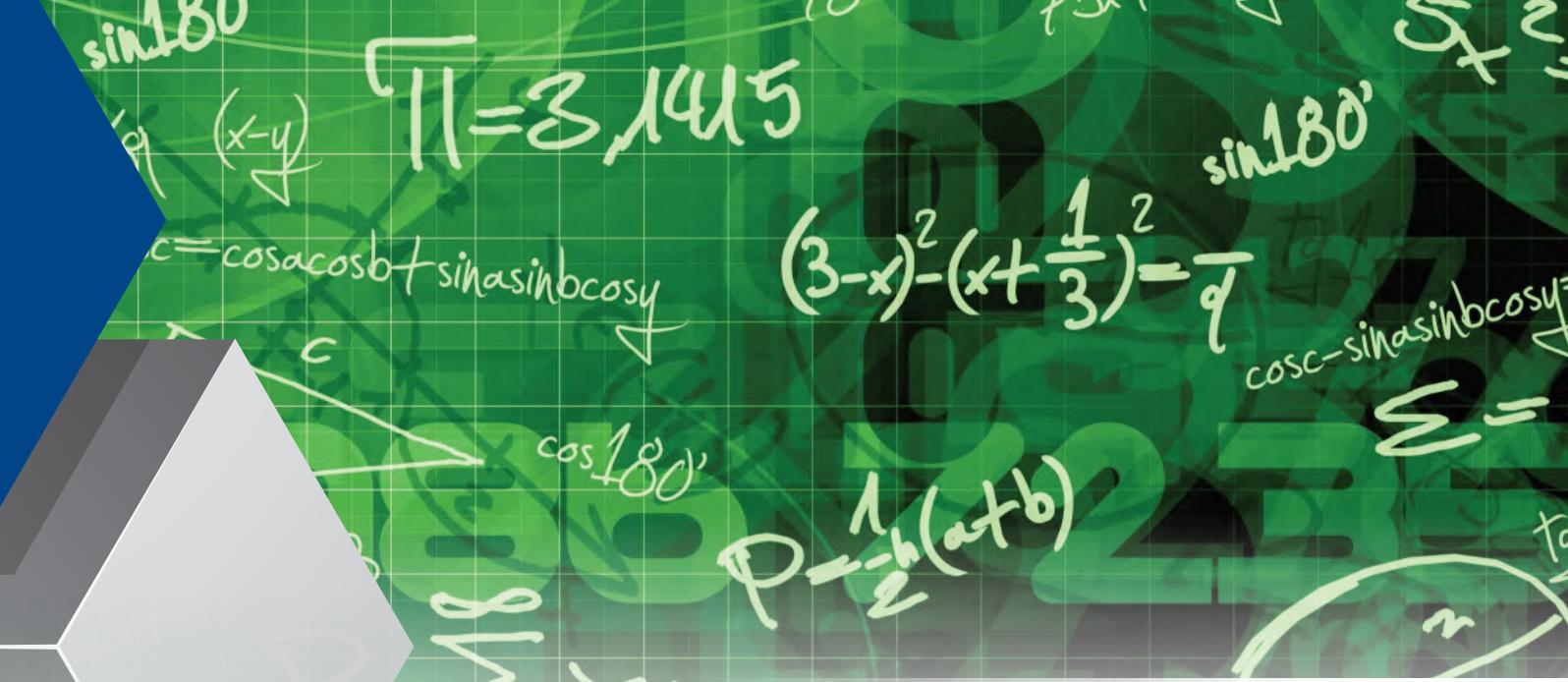
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

5. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

# MAPA DE LA ASIGNATURA





# BLOQUE 1

Resuelve problemas...  
*Aritméticos y Algebraicos*

## Introducción:

En este bloque encontrarás una serie de actividades en las que se presentan varias situaciones que deberás resolver haciendo uso de las **Matemáticas** que has aprendido en primaria y secundaria, al mismo tiempo tendrás la oportunidad de enriquecer tus conocimientos y construir otros nuevos.

En particular en este bloque se promueve que aprendas a resolver problemas utilizando **Aritmética** y que reflexiones sobre la importancia que tiene el **Álgebra** como herramienta para resolver cierto tipo de problemas, y para ello deberás interpretar mensajes cuya información se presenta en tablas, gráficas y/o textos; además, deberás aprender a escuchar las propuestas y argumentos de tus compañeros, para que tengas la oportunidad de contrastar con los tuyos, y así poder corregir o argumentar a favor de ellos según sea el caso, para esto deberás hacer uso del lenguaje propio de las **Matemáticas**.

# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

### Empleo y desempleo de los jóvenes en México

Un sector de los jóvenes de nuestro país, se ven en la necesidad de trabajar para solventar sus gastos y poder ayudarse en sus estudios, lo cual los lleva a trabajar algunas horas al día durante la semana. Una motivación importante para que los jóvenes estudien, es la posibilidad de acceder a mejores empleos que les permita mejorar su nivel de vida, así como a realizarse tanto personal como profesionalmente. En la presente actividad se analizan los datos sobre el empleo en nuestro país, centrándose al final en la situación de la población joven. La actividad está basada en los datos arrojados por la **Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo 2010 (ENOE)** realizada en conjunto por el **Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI)** y la **Secretaría del Trabajo y Previsión Social (STPS)**, en el año 2010.

Para interpretar los datos publicados sobre la **ENOE** se requieren algunos conceptos que están definidos en la publicación de los resultados de la encuesta y que analizaremos a continuación.



Actividad: 1  
Actividad Individual



Lee las definiciones de los siguientes conceptos y coméntalas con tus compañeros de equipo.

#### **Población Económicamente Activa (PEA)<sup>1</sup>.**

Personas que durante el periodo de referencia (semana en la que se aplicó la encuesta) tuvieron o realizaron una actividad económica (población ocupada) o buscaron activamente realizar una (población desocupada).

**Población ocupada.** Personas que durante la semana de referencia realizaron algún tipo de actividad económica, estando en cualquiera de las siguientes situaciones: Trabajando por lo menos una hora o un día, para producir bienes y/o servicios de manera independiente o subordinada, con o sin remuneración. Ausente temporalmente de su trabajo sin interrumpir su vínculo laboral con la unidad económica. Incluye a los ocupados del sector primario que se dedican a la producción para el autoconsumo (excepto la recolección de leña).

**Población desocupada o en desocupación abierta (población desempleada abierta).** Personas que no estando ocupadas en la semana de referencia, buscaron activamente incorporarse a alguna actividad económica en algún momento del último mes transcurrido.

**Tasa de desocupación.** Porcentaje de la población económicamente activa que se encuentra desocupada (ver población desocupada o en desocupación abierta).

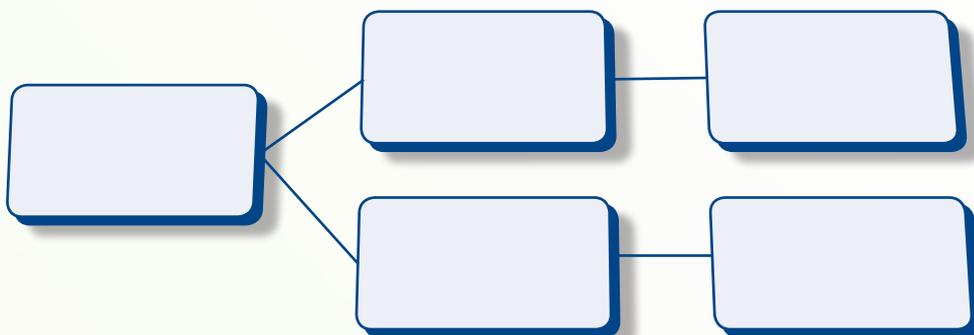


Figura 1

<sup>1</sup> Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo. ENOE 2010

**Tasa de ocupación.** Porcentaje de la población económicamente activa que se encuentra ocupada.

Con la siguiente relación de los términos que ya se han definido: **población económicamente activa**, **población ocupada**, **población desocupada**, **tasa de desocupación** y **tasa de ocupación**, llena individualmente el siguiente mapa conceptual. Sobre las líneas (conectores) que unen los conceptos, describe la relación entre los conceptos, que representan estas líneas.



A partir de las definiciones de la STPS, responde de manera individual las preguntas siguientes y argumenta tus respuestas.

- ¿Te consideras parte de la población económicamente activa?

---

- Sigue las instrucciones del profesor para intercambiar en el grupo las respuestas a la pregunta anterior. Registra en la siguiente tabla los datos proporcionados por el grupo.


- ¿Qué porcentaje de tu grupo pertenece a la población económicamente activa?
- 
- De acuerdo a la definición de la STPS, ¿a quién se considera desocupado o desempleado?
-



5. ¿Formas parte de la población ocupada o desocupada?

---

6. Sigue las instrucciones del profesor para intercambiar en el grupo las respuestas a la pregunta anterior. Registra los datos proporcionados por el grupo, en la siguiente tabla.


7. ¿Cuál es la tasa de desocupación en tu grupo?

---



## Desarrollo



Actividad: 2  
Actividad Individual



Individualmente analiza la **Tabla 1.1**, que aparece en la ENOE, y responde las preguntas que se plantean:

Tabla 1.1

**Población de 14 años y más, por sexo y grupos de edad, según condición de actividad, ocupación y disponibilidad para trabajar**

Trimestre: abril-junio de 2010

Sexo y grupos de edad	Población de 14 años y más	Población económicamente activa		
		Total	Ocupada	Desocupada
<b>Nacional</b>	<b>79 669 989</b>	<b>47 137 757</b>	<b>44 651 832</b>	<b>2 485 925</b>
14 a 19 años	13 236 456	4 159 661	3 738 863	420 798
20 a 24 años	9 308 943	5 750 675	5 237 868	512 807
25 a 29 años	8 045 833	5 841 822	5 437 748	404 074
30 a 34 años	7 685 012	5 672 434	5 394 027	278 407
35 a 39 años	7 781 071	5 849 740	5 614 938	234 802
40 a 44 años	7 051 214	5 320 446	5 124 054	196 392
45 a 49 años	6 167 801	4 533 476	4 368 339	165 137
50 a 54 años	5 352 491	3 637 095	3 530 348	106 747
55 a 59 años	4 181 238	2 570 164	2 479 238	90 926
60 a 64 años	3 362 293	1 671 706	1 628 133	43 573
65 años y más	7 458 992	2 114 168	2 082 912	31 256
No especificado	38 645	16 370	15 364	1 006



## Actividad de Equipo



En equipo responde las siguientes preguntas y expresa tus argumentos cuando no estés de acuerdo con lo que plantean tus compañeros de equipo. Al responder las preguntas es importante argumentar en caso de ser necesario.

1. En la Tabla 1.1 se muestran doce grupos de edad, ¿A cuál de ellos perteneces?

---

2. ¿En cuál de los dos grupos el desempleo es más grave, en el de 14 a 19 años o en el de 20 a 24 años?

---

3. ¿En qué cálculos aritméticos basas tu afirmación?

---

---

4. ¿Qué parte del total de la población encuestada de la categoría de 14 a 19 años es considerada como económicamente activa? Describe el procedimiento que te llevó a la respuesta.

---

---

---

---

---

5. ¿Qué representa para este grupo de edad el número que obtuviste?

---

---

---

6. ¿Qué parte del total de la población encuestada de la categoría de 40 a 44 años es considerada como económicamente activa? Describe el procedimiento que te llevó a la respuesta.

---

---

---

---

---

7. ¿Qué representa para este grupo de edad el número que obtuviste?

---

---

---

8. Si quisieras comparar la población económicamente activa de los dos grupos anteriores (14 a 19 años y 40 a 44 años), ¿cómo utilizarías los números que obtuviste en las preguntas 4 y 6?

---

---

---

9. ¿A qué crees que se debe la diferencia entre la población económicamente activa de los grupos mencionados?

---

---

---

10. ¿Dónde hay más población económicamente activa, de los 14 a los 29 años o de los 50 a los 64?

---

11. Si en 2013 se realizara de nuevo la encuesta y los encuestados en el grupo de 20 a 24 años son 10458230, y el porcentaje de la población económicamente activa se conserva igual que en 2010, ¿cuál sería el número de ciudadanos económicamente activos en ese grupo de edades?

---

---

---

---

---

12. Con los datos de la Tabla 1.1, determina cuáles son los tres grupos de edades donde la tasa de desempleo es más alta. ¿En cuál de los tres es más alta esta tasa? Describe los cálculos que realizaste.

---

---

---

---

---



## Actividad de Cierre



Tanto en la *Actividad* de inicio como de desarrollo se te plantearon una serie de preguntas relacionadas con la población económicamente activa y la tasa de desempleo, se ha señalado que la información proporcionada corresponde a los resultados de la ENOE 2010.

Como te podrás dar cuenta todos los números que aparecen en la tabla pertenecen al conjunto de los **números naturales**, que se define como:

$$N = \{1, 2, 3 \dots\}$$

En este conjunto hay operaciones definidas que tú ya conoces, como la suma y la multiplicación.

Para responder a los cuestionamientos que se te hacen a lo largo de la **Secuencia** realizaste operaciones entre números naturales, como puedes observar siempre que sumas este tipo de números obtienes otro natural, a esta propiedad de la suma de los números naturales se le llama **propiedad de cerradura**, y se enuncia de la siguiente manera:

*La suma de dos números naturales da como resultado un número natural, es decir Si  $n$  y  $m$  son números naturales, entonces  $n + m$  es un número natural*

En el contexto de las actividades de inicio y desarrollo, **por ejemplo** se podría solicitar que se determine el número de personas de la PEA que tienen una edad entre 14 y 24 años. Dos estudiantes lo determinan de la siguiente manera:

$$\text{José: } 4159661 + 4750675 = 8910336$$

$$\text{María: } 4750675 + 4159661 = 8910336$$

Si te fijas, José primero colocó la cantidad de PEA del rango que va de los 14 a los 19 años y después la cantidad de PEA del otro grupo, mientras que María lo hizo en el otro orden. Como podrás darte cuenta los resultados obtenidos son los mismos, a esta propiedad de la suma de los números naturales se le conoce como la **propiedad conmutativa**<sup>2</sup>, la cual se puede enunciar de la siguiente manera:

*Entre los números naturales el orden de los sumandos no altera el total, es decir Si  $n$  y  $m$  son números naturales, entonces  $n + m = m + n$*

<sup>2</sup> Conmutar significa: Cambiar una cosa por otra, según la Real Academia Española

Hay otra propiedad importante en la suma de números naturales que utilizamos cotidianamente que tiene que ver con el orden en que agrupamos los sumandos de una suma cuando son más de dos números los que se suman, **por ejemplo** si queremos saber la cantidad de personas desocupadas de la población económicamente activa entre los 14 y 29 años (ver datos de la **Tabla 1.1**), tenemos que sumar las siguientes cantidades: 420 798, 512 807 y 404 074.

Dos estudiantes pueden decidir hacer la suma de la siguiente manera;

$$\begin{aligned} \text{Fernanda: } & 420\,798 + 512\,807 = 933\,605, \\ & 933\,605 + 404\,074 = 1\,337\,679, \end{aligned}$$

esto es,

$$(420\,798 + 512\,807) + 404\,074 = 1\,337\,679$$

$$\begin{aligned} \text{Alfredo: } & 512\,807 + 404\,074 = 916\,881, \\ & 420\,798 + 916\,881 = 1\,337\,679, \end{aligned}$$

esto es,

$$420\,798 + (512\,807 + 404\,074) = 1\,337\,679,$$

es decir,

$$(420\,798 + 512\,807) + 404\,074 = 420\,798 + (512\,807 + 404\,074),$$

Como se puede ver, el resultado de sumar tres números es el mismo si sumamos el primero y el segundo y después el tercero, o si sumamos el segundo y el tercero y después sumamos el primero. A esta propiedad de la suma de los números naturales se le llama **propiedad asociativa**, y se puede enunciar de la siguiente manera:

*Si  $n$ ,  $m$  y  $p$  son números naturales, entonces  $(n + m) + p = n + (m + p)$*

Parte de la información que se te solicita en las actividades de inicio y desarrollo se puede expresar en porcentajes, en algunos casos, como en la pregunta 2 de la actividad de inicio, se solicita explícitamente el porcentaje que representa un sector de la población. Es importante recordar que cuando se solicita el tanto por ciento de una cantidad, lo que queremos obtener es ese tanto de cada cien o de la parte proporcional.

**Por ejemplo**, si queremos obtener el 25 por ciento de 350, el 350 se forma por tres grupos de 100 y uno de 50, entonces de cada 100 obtenemos 25 y como 50 representa la mitad de 100 entonces tomamos la parte proporcional de 25 que es 12.5, tal como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{ccccccc} 350 & = & 100 & + & 100 & + & 100 & + & 50 \\ 25\% \text{ de } 350 & & 25 & + & 25 & + & 25 & + & 12.5 \end{array}$$

Por lo tanto el 25% de 350 es 87.5, hacer este desglose es equivalente a realizar la siguiente operación:

$$\frac{(25)(350)}{100} = \frac{8750}{100} = 87.5$$



En general el  $t\%$  de una cantidad  $c$  está dado por  $\frac{t(c)}{100}$

Donde  $t$  y  $c$  pueden ser cualquier número positivo, aun cuando en el caso que aquí se ha presentado  $c$  sólo representa números naturales.

Los datos de ENOE 2010 revelan que la tasa de desempleo es más alta entre los jóvenes que entre los adultos mayores. **Por ejemplo**, la tasa de desempleo entre quienes tienen edades entre los 14 y los 34 años presentan una tasa de desempleo de 8.49%, mientras esta tasa entre los adultos mayores (mayores de 60 años), apenas es de 1.98%. Conforme a estos datos, puede decirse que el desempleo entre los jóvenes es poco más de cuatro veces el desempleo entre los adultos mayores.

**El porcentaje** permite entonces cuantificar y comparar el desempleo entre estos dos grupos de personas, pero sin la información de la tabla no sabríamos cuántos individuos fueron encuestados de cada grupo, ni cuántos desocupados hay en cada uno. Para hacer homogénea la población encuestada, tomamos el 100 como unidad de referencia, sabemos así que por cada 100 encuestados de un grupo hay un poco más de 8 desocupados y por cada 100 encuestados del otro hay casi dos desocupados.

**La tasa de desempleo** es un porcentaje y como tal se calcula según la fórmula siguiente:

$$\text{Tasa de desempleo} = \frac{\text{Número de desocupados}}{\text{Población Económicamente Activa}} (100)$$

En el grupo de 14 a 34 años, por ejemplo, la tasa de desempleo resulta:

$$\text{Tasa de desempleo} = \frac{1\ 337\ 679}{15\ 752\ 158} (100) = 8.49$$

En general el porcentaje que representa una cantidad  $a$  de una cantidad  $b$ , está dado como:

$$\frac{a}{b} (100)$$

Donde los números  $a$  y  $b$  no tendrían por qué ser números naturales, como sucede en la situación que estamos analizando



Con base en las definiciones de **porcentaje** y de **Tasa de desempleo**, responde individualmente las preguntas siguientes:

1. ¿Cuál sería tu opinión, si alguien te dijera que existe un grupo de mexicanos entre los cuales la tasa de desempleo es del 121%?

---

---

---

---

2. Explica por qué la tasa de desempleo no puede tomar valores negativos.

---

---

---

---

3. De acuerdo con la definición de Tasa de desempleo, ¿entre qué valores deberá estar siempre este porcentaje?

---

---

4. ¿Podrían existir situaciones, ajenas al problema del empleo, en las que tenga sentido hablar de porcentajes de 150%? Describe una situación en la que tenga sentido hablar de un porcentaje de 150%.

---

---

---

---

5. ¿Hasta qué grupo de edades se acumula el 40% de PEA más joven?

---

---

6. ¿Es correcto decir que desde los 14 hasta los 39 años se acumula el 60% de la PEA?

---

---

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividades de Inicio

Por qué es Importante la herramienta algebraica



### ¿Con aritmética o con álgebra?

**El álgebra** puede ser una herramienta potente para resolver problemas, esta potencia se pone en evidencia cuando resolvemos problemas que serían difíciles de resolver usando otras herramientas como la aritmética o las gráficas.

En algunos libros de álgebra se plantean problemas como el siguiente:

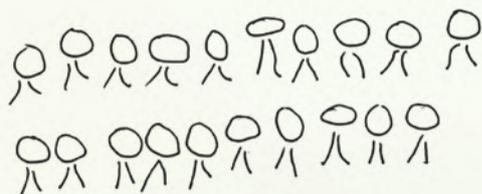
### Problema 1.

**Doña Olivia** está criando conejos y gallinas en el patio de su casa. Al contar las cabezas de sus animales se da cuenta que son en total 20, pero al contarles las patas le resultan 56. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas tiene **Doña Olivia**?

**En primer lugar**, se trata de un problema un poco extraño, porque pudiendo contar los conejos y gallinas directamente, **Doña Olivia** decide contar por separado las cabezas y las patas.

**En segundo lugar**, no está claro que la herramienta algebraica sea indispensable para resolverlo. Un niño de primaria, que por supuesto no contaba con conocimientos de álgebra, pudo resolver el problema de la siguiente manera:

Primero dibujó las 20 cabezas y a cada una le dibujó dos patas, haciendo un dibujo como el siguiente:



Como le quedaban 16 patas por acomodar, le fue dibujando dos patas más a cada cabeza, cuando agotó las patas que le quedaban, su dibujo se veía así:



Entonces concluyó que **Doña Olivia** tiene 8 conejos y 12 gallinas. Pero el problema no está planteado en el libro para que se resuelva de esta manera, la respuesta que se espera es más bien como la siguiente:

Sean **G** el número de gallinas y **C** el número de conejos que tiene **Doña Olivia**, entonces como el total de animales es 20,

$$G + C = 20$$

Como cada gallina tiene dos patas y cada conejo tiene cuatro y las patas en total son 56, entonces,

$$2G + 4C = 56$$

La solución se encontrará al resolver el sistema de ecuaciones lineales que modela el problema, este sistema es,

$$\begin{aligned} G + C &= 20 \\ 2G + 4C &= 56 \end{aligned}$$

Los métodos utilizados por el estudiante de primaria están basados en el conteo sobre los dibujos que elabora, pero son suficientes para obtener una respuesta satisfactoria al problema; en cambio la modelación algebraica que se muestra pareciera una herramienta excesiva cuando se resuelve un problema tan sencillo.

**Tarea:** Busca en un libro de álgebra, un problema que tú puedas resolver sin herramienta algebraica. Explica la solución no algebraica que has encontrado al problema.

**El álgebra es una herramienta potente para resolver problemas**, pero esta potencia podría no requerirse para resolver problemas como el de **Doña Olivia**. En las actividades siguientes, se presentarán algunos problemas, en el contexto de juegos con números, para poner en evidencia que la herramienta algebraica permite encontrar soluciones más completas y de manera más eficiente que otros métodos.



## Desarrollo



**Completa los arreglos con números positivos** Los juegos con números siempre han resultado atractivos para ciertos grupos de personas, particularmente para aquellos que se sienten atraídos por las matemáticas, encontrar el número perdido es una actividad

que se presenta desde primaria en algunas situaciones sencillas en las que se debe encontrar un número que cumpla ciertas condiciones dadas de antemano.

*Un ejemplo de este tipo de situaciones puede ser el siguiente:*

Encuentra el número que va en el cuadro:

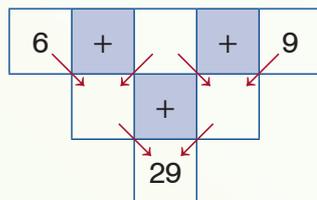
$$5 + \square = 18$$

$$4 + 3 \times \square = 19$$

¿Cuáles son los números que van en los cuadros?

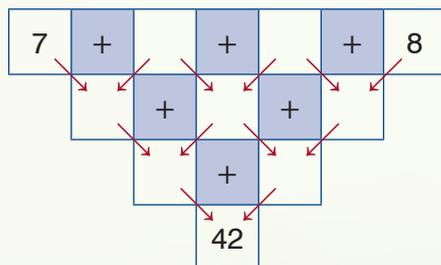
*Una situación menos sencilla puede ser la siguiente:*

Encuentra el número que falta en el primer renglón y que permite completar el siguiente arreglo. Toma en cuenta que cada pareja de números se suma horizontalmente, pero el resultado se anota inmediatamente debajo del signo de suma. Al número que falta en el primer renglón le llamaremos la solución del problema.



¿Te resultó sencillo encontrar número que faltaba en el primer renglón?

Encuentra los dos números naturales que faltan en el primer renglón y que permiten completar el siguiente arreglo numérico. De nuevo cada número es la suma de los dos números superiores, como indican las flechas. A los dos números naturales buscados le llamaremos la solución del problema.





Actividad de Equipo



En equipo responde las siguientes preguntas:

1. ¿Con qué números completaste el primer renglón en el primer intento?

---

2. ¿Con qué criterio cambiaste los números (del primer renglón) que habías anotado en el primer intento?

---

---

3. Anota la solución que encontraste.

---

---

---

---

4. ¿Habrán otro par de números que puedan ser solución del problema?  
¿Cuáles?

---

---

---

5. Presentar al grupo los resultados obtenidos al trabajar en equipo.

---

6. ¿Cuántas soluciones existen para el problema?

---

---

---

---

---

Como podrás darte cuenta los equipos encontraron diferentes soluciones al problema.

En la parte siguiente de la actividad nos dedicaremos a investigar cuántas posibles soluciones tiene este problema.

Si llamamos  $x$  y  $y$  a los números que se colocan en el primer renglón, tal como se muestra, completa los espacios en blanco.

7	+	$x$	+	$y$	+	8
		+		+		
			+			
			42			

7. Si los dos números que estamos buscando son desconocidos, ¿por qué no representamos con  $x$  a los dos?

---



---

8. ¿Cuál es la expresión que resulta de sumar las dos expresiones del tercer renglón?

---

9. ¿Cuál es la ecuación que relaciona la expresión obtenida en el tercer renglón con el número 42?

---

10. Simplifica lo más que puedas la ecuación obtenida.

---

11. Compara con los demás equipos las ecuaciones simplificadas y selecciona entre ellas la más simplificada.

---

12. ¿Cuánto deben sumar  $x$  e  $y$  para que sean solución del problema?

---

13. Haz una lista con todas las parejas que son soluciones del problema.

---



---



---



---



---

14. Compara los tanteos numéricos que te llevaron a la solución del problema con el procedimiento algebraico que usaste después. ¿Cuál te parece mejor? Justifica tu respuesta.

---



---



---



---



---



Actividad: 3  
Actividad Individual



**Perímetro de un cuadrado y un triángulo.** En la presente *Actividad* se trata de comparar dos cantidades que están variando, sujetas a condiciones geométricas dadas. Específicamente se trata de ver cuándo los perímetros del triángulo y del cuadrado son iguales, si las figuras se han construido bajo las siguientes condiciones:

**Construcción.** Sobre un segmento  $AB$  de longitud 10, se ubica un punto  $P$ . Se construye un cuadrado tomando  $AP$  como lado y luego se construye un triángulo equilátero que tenga al segmento  $PB$  como lado, tal como se muestra en la **Figura 1.1**<sup>3</sup>

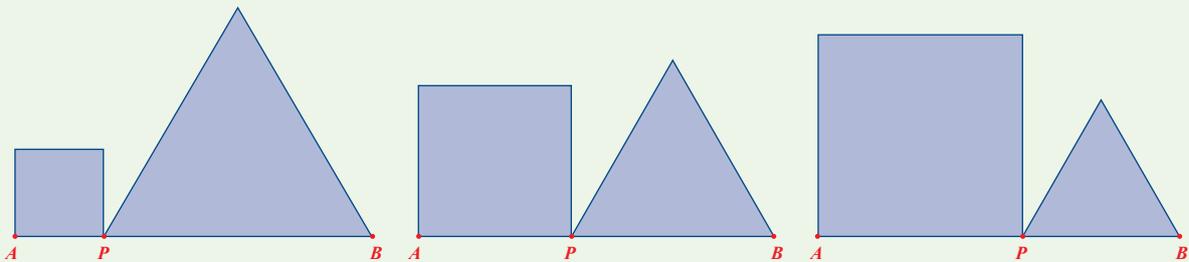


Figura 1.1

1. ¿A qué distancia debe de estar  $P$  del punto  $A$  para que el perímetro del cuadrado sea igual al del triángulo? Para resolver este problema intenta responder las siguientes preguntas:

1.1. ¿Cuántas parejas de figuras, como las ilustradas en la **Figura 1.1** se podrán construir?

---

<sup>3</sup> Si el profesor está en condiciones de mostrar el applet correspondiente se sugiere que la discusión se centre en el comportamiento de los perímetros al mover el punto  $P$ .

1.2. Proporciona un ejemplo en donde el perímetro del triángulo sea mayor que el del cuadrado.

1.3. Proporciona un ejemplo en donde el perímetro del cuadrado sea mayor que el del triángulo.

1.4. Propón un valor para la distancia  $AP$  donde los perímetros sean aproximadamente iguales.

1.5. ¿Existe la solución del problema? Justifica tu respuesta.

Los intentos hechos hasta aquí por resolver el problema son de naturaleza aritmética, éstos nos han permitido conocer más el problema y en el mejor de los casos tener buenas aproximaciones a la solución.

2. Veamos ahora una manera más sistemática de abordarlo:  
Si denotamos con  $d$  a la longitud del segmento  $AP$ .

2.1. Expresa algebraicamente el perímetro del cuadrado en términos de  $d$ .

2.2. ¿Cómo denotarías la longitud del segmento  $PB$  en términos de  $d$ ?

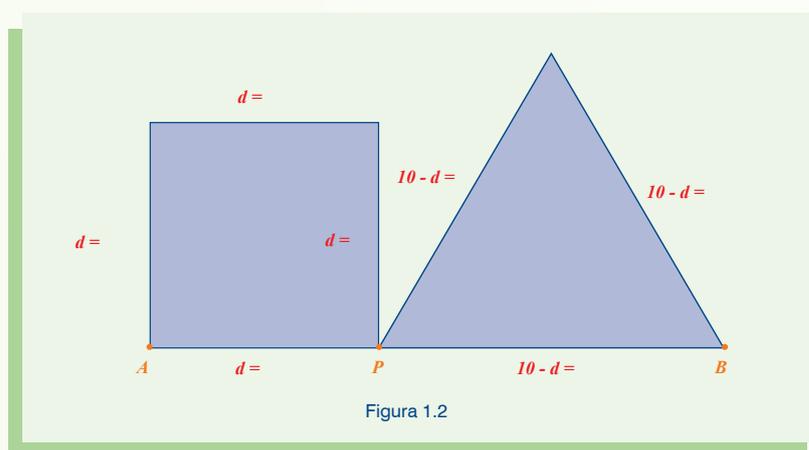
2.3. Expresa algebraicamente el perímetro del triángulo en términos de  $d$ .

2.4. ¿Cuál es la igualdad que se obtiene al igualar las expresiones algebraicas que representan los perímetros?

2.5. Resuelve la ecuación obtenida.

2.6. ¿Existirá otro valor para  $d$  que resuelva el problema? Justifica tu respuesta.

2.7. En la **Figura 1.2** asigna los valores correspondientes a  $d$  y a  $10 - d$  y verifica que para esos valores los perímetros son iguales.





## Actividad de Cierre



En esta **Secuencia** se plantearon una serie de situaciones en las que la **aritmética** puede ser una herramienta útil para resolverlas, pero en algunos casos el hacer uso de ella nos lleva a la búsqueda de soluciones a partir de estrategias que se basan en el tanteo, lo cual puede resultar muy laborioso y no necesariamente nos lleva a la solución o soluciones

que estamos buscando para cada situación.

Al iniciar el apartado de desarrollo se plantean situaciones sencillas como las que se presentan en primaria o secundaria, en ellas sólo se pide encontrar un número que debe cumplir una o dos condiciones, en el primer caso un número que sumado con cinco dé 18, mientras que en el otro un número que multiplicado por tres y sumado con cuatro dé 19.

En ambos casos la **aritmética** es suficiente para resolverlos, la otra situación que se plantea es un poco más compleja en cuanto a las condiciones que debe cumplir el número que se busca, pero por la dimensión del arreglo puede resultar sencillo resolverla aritméticamente.

En el desarrollo de la secuencia además se plantean dos situaciones problemáticas, el propósito de ellas es contrastar la importancia que tienen los métodos algebraicos cuando la **aritmética** nos proporciona respuestas limitadas o incompletas.

- a. En el segundo problema de la **Actividad 2** se presenta un arreglo de cuadros en los que debemos colocar números que cumplan ciertas condiciones, algo parecido a un sudoku<sup>4</sup>, en él se pueden encontrar soluciones particulares utilizando la aritmética, pero es la herramienta algebraica la que nos permite generalizar respecto a la forma que tienen todas las parejas de números que resuelven el problema. **Algebraicamente se puede encontrar que la solución está formada por todas las parejas de números cuya suma es nueve, es decir  $x + y = 9$ , la cual es una solución general que sintetiza todas las soluciones posibles.**
- b. En el problema de los perímetros de un cuadrado y un triángulo, aritméticamente se podría llegar a una aproximación del resultado, y con el uso del applet realizado con el software GeoGebra se puede tener una mejor aproximación a la solución del problema, pero sólo serían eso, aproximaciones particulares. **Es el planteamiento algebraico de la situación lo que permite tener la solución exacta, así como la certeza de que sólo hay una solución posible.**

<sup>4</sup> Sudoku: Pasatiempo que consiste en completar con números del 1 al 9 una cuadrícula, generalmente de 81 casillas y 9 subcuadrículas, de forma que cada número no se repita en la misma fila o columna ni en la misma subcuadrícula. Definición de la Real Academia Española.

Tal como se ha señalado en el apartado de inicio de la secuencia, el propósito central de ésta es destacar la potencia de los métodos algebraicos sobre los métodos aritméticos, lo cual podemos sintetizar en la siguiente tabla, en la que se muestra lo que aporta cada una de estos métodos:

Método aritmético	Método algebraico
Proporciona soluciones particulares	Proporciona soluciones generales
	Proporciona conjuntos de soluciones
Permite verificar que un método funciona para casos particulares	Demuestra que un método es válido para todos los casos
	Demuestra por qué un método funciona

A lo largo de las *Actividades* de la **Secuencia 2** aparecieron expresiones algebraicas de dos tipos, aquellas en las que cualquier valor que le asignemos a la variable o variables hacen que se satisfaga la igualdad y aquellas en las que la igualdad es válida sólo para ciertos valores de las variables.

*A las igualdades que se **satisfacen para cualquier valor** de las variables se les llama **identidades**.*

**Por ejemplo** en la *Actividad 3* de la **Secuencia 2**, después de representar con  $d$  el segmento  $AP$ , el segmento  $PB$  se representa como  $(10 - d)$ , porque:

$d + (10 - d) = 10$ , que es una identidad ya que se satisface para cualquier valor que se le asigne a la variable  $d$ .

*A las igualdades que se **satisfacen sólo para ciertos valores** de las variables se les llama **ecuaciones**.*

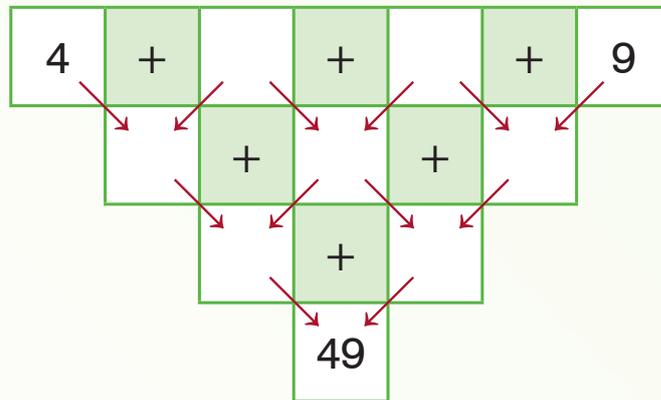
**Por ejemplo** en la *Actividad 1* de la **Secuencia 2** aparece una igualdad:

$C + G = 20$ , que es una ecuación ya que se satisface sólo para ciertos valores de las variables.

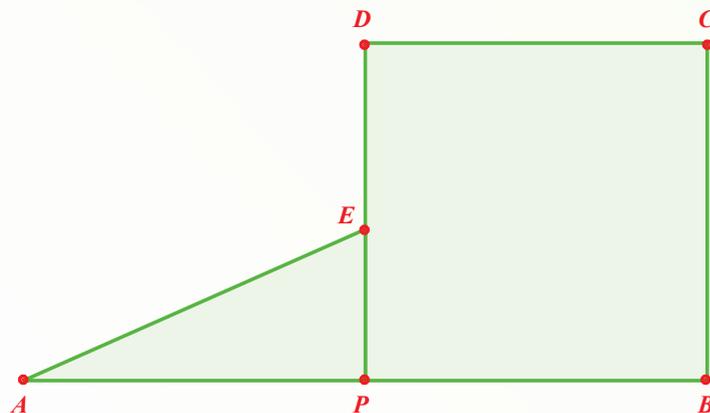
Sección  
de problemas



- Encuentra los dos números naturales que faltan en el primer renglón y que permiten completar el siguiente arreglo numérico. Los números buscados son tales que su diferencia es igual a 2. Al igual que en los arreglos anteriores, las operaciones están indicadas por las flechas.



- Sobre un segmento  $AB$  de longitud 10, se ubica un punto  $P$ . Se construye el cuadrado  $PBCD$  y luego se construye el triángulo rectángulo  $APE$ , donde  $E$  es punto medio del lado  $PD$  del cuadrado, tal como se muestra en la figura.



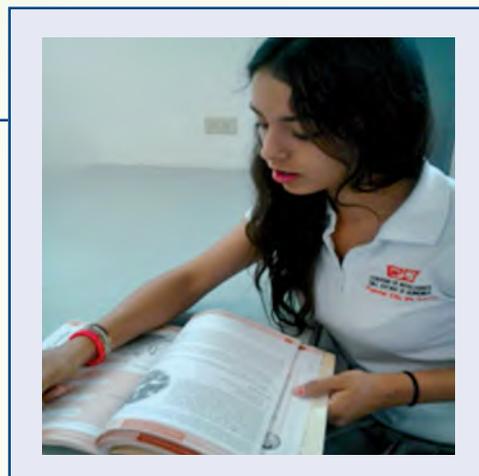
Si  $x$  es la longitud de  $AP$ , escribe una ecuación en términos de  $x$  que permita responder la siguiente pregunta:

**¿A qué distancia debe de estar  $P$  del punto  $A$  para que el área del cuadrado sea igual a la del triángulo?**

3. La suma de dos números es 20. **¿En cuánto se incrementa el producto si cada número se incrementa en 5?**



El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.



*En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

**Problema 1.** En el rango de edad de 25 a 29 años (ver **Tabla 1.1**), al calcular el porcentaje de la población económicamente activa que está desocupada, el resultado es 6.92 %.

**¿Cuál será el porcentaje de la población económicamente activa ocupada en este rango?**

*Solución:*

Reflexiones relacionadas con el **problema 1**:

¿Qué hiciste para responder la pregunta?	¿Qué elementos tomaste en cuenta para responder de esa manera?	¿Qué dificultades tuviste para resolver el problema?

**Problema 2.** Si al comprar un par de zapatos, el dependiente te ofrece las dos opciones siguientes:

- a) No cobrarte el IVA (16%).
- b) Cobrarte el IVA y después descontarte el 16 %.

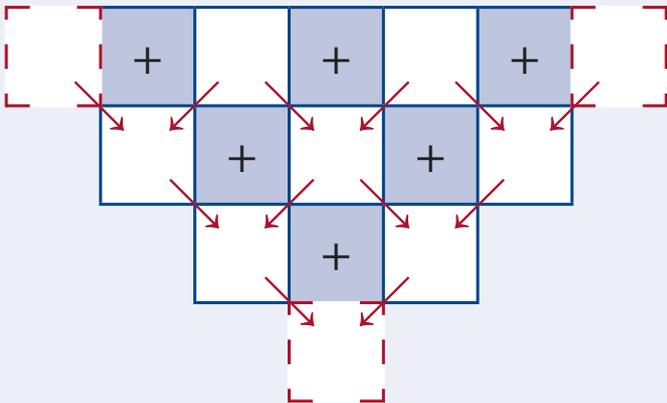
**¿Cuál de las dos opciones te conviene más?** Justifica tu respuesta.

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 2:

¿Qué estrategia utilizaste al resolver el problema?	¿Corresponde la respuesta que obtuviste con lo que esperabas?	¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a resolver la situación planteada?

**Problema 3.** Coloca un número natural diferente en cada una de las casillas que están en los extremos del primer renglón y en la casilla correspondiente al último renglón, de tal manera que el siguiente arreglo no tenga solución en los números naturales.



Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 3:

¿Cómo le hiciste para resolver el problema?	¿Qué estrategia utilizaste para ver que no tenía solución?	¿Qué tipo de dificultades tuviste para hacer el problema?

Reflexiones Generales relacionadas con el **BLOQUE 1**

1. ¿Lograste comunicar tus ideas o puntos de vista al trabajar en equipo o en grupo?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
2. ¿Tomaste en cuenta la participación de tus compañeros para modificar tus respuestas, tus acercamientos a los problemas...etc.?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
3. ¿Lograste interpretar las ideas de tus compañeros al realizar alguna tarea o actividad de clase?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
4. ¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
5. ¿Expresaste a tus compañeros o al profesor alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
6. ¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
7. ¿Ayudaste a tus compañeros a resolver sus dudas?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
8. ¿Te ayudaron tus compañeros a resolver las dudas que les planteaste?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
9. ¿Cumpliste con hacer y entregar tus tareas?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
10. En este bloque me pareció interesante:				

# BLOQUE 2

Utiliza...  
*Magnitudes y Números Reales*

## Introducción:

En este bloque tendrás la oportunidad de continuar utilizando la herramienta que te proporciona la **Aritmética** y el **Álgebra** en la resolución de problemas. Al trabajar con las actividades que integran las tres secuencias que forman el bloque seguirás enriqueciendo el conocimiento que tienes de los números y de algunas de sus propiedades más importantes. Abordarás de nueva cuenta situaciones que involucran el concepto de porcentaje y usarás además la calculadora como herramienta auxiliar en el cálculo y/o verificación de resultados.

En este bloque también aparecen situaciones en las que estudiarás varios tipos de relaciones que se presentan entre **variables**, en particular aquellas en las que **dos variables** tienen una relación directamente proporcional o inversamente proporcional.

En las actividades que encontrarás en el presente bloque deberás también interpretar y comunicar mensajes cuya información se presenta en tablas, gráficas, **expresiones algebraicas** y/o textos; además, deberás aprender a escuchar las propuestas y argumentos de tus compañeros, para que tengas la oportunidad de contrastarlos con los tuyos, y así poder corregir o argumentar a favor de ellos según sea el caso; para esto deberás hacer uso del lenguaje propio de las **Matemáticas**.

# Secuencia Didáctica 1.-

## Actividad de Inicio

La medición:  
¿Sobre objetos físicos o matemáticos?



Actividad: ↓  
Actividad Individual



### Midiendo longitudes

*La Real Academia Española* define el **verbo medir** como la acción de “Comparar una cantidad con su respectiva unidad, con el fin de averiguar cuántas veces la segunda está contenida en la primera”.

En nuestras ocupaciones cotidianas, la medición es una acción física, es una actividad indispensable para el topógrafo, para el ingeniero civil, para el albañil, para el entrenador físico, para el químico y para muchas otras profesiones y oficios.

Cuando se miden objetos físicos, como la altura de una puerta, el diámetro de una llanta, o el área de una barda, se cometen errores que dependen en gran parte de los instrumentos de medición. En cambio en **Geometría** los objetos que se miden no son físicos, se trata de objetos ideales que no pertenecen al mundo real, aunque sirven como una referencia para la realidad.

Si construimos, **por ejemplo**, una escuadra de madera como la que se muestra en la **Figura 2.1**, en la que los lados que forman el ángulo recto miden 30 cm y 40 cm respectivamente, al medir con una cinta métrica el tercer lado pudiéramos obtener 49.8 cm. Pero vista esta escuadra como un triángulo rectángulo, sabemos que el tercer lado debe medir 50 cm.

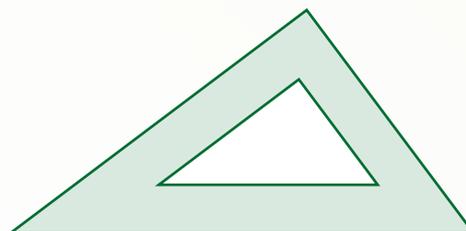


Figura 2.1



# Desarrollo



Actividad: 2  
Actividad Individual



1. Mide con una regla, hasta diezmilésimas de metro, los objetos del salón de clase que te indique tu profesor y registra en la **Tabla 2.1** los datos que hayas obtenido.

Objeto	¿Qué le mides al objeto?	¿Cuánto mide?

Tabla 2.1



Actividad de Equipo



2. Atiende la indicación del profesor para que compares tus resultados con los obtenidos por tus compañeros al medir los mismos objetos.

3. ¿Coincidieron todas las medidas que hicieron del mismo objeto?

---

4. ¿A qué crees que se debe esto?

---



---



Actividad: 3  
Actividad Individual



## Midiendo superficies

Un problema de mucha actualidad es el cuidado del medio ambiente, en especial se hace hincapié en que las empresas asuman una actitud responsable al respecto.

Nuestra sociedad en general consume diariamente una gran cantidad de alimentos industrializados, y un elemento tan importante como el proceso de producción es el relacionado con el empaque en el que dichos productos deben presentarse al



consumidor. El empaque además de cumplir con requisitos de presentación e imagen, debe satisfacer estándares relacionados con la optimización de la cantidad de material que se utiliza para construirlo. Seguramente has visto en el supermercado una gran cantidad de alimentos que se venden en recipientes de forma cilíndrica, por ejemplo: atún, te, refresco, jugo, puré, salsa, yogurt, etc.

Los productos ya mencionados a su vez requieren ser empacados para su traslado del centro de producción al centro de venta (de la fábrica al supermercado). En el supermercado es común encontrar paquetes con dos latas, cuatro latas, seis latas, ocho latas, 12 latas, 18 latas, 24 latas, etc.

### ¿Alguna vez te has preguntado de qué depende el tamaño de esos paquetes?

1. Seguramente hay una gran cantidad de factores que influyen para determinar la forma y el tamaño de los empaques. Enumera al menos tres factores que creas que son tomados en cuenta para su fabricación:

---

---

---

Una empresa que enlata verduras utiliza latas con forma de cilindro circular, que tienen una base con **diámetro de 5.8 cms** y una **altura de 11 cms**. Desean hacer **paquetes de 12 latas en cajas de base rectangular**. Un problema a resolver es determinar el arreglo que optimiza el uso de material para las cajas en las que deberán empacar las latas, esto es, las latas se pueden acomodar en una caja que contenga una fila de 12 latas, dos filas de seis latas o tres filas de cuatro latas, tal como se muestra en la **Figura 2.2**.

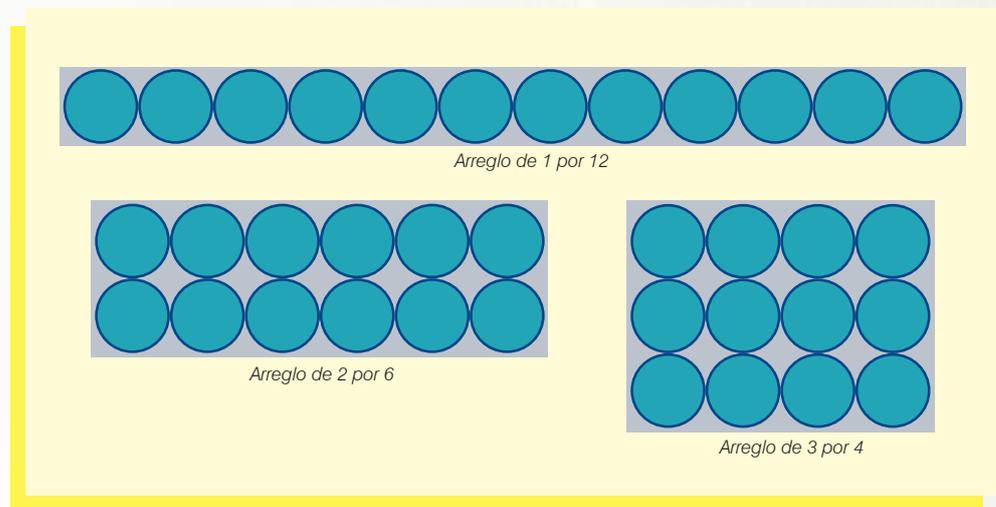


Figura 2.2



## Actividad de Equipo



1. ¿Cuál es el área, de la base de la caja, que se necesita para empacar las doce latas en cada uno de los arreglos?
2. ¿En cuál de los arreglos se utiliza menos material para construir la base de la caja?
3. ¿Cuál es el área, de la base de la caja, que cubren las latas en cada uno de los diferentes arreglos?
4. En cada arreglo, ¿cuál es el valor exacto del área de la base que no cubren las latas?
5. ¿En términos de qué número queda expresado el valor del área de la base de la caja, que no cubren las latas?
6. Aproximadamente, ¿cuál es el área de la base de la caja que no cubren las latas, en cada arreglo?
7. Atiende las indicaciones del profesor para que presenten, al resto del grupo, los resultados obtenidos en el trabajo de equipo.



En la escuadra mostrada en la *Actividad 1*, de lados 30, 40 y 50; es posible medir uno de sus lados con otro. El lado que mide 40, **por ejemplo**, “cabe”  $\frac{5}{4}$  de veces en el segmento de lado 50. Decimos también que la razón entre estos segmentos es  $\frac{5}{4}$  y que la razón se ha podido expresar como un cociente de dos números enteros, es decir como un número racional.

Expresar la razón entre dos segmentos como un número racional es posible, gracias a que ambos pueden dividirse en partes iguales que miden lo mismo. En este caso los segmentos que miden 40 y 50, pueden dividirse ambos en partes iguales del mismo tamaño, que midan por ejemplo, 1,  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{4}$ , pero hay otras parejas de segmentos que no admiten una subdivisión como ésta.

En la *Actividad 3* se utilizó un número irracional conocido como  $\pi$ . **Este número  $\pi$  se define como la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.** El hecho de que sea un número irracional significa que si tenemos dos segmentos (ver **Figura 2.3**), uno que mida lo mismo que la circunferencia y otro que mida igual que el diámetro, no existe una manera de subdividir ambos en partes iguales y que las partes de uno sean iguales a las partes del otro. Esto impide que  $\pi$  pueda expresarse como el cociente de dos números enteros.

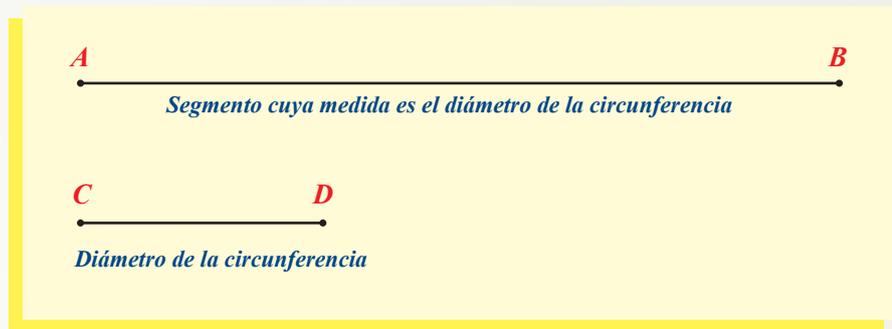


Figura 2.3



### Números con expansión decimal finita e infinita

Al final de la *Actividad 3* se han mencionado los **números racionales**, llamados así porque se pueden expresar como la razón de dos números enteros donde el denominador es diferente de cero, es decir:

Un número racional es aquel que se puede expresar de la forma  $\frac{a}{b}$  donde  $a$  y  $b$  son números enteros con  $b \neq 0$ .





### De “quebrado” a “decimal”<sup>1</sup> y de “decimal” a “quebrado”

Cuando se quiere **convertir una fracción (“quebrado”) a decimal**, tenemos la opción de usar la calculadora para **dividir el numerador entre el denominador** o bien hacer esta misma división usando el **algoritmo** que aprendimos en la escuela primaria.

**La conversión inversa** también es sencilla cuando el número decimal tiene una expansión decimal finita, porque basta con **suprimir el punto decimal y dividir el número entero resultante entre la potencia de diez apropiada (1, 10, 100, 1000,...)**. En los ejemplos puede verse que la potencia de diez seleccionada depende del número de dígitos que integran la parte decimal:

$$0.428 = \frac{428}{1000}, \quad 0.17 = \frac{17}{100}, \quad 62.0 = \frac{62}{1}, \quad 401.2 = \frac{4012}{10}$$

Como se ha visto antes, algunos **números racionales** tienen una expansión decimal periódica infinita; si tenemos un número como éste escrito como decimal, también podemos encontrar la fracción que le corresponde, pero como se verá enseguida, el problema podría no ser tan simple.

3. Usa la calculadora para proponer las fracciones que mejor aproximen a los números decimales que se muestran en la **Tabla 2.2**. Se sugiere que en cada caso propongas una fracción, luego obtengas con la calculadora el decimal que le corresponde, hasta obtener la que a tu juicio, sea la mejor aproximación.

Expansión decimal del número	Expresión del número racional como fracción
0.812 812 812 812 812 ...	
0.7 34 34 34 34 34 34 34 34 34 ...	
3.1416 1416 1416 1416 1416 ...	
7.000 92 92 92 92 92 92 92 ...	
4.54 54 54 54 54 54 54 54 54 ...	

Tabla 2.2

Abordaremos ahora algebraicamente el problema de expresar como fracción, un número racional cuya expansión decimal infinita se conoce. Iniciaremos con el caso más sencillo, a saber, el caso de un racional cuya parte entera es cero y cuyo periodo inicia inmediatamente después del punto decimal. Veamos al respecto, los ejemplos siguientes:

<sup>1</sup> Coloquialmente nos referimos a los decimales como aquellos números que están expresados en su forma decimal y cuya expansión decimal puede ser finita o infinita.



 Actividad Individual



Con base en los dos ejemplos anteriores, individualmente propón en la **Tabla 2.3** la fracción que corresponde a cada uno de los siguientes decimales. Verifica con tu calculadora que la fracción propuesta es correcta.

Expansión decimal del número	Expresión del número racional como fracción
$0.71\ 71\ 71\ 71\ 71\ 71\ 71\ 71\ 71\ 71\ \dots$	
$0.5555555555555555555555555555\ \dots$	
$0.812\ 812\ 812\ 812\ 812\ 812\ \dots$	
$0.1748\ 1748\ 1748\ 1748\ 1748\ 1748\ \dots$	
$0.101\ 101\ 101\ 101\ 101\ 101\ 101\ 101\ \dots$	

Tabla 2.3

En los siguientes ejemplos se muestra que cualquier otro caso puede resolverse usando los resultados encontrados para éste.

 Actividad de Equipo



**Ejemplo 3.**

Expresar como fracción el número

$$0.893\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ \dots$$

Llamaremos ahora  $y$  a este número y lo multiplicaremos por la potencia de diez que resulte apropiada para aislar el período, como puede verse en el desarrollo siguiente:

$$y = 0.893\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ \dots$$

$$1000y = 893.591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ \dots$$

$$1000y = 893 + 0.591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ \dots$$

Ahora no podemos llamar  $y$  al segundo sumando para despejar la  $y$ , porque hemos reservado este nombre para el número original que es distinto de éste. Pero sabemos de los **ejemplos 1 y 2**, y de la tarea que hiciste en la **Tabla 2.3** que,

$$\frac{591}{999} = 0.591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ 591\ \dots$$







## Actividad de Cierre



### Números reales

En esta **Secuencia** tuviste la oportunidad de trabajar con situaciones que resolviste con el uso de **operaciones aritméticas** y algunas de ellas con herramientas algebraicas. **Los números que utilizaste para resolver este tipo de problemas son números naturales, enteros, racionales e irracionales.**

Es importante recordar las características de los diferentes conjuntos de números que hasta este momento se han utilizado:

**Números naturales:** 1, 2, 3,...

**Números enteros:** ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

**Números racionales:** los que se pueden expresar de la forma  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son números enteros con  $b \neq 0$ .

**Números irracionales:** los que no pueden expresarse de la forma  $\frac{a}{b}$ , donde  $a$  y  $b$  son números enteros, en forma decimal tienen expansión decimal infinita no periódica.

A partir de la definición, se puede ver que los **números naturales están contenidos en los números enteros, puesto que son los enteros positivos. Los enteros están incluidos en los racionales**, ya que se pueden expresar como el cociente de dos enteros donde el denominador es diferente de cero, **por ejemplo** el número 5 puede expresarse como cociente de dos números enteros de muchas maneras:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{25}{5} = \frac{-15}{-3}$$

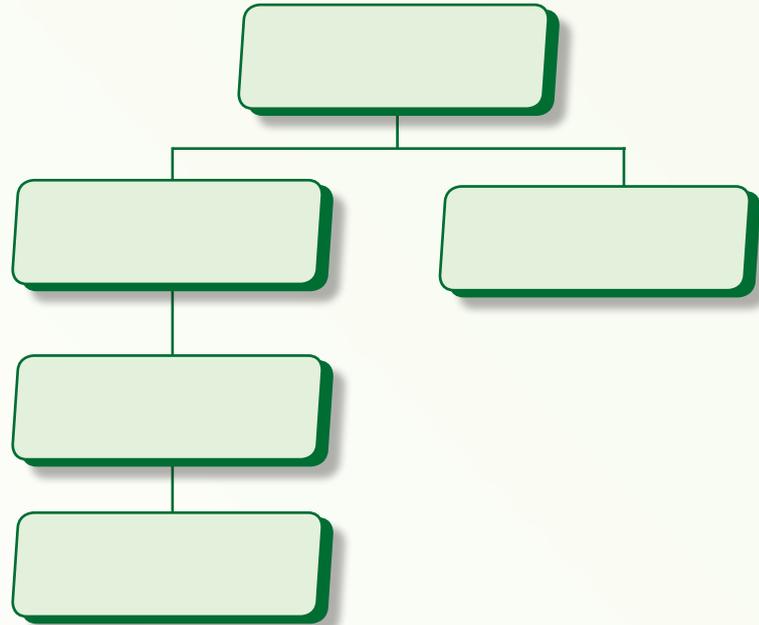
Los irracionales en cambio no tienen elementos en común con ninguno de los conjuntos definidos antes. **A la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales se le llama números reales.** En esta secuencia has operado con números reales para resolver los problemas que se plantearon. Muchas de las operaciones que realizaste, con **números reales** o con expresiones algebraicas, las pudiste hacer gracias a que los **números reales** tienen propiedades respecto a la suma y a la multiplicación que tú has aprendido a utilizar desde la primaria. Las propiedades que se han enunciado en el Bloque 1 para los números naturales se cumplen también para los números reales, y éstos además tienen otras.

Las propiedades más utilizadas de los números reales se muestran en la **Tabla 2.4**.

Números reales	
Propiedad	Descripción
SUMA	
Cerradura	Si $a$ y $b$ son números reales entonces $a + b$ es un número real
Conmutatividad	Si $a$ y $b$ son números reales entonces $a + b = b + a$
Asociatividad	Si $a, b$ y $c$ son números reales entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$
Neutro	Existe el $0$ tal que $a + 0 = a$ , para todo número real $a$
Inverso	Para cada número real $a$ existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0$
MULTIPLICACIÓN	
Cerradura	Si $a$ y $b$ son números reales entonces $(a)(b)$ es un número real
Conmutatividad	Si $a$ y $b$ son números reales entonces $(a)(b) = (b)(a)$
Asociatividad	Si $a, b$ y $c$ son números reales entonces $[(a)(b)](c) = (a)[(b)(c)]$
Neutro	Existe el $1$ tal que $(a)(1) = a$ Para todo número real $a$
Inverso	Para cada número real $a \neq 0$ existe $\frac{1}{a}$ tal que $(a)\left(\frac{1}{a}\right) = 1$
SUMA – MULTIPLICACIÓN	
Distributividad	Si $a, b$ y $c$ son números reales entonces $(a)(b + c) = (a)(b) + (a)(c)$

Tabla 2.4

- Coloca en los recuadros del siguiente esquema el nombre de los números (**naturales, racionales, enteros, reales e irracionales**) de tal manera que, una vez colocado en un recuadro, podamos decir que esos números están contenidos en los números ubicados en un nivel superior y que contienen a los que están ubicados en un nivel inferior.



- Coloca, en la primera columna de la **Tabla 2.5**, el número de la propiedad que se está aplicando en cada caso:

Número	Operaciones	Propiedad
	$2x = 4 \text{ entonces } x = 2$	1. Cerradura para la suma 2. Cerradura para la multiplicación 3. Conmutatividad para la suma 4. Conmutatividad para la multiplicación 5. Asociatividad para la suma 6. Asociatividad para la multiplicación 7. Neutro aditivo 8. Neutro multiplicativo 9. Inverso aditivo 10. Inverso multiplicativo 11. Distributividad
	$xy = yx$	
	$5(x + y) = 5x + 5y$	
	$(5 + (-4)) + 3 = 5 + ((-4) + 3)$	
	$4x - 5 = 8 \text{ entonces } 4x = 13$	

Tabla 2.5

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

Datos de salud reproductiva en los jóvenes  
y tasa de crecimiento poblacional



### Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012<sup>2</sup>

**La salud, la alimentación y la educación** son de los problemas a los que mayor atención y recursos económicos les dedican los gobiernos de los países. En especial en **México** se declara la preocupación por mejorar en **estos tres aspectos que forman parte de los derechos que tenemos los ciudadanos mexicanos**. La atención de estos problemas son atendidos por parte del gobierno a través de programas que se impulsan en las **Secretarías de Estado** correspondientes, por ejemplo la **Secretaría de Salud** (campañas de vacunación, prevención de enfermedades cardiovasculares, salud reproductiva, etc.), **Secretaría de Educación Pública** (recientemente se ha aprobado en el Congreso de la Unión la Reforma Educativa 2013, programas de becas para estudiantes de escasos recursos) y son varias las dependencias que atienden los problemas alimenticios (actualmente la **Secretaría de Desarrollo Social** ha puesto en marcha el programa Cruzada Nacional Contra el Hambre dirigido a la población más desprotegida del país).

Por lo regular los programas que implementa el gobierno están respaldados por estudios estadísticos que se hacen entre la población. En **México** se creó el **Sistema Nacional de Encuestas de Salud** en 1986 con el propósito de proporcionar información a quienes toman las decisiones en el país de las condiciones en las que se encuentra la población en materia de salud, así como del funcionamiento que tiene el sistema de salud del país.

**El Sistema Nacional de Encuestas de Salud** ha aplicado en los últimos años (2000, 2006 y 2012) la **Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (ENSANUT)**. En su versión 2012 presenta varios resultados interesantes entre diferentes sectores de la población, por ejemplo describe el comportamiento de los adolescentes (individuos entre 10 y 19 años) respecto a problemas de salud como el tabaquismo, consumo de alcohol, salud reproductiva, accidentes, violencia, diagnóstico de diabetes e hipertensión.



<sup>2</sup> La información que fue tomada del documento Encuesta Nacional de Salud y Nutrición 2012. Resultados nacionales. Disponible en: <http://ensanut.insp.mx/informes/ENSANUT2012ResultadosNacionales.pdf>. Consultado el 1 de mayo de 2013.

La *ENSANUT 2012*<sup>3</sup> se aplicó a 21,519 adolescentes, de los 22,804,084 (aproximadamente) que había en el país en ese año; en 2012 los adolescentes representaban aproximadamente el 20.2% de la población total. Algunos datos interesantes que se obtienen de la encuesta es que aproximadamente el 50.3% de los adolescentes son hombres, y que la población de este sector de la población decreció de 2006 a 2012 un 0.3%.

1. ¿Qué porcentaje de la población de adolescentes del país fue encuestado?

---

2. ¿Cuál es la población total del país en 2012 (aproximadamente)?

---

3. ¿Cuántas mujeres adolescentes había en 2012 (aproximadamente)?

---

4. Aproximadamente, ¿cuál era la población de adolescentes en 2006?

---

5. Atiende la indicación del profesor para que compares tus respuestas con las de tus compañeros de equipo.

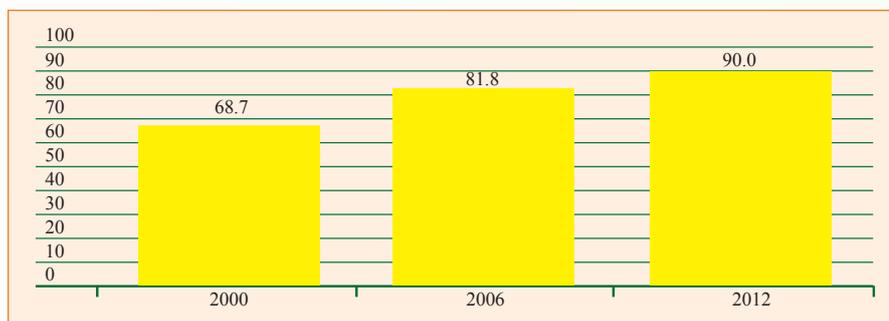


## Desarrollo



### Salud reproductiva

1. Uno de los aspectos que se reportan en la *ENSANUT 2012* es lo referente a la salud reproductiva de los adolescentes, en la siguiente gráfica se muestra parte de los resultados obtenidos.



Gráfica 2.1<sup>4</sup> Porcentaje de adolescentes de 12 a 19 años de edad que conocen o han escuchado de algún método para no embarazarse

<sup>3</sup> Encuesta Nacional de Salud y Nutrición. Resultados Nacionales. Síntesis Ejecutiva 2012.

<sup>4</sup> Información tomada de México ENSA 2000, ENSANUT 2006 y 2012.

Atiende las indicaciones del profesor para realizar lo siguiente:

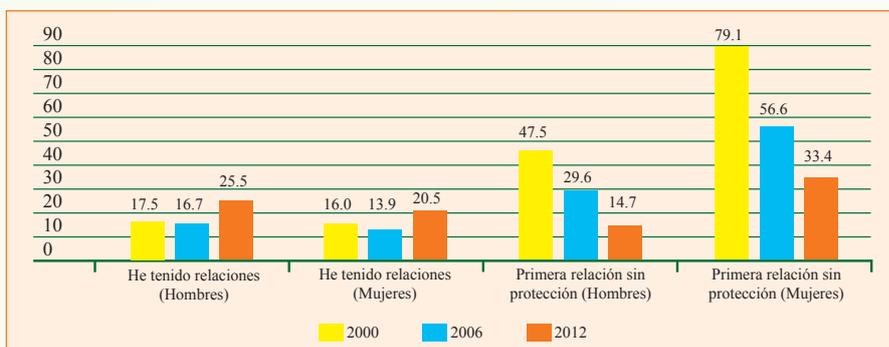
1.1. Describe lo que interpretas de la **Gráfica 2.1**.

1.2. ¿Ha disminuido o aumentado la cantidad de adolescentes que cuentan con información de algún método anticonceptivo? Argumenta tu respuesta.

1.3. ¿En qué porcentaje ha aumentado o disminuido la cantidad de jóvenes informados entre cada período en que se ha aplicado la **ENSANUT**?

1.4. ¿Consideras que estos porcentajes corresponden a lo que sucede en tu medio? Argumenta tu respuesta.

2. En la **Gráfica 2.2** aparece más información relacionada con la salud reproductiva de los adolescentes.



Gráfica 2.2<sup>5</sup> Porcentaje de adolescentes de 12 a 19 años de edad que han tenido relaciones sexuales y porcentaje de los mismos que no utilizaron método para evitar embarazo en la primera relación sexual

<sup>5</sup> Información tomada de México ENSA 2000, ENSANUT 2006 y 2012.



- 2.1 Describe lo que interpretas de la **Gráfica 2.2**.
  
- 2.2 ¿Ha disminuido o se ha incrementado la cantidad de adolescentes que han tenido relaciones sexuales de 2000 a 2006? y ¿De 2006 a 2012?
  
- 2.3 ¿En qué sector (hombres o mujeres) se ha dado ese incremento o decremento?
  
- 2.4 ¿Sucede este mismo comportamiento respecto a los adolescentes que se protegen al tener la primera relación? Argumenta tu respuesta.
  
- 2.5 ¿Cuál es la diferencia de porcentajes entre los hombres que tuvieron su primera relación sin protección de 2006 respecto a 2012?
  
- 2.6 ¿Cuál es la diferencia de porcentajes entre las mujeres que tuvieron su primera relación sin protección de 2006 respecto a 2012?
  
- 2.7 ¿Cuál diferencia es mayor, la que se da entre hombres o la que se da entre mujeres?
  
- 2.8 El porcentaje de hombres que tuvieron su primera relación sin protección en 2012, ¿Qué parte representa de los que lo hicieron en 2006?
  
- 2.9 El porcentaje de mujeres que tuvieron su primera relación sin protección en 2012, ¿Qué parte representa de los que lo hicieron en 2006?
  
- 2.10 En términos proporcionales, ¿en qué grupo de adolescentes es más significativo el cambio de actitud, (respecto al uso de protección)?

2.11 Se tiene la expectativa que se incremente el porcentaje de adolescentes que cuente con la información suficiente sobre los métodos anticonceptivos que les permita, si así lo deciden, tener una vida sexual saludable, por ello **las Secretarías de Salud y de Educación promueven entre las instituciones educativas programas para brindar información a los jóvenes**. Si una institución de nivel medio superior destinó en 2013 \$ 25,000 para atender su programa de Vida Sexual Saludable, y ha planeado incrementar anualmente en 5% dicho presupuesto, **¿cuánto deberá invertir para este programa en:**

- 2014?
- 2016?
- 2018?

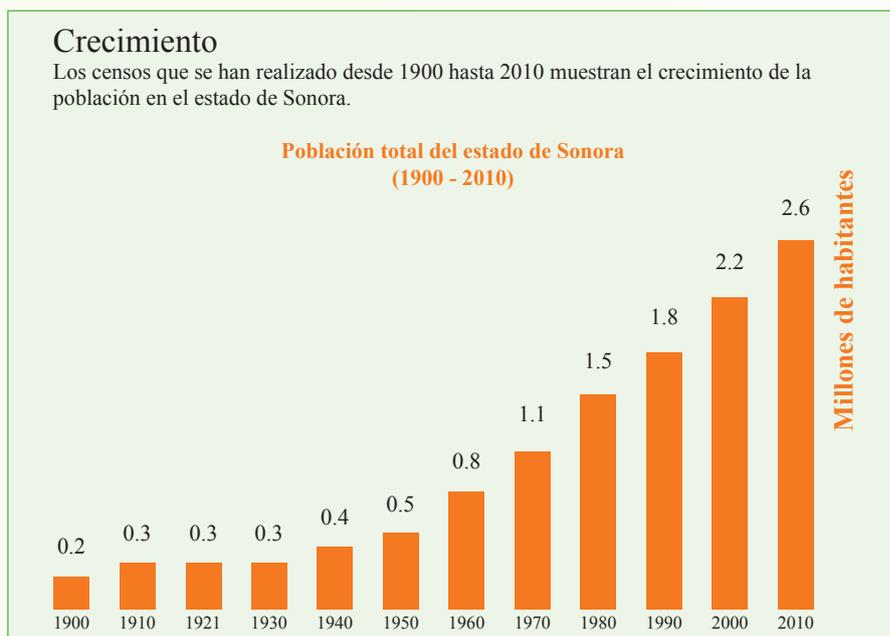


Actividad: 3  
Actividad Individual



### Un poco de historia del crecimiento poblacional de Sonora

1. **Sonora** es un estado de la República Mexicana que cuenta con poca población respecto a la extensión de su territorio, 15 habitantes por kilómetro cuadrado de acuerdo al último **CENSO 2010** (los censos se realizan cada 10 años), esta situación era más crítica aun durante el siglo pasado. El comportamiento de la población del **Estado de Sonora** durante el siglo pasado, lo podemos ver en la **Gráfica 2.3**<sup>6</sup>



Gráfica 2.3

<sup>6</sup> <http://cuentame.inegi.org.mx/monografias/informacion/son/poblacion/dinamica.aspx?tema=me&e=26>

La distribución poblacional de **Sonora** actualmente es muy heterogénea, hay varios centros urbanos donde se concentran grandes cantidades de población, pero también hay poblaciones o municipios enteros donde la población es escasa, se llega al extremo de que hay localidades donde la población está decreciendo, este fenómeno se debe a muchos factores, pero uno de ellos es la falta de oportunidades de empleo para los jóvenes. De acuerdo al censo de población 2010 el 86% de la población del estado de Sonora se concentra en zonas urbanas.

Primero responde individualmente las preguntas y después compara tus respuestas con las de tus compañeros de equipo.

1.1 ¿Vives en un centro urbano o rural?

---

1.2 De acuerdo a lo que observas en tu localidad, ¿se está incrementando la población o está decreciendo?

---

1.3 ¿Qué porcentaje de la población vive en zonas rurales?

---

1.4 ¿Cómo fue el crecimiento poblacional en **México** de 1910 a 1930?

---

1.5 ¿Entre qué décadas fue mayor la tasa de crecimiento poblacional<sup>7</sup> en Sonora durante el siglo pasado?

---

1.6 ¿Aproximadamente cuántos habitantes había en **Sonora** en 1900?

---

1.7 ¿Aproximadamente cuántos habitantes había en **Sonora** en 2010?

---

2. En el documento Diagnóstico Sociodemográfico del **Estado de Sonora**<sup>8</sup>, se señala lo siguiente:

*“A lo largo del siglo XX, Sonora, al igual que el resto del país sufre una importante transformación demográfica. En esos cien años, el crecimiento, estructura y composición de la población de esta entidad transitó por varias etapas:*

- a) A principios de este siglo y hasta 1940-1950 el crecimiento anual de la población era menor al 2 por ciento, con este ritmo tan bajo de crecimiento se necesitaban cuatro décadas para que la población se duplicara;*
- b) Después de 1950 el ritmo de crecimiento demográfico se acelera a tal grado que en sólo dos décadas se duplica la cantidad de habitantes. Esto es, de 1950 a 1970 el crecimiento demográfico anual es de 4 por ciento;...”*

<sup>7</sup> La tasa de crecimiento poblacional es el aumento de la población en un período de tiempo, respecto a la población al inicio del período, esto es:  $T.C. = \frac{P_f - P_i}{P_i}$  donde  $P_f$  es la población final del período y  $P_i$  es la población inicial del período.

<sup>8</sup> <http://www.sidesson.gob.mx/Descargas/coespo/Sonora-Demografico.pdf>



Responde en equipo las siguientes preguntas:

2.1 ¿Qué quiere decir para ti que el crecimiento anual de la población es del dos por ciento?

---

---

---

---

2.2 ¿Qué quiere decir para ti que el crecimiento demográfico anual es del cuatro por ciento?

---

---

---

---

2.3 ¿Crees que es correcta la afirmación que se hace en *a)*? Argumenta tu respuesta.

---

---

---

---

---

2.4 ¿Crees que es correcta la afirmación que se hace en *b)*? Argumenta tu respuesta.

---

---

---

---

---

2.5 De acuerdo a la información de la **Gráfica 2.3**, ¿Cuántos habitantes había en **Sonora** en 1950?

---

---

2.6 Con la información obtenida en **Gráfica 2.3** y sabiendo que en las dos décadas siguientes (1950 a 1970) se tuvo un crecimiento poblacional promedio anual de cuatro por ciento, determina la población que había en **Sonora** en cada uno de los años que se muestran en la siguiente **tabla 2.6**, registra a los lados de la tabla el procedimiento que realizas para hacer los cálculos.

Año	Población
1950	
1951	
1952	
1953	
1954	
1955	
1956	
1957	
1958	
1959	
1960	

Tabla 2.6

2.7 Propón una expresión algebraica para calcular el tamaño de la población en cualquier año posterior a 1950, si la tasa de crecimiento promedio anual se mantiene en cuatro por ciento.

2.8 ¿A partir de qué año la población de Sonora era el doble de la que se tenía en 1950?

\_\_\_\_\_

2.9 De acuerdo a la información de la **Gráfica 2.3**, ¿Es posible determinar el valor de la tasa de crecimiento anual de poblacional promedio durante la última década reportada? Argumenta tu respuesta.

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



## Actividad de Cierre



En esta **Secuencia** se trabajó con situaciones en las que **el porcentaje juega un papel importante tanto para analizar información, como para poder predecir el comportamiento de ciertos fenómenos como salud, la nutrición y el**

**crecimiento poblacional.** Hay momentos en los que los porcentajes están dados de manera directa ya sea en tablas, gráficas o en textos, en esos casos el problema es interpretar lo que representan en cada situación.

Por otra parte, dado que **los porcentajes se pueden expresar como números racionales** y hay **números racionales** que en su presentación como "*decimal*" tienen *expansión decimal infinita*, es muy común que las cantidades que permiten resolver los problemas planteados sean sólo aproximaciones de los valores exactos. En este caso la calculadora juega un papel importante para tener una mejor aproximación ya que entre más potente es la calculadora nos podremos acercar más al número que se quiere obtener.

Para resolver algunos de los problemas planteados, cuando fue necesario realizar operaciones aritméticas tuviste que utilizar las propiedades de los **números reales**, **por ejemplo** cuando se te plantean las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas mujeres adolescentes había en 2012 (aproximadamente)?
- El porcentaje de hombres que tuvieron su primera relación sin protección en 2012, ¿Qué parte representa de los que lo hicieron en 2006?

En la **Actividad 3** se presenta el porcentaje como la tasa de crecimiento poblacional. En este caso es una tasa de crecimiento que se mantiene constante por varios períodos de tiempo, lo cual permite describir el crecimiento poblacional a través de un modelo como el siguiente:

$$\text{Población después de } n \text{ años} = (1 + \text{tasa de crecimiento poblacional anual})^n \text{Población inicial}$$

Lo cual podemos expresar de manera más simplificada de la siguiente forma:

$$P_n = (1 + t)^n P_0$$

Ecuación 2.1

Donde:

- $P_0$  Es la población inicial
- $t$  Es la tasa de crecimiento en un período de tiempo
- $n$  Número de períodos
- $P_n$  Población al final el período  $n$

Esta expresión se puede aplicar a otro tipo de situaciones donde los fenómenos presentan un comportamiento similar al de este tipo de crecimiento poblacional. **Por ejemplo** si tú inviertes en el banco una cantidad de dinero y te pagan los intereses de acuerdo a una tasa mensual fija durante todo el año, entonces para saber cuánto dinero tienes ahorrado en cierto mes del año, si durante todo ese tiempo no sacas dinero del banco, lo puedes calcular a partir de una expresión igual a la **Ecuación 2.1**.

Suponiendo que inviertes \$ 800 a una tasa del 2% mensual, y no retiras el dinero durante un año,

1. **¿Cuánto dinero tendrás ahorrado al finalizar el primer mes?**

2. **¿Cuánto dinero tendrás ahorrado al finalizar el quinto mes?**

3. **¿Cuánto dinero tendrás ahorrado al finalizar el noveno mes?**

4. **¿Cómo le hiciste para responder las preguntas 2 y 3?**

5. **¿Utilizaste la Ecuación 2.1 para responder las preguntas 2 y 3?**

6. **Con los datos de este problema y de acuerdo a lo que se pide en la pregunta 2, ¿Cuánto vale:  $P_0$ ,  $t$ ,  $n$  y  $P_n$ ?**

# Secuencia Didáctica 3.-

## Actividad de Inicio

### Relación proporcional directa e inversa



#### Incremento en el precio de la gasolina.

En la **Tabla 2.7** se muestran los aumentos acumulados al precio de la **gasolina Magna en México**. Como puede verse en esta tabla, al segundo mes le corresponde un aumento de 18 centavos y al multiplicar este mes por 4, el aumento también se cuadruplica y

resulta igual a:  $4 \times .18 = .72$ , se conserva así la razón entre ellas, es decir:  $\frac{.18}{2} = \frac{.72}{8} = .09$

ALZAS A LA GASOLINA DURANTE EL AÑO 2012	
Número de mes	Aumento acumulado en pesos
1	.09
2	.18
3	.27
4	.36
5	.45
6	.54
7	.63
8	.72
9	.81
10	.90
11	.99
12	1.08

Tabla 2.7



Si antes del primer aumento del año 2012, la **gasolina Magna** costaba \$ 9.72 el litro.

1. **¿Cuál fue su porcentaje de aumento en el año 2012?**
  
2. **¿Cuál fue el porcentaje de aumento a la mitad del año 2012?**

Al cierre del año 2012 la **gasolina Magna** costaba \$10.80, pero durante el año 2013 este combustible ha subido 11 centavos mensualmente, como lo muestra la **Tabla 2.8** siguiente:

ALZAS A LA GASOLINA DURANTE EL AÑO 2013	
Número de mes	Aumento acumulado en pesos
1	.11
2	.22
3	.33
4	.44

Tabla 2.8

3. **¿Cuál será el porcentaje de aumento de la gasolina Magna al cierre del año 2013?**

Para que dos cantidades varíen de manera directamente proporcional, se requiere que al variar una de ellas la otra varíe conservando la razón entre ellas, donde variar significa tanto aumentar como disminuir.

4. **¿Qué tipo de variación hay entre estas dos variables?** Argumenta tu respuesta.
  
5. **Si existe relación proporcional directa, determina la constante de proporcionalidad.**





## Actividad: 2

Actividad de Equipo



### Distancias reales representadas a escala

*La Ciudad de Hermosillo* mide aproximadamente 20 Km de norte a sur y de oriente a poniente mide aproximadamente 15 Km. Si queremos dibujar un mapa de la ciudad en una hoja de papel que mide 1.5 m de ancho y 2 m de largo.

1. ¿Cuántas veces tendrás que reducir las medidas de la ciudad para que el mapa completo pueda dibujarse en la hoja de papel?



Mapa de Hermosillo<sup>9</sup>

2. De acuerdo con la reducción que has calculado, ¿cuál es la escala a la que se debe hacer el mapa?
3. La distancia entre el **Boulevard Lázaro Cárdenas** y el **Boulevard Progreso**, viajando por el **Boulevard Morelos** es de aproximadamente tres km, ¿cuánto medirá esta distancia en el mapa?
4. ¿Qué tipo de relación hay entre la distancia real entre dos puntos de *la Ciudad de Hermosillo* y la distancia entre los puntos correspondientes en el mapa? Argumenta tu respuesta.

<sup>9</sup> Mapa publicado en el sitio: <https://maps.google.com.mx/maps?hl=es&q=mapa+hermosillo&ie=UTF-8&hq=&hnear=0x86ce86ae3885b7cd:0x6e16d6063a5efae5,Hermosillo,+SON&gl=mx&ei=xuCXUZiKOpGO9AS2loDgCA&sqi=2&ved=0CCsQ8gEwAA>. Consultado el 15 de mayo de 2013.



Actividad: 3  
Actividad de Equipo



### De Hermosillo a Guaymas

Cuando nos queremos trasladar de un lugar a otro tomamos en cuenta varios factores, **por ejemplo** si queremos viajar en automóvil de una ciudad a otra, por lo regular estimamos la distancia que se tiene que recorrer, el tiempo que se tiene disponible, y en función de ello se hace una estimación de la velocidad promedio a la que debemos viajar para hacer el recorrido en ese tiempo.

**Recuerda**

que la velocidad se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Tiempo}} \quad \text{es decir} \quad v = \frac{d}{t}$$

La distancia que hay que recorrer para trasladarse de *Hermosillo a Guaymas* por la carretera **México 15** es de aproximadamente 130 km. Si tuvieras que viajar en un automóvil de *Hermosillo a Guaymas*.

¿Cuánto tiempo harías de viaje si no haces escalas y tu velocidad promedio es de:

1. 60 km/h?
2. 65 km/h?
3. 70 km/h?
4. 75 km/h?
5. 80 km/h?



6. ¿Cuáles son los elementos que se toman en cuenta para calcular la distancia?
  
7. .En la situación que se plantea del viaje de Hermosillo a Guaymas, ¿Cuál de los elementos que intervienen permanece constante? y ¿Cuáles están variando?
  
8. ¿Qué sucede con el tiempo cuando cambia la velocidad?
  
9. Completa la siguiente tabla con la información que se proporciona relacionada con el viaje de Hermosillo a Guaymas:

Velocidad promedio	Tiempo	Multiplicación de velocidad por tiempo
20 km/h		
30 km/h		
40 km/h		
50 km/h		
60 km/h		
70 km/h		
80 km/h		
90 km/h		
100 km/h		
110 km/h		
110 km/h		
120 km/h		

Tabla 2.9

10. ¿Cómo es el producto de las velocidades por las distancias correspondientes?

11. Si los productos de los valores correspondientes de las variables es constante, se dice que las variables tienen una relación inversamente proporcional. Las variables velocidad y tiempo, ¿tienen una relación directamente proporcional o inversamente proporcional? Argumenta tu respuesta.

12. Grafica en el siguiente plano cartesiano la información que aparece en la **Tabla 2.11**, tomando en cuenta la velocidad y el tiempo que dura el viaje.

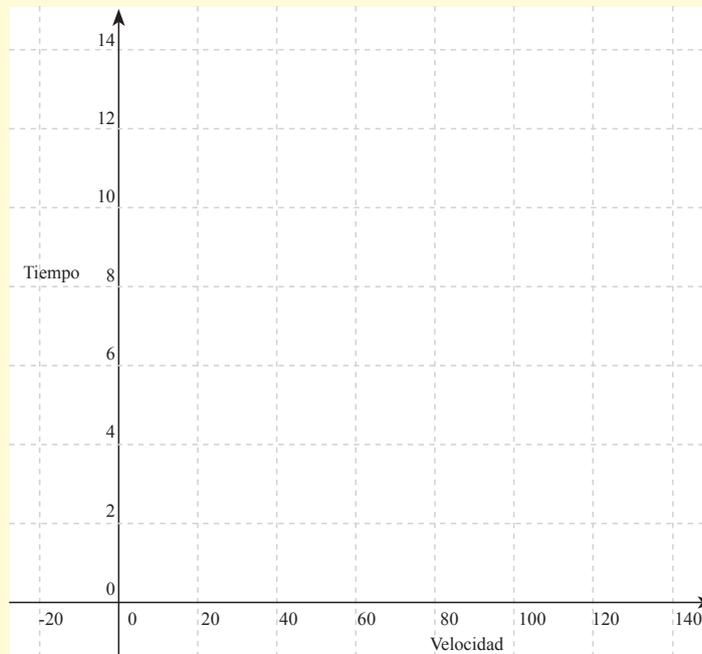


Tabla 2.9

13. Describe el comportamiento de la gráfica.



## Actividad de Cierre



### ¿Directamente proporcional o inversamente proporcional?

En esta **Secuencia** se ha trabajado con *Actividades* orientadas a promover el significado de la **relación directamente proporcional e inversamente proporcional entre dos variables**, para ello se han planteado varias situaciones donde este tipo de relaciones entre variables están presentes.

En las primeras *Actividades* tuviste la oportunidad de trabajar con situaciones en las que el cociente de los valores correspondientes de las variables involucradas se mantiene constante:

Actividad	Variable $x$	Variable $y$	Cociente: $x / y$
1	No. de meses	Incremento acumulado durante 2012	0.09
1	No. de meses	Incremento acumulado durante 2013	0.11

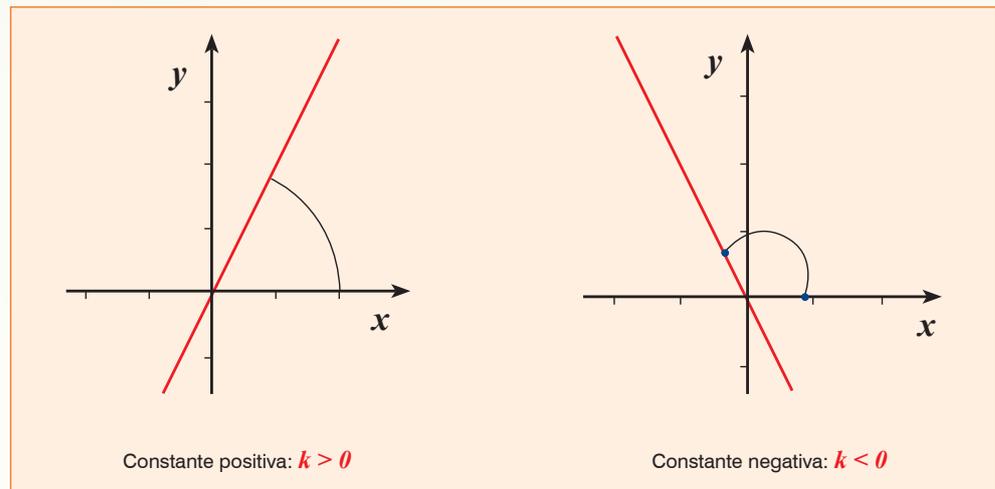
Cuando dos variables se relacionan de esta manera, decimos que tienen una **relación directamente proporcional**, esto es:

*Si el cociente entre dos variables  $x$  e  $y$  es una constante diferente de cero, entonces  $x$  e  $y$  tienen una relación directamente proporcional, es decir:*

$$\frac{x}{y} = k \quad \text{donde } k \neq 0$$

*A la constante  $k$  se le llama constante de proporcionalidad directa. Para que el cociente  $x / y$  tenga sentido, se requiere además que  $y \neq 0$ .*

La representación gráfica de este tipo de relación es la siguiente:



La representación gráfica de la relación directamente proporcional entre dos variables es una línea recta que pasa por el origen. Cuando el ángulo de inclinación es menor de  $90^\circ$  la constante de proporcionalidad es positiva y cuando el ángulo de inclinación es mayor de  $90^\circ$  la constante de proporcionalidad es negativa.

La regla de tres que has utilizado desde primaria, se aplica sólo cuando las variables con las que estás trabajando tienen una relación directamente proporcional, cuando no tienen este tipo de relación entonces la regla de tres simple no funciona.

A partir de la Actividad 3 se presentan situaciones en las que el producto de las variables es lo que permanece constante, tal como se muestra en la siguiente tabla:

Actividad	Variable $x$	Variable $y$	Producto: $xy$
3	Velocidad	Tiempo	130

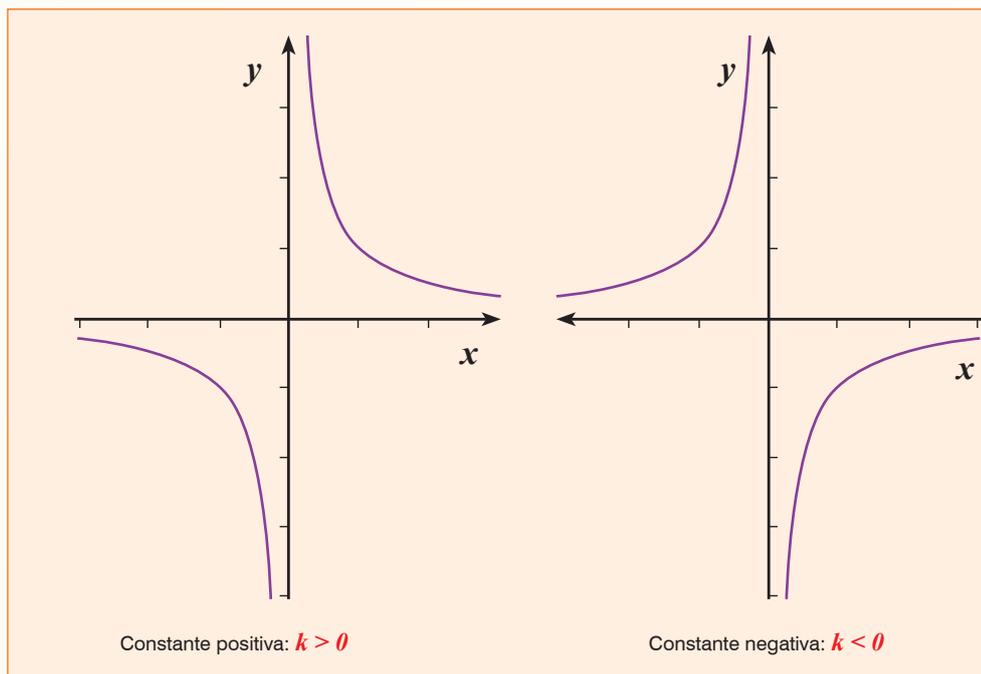
Cuando dos variables se relacionan de esta manera, decimos que tienen una relación inversamente proporcional, esto es:

*Si el producto (multiplicación) de dos variables  $x$  e  $y$  es una constante diferente de cero, entonces  $x$  e  $y$  tienen una relación inversamente proporcional, es decir:*

$$xy = k \quad \text{donde} \quad k \neq 0$$

*A la constante  $k$  se le llama constante de proporcionalidad inversa.*

La representación gráfica de este tipo de relación es la siguiente:



Para ambos tipos de relación se puede dar el caso de que cuando una variable aumente la otra también aumente, o que cuando una disminuya la otra también, esto dependerá del signo que tenga la constante de proporcionalidad en cada caso.

No es fácil identificar en la vida cotidiana relaciones de este tipo en las que la constante sea negativa, pero ello no quiere decir que no existan.

Sección  
de problemas



1. Grafica sobre la recta numérica las siguientes números reales:

2                    -3                     $\frac{4}{5}$                      $-\frac{8}{3}$                      $\sqrt{5}$                      $-\sqrt{7}$



2. Encuentra la representación  $\frac{a}{b}$  de los siguientes números racionales:

- a) 0.467
- b) 4.7823
- c) 0.367936793679 ...
- d) 23.9999 ...
- e) 0.25789789789 ...
- f) 3.45323232 ...

3. Identifica las siguientes propiedades en la siguiente sopa de letras las siguientes propiedades: **Neutro suma**, **Cerradura**, **Asociativa**, **Conmutativa**, **Distributiva** e **Inverso suma**.

B	S	R	N	Y	P	H	D	R	B	M	Ñ	P	A	D
T	C	Y	U	I	O	P	A	S	D	F	G	M	H	J
X	O	E	P	O	I	U	Y	T	R	E	U	E	D	W
C	N	P	R	S	N	E	U	T	R	O	S	U	M	A
V	M	L	S	R	Q	X	C	V	A	N	S	Q	N	K
B	U	R	T	Q	A	G	F	V	M	T	Z	W	D	V
N	T	D	Y	X	E	D	I	Ñ	R	F	P	Ñ	L	P
M	A	B	O	C	I	A	U	I	V	A	Y	P	H	D
Ñ	T	B	Ñ	I	N	V	E	R	S	O	S	U	M	A
L	I	M	H	I	C	U	N	B	A	P	O	I	U	Y
K	V	W	C	X	T	V	Z	A	S	K	D	F	N	Y
J	A	S	O	C	I	A	T	I	V	A	U	J	U	I
H	Q	P	I	Q	T	R	S	B	U	T	E	V	A	O
A	D	I	S	T	R	I	B	U	T	I	V	A	T	R
G	M	A	S	N	E	U	T	R	O	M	U	L	T	I



4. En el siguiente recibo del predial se propone una forma de pago al usuario.

**BOLETA DE PAGO IMPUESTO PREDIAL**

Folio goberno: 062791 D.V.5

Clave catastral

Nombre

Ubicación

CONCEPTO	IMPORTE
Al 31 de Enero de 2013 (1) 20%	\$966.34
Al 28 de Febrero de 2013 (2) 10%	\$1,082.75
Al 31 de Marzo de 2013 (3) 5%	\$1,140.96

MUNICIPIO DE HERMOSELLO TESORERÍA MUNICIPAL, Comercio y Bienes Públicos, Heróles, Hermosillo, Sonora.  
 LA REPRODUCCIÓN APOCRIFA DE ESTE DOCUMENTO CONSTITUYE UN DELITO EN LOS TÉRMINOS DE LAS DISPOSICIONES FISCALES.  
 PUEDE PAGAR EN MODULOS DE TESORERÍA MUNICIPAL, BANCOMER, BANAMEX, HSBC, BANORTE, SCOTIABANK, SUPER DEL NORTE Y DIOXO.

**BANCOMER**  
 (1) 21853541933022-54  
 (2) 21853552935852-06  
 (3) 21853563939212-55

CIE: 8419

1. ¿Cuál es el monto que deberá pagar el usuario si no se le aplica descuento?
2. ¿Cuánto ahorra el usuario si paga en la primera fecha que se señala en el recibo?
3. ¿Qué porcentaje de descuento le están ofreciendo si paga en la segunda fecha que se señala en el recibo de pago?
4. La política del ayuntamiento es aplicar un descuento del 50% a las personas de la tercera edad. Si el usuario es de la tercera edad, ¿Cuánto deberá pagar por el predial?

5. Edad de adolescentes vs crecimiento

Año/mes	Estatura Promedio	Número de mes	Crecimiento acumulado promedio en mm
14:0	159.8	0	0
14:1	160.0	1	2
14:2	160.2	2	4
14:3	160.4	3	6
14:4	160.6	4	8
14:5	160.7	5	9
14:6	160.9	6	11
14:7	161.0	7	12
14:8	161.2	8	14
14:9	161.3	9	15
14:10	161.4	10	16
14:11	161.6	11	18
15:0	161.7	12	19
15:1	161.8	13	20
15:2	161.9	14	21
15:3	162.0	15	22
15:4	162.0	16	22
15:5	162.1	17	23
15:6	162.2	18	24
15:7	162.3	19	25
15:8	162.3	20	25
15:9	162.4	21	26
15:10	162.4	22	26
15:11	162.5	23	27
16:0	162.5	24	27

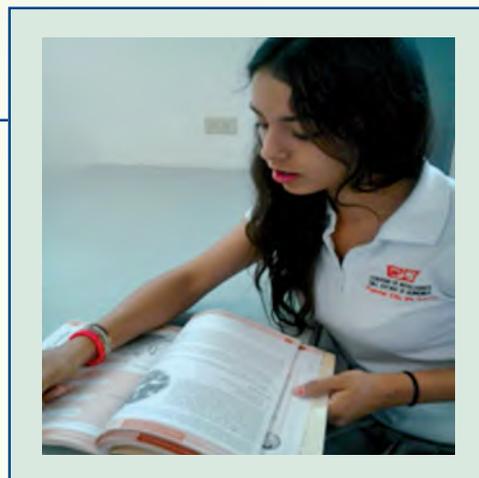
Tabla 2.10

<sup>10</sup> La Tabla ha sido construida con los datos publicados por la OMS (WHO por sus siglas en Inglés) en [http://www.who.int/growthref/sft\\_hfa\\_girls\\_z\\_5\\_19years.pdf](http://www.who.int/growthref/sft_hfa_girls_z_5_19years.pdf) (consultados el 1 de mayo de 2013)

En muchos fenómenos estudiados por la ciencia, aparecen cantidades relacionadas unas con otras. Las regularidades que pueden observarse en estas relaciones pueden ser muy simples. En la tabla, **por ejemplo**, se muestra la edad en años y meses cumplidos comparada con la estatura que se espera que alcance una adolescente según los criterios empleados por la **Organización Mundial de la Salud (OMS)**<sup>10</sup>



1. ¿Qué tipo de relación existe entre las variables edad y crecimiento promedio acumulado de la estatura? ¿Son directamente o inversamente proporcionales (en cualquiera de estos proporciona la constante de proporcionalidad)? Argumenta tu respuesta



El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

*En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

### Problema 1.

**a) Los siguientes números racionales, ¿Tienen expansión decimal finita o infinita?**

Argumeta tu respuesta.

$$\frac{4}{5} \quad \frac{3}{14} \quad \frac{9}{4} \quad -\frac{17}{20} \quad \frac{11}{6}$$

**b) Expresa los siguientes números racionales con su expansión decimal:**

$$\frac{13}{6} \quad \frac{7}{5} \quad \frac{5}{14} \quad -\frac{13}{10} \quad \frac{7}{4}$$

**c) Expresa como razón de dos números enteros los siguientes números racionales:**

$$0.025 \quad 0.457457\dots \quad 0.46 \quad 0.555\dots \quad 3.26 \quad 7.282828\dots \quad 1.042567567567\dots$$

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 1:

¿Qué criterio utilizaste para determinar el tipo de expansión decimal que tienen los números racionales?	¿Qué operación u operaciones realizaste para convertir los números en su forma "decimal"?	¿Qué dificultades tuviste para hacer la conversión que se solicita en el inciso c) del problema?

### Problema 2.

Una persona solicitó un préstamo a la caja de ahorro de la empresa donde trabaja, si paga en el transcurso del mes no genera intereses, pero si no paga completo el préstamo deberá pagar mensualmente el 5% sobre la cantidad solicitada. Esta persona solicitó \$12,000, a los seis meses no se ha reportado a pagar y le llaman para hacerle una propuesta de pago: le proponen que pague en el transcurso del siguiente mes y que le harán un descuento del 40% de los intereses que debe.

Si paga como le proponen en la caja de ahorro, **¿Cuánto deberá pagar en total?** y **¿Cuánto se ahorrará por concepto de intereses?**

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 2:

¿Qué estrategia utilizaste al resolver el problema?	¿Qué ideas y conceptos matemáticos de los que se discutieron en este bloque utilizaste?

**Problema 3.** Identificar cuáles de las siguientes relaciones entre variables son directamente proporcionales, inversamente proporcionales (en cualquiera de estos casos proporciona la constante de proporcionalidad) o ninguna de estas dos. En cada caso argumenta tu respuesta.

Grados Centígrados	Grados Fahrenheit
5	41
10	50
20	68
35	95
40	104

Tiempo (en horas) transcurrido desde que se abrió la llave de un tinaco lleno de agua	Cantidad de agua (en litros) que le queda al tinaco
3	860
4	780
6	620
7	540
10	300

Número de litros de leche	Costo (en pesos)
2	25
5	62.50
6	75
8	100
9	112.50

Solución:

Reflexiones relacionadas con el **problema 3:**

¿Cómo le hiciste para determinar el tipo de relación que hay entre las variables de cada tabla?	¿Qué tipo de dificultades tuviste para resolver el problema?	¿En cuál de los tres casos tuviste más dificultad para identificar el tipo de relación que hay entre las variables?

Reflexiones Generales relacionadas con el **BLOQUE 2**

1. ¿El trabajo en equipo te permitió comunicar tus ideas a los compañeros?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
2. ¿El trabajo en equipo y grupal te dio la oportunidad de modificar tus respuestas y/o estrategias al enfrentar los problemas?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
3. ¿Lograste interpretar correctamente las ideas que se presentan en las actividades en el texto, sin la ayuda de tus compañeros o el profesor?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
4. ¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
5. ¿Tomaste la iniciativa de expresar a tus compañeros o al profesor alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
6. ¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
7. ¿Recurriste a las referencias que te proporcionan en el texto para profundizar sobre la problemática que se presenta en las actividades o para profundizar en los temas de matemáticas que se están trabajando?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
8. ¿Has intentado mejorar tus hábitos de estudio (tiempo que le dedicas al estudio fuera de la escuela o trabajar más en equipo, etc.) con el propósito de mejorar tus resultados académicos?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
9. Señala los tres aspectos que consideras más importantes en este bloque:	<ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul>			





# BLOQUE 3

Realiza...

## Sumas y Sucesiones de Números

### Introducción:

En este bloque continuarás trabajando con los **números reales** y con **expresiones algebraicas**, pero ahora la atención estará centrada en el papel que juegan éstos en las sucesiones y series numéricas, las cuales podrás expresar en términos **algebraicos** para identificar el enésimo término de la **sucesión** o las series que se obtengan.

El bloque está integrado por dos secuencias, en la primera se pretende que profundices en la modelación **algebraica** de situaciones que se expresan verbalmente; mientras que en la segunda secuencia tendrás la oportunidad de trabajar específicamente sobre la identificación de patrones que te permitan representar al enésimo término de una sucesión numérica, así como discriminar entre sucesiones **aritméticas** y **geométricas**.

De la misma manera que en los bloques anteriores, tendrás la oportunidad de seguir utilizando la calculadora como un recurso de cálculo y verificación, además de interpretar información proporcionada en tablas, gráficas y/o textos. La resolución de problemas seguirá siendo el hilo conductor para que desarrolles los conocimientos **matemáticos** que ya se han mencionado, así como las habilidades que requieres para comunicar tus ideas, en el lenguaje propio de las **Matemáticas**, a los compañeros del grupo.

# Secuencia Didáctica 1.-

## Actividad de Inicio

### Representaciones Algebraicas



#### Números múltiplos

**Los números enteros**, como ya se vio en la escuela secundaria, forman un conjunto que usualmente se escribe como:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Uno de sus subconjuntos más conocidos es el conjunto de los **números naturales**:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots\}$$

Entre los números enteros hay algunos que al dividirlos entre el número 2, el resultado es otro número entero, **por ejemplo** ( $\frac{56}{2} = 28$ ); en este caso, como la división es exacta decimos que 56 es divisible por 2, afirmación que podemos hacer también de cualquiera de las maneras siguientes, tomando en cuenta que si ( $\frac{56}{2} = 28$ ), entonces  **$56 = 2 \times 28$** :

- 2 es un divisor de 56 .
- 2 es un factor de 56 .
- 56 es un múltiplo de 2 .

Recuerda que un número entero  **$m$**  es **múltiplo** de otro número entero  **$n$**  si  **$m$**  se puede expresar como **la multiplicación de  $n$  por un número entero, por ejemplo**:

- $m=12$**  es múltiplo de  **$n=2$**  porque  **$12=2 \times 6$**
- $m=-15$**  es múltiplo de  **$n=5$**  porque  **$-15=5 \times (-3)$**
- $m=42$**  es múltiplo de  **$n=6$**  porque  **$42=6 \times 7$**

1. **Para cada uno de los siguientes números enteros escribe dos múltiplos y argumenta tu respuesta:**

Números	Múltiplos	Argumentos
- 4		
- 9		
- 12		
21		

Un número entero se dice que es par, si es divisible por 2 o múltiplo de 2; en cualquier otro caso se dice que es impar. Los enteros pares son por lo tanto:

$$\{\dots, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

Y los enteros impares son:

$$\{\dots, -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

Como una manera de resaltar que todos los pares son múltiplos de 2, este conjunto se escribe a veces como:

$$\{\dots, 2(-6), 2(-5), 2(-4), 2(-3), 2(-2), 2(-1), 2(0), 2(1), 2(2), 2(3), 2(4), 2(5), 2(6), \dots\}$$

2. **¿Cuáles de los siguientes números son pares y cuáles son impares?**

Justifica tu respuesta.

35 \_\_\_\_\_ -26 \_\_\_\_\_ 99 \_\_\_\_\_ -45 \_\_\_\_\_ 18 \_\_\_\_\_



## Desarrollo



### Expresar características de los números algebraicamente



La escuela nos ha familiarizado con conjuntos numéricos como éstos, en los que podemos distinguir con facilidad un número par de un impar, pero algunos problemas

matemáticos suelen exigir algo más que eso. Con frecuencia se requiere, por ejemplo, referirnos a un “par cualquiera” y entonces denotaremos este número como  $2n$ , donde  $n$  es un número entero, enfatizando así que todo número par es un múltiplo de 2 y que además todo número par es de esta forma. Para denotar los números impares, observamos que al restar el número 1 a un número par, se obtiene un impar, entonces podemos decir que los impares tienen la forma  $2n - 1$ .

Supongamos ahora que necesitamos referirnos al “producto de dos pares consecutivos cualesquiera”, algunas de nuestras opciones serían:

- a)  $(324)(326)$
- b)  $rs$  donde  $r$  y  $s$  son números pares consecutivos cualesquiera
- c)  $m(m + 2)$  donde  $m$  es un entero par
- d)  $(2n)(2(n + 1))$  donde  $n$  es un número entero

En el primer inciso se trata de dos números pares consecutivos en particular y por lo tanto no se trata de “dos pares consecutivos cualesquiera”, se refiere

solamente a los números pares escogidos. Los tres casos restantes son correctos, pero unas formas de escribir este producto son mejores que otras. En el inciso **b)**,  $r$  y  $s$  son dos pares consecutivos porque así lo especifica el texto que los acompaña, pero la relación entre dos pares consecutivos es muy precisa, y con esta manera de representarlos no se hace explícita esta relación.

Mientras que en el inciso **c)**, efectivamente  $m$  y  $m + 2$  son pares consecutivos puesto que  $m$  es un par, pero al igual que en el inciso **b)**, llamar  $m$  a un par no muestra su característica principal de ser un múltiplo de  $2$ . En cambio en el inciso **d)**, se han tomado los enteros consecutivos  $n$  y  $n + 1$  para construir los pares consecutivos  $2n$  y  $2(n + 1)$ . Las ventajas de esta notación pueden apreciarse al resolver problemas como el planteado en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo:** Justifica por qué el producto de dos enteros pares consecutivos es siempre un múltiplo de  $4$ . Si  $2n$  y  $2(n + 1)$  representan a dos enteros pares consecutivos cualesquiera, entonces el producto puede escribirse como:

$$(2n)[2(n + 1)] = 4[n(n + 1)]$$

Y como  $(n)(n+1)$  es un número entero, puesto que  $n$  y  $n + 1$  son números enteros, entonces el producto de  $2n$  y  $2(n+1)$  se ha expresado como el producto del número  $4$  por otro número entero, por lo tanto es siempre un múltiplo de  $4$ .



1. Usa la notación de los incisos **b)** o **c)**, para argumentar por qué el producto de dos enteros pares consecutivos es siempre un múltiplo de  $4$ . Compara tu justificación con la que se muestra en el ejemplo anterior y describe las dificultades que has encontrado.



Dos números naturales consecutivos	Producto de los números
$84,85$	$7140$
$(n)(n + 1)$	
$(2n)(2n + 1)$	
$(n - 1)(n)$	

Tabla 3.1

2. Usa la calculadora para completar la **Tabla 3.1**, escribiendo en la primera columna dos números naturales consecutivos, el primero de los cuales es par, y en la segunda columna el producto de estos dos números.
  - 2.1 Formula una conjetura sobre el tipo de números que has obtenido en la columna de los productos.
  - 2.2 Usa alguno de los resultados obtenidos en los tres últimos renglones de la para argumentar a favor de tu conjetura


 Actividad Individual

3. Usa la calculadora para completar la **Tabla 3.2**, escribiendo en la primera columna tres números naturales consecutivos y en la segunda columna el producto del mayor por el menor. Toma el primer renglón como ejemplo

Tres números naturales consecutivos	Producto de los números
<b>7,8,9</b>	<b>63</b>
<b><math>(n - 1), (n), (n + 1)</math></b>	
<b><math>(n), (n + 1), (n + 2)</math></b>	

Tabla 3.2

- 3.1 Observa en cada renglón el producto que obtuviste en la segunda columna y describe la relación que existe entre el producto que calculaste y el número intermedio de la primera columna.
- 3.2 En los dos últimos renglones de la **Tabla 3.2**, escribe el producto de las expresiones como mejor te convenga, tomando en cuenta que lo usarás para argumentar por qué se cumple la relación que encuentre.
- 3.3 Usa uno de los dos últimos renglones de la **Tabla 3.2** para argumentar por qué se cumple la relación que encuentre.

## Actividad de Cierre



En esta **Secuencia** se ha promovido que se haga la representación general, en términos de expresiones algebraicas, de números que tienen ciertas propiedades, **por ejemplo**: que son pares, que son impares, que son consecutivos, múltiplos y además algunas operaciones que se pueden realizar entre ellos.

**Para los números enteros pares es importante destacar su característica principal que es el hecho de ser divisible por 2 y por tanto múltiplo de 2**, por lo que en algunos de los problemas anteriores hemos usado la expresión  $2n$  para referirnos a los números pares. No existe una razón especial para usar la letra  $n$ , los pares se pueden también escribir como  $2m$ ,  $2k$ ,  $2i$ ,  $2j$  o cualquier otra letra multiplicada por  $2$ , con la única condición que las letras, al igual que la  $n$ , representen cualquier número entero. Esto significa que los números pares tienen esta forma o dicho de otra manera:

**Todo número par puede expresarse como  $2n$ , donde  $n$  es un número entero.**

De la misma manera hemos visto que los números enteros impares son aquellos enteros que no son pares, por ello la manera de representar a cualquiera de ellos puede hacerse en los siguientes términos:

**Todo número impar puede expresarse como  $2n - 1$ , donde  $n$  es un número entero.**

De esta manera podemos encontrar la expresión algebraica para números que cumplan cierta condición o para establecer la relación que se pueda presentar entre dos o más números, como los que se muestran en la **Tabla 3.4**.

Condición	Expresión o expresiones
Dos números consecutivos	$n$ y $n + 1$
La suma de dos números enteros consecutivos	$n + (n+1)$
El producto de dos números enteros consecutivos	$n \times (n+1)$
El triple de un número	$3x$
La mitad de un número	$\frac{y}{2}$
La suma del triple de un número más la mitad de otro número.	$3x + \frac{y}{2}$

Tabla 3.4

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

## Sucesiones y Series



### Sucesión con arreglos de latas

En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números.

En los libros de texto de secundaria podemos encontrar varias definiciones de una sucesión numérica, en Briseño<sup>1</sup> (2009) se define de la siguiente manera:

**“Una sucesión es una colección ordenada de números que se construyen a partir de una regla dada. Esta regla puede darse mediante una expresión algebraica que se evalúa ordenadamente en los números naturales 1, 2, 3...”**

En la **Figura 3.1** se muestran los tres primeros términos de una sucesión, formada por latas sobrepuestas.

			
Término 1	Término 2	Término 3	Término 4

Tabla 3.1

<sup>1</sup> Briseño, L., Carrasco, G., Martínez, P., Palmas, O., Struck, F., Verdugo, J.: (2009) Matemáticas 2. Santillana, p. 162



1. Construye el cuarto término.
2. ¿Cuántas latas tiene el quinto término?
3. ¿Cuántas latas tiene el doceavo término?
4. Describe el comportamiento del número de latas respecto al número del término.  

---

---

---

---
5. Describe la relación que hay entre un término de la sucesión y el término anterior.  

---

---

---

---
6. Encuentra una expresión algebraica que represente a cualquier término de la sucesión a partir del término anterior.



## Desarrollo



### Caja de Ahorros

Para promover el ahorro en una empresa a los empleados de nuevo ingreso les proponen ingresar a la caja de ahorro. Para motivarlos la empresa les abre la cuenta

depositándoles **\$ 500**, pero los empleados deberán ahorrar **\$ 200** mensuales y la empresa les deposita otros **\$ 200** cada mes.

Cuando el trabajador quiere retirar sus ahorros le entregan los **\$ 500** más las aportaciones mensuales del trabajador y de la empresa.

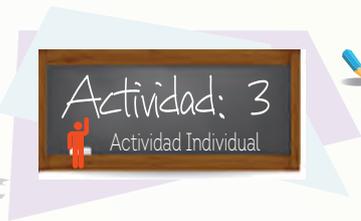
Un trabajador que ingresa el primero de agosto de 2013, desea saber cuánto recibirá si retira sus ahorros. Para apoyarse al registrar los datos que obtiene al realizar los cálculos utiliza la siguiente tabla:

Cantidad ahorrada al terminar el mes											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
\$ 900											

Tabla 3.5

1. Completa la información que falta en la tabla en la **Tabla 3.5**.
2. ¿Cuál es la relación que hay entre la cantidad ahorrada en un mes respecto a la cantidad ahorrada el mes anterior?
3. ¿Cuánto se incrementa mensualmente el ahorro?
4. ¿En el cuarto mes, cuantas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?

5. ¿En el noveno mes, cuántas veces se acumuló la cantidad que se incrementa mensualmente?
  
6. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes 18?
  
7. ¿Cuánto tendrá ahorrado al terminar el mes  $n$  ?



### Cambiando la forma de representar una sucesión

En secundaria trabajaste con sucesiones de números que mantenían alguna dependencia entre ellos, es decir, existía alguna relación entre ellos; misma que estaba especificada verbalmente en un texto, en una expresión algebraica o implícitamente en la misma sucesión de números.

Llena lo que falta en la **Tabla 3.6**.

<i>Sucesiones numéricas expresadas de diferente manera</i>		
<b>Desarrollada</b>	<b>Expresión</b>	<b>Texto</b>
	$2n+3$	
		El primer término es 2 y los demás términos se obtienen al multiplicar el anterior por cinco
5, 9, 13, 17...		
1, 3, 9, 27...		

Tabla 3.6

En las *Actividades* cubiertas hasta este momento en el **BLOQUE 3** han aparecido varios tipos de sucesiones, por ejemplo en la **Tabla 3.5** se muestran cuatro. *La primera y la tercera tienen una característica común: sus términos, a partir del segundo se generan sumando una cantidad constante al término anterior, tal como ocurre también en la siguiente sucesión:*

$$1, 4, 7, 10, 14, \dots,$$

Que también puede escribirse como:

$$1, 1 + 3, 1 + 2(3), 1 + 3(3), \dots, 1 + (n - 1)(3),$$

En la cual sumamos tres unidades a cada término para obtener el siguiente. A las sucesiones que tienen estas características se les llama **sucesiones o progresiones aritméticas**.

*Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante ( $k$ ), y se pueden representar de la siguiente manera:*

$$a, a + k, a + 2k, a + 3k, \dots, a + (n - 1)k$$



Enésimo término

En cambio la segunda y cuarta sucesión numérica de la **Tabla 3.5**, tienen un comportamiento similar al de la siguiente:

$$2, 8, 32, 128, \dots,$$

Que también puede escribirse como:

$$2, 2(4), 2(4^2), 2(4^3), \dots, 2(4^{n-1})$$

Donde se tiene que multiplicar cada término por cuatro para obtener el siguiente. A las sucesiones que se generan de esta manera se les llama **sucesiones o progresiones geométricas**.

*Las sucesiones o progresiones geométricas son aquellas en las que el cociente de dos términos consecutivos es una constante ( $r$ ), y se pueden representar de la siguiente manera:*

$$a, a(r), a(r^2), a(r^3), \dots, a(r^{n-1}), \dots$$



Enésimo término



## Suma de los términos de una sucesión numérica

Una *Actividad* muy común para recabar fondos en las escuelas son las rifas en sus diferentes variantes. En la mayoría de ellas el comprador sabe cuánto debe pagar antes de escoger el boleto o número con el que participará en la rifa, pero hay un tipo de rifa en la que el comprador no sabe de antemano cuánto debe pagar para participar en ella, pues el costo del boleto está en función del número seleccionado.

Seguramente tú ya has participado en este tipo de rifas, en las que el costo en pesos equivale al número que hayas seleccionado; *por ejemplo* si el número que obtuviste es el 5 te corresponde pagar cinco pesos, si el número es 16 te corresponde pagar 16 pesos, y así sucesivamente. Al organizar una de estas rifas se decide hacer 100 boletos numerados del 1 al 100.

1. Si cada cuadro de la siguiente cuadrícula representa uno de los boletos que se venderán, etiquétalos


Si ordenas los números de los boletos podrás darte cuenta que se obtiene una sucesión aritmética, ya que para obtener un nuevo término de la sucesión se le suma una unidad al término anterior. Una pregunta interesante en este tipo de situaciones es saber cuánto se reunirá de dinero si se venden todos los boletos.

2. Utilizando la calculadora, determina la cantidad de dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos.

3. ¿Cómo le hiciste para calcular el dinero que se reunirá, si se venden todos los boletos?

A la suma de los términos de una sucesión aritmética se le llama **Serie aritmética**, y por lo regular se representa de la siguiente manera:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  donde  $n$  es un número natural, cuando es finita la sucesión, y

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ , cuando la sucesión es infinita.

**Esta definición también es válida para las series geométricas, en cuyo caso los que se suman son los términos de una sucesión geométrica.**

4. Para resolver de una manera rápida el problema de la rifa es posible obtener una expresión algebraica como la siguiente:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Que representa la suma de los primeros  $n$  números de la sucesión aritmética. Con esta expresión algebraica calcula la suma de los primeros:

4.1 **Tres términos.**

4.2 **Seis términos.**

4.3 **20 términos.**

4.4 **100 términos.**

Y en cada caso verifica los resultados sumando cada uno de los números con la calculadora, salvo en el 4.4 porque ya lo hiciste en 2.



## Actividad de Cierre



En esta **Secuencia** se presentaron situaciones que dieron origen a la formación de sucesiones numéricas en diferentes contextos como el meramente numérico, el de las figuras, los ahorros, rifas, etc., tuviste la oportunidad de trabajar con sucesiones aritméticas y geométricas, las cuales fueron definidas en el cuerpo de

las actividades porque la situaciones planteadas así lo ameritaban.

De esta manera en la **Actividad 4** se definió lo que es una sucesión aritmética y una sucesión geométrica de la siguiente manera:

**Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante ( $k$ ), y se pueden representar de la siguiente manera:**

$$a, a + k, a + 2k, a + 3k, \dots, a + (n - 1)k$$



*Enésimo término*

Lo cual equivale a decir que los términos de una sucesión aritmética se obtienen sumando una constante al término anterior, por ejemplo en la siguiente sucesión:

$$6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$$

**¿Es cierto que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante (respetando el orden: el mayor menos el menor o viceversa)?**

Argumenta su respuesta

---

---

---

---

---

Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, **¿cuál es el valor de  $k$ ?**

*Las sucesiones o progresiones aritméticas son aquellas en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es una constante ( $r$ ), y se pueden representar de la siguiente manera:*

$$a, a(r), a(r^2), a(r^3), \dots a(r^{n-1}), \dots$$



*Enésimo término*

Lo cual equivale a decir que los términos de una sucesión o progresión aritmética se obtienen multiplicando el término anterior por una constante, **por ejemplo** en la siguiente sucesión:

$$3, 15, 75, 375, 1875, 9375, \dots$$

**¿Es cierto que el cociente entre dos términos consecutivos es una constante (respetando el orden: el mayor entre el menor o viceversa)?** Argumenta su respuesta

---



---



---



---

Si la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, **¿cuál es el valor de  $r$ ?**

Además de caracterizar estos dos tipos de sucesiones, se señaló que hay ocasiones donde es necesario recurrir a la suma de los términos de una sucesión para resolver el problema que se plantea. En la *Actividad 4* se presenta una situación como ésta y se resuelve con el uso de la herramienta aritmética normal, es decir utilizando la calculadora para sumar de manera directa los términos de la sucesión. Además se propone una forma simplificada de hacer el cálculo a través de una expresión algebraica, y con el uso de la calculadora se verificó que sí funciona para ese caso.

Además se definió lo que son las **series aritméticas** de la siguiente manera:

*A la suma de los términos de una sucesión aritmética se le llama **Serie aritmética**, y por lo regular se representa de la siguiente manera:*

*$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  donde  $n$  es un número natural, cuando es finita la sucesión, y  $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ , cuando la sucesión es infinita.*

Y tal como se señala en la *Actividad 4*, si lo que se suma son los términos de una sucesión o progresión geométrica, entonces lo que se tiene es una **serie geométrica**.



1. Completa la siguiente tabla:

Verbal	Expresión algebraica
El triple de un número	
La suma de dos números consecutivos múltiplos de 4	
Un número impar elevado al cuadrado	
La suma de los primeros $m$ números pares	
	$5(2n)$ donde $n$ es un número entero
	$3p + 3(p + 1)$ donde $p$ es un número entero
	$\frac{m}{n}$ donde $m$ y $n$ son números enteros y $n \neq 0$

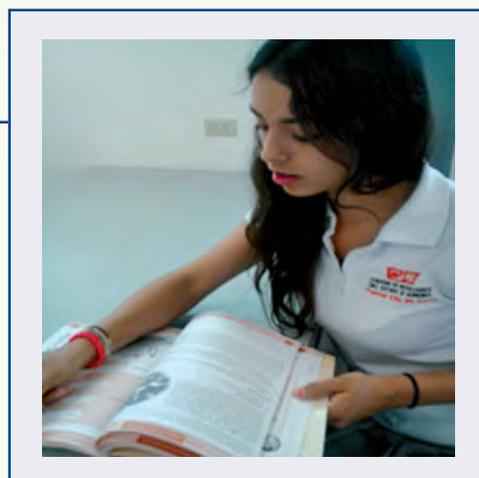
- Verifica que la suma de dos números enteros impares cualesquiera dan como resultado un número par.
- Determina una expresión algebraica para obtener la suma de los primeros números múltiplos de 3.
- Genera los primeros diez términos de una sucesión aritmética cuyo tercer término es 16 y la constante es 6.



5. El cuarto término de una sucesión geométrica es 24, ¿cuál es el primer término si la constante es dos?
6. Una población de canguros, en una región de Australia, es diezmada por una enfermedad que mata la tercera parte de la población cada mes. Si la población es de 300 000 canguros, ¿en cuántos meses la población se habrá reducido a menos de 20 000?
7. La computadora de **Pedro** es infectada por un virus informático. El virus funciona así: se envía por correo electrónico de manera automática a todos los contactos de correo de **Pedro** y después de hacer esto, inutiliza la computadora. Si el virus logra infectar 50 computadoras en un día, entre los contactos de **Pedro** cada contacto infecta a su vez en el transcurso de un día a 50 de sus contactos, entonces:
- a) Completa la tabla donde se registran el total de computadoras que el virus logra inutilizar conforme pasan los días.

Día	Computadoras inutilizadas
1º	$1 + 50$
2º	$1 + 50 + 50^2$
3º	
4º	
5º	
6º	
7º	

- b) Usando la fórmula para sumar series geométricas, calcula el total de computadoras inutilizadas por el virus en siete días.



El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

*En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

**Problema 1.** De las sucesiones numéricas que se presentan en la siguiente tabla identifica de qué tipo son:

Sucesión numérica	Tipo de sucesión	Valor de la constante
4, 12, 36, 108, 324		
2, 4, 5, 9, 14, 20, 27		
$8(4^{n-1})$ donde $n$ es número natural		
2, 4, 16, 256		
$5 + 6n$ donde $n$ es número natural		
3, 10, 17, 24, 31, 38, 45		

Procedimientos o cálculos:

Reflexiones relacionadas con el problema 1:

¿Cómo le hiciste para determinar el tipo de sucesión en cada caso?

¿Qué estrategia utilizaste para determinar el valor de la constante cuando identificaste que era sucesión aritmética?

¿Cómo le hiciste para determinar el valor de la constante cuando identificaste que era sucesión geométrica?

¿Qué te resultó más difícil, identificar las sucesiones aritméticas o las geométricas?

¿En qué tipo de representación te resultó más difícil identificar el tipo de sucesión, cuándo está desarrollada o cuándo está en la forma de expresión algebraica?

**Problema 2.** El quinto término de una sucesión aritmética es **29**, el octavo es **47** y el noveno es **53**. Determina el valor de la constante y los primeros siete términos de la sucesión.

Solución:

Reflexiones relacionadas con el **problema 2:**

¿Qué hiciste para determinar el valor de la constante?

¿Cómo le hiciste para obtener el primer término de la sucesión?

De lo que aprendiste en este bloque, ¿Qué fue lo usaste para resolver el problema?

¿Cuál fue la mayor dificultad que tuviste para resolver el problema?

**Problema 3.** Un banco paga un interés anual del 3%. Un inversionista A que deposita 800 000.00, recibe al año  $800\,000.00 + .03 \times 800\,000.00 = 1.03 \times 800\,000.00 = 824\,000.00$ . Si reinvierte este dinero a la misma tasa de interés, a los dos años recibirá:

$$1.03 \times 1.03 \times 800\,000.00 = 1.03^2 \times 800\,000.00$$

Si reinvierte todo lo que recibe, el tercer año recibirá:  $1.03^3 \times 800\,000.00$

Supón que el inversionista reinvierte cada año su capital y que la tasa de interés no cambia. Usa la calculadora para responder las preguntas siguientes:

- a) **¿Cuánto recibirá del banco el inversionista A a los ocho años?**
- b) **¿Cuántos años serán necesarios para que el inversionista A duplique su capital?**

Solución:

Reflexiones relacionadas con el **problema 3**:

Describe lo que hiciste para responder la primera pregunta.	¿Qué estrategia utilizaste para encontrar el número de años que se necesitan para que se duplique el capital?	¿Consideras que es suficiente lo que se trabajó en el bloque para responder la segunda pregunta? Argumenta.

Reflexiones Generales relacionadas con el **BLOQUE 3**

1. Antes de iniciar el trabajo con este material de Matemáticas I, ¿ya acostumbrabas trabajar en equipo?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
2. ¿Te ha permitido aprender mejor el trabajar en equipo?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
3. ¿El trabajo en equipo ha cambiado tu forma de comunicarte con tus compañeros?	Sí, he mejorado	Sí, he empeorado	No, ya era bueno para eso	No, sigo teniendo problemas para hacerlo
4. ¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
5. Hasta este momento, ¿Has tomado con seriedad la sección de autoevaluación de los tres bloques que has trabajado?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
6. ¿Al presentarse una dificultad al resolver las actividades en clase o en las tareas, tomas la iniciativa de preguntar tus compañeros o al maestro?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
7. En lo que va del semestre, ¿Con qué frecuencia has asistido a asesorías de matemáticas para consultar dudas que te quedan de las actividades?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
8. ¿Has pensado en lo quieres estudiar a nivel universitario?	Nunca	Pocas veces	Frecuentemente	Siempre
9. ¿Consideras que has mejorado tu forma de argumentar a favor de tus estrategias, cuando tienes que convencer a uno de tus compañeros o al maestro al exponer la forma en que resolviste un problema? Argumenta.				

# BLOQUE 4

Realiza...

## Transformaciones Algebraicas I

### Introducción:

En el presente bloque, denominado **Transformaciones Algebraicas I**, estudiarás qué son las **expresiones algebraicas**, en particular las **expresiones algebraicas** llamadas **polinomios**, y los procedimientos para transformarlas. Estudiarás también, cómo se usan para representar magnitudes variables y cómo con dichas representaciones se pueden analizar y resolver diversos tipos de problemas, tanto de los que son objeto de estudio en otras disciplinas como la **Física**, la **Química** y las **Ciencias Sociales**, como de la vida cotidiana.

En realidad los procedimientos que estudiarás para transformar **expresiones algebraicas** ya los conoces desde la escuela secundaria, pues se trata de los procedimientos que se utilizan para sumarlas, restarlas, multiplicarlas o dividir las obteniendo, por lo general, otra expresión algebraica, razón por la cual estos procedimientos son considerados de transformación. Así que este nuevo estudio te ayudará a recordarlos y a mejorar tu conocimiento de los mismos.

Con el estudio de este nuevo bloque se espera desarrolles mayor habilidad, de la que hayas logrado en la escuela secundaria, para efectuar las operaciones de transformación de las **expresiones algebraicas**, así como para utilizarlas en el análisis y resolución de problemas y que todo esto te permita comprender cada vez más la importancia y utilidad de las **Matemáticas** y que esto, a su vez, se traduzca en un mayor interés, de tu parte, por estudiarlas y una mayor convicción de que, estudiándolas, puedes aprenderlas.

# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

### Las expresiones algebraicas y el cálculo de áreas y volúmenes



Actividad de Equipo



Empezaremos el estudio de este nuevo bloque de contenidos hablando de los que tal vez son los objetos más cotidianos, comunes y necesarios que el ser humano haya inventado: los envases. Lean y comenten en equipo lo que sobre los envases se dice en el siguiente escrito para luego proceder a resolver los problemas que se proponen.

#### Los envases

Los hay de los más diversos tipos (bolsas, costales, botellas, latas, cajas) y de las más diversas formas, desde unas muy sencillas como los prismas de base rectangular y los de forma cilíndrica hasta algunos de formas sofisticadas (generalmente botellas de vidrio en los que se envasan vinos o perfumes de alta calidad y alto precio); también los hay de diversos materiales (papel, cartón, cartoncillo, vidrio, madera, metal, plástico) pero cualquiera que sea el tipo, la forma y el material del que está hecho, el envase cumple la función esencial para la cual es fabricado: **contener y proteger el producto.**



Además de su función esencial como contenedor y protector del producto que se pretende vender, comercialmente el envase tiene una función de gran importancia: informar al cliente de las cualidades del producto y del beneficio que obtendrá al adquirirlo, tratando de convencerlo de que lo compre. En mercadotecnia se le conoce como el vendedor silencioso.

Además de los envases que son contenedores del producto que se comercializa, existen otros envases cuya función es contener uno a varios envases que contienen la mercancía, un ejemplo sencillo de este otro envase es la caja de cartoncillo en la que se envasa la botella que contiene el perfume. En este caso, la botella se considera un envase primario y la caja un envase secundario. Además, siguiendo con el ejemplo, varias cajas que contienen, cada una, una botella de perfume, se colocan, para su transportación y distribución a los centros comerciales, en cajas más grandes que son, desde luego, también envases. A estos se les denomina envases terciarios.

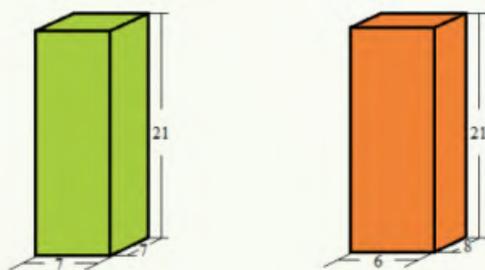
La fabricación de envases es una actividad comercial de gran importancia en el mundo, en la que trabajan varios millones de personas, entre las que hay diseñadores, ingenieros, químicos, economistas, mercadólogos, comunicadores, etc.

La decisión del tamaño, la forma, el color, así como el material de que estará hecho el envase, se toma considerando una diversidad de factores, tales como el producto que se va a envasar, los costos de fabricación, la calidad, la durabilidad, el manejo del envase y para tomar dicha decisión, se realizan diversos estudios por especialistas en diversas áreas.

Sin duda los envases que más comúnmente se encuentran en el mercado están hechos fundamentalmente de cartón o cartoncillo y tienen forma de prisma de base rectangular. Se utilizan para envasar líquidos como la leche y los jugos o productos sólidos, como galletas, cereales, medicamentos, etc.

Desde luego, de la cantidad de producto que se quiere envasar dependen las dimensiones del envase y, en consecuencia, la cantidad de material que se necesita para fabricarlo. Para que esto resulte más claro, realiza de manera individual los siguientes cálculos y luego comenten en equipo los resultados que obtuvieron y los procedimientos que utilizaron para llegar a ellos.

- En la **Figura 4.1** se observan dos envases muy similares a los que aparecen en los supermercados conteniendo leche, los dos tienen la forma de prisma de base rectangular, una de las cuales es cuadrada. Considera las siguientes dimensiones: ambos tienen **21 cm** de altura, la base cuadrada mide **7 cm** por lado y la otra mide **6 cm** de largo por **6 cm** de ancho. Con estos datos determina:



Envases de forma de prisma con base rectangular.  
Figura 4.1

- ¿Cuál de los dos recipientes tiene mayor capacidad y cuánto?
- ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  de cartón se emplean en las caras laterales de cada uno de los recipientes y cuántos en la base y la tapa?

- c) **¿Qué cantidad de material se utiliza en la fabricación de cada uno de los recipientes?**
- d) **¿En cuál de los dos recipientes se utiliza menor cantidad de material y cuánto?**
2. Supón ahora que se quiere fabricar un envase cuya base mida **10 cm** de largo y **5 cm** de ancho. Determina:
- a) **¿Cuánto deberá ser su altura para que su capacidad sea un litro?**
- b) **¿Cuánto material se utilizaría en su fabricación?**
3. Considerando los resultados que has obtenido, reflexionen en el equipo sobre la relación que existe entre la cantidad de material que se utiliza en su fabricación y:
- a) **La capacidad del envase.**
- b) **El peso del recipiente.**
- c) **El costo del envase.**
- d) **La contaminación ambiental.**

Complementa las reflexiones que hayas hecho, tanto de manera personal como al comentar en el equipo, investigando al respecto en internet y con base en las conclusiones a que hayas llegado, como tarea extra clase escribe un breve ensayo (de no menos de una cuartilla) en el que hables de los beneficios que tiene para el consumidor y para la sociedad el que se fabriquen los envases que se utilizan en el comercio con la menor cantidad posible de material.





## Desarrollo



Actividad de Equipo



De acuerdo con los cálculos que realizaste en la actividad de inicio pudiste darte cuenta que la capacidad de los envases y la cantidad de material que se utiliza para fabricarlos están relacionados.

En esta segunda *Actividad* continuaremos reflexionando sobre esa relación para lo cual es necesario que analices los cambios que se producirían en la capacidad del recipiente y en la cantidad de material que se requeriría para fabricarlo si se modificaran las dimensiones del recipiente de base cuadrada, en cada uno de los siguientes casos. El análisis de los cambios hazlo primero de manera individual y luego comenta con tus compañeros de equipo, tus respuestas y tus procedimientos:

### Primer caso:

Si se aumenta  $x \text{ cm}$  la longitud de uno de los lados de la base, sin cambiar la longitud del otro lado ni de la altura, tal como se ve en la **Figura 4.2** ¿Qué tanto aumentará la capacidad del recipiente y qué tanto la cantidad de material que se utilizará para fabricarlo?

Incremento en  $x \text{ cm}$  la longitud de la base del recipiente.

Para responder esta interrogante, empieza contestando las siguientes preguntas. (Hazlo primero de forma individual y luego comenta con tus compañeros de equipo tus respuestas).

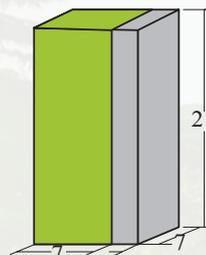


Figura 4.2

- ¿Cómo se representa lo que miden los lados de la base del nuevo recipiente?
- Y el área de la base del nuevo recipiente, ¿cómo calcularla?
- ¿Cómo calcular el volumen del nuevo recipiente?

- d) Si al volumen del nuevo recipiente le restas el volumen del recipiente original, ¿qué representa el resultado?
- e) Observando la figura del nuevo recipiente ¿Cómo puede calcularse lo que aumentó el volumen del recipiente original de otra manera (procedimiento)? Describe cómo puedes hacerlo.
- f) Escribe la expresión algebraica que representa cada uno de los dos procedimientos que determinaste en los dos incisos anteriores.
- g) Y el aumento de la cantidad de material empleado en fabricarlo ¿Cómo se puede calcular? También en este caso, determina dos procedimientos diferentes para hacer el cálculo.

### Segundo caso:

Si la base del recipiente no se modifica, pero la altura se aumenta en  $x \text{ cm}$  como puede observarse en la **Figura 4.3**.

Incremento  $x \text{ cm}$  en la altura del recipiente.

- a) **¿Cómo puedes calcular el aumento de la capacidad?** Determina dos procedimientos para hacer este cálculo y represéntalos algebraicamente.
- b) **¿Y cómo puedes calcular el aumento de la cantidad de material?** También en este caso determina dos procedimientos para hacer este cálculo y represéntalos algebraicamente.
- c) **¿Qué será más conveniente, aumentar el lado de la base o aumentar la altura del recipiente?** Para responder esta pregunta debes tener presente que se trata de aumentar la capacidad del recipiente aumentando lo menos posible la cantidad de material.

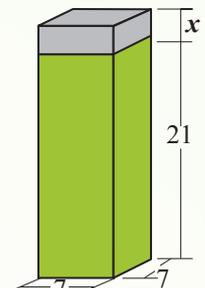


Figura 4.3



Después de haber analizado los cambios originados cambiando sólo una de las dimensiones del prisma es conveniente que analices los cambios que se producirían modificando simultáneamente dos dimensiones del recipiente original, es decir, el de base cuadrada.

### Tercer caso:

Si se aumenta  $x \text{ cm}$  la longitud de los lados de la base para que siga siendo cuadrada y la altura no se cambia ¿Cómo se puede calcular lo que aumenta la capacidad del recipiente y cómo lo que aumenta la cantidad de material?

Incremento en  $x \text{ cm}$  en ambas dimensiones de la base del recipiente.

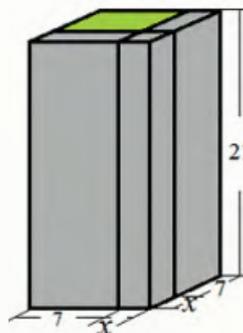


Figura 4.4

### Cuarto caso:

Si un lado de la base aumenta y el otro disminuye, ambos en  $x \text{ cm}$ . El largo de la base aumenta  $x \text{ cm}$  y el ancho disminuye en  $x \text{ cm}$ .

- ¿Cómo calculas la capacidad del nuevo recipiente?
- ¿Cómo puedes saber si la capacidad del nuevo recipiente es mayor, menor o igual a la del recipiente original?
- En el caso de que aumente o disminuya, ¿Cómo puede calcularse el aumento o la disminución de la capacidad?
- Y la cantidad de material ¿Aumentará, disminuirá o será la misma?



Figura 4.5

### Quinto caso:

Si uno de los lados de la base se aumenta en  $x \text{ cm}$  y lo mismo se hace con la altura, dejando fijo el otro lado de la base ¿Cómo puedes calcular el aumento de la capacidad del recipiente y cómo el aumento de la cantidad de material? Determina dos maneras diferentes de hacerlo.

El largo de la base y la altura aumentan  $x \text{ cm}$ .

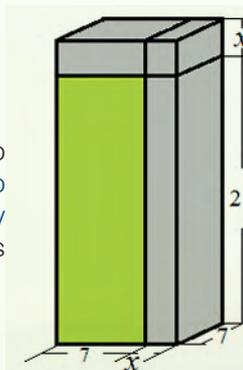


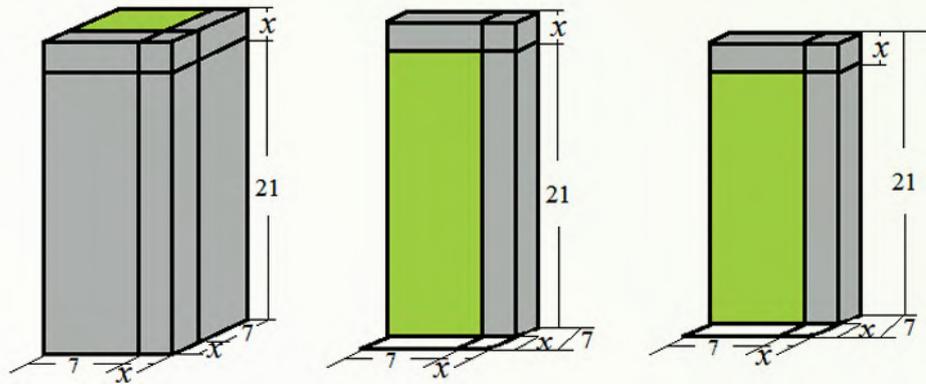
Figura 4.6



Habiendo analizado los cambios originados modificando primero sólo una de las dimensiones del prisma (en la *Actividad 2*) y luego los cambios que se producirían modificando simultáneamente dos dimensiones del recipiente original (en la *Actividad 3*), en esta nueva actividad se trata de que analices los efectos que se originan en la capacidad del recipiente y en la cantidad de material a utilizar si se modifican simultáneamente las tres dimensiones.

En esta *Actividad*, tú debes formular las preguntas de al menos tres casos diferentes, que serán el sexto, el séptimo y el octavo, luego debes indicar los cálculos que harías para responderlas.

Para formular las preguntas puedes guiarte por las que se formularon en los casos tratados en las *Actividades 2 y 3* y por la **Figura 4.7** que muestra algunos casos de recipientes que pueden ser analizados. Esto debes hacerlo como tarea extra clase y luego deben comentar y analizar en el equipo las preguntas que hayan formulado y la manera en que consideran que deben proceder para responderlas.



Otras posibles modificaciones en las dimensiones del recipiente.  
Figura 4.7





## Actividad de Cierre



Actividad: 5  
Actividad Grupal



Esta *Actividad* debe comentarse primero en el equipo y después en el grupo bajo la conducción del profesor. El propósito general de las *Actividades* de esta primera **Secuencia** didáctica fue ver la manera en que se utilizan las **expresiones**

**algebraicas** para representar magnitudes variables y la necesidad que hay de realizar operaciones con ellas para resolver ciertos problemas.

En los problemas planteados en esta secuencia algunas de las expresiones algebraicas que se utilizaron son:

Algunas expresiones algebraicas utilizadas en la secuencia		
Para representar longitudes	Para representar áreas	Para representar volúmenes
$x$	$7(7 + x)$	$7(7 + x)2l$
$7 + x$	$(7 + x)^2$	$2l(7 + x)^2$
$7 - l$	$(7 + x)(7 - x)$	$2l(7 + x)(7 - x)$
$2l + x$		

Tabla 4.1

Sin embargo **las expresiones algebraicas** también pueden utilizarse para representar cualquier otra magnitud, tales como el tiempo, la velocidad, la aceleración, la fuerza, la energía, la presión, la temperatura, etc.

Algunos ejemplos de expresiones algebraicas que representan algunas de estas magnitudes y que conoces por tus cursos de Física de la escuela secundaria son:

Expresiones algebraicas utilizadas en los cursos de Física			
a) $d = vt$	b) $d = \frac{1}{2}at^2$	c) $a = \frac{v_f - v_o}{t}$	d) $f = ma$

Tabla 4.2

De cada una de las expresiones algebraicas anotadas en la **Tabla 4.2** determinen:  
¿Qué representa la expresión?

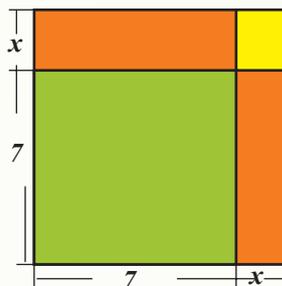
¿Qué magnitudes están relacionadas?

¿Qué operaciones indica la expresión que deben realizarse con las magnitudes del lado derecho de la igualdad para obtener el valor de la magnitud que aparece en el lado izquierdo en cada uno de los casos?

*En general, una expresión algebraica relaciona los valores de dos o más magnitudes e indica el procedimiento para calcular el valor de una de ellas a partir del valor de otra u otras*

En el caso de la expresión algebraica  $(7 + x)^2$ , utilizada en la *Actividad 3* indica que el área de la base del nuevo recipiente, puede calcularse haciendo lo indicado en el siguiente procedimiento:

- Se suma  $7+x$  (donde  $7$  representa lo que mide el segmento que se agrega a cada uno de los lados de la base del recipiente original, que miden  $7$ )**
- El resultado de la suma se eleva al cuadrado.**



Área del cuadrado de lado  $7+x$ .  
Figura 4.8

Es fácil darse cuenta que el procedimiento establecido es el que conociste desde la escuela primaria como la fórmula para calcular el área de un cuadrado. Sin embargo observando la **Figura 4.8** se puede establecer otro procedimiento para calcular su área. Este otro procedimiento sería:

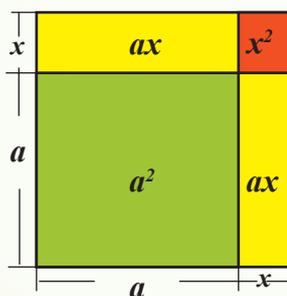
- Calcula el área de la base del recipiente original.
- Luego calcula el área de uno de los rectángulos que se ven en la figura y el resultado multiplícalo por **2**, ya que son dos rectángulos iguales.
- Enseguida calcula el área del otro cuadrado que forma parte de la base del nuevo recipiente.
- Finalmente suma estas áreas.

Como ambos procedimientos calculan el área del mismo cuadrado, deben ser equivalentes. Esto se puede indicar algebraicamente estableciendo la equivalencia de las dos siguientes expresiones algebraicas.

$$(7 + x)^2 = 7^2 + 2(7(x)) + x^2$$

La equivalencia de estos dos procedimientos para calcular el área de la base del recipiente, se estableció observando en la **Figura 4.8**, que la base del recipiente es un cuadrado cuyos lados miden  $7 + x$ ; lo cual justifica el primer procedimiento, pero que dicho cuadrado se ve que está formado por dos cuadrados y dos rectángulos, de tal manera que su área puede calcularse sumando las áreas de los dos cuadrados y de los dos rectángulos; lo cual justifica el segundo procedimiento y su equivalencia con el primero.

Considera ahora el caso de un prisma de base cuadrada, cuyo lado tiene una longitud representada por la letra  $a$  y que a partir de él quieres determinar cuánto aumenta la capacidad del recipiente incrementando en  $x$  la longitud del lado de su base, como en el caso ya estudiado.



Generalización del cuadrado de un binomio.

Figura 4.9

- ¿Cómo representarías la longitud del lado de la base del nuevo prisma?
- ¿Cómo calcularías su área? Determina dos procedimientos diferentes.
- Indica la equivalencia de los dos procedimientos escribiendo la igualdad de las expresiones algebraicas que representen los dos procedimientos.

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Los polinomios y los procedimientos para sumarlos y multiplicarlos



Actividad de Equipo



#### Las expresiones algebraicas llamadas polinomios

En esta segunda **Secuencia** didáctica vamos a recordar, precisar y ejercitar los procedimientos que aprendiste en la escuela secundaria y que utilizas para efectuar las operaciones de suma y multiplicación de expresiones algebraicas, en particular de las llamadas **polinomios** y en especial de los **polinomios de una sola variable**.

Iniciaremos esta **Secuencia** precisando algunas cuestiones relacionadas con las expresiones algebraicas que son necesarias y convenientes para comprender mejor los procedimientos que se utilizan para sumarlas y multiplicarlas. Léelas y coméntalas, primero en el equipo y luego en el grupo, bajo la conducción del profesor.

- 1) Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras (literales) ligados por los signos de las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.

En la **Actividad 5** con la que se cerró la Secuencia didáctica anterior, se citan varios ejemplos de expresiones algebraicas.

- 2) Cuando las operaciones que ligan a los números y a las literales son sólo la multiplicación, la división y la potenciación, esto es, no hay ni sumas ni restas, se dice que la expresión algebraica consta de **un solo término**.

Las expresiones algebraicas  $3x^2$  y  $-3x^5y$  constan de un solo término

- 3) Lo anterior equivale a decir que **término** es una **expresión algebraica** formada por un número diferente de cero llamado **coeficiente del término** que se está multiplicando por una o más literales (que representan magnitudes variables) elevadas a una potencia indicada por un número denominado **exponente**.

**Ejemplos:**

- a)  $3x^2$  es una expresión algebraica formada por un solo término en el que el  $3$  es el coeficiente,  $x$  es la literal y  $2$  es el exponente.
- b)  $-3x^5y$  es otro caso de expresión algebraica formada por un solo término en el que el  $-3$  es el coeficiente,  $x$  y  $y$  son las literales y  $5$  y  $1$  son los exponentes de  $x$  y  $y$  respectivamente (Cuando el exponente es  $1$ , no se escribe)

- 4) Cuando un término tiene una sola literal, el exponente determina el grado del término, así el término  $3x^2$  es de grado  $2$ . Si el término tiene más de una literal como en el caso  $\frac{1}{3}\pi r^2h$ , en el que hay dos literales  $r$  y  $h$ , el grado del término es la suma de los exponentes; así que este término es de grado  $3$ .
- 5) Un **polinomio** es una expresión algebraica que tiene uno o más términos que se están sumando y cuyos exponentes son siempre números enteros no negativos.
- 6) El grado de un polinomio es el grado del término de mayor grado.
- 7) Los **polinomios** que tienen un solo término, se denominan **monomios**, los formados por dos términos se denominan **binomios**, los de tres términos se llaman **trinomios** y cualquiera de ellos se designa con el nombre genérico de **polinomio**.
- a) Cuando el coeficiente es  $1$ , no se escribe ya que al multiplicar por  $1$  el valor representado por las literales, dicho valor no cambia.

**Ejemplo:**

La expresión algebraica  $1x^4 - x + 1$  se escribe  $x^4 - x + 1$ , ya que  $1x^4 = x^4$

- b) Cuando la parte literal del término está precedida por el signo  $-$  indica que el coeficiente del término es  $-1$ , ya que al multiplicar la parte literal del término por  $-1$ , sólo cambia el signo del resultado.

**Ejemplo:**

La expresión algebraica  $x^4 - 1x + 1$  se escribe  $x^4 - x + 1$  ya que  $- 1x = -x$

- c) Cuando el exponente es  $1$  no se escribe el exponente ya que todo número elevado a la potencia  $1$  no cambia su valor.

**Ejemplo:**

La expresión algebraica  $x^4 - x^1 + 1$  se escribe  $x^4 - x + 1$  puesto que  $x^1 = x$

- d) Cuando el exponente de una literal es  $1$ , no se escribe la parte literal pues todo número elevado a la  $0$  es igual a  $1$  y al multiplicar el coeficiente por  $1$  el resultado es el valor del coeficiente.

**Ejemplo:**

La expresión algebraica de los ejemplos anteriores,  $x^4 - x + x^0$  se escribe  $x^4 - x + 1$  puesto que  $x^0 = 1$

- 8) El valor numérico de un polinomio para un valor determinado de la variable, es el que resulta al efectuar las operaciones indicadas al sustituir la literal por el valor dado a la variable.

**Ejemplo:**

El valor numérico del polinomio  $3x^3 - x^2 + 4$  cuando  $x = 1$  es  $3x^3 - 1^2 + 4 = 3 - 1 + 4 = 6$  y cuando  $x = 0$  es  $3x^3 - 0^2 + 4 = 0 - 0 + 4 = 4$





En esta *Actividad* debes realizar una serie de ejercicios cuyo propósito es que adquieras aún mayor familiaridad con los términos que se utilizan al hablar de polinomios y reafirmes los significados que éstos tienen.

### Ejercicio 1

De los siguientes polinomios, que están constituidos por un solo término, determina lo que en cada columna de la **Tabla 4.3** se pide:

Identifica los elementos que constituyen un término del polinomio				
Expresión algebraica	Coficiente	Literal o literales	Exponente o exponentes	Grado
$2x^3$				
$-3x^5y$				
$\frac{5}{3}u^2$				
$-xyz$				

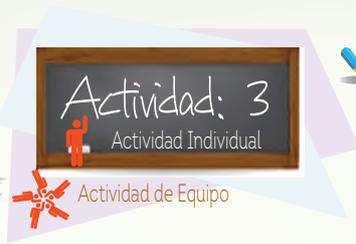
Tabla 4.3

### Ejercicio 2

Procede como en la tabla anterior anotando en cada casilla lo que se pide de cada polinomio de la primera columna de la **Tabla 4.4**.

Identificación de Polinomios				
Polinomios	Variables	Número de términos	Grado	Nombre del polinomio
$4x^3 + 5x - 2$				
$2xy - 3x^2 + y - 1$				
$z^5$				
$4 - \frac{1}{3}m^3n^4s$				
$xyz$				
$x + y + z$				
$\frac{3}{7}x^2y^3 - \frac{2}{5}y^4z^5 + 6$				
$2^3$				

Tabla 4.4



## Las leyes de los exponentes

En esta nueva *Actividad* recordarás y precisarás varias cuestiones relacionadas con las operaciones con potencias que son indispensables al efectuar operaciones con polinomios.

Al igual que en la *Actividad 1* analicen y comenten en el equipo para luego hacerlo a nivel de todo el grupo bajo la conducción del profesor lo que en cada caso se propone que hagan.

Definición de potencia de un número real

*Si  $a$  es un número real cualquiera y  $n$  es un número natural,*  
 $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ veces}}$  *donde  $a$  se toma como  $n$  veces como factor.*

A esta operación se le llama **Potenciación**, y los términos que intervienen son el número  $a$ , que se llama base, el número  $n$ , que se denomina **exponente** y el resultado que se obtiene, que se llama **potencia**.

Efectúa las siguientes operaciones con potencias y anota en cada casilla de la **Tabla 4.5** lo que se pide.

Operaciones con potencias				
Expresión	Base(s)	Exponente(s)	Desarrollo	Resultado
$5^4$				
$(-4)^3$				
$-3^2$				
$(6^3)(6^2)$				
$(2^4)(2)$				
$(2^3)^2$				
$((4)(3))^3$				
$((3^2)(4^5))^3$				
$\frac{7^5}{7^3}$				
$\left(\frac{3}{4}\right)^5$				

Tabla 4.5

## Leyes de los exponentes

Considerando que  $a, b \in \mathbf{R}$ ;  $m, n \in \mathbf{N}$  y  $a, b \neq 0$ , anota en cada casilla de la **Tabla 4.6** lo que se pide. Si lo necesitas, puedes guiarte por las respuestas anotadas en las casillas de la primera fila.

Generalizaciones de las operaciones con potencias				
Expresión	Operación	Desarrollo	Resultados	Enunciado de la ley
$a^m \cdot a^n =$	Producto de potencias de igual base	$(aa \cdots a)(aaa \cdots a)$ $= \underbrace{aa \cdots a}_{(n+m) \text{ veces}} \cdots a$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	Para multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes
$(a^m)^n =$	Potencia de una potencia			
$(a \cdot b)^n =$				
$\left(\frac{a}{b}\right)^n =$				
$\frac{a^n}{a^m} =$				
$a^0 = \frac{a^n}{a^n} =$	Potencia cero			
$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} =$	Potencia negativa		$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	

Tabla 4.6



Actividad: 4  
Actividad Individual



## Las operaciones con polinomios

Ahora procederemos a recordar, a reafirmar y a ejercitar los procedimientos que se utilizan para efectuar operaciones con polinomios y que aprendiste en la escuela secundaria.

### La multiplicación de monomios

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones de monomios:

a)  $(2x)(3x^2)$

b)  $(-4x^3)(x^4)$

c)  $(x^2y)(-2xy^2)$

d)  $(-5m^4n)(-3x^2n^5)$

e)  $\left(\frac{5}{3}x^4\right)\left(-\frac{1}{5}x^2\right)$

f)  $(3)(4x^2)$

g)  $(-x^4)(3x^5)\left(\frac{5}{3}x^2z\right)$

2. Explica el procedimiento que utilizaste para multiplicar dos monomios.





## La multiplicación de un polinomio por un monomio

1. Efectúa las siguientes multiplicaciones de un polinomio por un monomio

a)  $(2x + 3)(3x^2)$

b)  $(x^3 - 2)(4x)$

c)  $(-x^2 + 3x)(5)$

d)  $(2x + 3y^2)(-2x^2y)$

e)  $\left(-\frac{2}{5}x^3y + \frac{5}{3}xy^4\right)\left(\frac{1}{2}y^2z\right)$

f)  $(x^2 - 3x + 4)(2x^4)$

g)  $(x^3 - x^2 + 4x - 1)(5x^3)$

h)  $(x^2 - 2xy + 3y^2 - 1)(-4xyz^3)$

2. Explica el procedimiento que utilizaste para efectuar la multiplicación de un polinomio por un monomio



## Los términos semejantes y el procedimiento para sumarlos

Definición de términos semejantes

*A los términos de una expresión algebraica que tienen las mismas literales elevadas a las mismas potencias se les llama términos semejantes*

El procedimiento para sumar términos semejantes

*El resultado de la suma de los términos semejantes de una expresión algebraica es un término semejante a los que se suman pues tiene las mismas literales con los mismos exponentes y su coeficiente se obtiene sumando los coeficientes de los términos que se suman.*

*Sumar los términos semejantes de una expresión algebraica equivale a reducir dichos términos a uno solo, que es semejante a los términos sumados*

1. De los siguientes términos determina cuáles son semejantes, agrúpalos y súmalos, es decir, redúcelos a un solo término

$$5x^2, -3x, 4, 2x^4, x^3, -3x^2, 4x, -1, 5x^3, x^2, -2xy, \frac{1}{2}y^2, -1, 4xyz^3, \frac{5}{7}xy, \frac{3}{4}$$



## El procedimiento para sumar expresiones algebraicas

*Al sumar dos expresiones algebraicas se agrupan los términos semejantes y se reducen a uno solo. Los términos que no son semejantes se escriben sin cambio.*

1. Efectúa las siguientes sumas de polinomios.

a)  $(x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (5x^3 + x^2 - x + 6)$

b)  $(x^4 + 2x^2 + 4) + (2x^3 - 2x^2 - 5x + 1)$

c)  $(x^3 - 4x^2 - 3x + 5) + (2x^3 + 4x^2 - x + 2)$

d)  $\left(\frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 3x^2\right) + (2x^4 - 5x + 1) + \left(5x^3 - \frac{2}{5}x^6\right)$



### La multiplicación de polinomio por polinomio

Procedimiento para multiplicar dos polinomios

*Al multiplicar un polinomio por otro polinomio se multiplica cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro y luego se reducen los términos semejantes.*

#### Ejemplo:

Para efectuar la multiplicación de  $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - x + 3$  por  $2x - 3$  se pueden escribir los polinomios en forma similar a como se escriben los números cuando se multiplican y proceder de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1 \\ \times \qquad \qquad \qquad 2x - 3 \\ \hline 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x \\ - 3x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x - 3 \\ \hline 2x^5 + x^4 - 10x^3 + 0x^2 + 11x - 3 \end{array}$$

Sin embargo también se puede escribir

$$\begin{aligned} (x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1)(2x - 3) &= (2x^5 - 4x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x) + (-3x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x - 3) \\ &= 2x^5 + x^4 + 10x^3 + 0x^2 + 11x - 3 \end{aligned}$$

1. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

a)  $(3x - 1)(2x + 5)$



- b)  $(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)(2x + 6)$
- c)  $(x^4 + 2x^2 - 4)(2x^3 - 3x^2 - 4x + 1)$
- d)  $(x^3 - 3x^2 + 4x - 1)(5x^3 + x^2 - x + 6)$
- e)  $\left(\frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 3x^2\right)(2x^4 - 5x + 1)\left(5x^3 - \frac{2}{5}x^6\right)$
- f)  $(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$
- g)  $(x^3 - 3x^2 + 9x - 27)(x + 3)$



## Actividad de Cierre



Actividad: 9  
Actividad Grupal



En esta **Secuencia** didáctica se espera hayas logrado una mayor comprensión de lo que son los polinomios y que, a la vez que hayas recordado los procedimientos que se utilizan para sumarlos y multiplicarlos, hayas mejorado tu habilidad para efectuar dichas operaciones.

Se espera también, que te haya quedado claro que:

- 1) **Los polinomios de una sola variable son expresiones de la forma**

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

donde  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ , son los coeficientes de los términos y su valor puede ser cualquier número real; excepto  $a_n$  que no puede ser cero.

- 2) Se consideran términos del polinomio los que tienen coeficientes con valor diferente de cero.
- 3)  $n, n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$  son números enteros no negativos y que  $n$  representa el grado del polinomio.
- 4)  $ax^n$  y  $bx^n$  son términos semejantes porque tienen la misma literal elevada a la misma potencia y que al sumarlos sólo se suman los coeficientes reduciendo los dos términos semejantes a uno solo que resulta ser semejante a los términos sumados. Es decir, que  $ax^n + bx^n = (a + b)x^n$
- 5) Sumar dos polinomios equivale a reducir los términos semejantes
- 6) El producto de los términos  $ax^n$  y  $bx^m$  es  $abx^{n+m}$  es decir
 
$$(ax^n)(bx^m) = (ab)x^{n+m}$$
- 7) Al multiplicar dos polinomios se multiplica cada uno de los términos de uno por todos y cada uno de los términos del otro y luego se reducen los términos semejantes.
- 8) Los procedimientos descritos para efectuar operaciones entre polinomios son procedimientos de transformación de una expresión algebraica en otra, lo cual significa que el resultado de la operación describe un nuevo procedimiento que permite obtener el mismo resultado que el que se obtiene con la expresión algebraica inicial, cualquiera que sea el valor que se asigne a la literal que representa la magnitud variable.

Resuelve los siguientes ejercicios como culminación de las actividades de esta secuencia

1. De cada uno de los siguientes polinomios determina los valores de  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  y el grado del polinomio.

a)  $x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

b)  $\frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 3x^2$

c)  $5x^3 - \frac{2}{5}x^6$

d)  $x^4 + 1$

2. Suma los polinomios de los incisos:

i. a) y b)

ii. c) y d)

iii. b), c) y d)

3. Resta los polinomios de los incisos

i. c) menos a)

ii. b) menos d)

iii. a) menos b)

4. Multiplica los polinomios de los incisos:

i. a) y d)

ii. b) y c)



# Secuencia Didáctica 3.-



## Actividad de Inicio

### Las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales.

En la **Secuencia** Didáctica 2 recordaste y reafirmaste los procedimientos que se utilizan para efectuar operaciones con polinomios y que habías estudiado en la escuela secundaria. También se hizo énfasis en el hecho de que estos procedimientos lo que hacen es transformar una expresión algebraica en otra equivalente.

En la **Secuencia** Didáctica 1 al calcular el volumen de los recipientes o el área del material que se necesita para fabricarlos, se utilizó como criterio de equivalencia el que con los dos procedimientos se estaba calculando el mismo volumen o la misma área lo cual podía verse en la figura que representaba a los recipientes.

En esta nueva **Secuencia**, vamos a estudiar cómo a partir de las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales que se enunciaron en el **BLOQUE 2**, pueden justificarse los procedimientos que se utilizan para efectuar las operaciones con polinomios.



### La propiedad distributiva y las transformaciones algebraicas

En el **BLOQUE 2** aparecen enunciadas las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales; una que resulta especialmente importante para explicar y justificar los procedimientos que se utilizan para efectuar las operaciones de transformación de las expresiones algebraicas, es la denominada **Propiedad distributiva** que relaciona

ambas operaciones: Tal como aparece en el **BLOQUE 2** esta propiedad, en lenguaje matemático se enuncia de la siguiente manera:

*Si  $a, b, c$  son números reales, entonces*

$$(a + b)c = ac + bc$$

Propiedad Distributiva de la suma y la multiplicación de números reales

En las dos primeras secuencias de este bloque se ha señalado e ilustrado en varias ocasiones, que los procedimientos con los que se efectúan las operaciones con expresiones algebraicas son procedimientos de transformación de una expresión en otra y que ambas expresiones, la que se transforma y la que resulta de la transformación, describen procedimientos equivalentes de cálculo.

- 1) Describe primero el procedimiento indicado por la expresión algebraica del lado izquierdo de la igualdad y luego el indicado por la expresión algebraica del lado derecho.
- 2) Obtén el resultado de la siguiente operación  $(3 + \frac{2}{5})(\frac{5}{3})$  utilizando ambos procedimientos y verifica que se obtiene el mismo resultado.
- 3) Obtén el resultado de la siguiente operación:

$$(1.24 + 3.72) (4.5)$$

Por los dos procedimientos establecidos en la propiedad distributiva y verifica que el resultado es el mismo.

- 4) Si se quiere efectuar la siguiente operación:

$$(\sqrt{3} - 1) (5)$$

- a) Describe lo que debe hacerse de acuerdo con el primer procedimiento establecido en la propiedad distributiva para obtener el resultado.
- b) Ahora describe el segundo procedimiento establecido en la propiedad distributiva y represéntalo
- c) ¿Por qué es válido aplicar la propiedad distributiva si ella se refiere a la suma de dos números y en este caso  $(\sqrt{3} - 1)$  es una resta? Argumenta



### Las propiedades de cerradura, asociativa y conmutativa de la suma y la multiplicación de números reales.

Estas propiedades, que también fueron enunciadas en el **BLOQUE 2**, junto con la propiedad distributiva, son necesarias para justificar los procedimientos que se utilizan al efectuar las operaciones con polinomios.

En la **Tabla 4.7**, en la columna de la derecha describe con tus propias palabras lo que establece la propiedad que aparece enunciada en lenguaje matemático en la segunda columna.

*Si  $a, b, c$  son tres números reales cualesquiera, entonces*

Propiedad	Enunciado matemático	Descripción
Cerradura de la suma	$a + b$ es un número real	
Asociativa de la suma	$(a + b) + c = a + (b + c)$	
Conmutativa de la suma	$a + b = b + a$	
Cerradura de la multiplicación	$ab$ es un número real	
Asociativa de la multiplicación	$(ab)c = a(bc)$	
Conmutativa de la multiplicación	$ab = ba$	

Tabla 4.7

### Ejercicio 1

Cuando sumas  $3 + 4 + 5$ , dices: “tres más cuatro, siete, más cinco, doce”.

- Si alguien te dijera: “no entiendo por qué dices tres más cuatro, siete, si no hay ningún siete y luego agregas más cinco, doce” **¿Qué le dirías para explicarle lo que dice no entender?** Escribe aquí lo que le dirías.
- Algo similar haces cuando multiplicas tres (o más) números. **Por ejemplo** al multiplicar  $3 (4) (5)$ , dices: “tres por cuatro, doce, por cinco, sesenta”. Explica por qué procedes así.
- ¿Qué relación encuentras entre la propiedad de cerradura y tu manera de proceder al efectuar la suma y la multiplicación de tres números reales?**

*Al sumar (o multiplicar) más de dos números reales, primero sumas (o multiplicas) los dos primeros números y los sustituyes por un número que vale lo mismo que la suma (o la multiplicación) de los dos que sustituyes reduciendo con este procedimiento el número de sumandos (o factores) de la operación y luego repites el procedimiento hasta obtener un solo número que se conoce como el resultado.*

Esta manera de proceder se enuncia así:

*Si  $a, b, c$  son tres números reales cualesquiera, entonces  $a + b + c = (a + b) + c$  y  $abc = (ab)c$*

### La propiedad asociativa

¿Qué hubiera pasado si al sumar  $3 + 4 + 5$  en lugar de sustituir  $3 + 4$  por  $7$ , se hubieran sumado  $4 + 5$  obteniendo  $9$  y luego se hubiera sumado  $3 + 9$ ? Es evidente que se hubiera obtenido el mismo resultado de la suma original. Es decir que

$$(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$$

En la multiplicación sucede lo mismo, esto es

$$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 (4 \cdot 5)$$

Corroboras que, efectivamente, el resultado es el mismo efectuando las operaciones indicadas en cada procedimiento. Como esto es válido para cualquier terna de números reales, constituye una propiedad de la suma y la multiplicación denominada **propiedad asociativa** y se enuncia así:

*Si  $a, b, c$  son tres números reales cualesquiera, entonces  $(a + b) + c = a + (b + c)$  y  $(ab)c = a (bc)$*

Propiedad asociativa de la suma y de la multiplicación de números reales

*Esta propiedad establece que al sumar (o multiplicar) tres números reales, se obtiene el mismo resultado si se suman (o multiplican) los dos primeros números y al resultado se suma (o se multiplica por) el tercer número; que si se suman (o multiplican) los dos últimos y el resultado se suma (o se multiplica por) el primer número.*

## La propiedad conmutativa

Seguramente esta propiedad es la que más familiar te resulta pues lo que afirma es, en el caso de la suma, que *el orden de los sumandos no altera la suma (el resultado)* y lo mismo afirma en el caso de la multiplicación, que el orden de los factores (los números que se multiplican) *no altera el producto* (el resultado de la multiplicación). Esto, en lenguaje matemático, se expresa así:

*Si  $a, b$ , son dos números reales cualesquiera,  
entonces  $a + b = b + a$   
y  $ab = ba$*

Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación de números reales

### Ejemplo 1

$$23.4 + 12.73 = 12.73 + 23.4$$

$$\text{y } (23.4)(12.73) = (12.73)(23.4)$$

### Ejemplo 2

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3})(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})(\sqrt{3})$$



## Desarrollo

Habiendo enunciado, comentado y ejemplificado **cuatro propiedades fundamentales de la suma y la multiplicación de números reales: las propiedades distributiva, de cerradura, asociativa y conmutativa**, veamos cómo puedes utilizarlas para explicar tanto los procedimientos que se utilizan para efectuar las operaciones con números enteros positivos que aprendiste desde la escuela primaria, como para entender y explicar los procedimientos que se utilizan para sumar y multiplicar expresiones algebraicas, que aprendiste en la escuela secundaria y que acabas de recordar y utilizar en la secuencia didáctica anterior.



Actividad: 3  
Actividad Individual



Con base en las propiedades enunciadas explica el procedimiento utilizado para efectuar la siguiente multiplicación.

1. Al multiplicar **432** por **12**, desde la primaria te enseñaron a hacerlo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 432 \\ \times 12 \\ \hline 864 \\ 432 \\ \hline 5184 \end{array}$$

- ¿Cómo se obtuvo el **864** y qué indica?
- ¿Cómo se obtuvo el **432** y por qué al escribirlo se recorre un lugar a la izquierda con respecto al **864** y qué indica?
- ¿Cómo se obtuvo el **5184**?
- ¿Qué propiedad de las enunciadas te permite explicar (y justificar) el procedimiento (**algoritmo**) utilizado para efectuar la multiplicación?

La justificación de los procedimientos utilizados para efectuar sumas, restas y multiplicaciones de expresiones algebraicas



### La multiplicación de monomios.

Según lo establecido en la secuencia didáctica anterior, para efectuar la multiplicación  $(3x)(2x^2)$  lo que se hace es multiplicar  $3$  por  $2$  y  $x$  por  $x^2$  y luego indicar la multiplicación de los resultados, es decir el procedimiento indica que

$$(3x)(2x^2) = (3 \cdot 2) (x \cdot x^2)$$

Observa que el procedimiento para multiplicar dos términos algebraicos en realidad establece la equivalencia de dos procedimientos.

- El indicado en el lado izquierdo de la igualdad dice que multipliques  $3$  por el valor del número representado con la literal  $x$ , que luego multipliques  $2$  por el resultado de elevar al cuadrado el valor de  $x$  y que luego multipliques los resultados obtenidos en las dos multiplicaciones.
- El indicado en el lado derecho del signo igual dice que multipliques  $3$  por  $2$  y que el resultado lo multipliques por el que obtengas al multiplicar  $x$  por  $x^2$ , lo que a su vez es equivalente a multiplicar  $6$  por  $x^3$ .

Y como  $3 \cdot 2 = 6$  y por una de las leyes de los exponentes  $x \cdot x^2 = x^3$

Finalmente se escribe:  $(3x)(2x^2) = (6x^3)$

Que estrictamente también establece la equivalencia de dos procedimientos, esto es, establece que se obtiene el mismo resultado si se efectúan, con el valor de  $x$ , las operaciones indicadas en el lado izquierdo de la igualdad que efectuando las indicadas en el lado derecho.

- Verifica que, efectivamente con ambos procedimientos se obtiene el mismo resultado asignando a  $x$  los siguientes tres valores:  $3$ ,  $-2$  y  $\frac{1}{2}$

En general, al multiplicar  $(ax^n)(bx^m)$  donde  $a$  y  $b$  son los coeficientes de los términos, se establece como resultado  $(ab)(x^n \cdot x^m)$ , es decir, se escribe.

$$(ax^n)(bx^m) = (ab)(x^n \cdot x^m)$$

y como, de acuerdo con la ley de los exponentes relativa al producto de potencias de la misma base  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ , finalmente se escribe.

$$(ax^n)(bx^m) = (ab)(x^{n+m})$$

Que indica la equivalencia de dos procedimientos para obtener el resultado de la operación.

**a) Describe cada uno de los dos procedimientos**



**El producto de un polinomio por un monomio**

En la **Secuencia 2** se estableció que **para multiplicar un polinomio por un monomio, debe multiplicarse el monomio por cada uno de los términos del polinomio**; así que, al multiplicar  $x^2 - 3x + 4$  por  $2x^3$ , se partió de que

$$(x^2 - 3x + 4)(2x^3) = (x^2)(2x^3) - (3x)(2x^3) + 4(2x^3)$$

y luego, efectuando las multiplicaciones de monomios que están indicadas se obtiene  $2x^5 - 6x^4 + 8x^3$  para, finalmente escribir

$$(x^2 - 3x + 4)(2x^3) = 2x^5 - 6x^4 + 8x^3$$

Que, como en los casos anteriores, sólo indica la equivalencia de las dos expresiones algebraicas, vistas como procedimientos para obtener un cierto resultado.

- Asigna al menos dos valores diferentes a la  $x$  y verifica que con ambos procedimientos se obtiene el mismo resultado.
- Enuncia con tus palabras cada uno de los dos procedimientos
- Señala las propiedades que justifican la afirmación de que

$$(x^2 - 3x + 4)(2x^3) = (x^2)(2x^3) - (3x)(2x^3) + 4(2x^3)$$

## La suma de polinomios

En la **Secuencia 2** se estableció el procedimiento para **sumar expresiones** algebraicas diciendo que **sólo se suman los términos semejantes y que el resto de los términos se escriben en el resultado sin cambio alguno**, además se estableció que dos términos son semejantes si tienen las mismas literales elevadas a las mismas potencias.

Así que, de acuerdo con estos criterios, al sumar  $x^2 - 3x + 4$  con  $x^3 + 2x^2 - 5x$  se procedería de la siguiente manera:

$$(x^2 - 3x + 4) + (x^3 + 2x^2 - 5x) = x^3 + (x^2 + 2x^2) + (-3x - 5x) + 4$$

Que, de acuerdo con lo dicho para la suma de términos semejantes,

$$\begin{aligned} x^3 + (x^2 + 2x^2) + (-3x - 5x) + 4 &= x^3 + (1 + 2)x^2 + (-3 - 5)x + 4 \\ &= x^3 + 3x^2 - 8x + 4 \end{aligned}$$

O se podrían haber escrito uno debajo del otro de tal manera que los términos semejantes quedaran en la misma columna y efectuar las sumas de los términos de cada columna.

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 4 \\ x^3 + 2x^2 - 5x \\ \hline x^3 + 3x^2 - 8x + 4 \end{array}$$

- a) ¿En qué propiedades de las estudiadas consideras que está basado este procedimiento que se utiliza para sumar polinomios?



## El producto de polinomios

El procedimiento para multiplicar dos polinomios que aprendiste y ejercitaste en la secuencia anterior, también puede explicarse y justificarse utilizando las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales. Intenta justificar cada uno de los pasos del procedimiento de la multiplicación de dos binomios.

Consideremos los binomios  $(a + b)$  y  $(c + d)$  donde  $a, b, c, d$  son números reales  
Calculemos el producto  $(a + b)(c + d)$

En la **Secuencia** anterior se estableció que para multiplicar dos polinomios se multiplica cada uno de los términos de uno de ellos por cada uno de los términos del otro; así que de acuerdo con ese procedimiento la multiplicación daría como resultado

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Este procedimiento puede justificarse utilizando las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales. En la columna de la izquierda de la **Tabla 4.8** está escrita la sucesión de pasos del procedimiento para efectuar la multiplicación. Cada uno de tales pasos puede justificarse con una de las propiedades ya mencionadas. Anota, en cada caso, en la columna de la derecha la que corresponda.

Transformación realizada	Propiedad aplicada
Como $c$ y $d$ son números reales, se tiene que $c + d$ es también un número real	
Como $a, b$ y $c + d$ son números reales, se tiene que $(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$	
Como $a, b, c$ y $d$ son números reales, se tiene que $a(c + d) = ac + ad$ y $b(c + d) = bc + bd$	
De aquí se sigue que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$	Toda cosa puede ser sustituida por su igual
Como $ad + bc = bc + ad$ se tiene que $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$ . Que coincide con el resultado obtenido por el procedimiento aprendido en la secuencia anterior	

Tabla 4.8

De la misma manera puede justificarse el procedimiento general que se utiliza para multiplicar dos polinomios cualesquiera.



## Actividad de Cierre



Actividad: 7  
Actividad Grupal



El propósito fundamental de las *Actividades* de esta **Secuencia** fue mostrar que los procedimientos que has aprendido a utilizar para efectuar operaciones con polinomios pueden explicarse y justificarse con base en las propiedades de la suma y la multiplicación de números reales.

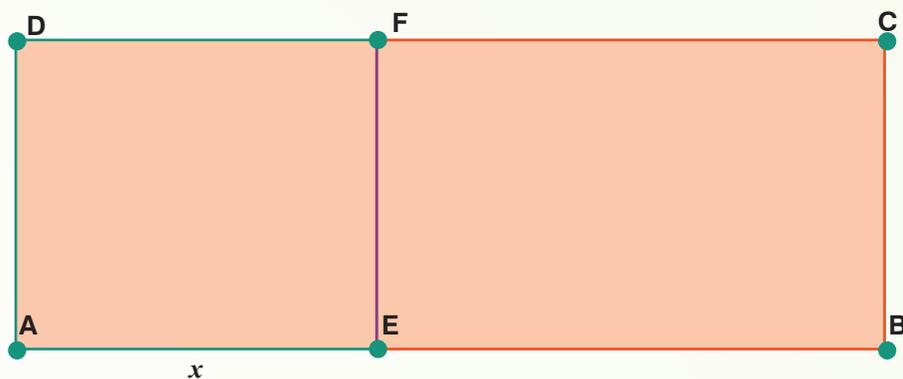
**Los procedimientos justificados fueron los utilizados para obtener:**

- a) El producto de dos monomios (*Actividad 4*)
- b) El producto de un polinomio por un monomio. (*Actividad 5*)
- c) La suma de dos polinomios. (*Actividad 5*)
- d) El producto de dos polinomios. (*Actividad 6*)

Realizadas las *Actividades* de esta **Secuencia** se espera hayas logrado una mayor comprensión de las propiedades de la suma y la multiplicación de los números reales y de la manera en que éstas pueden utilizarse para explicar y justificar los procedimientos que se utilizan para efectuar las operaciones de suma, resta y multiplicación de polinomios y que esta mayor comprensión se traduzca en un incremento de tu nivel de dominio al efectuar dichas operaciones.



1. El rectángulo ABCD que aparece en la figura está formado por el cuadrado AEFD y el rectángulo EBCF. Si la medida del lado del cuadrado la representamos con  $x$  y sabemos que el segmento EB mide 1 unidad menos que el doble del lado del cuadrado, determina:



- a) ¿Cómo se representa la longitud de la base del rectángulo EBCF?
- b) ¿Cómo se representa la longitud de la base del rectángulo ABCD?
- c) La expresión algebraica con la que se puede calcular el área del rectángulo EBCF



d) Dos procedimientos para calcular el área del rectángulo ABCD

e) Comprueba la equivalencia de los dos procedimientos

2. **En el caso del rectángulo del problema anterior, si la altura se aumentara en dos unidades, determina:**

- Los procedimientos para calcular el incremento que tendría el área del rectángulo ABCD
- Prueba la equivalencia de los dos procedimientos.

3. **Simplifica al máximo las siguientes expresiones algebraicas efectuando las operaciones indicadas**

- $(2x^3 + 3x - 2) - (x^2 - x + 1) + (-4x + 3)$
- $(x^3 - 4x^2 - 2x)(x^2 - 3x + 2)$
- $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{2}{5}\right)^2$

4. Para efectuar la multiplicación  $(a + b + c)(a + b - c)$  puede procederse de la siguiente manera:

a)  $(a + b + c)(a + b - c) = [(a + b) + c] [(a + b) - c]$

b)  $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)[(a + b) - c] + c[(a + b) - c]$

c)  $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)(a + b) - c(a + b) + c(a + b) - c(c)$

d)  $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)(a + b) + [-c(a + b) + c(a + b)] - c(c)$

e)  $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)(a + b) + (-c + c)(a + b) - c(c)$

f)  $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)(a + b) - c(c)$

g)  $(a + b + c)(a + b - c) = (a + b)^2 - c^2$

Justifica cada paso de la transformación algebraica realizada anotando la propiedad utilizada en cada uno.



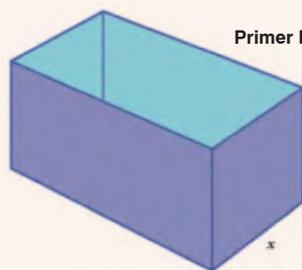


El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

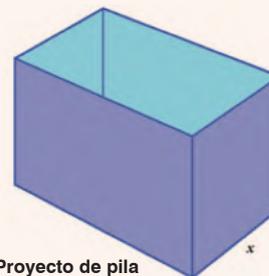
*En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

### Problema 1.

**Don Juan** quiere construir una pila de base rectangular con el largo de la base igual al doble de su ancho y la profundidad y el ancho iguales. Sin embargo, antes de decidir si la relación entre el ancho, el largo y la profundidad de la pila deben ser las aquí mencionadas o si será mejor disminuir medio metro el largo y hacer la pila medio metro más profunda. Sus dudas son:



Primer Proyecto de pila



Segundo Proyecto de pila

- Si cambia las dimensiones ¿qué pasará con la capacidad de la pila?, ¿cambiará o no? y si cambia ¿Aumentará o disminuirá? Y si aumenta o disminuye, ¿Qué tanto cambiará?
- También quiere saber ¿Qué va a pasar con la cantidad de material que va a necesitar para construir la pila en un caso y en el otro? Y al respecto se formula las mismas preguntas que las que se hace sobre la capacidad.

**Ayuda a Don Juan a aclarar sus dudas.**

**Sugerencia:** Representa con  $x$  el ancho de la pila y utiliza esta representación para formular una expresión algebraica que permita calcular la capacidad de la pila en el primer caso y otra para el segundo caso y usa estas dos expresiones para responder las preguntas relacionadas con la capacidad de la pila. Luego procede de la misma manera para decidir sobre la cantidad de material.

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 1:

Señala cuál(es) de los siguientes recurso(s) utilizaste para analizar y resolver el problema:

a) Esquemas

b) Gráficas

c) Tablas

d) Expresiones algebraicas

¿Qué dificultades enfrentaste para obtener las expresiones algebraicas solicitadas?

¿Qué procedimientos utilizaste para obtenerlas?

¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te permitieron ayudar a Don Juan a disipar sus dudas?

**Problema 2.** ¿Cuál o cuáles de las expresiones algebraicas que aparecen en los incisos **i.** a **iv.** es (son) equivalente(s) a  $[(4x^2 - 4x + 1) - (1 - x^2)](5x^2 + 4x)$

- i.**  $(4x^2 - 4x + 1)(5x^2 + 4x) - (1 - x^2)(5x^2 + 4x)$
- ii.**  $[(4x^2 - 4x + 1) - (1 - x^2)] 5x^2 + [(4x^2 - 4x + 1) - (1 - x^2)] 4x$
- iii.**  $(5x^2 - 4x)(5x^2 + 4x)$
- iv.**  $25x^4 - 16x^2$

Di cuál o cuáles y explica lo que hiciste para saberlo.

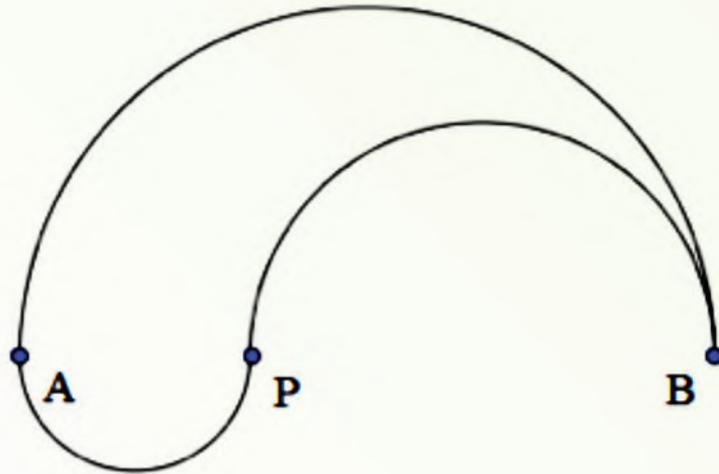
Solución:

Reflexiones relacionadas con el **problema 2:**

¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a resolver el problema?

¿Cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaste?

**Problema 3.** La figura que aparece en este problema está formada por tres semicircunferencias cuyos diámetros son  $AB$ ,  $AP$  y  $PB$ . Si la longitud de  $AB$  se representa con  $a$  y sabemos que la longitud de  $PB$  es el doble de la longitud de  $AP$ , escribe la expresión algebraica que permite calcular el área de la figura en función de  $a$  y simplifícala al máximo.



Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 3:

¿Qué tan fácil o qué tan difícil te pareció el problema después de leerlo la primera vez?

¿Hiciste algunos intentos de resolverlo que resultaron fallidos?

¿Qué dificultades tuviste que vencer para resolverlo?

¿Cuánto tiempo, aproximadamente, tardaste en resolverlo?

¿Tuviste necesidad de buscar ayuda en algún libro, en internet o con algún compañero u otra persona para resolver el problema?

¿Hubo algún momento en que creíste que no podrías resolverlo?

**1. ¿Qué opinión tienes de tu participación en el trabajo en equipo?**

- a) No me gusta, considero que es una pérdida de tiempo.
- b) Casi no participo porque cuando pregunto algo casi no le entiendo lo que dicen mis compañeros.
- c) Participo poco, pero lo que dicen mis compañeros me ayuda a entender mejor los problemas
- d) Pienso que soy de los que más participa y mis compañeros dicen que cuando explico algo, me entienden muy bien.
- e) Considero que es buena porque todos participamos y nos ayudamos a entender mejor y a resolver los problemas

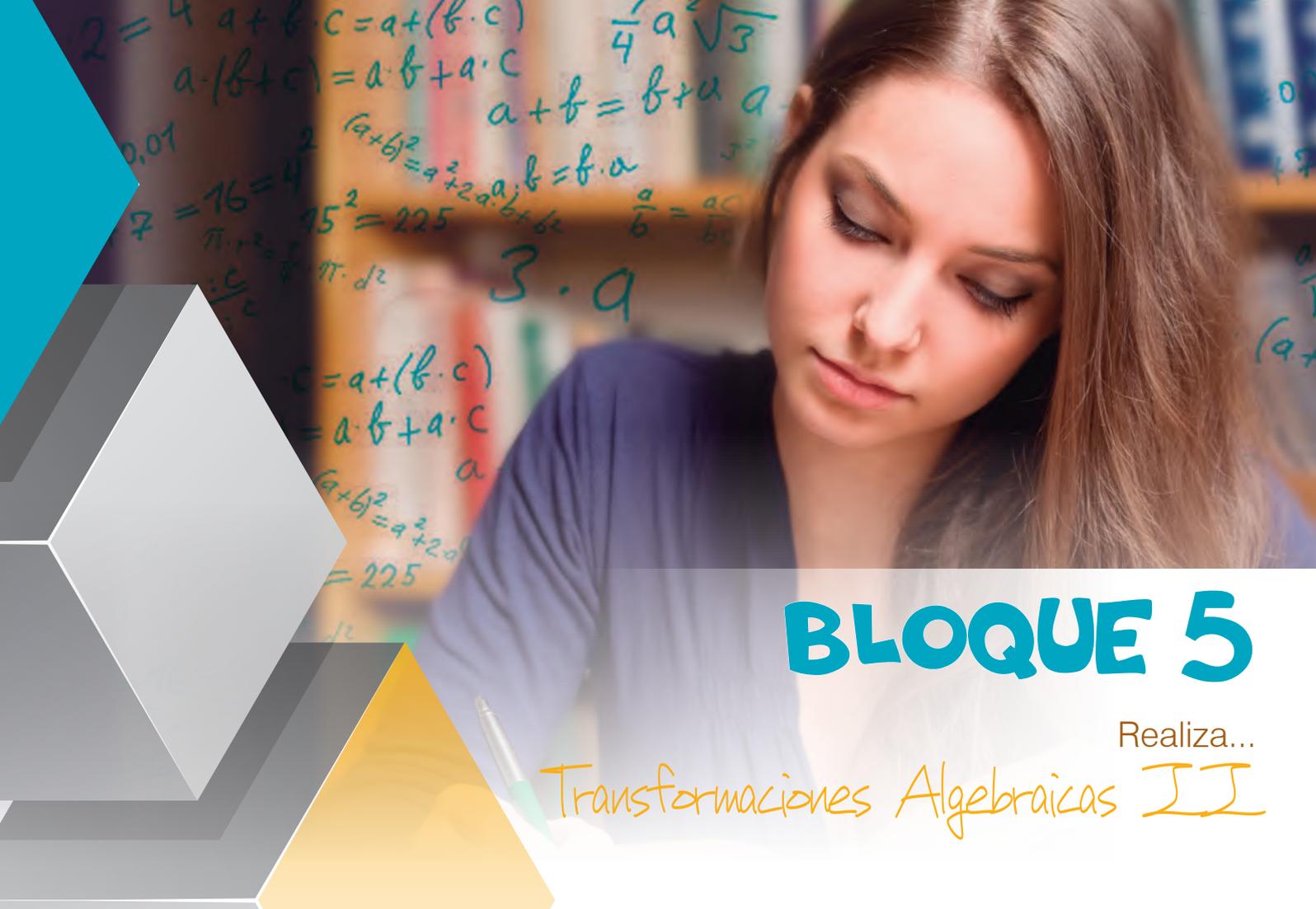
**2. ¿Qué opinión tienes de tu participación cuando los temas se comentan o se discuten a nivel de todo el grupo dirigidos por el profesor?**

- a) Considero que es buena porque cuando tengo dudas casi siempre pregunto y cuando se la respuesta a lo que pregunta el profesor o alguno de mis compañeros siempre levanto la mano para participar.
- b) Casi no participo porque temo equivocarme o hacer preguntas tontas
- c) Participo poco, ya que sólo lo hago cuando estoy seguro que lo que voy a decir está bien
- d) No participo porque me pongo muy nervioso, no logro vencer el miedo. Cuando tengo dudas prefiero preguntar a alguno de mis compañeros.
- e) Considero que soy de los que más participa y creo que mis participaciones son buenas.

**3. Uno de los propósitos de las actividades de este bloque fue que aprendieras a formular expresiones algebraicas que modelen situaciones problema de la vida cotidiana, a la vez que aprendieras a utilizar los procedimientos de transformación de dichas expresiones para analizar y resolver los problemas derivados de la situación. Respecto a este propósito consideras:**

- a) Que puedes formular expresiones algebraicas para modelar todos los tipos de problemas que se plantearon en el bloque.
- b) Que puedes formular expresiones algebraicas para modelar problemas sencillos; que en ocasiones no logras superar las dificultades que se te presentan.
- c) Que has logrado un buen nivel de dominio de los procedimientos de transformación de las expresiones algebraicas que se han estudiado en el bloque y que puedes utilizarlos para analizar y resolver problemas.
- d) Que consideras haber logrado un buen nivel de dominio de los procedimientos de transformación de las expresiones algebraicas que se han estudiado en el bloque pero que tienes dificultades para utilizarlos en el análisis y resolución de los problemas.
- e) Que consideras que requieres practicar más los procedimientos de transformación de las expresiones algebraicas pues sientes que con frecuencia te surgen dudas sobre si lo estás haciendo bien o mal y esto te lleva también con frecuencia a cometer errores
- f) Que necesitas ayuda en todo pues tienes dificultades para modelar las situaciones problema, para utilizar los procedimientos de transformación de las expresiones algebraicas y que tienes problemas para analizar y resolver los problemas aún en el caso de que éstos sean sencillos.

**4. En este bloque me pareció interesante:**

# BLOQUE 5

Realiza...

## Transformaciones Algebraicas II

### Introducción:

Este nuevo bloque de contenidos, llamado **Transformaciones Algebraicas II**, como lo indica su nombre, es la continuación de lo que empezaste a estudiar en el Bloque 4. Aquí estudiarás nuevos procedimientos para efectuar **transformaciones algebraicas**, en particular conocerás y aprenderás a utilizar una serie de procedimientos simplificados para efectuar ciertas multiplicaciones de polinomios que te permitirán obtener los productos de forma más fácil y más rápida, tales procedimientos se denominan productos notables, nombre que de seguro te resulta familiar por tus estudios antecedentes. Estudiarás, también otros procedimientos que tampoco serán desconocidos para ti y que se usan para factorizar un producto.

Al finalizar el estudio del presente bloque se espera que el nivel de dominio y comprensión que hayas alcanzado de las **expresiones algebraicas** y sus transformaciones, te permita interpretar de manera eficaz las que se utilizan para representar relaciones entre magnitudes variables en diversas disciplinas de las que te corresponde estudiar en otros cursos; así como utilizarlas para modelar, analizar y resolver cierto tipo de problemas de situaciones de la vida cotidiana.

# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

## Productos Notables



Actividad de Equipo



Empezaremos esta **Secuencia** didáctica, recordando algunos procedimientos que aprendiste desde la escuela primaria para efectuar multiplicaciones y calcular productos de una manera muy sencilla y rápida. Esto significa que el tema llamado **Productos Notables**, que trataremos en esta secuencia, empezaste a estudiarlo desde la escuela primaria pues lo que ahora estudiarás son precisamente procedimientos fáciles y rápidos para efectuar ciertas multiplicaciones

de **expresiones algebraicas**. Al igual que en la primaria, primero aprenderemos estos procedimientos y luego podrás ver la utilidad que tienen para realizar multiplicaciones cuyos productos ya no son tan notables.

**Por ejemplo**, en la Primaria aprendiste que para multiplicar un número por **100** no es necesario aplicar el algoritmo tradicional con el que se multiplican los números de dos o más cifras pues basta agregar dos ceros al número que quieres multiplicar. Así, **para multiplicar 18 por 100 se agregan dos ceros al 18 para obtener el resultado**, es decir:

$$18 \times 100 = 1800$$

Luego, combinando este tipo de productos notables con otros y las propiedades estudiadas en la última secuencia del **BLOQUE 4**, se pueden obtener otros productos no tan notables.

### Ejemplo.

Para multiplicar  **$18 \times 101$** , basta pensar que el **18** se está multiplicando por  **$100 + 1$** , es decir

$$18 \times 101 = 18 \times (100 + 1)$$

y luego aplicando la propiedad distributiva se tiene que:

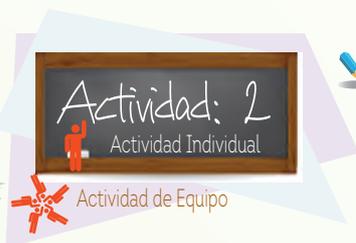
$$18 \times (100 + 1) = 18 \times 100 + 18 \times 1 = 1800 + 18 = 1818$$

Y de esto se sigue que:

$$18 \times (101) = 1818$$

Teniendo como base este ejemplo, resuelve los siguientes dos problemas. Hazlo, primero de manera individual y luego comenten en el equipo, los resultados que obtuvieron y la manera en que procedieron.

- 1) **Multiplícala 24 por 98 sin recurrir al algoritmo tradicional de la multiplicación.** (Comentario: Multiplicar por 98 es lo mismo que multiplicar por  $100 - 2$ )
- 2) **Idea un procedimiento diferente del tradicional para multiplicar  $105 \times 96$  y utilízalo para obtener el resultado.** Cuando lo hayas hecho:
  - a) Comprueba que el resultado que obtuviste es el mismo que se obtiene con el algoritmo tradicional.
  - b) Explica en qué te basaste para idear tu procedimiento.



En esta segunda *Actividad* procedan como en la anterior, primero de manera individual y luego en equipo.

1. Considerando que  $a, b, c$ , representan tres números reales cualesquiera y utilizando el procedimiento aprendido

en la **Secuencia 2** del **BLOQUE 4** para multiplicar polinomios, obtén los siguientes productos:

- a)  $(a + b)^2$  (sabiendo que  $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ )
  - b)  $(a + b)(a - b)$
  - c)  $(a + b)(a + c)$
  - d)  $(a + b)^3$
2. Sabiendo que el resultado que has obtenido en cada caso es un procedimiento equivalente al indicado en la operación, describe la igualdad de dichos procedimientos.

3. ¿Qué significa que ambos procedimientos sean equivalentes?

4. Verifica que los resultados que se obtienen con los dos procedimientos son los mismos para los siguientes tres valores de  $a, b, c$ .

a)  $a = 1, b = 2, c = 3$

b)  $a = -2, b = 1, c = \frac{3}{5}$

c)  $a = \frac{1}{4}, b = -3, c = -1$



## Desarrollo



Actividad: 3  
Actividad Individual

Actividad de Equipo



En la *Actividad 1* de la etapa de Inicio, se afirma que **para multiplicar por 100 no es necesario utilizar el procedimiento tradicional para obtener el resultado pues basta agregar dos ceros al número que quieres multiplicar**. El agregar dos ceros es también un procedimiento pero demasiado fácil de utilizar y de recordar. Utilizando ese ejemplo como referencia

podemos decir que **un producto de polinomios es notable cuando puede obtenerse por un procedimiento diferente del tradicional que resulte más fácil de aplicarse y fácil de recordar**.

En la misma *Actividad 1* se ilustró la utilidad que puede tener un producto notable para realizar otras multiplicaciones cuyos productos no resulten tan notables. Estudiar **productos notables** en este curso tendrá un propósito similar al ilustrado con las operaciones aritméticas.

Empezaremos por el primero de los cuatro productos obtenidos en la *Actividad 2* de la etapa de inicio. Es decir, Empezaremos con el procedimiento **para elevar al cuadrado un binomio. El resultado que se obtiene es un producto ya que para obtenerlo se multiplica el binomio por sí mismo**. En esta nueva *Actividad* y en todas las de la secuencia, procedan como en las anteriores, primero de manera individual y luego en equipo.

### El cuadrado de un binomio.

En la *Actividad 2* se te propuso que realizaras la siguiente operación  $(a + b)^2$  y sabiendo que elevar al cuadrado significa multiplicar por sí mismo, multiplicaste  $(a + b)(a + b)$  utilizando el procedimiento que ya conocías para multiplicar polinomios obteniendo  $a^2 + 2ab + b^2$ . A este producto se le denomina **trinomio cuadrado perfecto**. Esto finalmente se escribió:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Esto significa que hemos llegado a un nuevo procedimiento para elevar al cuadrado un binomio, el cual puede enunciarse diciendo:

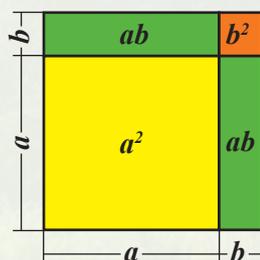
#### Para elevar al cuadrado un binomio:

- Eleve al cuadrado cada uno de los términos del binomio
- Multiplique los dos términos del binomio y el producto de esta multiplicación multiplíquelo por 2
- Sume los tres resultados, es decir los cuadrados de los dos términos y el doble producto de los términos.

En forma abreviada puede decirse:

*El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término.*

El procedimiento descrito para calcular el cuadrado de un binomio está ilustrado en la **Figura 5.1** en la que puede verse que el área del cuadrado de lado  $(a + b)$  es, efectivamente, igual a la suma de las áreas de los cuadrados, uno de lado  $a$  y el otro de lado  $b$ , más las áreas de los dos rectángulos cuyos lados miden  $a$  y  $b$ .



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 5.1

1. Utilizando el procedimiento descrito, eleva al cuadrado los siguientes binomios:
  - a)  $(2x - 1)^2$
  - b)  $(4 + 3m)^2$
  - c)  $(ax - h^3)^2$

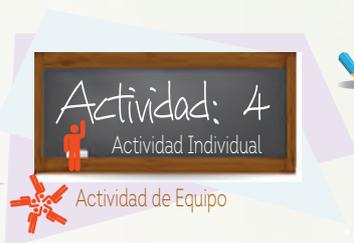
d)  $(\frac{1}{3}u + 2v^2)^2$

e)  $(\frac{3}{5}rs - \frac{1}{2}t^3)^2$

2. Utiliza el procedimiento descrito y algunas de las propiedades de los números reales estudiadas en la **Secuencia 3** del **BLOQUE 4**, para elevar al cuadrado los siguientes polinomios:

a)  $(a + b + c)^2$

b)  $(x + 2y^2 - 1)^2$



### El producto de binomios conjugados

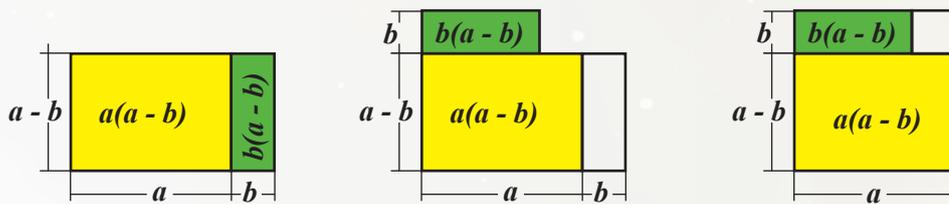
Empezaremos precisando qué significa que dos binomios sean conjugados.

*Dos binomios son conjugados si la única diferencia entre ellos es el signo de uno de los términos*

En la *Actividad 2* de la etapa de inicio, aplicando el procedimiento establecido para la multiplicación de polinomios, multiplicaste  $(a + b)(a - b)$  que, de acuerdo con lo que hemos dicho, son dos binomios conjugados. El resultado que obtuviste fue  $a^2 - b^2$ . Esto significa que

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Este resultado se ilustra en la **Figura 5.2** donde puede verse que, efectivamente, el área de un rectángulo de lados  $a + b$  y  $a - b$ , que se calcula multiplicando  $(a + b)(a - b)$  es equivalente al área del cuadrado de lado  $a$ , menos el área del cuadrado de lado  $b$ , es decir  $a^2 - b^2$ . Esto permite establecer un procedimiento muy sencillo de utilizar y de recordar para obtener el producto de dos binomios conjugados, producto que se denomina **diferencia de cuadrados**.



$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Figura 5.2

- 1) **Enuncia el procedimiento con tus propias palabras.**

---

---

---

---

- 2) **Utiliza el procedimiento que acabas de establecer para obtener el producto de los siguientes binomios conjugados**

a)  $(a - b)(-a - b)$

b)  $(x^2 + y)(-x^2 + y)$

c)  $(ax - h^3)(ax + h^3)$

d)  $(\frac{1}{4}r + 5s^4)(\frac{1}{4}r - 5s^2)$

e)  $(\frac{3}{5}vt - \frac{1}{2}w^2)(\frac{3}{5}vt + \frac{1}{2}w^2)$

- 3) **Utilizando el procedimiento descrito y algunas de las propiedades de los números reales estudiadas en la **Secuencia 3** del **BLOQUE 4**, podrás obtener el producto de los siguientes polinomios. Inténtalo.**

a)  $(a + b + c)(a + b - c)$

b)  $(x - 2y^2 - 1)(x - 2y^2 + 1)$

c)  $(a + b + c)(a - b - c)$



### El producto de binomios que tienen un término común

Los binomios  $a + b$  y  $a + c$  tienen un término común, el término  $a$ . Al calcular el producto por el procedimiento establecido para multiplicar polinomios, se obtiene:

$$(a + b)(a + c) = a^2 + ab + ca + cb$$

Como:  $ab = ba$  y  $cb = bc$  ¿Por qué?

Pueden sustituirse  $ab$  y  $bc$  y escribir

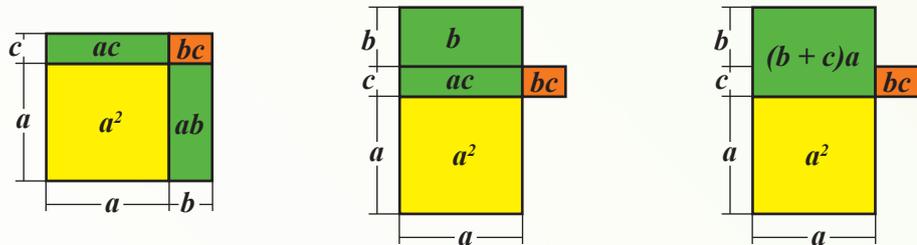
$$(a + b)(a + c) = a^2 + ba + ca + bc$$

Y como:  $ba + ca = (b + c)a$  ¿Por qué?

Sustituyendo se obtiene:  $(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$

De esta última igualdad puede establecerse un procedimiento simplificado para calcular el producto de dos binomios que tienen un término común, el cual se denomina trinomio cuadrático.

La **Figura 5.3** ilustra geoméricamente la equivalencia de los dos procedimientos que pueden utilizarse para calcular el área del rectángulo de lados  $a + b$  y  $a + c$ .



$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

Figura 5.3

1. Describe el procedimiento establecido con tus propias palabras.

---



---



---



---

2. Utiliza el procedimiento que acabas de establecer para obtener el producto de los siguientes binomios que tienen un término común.

a)  $(a - b)(a - c)$

b)  $(5 + 4x)(1 + 4x)$

c)  $(x^2 - 2)(x^2 - 5)$

d)  $(3 - ax)(-4 - ax)$

e)  $(\frac{1}{4}z + v^2)(\frac{1}{4}z - s^2)$

f)  $(\frac{3}{5}mn - \frac{1}{2})(\frac{3}{5}mn + \frac{1}{4})$

3. Utilizando el procedimiento descrito y algunas de las propiedades de los números reales estudiadas en la **Secuencia 3** del **BLOQUE 4**, podrás obtener el producto de los siguientes polinomios. Inténtalo.

a)  $(a + b + 1)(a + b + 2)$

b)  $(x - 2y^2 - 3)(x - 2y^2 + 4)$

c)  $(a + b + 1)(a + c + 1)$



## Actividad de Cierre



En el desarrollo de esta **Secuencia** se espera te haya quedado claro, que:

a) Un producto de expresiones algebraicas se considera notable cuando puede obtenerse por un procedimiento más sencillo de aplicar que el establecido para realizar la multiplicación y que, además, dicho procedimiento resulta fácil de recordar.

b) Algunos de esos procedimientos, fáciles de efectuar y de recordar son:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Que indica que

*Elevar al cuadrado la suma de dos términos (un binomio) es equivalente a sumar el cuadrado del primer término, el doble producto de los dos términos y el cuadrado del segundo término.*

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Que indica que

*El producto de dos binomios conjugados es equivalente a la diferencia de los cuadrados de los términos de los binomios.*

$$(a + b)(a + c) = a^2 + (b + c)a + bc$$

Que indica que

*El producto de dos binomios que tienen un término común es equivalente a la suma del cuadrado del término común, con el producto de la suma de los términos diferentes por el término común y con el producto de los términos diferentes.*

c) Usando los procedimientos con los que se obtienen los productos notables más algunas de las propiedades de las operaciones con números reales, se pueden efectuar multiplicaciones de expresiones algebraicas menos simples por procedimientos simplificados.

d) Los procedimientos con los que se obtienen los productos notables pueden utilizarse para efectuar cálculos numéricos de manera rápida y efectiva; en muchas ocasiones, mentalmente.

## Secuencia

## Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

## Factorización

En las *Actividades* de esta **Secuencia**, tal como lo hiciste en la anterior, resuelve primero de manera individual y luego en el equipo comenten y analicen sus respuestas y los procedimientos que hayan utilizado para obtenerlas tratando, al hacerlo, de darse cuenta de sus aciertos lo mismo que de sus errores y en el caso de éstos últimos, se ayuden a corregirlos. Después, bajo la conducción del profesor compartirán sus reflexiones al resto del grupo lo cual permitirá al profesor darse cuenta de sus avances y señalárselos, pero también de sus errores y ayudarlos a corregirlos.



Al procedimiento que se utiliza para expresar un polinomio como el producto de otros más simples llamados factores, se le denomina **factorización**.

En realidad no sólo se pueden factorizar los polinomios, sino otras muchas expresiones algebraicas y también los números. De hecho, desde la escuela primaria empezaste a factorizar números, aún si al hacerlo, no sabías que estabas factorizando y luego, a tu paso por la escuela secundaria y desde entonces, has efectuado factorizaciones con bastante frecuencia. Con el propósito de que recuerdes el tipo de problemas que has resuelto efectuando factorizaciones, resuelve, de manera individual para luego comentarlos en el equipo, los siguientes:

1. ¿Por cuánto multiplicas el 8 para obtener 56?
2. Determina todos los factores de 30.
3. Expresa el 180 como producto de sus factores primos.
4. Determina los factores comunes a 56 y 84.
5. ¿Cuál es el máximo factor común de 72 y 108?



## Desarrollo



### Monomio como Factor Común

En el **Problema 4** de la actividad de inicio se te pidió determinar los factores comunes del 56 y el 84 y seguramente encontraste que 2, 4, 7, 14 y 28 lo son, **puesto que tanto el 56 como el 84 pueden expresarse como el producto de cualquiera de sus factores comunes por un número entero.**

**Por ejemplo**, el 7 es factor común porque:

$$56 = 7 \times 8 \quad \text{y} \quad 84 = 7 \times 12$$

1. De la misma manera que dos o más números pueden tener factores comunes, las expresiones algebraicas también pueden tenerlos. Analiza el caso de las dos siguientes:  $12x^2$   $30x^3$ .
  - a) Primero escribe todos los factores de cada una de las dos y luego identifica los que son comunes.
    - i) Los factores de  $12x^2$  son:
    - ii) Los factores de  $30x^3$  son:
    - iii) Los factores comunes de  $12x^2$  y  $30x^3$  son:
    - iv) El máximo factor común de  $12x^2$  y  $30x^3$  es:
    - v) Factoriza tanto  $12x^2$  como  $30x^3$ , utilizando el máximo factor común como uno de los factores.
    - vi) Utiliza la propiedad distributiva de la suma y la multiplicación de números reales para factorizar el polinomio  $12x^2 + 30x^3$  donde uno de los factores sea el máximo factor común de los términos del polinomio.

Al procedimiento que has utilizado para factorizar el polinomio  $12x^2 + 30x^3$  se le denomina *sacar un monomio como factor común* y aunque puede hacerse utilizando cualquier monomio que sea factor común de los términos del polinomio, la factorización que más frecuentemente se utiliza es ésta, en la que se saca como factor del polinomio, el máximo factor común de sus términos.

b) Cuando el factor común que se saca no es el máximo, el otro factor es un polinomio que también tiene factor común.

2. Factoriza cada uno de los siguientes polinomios utilizando el máximo factor común de los términos como el factor del polinomio.

a)  $4x^2 + 6x$

b)  $21x^3 - 14x^2 + 35x$

c)  $12x^5 - 35x^3$

d)  $3x^2 + 18x^3 - 6x^4$

e)  $15x^6 - 8x^5 - 12x^4 + 5x^3$

f)  $8x + 2x^2 - 6x^3 + 4x^5$

g)  $7x^5 - 35x^3 + 14$

h)  $5 + 12x^2 + 30x^3$

3. Describe la manera en que has procedido para efectuar la factorización

---

---

---

---

---

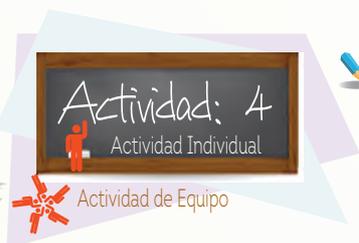


## Factorización de una diferencia de cuadrados

Los procedimientos que has aprendido para efectuar multiplicaciones de polinomios, en particular los procedimientos que aprendiste en la secuencia anterior destinada a los productos notables, resultan especialmente útiles para efectuar factorizaciones de polinomios que no tienen factor común.

- 1) **Un polinomio que no tiene factor común si logras identificarlo como uno de los productos notables estudiados, te resultará fácil reconocer sus factores. Veamos el caso del polinomio  $16x^4 - 1$ . ¿Reconoces sus factores?**
  - a) Si ya los reconociste, factorízalo y explica cómo los reconociste.
  - b) Si no los has reconocido, seguramente te ayudará a reconocerlos el darte cuenta que  $16x^4 - 1$  es una diferencia de cuadrados y recordar que la diferencia de cuadrados es uno de los productos notables que ya conoces, el que se obtiene al multiplicar dos binomios conjugados.
    - i) ¿De qué términos son cuadrados  $16x^4$  y  $1$ ?
    - ii) ¿Cuáles son los binomios conjugados cuyo producto es  $16x^4 - 1$ ?
    - iii) Expresa el polinomio  $16x^4 - 1$  como producto de sus factores.
- 2) **Sabiendo que una diferencia de cuadrados es producto de dos binomios conjugados, factoriza las siguientes expresiones algebraicas:**

- a)  $x^2 - 16$
- b)  $25 - y^2$
- c)  $9s^4 - t^6$
- d)  $(a + b)^2 - c^2$
- e)  $1 - m^2n^4$
- f)  $x^2 - (y - z)^2$
- g)  $1 - (a - 1)^2$



### Factorización de un trinomio cuadrado perfecto

Por lo estudiado en la secuencia anterior sabes que los trinomios de la forma:

$$a^2 + 2ab + b^2$$

**Se denominan trinomios cuadrados perfectos por ser cuadrado de un binomio de la forma  $a + b$ .**

- 1) Cuando tienes un trinomio ¿Cómo determinas si es cuadrado perfecto? Explica cómo lo haces.

---



---



---



---

- 2) Determina si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos. Si lo son, exprésalos como el cuadrado del binomio correspondiente; si no lo son, explica cómo te diste cuenta que no lo era.

a)  $x^2 - 2xy + y^2$

b)  $x^2 + 2x + 1$

c)  $a^2 - 4ab^2 + b^4$

d)  $m^6 + 10m^2 + 25$

e)  $s^2 - 6s + 4$

f)  $16 + 24z + 9z^2$

g)  $9 - 12u + 16u^2$

h)  $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$



## Factorización de un trinomio cuadrado

Los trinomio cuadráticos son trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$  y son el producto que se obtiene al multiplicar dos binomio de la forma  $x + m$  y  $x + n$ , es decir, binomio que tienen  $x$  como factor común.

Si multiplicamos estos binomio obtenemos:

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$$

- a) ¿Qué relación encuentras entre los valores de  $m$  y  $n$  y el valor de  $b$ , que es el coeficiente del término lineal del trinomio cuadrático?
- b) Y con el valor de  $c$  ¿Qué relación encuentras a los valores de  $m$  y  $n$ ?
- 1) **Teniendo presentes las relaciones existentes entre  $m$  y  $n$  y los valores de  $b$  y  $c$ , factoriza los siguientes trinomio cuadrático.**

a)  $x^2 + 5x + 6$

b)  $x^2 - 2x - 3$

c)  $s^4 - 4s^2 - 5$

d)  $m^6 + 10m^3 + 16$

e)  $x^2 + 6x + 9$

f)  $t^2 - t - 12$

g)  $x^2 + 9x + 12$

h)  $x^2 - 12x + 36$

i)  $t^2 - t + 2$



**La transformación de un binomio de la forma  $x^2 + bx$  en una diferencia de cuadrados**

Hasta este momento has aprendido cuatro procedimientos para factorizar polinomios:

- **Sacar un monomio como factor común**
- **Factorizar una diferencia de cuadrados**
- **Factorizar un trinomio cuadrado perfecto**
- **Factorizar un trinomio cuadrático**

En esta *Actividad* estudiarás un procedimiento que muestra cómo pueden utilizarse los tres primeros procedimientos de la lista para transformar binomios de la forma  $x^2 + bx$  en diferencias de cuadrados que, como viste en la *Actividad 3* de esta misma secuencia, pueden factorizarse.

1) **Empezaremos con un caso particular para ilustrar el procedimiento.**

- a) Es evidente que  $x^2 + 4x$  puede factorizarse sacando un monomio como factor común. Factorízalo.
- b) Aunque menos evidente también puede verse que  $x^2 + 4x$  son dos términos de un trinomio cuadrado perfecto que, como sabes, es el cuadrado de un binomio.
- c) Si  $x^2$  es el cuadrado del primer término del binomio, entonces es evidente que el primer término es  $x$ , pero ¿cómo puede determinarse el segundo término del binomio?
- d) ¿Qué representa  $4x$  en el trinomio cuadrado perfecto?

- e) ¿Qué representa el  $4$ ?
- f) ¿Cuál es el segundo término del binomio?
- g) ¿Qué término hay que sumarle a  $x^2 + 4x$  para que sea un trinomio cuadrado perfecto?
- h) Si a  $x^2 + 4x$  le agregaste el cuadrado del segundo término del binomio ¿Qué debes hacer para que el nuevo polinomio siga siendo igual a  $x^2 + 4x$ ?
- i) Si hasta aquí has hecho las cosas bien, debes haber llegado a la expresión
- $$x^2 + 4x + 4 - 4$$
- j) Si ahora factorizas el trinomio cuadrado perfecto, esto es, si factorizas  $x^2 + 4x + 4$  ¿Cómo queda escrito el polinomio  $x^2 + 4x + 4 - 4$ ?
- k) Como puedes ver, has transformado el polinomio  $x^2 + 4x$  en una diferencia de cuadrados que desde luego, puedes factorizar como producto de binomios conjugados. Hazlo y verifica que resultan los mismos factores que obtuviste al factorizar  $x^2 + 4x$ .



1. Utiliza el procedimiento que acabas de aprender para transformar los siguientes binomios en diferencias de cuadrados

a)  $x^2 + 2x$

b)  $x^2 - 6x$

c)  $x^2 + 3x$

d)  $x^2 - x$

2. Describe el procedimiento que has utilizado para transformar los binomios de los incisos a) a d) en diferencias de cuadrados.

---

---

---

---

---

3. Los binomios que has transformado en diferencias de cuadrados son de la forma  $x^2 + bx$ .

- a) ¿Qué término le sumas a este binomio para completar el trinomio cuadrado perfecto?
- b) Explica cómo decidiste el término que debías sumar al binomio para completar el trinomio cuadrado perfecto.
- c) ¿Qué le haces al trinomio cuadrado perfecto que obtuviste para que siga siendo una expresión equivalente a  $x^2 + bx$ ?
- d) Escribe la expresión equivalente a  $x^2 + bx$  en la que el trinomio cuadrado perfecto aparezca escrito como cuadrado de un binomio.



### Otra forma de factorizar un trinomio cuadrático

El procedimiento que has aprendido para transformar un binomio que tiene un factor común en una diferencia de cuadrados, también puede utilizarse para factorizar trinomios cuadráticos, es decir trinomios de la forma  $x^2 + bx + c$ , que ya aprendiste a factorizar en la *Actividad 5*.

- 1) **Siguiendo los pasos que se indican en los incisos, factoriza el trinomio**

$$x^2 + 2x - 3$$

- Aplica el procedimiento utilizado en la *Actividad 5* y transforma  $x^2 + 2x$  en una diferencia de cuadrados.
- En el trinomio  $x^2 + 2x - 3$ , sustituye  $x^2 + 2x$  por la diferencia de cuadrados que obtuviste en el inciso anterior.
- Simplifica la expresión obtenida y observa que la expresión simplificada es una diferencia de cuadrados.
- Factoriza esta última expresión como producto de binomios conjugados.

- 2) **Utilizando el procedimiento que acabas de aprender, factoriza los siguientes trinomios:**

a)  $x^2 + 4x + 3$

b)  $x^2 + 6x + 5$

c)  $x^2 - 2x - 8$

d)  $x^2 - 8x - 9$



e)  $x^2 + 3x - 4$

f)  $x^2 - x - 2$

g)  $x^2 + 5x + 4$

h)  $x^2 + 2x + 5$

e)  $x^2 + x + \frac{5}{4}$

- 3) **¿Pudiste factorizar todos los trinomios? Si hubo alguno o algunos que no pudieras factorizar, explica por qué no pudiste.**

---



---



---

- 4) **Considera ahora el caso general, es decir, factoriza el trinomio  $x^2 + bx + c$  utilizando el procedimiento que has aplicado para factorizar los trinomios del punto 2. Hazlo a través de los siguientes pasos:**

a) Completa el trinomio cuadrado perfecto cuyos dos primeros términos son:  $x^2 + bx$  y transforma el binomio en una diferencia de cuadrados (Esto lo hiciste en el problema 3 de esta actividad)

b) Sustituye  $x^2 + bx$  por la diferencia de cuadrados que obtuviste en el inciso anterior en el polinomio  $x^2 + bx + c$ .

c) Debes haber obtenido la siguiente igualdad:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

d) Que puede transformarse en

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4c}{4}\right)$$

e) ¿Cuál es la condición para que esta última expresión sea una diferencia de cuadrados?



## Factorización de un trinomio cuadrático general

Se denomina **trinomio cuadrático general** a un trinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ . El procedimiento estudiado en la *Actividad* anterior para factorizar trinomios de la forma  $x^2 + bx + c$  nos llevó a la siguiente factorización:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4c}{4}\right)$$

Partiendo de este resultado queremos factorizar un trinomio de la forma:  $ax^2 + bx + c$

Para hacerlo, sigue los siguientes pasos:

Factoriza  $a$  para obtener  $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

- a) Siguiendo el procedimiento estudiado en la *Actividad 7* tomamos los dos primeros términos del trinomio cuadrático que está entre paréntesis, es decir,

$$x^2 + \frac{b}{a}x$$

- b) y completamos el trinomio cuadrado perfecto obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

- c) Dado que hemos obtenido un trinomio cuadrado perfecto lo podemos expresar como el cuadrado del binomio

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

- d) Y de esto se sigue que  $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$

y sustituyendo  $x^2 + \frac{b}{a}x$  en  $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

se obtiene  $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$



y como  $ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$

e) Ahora podemos escribir  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right]$

f) Y dado que  $-\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = -\left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$

g) La expresión del inciso e) puede escribirse

$$ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \right]$$

1) **Utiliza el procedimiento descrito para factorizar los siguientes trinomios y verifica que ambas expresiones son equivalentes asignando a  $x$  al menos tres valores distintos:**

a)  $6x^2 + 7x + 2$

b)  $2a^2 + 3a - 2$

c)  $12x^2 + 11x - 15$

d)  $3x^2 - 13x + 4$



## Otra forma de factorizar un trinomio cuadrático general

En la *Actividad 8* acabas de estudiar un procedimiento para factorizar trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ , ahora vas a conocer otro procedimiento que permite factorizarlos.

Este nuevo procedimiento consiste en transformar el polinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$ , en un trinomio de la forma  $u^2 + bu + q$ ; que son trinomios que aprendiste a factorizar en las *Actividades 5 y 7*.

Para transformar un polinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$  en uno de la forma  $u^2 + bu + q$  se procede de la siguiente manera:

- Multiplica el trinomio  $ax^2 + bx + c$  por  $a$  obteniendo  $a^2x^2 + abx + ac$ , que a su vez puede escribirse en la forma  $(ax)^2 + b(ax) + ac$
- Como este polinomio se obtuvo al multiplicar  $ax^2 + bx + c$  por  $a$ , entonces el polinomio obtenido puede escribirse

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a} [(ax)^2 + b(ax) + ac]$$

- Luego; haciendo  $ax = u$  y sustituyendo se obtiene

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{a} (u^2 + bu + q), \text{ donde } q = ac.$$

- Hecha la transformación del polinomio de la forma  $ax^2 + bx + c$  en un polinomio de la forma  $\frac{1}{a} (u^2 + bu + q)$ , factoriza el polinomio de la forma  $u^2 + bu + q$  utilizando alguno de los procedimientos que aprendiste en las *Actividades 5 y 7*.

1. Utiliza este nuevo procedimiento para factorizar los siguientes trinomios:

- $6x^2 + 7x + 2$
- $2a^2 + 3a - 2$
- $12x^2 + 11x - 15$
- $3x^2 - 13x + 4$
- $2x^2 + 3x - 4$
- $4x^2 + 20x + 25$
- $6x^2 - 31x - 30$
- $16x^2 - 24x + 9$



## Actividad de Cierre



Actividad: 10  
Actividad Grupal



El propósito fundamental de las *Actividades* de esta **Secuencia** fue que conocieras los procedimientos con los cuales se pueden factorizar los polinomios y desarrollarás habilidad y creatividad para utilizarlos.

Los procedimientos de factorización que se espera hayas aprendido a utilizar de manera eficaz, después de haber desarrollado las actividades de esta secuencia son:

- a) **Sacar un monomio como factor común**
- b) **Expresar una diferencia de cuadrados como producto de binomios conjugados**

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

- c) **Expresar un trinomio cuadrado perfecto como cuadrado de un binomio**
- d) **Expresar un trinomio cuadrático como el producto de dos binomios que tienen un término común**
- e) **Expresar un trinomio cuadrático general como el producto de dos binomios lineales**



Utilizando los procedimientos simplificados que has aprendido en esta secuencia sobre productos notables

1. Calcula los siguientes productos.

- a)  $(3 - x^3)^2$
- b)  $(3x^4 + 1)(3x^4 - 2)$
- c)  $(ch^3 - a)(ch^3 + a)$
- d)  $(x^2 - z^3 - 4)^2$
- e)  $(x + 4y - 3)(x - 4y - 3)$
- f)  $(x + y^2 - 1)(x + y^2 + 2)$
- g)  $(x + 2y^2 - 1)^2$

2. Sabiendo que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

y que  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

¿Cómo puedes utilizar estos resultados para calcular  $(a + b)^4$  y  $(a + b)^5$ ?

3. Resuelve los siguientes tres problemas:

- a) En cierta ocasión, **Jorge**, un estudiante de bachillerato, al ser interrogado por el *profesor* sobre cuánto era  $27^2$ , después de pensar un momento contestó: **729**. El profesor se interesó en saber cómo lo había calculado y se lo preguntó. Entonces **Jorge** dijo:

*Primero calculé 25 por 25 y me dio 625, luego le sumé 100 y obtuve 725 y después le agregué 4 para obtener 729 que es el resultado.*

El *profesor* aprovechó lo dicho por el alumno para preguntarle al resto del grupo si alguno podía explicar el procedimiento que utilizó **Jorge**. La verdad que ninguno pudo explicarlo. Intenta explicarlo tú.



- b) Idea un procedimiento para calcular mentalmente el resultado de multiplicar  $998 \times 987$ . Cuando lo hayas ideado:
- Utilízalo para efectuar la operación propuesta y cerciórate si el resultado que obtienes es correcto.
  - Explica y justifica el procedimiento que inventaste.
- c) Sin utilizar la calculadora, ni papel y lápiz, ¿Sabes si es cierto que el resultado de multiplicar  $1995 \times 2005$  es  $3,999,975$ ?
- Tanto si dices que es cierto como si afirmas que es falso, explica qué hiciste para saberlo.

4. En el prisma de la **Figura 5.5** se tiene que el largo de su base es  $5 \text{ cm}$  mayor que su ancho; mientras que su altura es  $2 \text{ cm}$  menor que el largo. Representa con  $x$  la longitud del ancho y obtén una expresión algebraica para calcular su volumen.

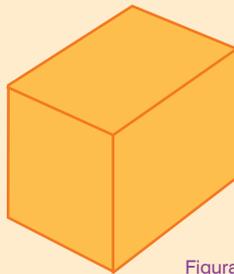


Figura 5.5

5. La expresión algebraica  $V = 4x^3 - 9x$  permite calcular el volumen del prisma de la **Figura 5.6** en  $\text{cm}^3$ , en el que  $x$  representa la altura medida en  $\text{cm}$ .

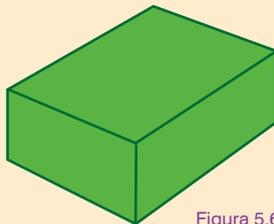


Figura 5.6

- a) ¿Qué tanto mayor es el largo que el ancho de la base?

- b) ¿Qué relación hay entre el largo de la base y la altura del prisma?
- c) Y entre el ancho de la base y la altura del prisma, ¿Qué relación hay?
- d) ¿Cuál es la expresión algebraica para calcular el área total del prisma?

6) Sabiendo que el radio de la Tierra mide aproximadamente 6,400 km, Determina la longitud que necesitaría medir una cuerda que rodeara a la Tierra por el Ecuador (El ecuador es una circunferencia imaginaria cuyo centro es el centro de la Tierra).

- a) ¿Qué tanto más larga deberá ser una cuerda que forme una circunferencia cuyo centro sea el de la Tierra y cuyo radio sea un metro mayor que el del Ecuador?



7) Utilizando los diversos procedimientos que conoces para factorizar polinomios, expresa los siguientes como producto de sus factores:

- a)  $x^3 - 2x^2 + x$
- b)  $12x^5 - 27x^3$
- c)  $18x^2 + 12x^3 - 6x^4$
- d)  $x^4 - 16$
- e)  $12x^4 + 22x^3 - 20x^2$

- f) Sabiendo que las fracciones algebraicas pueden simplificarse por un procedimiento similar al que se utiliza para simplificar fracciones numéricas, es decir factorizando tanto el numerador como el denominador y eliminando los factores comunes a ambos, simplifica las siguientes fracciones:

1.  $\frac{210}{315}$

2.  $\frac{360}{792}$

3.  $\frac{6x^2}{15x^5}$

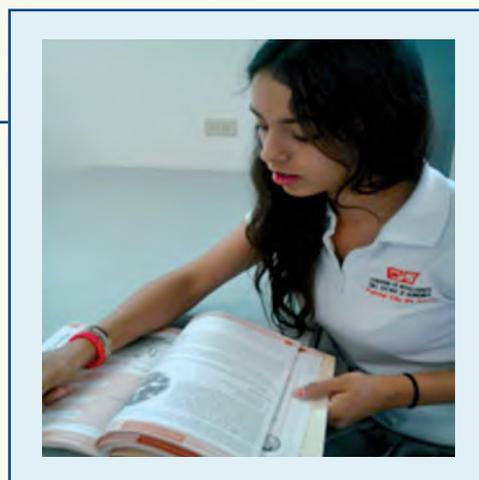
4.  $\frac{3x^2 - 6x}{9x^3}$

5.  $\frac{x^4}{2x^3 - 4x^2}$

6.  $\frac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - 2}$

7.  $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - 6x^2}$

8.  $\frac{3x^4 - 12x^3 + 12x^2}{x^5 - 4x^3}$



El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

*En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

**Problema 1.** Calcula, en cada uno de los siguientes casos, el producto solicitado:

i.  $(x^2 - 2)(x^2 + 3) =$

ii.  $(2x^2 + y - 1)(2x^2 - y - 1) =$

iii.  $(x + 3m - 4)^2 =$

iv.  $(a - 3x + 1)^3 =$

v.  $(u^2 + 3)(2u^2 - 3) =$

*Solución:*

Reflexiones relacionadas con el problema 1:

¿Qué procedimiento utilizaste, en cada caso, para obtener el producto solicitado?	¿Qué criterios utilizas para decidir el procedimiento que vas a emplear para obtener el producto que se te pide?

**Problema 2.** Factoriza cada uno de los siguientes polinomios de tal manera que los factores que utilices ya no puedan factorizarse\*

i.  $x^4 - 2x^2 - 3 =$

ii.  $4x^2 - 4x + 1 - y^2 =$

iii.  $x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4 =$

iv.  $x^3 + x^2 - 12x =$

v.  $2m^4 + 3m^2 - 9 =$

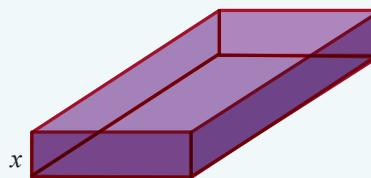
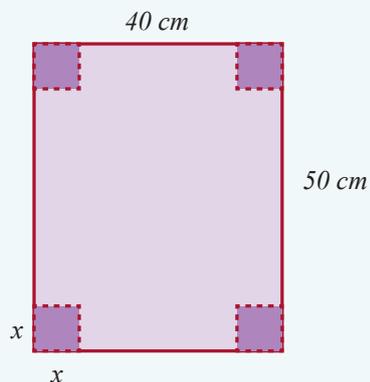
Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 2:

¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a resolver el problema?	¿Cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaste?

**Problema 3.** Una lámina rectangular es **50 cm** de largo y **40 cm** de ancho se utiliza para fabricar una caja de base rectangular sin tapa cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas de la lámina.

Representa con  $x$  la longitud del lado de los cuadrados que se cortan y obtén una expresión algebraica para calcular el volumen de la caja.



Caja sin tapa

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 3:

Señala cuál(es) de los siguientes recurso(s) utilizaste para analizar y resolver el problema:	¿Qué dificultades enfrentaste para obtener la expresión algebraica solicitada?	¿Qué procedimiento seguiste para obtenerla? y ¿Qué consideraciones hiciste para decidir dicho procedimiento?	¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a resolver la situación planteada?
• Esquemas			
• Gráfica			
• Tablas			
• Expresiones algebraicas			

**1. ¿Qué opinión tienes de tu participación en el trabajo en equipo?**

- a) No me gusta, considero que es una pérdida de tiempo.
- b) Casi no participo porque cuando pregunto algo casi no le entiendo lo que dicen mis compañeros.
- c) Participo poco, pero lo que dicen mis compañeros me ayuda a entender mejor los problemas
- d) Pienso que soy de los que más participa y mis compañeros dicen que cuando explico algo, me entienden muy bien.
- e) Considero que es buena porque todos participamos y nos ayudamos a entender mejor y a resolver los problemas

**2. ¿Qué opinión tienes de tu participación cuando los temas se comentan o se discuten a nivel de todo el grupo dirigidos por el profesor?**

- a) Considero que es buena porque cuando tengo dudas casi siempre pregunto y cuando se la respuesta a lo que pregunta el profesor o alguno de mis compañeros siempre levanto la mano para participar.
- b) Casi no participo porque temo equivocarme o hacer preguntas tontas
- c) Participo poco, ya que sólo lo hago cuando estoy seguro que lo que voy a decir está bien
- d) No participo porque me pongo muy nervioso, no logro vencer el miedo. Cuando tengo dudas prefiero preguntar a alguno de mis compañeros.
- e) Considero que soy de los que más participa y creo que mis participaciones son buenas.

**3. Uno de los propósitos de las actividades de este bloque fue que conocieras los procedimientos llamados productos notables y adquirieras habilidad para utilizarlos de manera eficaz. Respecto a este propósito consideras:**

- a) Que puedes utilizar cualquiera de los procedimientos estudiados en todos los tipos de problemas que se te pidió que resolvieras.
- b) Que puedes utilizar cualquiera de los procedimientos estudiados en casos sencillos, que no te queda claro cómo usarlos cuando las operaciones son con polinomios de más de dos términos.
- c) Que tienes dificultades para usar adecuadamente estos procedimientos, que casi siempre te queda la duda por no saber si lo hiciste bien o no.
- d) Que necesitas practicar mucho más para llegar a dominar estos procedimientos
- e) Que no entiendes por qué se dice que estos procedimientos son más fáciles de aplicar que los que habías estudiado en el bloque 4.

**4. El otro propósito de las actividades de este bloque fue que conocieras los procedimientos para factorizar polinomios y adquirieras habilidad para utilizarlos de manera eficaz. Respecto a este propósito consideras:**

- a) Que puedes utilizar cualquiera de los procedimientos estudiados en todos los tipos de problemas que se te pidió que resolvieras.
- b) Que puedes utilizar cualquiera de los procedimientos estudiados en casos sencillos, que no te queda claro cómo usarlos cuando para factorizar un polinomio tienes que utilizar más de un procedimiento.
- c) Que tienes dificultades para usar adecuadamente estos procedimientos, que casi siempre te queda la duda por no saber si lo hiciste bien o no.
- d) Que necesitas practicar mucho más para llegar a dominar estos procedimientos
- e) Que es muy difícil factorizar y que piensas que no podrás llegar a dominar estos procedimientos.

**5. ¿Hubo alguna o algunas cuestiones de las estudiadas en este bloque que te hayan parecido interesantes? Enumera las que más interesantes te hayan parecido**

---



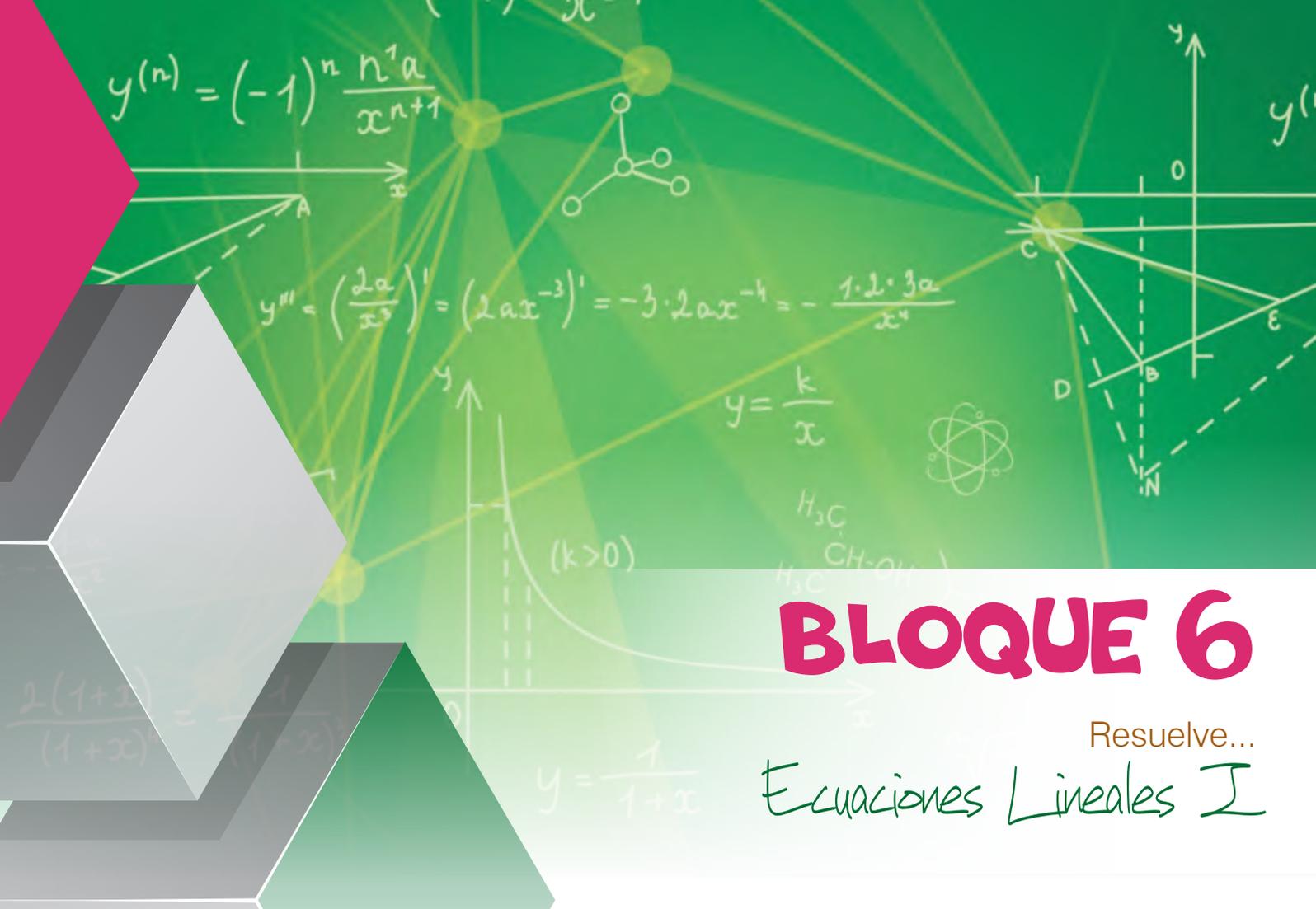
---



---



---



# BLOQUE 6

Resuelve...

## Ecuaciones Lineales I

### Introducción:

En este Bloque se abordan los temas de **funciones lineales** y de **ecuaciones lineales**. Ambos temas están estrechamente vinculados y tienen un gran uso en la modelación matemática de situaciones que provienen de diferentes áreas de la vida cotidiana, como en **Física**, en **Química**, en **Economía**, en **Ciencias Sociales** y en otras áreas del conocimiento.

Las situaciones de estudio que aquí se presentan, están relacionadas con temas de las asignaturas que estás cursando en este semestre, como es el caso de la clase de química y la de **Ciencias Sociales**, así como de las que cursarás en semestres posteriores. Asimismo se plantean situaciones y problemas de diferentes ámbitos de la vida cotidiana o de campos del conocimiento distintos, incluyendo las temáticas y problemas planteados en los bloques anteriores de este curso.

Con el desarrollo de las actividades del bloque aprenderás diferentes formas de representar las **funciones lineales** y las **ecuaciones lineales** interpretando y elaborando gráficas, **expresiones algebraicas** y tablas numéricas que modelen distintos fenómenos, para lo cual deberás analizar y comprender cabalmente la información que se presenta, establecerás comunicación con tus compañeros para escuchar y para expresar ideas en el lenguaje propio de las matemáticas, lo cual te permitirá, a la vez, argumentar sólidamente las acciones realizadas.

# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

### Interpretando Información



#### Velocidad de una reacción Química

Cuando dos o más sustancias se combinan en una **reacción química**, es importante fijarse no sólo en la producción del compuesto o compuestos resultantes, sino también en la velocidad a la cual se lleva a cabo dicha **reacción química**. Es posible que una **reacción química** sea rápida, como en el caso de la combustión de

gasolina en un automóvil o, por el contrario, que la reacción sea lenta, como en el caso de la oxidación de una estructura de hierro.

- a) **Proporciona ejemplos de reacciones químicas que hayas estudiado en tu clase de química y que sean diferentes a los que se acaban de mencionar.**

---

---

---

---



En ocasiones se utilizan agentes para retardar o acelerar la velocidad de reacción, lo que puede llevarse a cabo de diferentes maneras, según sea el caso. A veces es posible acelerar una **reacción química** aplicando calor, en otras se agregan sustancias, llamadas **catalizadores**, que **producen efectos de retardo o aceleración**; en otras, particularmente en las sustancias gaseosas, se modifica la presión aplicada. Otro factor que juega un papel importante en la velocidad de una reacción es la concentración de las sustancias que están reaccionando, notándose que entre mayor es la concentración la velocidad es mayor.

- b) **¿Con qué intención crees que se aceleran o retardan las reacciones químicas?** Ejemplifica.

La velocidad de reacción puede tener un comportamiento complejo, pues los factores que se han señalado son cambiantes, la concentración de las sustancias reaccionantes se va modificando, la temperatura aumenta con la propia reacción, etc.

Sin embargo, al inicio de una reacción es posible que la velocidad tenga un comportamiento relativamente sencillo, como el que se muestra en la **Figura 6.1**, donde aparecen tres gráficas que describen el comportamiento de tres casos de reacciones químicas. En ellas se representa la cantidad de producto obtenido en una determinada reacción química (medido en gramos), en dependencia del tiempo de reacción (medido en segundos).

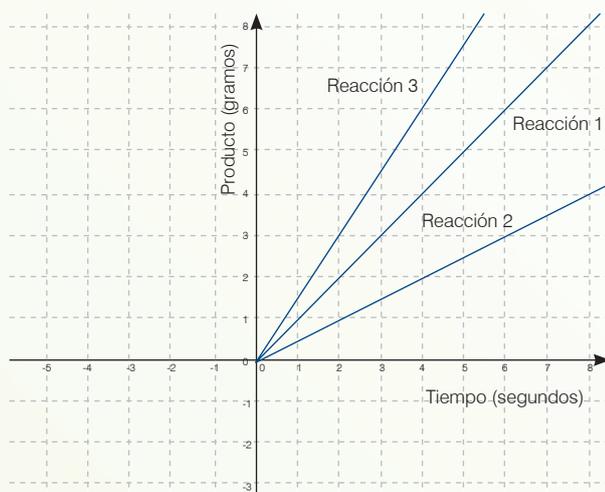


Figura 6.1

Con esta información proporcionada gráficamente, responde lo que se solicita.

- c) **Determina la cantidad de producto obtenido en cada reacción, cuando han transcurrido 1, 2, 2.5, 3 y 4 segundos.**
  
- d) **¿Cuándo se obtiene mayor producto en cada reacción: durante el primer segundo o en el cuarto?**
  
- e) **¿Cómo interpretas que la recta que representa la primera reacción pase por el punto (2,2)?**



- f) **¿Por qué las tres gráficas se intersecan en el punto (0,0)?**
- g) **¿Por qué ninguna de las tres gráficas aparece en el tercer cuadrante?**
- h) **¿Cómo interpretas el hecho de que las tres rectas mostradas tengan diferente inclinación?**
- i) **Ordena las reacciones de la de menor a mayor velocidad con la cual se está obteniendo un nuevo producto.**
- j) **¿Cómo podríamos encontrar la cantidad de producto obtenido en cada reacción después de un determinado tiempo?** Explica detalladamente el procedimiento que estás proponiendo.



## Desarrollo



Actividad: 2  
Actividad Individual



### Velocidad de un objeto en caída libre

Desde una altura de **300 metros** se deja caer un objeto en caída libre y se miden sus velocidades en diferentes momentos. En la **Figura 6.2** se muestra una gráfica donde se representan las velocidades del objeto sobre el eje de las ordenadas, con relación al tiempo transcurrido, en el eje de las abscisas. El tiempo se mide en segundos y la velocidad en metros por segundo ( $\frac{m}{seg}$ ).

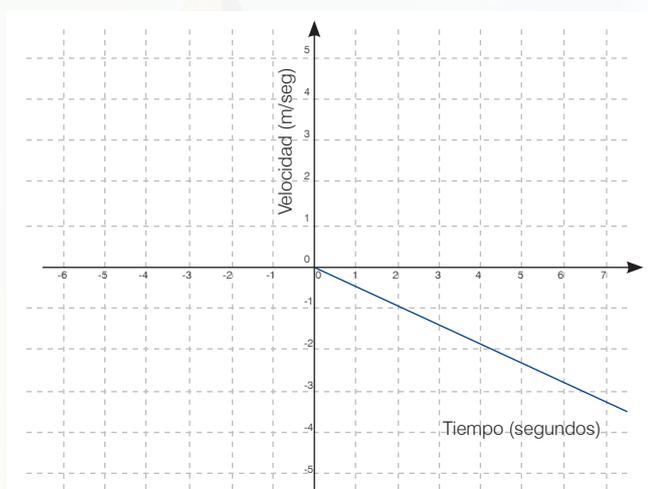


Figura 6.2

Observa la gráfica y contesta lo que se solicita.

- Describe cualitativamente tu idea sobre la forma en que, según tus conocimientos, se comporta un objeto en caída libre.
- Observa la gráfica y describe el comportamiento de la velocidad conforme transcurre el tiempo. ¿Se corresponde este comportamiento con el que describiste anteriormente? Explica.
- ¿Por qué la gráfica de velocidad contra tiempo se encuentra en el cuarto cuadrante? ¿Qué interpretación puedes dar de este hecho?
- Completa la siguiente tabla, determinando la velocidad del objeto en los instantes de tiempo indicados.

<i>Tiempo (seg)</i>	<i>Velocidad (m/seg)</i>
<b>0</b>	
<b>1</b>	
<b>1.5</b>	
<b>2</b>	
<b>2.5</b>	
<b>3</b>	
<b>3.5</b>	
<b>3.8</b>	

Tabla 6.1

- e) Obtén el valor de la razón de cambio o pendiente, esto es, el número de unidades en que cambia la velocidad cuando el tiempo cambia en 1 segundo.
- f) Determina una expresión algebraica para obtener la velocidad en cualquier instante de tiempo. ¿En qué te basaste para encontrar dicha expresión?
- g) ¿En qué se parece esta expresión algebraica a la determinada en la actividad de inicio? ¿Qué tienen en común ambas expresiones? ¿En qué se diferencian?
- h) ¿Qué tanto se modifica la velocidad del objeto entre los instantes  $t = 1\text{seg}$  y  $t = 2.5\text{seg}$ ? ¿Qué tanto se modifica la velocidad entre los instantes de tiempo  $t = 1.5\text{seg}$  y  $t = 3\text{seg}$ ? Proporciona una explicación de lo que está sucediendo.



Actividad: 3  
Actividad Individual



### Un estudio general

Examinaremos ahora la información que se presenta en la **Figura 6.3**. Como podrás observar, en esta gráfica se muestra el comportamiento de dos cantidades que están variando, una a la que se ha representado con la expresión " $x$ " y otra a la que se ha denominado " $y$ ".

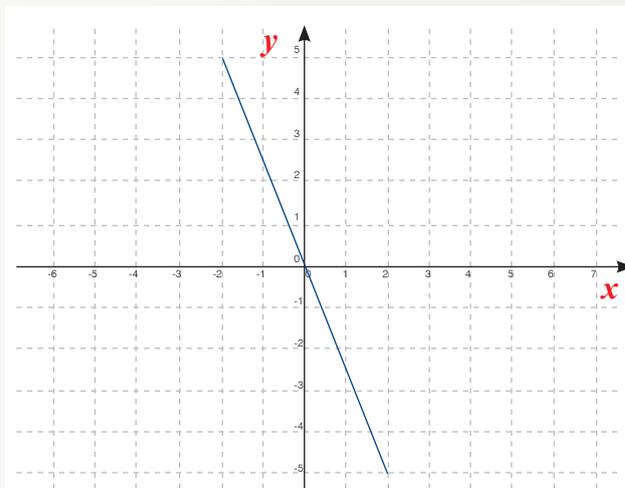


Figura 6.3

a) ¿Por qué decimos que  $x$  e  $y$  están variando?

b) ¿Qué diferencias y qué similitudes encuentras de la gráfica mostrada en la **Figura 6.2** con respecto a las gráficas de la **Figura 6.1**?

c) A continuación se propone una tabla que deberá ser llenada con los valores de  $x$  e  $y$  solicitados.

$x$	$y$
-2	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	
3.5	

d) ¿Qué puedes decir acerca del comportamiento de los valores de esas parejas?

e) A partir de lo que has encontrado hasta este momento, ¿cómo procederíamos si nos interesara encontrar la expresión algebraica de la relación existente entre las dos cantidades involucradas?

f) Si el valor de la " $x$ " se modifica en una unidad ¿qué sucede con el valor de la " $y$ "? ¿Siempre es así? ¿Qué explicación puedes dar de este hecho?

g) Por otro lado, se puede calcular el valor del ángulo de inclinación de la recta con el eje " $x$ " y, por medio del valor de la tangente de este ángulo, obtener lo que se denomina "la pendiente" de una recta. ¿Qué relación tienen entre sí el valor de la pendiente de la recta y los datos obtenidos en el inciso anterior?



## Actividad de Cierre



Actividad: 4  
Actividad Individual



Con los problemas que se han resuelto en el presente bloque se ha tenido la oportunidad de poner en juego diferentes conocimientos matemáticos que se habían estudiado previamente y, por otra parte, han surgido también nuevos conocimientos.

a) Señala los aspectos que te hayan resultado novedosos.

---

---

---

---

Para analizar en detalle las actividades realizadas es posible recurrir a las gráficas presentadas, a las tablas numéricas involucradas y a las expresiones algebraicas empleadas.

**Por ejemplo**, en el problema de inicio, si escribimos las expresiones de producto obtenido ( $P$ ) conforme transcurre el tiempo ( $t$ ), obtendremos las expresiones algebraicas  $P = \frac{1}{2}t$ ,  $P = t$  y  $P = \frac{3}{2}t$ . En la *Actividad 3*, si escribimos la expresión algebraica que corresponde a la gráfica mostrada, tendremos  $y = -3x$ .

En general, salvo el nombre de las variables, las expresiones algebraicas son similares y pueden escribirse matemáticamente en la forma  $y = mx$ , donde  $m$  es una constante. En diversos fenómenos y situaciones aparecen expresiones algebraicas idénticas a ésta, salvo por el nombre que se asigna a las variables, por lo cual es importante reconocerla y estudiar sus características y propiedades.

***Siempre que la razón entre dos valores correspondientes de dos magnitudes variables es una constante, se dice que ambas magnitudes son directamente proporcionales o, simplemente, que son proporcionales y a la constante se le denomina constante de proporcionalidad.***

***Así, en el caso de las expresiones de la forma  $y = mx$ , tenemos que  $x$  e  $y$  son directamente proporcionales pues  $\frac{y}{x} = m$  es una constante. Consecuentemente, desde este punto de vista  $m$  puede interpretarse como la constante de proporcionalidad entre dos magnitudes que son proporcionales.***

*Desde otra perspectiva, puede observarse que la constante  $m$  de la expresión algebraica  $y = mx$  representa la razón de crecimiento de la variable  $y$  entre el crecimiento de la variable  $x$ . Esto puede interpretarse como el cambio del valor de la variable cuando la variable se incrementa en una unidad. En términos gráficos representa el cambio en el valor de la ordenada cuando la abscisa se modifica en una unidad y, por tal motivo, lo identificamos también con el nombre de razón de avance o pendiente de una recta.*

Con base en los análisis y las respuestas que hemos obtenido al abordar los problemas que hemos venido abordando, surgen otros aspectos que son importantes y es conveniente resaltar.

*En el caso de una función lineal cuya expresión analítica es de la forma  $y = mx$ , llamaremos variable independiente a la  $x$  y variable dependiente a la  $y$ . El carácter dependiente de la variable conduce a que con frecuencia se emplee la expresión “ $y$  está en función de  $x$ ”, idea que se expresa algebraicamente escribiendo  $y = f(x)$ , lo cual suele leerse diciendo “ $y$  es igual a  $f$  de  $x$ ”.*

*En el caso de una función como las que hemos estudiado aquí es entonces frecuente que se escriban expresiones como  $f(x) = 4x$ ,  $f(x) = -3x$ , etc. y, de forma general,  $f(x) = mx$ .*

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Las funciones lineales



De acuerdo con sus raíces griegas, (**anthropos: hombre, logos: conocimiento, estudio, tratado**) la Antropología es una ciencia social interesada en estudiar al ser humano. Una de las muchas fuentes que utilizan los antropólogos en sus investigaciones son las ruinas de las civilizaciones antiguas, en donde con frecuencia se encuentran también restos de seres humanos.

Estudiar restos humanos de habitantes de civilizaciones antiguas proporciona información de cómo eran estas personas, cuáles sus características antropomórficas (peso, estatura, complexión, etc). En este sentido se han desarrollado **estudios matemáticos** que permiten conocer, a partir de la medida de ciertos huesos del cuerpo humano, cuál fue la estatura aproximada del mismo.

**Por ejemplo**, según **Santiago Genovés**, (datos consultados en Krenzer, 2006), **la estatura de un ser humano medida en centímetros puede determinarse de la siguiente manera:**

Si se trata de un varón, mediante la relación  $E = 2.26f + 66.38^*$  (1)

donde  $E = \text{estatura}$ ;  $f = \text{longitud del fémur en centímetros}$



1. Responde ahora a las siguientes preguntas:

- ¿Por qué crees que a los antropólogos les interesa conocer las características antropomórficas de los seres humanos?
- ¿En qué parte del cuerpo humano está ubicado el fémur?

\*  $\pm 3.43$  cm, cantidades que para nuestros fines no serán tomadas en cuenta.

- c) Si eres una persona del sexo masculino mide tu fémur (si no dispones de una cinta métrica hazlo aproximadamente) y con base en la expresión algebraica proporcionada, calcula tu supuesta estatura. Compárala con tu estatura real. ¿Coincidieron ambas medidas?  
En caso de que seas del sexo femenino, pide a un compañero que te proporcione el dato de la longitud de su fémur y pregunta por su estatura, para que realices lo que se solicita en el inciso c).
- d) ¿Cómo crees que Genovés llegó a establecer la relación (1)?
- e) En la expresión  $E = 2.26f + 66.38$ , ¿Cuál es el valor de  $E$  cuando  $f = 0$ ? ¿Cómo interpretas este resultado?
- f) Si se te pidiera graficar la expresión algebraica anterior, ¿Cómo esperas que sea la gráfica resultante? ¿Qué harías para construir dicha gráfica?
- g) Lleva a cabo el procedimiento que explicaste en el inciso anterior y construye la gráfica en el espacio que se proporciona a continuación.



Figura 6.4



## Desarrollo



Actividad: 2  
Actividad Individual



La relación anterior no es el único recurso para poder predecir la estatura. Haciendo uso de la medida de la tibia, tenemos que para las personas del sexo masculino también es posible predecir su estatura; esta información se presenta ahora mediante la recta mostrada en la **Figura 6.5**.

### ¿En qué parte del cuerpo humano está ubicada la tibia?

En la **Figura 6.5** se muestra la gráfica de la relación entre la medida de la tibia y la estatura. Observa cuidadosamente y responde lo que se pregunta.

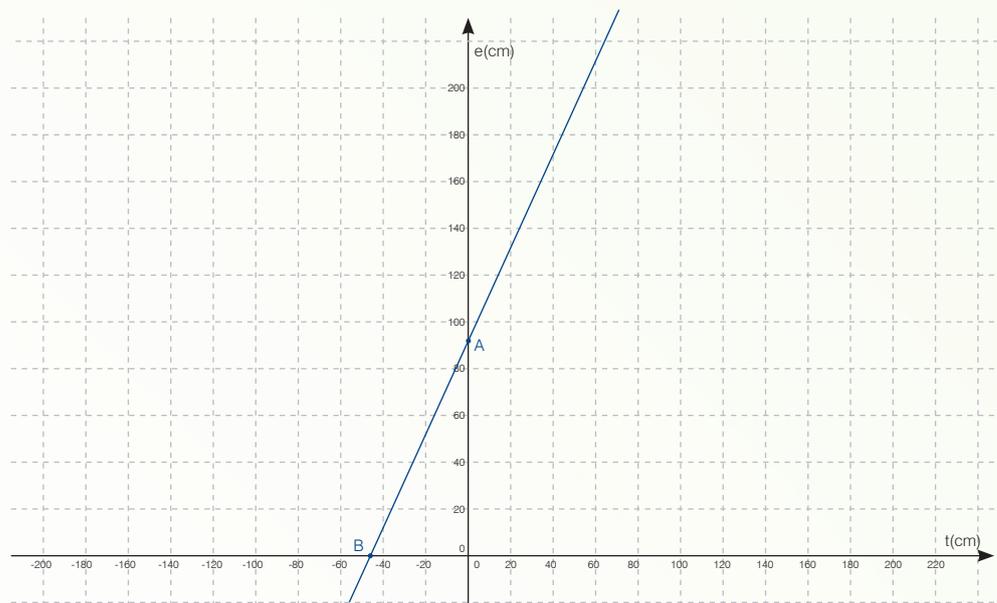


Figura 6.5

- a) De acuerdo con la gráfica, ¿cuál es la longitud de tu tibia? En caso de que seas mujer, pregunta la estatura a algún compañero y con base en ello calcula la longitud de su tibia.

- b) ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A y B que están señalados en la gráfica? ¿Cómo encontraste las coordenadas de esos puntos? ¿Qué interpretación les das a las coordenadas de esos puntos?
- c) ¿Cómo procederías si se te preguntara por la expresión algebraica correspondiente a la recta mostrada?
- d) Ejecuta el procedimiento que describiste en b) y encuentra la expresión algebraica asociada a la gráfica.



Como acabas de darte cuenta, dadas las características de la gráfica que se muestra, no es tan sencillo encontrar la *expresión algebraica* que se solicita. Para ayudarte en esa tarea, te proporcionamos las coordenadas de algunos puntos de esa recta.

Medida de la tibia (centímetros)	Estatura (centímetros)
35	145.46
38	152.24
40	156.76
50	179.36

Tabla 6.3

- a) Encuentra, con esta información, la expresión algebraica de la relación existente entre la medida de la tibia y la estatura correspondiente de un hombre.



Actividad: 4  
Actividad de Equipo



Lo que se ha discutido en las primeras dos secuencias de este bloque permiten ver un uso muy potente de las **herramientas del Álgebra para establecer o modelar relaciones entre dos cantidades variables**. Sin embargo, también es posible, a partir de las situaciones presentadas, percatarse del cuidado que debe tenerse al construir dichos modelos.

- a) Menciona cuáles son, desde tu experiencia hasta este momento, esos aspectos en los que habría que tener cuidado al construir un *modelo algebraico* de alguna situación o fenómeno.
- b) **Expresiones algebraicas** similares a las vistas anteriormente se manejan en el caso de las personas del sexo femenino. Se introducirá una variante a lo que se ha venido haciendo, pues se muestra ahora la **expresión algebraica** de una relación en la cual, a partir de conocer la estatura de una mujer, es posible calcular la longitud de su fémur.

$$f = \left(\frac{1}{2.59}\right)(e - 49.74) \quad (2)$$

donde  $e = \text{estatura}$ ;  $f = \text{longitud del fémur en centímetros}$

Discutan con su equipo cuál es la gráfica conveniente para la expresión (2), constrúyanla y escriban también una tabla con al menos cinco parejas ordenadas, encontradas a partir de dicha expresión. Agreguen los comentarios que consideren pertinentes. Utilicen los espacios proporcionados para ello.

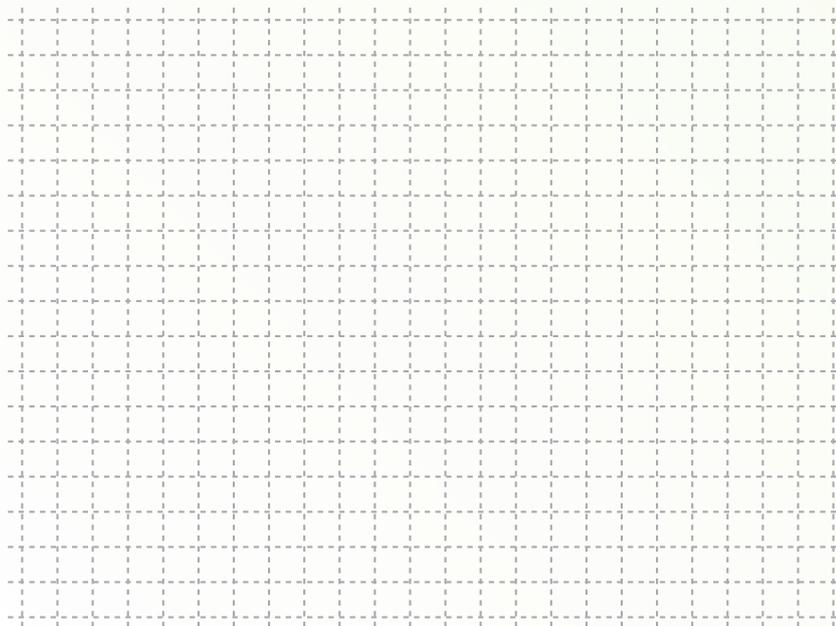


Figura 6.6

Estatura (medida en centímetros)	Longitud del fémur (medido en centímetros)

Tabla 6.4

Comentarios: \_\_\_\_\_

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



## Actividad de Cierre

Al igual que en la **Secuencia** didáctica anterior, en esta **Secuencia** se estudiaron otros casos de funciones lineales, esto es, funciones cuya gráfica es una línea recta, pero en esta ocasión las gráficas no pasan por el origen de coordenadas.

*Tomando en cuenta las formas posibles de las funciones cuyas gráficas corresponden a líneas rectas, decimos que la expresión algebraica de una función lineal es  $y = mx + b$ , lo cual también suele expresarse como  $f(x) = mx + b$ .*

*Cuando el valor de  $b$  es 0, se trata de una función cuya gráfica corresponde a una línea recta que pasa por el origen de coordenadas y si  $b \neq 0$ , se trata de una línea recta desplazada  $b$  unidades sobre el eje de las  $y$  arriba o abajo del eje de las  $x$ , en dependencia de si el valor de  $b$  es positivo o negativo. Nuevamente identificamos a  $x$  como la variable independiente y a la  $y$  como variable dependiente.*

¿Qué puedes decir del papel de la constante  $m$  en una función lineal de la forma  $y = mx + b$ , cuando  $b \neq 0$ ?



*Observamos que, en general, cuando hablamos de una función lineal (como sucede con todas las funciones), podemos hacerlo a partir de diferentes formas de representarla o de referirnos a la misma. Es posible hacerlo por medio de una gráfica, de una expresión analítica o de parejas ordenadas de números (frecuentemente presentadas en una tabla numérica). Así, cada función puede representarse de cualquiera de estas tres formas.*

En la expresión  $E = 2.26f + 66.38$ , que relaciona la estatura de un ser humano en dependencia de la longitud de su fémur, además de la posibilidad de considerar, como lo hicimos ya, lo que sucedería con el valor de la estatura con relación a los valores específicos que se han proporcionado de la longitud del fémur, es posible preguntarnos también lo que sucedería si, por ejemplo el valor del fémur fuera de  $-1m = (-100cm)$ , ¿Cuánto sería el valor de  $E$ ?

De acuerdo con la expresión analítica tendríamos:

$$E = 2.26(-100) + 66.38 = -159.62 \text{ cm}$$

Pero la consideración de un valor negativo para el fémur resulta absurda y consecuentemente también la asignación de una estatura que, como en este caso, es negativa. Análogamente la expresión puede arrojar valores de estatura para otro tipo de casos absurdos como la consideración de un fémur de gran longitud como puede ser **10m**, **20m**, etc.

Por lo tanto, cuando se establece un modelo de comportamiento de un fenómeno, es necesario establecer cuál es el conjunto de valores en el que el modelo es adecuado.

*Por esta razón, cuando hablamos de una función lineal (y de una función en general), además de la gráfica, tabla numérica o expresión algebraica correspondiente, es necesario referirse al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. A este conjunto de valores lo denominamos con el nombre de **dominio de la función**.*

*En dependencia de los valores del dominio de la función, los valores posibles de la variable dependiente tienen sus propias restricciones. Al conjunto de valores posibles de la variable dependiente le llamaremos **rango de la función**.*

# Secuencia Didáctica 3.-



Actividad de Inicio

## Ecuaciones lineales



Actividad: ↓  
Actividad Individual



**Trabajo individual.** En las dos **Secuencias** anteriores estuvimos trabajando con **funciones lineales**. Desarrollaremos ahora las **ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita**, las cuales, como veremos a lo largo de esta **Secuencia**, tienen una relación muy estrecha con las **funciones lineales**.

Para iniciar este desarrollo conoceremos un poco acerca de los fenómenos de depreciación. Es común encontrar en notas periodísticas expresiones como “*el dólar estadounidense se depreció frente al peso mexicano*”, “*el barril de petróleo mexicano se depreció a partir de la inundación del mercado petrolero con el petróleo venezolano*”; o simplemente expresiones más cotidianas como “*necesito vender mi carro, pero es modelo 2000, no sé cuánto se habrá depreciado*”.

**¿Qué interpretación le das a las frases anteriores?**

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---



Algunas personas siempre están interesadas en conocer qué tanto se han depreciado sus bienes. Esto es importante porque algunos impuestos son calculados con base en el valor actual del bien que se posea; un ejemplo típico de esto es el impuesto que se paga por poseer un vehículo. En este caso, el pago del mencionado impuesto toma como base de cálculo el valor que aparece en la factura original del vehículo (que incluye el Impuesto al Valor Agregado) multiplicado por un factor de depreciación.

En la página Web del **Congreso del Estado de Sonora** aparece, entre otras la **Ley de Ingresos del Estado**. En ella, en el **Artículo 212 G-7** encontramos una tabla que indica la manera en cómo se realiza el cálculo de la depreciación de un automóvil.



*Ley de Ingresos del Estado de Sonora*

Artículo 212 G-7

Modelo del vehículo	Factor de depreciación
2012	0.850
2011	0.725
2010	0.600
2009	0.500
2008	0.400
2007	0.300
2006	0.225
2005	0.150
2004 y anteriores	0.075

Tabla 6.5

- Asigna tres valores hipotéticos a los precios de factura de tres diferentes tipos y modelos de automóvil, para que calcules en cada caso cuál es el valor de esos vehículos en 2013.
- Si un automóvil es modelo 2005 y su valor en 2013 es de \$ 485,000.00, ¿cuál fue su valor original?
- Si ahora tenemos un vehículo modelo 2006, con valor actual de \$ 514,500.00, ¿cuál es su precio de factura?

- d) ¿Cómo procediste para encontrar la respuesta al inciso a)
- e) ¿Cómo procediste para encontrar la respuesta a los incisos b) y c)?
- f) ¿En qué se diferencian dichos procesos?



Uno de los grandes problemas que actualmente enfrenta la humanidad es el crecimiento acelerado de sus necesidades de alimentación. Esto es así porque, entre otros factores, la producción de alimentos (sobre todo los de origen vegetal) está siendo amenazada por causa del cambio climático y sus consecuentes afectaciones sobre los cultivos.

Otras de las causas que afectan la producción de vegetales es la sobreexplotación de los suelos, la sobreexplotación de los mantos acuíferos y la siembra de especies no adecuadas al tipo de suelo.

En el **Estado de Sonora, México**, existe una región muy famosa a nivel nacional por el reto que significó convertir lo que son terrenos semidesérticos en zonas con una alta productividad agrícola. Nos referimos a la zona geográfica conocida como "**La Costa de Hermosillo**", en la cual la producción de vid, nuez y naranja es alta.

- a) **¿Conoces la Costa de Hermosillo? Investiga algunos datos de producción de los cultivos que mayoritariamente se realizan en ese lugar.**

Hace algunos años se empezó a hablar del peligro que significaba para esa zona agrícola la salinización de los mantos acuíferos, de los cuales se extrae el agua necesaria para el riego de los diferentes cultivos.

- b) **¿En qué crees que consiste la salinización de los mantos acuíferos? ¿Habías escuchado con anterioridad hablar de este problema? ¿Realmente consideras que es un problema? Expresa ampliamente tu opinión y lo que conozcas sobre el tema.**

Según los expertos en el área, las altas concentraciones de sales en el suelo están directamente relacionadas con la disminución en el nivel de productividad de los cultivos. Más aún, los investigadores **Maas y Hoffman**, encontraron a partir de estudios realizados con datos reales, que por medio de la expresión (que lleva su nombre) es posible mostrar la relación existente entre el nivel de salinidad del suelo y la producción de un cultivo.

### Por ejemplo

Para el caso de la vid, dicha expresión, consultada en Jiménez (2002), es

$$P = 100 - 9.62(S - 1.5)$$

Donde:

***P = Producción del cultivo en % (100% sería el máximo esperado).***

***S = Salinidad de suelo, medida en unidades conocidas como deciSiemens.***

- c) **Un deseo comprensible en cualquier productor de vid sería lograr el 100% de la producción. ¿Cuál es el valor de  $S$  que permitiría lograr dicho porcentaje?**
- d) **Un productor considera que si obtiene el 90% de la producción en su viñedo tendrá éxito. Calcula cuál debe ser el nivel de salinidad  $S$  correspondiente.**
- e) **Otro productor que es menos ambicioso, expresa que para él será suficiente con obtener el 60% de la producción. Nuevamente encuentra el nivel de salinidad de su terreno que le permitiría alcanzar el porcentaje mencionado.**
- f) **Un caso seguramente desastroso para cualquier productor sería el tener el 0% de la producción. ¿Cuál sería la medida de la salinidad de su terreno que provocaría este hecho?**
- g) **¿Qué conocimientos matemáticos utilizaste para resolver los incisos c), d) y e)?**



## Desarrollo



Actividad: 3  
Actividad Individual



En la *Actividad* de Desarrollo 2 del **BLOQUE 1**, apareció el siguiente planteamiento:

Si se nos pidiera completar el siguiente arreglo numérico con la siguiente indicación: *la solución del siguiente arreglo son dos números de tal manera que uno está aumentado en dos más que el otro.*

4	+		+		+	9
		+		+		
			+			
						49

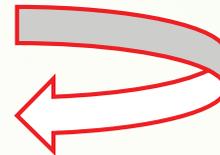
Se llenaría de la siguiente manera:

4	+	$x$	+	$x+2$	+	9
		$4+x$	+	$2x+2$	+	$x+11$
				$3x+6$	+	$3x+13$
						49

$$6x + 19 = 49$$

$$x = \frac{49 - 19}{6}$$

$$x = 5$$



- a) ¿Qué nombre recibe la expresión  $6x + 19 = 49$  y qué es lo que busca cuando se plantea "resolverla"?

b) ¿En qué consistió el proceso de solución? ¿En qué se basa dicho proceso?

c) En la *Actividad 2* de Inicio de la **Secuencia 3** de este **BLOQUE**, apareció el siguiente enunciado:

*Un productor considera que si obtiene el 90% de la producción en su viñedo tendrá éxito. Calcula cuál debe ser el nivel de salinidad  $S$  correspondiente, donde*

$$P = 100 - 9.62(S - 1.5)$$

Lo que nos lleva a plantear:  $100 - 9.62(S - 15) = 90$

**¿Cómo y en qué nos basamos para encontrar  $S$ ?**



Analiza la gráfica mostrada en la **Figura 6.7**

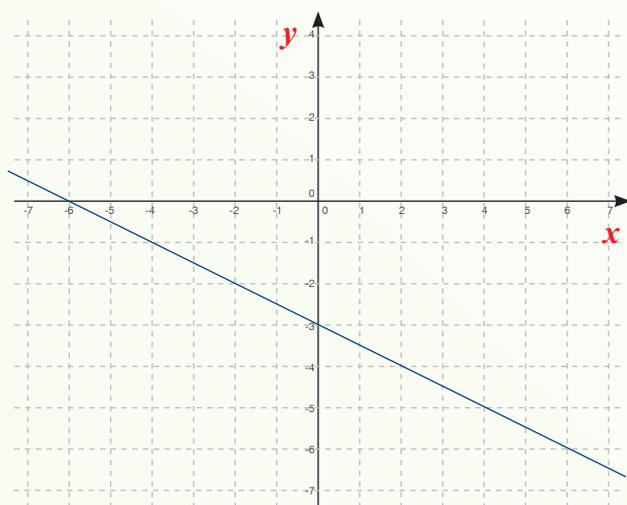


Figura 6.7

a) Encuentra la expresión  $y = mx + b$  correspondiente a la recta.

b) Si  $y = \frac{4}{5}$ , ¿qué forma toma la expresión anterior? ¿Cuál es el valor de  $x$  que satisface esa igualdad? ¿Cuál es el proceso de solución?

c) Responde las mismas preguntas planteadas en b) para los siguientes valores de  $y$ . Organiza esa información en la tabla que se proporciona a continuación.

$y$	Forma de $y = mx + b$	Transformaciones necesarias para encontrar el valor de $x$	Valor encontrado para $x$	$(x,y)$
-5				
$-\frac{3}{5}$				
0				
$k$				

Tabla 6.6



## Actividad de Cierre

Cuando una situación se modela con una expresión como la establecida para hacer la estimación de la estatura de un ser humano con base en la longitud de su fémur, como lo hicimos en la **Secuencia** anterior, obtuvimos una expresión algebraica que en ese caso relacionaba las variables ***E*** (de estatura) con ***f*** (de longitud del fémur). Para referirnos a expresiones de ese tipo pero sin necesidad de hacerlo en un contexto específico, es común que lo hagamos usando las variables ***x*** e ***y***.

Por ese motivo hablamos de las funciones lineales de la forma  $y = ax + b$ , con esas variables. En esos casos pusimos atención a los cambios que se daban en los valores en la variable dependiente, la ***y***, cuando se producían cambios en la variable independiente ***x***.

En muchos otros casos podemos encontrar expresiones que involucren a dos o más variables.

### Por ejemplo:

$2x + 3y - 1 = 4x + 2y + 4$ . Manipulaciones algebraicas como las que hemos aprendido a hacer con anterioridad, nos permiten transformar esta expresión en otra equivalente, la expresión  $y = 2x + 5$  que es de la forma  $y = ax + b$ . Las expresiones son equivalentes porque dado un valor de ***x*** en cualquiera de las dos, el valor de ***y*** será también el mismo en ambas.

Pero si en lugar de pensar en el carácter de dependencia de una variable con respecto a otra centramos nuestra atención en los valores de las variables que hacen cierta o válida una expresión algebraica, la situación podemos analizarla desde otra perspectiva.

### Por ejemplo:

En la expresión  $2x + 3y - 1 = 4x + 2y + 4$  podemos verificar que si

$x = 1$  y  $y = 0$ , en el lado izquierdo de la expresión se cumple que

$2x + 3y - 1 = 2(1) + 3(0) - 1 = 1$ , mientras que en el lado derecho tenemos

$4x + 2y + 4 = 4(1) + 2(0) + 4 = 8$ . Evidentemente la igualdad no se cumple.

**¿Qué diferencias existen entre un caso como éste y el de una identidad de las estudiadas en los bloques anteriores, como  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ?**

*En esta secuencia nos hemos centrado en el estudio de las ecuaciones lineales, igualdades que sólo son válidas para un número determinado de valores de las variables involucradas y en las que la potencia a la que se eleva cada variable es uno. Cuando una ecuación tiene dos variables, digamos  $x$  e  $y$ , decimos que la ecuación es lineal de dos variables.*

*Aquí estamos interesados particularmente en las ecuaciones lineales de una variable, es decir, de ecuaciones lineales que pueden escribirse (o reducirse) en la forma  $ax + b = 0$ .*

*Diremos que el valor de  $x$  que hace que la igualdad sea cierta, es una solución de la ecuación lineal.*

Continuando con nuestro análisis, tenemos que en las dos secuencias anteriores de este Bloque estudiamos las funciones lineales, que en su caso más general expresamos algebraicamente mediante  $y = mx + b$  o, equivalentemente usamos la expresión  $f(x) = mx + b$ . Salvo por la diferencia en llamarle  $m$  o  $a$  al coeficiente de la variable  $x$ , es claro que se trata de la misma expresión analítica.

*Si en una función lineal de la forma  $y = ax + b$  nos interesa determinar el valor de la variable  $x$  para el cual el valor de la variable  $y$  es igual a un valor específico, nos estamos planteando resolver una ecuación lineal que, por ejemplo, puede ser  $5x + 2 = -8$ , la cual es equivalente (en el sentido de que tiene la misma solución) a la ecuación  $5x + 10 = 0$ .*

*Esta es una ecuación lineal que tiene la forma general  $ax + b = 0$ , donde  $a = 5$  y  $b = 10$ . Éste es el tipo de ecuaciones que hemos estudiado en esta secuencia.*

*Análogamente, cuando nuestro propósito es determinar el valor de  $x$  en el cual la función lineal  $f(x) = ax + b$  cruza o interseca el eje de las abscisas o eje  $x$ , nos estamos planteando resolver la ecuación lineal  $ax + b = 0$ .*

*En el caso de las funciones lineales decimos que el valor de  $x$  para el cual  $y$  es igual a  $0$ , es una raíz o un cero de la función. Podemos percatarnos, entonces, que determinar la raíz de una función lineal  $f(x) = ax + b$  es equivalente a determinar la solución de la ecuación lineal de una variable  $ax + b = 0$ .*

Al resolver ecuaciones lineales es posible encontrarnos con muchos casos, como los siguientes:

- 1)  $3x = 0$
- 2)  $3x + 1 = 0$
- 3)  $7x - 8 = 2x + 2$

Como ya dijimos, aún en casos como el de la tercera de estas ecuaciones y otras que aparentemente son más complejas, por medio de transformaciones algebraicas como las estudiadas en los **BLOQUE 4** y **5** se pueden reducir a una ecuación lineal de la forma  $ax + b = 0$ , equivalente a la original. **Por ejemplo** la ecuación 3 puede transformarse en la ecuación  $5x - 10 = 0$ .

*Todas las ecuaciones lineales de una variable pueden reducirse a la forma  $ax + b = 0$  y su solución siempre es  $x = -\frac{b}{a}$ .*

Para determinar la solución lineal de la ecuación lineal  $ax + b = 0$  podemos determinar la raíz de la función lineal  $y = ax + b$ , lo cual es posible hacerlo por medio de su representación gráfica e incluso tabular. Sin embargo, la forma más eficaz de hacerlo consiste en emplear las transformaciones algebraicas pertinentes de la expresión algebraica.



2. En la gráfica siguiente aparecen dos rectas. ¿Cuál es el valor de  $m$  en cada una de ellas?

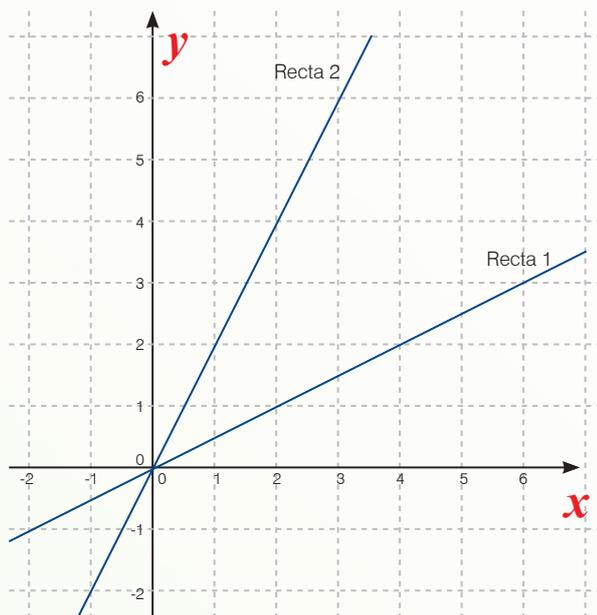


Figura 6.8

- a) Si en la recta 1, el valor de  $x$  aumenta de  $5$  a  $6$  ¿cuánto aumenta el valor de  $y$ ? ¿Y cuánto aumenta el valor de  $y$  en la recta 2?
- b) Si el valor de  $x$  se reduce de  $7$  a  $4$ , ¿qué sucede con el valor de  $y$  en cada una de las rectas? Determina dos maneras de hacer este cálculo.

3. Si tenemos la función lineal cuya expresión analítica es  $y = 3x$ , ¿en cuánto se modifica el valor de  $y$  si la  $x$  varía de  $x = 2$  a  $x = 5$ ? ¿Cuánto se modifica el valor de  $y$  si la  $x$  varía de  $x = 9$  a  $x = 5$ ?

4. Si la expresión analítica de una función es  $y = 2x + 3$ , representa la función por medio de una gráfica.

5. Si la gráfica de una función es la mostrada en la **Figura 6.7**, obtén su representación analítica.

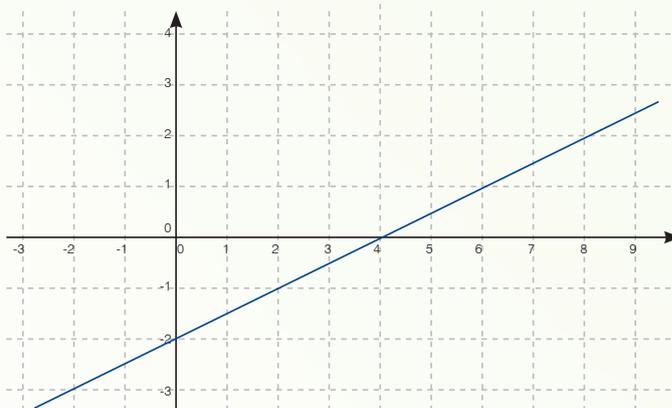


Figura 6.9

6. A continuación se muestran los valores de una función lineal por medio de una tabla. Obtén su expresión analítica.

$x$	$y$
-2	-2
-1	$-\frac{3}{2}$
0	-1
1	$\frac{1}{2}$
2	1

Tabla 6.7

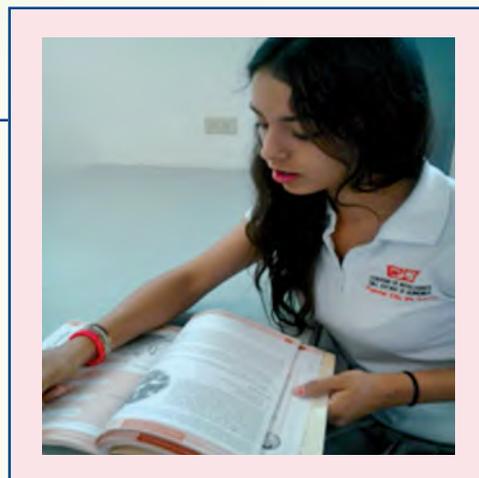


7. **Diofanto de Alejandría** fue un matemático griego que nació alrededor del año 200 y murió entre los años 284 y 298 de nuestra era. Sus aportaciones a las matemáticas fueron numerosas y es considerado como el **padre del álgebra**. Su epitafio es de fama mundial y contiene un problema que puedes resolver. Veámoslo:

“Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. *Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad.*”

8. En economía se dice que la cantidad de productos a la venta de un negocio que son requeridos por los clientes constituyen la **demanda** de dicho producto y los productos que se ponen a disposición para su venta son la **oferta**. Cuando un comerciante ofrece una cantidad de productos que supera a la demanda, los precios tienden a bajar y, por el contrario, cuando la demanda supera a la oferta los precios tienden a aumentar. Esto es, los precios dependen de la oferta y de la demanda.

El punto en el cual la oferta y la demanda coinciden es llamado **punto de equilibrio**. Si en la venta de hornos de un determinado producto tenemos que la función de demanda es  $D = -\frac{2}{5}p + 1250$ , donde  $p$  representa el precio en pesos mexicanos y la oferta obedece a la ley de comportamiento  $O = \frac{5}{2}p - 250$ , encuentra el precio del producto correspondiente al punto de equilibrio. ¿Cuántos artículos son demandados y ofertados a ese precio?



Los planteamientos de esta sección son de trabajo individual, preferentemente en casa y **tiene el propósito fundamental de proporcionarte elementos de reflexión para que identifiques lo que has aprendido**, lo que aún te ocasiona dificultades y lo que es necesario reforzar.

Para contrastar tu visión con las expectativas de aprendizaje, puedes consultar la introducción del bloque y ahí encontrarás lo que se espera aprendas. De esta manera **te podrás dar cuenta de lo que has aprendido y tienes ya un buen dominio, lo que aún te cuesta dificultad y los errores o temas en los que piensas que aún debes estudiar con mayor detenimiento y pedir asesoría, ya sea a tu profesor o en ayuda con tus compañeros de clase.**

En caso de considerarlo necesario, el profesor te podrá solicitar los resultados de autoevaluación.

**Problema 1.** Investiga sobre alguna otra situación o fenómeno no matemático que pueda ser estudiado utilizando lo que aprendiste en esta sección del **BLOQUE 6** y desarróllalo.

**Problema 2.** Haz un resumen de lo que aprendiste en esta sección del **BLOQUE 6**, ejemplificando.

**Problema 3.** *La solubilidad.* En nuestra vida cotidiana con alguna frecuencia realizamos mezclas. **Por ejemplo** agregamos azúcar al café, jugo de limón al agua, o simplemente añadimos sal al agua. Este tipo de mezclas son comunes, y en ellas se puede medir una característica de las sustancias químicas: la solubilidad.

Cuando hablamos de **la solubilidad de una sustancia nos estamos refiriendo a la cantidad de dicha sustancia que puede ser disuelta en otra. Esta cantidad puede expresarse en gramos por litro o en términos de porcentaje.** Un recurso muy utilizado en los laboratorios de química para medir la solubilidad, consiste en calentar la mezcla que se ha realizado e ir midiendo la cantidad de la sustancia disuelta (a la que se conoce como soluto) en la sustancia en la cual se disuelve, (a la que se le da el nombre de solvente), todo esto conforme va variando la temperatura.

En la tabla siguiente están algunos datos experimentales de la solubilidad del cloruro de sodio (sal común) en agua, obtenidos al ir calentando la mezcla.

***La solubilidad está medida en gramos de soluto/100g de H<sub>2</sub>O.***

<b>Temperatura (°C)</b>	20	30	40	50
<b>Cloruro de sodio</b>	36	36.3	36.6	36.9

A partir de lo estudiado en este **BLOQUE**, di todo lo que puedas acerca de este fenómeno.

---

---

---

---

---

---

---

---

1. Si tuvieras que explicar a tus compañeros de equipo qué es una función lineal ¿Te sientes preparado para hacerlo adecuadamente? ¿Qué aspectos crees que te pueden ayudar para lograrlo?

---

---

---

---

---

2. ¿Puedes comprender las ideas que te expresan tus compañeros para resolver un problema? Si no es así, ¿qué es lo que se dificulta respecto a eso?

---

---

---

---

---

3. Haz una lista de los aspectos estudiados en este bloque en los cuales tienes buen dominio.

---

---

---

---

---

4. Enlista los temas que aún te causan dificultad y prepara la forma en la cual puedes solicitar apoyo de tus compañeros y de tu profesor o profesora.

---

---

---

---

---

5. ¿Puedes usar algún software matemático para ayudarte con las gráficas que aparecieron en este bloque? ¿Cuál? ¿Dónde aprendiste a usarlo?

---

---

---

---

---

# BLOQUE 7

Resuelve...

## Ecuaciones Lineales II

### Introducción:

En este Bloque estudiaremos situaciones o problemas que serán modelados mediante dos ecuaciones con dos incógnitas, estas últimas aparecerán elevadas a la primera potencia. Este **modelo matemático** es conocido como **“sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas, o más brevemente SEL 2x2”**. Resolver estos problemas requerirá encontrar la(s) pareja(s) de números que satisfaga(n) a las dos ecuaciones, por lo que desarrollaremos algoritmos que te permitirán encontrar dicha(s) pareja(s) de números, en caso de que exista(n). Además de lo anterior aprenderás a discriminar cuándo el sistema de ecuaciones tiene o no solución.

De acuerdo con lo que se acaba de mencionar, las actividades aquí propuestas requerirán que interpretes información escrita y puedas traducirla al lenguaje **algebraico**, que construyas los modelos mencionados, que los resuelvas y sepas identificar si la solución encontrada efectivamente lo es. Además deberás comunicar tus procedimientos y resultados a tus compañeros, aceptando o refutando sus argumentos, todo ello incorporando el lenguaje matemático que ya conoces y el que desarrollarás a lo largo del Bloque.

# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

### Los sistemas de ecuaciones lineales Parte 1



En el **BLOQUE 2** de tu Módulo de Aprendizaje de **Química** se habla de las mezclas, esto es, de las combinaciones de sustancias en las que cada uno de sus componentes no pierde sus propiedades químicas. **Existen muchos tipos de mezclas, por ejemplo el aire es la combinación, fundamentalmente de oxígeno, nitrógeno, vapor de agua, ozono, hidrógeno y gases nobles como el**

**kriptón y el argón; muchos platillos como las ensaladas son también muestras de mezclas.**

Las mezclas pueden ser muy complicadas y algo que resulta atractivo desde el punto de la **Matemática** es la posibilidad que ofrecen de utilizar a los sistemas de **ecuaciones lineales** para modelar situaciones donde aparezcan. Con frecuencia se mezclan diferentes cantidades de algunos productos con determinadas características, para conseguir cierta cantidad de un nuevo producto del mismo tipo, pero con un nuevo rasgo distintivo.

El siguiente es un **ejemplo** de ese tipo de situaciones:



El responsable de un laboratorio recibió instrucciones de preparar **10 litros** de una solución ácida al **10%**. Tiene algunos litros de solución ácida al **5%** y otros tantos de solución al **12.5%**. ¿Cuántos litros de cada tipo de solución debe mezclar para conseguir la solución con el grado de acidez que se le está solicitando?

**Sugerencia:** Considera que el porcentaje de acidez nos dice la cantidad de ácido puro que hay en una solución.

- ¿Cuántos litros de ácido puro hay en **10 litros** de una solución ácida al **10%**?
- ¿Cuántos en **15 litros** de solución ácida al **10%**?

- c) ¿Qué quiere decir que el laboratorista tenga algunos litros de solución ácida al **5%**?
- d) ¿Qué interpretación le das al hecho de que el laboratorista tenga algunos litros de solución ácida al **12.5%**?
- e) ¿Cuántas y cuáles son las cantidades desconocidas, es decir, las incógnitas que aparecen en este problema?
- f) ¿Cuántas y cuáles son las condiciones que deben de cumplir simultáneamente esas incógnitas? Exprésalas verbalmente.
- g) Intentaremos modelar algebraicamente la situación presentada considerando cada una de las condiciones que acabamos de enunciar en el inciso f). Para iniciar este proceso, completa las tablas siguientes y responde lo que se solicita:

<b>Primera condición:</b> Se deben mezclar dos cantidades de soluciones de diferente acidez para obtener 10 litros de una nueva solución.		
<b>Número de litros de la primera solución</b>	<b>Número de litros de la segunda solución</b>	<b>¿Los valores proporcionados cumplen la primera condición? Argumenta la respuesta.</b>
<i>1</i>	<i>9</i>	Sí, porque $1 + 9 = 10$
<i>2</i>	<i>7</i>	No, porque $2 + 7 = 9 \neq 10$
<i>3</i>	<i>8</i>	No, porque $3 + 8 = 11 \neq 10$
$\frac{1}{2}$		Sí, porque
<b><i>x</i></b>	<b><i>y</i></b>	

Tabla 7.1

Escribe la ecuación que representa a la primera condición:

**Segunda condición:** Se deben mezclar dos cantidades de soluciones de diferente acidez, (una al 5% y otra al 12.5%), para obtener 10 litros de una nueva solución al 10%, es decir la solución resultante debe tener 1 litro de ácido.

Litros de la 1ra. solución	Litros de la 2da. solución	Litros de ácido en la primera solución	Número de litros de ácido en la segunda solución	¿Los valores proporcionados cumplen con que la solución resultante tenga 1 litro de ácido?
1	2	5% de 1, es decir $0.05(1) = 0.05$	12.5% de 2, es decir $(.125)(2) = 0.250$	No, porque $(0.05)(1) + (0.125)(2) = 0.175 \neq 1$
2	7.2	5% de 2, es decir $0.05(2) = 0.10$	12.5% de 7.2, es decir $(0.125)(7.2) = 0.9$	Sí, porque $(0.05)(2) + (0.125)(7.2) = 0.10 + 0.90 = 1$
<b>x</b>	<b>y</b>			

Tabla 7.2

Escribe la ecuación que representa a la segunda condición:

- h) Escribe el sistema que forman ambas ecuaciones y busca en las **Tablas 7.1** y **7.2** si existe alguna pareja de números que satisfaga las dos condiciones que se solicitan en el problema original. Observa que satisfacer ambas condiciones significa satisfacer a las dos ecuaciones que construiste y, por lo tanto, haber encontrado la solución al problema de laboratorista.



# Desarrollo



Independientemente de cuáles hayan sido tus respuestas al inciso h) de la *Actividad 1*, pareciera que la búsqueda en las tablas no es suficientemente útil para ayudarnos a encontrar la solución al problema del laboratorista. De todas

formas, el organizar la información en las tablas da la posibilidad de reflexionar un poco sobre los comportamientos que siguen los datos que interesan. Se mostrará a continuación otra ruta para encontrar la solución.

Como ya se dijo, dar respuesta al problema planteado en la *Actividad* de Inicio de la presente secuencia, consiste en encontrar un par de valores que al ser sustituidos por las literales  $x$  e  $y$  en las ecuaciones del sistema que modela al problema, satisfagan ambas igualdades. Esto equivale a decir, **desde el punto de vista geométrico, que ese par de valores son las coordenadas de un punto que pertenece a las dos líneas rectas que representan gráficamente a las ecuaciones que forman al sistema.**

- a) Para comprobar esto identifica, en el plano cartesiano que se presenta a continuación, la gráfica que corresponda a cada una de las ecuaciones que conseguiste en el inciso h) de la *Actividad 1*. Identifica además a las coordenadas del punto donde se intersecan ambas líneas rectas.

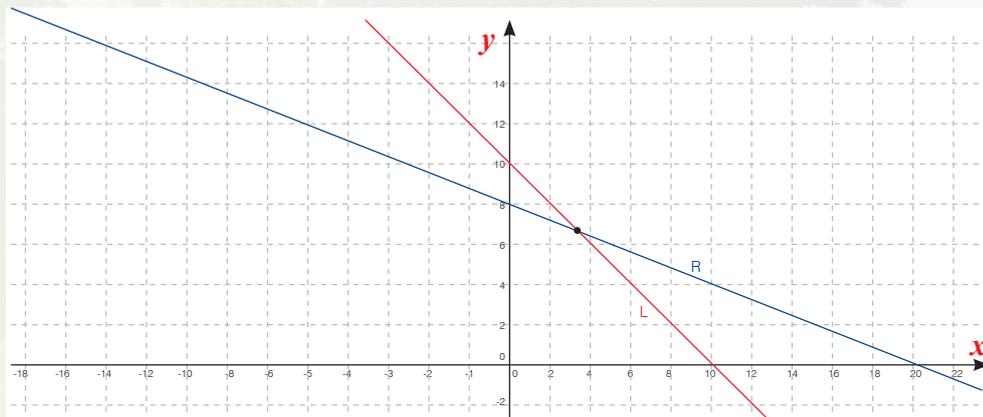


Tabla 7.1

R es la línea que representa a la ecuación: \_\_\_\_\_

L es la línea que representa a la ecuación: \_\_\_\_\_

Las coordenadas del punto de intersección son: \_\_\_\_\_

Como podrás darte cuenta, para este problema no resulta sencillo identificar a las coordenadas del punto donde se intersecan ambas rectas; esto se debe a que en este caso dichas coordenadas no son **números enteros**. Por lo tanto, pareciera que en este caso, tampoco resulta muy útil encontrar la solución mediante la graficación de las dos ecuaciones que forman al sistema de ecuaciones lineales.



Actividad: 3  
Actividad Individual



Continuando con la búsqueda de una estrategia de solución más ágil que las dos que se acaban de estudiar para el problema del laboratorista, retomemos el sistema de ecuaciones que se tiene construido. Una versión posible es:

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\ .05x + .125y &= 1\end{aligned}$$

Otra es:

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\ \frac{1}{20}x + \frac{1}{8}y &= 1\end{aligned}$$

- a) **¿Se trata del mismo sistema de ecuaciones?** Cualquiera que sea tu respuesta, arguméntala.

El mismo problema del laboratorista que se te ha planteado, se propuso a tres equipos de estudiantes. Los tres equipos pudieron construir el sistema de ecuaciones lineales en las dos versiones que ya se mostraron. El profesor les pidió que continuaran su trabajo resolviéndolo por algún método que conocieran. A continuación reproducimos las notas que los estudiantes entregaron.

**El Equipo 1 entregó el siguiente manuscrito:**

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\ 0.05x + 0.125y &= 1 \\ y &= 10 - x \\ 0.05x + 0.125(10 - x) &= 1 \\ 0.05x + 1.25 - 0.125x &= 1 \\ -0.075x + 1.25 &= 1 \\ x &= \frac{1 - 1.25}{-0.075} = \frac{-0.25}{-0.075} \\ &= \frac{\frac{25}{100}}{\frac{75}{1000}} = \frac{10}{3} \\ y &= 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

EQUIPO 1

Figura 7.2

- b) Describe el procedimiento que utilizó el Equipo 1 para resolver el problema. **¿Lo conocías?** Si es así, **¿cómo se llama este método?**
- c) **Intenta justificar cada uno de los pasos de su procedimiento.**
- d) **¿Cuál es la solución que encontró el Equipo 1? ¿Estás de acuerdo en que resolvió correctamente el sistema? ¿Por qué?**

En cambio, el Equipo 2, entregó lo que sigue:

Equipo 2

$$x + y = 10 \quad y = 10 - x$$

$$0.05x + 0.125y = 1 \quad y = \frac{1 - 0.05x}{0.125}$$

$$\frac{1 - 0.05x}{0.125} = 10 - x$$

$$1 - 0.05x = (10 - x)(0.125)$$

$$1 - 0.05x = 1.25 - 0.125x$$

$$-0.05x + 0.125x = 1.25 - 1$$

$$0.075x = 0.25$$

$$x = \frac{0.25}{0.075} = 3.3333$$

*y ya no sabemos que sigue  
Profe*

Figura 7.3

- e) **¿En qué consiste el procedimiento seguido por el Equipo 2? ¿Lo conocías?** Si tu respuesta es afirmativa, **¿cómo se llama?**

- f) **Argumenta los pasos que realizaron los integrantes de ese equipo.**
- g) **¿Concluyó el Equipo 2 el procedimiento? ¿Qué les hizo falta?**
- h) **Realiza los pasos faltantes y escribe a continuación la solución completa.**
- i) **¿Es la misma que la del Equipo 1? Argumenta tu respuesta.**

**Por su parte, el Equipo 3, hizo lo que se muestra.**



Profesor:

Nosotros utilizamos el método de suma y resta para resolver el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\ \left(\frac{1}{20}\right)x + \left(\frac{1}{8}\right)y &= 1\end{aligned}$$

Decidimos eliminar la  $x$  en la segunda ecuación. Entonces multiplicamos a la primera ecuación por  $-\frac{1}{20}$

$$\left(-\frac{1}{20}\right)(x + y) = 10\left(-\frac{1}{20}\right) = \left(-\frac{1}{20}\right)x + \left(-\frac{1}{20}\right)y = -\frac{10}{20}$$

y se la sumamos a la segunda. O sea:

$$\begin{array}{r} \left(-\frac{1}{20}\right)x + \left(-\frac{1}{20}\right)y = -\frac{10}{20} \\ \left(\frac{1}{20}\right)x + \left(\frac{1}{8}\right)y = 1 \\ \hline 0x + \frac{3}{40}y = \frac{10}{20} \end{array}$$

Entonces despejamos la  $y$ , nos quedó:  $y = \frac{20}{3}$

Y sustituimos este valor en la primera ecuación:

$$x = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

Entonces la solución es  $x = \frac{10}{3}$ ;  $y = \frac{20}{3}$

Lo cual quiere decir que el laboratorista debe mezclar  $\frac{10}{3}$  litros de la solución ácida al 5% con  $\frac{20}{3}$  litros de la solución ácida al 12.5% para obtener los 10 litros que le pidieron de la solución ácida al 10%.

Mire, aquí comprobamos:

$$\frac{10}{3} + \frac{20}{3} = \frac{30}{3} = 10 \text{ litros, esta es la cantidad de litros.}$$

Si le piden 10 litros de la solución al 10% quiere decir que en esa solución debe haber  $10(.10) = 1$  litro de ácido, por lo que

$$.05\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{20}\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} \text{ porción de ácido que aportan los litros que están al 5\%.}$$

$$.125\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{20}{24} = \frac{5}{6} \text{ porción de ácido que aportan los litros que están al 12.5\%.}$$

Si sumamos las dos cantidades,  $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$  litro, que es lo que se necesita.

Muchas gracias profe, el problema nos pareció interesante, y lo que más nos gustó es que pudimos comprobar que nuestra solución es correcta.

Equipo 3

Integrantes: Zobeyda y Caleb

- j) **¿En qué consiste el procedimiento realizado por los estudiantes del Equipo 3? ¿Lo conocías? ¿Existe algún paso que te resulte confuso?** Exponlo a tus compañeros y juntos traten de encontrar su justificación.
- k) **Casi al inicio de su explicación, el Equipo 3 dice “Decidimos eliminar la x en la segunda ecuación”. ¿Existen otras opciones? ¿Cuáles serían?**
- l) **Toma una de esas opciones y resuelve el sistema, explicando cada paso, tal y como lo hicieron estos estudiantes.**



## Actividad de Cierre



Actividad: 4  
Actividad Grupal



Como producto del problema de las mezclas, que también se ha venido llamado el problema del laboratorista, apareció el sistema

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\ .05x + .125y &= 1\end{aligned}$$

El cual es un ejemplo de los llamados sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, los cuales genéricamente pueden ser representados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2\end{aligned}$$

Donde  $x$  e  $y$  se llaman **incógnitas**;  $a_1, a_2, b_1, b_2$  son los **coeficientes del sistema** y son siempre números reales;  $c_1, c_2$  son también números reales y reciben el nombre de **constantes**.

Una pregunta importante, abordada con anterioridad, es **qué significa resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**. Como ya hemos visto, lo que buscamos es encontrar una pareja de números, que se han venido representando como  $x$  e  $y$ , de tal manera que dicha pareja satisfaga simultáneamente las dos ecuaciones del sistema.

En esta **Secuencia** abordamos también la manera en cómo pueden ser encontrados esos números, habiendo aparecido hasta el momento tres procedimientos:

- El utilizado por el **Equipo 1**, que recibe el nombre de **método de sustitución**;
- El empleado por el **Equipo 2**, llamado **método de igualación**;
- El usado por el **Equipo 3**, que recibe el nombre de **método de suma o resta**, también llamado **método de suma y resta**.

Describiremos a continuación cada uno de estos métodos.

## Método de sustitución.

Como dijimos anteriormente, éste es el método empleado por el **Equipo 1** y consiste en tomarse una de las dos ecuaciones lineales y despejar alguna de las incógnitas involucradas. El resultado del despeje se sustituye en la segunda de las ecuaciones lineales, de tal manera que después de hacer las operaciones y simplificaciones necesarias, se reduzca a una ecuación de primer grado con una incógnita.

Al trabajar con esta última ecuación, despejamos la incógnita que ahí aparece. Este valor debe ser sustituido en alguna de las dos ecuaciones originales para obtener de ahí el valor de la incógnita faltante.

El procedimiento puede enunciarse de la siguiente manera:

**Dado el sistema de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$  siguiente:**

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

**Tomamos la primera ecuación del sistema, despejando una de las incógnitas, por ejemplo  $y$ , quedándonos entonces:**

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1x}{b_1} = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

**Entonces sustituimos este valor en la segunda ecuación, obteniendo una ecuación cuya única incógnita es  $x$ , la cual queda de la siguiente manera:**

$$a_2x + b_2 \left( \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \right) = c_2$$

**Como se puede observar ésta es una ecuación de primer grado con una incógnita ( $x$ ), la cual ya sabes resolver. Una vez obtenido el valor de  $x$  lo usamos en la expresión:**

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1x}{b_1} = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

**Para obtener el correspondiente valor de  $y$ .**

También pudimos proceder despejando la incógnita  $x$  en la primera ecuación, sustituyéndola después en la segunda ecuación para obtener el valor de  $y$ , continuando el proceso de manera similar al descrito antes.

## Método de igualación.

El método de igualación fue el empleado por el **Equipo 2** y consiste en despejar una misma incógnita en cada ecuación del sistema, procediendo a igualar los resultados obtenidos, para obtener una ecuación de primer grado con una incógnita.

Al resolverla obtendremos el valor de una de las incógnitas, la cual debe sustituirse en la expresión donde aparece despejada la incógnita seleccionada al inicio del procedimiento. Esta sustitución proporcionará el segundo valor buscado.

Ahora podemos escribir:

**En el sistema de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$**

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

**Despejamos una incógnita en la primera ecuación del sistema. Para ejemplificar, tomamos nuevamente la incógnita  $y$ :**

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1x}{b_1} = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

**Ahora despejamos la misma incógnita de la segunda de las ecuaciones lineales, obteniendo:**

$$y = \frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2x}{b_2} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$

**Para resolver el sistema, debemos considerar que el valor de  $y$  debe ser el mismo en ambas ecuaciones y por ello podemos igualar los dos resultados obtenidos, quedando ahora:**

$$\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$

**Como puedes observar, nuevamente tenemos una ecuación lineal con una incógnita y procedemos a determinar los valores de las incógnitas, al igual que lo hicimos en el caso anterior.**

También aquí ejemplificamos despejando la incógnita  $y$  en ambas ecuaciones, pero pudimos iniciar el procedimiento despejando la otra incógnita, esto es la  $x$ . Debemos cuidar que independientemente de la incógnita despejada, se trate de la misma en ambas ecuaciones, con el fin de que la igualación sea válida.

## Método de suma y resta.

Este método se basa en el hecho de que al multiplicar todos los términos de ambos miembros de una ecuación lineal de dos incógnitas, obtenemos lo que llamamos una ecuación equivalente. Esto significa que ambas tienen las mismas soluciones.

Basados en este hecho, el procedimiento a seguir consiste en encontrar dos múltiplos de las ecuaciones del sistema, de tal manera que al sumarlas se elimine alguna de las dos incógnitas. La ecuación resultante de la suma tendrá solamente una incógnita la cual se despeja. El valor resultante del despeje será sustituido en alguna de las dos ecuaciones originales para conocer así el valor de la otra incógnita, con lo cual concluye el proceso de solución.

Algebraicamente, tenemos:

Si nos planteamos resolver el sistema  $a_1x + b_1y = c_1$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Utilizando el método de Suma o Resta, podemos proceder así:

Eliminaremos la incógnita  $y$ ; para lograrlo multiplicaremos la primera ecuación por  $b_2$ , la segunda por  $-b_1$ , obteniendo respectivamente:

$$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$$

$$-a_2b_1x - b_1b_2y = c_2b_1$$

Al sumar miembro a miembro se eliminan los términos donde aparece  $y$ ; después de sacar como factor común a  $x$ , obtenemos  $(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$

Al despejar  $x$ , nos queda:  $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Haciendo algo similar, (se recomienda como ejercicio extra clase), pero ahora eliminando  $x$ , obtenemos el valor de  $y$  que nos queda de la siguiente forma:

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Así que la pareja solución nos queda así:  $\left( \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$

Otra opción que pudimos haber tomado es sustituir el valor de

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

en alguna de las dos ecuaciones originales y despejar a continuación la incógnita faltante. Eso nos llevaría a la pareja de valores que ya encontramos.

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Métodos para resolver SEL 2x2 Parte 2



Resuelve los siguientes sistemas por cada uno de los tres métodos anteriores: **sustitución**, **igualación** y **suma o resta**.



1)  $2x + 3y = -8$

$3x - 2y = 14$

2)  $2x - 3y = 5$

$-4x + 6y = -6$

3)  $3x - 5y = 4$

$-9x + 15y = -12$



## Desarrollo



- a) ¿Cuál es la solución de cada uno de los **sistemas de ecuaciones lineales**?

- b) Cuando trabajas por el **método de suma o resta** el sistema 2), ¿qué pasa si intentas eliminar **y**? ¿Cómo interpretas ese resultado?

- c) ¿Qué pasa en el caso del sistema 3) cuando trabajas por el **método de suma o resta**?

- d) Comparen los resultados que obtuvieron en la *Actividad* de Inicio de esta secuencia.



Buscaremos explicaciones a lo sucedido en la actividad de Inicio.

- a) **Como primer acercamiento a la respuesta, obtén la gráfica de las dos ecuaciones de cada uno de los sistemas. Utiliza los espacios proporcionados para tal fin.**

GRÁFICA DEL SISTEMA 1)

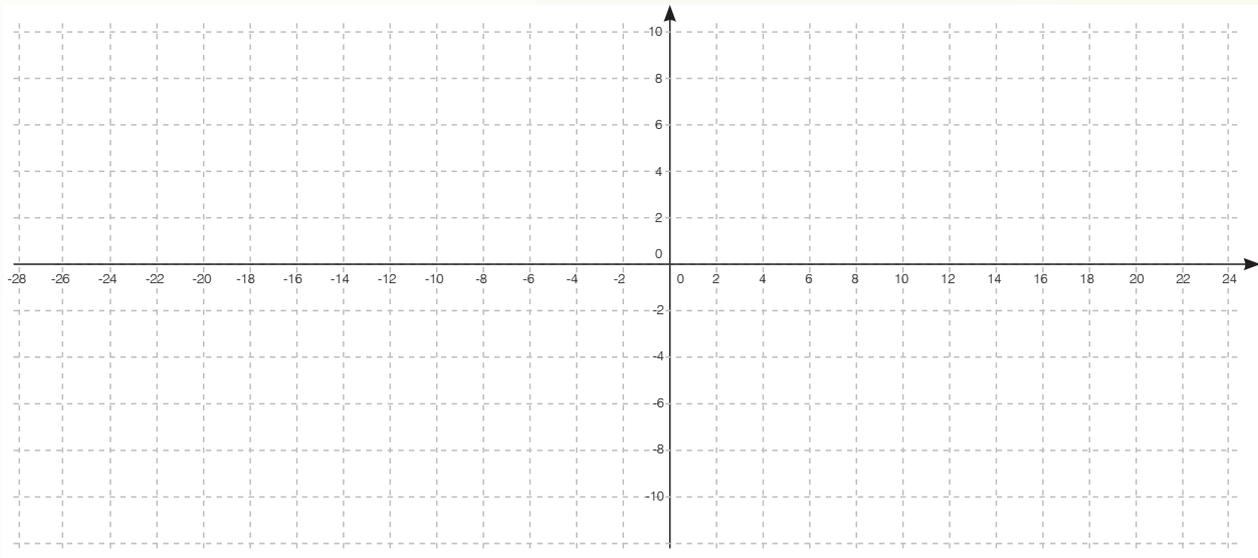


Tabla 7.4

GRÁFICA DEL SISTEMA 2)

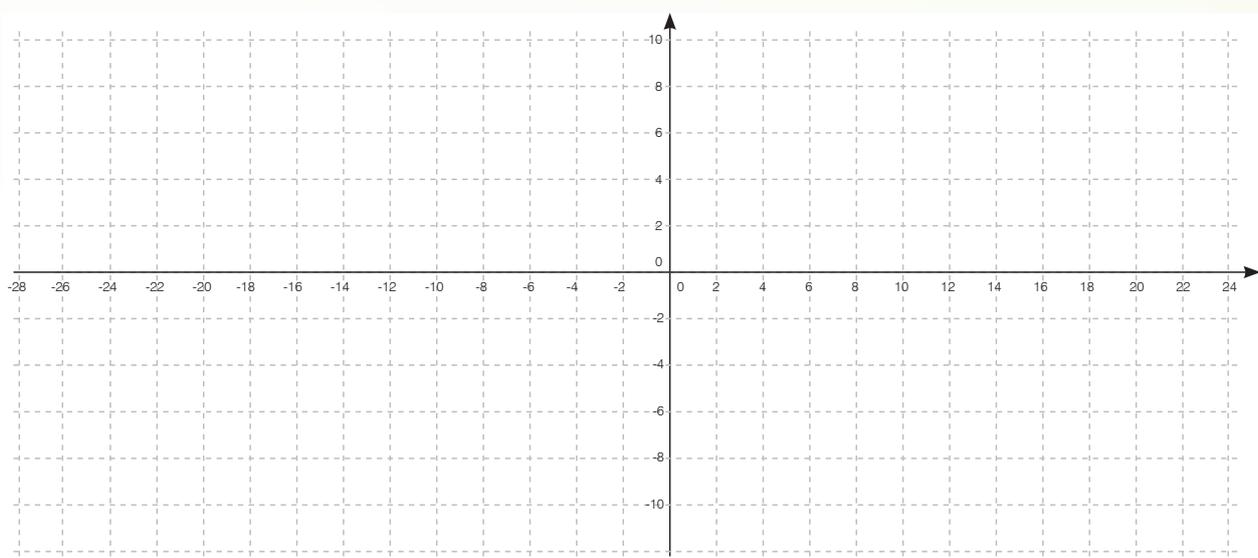


Tabla 7.5

GRÁFICA DEL SISTEMA 3)

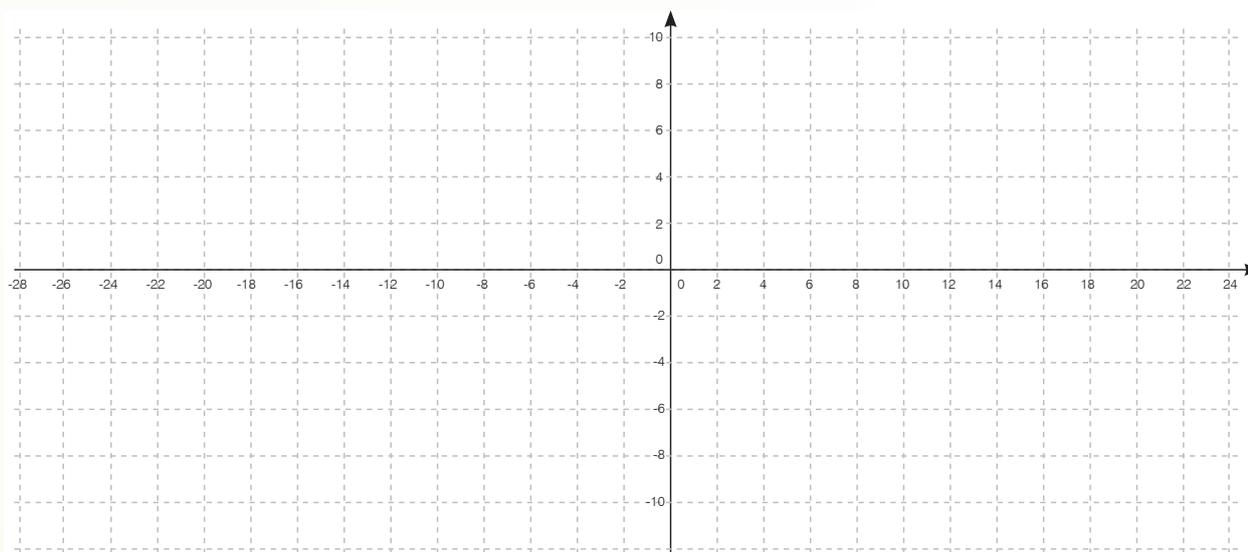


Tabla 7.6

**¿Qué conclusiones puedes mencionar, a partir de lo que acabas de encontrar, para las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas?**

---



---



---



---



---



---



---



---



---



## Actividad: 4

Actividad Grupal



Los resultados previos de esta **Secuencia** nos llevan a concluir que al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden presentarse las siguientes situaciones:

- El sistema tiene solución única, en cuyo caso, la gráfica correspondiente son dos rectas que se cruzan en un único punto.**
- El sistema no tiene solución, por lo que la gráfica correspondiente serán dos rectas paralelas.**
- El sistema tiene muchas soluciones, y en este caso, tendremos la gráfica de dos rectas que son coincidentes, es decir, una está sobre la otra.**

¿Existe algún recurso que nos permita saber, antes de aplicar alguno de los métodos ya estudiados en cuál de las situaciones se encuentra un sistema dado?

Para responder a esta pregunta regresemos a la solución general de un SEL **2x2**.

Acabamos de encontrar que cuando resolvemos de manera general un sistema **2x2** por el método de suma o resta, tenemos que:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

Vista como una pareja de números, la solución nos queda así:

$$\left( \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right)$$

Obtuvimos, tanto en forma de pareja ordenada como de expresiones separadas de los valores de **x** e **y**, lo que podríamos considerar como una expresión general para resolver un sistema **2x2**. Con estos resultados es posible armar un arreglo numérico relativamente fácil de recordar.

Nuestra primera observación es que las expresiones de ambas incógnitas tienen en común el mismo denominador:  **$a_1 b_2 - a_2 b_1$** . Si estructuramos el arreglo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Lo podemos usar para representar **el valor común del denominador de las expresiones de ambas incógnitas** que hemos obtenido. ¿Cómo? Restando los productos de los términos que se encuentran en las diagonales, iniciando con  $a_1$ . Ilustramos lo afirmado con ayuda de flechas:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Un arreglo de este tipo con la regla de operación indicada, se llama **“Determinante de orden 2”**, que en esta ocasión, por estar integrado por una **“copia”** de los coeficientes de las incógnitas  $x$  e  $y$  de nuestro sistema  $2 \times 2$  que estamos estudiando, lo llamaremos **“Determinante del Sistema”**.

En la expresión para el valor de  $x$  el numerador también es una diferencia de productos similar a la del denominador, lo que nos permite expresar el numerador en forma de determinante, dándonos por resultado:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Como puede observarse, el denominador para  $x$  está formado por el determinante que resulta de copiar los coeficientes de las incógnitas en el mismo orden en que están, mientras que el numerador es **“copiar el denominador”**, sustituyendo la primera columna (que contiene precisamente los coeficientes de  $x$ ) por la columna de términos independientes.

### ¿Qué diremos sobre la forma de expresar el valor de la incógnita $y$ ?

La regla a seguir es similar, o sea:

El denominador para  $y$  está hecho del determinante que resulta de colocar los coeficientes de las incógnitas en el mismo orden en que están, mientras que el numerador resulta de **“colocar el denominador”**, sustituyendo la segunda columna (que contiene precisamente los coeficientes de  $y$ ) por la columna de términos independientes. La expresión entonces para la incógnita  $y$  queda así:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Al expresar la solución como pareja ordenada, quedaría así:

$$\left( \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \right)$$

A esta manera genérica de encontrar los valores de las incógnitas  $x, y$  se le conoce como “**Regla de Cramer**”.

Resuelve, por medio de la **Regla de Cramer**, el sistema  $2 \times 2$  que modela el problema de los camiones de volteo que hemos estudiado desde el inicio de esta **Secuencia 2** y los tres que reproducimos a continuación:

1)  $2x + 3y = -8$

$3x - 2y = 14$

2)  $2x - 3y = 5$

$-4x + 6y = -6$

3)  $3x - 5y = 4$

$-9x + 15y = -12$



**Nota:** En los casos donde hay coeficientes negativos, se recomienda extremar cuidados al operar con el fin de no confundir el signo menos de los números negativos con el de la resta; **por ejemplo**, el determinante del último sistema sería:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -9 & 15 \end{vmatrix} = (3)(15) - (-9)(-5) = 45 - 45 = 0$$

**¿Qué significa que el determinante del sistema valga cero?** Por lo pronto, que el sistema no tiene solución única, ya que, como lo analizaremos más adelante, la división entre cero no está definida.

Si  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ , esto va a implicar que  $a_1 b_2 = a_2 b_1$  y al dividir ambos miembros, primero entre  $b_1$  y luego entre  $b_2$ , obtenemos la expresión  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$  y al multiplicar ambos miembros de la igualdad por  $-1$ , obtenemos que  $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ .

Esto significa, desde el punto de vista geométrico, que las rectas correspondientes a las dos ecuaciones lineales que integran el sistema tienen la misma pendiente es decir ambas rectas son paralelas o coincidentes.

En cambio, si  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ , de donde podríamos obtener que  $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$

Por consiguiente  $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$ , y entonces las rectas correspondientes a las ecuaciones del sistema no tienen la misma o pendiente. Este hecho, visto geoméricamente nos lleva a que las rectas no son paralelas ni coincidentes, sino oblicuas y dos rectas que no son paralelas ni coincidentes se intersecan en sólo un punto por lo que podremos afirmar que el sistema tiene solución única.

De esto surge la siguiente recomendación práctica:

*Si al resolver un sistema  $2 \times 2$  calculamos el determinante del sistema (el formado por los coeficientes de las incógnitas), y éste tiene valor diferente de cero, podemos concluir que éste tiene solución única, pudiéndose obtener dicha solución por la Regla de Cramer o por cualquier otro método de los ya estudiados. Si dicho determinante resulta ser igual a cero, entonces el sistema no tiene solución ó su solución no es única.*



1. Construye los sistemas de ecuaciones que modelan las siguientes situaciones. Una vez construido el sistema, resuélvelo por el método que prefieras.

- a) Una práctica comercial muy común consiste en mezclar diferentes cantidades del mismo producto (café, aceite, carne, etc.), con distintas calidades y precios, para obtener una determinada cantidad de ese producto que pueda venderse con mayor facilidad.

**Don Venancio Todogana**, dueño de una cadena de almacenes, ordenó a su gerente de ventas que mezclase todos los litros que hubiese en existencia de los dos tipos de aceite que se tienen en bodega, uno de los cuales se vende originalmente a **30 pesos el litro**, con otro que se vende ordinariamente a **22 pesos el litro**. Al acatar la orden, el gerente obtuvo **1600 litros de aceite**, que vendió a **25 pesos por litro**. ¿Cuántos litros había en bodega de cada tipo de aceite?

- b) **Elena** tiene una microempresa de fabricación de artículos de madera. Ante la cercanía del Día de las Madres, consigue un pedido de varias compañías que regalarán joyeros de madera a sus empleadas. Se compromete a entregar el pedido el 9 de mayo.

Cuando se encuentra planeando la fabricación de los joyeros, se da cuenta que si fabrica **750 joyeros diarios**, le faltarían **450** al concluir el plazo. En cambio, si fabricara **780 joyeros diarios**, le sobrarían **240 joyeros**. ¿Cuántos joyeros le encargaron y con cuántos días de plazo contó para cumplir con los compromisos contraídos?

- c) ¿Sabes lo que son los **números capicúas**? **Son aquellos que se escriben igual si los empiezas a escribir de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo 4444, 1661, 3443.** Supongamos que tenemos un número capicúa de tres cifras, en el cual la cifra de las centenas es tres unidades menor que la de las decenas. La suma de las tres cifras es doce. ¿Cuál es el número?



- d) Un granjero sabe que debe alimentar a su ganado de forma balanceada. Ha averiguado que las proteínas y los carbohidratos son básicos para el tipo de animales que él cría. Sabe también que para cada animal se requieren diariamente **3.750 kg.** de proteínas y **25 kg.** de carbohidratos.

Tiene a su disposición dos tipos de alimentos, uno de los cuales contiene **0.075 kg. de proteína** y **0.300 kg. de carbohidratos**. En tanto el segundo alimento contiene **0.05 kg. de proteína** y **0.350 kg. de carbohidratos**. ¿Cuántos kilogramos de cada tipo de alimento debe mezclar si desea cumplir con los requerimientos nutricionales de cada ejemplar que tiene?

2. **Construye 5 sistemas de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$ , de tal manera que en cada uno se satisfaga la condición indicada. Una vez construidos, resuelve cada uno por el método que se te indica.**

- a) Dos coeficientes deben ser enteros negativos y los otros dos enteros positivos. *Método a utilizar para resolverlo: **igualación**.*
- b) Los coeficientes de la primera ecuación deben ser múltiplos de los coeficientes de la segunda ecuación, respectivamente. El término independiente en la primera ecuación debe ser **5** y en la segunda deber ser también **5**. *A resolverse por **suma o resta**.*
- c) Todos los coeficientes deben ser iguales a **2**. *A resolverse por **suma o resta**.*
- d) Los coeficientes de la primera ecuación deben ser  $\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{3}{5}$ ; los de la segunda ecuación deben ser **1;3**.
- e) Que tenga única solución. *Resuélvelo por la **Regla de Cramer**.*

3. **Las siguientes parejas de valores son soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Encuentra el sistema.**

a)  $x = 3; y = 1$

b)  $x = -1; y = -4$

4. Tomando como referencia la **Figura 7.7** que se muestra abajo, ¿Puedes graficar otra recta de tal manera que el sistema de ecuaciones lineales asociado tenga sólo dos soluciones? Argumenta tu respuesta.

- ¿Y una recta para que la solución sea  $(1,1)$ ? Argumenta tu respuesta.
- ¿Y una recta para que el sistema tenga infinitas soluciones? Argumenta tu respuesta.

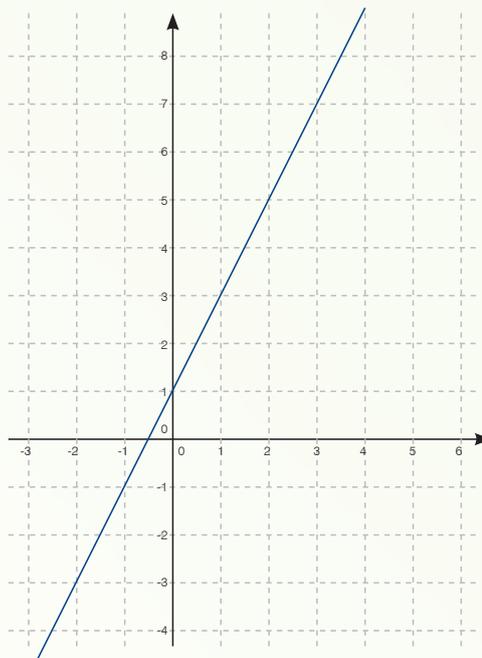


Figura 7.7

5. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales representado en la gráfica siguiente?

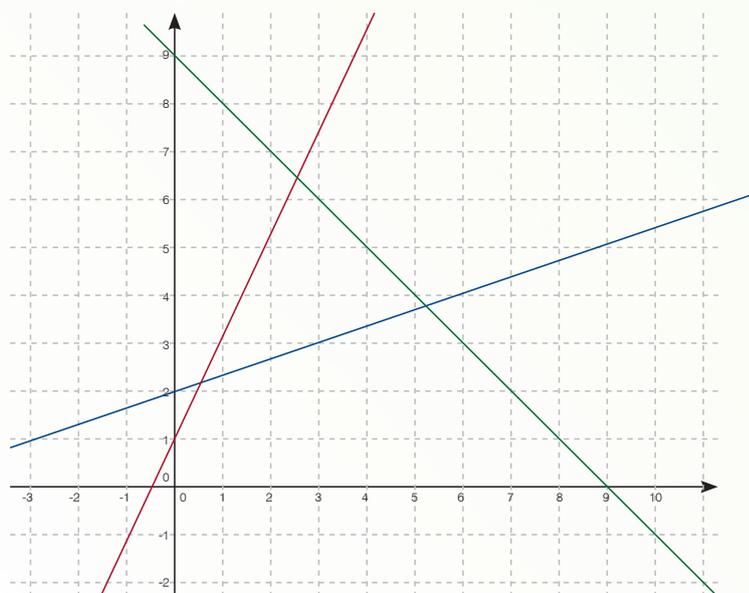


Figura 7.8



6. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a un sistema de ecuaciones lineales? Explica

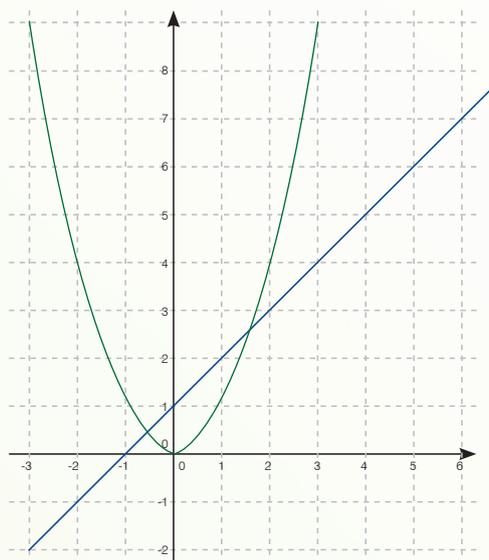


Figura 7.9

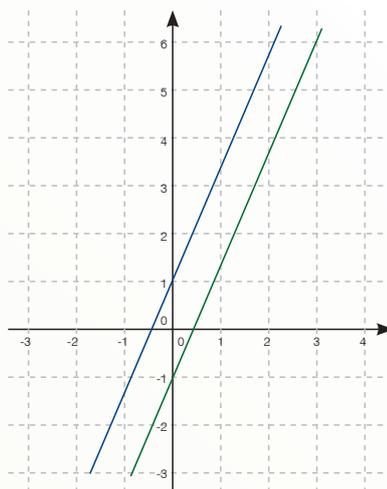


Figura 7.10

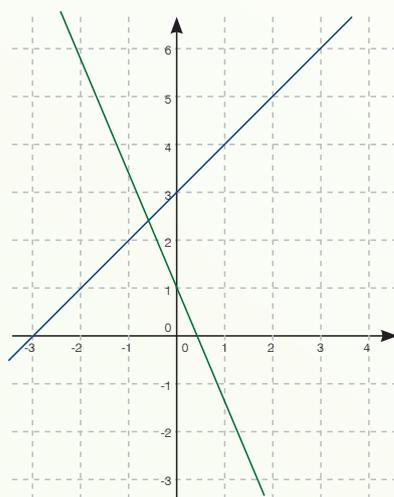
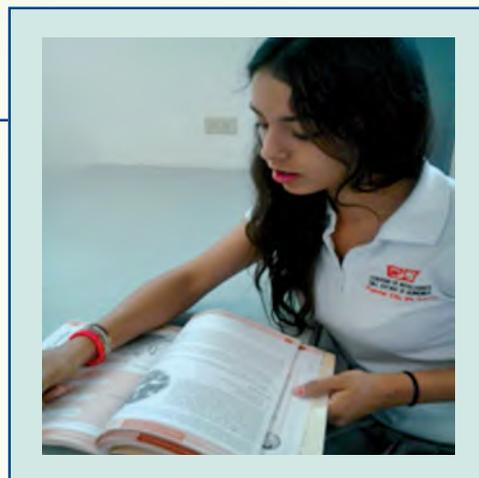


Figura 7.11



El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

*En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

**Problema 1.** **Carolina Sánchez** abrió un negocio de artículos electrónicos y recientemente adquirió por \$15,000.00 un televisor y un equipo sofisticado de sonido. Una semana después vendió ambos aparatos por \$16,750.00. Al hacer un balance observó que en la venta del televisor su ganancia fue del 10% del precio original y de 15% en el caso de la venta del equipo de sonido. **¿Cuál fue el precio de compra original de cada aparato?**

*Solución:*

**Problema 2.** Utiliza el método de tu preferencia para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y = 4 \qquad x - 3y = \frac{1}{2}$$

**¿Por qué seleccionaste el método que empleaste para resolver el problema?**

Solución:

**Problema 3.** Sin resolverlo, determina si cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones tiene solución.

$$\frac{3}{2}x + \frac{4}{3}y = \frac{1}{2}$$

a)

$$\frac{9}{6}x + \frac{3}{12}y = 5$$

b)

$$3x + 2y = 6$$

$$\frac{1}{5}x + 4y = \frac{1}{3}$$

Solución:

**Problema 4.** Escribe a continuación tres sistemas de ecuaciones de  $2 \times 2$  con la condición de que:

- a) El primero tenga una solución única
- b) El segundo debe tener infinitas soluciones
- c) El tercero no debe tener solución

Solución:

Reflexiones Generales relacionadas con el **BLOQUE 7**

1. **¿Tuviste dificultades en el momento al abordar los problemas en donde se debían construir los sistemas de ecuaciones de  $2 \times 2$  a partir de un enunciado verbal? ¿Cuáles fueron este tipo de dificultades? ¿Las comentaste con tus compañeros? ¿Planteaste tus dudas al profesor?** En caso de no haberlo hecho, escribe tus razones.

2. **¿Cuál es el método de solución de un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$  que te parece más fácil o más adecuado?** Argumenta las razones que dan sustento a tu respuesta.

3. **Si un compañero te solicita ayuda sobre la forma de resolver un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$  con un método específico ¿Puedes hacerlo? Desde tu perspectiva, ¿Puedes expresar tus ideas claramente? ¿Con cuál método tendrías dificultades y por qué?**

4. **Si tienes que representar con una gráfica un sistema de ecuaciones de  $2 \times 2$  ¿puedes hacerlo en todos los casos vistos en este bloque? ¿Con cuáles sistemas podrías tener dificultades y por qué?**

5. **Escribe en las siguientes líneas tres razones por las cuales consideras que el trabajo en equipo te resultó de utilidad para comprender la temática desarrollada en este bloque. Asimismo, señala cómo se puede mejorar la dinámica de trabajo en equipo.**



# BLOQUE 8

Resuelve...

## Ecuaciones Lineales III

### Introducción:

En este Bloque estudiaremos situaciones o problemas que serán modelados mediante tres ecuaciones con tres incógnitas, estas últimas elevadas a la primera potencia. Este modelo es conocido como “sistema de tres ecuaciones lineales simultáneas con tres incógnitas”, “**sistemas 3x3**”, o más brevemente “**SEL 3x3**”.

Así como en el bloque anterior los problemas requirieron encontrar la(s) pareja(s) de números que satisfaga(n) a dos ecuaciones, aquí lo haremos buscando la(s) terna(s) que satisfagan a las tres ecuaciones y se estudiará la forma en la cual podemos extender las ideas discutidas en el bloque anterior para resolver ahora los sistemas de ecuaciones lineales de **3x3**.

Nuevamente se requerirá que interpretes información escrita y la puedas expresar en términos algebraicos, pero las situaciones tendrán un mayor grado de complejidad. Asimismo, podrás extender las ideas de los **SEL 2x2** para resolver los de **3x3** que se presentan aquí y verificar si las soluciones encontradas realmente lo son. Con ello estarás avanzando no sólo en resolver nuevas situaciones sino también en la generalización de ideas matemáticas discutidas previamente.

Es importante que mejores tus procesos de comunicación, tanto para escuchar y valorar las ideas de los demás, como para plantear tus propuestas, tus argumentos y tus dudas, contribuyendo a potenciar las ventajas que representa el trabajo en equipo.

# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

### Transportando maquinaria



El *Ing. Jorge Vargas*, es comisionado por su empresa, la **constructora "Hermobras"**, para realizar un proyecto de construcción de dimensiones mayores a las tareas que



usualmente atiende. Al estar planeando sus actividades, se da cuenta que requiere precisar algunos cálculos para saber los costos de la nueva obra a su cargo.

**Por ejemplo**, se da cuenta que requiere transportar tres tipos de maquinaria: **5 máquinas M1, 10 máquinas M2 y 89 máquinas M3**, para lo cual deberá contratar tres tipos de camiones que puedan realizar esa tarea. Al solicitar información a tres empresas que rentan el tipo de camiones que necesita, le llega la siguiente información:

Camiones y Troques, S.A. de C.V				
		Cantidad de máquinas de cada tipo que puede transportar cada camión		
		M1	M2	M3
Clase de camión	Camión A	1	1	10
	Camión B	1	2	18
	Camión C	1	4	33

Tabla 8.1 Cantidad de máquinas de cada tipo que puede ser transportada en cada clase de camión. Información proporcionada por Camiones y Troques, S.A. de C.V.

Camionera de Sonora, S.A. de C.V				
		Cantidad de máquinas de cada tipo que puede transportar cada camión		
		M1	M2	M3
Clase de camión	Camión Tutuli	1	2	10
	Camión Yaqui	1	2	18
	Camión seri	1	2	33

Tabla 8.2 Cantidad de máquinas de cada tipo que puede ser transportada en cada clase de camión. Información proporcionada por Camionera de Sonora, S.A. de C.V.

La Provedora del Constructor, S.A. de C.V				
		Cantidad de máquinas de cada tipo que puede transportar cada camión		
		M1	M2	M3
Clase de camión	Camión Rino	1	1	2
	Camión Hipo	1	2	3
	Camión Elefa	1	4	5

Tabla 8.3 Cantidad de máquinas de cada tipo que puede ser transportada en cada clase de camión. Información proporcionada por La Provedora del Constructor, S.A. de C.V.

Se le informa también que todos los camiones de cada una de las empresas tienen el mismo costo, que solamente viajan estando completamente cargados.

Al *Ing. Jorge Vargas* le interesa hacer la contratación para que toda su maquinaria sea transportada en un solo viaje, por una sola compañía. Solicita ayuda a *Rodrigo*, su asistente de obras para que le diga cuál es la mejor opción, y éste, después de analizar concienzudamente la situación le deja la siguiente nota sobre el escritorio:

Inge:

Me puse a sacar las cuentas y encontré las siguientes opciones:

- Con Camiones y Traques necesitamos contratar 3 camiones A, 1 camión B y 1 camión C.
- Con Camionera de Sonora, necesitaríamos 4 camiones Tutuli, 1 camión Yaqui y 1 camión Seri.
- Con Provedora del Constructor debemos contratar 5 camiones Rino, 10 camiones Hipo y 89 camiones Elefa.

Estaré al pendiente por si necesita más información.

Rodrigo

- a) **Analiza la información de cada una de las tablas que presentaron las compañías.**
- b) **¿Qué opinas de lo que respondió Rodrigo?** Analiza cada una de las propuestas que hizo, indicando si es correcta o no, y en qué piensas que se basó para proponerla.
- c) **¿Qué propuesta se acerca más para cumplir con las diversas condiciones: transporte de todas las máquinas, camiones con carga completa, transportadas en un solo viaje y por una sola compañía?**
- d) **Qué crees que le responde el Ingeniero a Rodrigo?**





## Desarrollo



Actividad: 2  
Actividad Grupal



Cuando estuvimos analizando los problemas del **BLOQUE 7**, veíamos que en cada una de las situaciones planteadas aparecían dos condiciones que deberían de cumplir las dos cantidades que buscábamos, a las que llamamos **incógnitas**.

Las **expresiones algebraicas** que representaban a dichas condiciones involucraban a las dos **incógnitas** y las llamamos **sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas**. Aprendimos a resolverlas por varios métodos, entendiendo como solución del sistema a los valores de las **incógnitas** que hicieran verdaderas simultáneamente a las dos ecuaciones. En esta ocasión, extenderemos los razonamientos y resultados que se siguieron en aquel momento, utilizando primero las estrategias ya conocidas. **¿A qué nos referimos?**

En el **BLOQUE 7** hicimos un análisis para cada condición que apareció en los problemas presentados, auxiliándonos de una tabla; este recurso nos permitió identificar la relación existente entre las incógnitas para representar algebraicamente la condición. Usaremos el mismo recurso ahora, tomando como base la información proporcionada por **Camiones y Troques, S.A. de C.V.**, en el problema planteado en la sección de Inicio. Después de haberlo discutido en equipo responde lo siguiente:

### Camiones y Troques, S.A. de C.V

		Cantidad de máquinas de cada tipo que puede transportar cada camión		
		M1	M2	M3
Tipo de camión	Camión A	1	1	10
	Camión B	1	2	18
	Camión C	1	4	33

- a) **¿Cuántas y cuáles cantidades identificas en dicho problema como incógnitas?** Recuerda que el *Ing. Jorge Vargas* necesita transportar **5 máquinas M1, 10 máquinas M2 y 89 máquinas M3** utilizando tres tipos de camiones.

- b) Después de analizar los datos que se proporcionan en las tablas siguientes, llena los espacios vacíos con ternas de números que satisfagan la condición pedida (ver última columna).

Núm.de Camiones A	Núm. de Camiones B	Núm. de Camiones C	Número de máquinas M1 transportadas por los camiones A	Número de máquinas M1 transportadas por los camiones B	Número de máquinas M1 transportadas por los camiones C	Total de máquinas M1 que deben ser transportadas: 5
1	2	2	$I(1)=1$	$I(2)=2$	$I(2)=2$	$I(1) + I(2) + I(2) = 1 + 2 + 2 = 5$
1	3	1	$I(1)=1$	$I(3)=3$	$I(1)=1$	$I(1) + I(3) + I(1) = 1 + 3 + 1 = 5$
1			$I(1)=1$			
$x$			$I(x) = x$			$I(x) + \frac{\quad}{x + \dots} = 5$

Conclusión: Esta relación entre las incógnitas puede expresarse algebraicamente así:

Tabla 8.1

Núm.de Camiones A	Núm. de Camiones B	Núm. de Camiones C	Número de máquinas M2 transportadas por los camiones A	Número de máquinas M2 transportadas por los camiones B	Número de máquinas M2 transportadas por los camiones C	Total de máquinas M2 que deben ser transportadas: 10
4	1	1	1(4)	2(1)	4(1)	$1(4) + 2(1) + 4(1) = 10$
	$y$		$1(x) = x$	$2(y) =$		
Conclusión: Esta relación entre las incógnitas puede expresarse algebraicamente así:						

Tabla 8.2



- c) Integra, en el espacio que sigue, las tres expresiones algebraicas que obtuviste en el último renglón de cada tabla:

- d) ¿Encontraste alguna terna de valores que apareciera en las tres tablas? Si tu respuesta es afirmativa anótala aquí:



## Actividad de Cierre



Esperamos que como resultado del trabajo con las tablas, tu equipo haya logrado construir el sistema

$$\begin{aligned}x + y + z &= 5 \\x + 2y + 4z &= 10 \\10x + 18y + 33z &= 89\end{aligned}$$

Que es un caso particular de lo que genéricamente se conoce como sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, brevemente designado como **SEL 3x3** o simplemente sistema **3x3**.

La forma general que tienen estos sistemas es:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

En donde:

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$  son números reales que reciben el nombre de coeficientes del sistema.

$x, y, z$  son llamadas incógnitas.

$d_1, d_2, d_3$  son también números reales y se llaman constantes.

Resolver un **SEL 3x3** significa encontrar la terna de valores  $x, y, z$  que satisfaga a las tres ecuaciones del sistema.

Como te pudiste dar cuenta, la estrategia que usamos en el caso de los camiones resulta útil cuando se busca construir el sistema que modela la situación planteada, pero quizá pudiera resultar cansada y poco fructífera en cuanto a buscar la terna de valores que es solución del sistema. Lo ideal será contar con estrategias o métodos que nos permitan encontrar la solución, si es que ésta existe.

En este sentido, podemos comentar que, al igual que sucede con los sistemas **2x2**, existen varios métodos para resolver los sistemas **3x3**. Entre ellos están:

- a) *Regla de Cramer*
- b) *Suma y Resta*
- c) *Sustitución*
- d) *Igualación*

De ellos en esta sección retomaremos la “**Regla de Cramer**”.

“**Regla de Cramer**” para sistemas **3x3**

**Paso 1.** Estructurar el arreglo numérico siguiente, donde acomodaremos a los coeficientes del sistema:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Cualquier arreglo de esta forma es llamado **Determinante de Orden 3**. Éste, por estar formado por los coeficientes del sistema, recibe el nombre de **Determinante del Sistema**.

**Paso 2.** Ejecución de la regla práctica de operación para asignarle un valor numérico al arreglo anterior. Para ello, en el arreglo mencionado repetimos las dos primeras columnas, colocándolas a la derecha del mismo.

El valor numérico se construye por sumas y restas de los productos de 3 factores triples, que se identifican por medio de diagonales estratégicamente ubicadas. El procedimiento, junto con las indicaciones gráficas que ayudan a recordarlo, se muestran a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

**Paso 3.** Para encontrar el valor de la primera incógnita, representada con la literal  $x$ , debemos formar un cociente de determinantes de orden 3. El numerador será el determinante del arreglo que resulta de sustituir la columna formada por los coeficientes de  $x$  en cada una de las ecuaciones del sistema, por los correspondientes términos independientes, (que en el arreglo están señalados con la flecha).

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

El denominador será el determinante del sistema. De tal manera que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

**Paso 4.** El valor de la segunda incógnita, que representamos como  $y$ , lo encontraremos de manera similar. Sólo que el numerador será el determinante del arreglo que resulta de sustituir la columna formada por los coeficientes de  $y$  en cada una de las ecuaciones del sistema por los correspondientes términos independientes. El denominador será el valor del determinante del sistema.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

**Paso 5.** Para la tercera incógnita, representada como  $z$ , repitiendo las ideas previas tendremos que:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Es conveniente hacer la siguiente observación: en cada uno de los tres cocientes anteriores aparece como denominador el determinante del sistema. Al ser éste un número real cabe la posibilidad de que tome el valor de cero. Si esto sucediera, los cocientes no podrían calcularse, en cuyo caso diremos que el sistema no tiene solución ó su solución no es única.

Podemos entonces concluir que el determinante del sistema es una herramienta útil para poder saber si el sistema  $3 \times 3$  tiene o no solución única.

Cerraremos esta sección pidiéndote que utilices lo que se acaba de explicar para:

- Saber si el sistema siguiente tiene o no solución única.
- En caso de que la tenga, proceder a encontrarla.
- Si acaso tuvo solución, verificar que lo sea.



$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x + 2y + 4z &= 10 \\ 10x + 18y + 33z &= 89 \end{aligned}$$

Recordemos que este sistema modela la situación mostrada en la sección Inicio, y se construyó a partir de la información presentada por la empresa **Camiones y Troques, S.A. de C.V.**

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Plaguicidas e insecticidas



Lee con cuidado la siguiente situación problema:

*El uso de plaguicidas e insecticidas es un tema que causa mucha controversia entre los expertos en el tema, los productores agrícolas y también en el público en general. Existen argumentos a favor y también en contra de su uso.*

*Entre los argumentos que se encuentran a favor, está el hecho de que existen muchas plagas dañinas para ciertos cultivos que son básicos para la alimentación humana o que forman parte de la riqueza agrícola de alguna zona geográfica y que es necesario eliminar, o por lo menos controlar. **Por ejemplo** en nuestra región, es frecuente escuchar hablar de “la mosquita blanca de los cítricos”, “el pulgón café”, que también afecta a los cítricos, “la pudrición texana”, plaga que afecta a un sinnúmero de cultivos, entre ellos el algodón, “la roya del trigo”, etc.*

*En nuestra vida cotidiana, existen plagas de insectos o parásitos, que pueden transmitir serias enfermedades a los seres humanos, como las cucarachas, ratas, garrapatas, piojos, etc., y que por lo tanto deben ser eliminadas. A finales del año 2012 la **ciudad de Hermosillo, Sonora**, se vio invadida por una plaga de grillos, que si bien (a decir de las autoridades responsables) no significaban peligro para la salud pública, sí resultaba molesta por la gran cantidad de estos insectos que podía ser encontrada en todos las casas y edificios.*

*Por otro lado, los defensores del medio ambiente, señalan que **el uso indiscriminado de plaguicidas e insecticidas resulta dañino, tanto para el ser humano como para otras especies vivas, incluyendo plantas y animales.** Es decir se habla de una serie de afectaciones colaterales al uso de estas sustancias.*

*De hecho sus procesos de elaboración y aplicación, ya sean caseros o industriales, deben ser realizados con sumo cuidado, por los riesgos de intoxicación que conllevan.*

En esta *Actividad* presentaremos una versión muy simplificada de cómo, utilizando herramientas algebraicas, podemos construir el modelo matemático de un proceso de elaboración de un plaguicida.

*Generalmente, los plaguicidas resultan de mezclar diferentes sustancias químicas, donde la mezcla resultante sea suficientemente tóxica al organismo que se quiere eliminar y con mínima toxicidad para el ser humano.* Con esta consideración como base, plantearemos el problema de elaborar una cierta cantidad de un determinado plaguicida, el cual, para su preparación requiere de mezclar:

**3 unidades de una sustancia química que llamaremos A**

**5 unidades de una sustancia química que llamaremos B**

**4 unidades un tercer químico que llamaremos C.**

No es posible encontrar a la venta esos químicos por separado, sino solamente en productos envasados en botellones con la misma cantidad de contenido, donde aparecen los químicos requeridos en las proporciones que se muestran en la tabla siguiente:

Marca comercial del producto	Unidades del químico A, por botellón	Unidades del químico B, por botellón	Unidades del químico C, por botellón
“Maltrate”	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
“Malacatón”	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
“Mortino”	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0

Tabla 8.4

Nos interesa determinar la proporción de cada botellón que debe ser empleada si se desea obtener la cantidad exacta de los químicos requeridos. Para construir el modelo matemático adecuado para este problema, analicemos la información relevante con base en la cual haremos las construcciones adecuadas.

Se nos informa que la mezcla de tóxicos químicos requeridos para obtener el plaguicida adecuado consta de tres sustancias llamadas **A**, **B** y **C**; también se nos informa que para elaborar la cantidad requerida, necesitamos combinar 3 partes de la sustancia **A con 5** de la sustancia **B y 4 de la C**. La **Tabla 8.4** nos informa además, en cada renglón de la misma, la cantidad de cada una de las sustancias requeridas (**A**, **B y C**) en cada uno de los botellones de distintas marcas, según se pueden adquirir comercialmente (**Maltrate, Malacatón y Mortino respectivamente**).

- a) ¿Cuáles son las incógnitas que aparecen en este problema? Identifícalas y asígnales las literales  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$x$  representa: \_\_\_\_\_

$y$  representa: \_\_\_\_\_

$z$  representa: \_\_\_\_\_

- b) Según lo aprendido de la proporcionalidad, se puede deducir que las respectivas porciones aplicadas a cada botellón ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) se aplica a cada una de las sustancias que contiene; al aplicar estas ideas considerando cada sustancia, podremos interpretar la información proporcionada en cada columna de la tabla. Así, al fijarse en la **sustancia A** se puede afirmar que el botellón **Maltrate** aporta  $\frac{1}{2}x$  de ella, el botellón **Malacatón** aporta  $\frac{3}{2}y$  mientras que el botellón **Mortino** aporta  $\frac{3}{2}z$  y tomando en cuenta que de la **sustancia A** debo completar 3 unidades, esto lleva a una expresión algebraica en forma de ecuación.

Escribe a continuación dicha ecuación:

- c) Empleando el mismo razonamiento que se hizo para la **sustancia A**, pero ahora para la **sustancia B**, y utilizando los datos de la segunda columna de la tabla, obtenemos la siguiente ecuación lineal de tres incógnitas:

- d) Hagamos lo mismo para la **sustancia C**, es decir, basándonos en los datos de la tercera columna de la tabla construyamos una tercera ecuación lineal con tres incógnitas, la cual escribirás a continuación:

- e) Escribe las tres ecuaciones que de los incisos a), b) y c).



## Desarrollo



Ya se expuso cómo es que procede la Regla de Cramer para encontrar la solución de un **sistema 3x3**. Ahora veremos cómo extender las ideas del Método de suma o resta para abordar un sistema con estas características.

Tomaremos como ejemplo el siguiente caso:

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 3 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z = 5 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$2x + \frac{3}{2}y + 0z = 4 \quad \text{Ecuación 3}$$

Este método transforma el sistema original en otro, de tal manera que en él aparezca un **subsistema 2x2**, el cual ya sabemos resolver. Veamos paso por paso cómo funciona.

- a) **Multiplica a la Ecuación 1 por  $-\frac{3}{2}$  y a la Ecuación 2 por  $\frac{1}{2}$** . Escribe a continuación los resultados de dichos productos.
- b) **Suma ambas ecuaciones y escribe la ecuación resultante en lugar de la ecuación 2 del sistema original.** ¿Qué característica importante tiene esta nueva ecuación?

c) **Ahora multiplica a la ecuación 1 por  $-2$  y a la ecuación 3 por  $\frac{1}{2}$ .** Escribe a continuación las nuevas ecuaciones:

d) **Suma las ecuaciones resultantes en c) y escribe la ecuación resultante en lugar de la tercera ecuación del sistema original.**

e) **Tu nuevo sistema debe ser:**

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 3$$

$$-\frac{3}{2}y - z = -2$$

$$-\frac{9}{4}y - 3z = -4$$

Notemos que en el nuevo sistema, aparecen dos ecuaciones con dos incógnitas. A eso nos referíamos líneas arriba cuando mencionábamos la existencia de un **"Sistema 2x2"**, el cual ya estamos en condiciones de resolver.

f) **Con lo aprendido en el BLOQUE 7, resuelve dicho sistema:**

$$-\frac{3}{2}y - z = -2$$

$$-\frac{9}{4}y - 3z = -4$$

g) Una vez encontrados los valores de  $y$ ,  $z$  **¿cómo determinamos el valor de  $x$ ?**

h) **¿Cuál es entonces la solución del sistema?**

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 3 \quad \text{Ecuación 1}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{2}z = 5 \quad \text{Ecuación 2}$$

$$2x + \frac{3}{2}y + 0z = 4 \quad \text{Ecuación 3}$$

$$x =$$

$$y =$$

$$z =$$

Verifica que efectivamente la terna de valores proporcionada es solución del sistema.

i) **¿Qué significa esta terna de valores en el contexto del problema original?**  
Explícalo a continuación.





## Actividad de Cierre



Actividad: 3  
Actividad Grupal



En los **BLOQUE 7** y **8** aparecieron los **sistemas  $2 \times 2$**  y  **$3 \times 3$** . Aprendimos a construirlos a partir de algunas situaciones típicas donde se emplean para modelarlas y desarrollamos algunos métodos para resolverlos.

Contamos también con recursos para poder determinar cuándo un sistema de esas características tiene solución única.

*Nos interesa remarcar que cuando el sistema a resolver proviene de la modelación de alguna situación, es necesario regresar sobre la situación de origen para preguntarnos sobre la interpretación de nuestra solución en el contexto que estemos trabajando.* Esto es, la solución que el modelo matemático proporciona siempre debe ser analizada a la luz de aquella situación que se está modelando, para saber si tiene o no sentido.

En el caso del problema del plaguicida, el hecho de haber resuelto el **sistema  $3 \times 3$**  no significa, por sí mismo, que hemos resuelto el problema planteado, sino que la información numérica proporcionada por el modelo matemático construido, ha de interpretarse y utilizarse para responder a las interrogantes del problema.

### Recordemos que:

$x$  es la porción que debe mezclarse del botellón de la marca **Maltrate**

$y$  es la porción del botellón de la marca **Malacatón**

$z$  es la porción del botellón de la marca **Mortino**

Esto significa que para formar una mezcla adecuada de **sustancias A, B y C** en 3, 5 y 4 porciones respectivamente que integran la fórmula adecuada del plaguicida que deseamos elaborar, debemos tomar dos terceras partes del botellón de **“Mortino”**, ocho novenas partes del botellón de **“Malacatón”** y cuatro terceras partes del botellón de **“Maltrate”**.

Para cerrar esta sección, regresaremos sobre el **Método de suma o resta** para hacer algunas consideraciones importantes.

### Las ideas principales del método son las siguientes:

- A partir del sistema original se construye un nuevo sistema en el que deberá aparecer un **“subsistema” de dos ecuaciones con dos incógnitas**. Esto se conseguirá sumando o restando múltiplos adecuados de las ecuaciones seleccionadas.

- b) Una vez identificado este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se procederá a resolverlo con la misma estrategia anterior, lo que nos proporcionará los valores de dos de las incógnitas. Éstas se sustituyen en la ecuación restante, para encontrar el valor de la incógnita faltante.

En el caso del sistema que se resolvió en la sección anterior, en el **sistema 2x2** que apareció después de las primeras operaciones, se habían eliminado los términos en **x**. Esto no tiene que ser siempre así. Es posible tomar otras variantes, de tal manera que los términos eliminados contengan a cualquiera de las otras dos incógnitas.

**Por ejemplo**, consideremos el **sistema 3x3** siguiente:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 22 \\ 3x + 2y - 4z &= -8 \\ -4x + 3y + 2z &= -5 \end{aligned}$$

El valor del determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 87 \neq 0$$

Por lo que estamos seguros que el sistema tiene única solución, misma que encontraremos por el **método de suma y resta**.

Para ello, elegimos eliminar la incógnita **z**, para reducir el **sistema 3x3** a uno **2x2**:

Tomamos la segunda ecuación y la sumamos miembro a miembro con la ecuación que resulta de multiplicar a la tercera por **2**; así:

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= -8 \\ -8x + 6y + 4z &= -10 \end{aligned}$$

Al sumar miembro a miembro estas ecuaciones, se elimina el término en **z** y se obtiene una ecuación lineal en dos incógnitas **x** e **y**:

$$-5x + 8y = -18$$

Para eliminar por segunda vez la misma incógnita **z**, utilizaremos ecuaciones equivalentes a la primera y segunda ecuación del sistema original, para ello multiplicaremos la **primera ecuación por 4** y la **segunda por 5**, obteniéndose:

$$\begin{aligned} 8x - 12y + 20z &= 88 \\ 15x + 10y - 20z &= -40 \end{aligned}$$

Al sumar miembro a miembro, se elimina el término en **z**, obteniéndose una segunda ecuación lineal con incógnitas **x** e **y**:

$$23x - 2y = 48$$



El sistema original se ha transformado en:

$$2x - 3y + 5z = 22$$

$$-5x + 8y = -18^*$$

$$23x - 2y = 48^{**}$$

Continuamos trabajando solamente con las ecuaciones marcadas con \* y \*\*. Aplicamos de nuevo el método de suma o resta, y ahora elegimos eliminar la incógnita **y**. sumando miembro a miembro la primera ecuación con la equivalente a la segunda que resulta de multiplicar todos sus términos por **4**, quedándonos el nuevo sistema equivalente de la siguiente manera:

$$-5x + 8y = -18$$

$$92x - 8y = 192$$

- a) **Resuelve este sistema de  $2 \times 2$ , y utiliza los valores encontrados para determinar el valor de la incógnita faltante.**

- b) **¿Existen otras opciones para resolver este sistema por el método de suma o resta, que sean diferentes a las dos que ya hicimos?**



1. **Observa el siguiente sistema de ecuaciones lineales y contesta lo que se solicita.**

$$2x + 3y - 5z = 0$$

$$3y + 2z = 7$$

$$8x = 9$$

Determina:

- ¿Cuántas ecuaciones y cuántas incógnitas tiene?
  - ¿Cuáles son los coeficientes de cada ecuación?
  - ¿Cuáles son las constantes?
  - ¿Cuáles son las incógnitas?
2. **Resuelve por el Método de Kramer cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de  $3 \times 3$ .**
- $x + y - z = 1$ ,  $2x - y + z = 3$ ,  $2x + 3y - z = 2$
  - $-x + y - 2z = 3$ ,  $-2x + 2y - 4z = 6$ ,  $x + 2y - z = 2$
3. **Resuelve por el Método de Suma o Resta cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de  $3 \times 3$ .**
- $2x + 3y - 2z = 3$ ,  $3x - 2y + 4z = 4$ ,  $5x + 3y - 4z = 10$
  - $x - y + z = 1$ ,  $2x + 5y - 3z = 8$ ,  $4x + 3y - 2z = -4$
4. **En el BLOQUE 7, en la secuencia didáctica 1 podemos ver el sistema de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$  siguiente**

$$x + y = 26 \quad (\text{Ecuación 1})$$

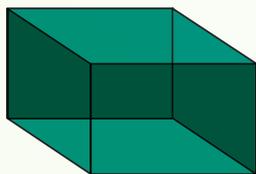
$$3x + 5y = 102 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Modifica el sistema de tal forma que tengamos un sistema de ecuaciones lineales de  $3 \times 3$ .



5. ¿El sistema de ecuaciones lineales que escribiste en el punto anterior tiene solución única?
6. En el primer problema de este bloque, se proporcionó información sobre las alternativas que el *Ing. Jorge Vargas* tuvo para mover maquinaria. En la **Secuencia** se planteó el sistema que se asociaba a la información de una de las tres compañías. Revisa la información y plantea el sistema de ecuaciones lineales que corresponde a cada una de las otras dos compañías y resuélvelos.
7. El profesor de matemáticas encargó a sus estudiantes que construyeran diferentes cuerpos geométricos, con el propósito de estudiar sus propiedades y las relaciones entre sus lados, el área de las superficies y sus volúmenes.

Las estructuras deberían formarse con la unión de alambres cuyas especificaciones proporcionó el profesor y que eran relativamente baratas.



A **Juan Pedro** le tocó construir tres cuerpos en forma de paralelepípedo rectángulo con las siguientes reglas o especificaciones:

**El primero** de ellos debería construirse con medidas arbitrarias, seleccionadas por él mismo, pero con los tres lados diferentes, esto es el largo y ancho de la base de diferente medida y la altura distinta a ambas.

**El segundo** paralelepípedo debería triplicar el largo de la base, duplicar el ancho y mantener la altura.

**El tercer** paralelepípedo rectangular debería, con relación también al original, duplicar el largo de la base, mantener el ancho y triplicar la altura.

Para no comprar alambre de más, **Juan Pedro** hizo los cálculos correspondientes, determinando que para el **primer paralelepípedo necesitaría 148 cm**, para el **segundo 316 cm** y para el **tercero 268 cm**. Compró el material, pero cuando los iba a construir se percató de que sólo había tenido cuidado de poner la cantidad de alambre que se necesitaba para cada uno de ellos y no recordaba las medidas exactas de los lados.

¿Puedes ayudar a **Juan Pedro** a recuperar los datos que necesita para construir cada cuerpo geométrico?

8. **La señora Maricela del Castillo abrió recientemente una pequeña empresa para la confección y producción de uniformes escolares y decidió empezar con la fabricación de camisas y consiguió que se le contratara en tres escuelas, por lo cual deberá producir tres tipos de camisas diferentes.**

Tomando en cuenta el número de empleadas que contrató dispone semanalmente de **460 horas** para la producción de **camisas Tipo I**, de **540 horas** para las **camisas Tipo II** y **680 horas para las camisas Tipo III**.

Para que su empresa trabaje en el máximo de su capacidad, se requiere que se labore en cada aspecto a los siguientes ritmos:

	Camisas tipo I	Camisas tipo II	Camisas tipo III
Corte	0.1 horas	0.3 horas	0.4 horas
Costura	0.3 horas	0.5 horas	0.6 horas
Empaque	0.05 horas	0.2 horas	0.2 horas

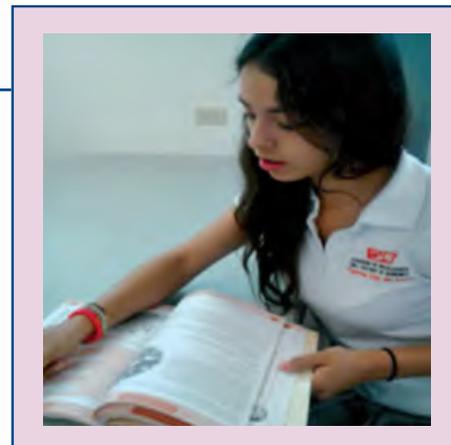
¿Cuántas camisas deben producirse semanalmente para que la empresa funcione a su máxima capacidad?



9. **Investigación.**

**¿Cómo se aplicarían los Métodos de Sustitución y de Igualación para resolver un sistema de ecuaciones lineales de  $3 \times 3$ ?** Resuelve el primero de los problemas de esta sección usando estos métodos.

**¿Te parecen adecuados estos métodos para resolver este sistema?**



El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

**Problema 1.** El nutriólogo de un hospital debe cuidar minuciosamente los alimentos que se elaboran para dar a los enfermos. En uno de las áreas de hospitalización se requería que los pacientes tuvieran alimentos que les proveyeran **260 unidades de hidratos de carbono, 120 unidades de calcio y 180 unidades de proteínas**. Los ingredientes a su disposición le permitían elaborar tres tipos de alimentos, con las especificaciones que se muestran en la siguiente tabla.

Unidades por onza	Alimento I	Alimento II	Alimento III
Hidratos de Carbono	20	8	18
Calcio	8	8	16
Proteínas	8	20	16

¿Cuántas onzas de cada alimento deben usarse para satisfacer los requerimientos de la dieta?

**Problema 2.** Haciendo una tarea de literatura, **María Rosa** se encontró, en tres páginas de un libro antiguo, que se señalaban longitudes de algunos objetos. Específicamente en la **página 7 se decía que “mide un paso más una vara más dos palmos”**. En el pie de página se indicaba que esta longitud equivalía a **264.4 cm = 2.644 m**. **En la página 10 se decía que “mide dos pasos más dos varas más tres palmos”** y en el pie de página se planteaba que esta longitud era equivalente a **507.9 cm = 5.079 m**. Más adelante, en la **página 31** se indicaba que un objeto medía **“dos pasos más tres varas más 5 palmos”** y en el pie de página se establecía que esta longitud equivalía a **633.3 cm = 6.333 m**.

**María Rosa** tuvo curiosidad por saber a cuánto equivalía cada una de estas medidas que se señalaban en el libro. **¿Puedes determinar las equivalencias del paso, la vara y el palmo en nuestro sistema métrico de medidas?**

1. **¿Qué diferencias encuentras entre la complejidad de los problemas que se modelan y resuelven con sistemas de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$  y los de  $3 \times 3$  tratados en este bloque? ¿Qué problemas tuviste en este bloque?**


2. **Cuando se te plantearon problemas que requerían construir un sistema de ecuaciones lineales de  $3 \times 3$ , seguiste algunas estrategias.** Describe las que utilizaste para:

- a) Comprender el texto del problema.
- b) Plantear el sistema de ecuaciones lineales de  $3 \times 3$  que se asocia a la información del problema.
- c) Resolver el sistema de ecuaciones.

3. **¿De qué manera piensas que te pudiera ayudar el uso de tecnología computacional en el tema?**


4. **¿Cuáles dudas te parece que necesitas comentar con tus compañeros y con el profesor?**


# BLOQUE 9

## Resuelve... Ecuaciones Lineales III

### Introducción:

En este bloque se promueve la emergencia articulada de dos temas de estudio: **las ecuaciones y las funciones cuadráticas**. Se presentan las **funciones cuadráticas** mediante **expresiones algebraicas** que relacionan de manera explícita dos variables. Desde este enfoque, la expresión cuadrática aparece como la regla de correspondencia que determina los valores de lo que se reconocerá como variable dependiente y la ecuación cuadrática en una variable se obtiene al asignar un valor particular a la variable dependiente. De esta manera, estarás en posibilidad de apreciar a las funciones cuadráticas como una herramienta poderosa que cuenta con **expresiones algebraicas**, tabular y gráfica para ser representada. Cada una de estas representaciones aporta posibilidades de análisis y de operaciones distintas, que al trabajarlas de forma articulada te permitirán dar mayor significado a las ecuaciones y funciones: para usarlas adecuadamente en la modelación de situaciones en las que requieres conocer un valor específico, determinar un valor máximo o mínimo, encontrar soluciones, darles una interpretación visual como puntos especiales de una gráfica o identificarlas en los valores asociados en una tabla.

Se espera también que a través de las tres secuencias didácticas, mantengas el interés por asociar e interpretar en ambos sentidos lo expresado como una situación de partida (un contexto) con las distintas **expresiones matemáticas** que la representan (la algebraica, la gráfica y la tabla de valores). Igualmente que logres comunicar con argumentos fundamentados en la validez de tus procedimientos y soluciones, las respuestas que das a los distintos cuestionamientos; que valores tu esfuerzo y el de tus compañeros por fortalecer y desarrollar los conocimientos y habilidades puestos en juego y que, finalmente, reconozcas que posees una nueva herramienta matemática, que aunada a las anteriores, te permite dar solución a una gama más amplia de situaciones que se presentan en tu ambiente estudiantil, familiar, de trabajo o de comunidad.

Finalmente, es de esperarse que valores cómo esta propuesta de estudio, que se presenta en las tres secuencias didácticas y en los apartados de Problemas y Autoevaluación, contribuye al desarrollo de las competencias genéricas y disciplinares que se enuncian en el Programa de Estudios para estos temas.

# Secuencia Didáctica 1.-

## Actividad de Inicio

### Caída libre y tiro vertical



#### Representaciones de la caída libre y tiro vertical hacia arriba

En la **Figura 9.1** se representan dos situaciones en las que un objeto se deja caer desde cierta altura, o bien, se lanza verticalmente hacia arriba. En los dos casos se puede modelar algebraicamente tanto la altura como la velocidad del objeto conforme transcurre el tiempo.

1. **Describe en lenguaje común cómo percibes que cambian la velocidad y la altura del objeto conforme transcurre el tiempo en cada una de las siguientes situaciones:**



Figura 9.1: Tiro Vertical

- a) En caída libre.

---

---

---

- b) En lanzamiento vertical hacia arriba:

---

---

---

En condiciones ideales, para modelar algebraicamente el tiro vertical hacia arriba, la **altura  $h$**  y la **velocidad  $v$**  pueden expresarse como funciones del **tiempo  $t$**  transcurrido desde su lanzamiento, considerando la velocidad inicial  $v_0$  y la altura inicial  $h_0$  de la siguiente manera:

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad \text{y} \quad v = v_0 + at$$

en donde  $a$  representa la aceleración causada por la fuerza de gravedad, que es aproximadamente  $-9.8 \text{ m/seg}^2$  (el signo menos se considera en el tiro vertical ya que el sentido de la fuerza de gravedad se contrapone al del eje de referencia que se utilizará en el plano cartesiano para la altura  $h$ ). Por tal razón, las relaciones anteriores se pueden expresar como:

$$h = h_0 + v_0 t - 4.9 t^2 \quad \text{y} \quad v = v_0 - 9.8t$$



Actividad de Equipo



2. **Cuando se trata de soltar un objeto desde cierta altura, la velocidad inicial  $v_0$  es cero.**

- a) ¿Cómo quedan expresadas las relaciones anteriores? Escribe claramente cada expresión:
- b) Analiza los signos en cada expresión y discute con tus compañeros qué significa que la velocidad aumente en magnitud pero su signo sea negativo:

3. **Identifica cuáles relaciones son lineales y cuáles son cuadráticas.**

4. Tomando en cuenta los datos que a continuación se proporcionan, ¿cómo quedarían estas expresiones si modelas un lanzamiento de este tipo (tiro vertical), en cada una de las situaciones que se indican a continuación?

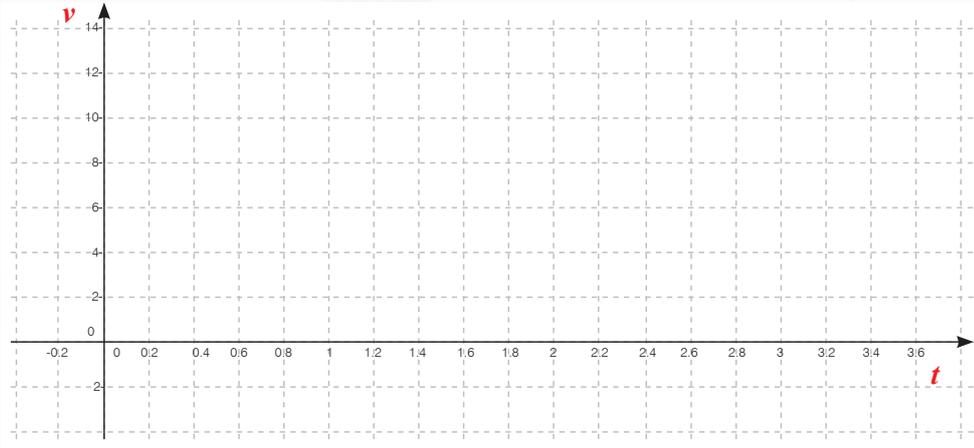
- a) Cuando se deja caer un objeto desde una altura de **1.65 m**.
- b) Cuando se lanza un objeto hacia arriba con una velocidad inicial de **15 m/seg** desde una altura de **0 m** (el nivel de lanzamiento es el mismo que el de llegada).
- c) Cuando se lanza un objeto hacia arriba con una velocidad inicial de **15 m/seg** desde una altura de **1.65 m**.

5. Completa las siguientes tablas y utilízalas para elaborar un bosquejo de las gráficas que representan cada una las relaciones anteriores. Identifica en ellas, características importantes del movimiento, como son altura máxima, tiempo que dura en el aire, así como la velocidad con la que el objeto llega al suelo.

a) Las que corresponden al inciso a) del punto anterior:

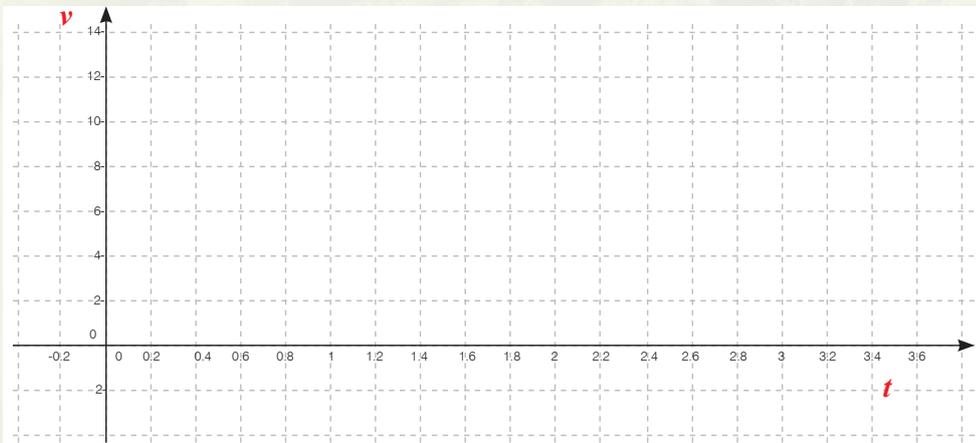
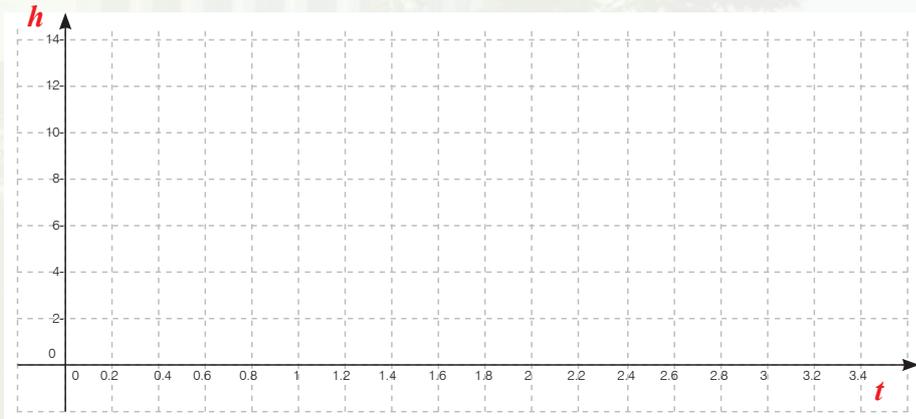
<i>t</i>									
<i>s</i>									
<i>v</i>									





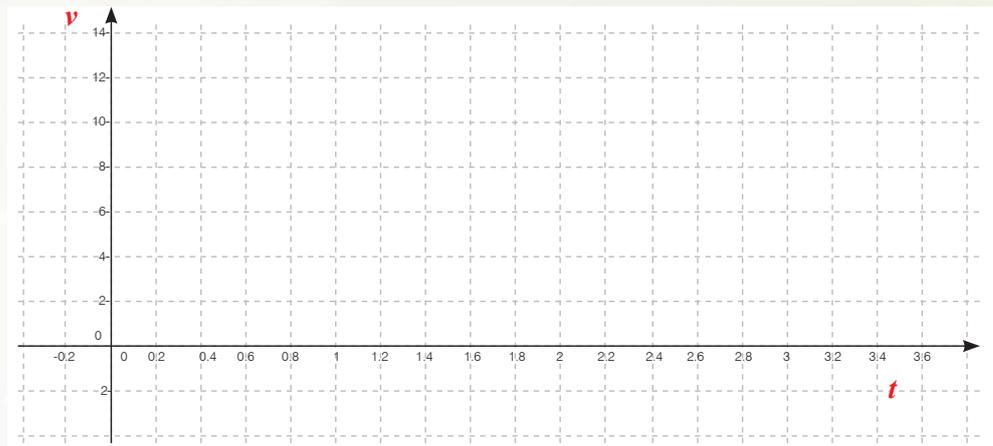
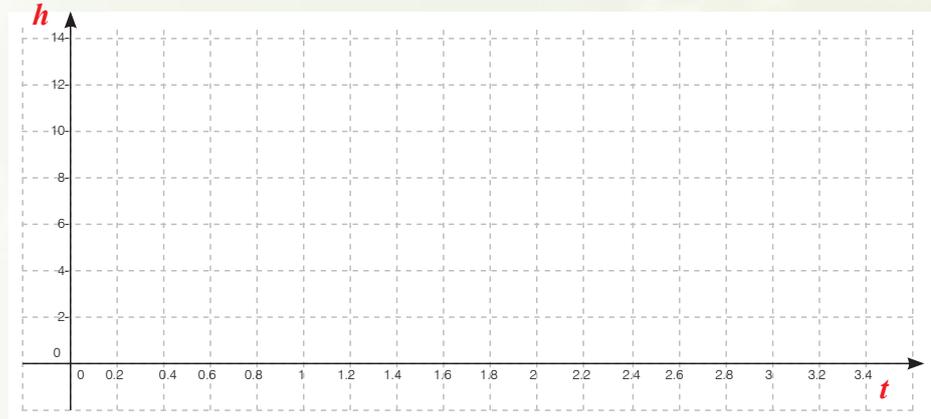
b) Las que corresponden al inciso b) del punto 3

<i>t</i>								
<i>h</i>								
<i>v</i>								



c) Las que corresponden al inciso c) del punto 3

<i>t</i>									
<i>h</i>									
<i>v</i>									



Los modelos cuadráticos que se estudian en este bloque pueden representarse mediante una relación de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ con } a \neq 0$$

que es una ecuación de segundo grado con dos variables en la que el término cuadrático corresponde a la variable  $x$ . La gráfica correspondiente es una parábola con eje de simetría paralelo al eje  $y$ , si  $x$  toma cualquier valor real.

Una **ecuación cuadrática con dos variables** de la forma  $y = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ , establece una **relación funcional de  $y$  con respecto a  $x$** , ya que para cada valor de  $x$  existe un único valor para  $y$ . De este modo, **identificamos a  $x$  como la variable independiente y a  $y$  como la variable dependiente**.

*Para enfatizar una relación funcional escribimos*

$$y = f(x)$$

*y, en este caso, la expresión queda como  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , con  $a \neq 0$ , a la que denominamos **función cuadrática**.*

*Su representación gráfica corresponde a **una parábola** con eje de simetría paralelo al eje  $y$ .*



## Desarrollo



### Calcular y representar características de la caída libre

La **Figura 9.2** muestra, a la izquierda, la imagen de la caída libre de un objeto, es decir, éste se “suelta” desde cierta altura que corresponde a la **altura inicial  $h_0$** . Se representan también las diferentes alturas  **$h$**  del objeto hasta que alcanza el suelo. A la derecha se muestra la representación gráfica de la función  **$h(t)$**  que describe esas posiciones respecto al tiempo medido en segundos.

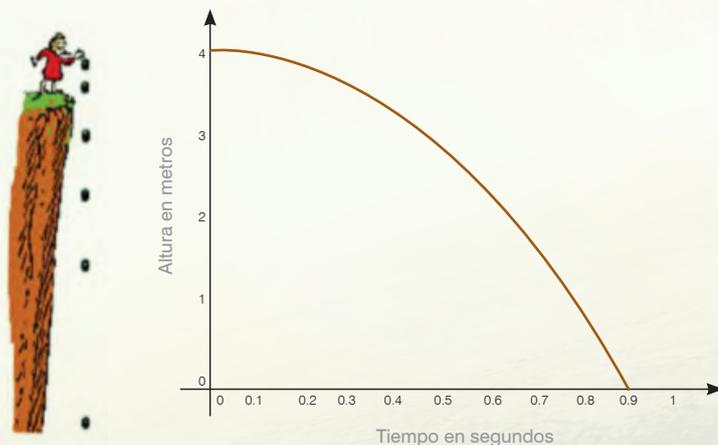


Figura 9.2



Actividad de Equipo



1. **Toma como referencia la gráfica de la función  $h(t)$  de la Figura 9.2 para que respondas lo que se pide:**

- a) Altura  $h_0$  desde la que se deja caer el objeto:
- b) Altura final del objeto:
- c) Tiempo que tarda en caer:

2. **Con base en las expresiones algebraicas de la función, determina con la precisión indicada, lo siguiente:**

- a) Tiempo que tarda en caer, con tres decimales.
- b) Describe qué operaciones tuviste que hacer para calcular el tiempo pedido en el inciso anterior.



Actividad Grupal



3. **Recuerda que cuando efectúas el cálculo de la raíz cuadrada, obtienes dos valores como solución. ¿Por qué en los casos de caída libre**

**de un objeto solamente se toma en cuenta el valor positivo obtenido?** Comenta tu respuesta con el resto del grupo.

4. **Como ya viste en la actividad de inicio de esta secuencia, la magnitud de la velocidad del objeto va en aumento conforme pasa el tiempo.**

- a) ¿Qué velocidad lleva el objeto cuando llega al suelo? Discute con tus compañeros el proceso para calcularla y descríbelo en el espacio que sigue:



Seguramente notaste que la **velocidad de llegada resulta ser negativa**. Pero como puedes ver en la gráfica, el movimiento en cada instante es contrario al eje de referencia  **$h$** .

*La expresión algebraica que describe la altura de un objeto en caída libre es  $h = -4.9t^2 + h_0$ , con  $h_0$  una constante, corresponde a una ecuación cuadrática en dos variables,  $h$  y  $t$ . En este caso, la relación establecida determina la función  $h(t)$ .*

5. **Si dejamos caer un objeto desde una altura de 196 metros ¿cuáles son las expresiones que modelan su posición y su velocidad?**

a) Determina el tiempo y la velocidad con que el objeto llega al suelo.

b) Repite la actividad para una altura de 40 metros.

*Recuerda que para determinar el tiempo que el objeto tarda en llegar al suelo utilizaste una expresión cuadrática. Particularmente, dado que la altura en ese momento es igual a cero, esta expresión toma la forma de una **ecuación cuadrática con una incógnita**.*

*Ésta se puede escribir en forma general como  $ax^2 + c = 0$ . En estos casos su solución se obtiene despejando  $x$  mediante operaciones inversas.*



Actividad: 3  
Actividad de Equipo



Calcular y representar características del tiro vertical hacia arriba que regresa a la altura de lanzamiento



Figura 9.3: Tiro vertical desde el suelo

En la **Figura 9.3**, del lado derecho se muestra la gráfica que corresponde a las alturas que alcanza un balón pateado hacia arriba desde el suelo, suponiendo que inicia el lanzamiento desde ahí.

1. **En este caso, ¿cuál es el valor de la altura inicial  $h_0$ ?**

- a) Señala en la gráfica de la **Figura 9.3** los puntos que corresponden a las alturas inicial, final y máxima.

2. **¿Cuál es la expresión que modela su altura?**

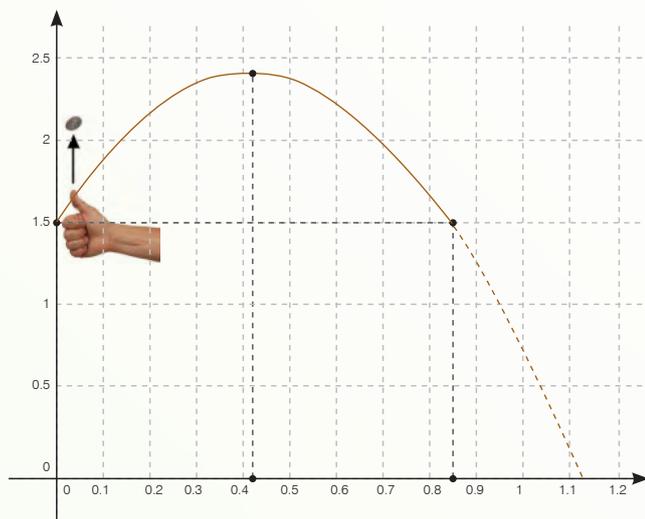
3. **Si la velocidad inicial con la que se patea el balón hacia arriba es de  $3.43$  m/seg, calcula lo que se te pide:**

- a) ¿Cuánto tiempo tarda el balón en volver al suelo?

- b) ¿Qué altura alcanza el balón?

- c) Comenta con tus compañeros de equipo qué operaciones hicieron para dar respuesta a los dos incisos anteriores y describe brevemente el proceso que mejor les haya parecido para llegar a las soluciones y comprobar que son las correctas.

Vamos ahora a analizar el caso de una moneda que es lanzada hacia arriba desde cierta altura  $h_0$  y cae en la mano de la persona que la lanzó, es decir, regresa al mismo nivel de altura de donde partió. En la **Figura 9.4** se representa ese lanzamiento y el modelo gráfico que indica las alturas de la moneda conforme pasa el tiempo.



4. **Identifica los valores que se señalan mediante los puntos visibles en la gráfica para que des respuesta a lo que sigue:**

- ¿Desde qué altura  $h_0$  se lanzó la moneda?
- ¿Cuánto tiempo tardó la moneda en regresar a su punto de partida?
- ¿A qué altura desde el piso llegó la moneda cuando alcanzó su punto más alto?
- ¿Cuánto subió la moneda desde su punto de lanzamiento?

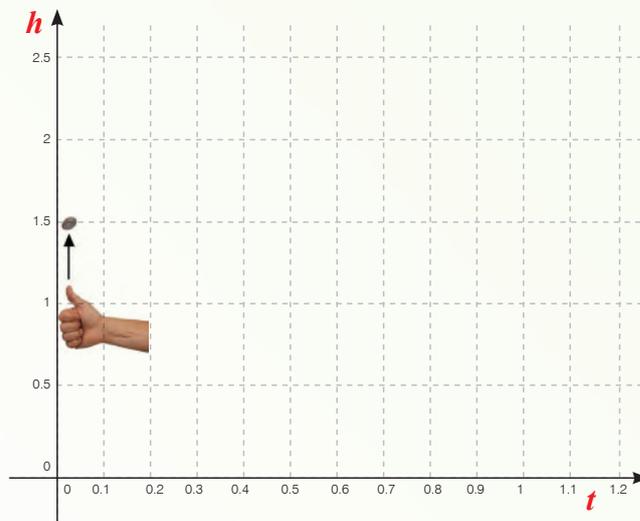
5. **¿Cuál es la expresión para  $h(t)$  en este caso?**

- Si tomas en cuenta que la moneda es lanzada con una velocidad inicial  $v_0 = 4.2 \text{ m/seg}$  desde la altura identificada en la gráfica, ¿qué tipo de ecuación resulta cuando sustituyes esos valores conocidos en la expresión funcional anterior?
- Efectúa las operaciones pertinentes en la ecuación cuadrática obtenida para que verifiques las respuestas que diste a los incisos b), c) y d) del punto 4.
- Describe las operaciones que realizaste para calcular el tiempo que tardó la moneda en regresar a su punto de lanzamiento.

6. **Calcula la velocidad cuando:**

- a) Alcanza su mayor altura
- b) Llega al nivel de su punto de partida. Explica lo que representa el signo que obtienes

7. **Repite lo que se te solicitó en los puntos 2 y 3 anteriores tomando en cuenta que la persona que lanza la moneda lo hace imprimiéndole una velocidad inicial de  $5 \text{ m/seg}$  desde una altura de  $1 \text{ m}$ . Con todos los datos, construye la gráfica de  $h(t)$  y señala los puntos que representan los valores calculados para ambas variables.**



*Las expresiones cuadráticas que utilizaste para responder a las situaciones planteadas se pueden expresar en términos generales como una ecuación con una variable de la forma  $ax^2 + bx = 0$ . En estos casos su solución se puede obtener llevando a cabo la factorización de la expresión con el fin de utilizar la propiedad del producto: “si  $m \times n = 0$ , entonces  $m = 0$  o  $n = 0$ ”.*

*En este caso:  $x(ax + b) = 0$ .*



Actividad: 4  
Actividad de Equipo



**Calcular y representar características del tiro vertical hacia arriba desde cierta altura inicial y que cae al suelo**

Como puedes observar, en la **Figura 9.5** se ilustra un lanzamiento con características similares al estudiado en la actividad anterior, pero en el que difieren los niveles de lanzamiento y de llegada. Es de esperarse que la ecuación en dos variables que representa la función  $h(t)$  con estas características bien determinadas, sea también ligeramente distinta. Desarrolla lo que se pide a continuación para que notes qué tipo de cálculos se requieren en este caso.

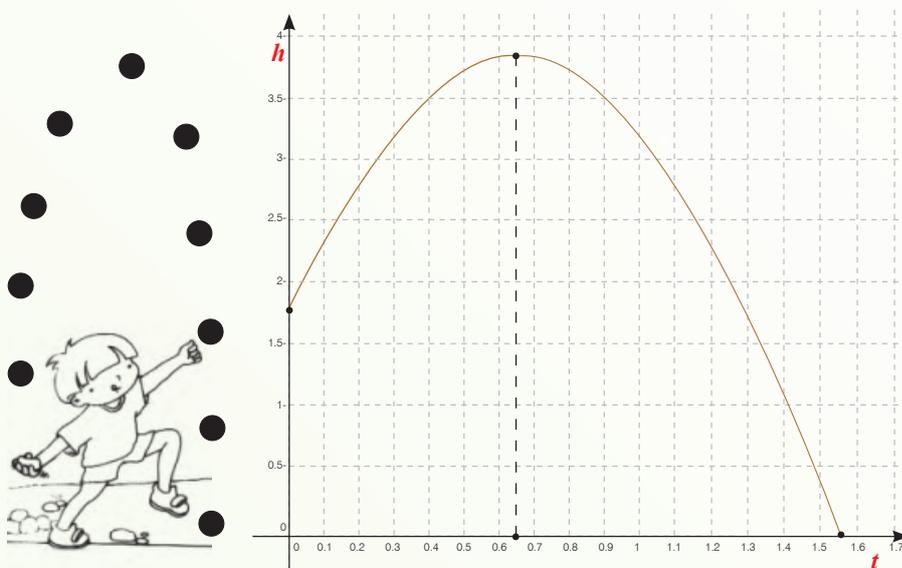


Figura 9.5: Tiro vertical hacia arriba con diferente nivel de llegada

1. **Identifica los valores que se señalan mediante los puntos visibles en la gráfica de la Figura 9.5 para que des respuesta a lo que sigue:**
  - a. ¿Desde qué altura  $h_0$  se lanzó el objeto?
  - b. ¿Cuánto tiempo estuvo el objeto en el aire?
  - c. ¿A qué altura desde el piso llegó el objeto cuando alcanzó su punto más alto?

2. **Selecciona las características que te permiten determinar la ecuación en dos variables que corresponde a la función  $h(t)$  que describe el lanzamiento del objeto de la Figura 9.5 que es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de  $6.5 \text{ m/seg}$ .**

- a) Escribe la ecuación correspondiente:
- b) Determina ahora la ecuación que te permite calcular el tiempo que el objeto permanece en el aire:
- c) ¿Puedes calcular el tiempo que el objeto estuvo en el aire mediante los procedimientos utilizados anteriormente? Explica:

*La ecuación cuadrática que acabas de establecer se puede expresar en términos generales como una ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  en la que los tres coeficientes,  $a$ ,  $b$  y  $c$  son diferentes de cero.*



Actividad Grupal



En este caso es necesario que recuerdes o revises de qué manera una expresión como la actual puede ser transformada algebraicamente para que su formato permita aplicar uno de los procedimientos utilizados anteriormente. **Por ejemplo**, escribir este trinomio como un producto de factores lineales y así usar la propiedad del producto: “**si  $m \times n = 0$ , entonces  $m = 0$  o  $n = 0$** ”, o bien “**completar el trinomio cuadrado perfecto**” para notar que en la expresión resultante es posible efectuar operaciones inversas para despejar.

- d) Verifica que la expresión que obtuviste en el inciso 2. a) puedes transformarla completando el trinomio cuadrado perfecto y expresarla como:

$$h = -4.9(t - 0.663)^2 + 3.856$$

- e) ¿Qué características de la gráfica de la función pueden identificarse directamente en la ecuación cuadrática expresada de esta manera?
- f) Usa esta expresión para que calcules el tiempo que el objeto estuvo en el aire. Verifica que coincide tu respuesta con la identificación del valor visible en la gráfica.



Actividad de Equipo



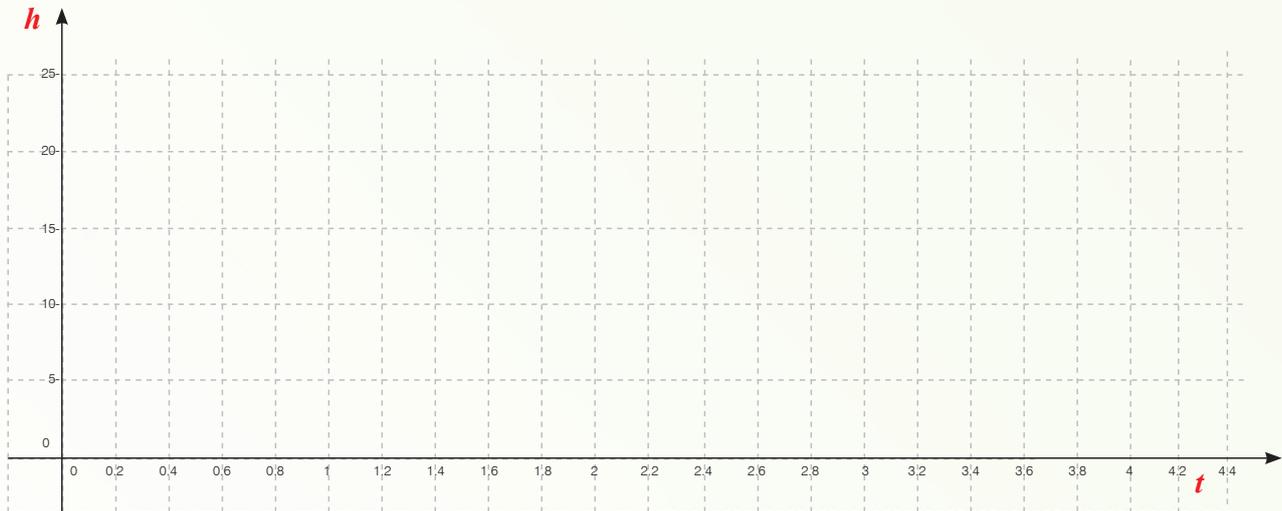
3. **La altura en metros de un objeto que ha sido lanzado verticalmente hacia arriba se modela mediante la expresión**

$$h = 4 + 20t - 4.9t^2$$

- a) ¿Qué características del movimiento puedes identificar en ella?
- b) Transforma la expresión completando el trinomio cuadrado perfecto y verifica que la relación entre  $h$  y  $t$  también se puede expresar aproximadamente como

$$h = -4.9(t - 2.04)^2 + 24.41$$

- c) ¿Qué características del movimiento puedes identificar en esta nueva expresión? Elabora la gráfica asociada a la expresión para visualizar tales características.



- d) Finalmente, verifica que la relación también puede expresarse aproximadamente con la forma factorizada

$$h = -4.9(t + 0.197)(t - 4.27)$$

- e) ¿Qué características del movimiento puedes identificar en esta nueva expresión? Identifica tales características en la gráfica elaborada en el inciso c).



## Actividad de Cierre



### Una generalización importante para resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

En los distintos casos del tiro vertical, lo que has hecho hasta ahora para encontrar el valor del tiempo  $t$  cuando  $h$ ,  $h_0$  y  $v_0$  han sido determinados, te ha conducido a establecer ecuaciones con una incógnita en las que siempre aparecen términos de grado dos y, posiblemente, términos de grado uno y de grado cero. A este tipo de ecuaciones las denominamos “**ecuaciones de segundo grado**” o “**ecuaciones cuadráticas**”.

*La forma general de una ecuación cuadrática con una incógnita se escribe:*

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Cuando la ecuación está escrita de esta forma, es decir, sin factores e igualada a cero, se le conoce como la “**forma desarrollada**” o “**estándar**” de la ecuación cuadrática. En una ecuación cuadrática se pueden distinguir tres términos:

**El término cuadrático  $ax^2$**

**El término lineal  $bx$**

**El término independiente  $c$**

Cuando  $b = 0$ , la ecuación se reduce a  $ax^2 + c = 0$ .

Cuando  $c = 0$  se reduce a una de la forma  $ax^2 + bx = 0$ .

En estos dos casos se dice que la ecuación es “**incompleta**”.

Cuando  $a$ ,  $b$  y  $c$  son distintos de cero se dice que la ecuación cuadrática es “**completa**”.

1. **¿Por qué en la expresión desarrollada de una ecuación cuadrática se requiere que  $a \neq 0$ ?**

Vamos ahora a examinar los procesos de solución de la **ecuación cuadrática completa** expresada en su forma general, pero en los casos que no admite una factorización directa y por ende es necesario utilizar el procedimiento de transformación para completar el trinomio cuadrado perfecto, y así obtener una ecuación equivalente cuya resolución requiere únicamente de operaciones inversas. Es decir, vamos a “**generalizar**” el proceso que llevaste a cabo para encontrar el tiempo en los casos particulares que se te presentaron en la *Actividad 4*.

2. **Dada la ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$**

Verifica que al completar el trinomio cuadrado perfecto su transformación queda expresada mediante la siguiente ecuación (El procedimiento es el mismo que utilizaste para responder las cuestiones 2 d) y 3 b) de la *Actividad 4*):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0, \text{ que a su vez es equivalente a: } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

3. **Verifica ahora que al despejar el valor de  $x$  de esta última expresión, se obtiene:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita expresadas en su forma desarrollada. Los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  corresponden a los coeficientes de los términos cuadrático, lineal e independiente respectivamente.*

- a) Utiliza la fórmula general para obtener el valor del tiempo en la expresión  $-4.9t^2 + 6.5t + 1.7 = 0$  que obtuviste en el punto 2-b) de la *Actividad 4*.
- b) Verifica que la fórmula también te sirve para calcular el tiempo en el caso de la caída libre o en el lanzamiento vertical con niveles de altura iguales para salida y llegada del objeto. Utilízala particularmente en:
- i. El punto 2 de la *Actividad 2*



ii. El punto 3 a) de la *Actividad 3*

iii. El punto 4 b) de la *Actividad 3*

Puedes darte cuenta que dependiendo de la forma de la ecuación puede resultar más **económico** despejar la variable  $x$  mediante operaciones inversas directas, como en el caso  $ax^2 + c = 0$ , o un método de factorización, como en los casos  $ax^2 + bx = 0$  (factor común) ó  $ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2 = 0$  (producto de binomios lineales cuando  $r_1r_2 \neq 0$ ), o por qué no, despejar la variable  $x$  después de completar un trinomio cuadrado perfecto y haber obtenido  $(x + h)^2 = k$ .



### Otras consideraciones sobre la relación funcional $y = ax^2 + bx + c$

Durante esta secuencia habrás notado que la expresión algebraica asociada a una función cuadrática puede tener diferentes

formas, y cada una de ellas puede resultar útil en situaciones específicas. Para finalizar, analizaremos las relaciones entre estas formas de expresión y la gráfica asociada.

#### 1. La expresión algebraica asociada a la gráfica de la Figura 9.6

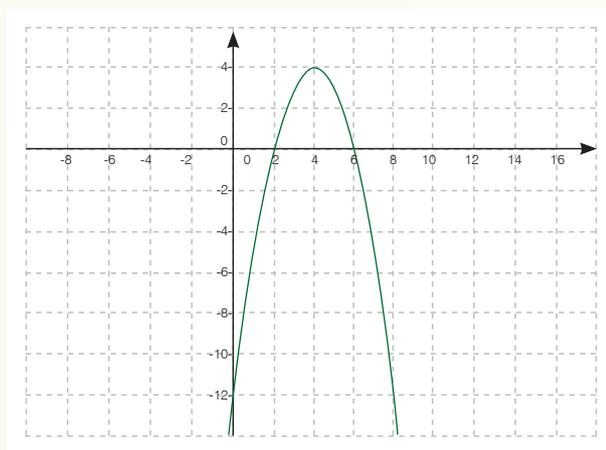


Figura 9.6

Puede escribirse como:

$$f(x) = -(x - 2)(x - 6) \quad f(x) = -(x - 4)^2 + 4 \quad \text{ó} \quad f(x) = -x^2 + 8x - 12$$

a. Comprueba la equivalencia algebraica de las expresiones anteriores.

b. ¿Cuáles valores numéricos de cada una de las expresiones algebraicas puedes asociar con alguna característica de la gráfica? ¿Cómo explicas estas correspondencias?

2. Repite la actividad anterior considerando las expresiones

$$f(x) = (x + 1)(x - 3) \quad f(x) = (x - 1)^2 - 4 \quad \text{ó} \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Asociadas a la gráfica de la **Figura 9.7**

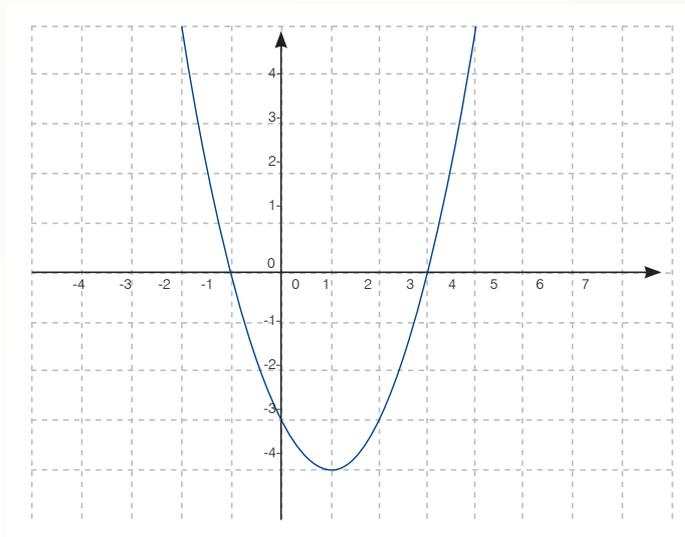


Figura 9.7

Una función cuadrática puede representarse algebraicamente de diferentes formas como las siguientes:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

La representación gráfica asociada es una parábola cuyas características pueden asociarse con ciertos elementos de su representación algebraica, como se muestra en la **Figura 9.8**.

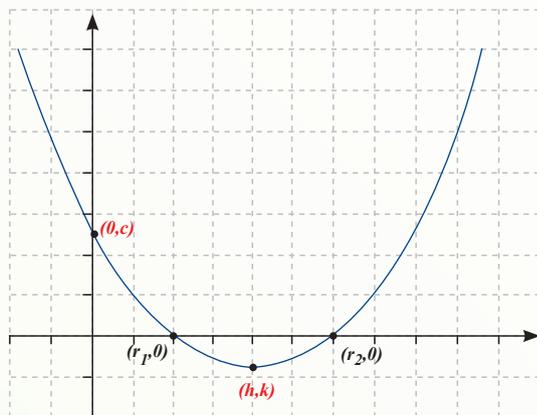


Figura 9.8

El punto de intersección de la parábola con el eje  $y$  puede obtenerse asignando el valor de cero a la variable  $x$ . Si utilizamos la expresión  $f(x) = ax^2 + bx + c$  obtenemos lo siguiente:

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$$

Por lo que el punto  $(0, c)$  es el punto de corte buscado. El punto de intersección de la parábola con el eje  $x$  puede obtenerse considerando  $f(x) = 0$ . Si sustituimos  $x$  por  $r_1$ , y luego por  $r_2$ , en la expresión  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$  observamos lo siguiente:

$$f(r_1) = a((r_1) - r_1)((r_1) - r_2) = a(0)(r_1 - r_2) = 0$$

$$f(r_2) = a((r_2) - r_1)((r_2) - r_2) = a(r_2 - r_1)(0) = 0$$

Es decir,  $r_1$  y  $r_2$  son soluciones de la ecuación cuadrática  $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$  y representan los puntos de intersección de la parábola con el eje  $x$ .

Por otra parte, si utilizamos la expresión  $f(x) = a(x - h)^2 + k$  y sustituimos  $x = h$  obtenemos lo siguiente:

$$f(h) = a((h) - h)^2 + k = a(0)^2 + k = k$$

Por lo que verificamos que el punto  $(h, k)$  es un punto de la parábola que corresponde a su vértice. Notemos que la parábola puede abrir hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo del parámetro  $a$  en cualquiera de las expresiones analizadas.

Si el parámetro  $a$  es positivo, la parábola asociada abre hacia arriba y decimos que es cóncava hacia arriba.

Si el parámetro  $a$  es negativo, la parábola asociada abre hacia abajo y decimos que es cóncava hacia abajo.

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Cultivo de Chiltepín Sonorense



Actividad: ↓  
Actividad Individual



Los chiles son especies vegetales presentes en la cultura e identidad del pueblo mexicano. En particular, el **chiltepín**, especie silvestre de la sierra de Sonora, ocupa un lugar significativo en la cultura de los sonorenses y su recolección es una actividad económica redituable, de modo que algunos lo llaman “oro rojo”. ¿Sabes cuánto cuesta? Investiga el precio de venta de un kilo de **chiltepín** sonorense en tu comunidad.

Algunos estudios revelaron que el rendimiento de una planta de chiltepín depende, en cierta medida, de la altura que alcanza y de la cobertura, es decir, del número de plantas por unidad de área, pudiendo variar desde los 20 a los 130 gramos de fruto seco, aproximadamente.

Aunque es una especie silvestre, existen algunas iniciativas para su cultivo controlado. Se recomienda sembrar las plantas en surcos separados por dos metros, considerando una distancia de un metro entre las plantas de cada surco.



Chiltepín Sonorense

1. ¿Qué área se necesita aproximadamente para sembrar 2500 plantas, siguiendo esta recomendación?
2. ¿Cuántos kilos se podrían cosechar?
3. ¿Cuál sería su valor comercial?

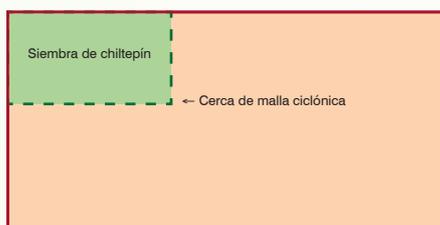


## Desarrollo



Un proyecto para cultivar chiltepín contempla una fase piloto en la que se va a aprovechar una parte de un terreno campestre de forma rectangular para sembrar plantas de chiltepín. Para proteger el sembradío se colocará una cerca de malla ciclónica a su alrededor. Como el

terreno completo, tiene barda de material, sólo se necesitará construir una cerca en dos de los lados del terreno sembrado, tal como se muestra en el siguiente esquema:



Se quiere sembrar un área de  $5000 \text{ m}^2$  y se dispone de material suficiente para una cerca de  $200 \text{ m}$  de longitud. Para determinar el ancho y largo del área que se puede reservar utilizando todo el material, podemos seguir la siguiente estrategia:

1. Si llamamos  $x$  al ancho, y  $y$  al largo, traduce en ecuaciones las siguientes afirmaciones:

- El área es  $5000 \text{ m}^2$ :
- La longitud de la cerca es de  $200 \text{ m}$ :

Por lo anterior, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. **¿Es lineal o no? ¿Por qué?**

2. Para resolver el sistema anterior, utiliza un método de sustitución o de igualación, hasta obtener una ecuación con una incógnita.

### ¿Qué tipo de ecuación es?

3. Transforma tu ecuación en una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$  y resuélvela por el método que más te convenga.

### ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación?

Interpreta las soluciones y elabora un croquis con las medidas del terreno a cercar.

4. Si se atiende la recomendación sobre la distribución de los surcos, **¿cuántas plantas pueden sembrarse en esa área?**





Uno de los socios del proyecto de la siembra de chiltepín hizo la observación de que podían ahorrarse mucho material de la cerca, si cambiaban el ancho y largo del terreno rectangular a sembrar, y aseguró que podían reservar la misma área con una cerca de  $100\sqrt{2} \text{ m}$  (aproximadamente  $141.42 \text{ m}$ ) de longitud.

1. Encuentra las dimensiones de la superficie a cercar utilizando el esquema de la actividad anterior.

Escribe la ecuación de segundo grado asociada. Utiliza el valor exacto  $100\sqrt{2}$  para plantear la ecuación.

**¿Cuántas soluciones tiene?**

Interpreta las soluciones y elabora un croquis con las medidas del terreno a cercar.

2. Si se atiende la recomendación sobre la distribución de los surcos, **¿cuántas plantas pueden sembrarse en esa área?**

**¿Cuál de las opciones resulta más conveniente?**



Actividad: 4  
Actividad de Equipo



Otro de los socios se planteó la posibilidad de ahorrar aún más, reduciendo a **120 m** la longitud de la cerca. En su estrategia de análisis descubrió la ecuación cuadrática  $x^2 - 120x + 5000 = 0$ .

1. **Resuelve la ecuación e interpreta tus hallazgos.**



Actividad: 5  
Actividad de Equipo



Después de discutir un rato, se propuso que, en lugar de ahorrar material de la cerca, el cual ya se había comprado, se aumentara el área de la siembra. ¿Será posible cercar **6 000 m<sup>2</sup>** con el material disponible? ¿Y **7 000**? ¿Y **10 000**? ¿Y **12 000**? ¿Y **15 000**?

1. **Para dar respuesta a las interrogantes anteriores organiza la información en la siguiente tabla:** (Recuerda que en todos los casos la cerca será de **200 m**).

Área en m <sup>2</sup>	Ecuación Cuadrática	Soluciones	Ancho	Largo
6000				
7000				
10 000				
12 000				
15 000				



## Actividad de Cierre



A lo largo de las *Actividades* de esta **Secuencia**, se presentaron situaciones que pudieron modelarse con una ecuación cuadrática de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$ . Concluiremos la **Secuencia** con un análisis sobre la naturaleza de las soluciones

encontradas en los diferentes casos y su relación con los métodos de resolución, en particular con el de la fórmula general.

1. **¿Cuántas soluciones encontraste para la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  en cada caso?** Explica detalladamente.
2. **¿Cuántos métodos para resolver este tipo de ecuaciones conoces al momento?** Enlístalos.

De todos los métodos conocidos, el de la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Proporciona explícitamente las soluciones de una ecuación cuadrática.

3. **Escribe las soluciones por separado.**

$$x^1 =$$

$$x^2 =$$

La expresión que se encuentra dentro del radical es conocida como **discriminante**. Su valor nos proporciona información relevante sobre el tipo de soluciones de la ecuación.

4. Para aclarar la afirmación anterior, completa la columna “Tipos de soluciones” de la siguiente tabla, utilizando en cada caso una de las siguientes expresiones:

- Dos soluciones reales distintas.
- Dos soluciones reales iguales.
- Dos soluciones no reales.

Explica en cada caso, el por qué de tu elección.

Discriminante	Tipos de soluciones	¿Por qué?
$b^2 - 4ac < 0$		
$b^2 - 4ac > 0$		
$b^2 - 4ac = 0$		



**En los números reales no es posible obtener la raíz cuadrada de un número negativo**, es decir, **una expresión como  $\sqrt{-5}$  no representa un número real**. Sin embargo, existen situaciones en las que manejar tales expresiones como números, resultan de especial utilidad. Por tal motivo se ha definido como número la expresión  $\sqrt{-1}$ , llamándolo unidad imaginaria, y denotándolo comúnmente como  $i$ . De tal modo que cobra sentido, el manejo de números como los siguientes:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5} \sqrt{-1} = \sqrt{5}i \quad \sqrt{-9} = \sqrt{9} \sqrt{-1} = 3i$$

5. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones. Utiliza la unidad imaginaria  $i$  cuando aparezcan raíces cuadradas de números negativos.

a)  $x^2 + 8x + 16 = 0$

b)  $2x^2 - 7x - 15 = 0$

c)  $x^2 + x + 1 = 0$

6. Encuentra el o los valores de  $c$ , de modo que la ecuación  $x^2 - 4x + c = 0$  tenga ...

a) Dos soluciones reales iguales.

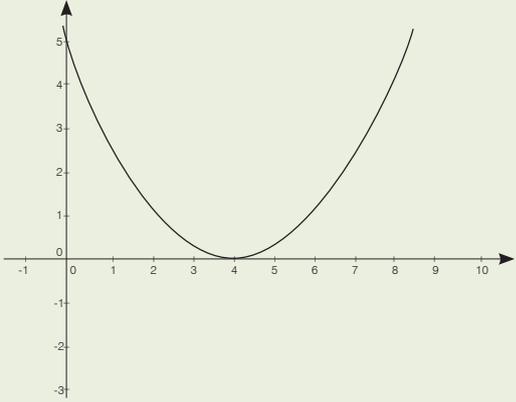
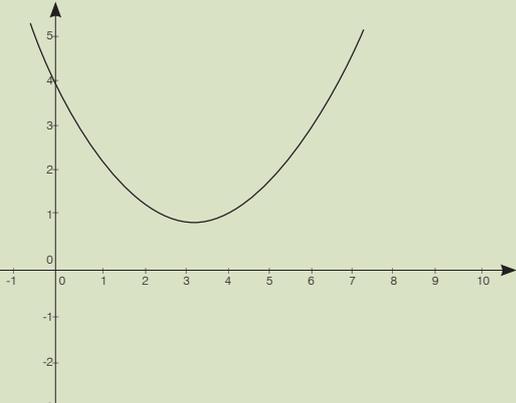
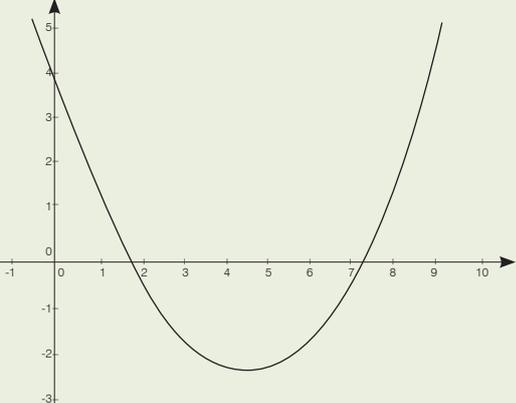
b) Dos soluciones reales distintas.

c) Dos soluciones no reales.

En la sección de desarrollo de la secuencia anterior se estableció que las soluciones de la ecuación cuadrática  $a(x - r_1)(x - r_2) = 0$ , la cual podría expresarse de manera general como  $ax^2 + bx + c = 0$ , representan los puntos de intersección de la gráfica de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con el eje  $x$ . Además, en el **BLOQUE 9** se determinó que los tipos de solución de una ecuación cuadrática con una incógnita pueden ser:

- i. Dos soluciones reales distintas
- ii. Dos soluciones reales iguales
- iii. Dos soluciones no reales.

Completa la siguiente tabla. No olvides incluir una justificación para tu elección.

Gráfica	Tipo de solución de la ecuación cuadrática con una incógnita	Justificación
		
		
		

# Secuencia Didáctica 3.-



## Actividad de Inicio

### Arcos en Arquitectura e Ingeniería



Los arcos son elementos sencillos que se utilizan en la construcción de estructuras desde la antigüedad. **Para su diseño se empleaban métodos empíricos geométricos**, tomando como base una capacidad mayor a la necesaria en las estructuras de soporte.

Estos métodos constructivos carecían de fundamento científico, hasta el primer tercio del siglo XIX cuando el surgimiento de nuevas teorías aclaró en gran medida el uso del arco, su trabajo, su funcionamiento y las causas de su desplome. Posteriormente, el empleo de nuevos materiales constructivos, como el hierro, el acero y el hormigón armado, permitió la construcción de arcos de gran tamaño, articulando principios de las áreas de arquitectura e ingeniería.

Existen distintos tipos de arco según su forma.

En esta sección nos ocuparemos de los arcos parabólicos, que se basan en la conocida curva que estamos estudiando en este bloque.

1. Observa los diferentes arcos que se muestran a continuación e identifica los de tipo parabólico. Organiza la información en la tabla proporcionada y señala las características que detectas en los arcos que te ayudan a hacer tal clasificación.



Almacenes del Ramesseum construidos con arcos de adobe, en el Antiguo Egipto.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Las imágenes de esta secuencia fueron tomadas de internet y cuentan con licencia de documentación libre.



Casa Milá. Gaudí. España



Ruinas de la abadía de Bolton (siglo XII) en el condado de North Yorkshire, Inglaterra



Puente de Requejo - Zamora. España.



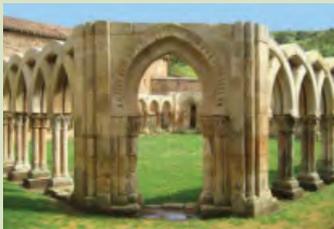
Puente del Milenio, Londres.



Arco de Constantino. Italia.



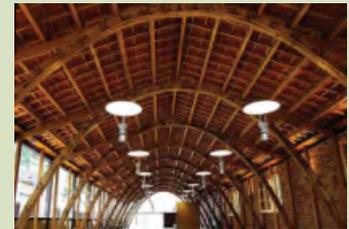
Casa Batlló. España.



Monasterio de San Juan de Duero. Soria. España.



Almacenes del Ramesseum construidos con arcos de adobe, en el Antiguo Egipto



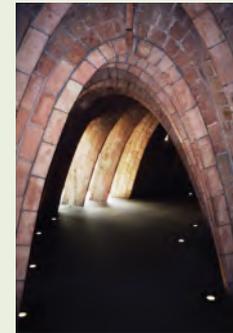
La Nau Gaudí, Mataró, Barcelona, España (2008).



Colegio de Santa Teresa. España.



Catedral de Bilbao. España.



Arcos bajo la cubierta de la Casa Milá (o La Pedrera) en Barcelona, España. Diseño de Antonio Gaudí



El Arco del Triunfo de París



Puente en Córcega.

Arcos parabólicos		Arcos no parabólicos	
Nombre	Características	Nombre	Características

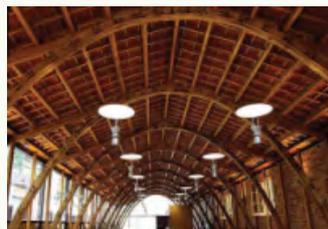


## Desarrollo



El **arquitecto Antoni Gaudí** desarrolló el proyecto del espacio polivalente **“la Nau Gaudí”** de 1878 a 1882. **Gaudí** proyectó una estructura portante<sup>2</sup> en forma de arco parabólico. Esta sección estructural repetida en seis tramos

y posteriormente ampliada a doce, define y ocupa el magnífico espacio de esta nave, de tal manera que la estructura portante pasa a ser la protagonista de su arquitectura. Este proyecto de Gaudí se considera muy importante dentro de la evolución de su obra, dada su magnitud y la importancia que tienen los temas puramente constructivos en el proyecto.



La Nau Gaudí, Mataró, Barcelona, España (2008).

<sup>2</sup> La que sostiene

En la **Figura 9.9** se reproduce la proyección en el plano cartesiano de las parábolas que constituyen la estructura de **la Nau Gaudí**. Asocia las siguientes expresiones algebraicas con las gráficas presentadas y completa la tabla que se incluye.

$$-0.21(x + 4.33)(x - 4.33)$$

$$-0.28x^2 + 3.20$$

$$-0.28(x + 3.38)(x - 3.38)$$

$$-0.53x^2 + 1.59$$

$$-0.16(x + 5.69)(x - 5.69)$$

$$-0.4x^2 + 2.28$$

$$-0.4(x + 2.39)(x - 2.39)$$

$$-0.16x^2 + 5.18$$

$$-0.53(x + 1.73)(x - 1.73)$$

$$-0.21x^2 + 3.94$$

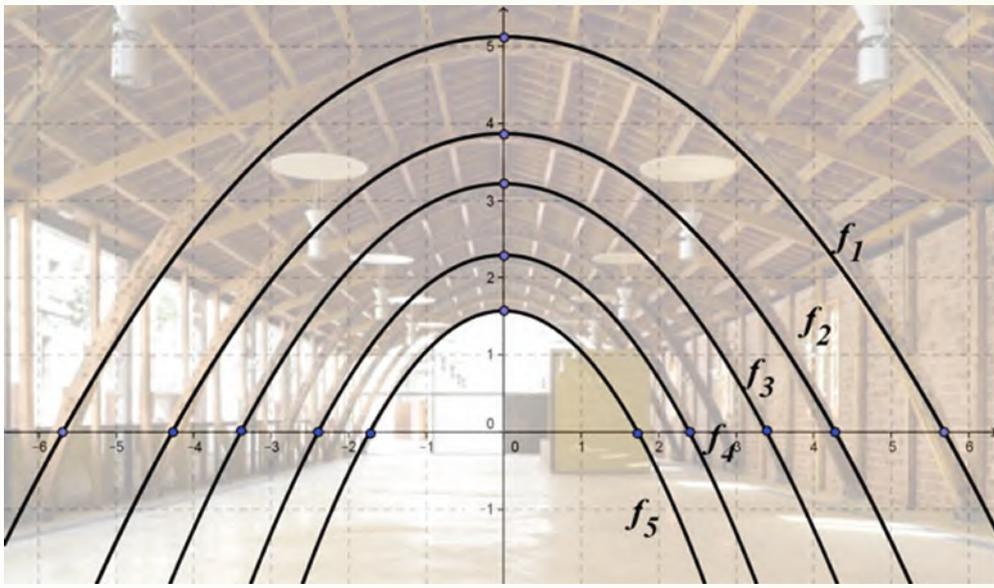
Gráficas	Expresiones Algebraicas a. Factorizada b. Desarrollada
	a. $f_1(x) =$ b. $f_1(x) =$
	a. $f_2(x) =$ b. $f_2(x) =$
	a. $f_3(x) =$ b. $f_3(x) =$
	a. $f_4(x) =$ b. $f_4(x) =$
	a. $f_5(x) =$ b. $f_5(x) =$

Figura 9.9

Observa las parábolas en el plano anterior.

- ¿Qué tienen en común?
- ¿Qué las hace diferentes?

Observa las expresiones algebraicas asociadas.

- ¿Qué tienen en común?
- ¿Qué las hace diferentes?

Escribe las características de las gráficas y las expresiones algebraicas que te ayudaron a hacer la asociación.



Actividad: 3  
Actividad de Equipo



**El Colegio Teresiano o Colegio de las Teresianas**, localizado en Barcelona, España, es también una obra del **arquitecto Antoni Gaudí**. Fue concebido por San Enrique de Ossó para alojar un colegio y el convento de la Congregación de Religiosas Teresianas, que él mismo había fundado.

Tanto en el interior, como en el exterior de la construcción, **Gaudí utilizó arcos parabólicos**. Estos arcos de líneas elegantes no son meramente decorativos, sino que tienen la función de sostener el techo y la planta superior. **Gaudí utilizó el arco en parábola** como elemento constructivo idóneo, capaz de aguantar pesos elevados mediante perfiles poco gruesos.



Ventanas con arcos parabólicos de la fachada trasera

En 1969, el Colegio Teresiano fue declarado monumento histórico-artístico de interés nacional.

- En el **Figura 9.10** se presenta un plano cartesiano en el cual se ha graficado, de manera aproximada, la parábola correspondiente a la ventana central. Bosqueja las otras dos parábolas a los lados de ella y asocia las expresiones algebraicas correspondientes.

$$-6(x - 2.3)^2$$

$$-6(x + 2.3)^2$$

Graficas	Expresiones Algebraicas
	$f_1(x) = -6x^2$
	$f_2(x) =$
	$f_3(x)$

Figura 9.10



2. Observa las parábolas que construiste en el plano anterior.
  - a) ¿Qué tienen en común?
  - b) ¿Qué las hace diferentes?
  
3. Observa las expresiones algebraicas asociadas.
  - a) ¿Qué tienen en común?
  - b) ¿Qué las hace diferentes?
  
4. Compara ahora el coeficiente del término cuadrático de las expresiones básicas dadas en las dos actividades previas (Actividad 2 y Actividad 3). **¿Qué papel juega este coeficiente en relación con la gráfica correspondiente?**



## Actividad de Cierre



Actividad: 4  
Actividad Grupal



Para finalizar esta **Secuencia**, analizaremos el papel de los parámetros en una función cuadrática de la forma  $f(x) = a(x - h)^2 + k$ .

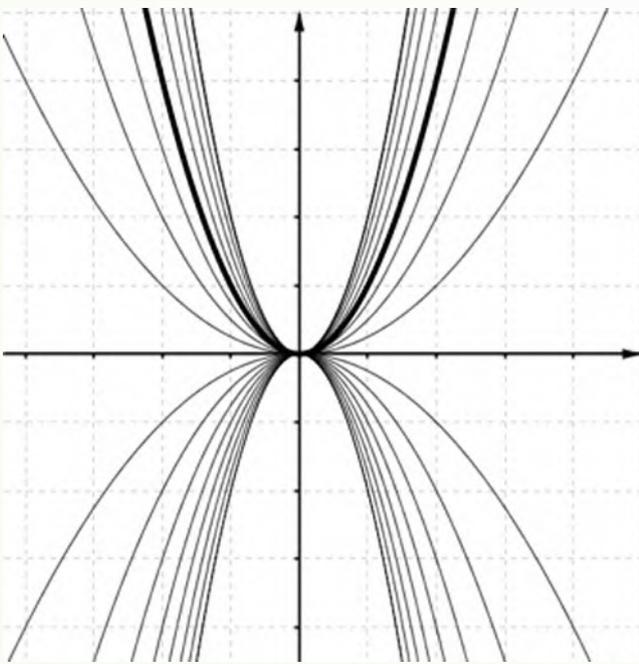
Recordemos que la gráfica asociada es una parábola con vértice en  $(h, k)$  cuya concavidad depende del parámetro  $a$ . A continuación estudiaremos el efecto de variar cada uno de los parámetros  $a$ ,  $h$  y  $k$ , por separado.

1. **Parámetro  $a$ .**

Para analizar el efecto del parámetro  $a$ , fijaremos  $k=0$  y  $h=0$ , con lo cual obtendremos una expresión como la siguiente:

$$f(x) = ax^2$$

Si asignamos diferentes valores para  $a$ , obtendremos gráficas como las de la **Figura 9.11**. Escribe en la tabla contigua las expresiones correspondientes a algunas de ellas, si la escala en los ejes es de una unidad. Allí se ha incluido la expresión algebraica correspondiente a la gráfica resaltada.

Gráficas	Expresiones algebraicas
 <p data-bbox="422 1287 518 1308">Figura 9.11</p>	$f(x) = x^2$

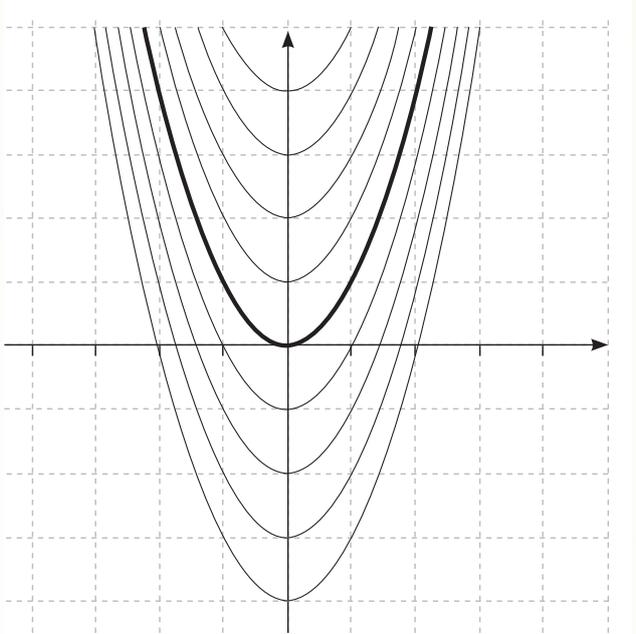
- a) ¿Qué características tienen en común las gráficas mostradas? ¿Qué las hace diferentes?
- b) ¿Qué características tienen las gráficas si el valor de  $a$  es positivo?
- c) ¿Cómo cambia la gráfica si aumentamos el valor de  $a$ , siendo  $a$  positivo?
- d) ¿Cómo cambia la gráfica si disminuimos el valor de  $a$ , siendo  $a$  positivo?
- e) ¿Qué características tienen las gráficas si el valor de  $a$  es negativo?

### 3. Parámetro $k$ .

Para analizar el efecto del parámetro  $k$ , fijaremos  $a = 1$  y  $h = 0$ , con lo cual obtendremos una expresión como la siguiente:

$$f(x) = x^2 + k$$

Si asignamos diferentes valores para  $k$ , obtendremos gráficas como las de la **Figura 9.12**. Escribe en la tabla contigua las expresiones correspondientes a algunas de ellas, si la escala en los ejes es de una unidad. Allí se ha incluido la expresión algebraica correspondiente a la gráfica resaltada.

Gráficas	Expresiones algebraicas
 <p data-bbox="440 1279 539 1304">Figura 9.12</p>	$f(x) = x^2$

- ¿Qué características tienen en común las gráficas mostradas? ¿Qué las hace diferentes?
- ¿Qué características tienen las gráficas si el valor de  $k$  es positivo?
- ¿Qué características tienen las gráficas si el valor de  $k$  es negativo?
- ¿Cómo cambia la gráfica si aumentamos el valor de  $k$ ?
- ¿Cómo cambia la gráfica si disminuimos el valor de  $k$ ?





1. Relaciona las columnas tomando en cuenta que los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los coeficientes de las ecuaciones cuadráticas cuando están expresadas en su forma desarrollada:

1.	$x^2 = 3x - 1$	$a = 1, b = -3, c = 1$	( )
2.	$2(w^2 - 2w) = 5$	$a = 2, b = -4, c = -5$	( )
3.	$z(z - 1) = 3$	$a = 1, b = -1, c = -3$	( )
4.	$5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$	$a = 5, b = 1, c = -1$	( )

2. Selecciona, para cada ecuación, el inciso que contiene sus soluciones:

( ) $6x^2 + 7x - 3 = 0$			
(a)	(b)	(c)	(d)
$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{3}{2}$	$x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \frac{3}{2}$	$x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = 3$	$x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = -3$
( ) $x(10x - 1) = 2$			
(a)	(b)	(c)	(d)
$x_1 = 0, x_2 = 0.1$	$x_1 = 2, x_2 = 0.3$	$x_1 = 0.5, x_2 = -0.4$	$x_1 = -0.5, x_2 = 0.4$
( ) $4x^2 + 3x - 27 = 0$			
(a)	(b)	(c)	(d)
$x_1 = 4.5$ $x_2 = -1.5$	$x_1 = -4.5$ $x_2 = 1.5$	$x_1 = -2.25$ $x_2 = 3$	$x_1 = 2.25$ $x_2 = -3$
( ) $15x^2 - 26x - 21 = 0$			
(a)	(b)	(c)	(d)
$x_1 = \frac{7}{3}$ $x_2 = -\frac{3}{5}$	$x_1 = -\frac{7}{3}$ $x_2 = \frac{3}{5}$	$x_1 = \frac{7}{15}$ $x_2 = -3$	$x_1 = -\frac{7}{15}$ $x_2 = 3$
( ) $21x^2 - 12x + 1 = 0$			
(a)	(b)	(c)	(d)
$x_1 = 0.074$ $x_2 = 0.645$	$x_1 = 0.101$ $x_2 = 0.470$	$x_1 = -0.645$ $x_2 = 0.074$	$x_1 = -0.470$ $x_2 = 0.101$



3. Analiza las funciones siguientes. Elabora tablas de valores y gráficas. Determina qué tienen en común y cuáles son sus diferencias.

a)  $f(x) = (x + 4)(x - 2)$     b)  $f(x) = (x + 1)^2 - 9$     c)  $f(x) = x^2 + 2x - 8$

4. Las tablas siguientes muestran parejas de valores  $(x,y)$  que corresponden a una función cuadrática.

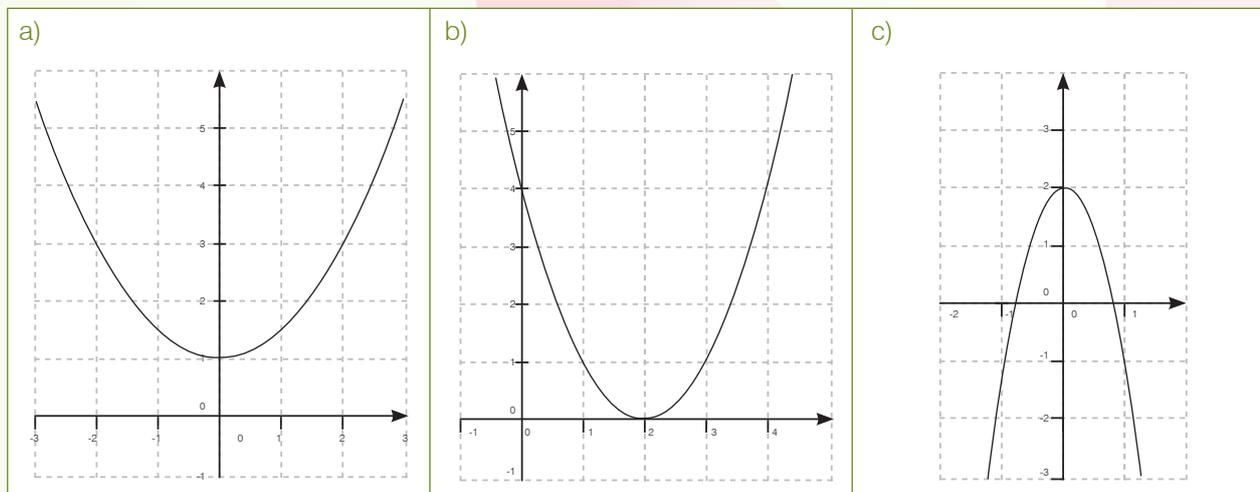
- Determina los valores faltantes
- Determina la expresión algebraica asociada a cada tabla.

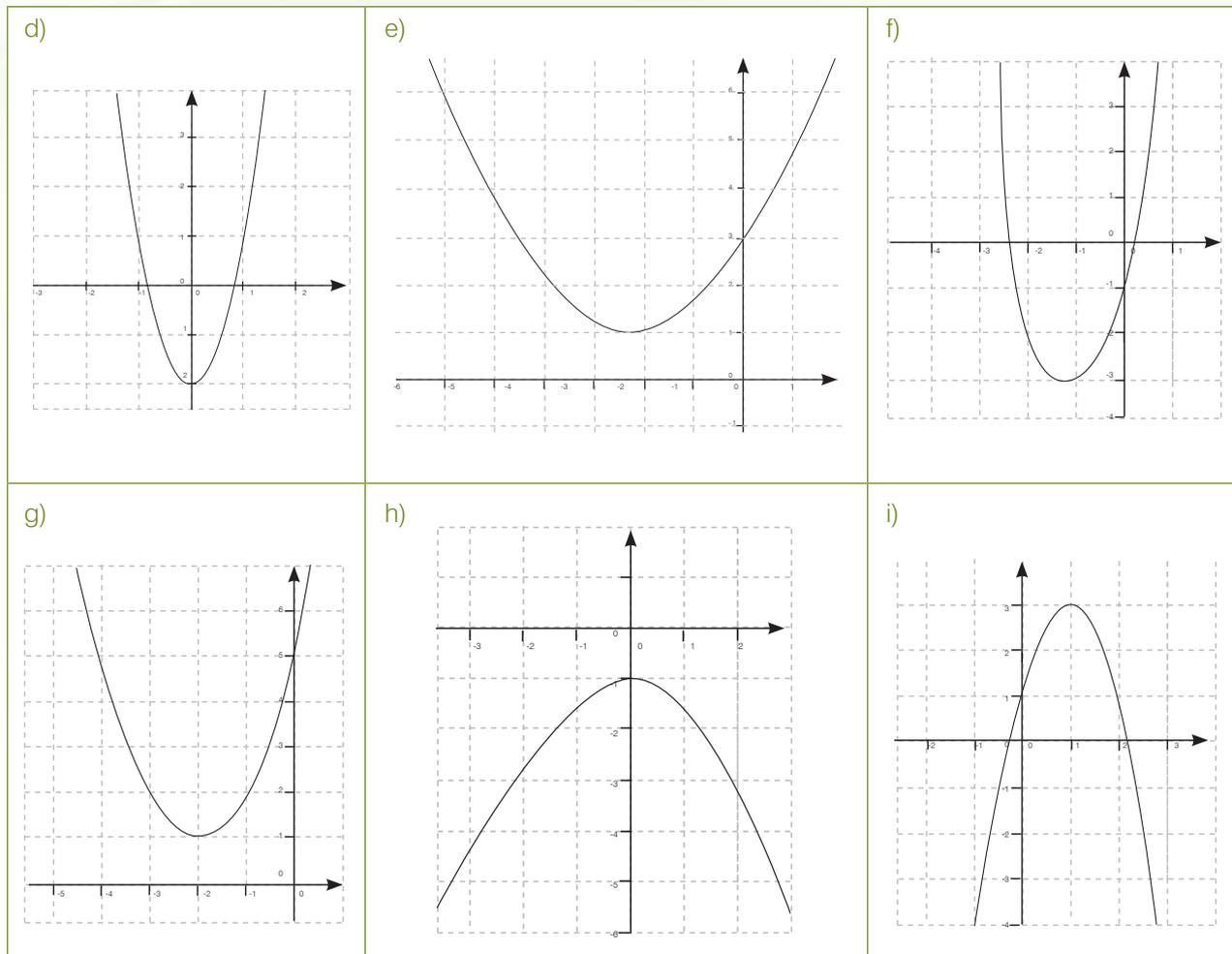
$x$	3	4	5		7		
$y$	11	6	3		3		

$x$	-11	-10	-9		-7		
$y$	-14	-9	-6		-6		

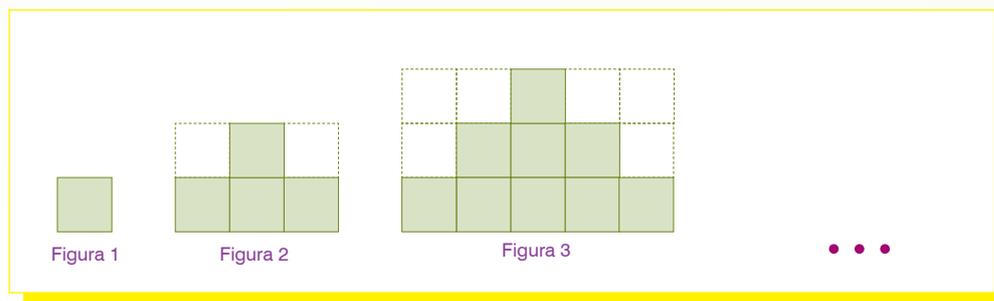
5. A continuación se expresan diversas funciones cuadráticas mediante sus formas algebraica y gráfica. Relaciona las expresiones algebraicas de cada función con la gráfica que le corresponde escribiendo en el paréntesis la letra que la identifica.

$y = -3x^2 + 2$	( )	$y = 3x^2 - 2$	( )	$y = (x - 2)^2$	( )
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$	( )	$y = 2(x + 1)^2 - 3$	( )	$y = (x + 2)^2 + 1$	( )
$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$	( )	$y = -2(x - 1)^2 + 3$	( )	$y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 1$	( )



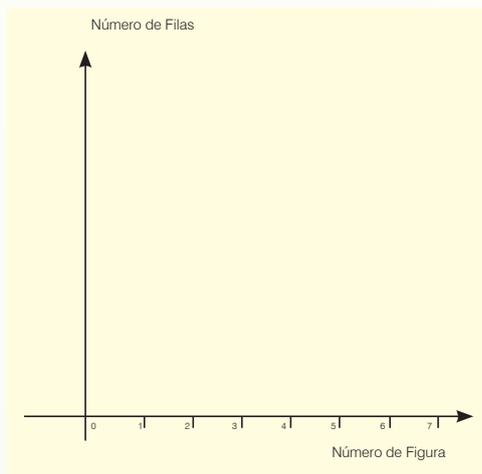


6. A continuación se muestran los primeros términos de una sucesión de figuras hechas con palillos. Las líneas punteadas indican el lugar de los palillos que se pueden colocar para formar el menor número de cuadrillos que completen un rectángulo que contenga cada una de esas figuras. Observa con cuidado y en cada inciso elabora una tabla, una gráfica y una expresión algebraica que relacione el número de la figura con la cantidad seleccionada. Utiliza  $x$  para el número de figura y  $y$  para la cantidad que cambia.



a) Número de *cuadritos* que forman todo el rectángulo en cada figura.

<i>x</i>									
<i>y</i>									

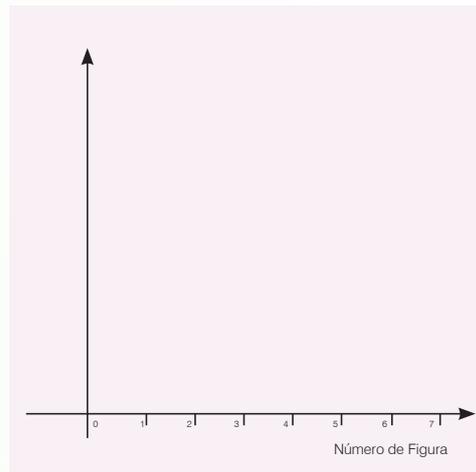


Expresión algebraica:

\_\_\_\_\_

b) Número de *cuadritos* en cada figura original (sin las líneas punteadas).

<i>x</i>									
<i>y</i>									

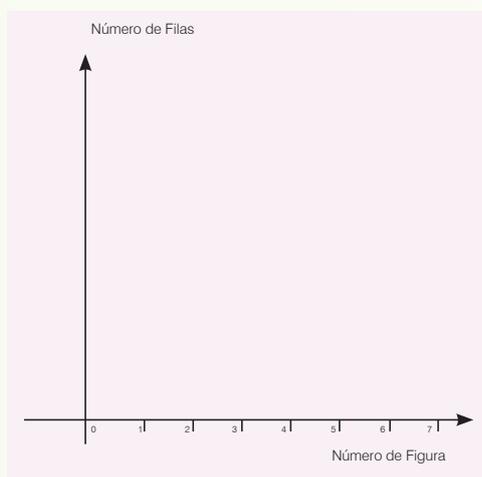


Expresión algebraica:

\_\_\_\_\_

c) Número de *cuadritos* necesarios para completar el rectángulo.

<i>x</i>									
<i>y</i>									

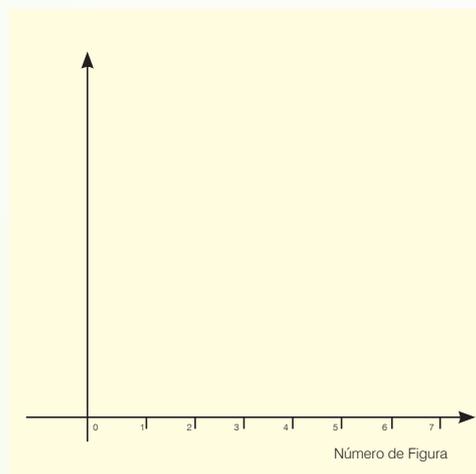


Expresión algebraica:

\_\_\_\_\_

d) Número de *palillos* de dientes necesarios para reproducir cada figura original de la sucesión.

<i>x</i>									
<i>y</i>									



Expresión algebraica:

\_\_\_\_\_

- e. Identifica cuáles de las relaciones anteriores son lineales y cuáles son cuadráticas. **¿Qué diferencias observas entre ellas que te permiten realizar tal clasificación?** Justifica tu respuesta considerando la gráfica, la tabla y la expresión algebraica.

7. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos se calculan mediante la función  $I(z) = 1000z - 2z^2$ . En esta expresión,  $z$  representa la cantidad de pares de zapatos que fabrica cada mes.

Bosqueja la gráfica de la función y responde:

- a) ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?
- b) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican **125 pares de zapatos?** ¿y **375 pares?**
8. Una pieza rectangular es **4 cm** más larga que ancha. Con ella se construye una caja sin tapa de **480 cm<sup>3</sup>** de capacidad cortando un cuadrado de **6 cm** de lado en cada esquina y doblando los bordes. Calcula las dimensiones de la caja.
9. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.

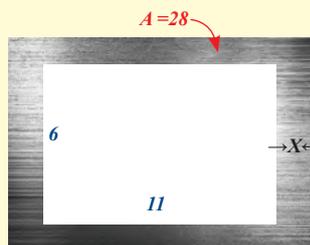


10. Un ranchero quiere convertir una parte del terreno de su propiedad en un pastizal de **60 hectáreas** dividido en tres potreros rectangulares contiguos. Cuenta con una cerca de **4400 m de longitud** para delimitar el pastizal y cada potrero. ¿Qué medidas deberá tener el pastizal para que al cercarlo se utilice toda la cerca? Un posible croquis es el que se muestra:



11. Una empresa fabricará marcos de acero como parte de la nueva producción que está por lanzar al mercado. El proceso de fabricación inicia cortando piezas de acero de acuerdo a las siguientes especificaciones:

- El área final del marco debe ser de **28 cm<sup>2</sup>** para mantener el costo previsto.
- El interior del marco tiene que ser **11 cm** por **6 cm**.



¿Qué ancho deberá tener el marco para cumplir con las especificaciones?

12. Determina el valor o valores de  **$c$**  para que la ecuación  **$5x^2 - 4x + c = 0$**  tenga dos soluciones no reales.
13. Determina el valor o valores de  **$a$**  para que la ecuación  **$ax^2 - 4x + 1 = 0$**  tenga dos soluciones reales distintas.

14. Determina el valor o valores de  $b$  para que la ecuación  $3x^2 + bx + 48 = 0$  tenga dos soluciones reales iguales.

15. En una conexión de dos resistencias en paralelo con una tres ohm más que la otra, encontrar la resistencia total de la conexión si se sabe que la Ley de Ohm establece para esta clase de conexiones que  $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$  donde  $R_T$  representa la resistencia total de la conexión y  $R_K$  cada una de las resistencias en paralelo.

16. En una isla se introdujeron **112 iguanas**. Al principio se reprodujeron rápidamente, pero los recursos de la isla comenzaron a escasear y la población decreció hasta extinguirse. Si el número de iguanas a los  $t$  años de haberlas dejado en la isla está dado por:

$$I(t) = t^2 + 22t + 112 \quad (t > 0)$$

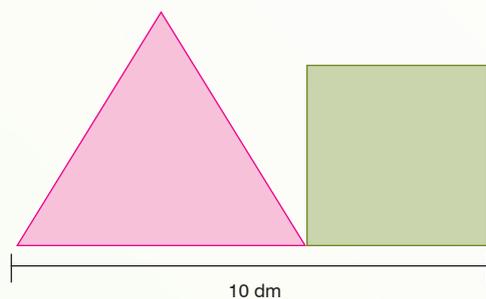
Calcula:

- Los años que la población de iguanas se mantuvo en aumento.
- El mayor número de iguanas que llegó a tener su población.
- El valor de  $t$  en el que la población de iguanas empieza a decrecer.
- Cuánto tiempo duró la población de iguanas en la isla antes de extinguirse completamente.

17. **Francisco** dispone de una lámina de un metro de longitud y necesita diseñar una señal de forma triangular (*triángulo equilátero*) y otra de forma cuadrada con áreas iguales. Si debe usar toda la longitud de la lámina es claro que la suma de las bases de las señales deberá ser igual a **1 m**.

¿Se pueden diseñar las dos señales con áreas iguales de tal manera que la suma de sus bases sea igual a un metro? **¿Cuáles son sus medidas?**

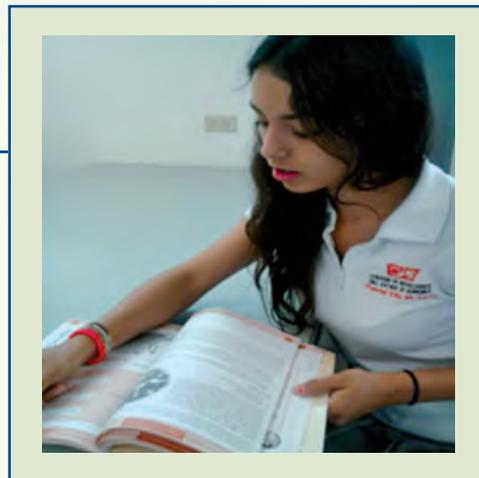
Para analizar el problema, utiliza las medidas de la longitud de las bases en decímetros: **1 m = 10 dm**



Sugerencia:

Consulta la página <http://www.pmme.mat.uson.mx/tesis/cuadratica/sec1act6.html>





El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

*En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.*

**Problema 1.** Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando para cada una de ellas un método distinto:

i.  $x^2 = 7x - 10$       iii.  $2y^2 + 1.5y - 1 = 0$       v.  $r^2 + 7r = 0$

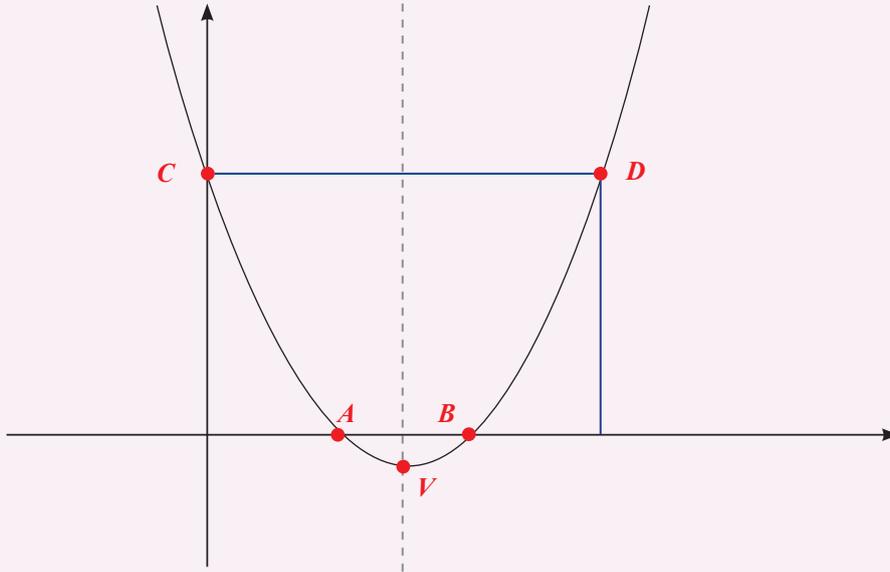
ii.  $4x^2 - 81 = 0$       iv.  $x^2 + 2x = 7$

Reflexiones relacionadas con el **problema 1:**

¿Qué métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado conoces?	¿Cómo decides que método emplear al resolver una ecuación de segundo grado?	¿Cómo te aseguras de que la solución obtenida es correcta? ¿Te parece importante esto?



**Problema 3.** Determina las coordenadas de los puntos **A**, **B**, **C**, **D**, y **V** de la parábola asociada a la expresión  $y = x^2 - 3x + 2$  cuya gráfica se muestra enseguida:



Reflexiones relacionadas con el **problema 3**:

¿Qué características de la gráfica utilizaste para dar solución?	¿En qué orden encontraste las coordenadas de los puntos que se piden? ¿Por qué?	¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a resolver la situación planteada?

**Problema 4.** En la siguiente tabla se muestra el precio por kilogramo y el ingreso obtenido por la venta de uva, una vez que se han considerado ciertos factores que determinan entre ellos una relación cuadrática.

<b>Precio por kg</b>	20	25	31	33	35	41	46
<b>Ingreso en pesos</b>	920	1025	1085	1089	1085	1025	920

- a) Elabora un bosquejo de la gráfica asociada a la tabla.
- b) Encuentra la expresión algebraica que determina la relación existente entre el ingreso obtenido por la venta a partir del precio por kilogramo de uva.

Reflexiones relacionadas con el **problema 4:**

¿Qué características de la tabla utilizaste para construir la expresión algebraica? ¿Cómo te ayudó el bosquejo de la gráfica?	¿En qué orden encontraste los coeficientes de la expresión algebraica? ¿Por qué?	¿Cómo te aseguras de que la expresión algebraica obtenida es correcta? ¿Te parece importante esto?	¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a resolver la situación planteada?

Reflexiones Generales relacionadas con el **BLOQUE 9**

1. ¿Lograste comunicar tus ideas o puntos de vista al trabajar en equipo o en grupo?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
2. ¿Tomaste en cuenta la participación de tus compañeros para modificar tus respuestas, tus acercamientos a los problemas...etc.?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
3. ¿Lograste interpretar las ideas de tus compañeros al realizar alguna tarea o actividad de clase?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
4. ¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
5. ¿Expresaste alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades a tus compañeros o al profesor?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
6. ¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
7. ¿Te entusiasmó ayudar a tus compañeros o que ellos te ayudaran a resolver dudas?	Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
8. En este bloque me pareció interesante:	<ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul>			
9. En este bloque me pareció difícil	<ul style="list-style-type: none"> <li>•</li> <li>•</li> <li>•</li> </ul>			

# GLOSARIO

## DE TÉRMINOS UTILIZADOS



### **Algebra:**

Es la rama de la matemática que estudia la combinación de elementos de estructuras abstractas acorde a ciertas reglas. Originalmente esos elementos podían ser interpretados como números o cantidades, por lo que el álgebra en cierto modo originalmente fue una generalización y extensión de la aritmética.

### **Algoritmo:**

Es un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad.

### **Altura:**

En una figura plana o en un sólido, distancia entre un lado o cara y el vértice o el punto más alejado en la dirección perpendicular. También hace referencia a la recta o segmento sobre el cual se mide esa distancia.

### **Ángulo:**

Un ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen o vértice.<sup>1</sup> Suelen medirse en unidades tales como el radián, el grado sexagesimal o el grado centesimal.

### **Área:**

Es una medida de extensión de una superficie, expresada en unidades de medida denominadas unidades de superficie. Para superficies planas el concepto es más intuitivo. Cualquier superficie plana de lados rectos, por ejemplo un polígono, puede triangularse y se puede calcular su área como suma de las áreas de dichos triángulos. Ocasionalmente se usa el término "área" como sinónimo de superficie, cuando no existe confusión entre el concepto geométrico en sí mismo (superficie) y la magnitud métrica asociada al concepto geométrico (área).

### **Aritmética:**

Es la rama de la matemática cuyo objeto de estudio son los números y las operaciones elementales hechas con ellos: suma, resta, multiplicación y división.



### **Binomio:**

Un binomio consta únicamente de dos términos, separados por un signo de más (+) o de menos (-). En otras palabras, es una expresión algebraica formada por la suma de dos monomios.

### **Binomios conjugados:**

El producto de dos números por su diferencia es igual al cuadrado del primer número menos el cuadrado del segundo número.



### **Caída libre:**

Al movimiento de un cuerpo bajo la acción exclusiva de un campo gravitatorio. Esta definición formal excluye a todas las caídas reales influenciadas en mayor o menor medida por la resistencia aerodinámica del aire, así como a cualquier otra que tenga lugar en el seno de un fluido; sin embargo es frecuente también referirse coloquialmente a éstas como caídas libres, aunque los efectos de la viscosidad del medio no sean por lo general despreciables.

### **Cálculo:**

Consiste en realizar las operaciones necesarias para prever el resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

### **Cantidad:**

Es el valor numérico que resulta de una medición (de una magnitud) que se expresa con números acompañado por unidades, de la forma siguiente Cantidad = Magnitud x Unidades.

### **Cilindro:**

Un cilindro es una superficie de las denominadas cuádricas formada por el desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana, que puede ser cerrada o abierta, denominada directriz del cilindro.

**Circulo:**

En geometría euclídea, es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a otro punto fijo, llamado centro, es menor o igual que una cantidad constante, llamada radio. En otras palabras, es la región del plano delimitada por una circunferencia y que posee un área definida.

**Circunferencia:**

Es una curva plana y cerrada donde todos sus puntos están a igual distancia del centro.

**Coeficiente:**

Es un factor multiplicativo vinculado a un monomio. Dado un divisor del monomio, el coeficiente es el cociente del monomio por el divisor. Así el monomio es el producto del coeficiente y el divisor. Los diferentes coeficientes dependerán de la factorización del monomio.

**Conjetura:**

Se entiende el juicio que se forma (moral, ético o matemático) de las cosas o sucesos por indicios y observaciones. En matemáticas, el concepto de conjetura se refiere a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta la fecha. Una vez se demuestra la veracidad de una conjetura, esta pasa a ser considerada un teorema de pleno derecho y puede utilizarse como tal para construir otras demostraciones formales.

**Constante:**

Es un valor fijo, aunque a veces no determinado. Una Función constante es una función matemática que para cada conjunto de variables en la misma, devuelve el mismo valor.

**DeciSiemens:**

A la unidad derivada del SI para la medida de la conductancia eléctrica. Se nombró así por el ingeniero alemán Werner von Siemens.

### **Despejar:**

Realizar las transformaciones necesarias en una ecuación para que la incógnita quede sola, exenta de coeficientes, en uno de los dos miembros de la igualdad.

Diámetro: es el segmento de la recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de una circunferencia, una superficie esférica o una curva cerrada. El diámetro de una esfera es el segmento que pasando por el centro, tiene sus extremos en la superficie de esta.

### **Distancia:**

Es la distancia entre dos puntos del espacio euclídeo equivale a la longitud del segmento de la recta que los une, expresado numéricamente. En espacios más complejos, como los definidos en la geometría no euclidiana, el «camino más corto» entre dos puntos es un segmento recto con curvatura llamada geodésica.

### **Diámetro:**

Es el segmento de la recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de una circunferencia, una superficie esférica o una curva cerrada. El diámetro de una esfera es el segmento que pasando por el centro, tiene sus extremos en la superficie de esta.



### **Ecuación:**

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas.

### **Enésimo:**

Palabra que expresa el término general (término n.) de una serie o de una progresión indefinidas.

### **Estadística:**

La estadística es una ciencia formal y una herramienta que estudia el uso y los análisis provenientes de una muestra representativa de datos, busca explicar las correlaciones y dependencias de un fenómeno físico o natural, de ocurrencia en forma aleatoria o condicional.

### **Expresión algebraica:**

Una expresión algebraica es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables o incógnitas. Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.



**Factor:** Número que está contenido un número exacto de veces en otro.

### **Fracción:**

Una fracción, número fraccionario, (del vocablo latín **frāctus**, **fractiō -ōnis** roto, o quebrado)<sup>1</sup> es la expresión de una cantidad dividida entre otra cantidad ; es decir que representa un cociente no efectuado de números. Por razones históricas también se les llama fracción común, fracción vulgar o fracción decimal. El conjunto matemático que contiene a las fracciones es el conjunto de los números racionales, denotado

### **Factorización:**

Es una técnica que consiste en la descripción de una expresión matemática (que puede ser un número, una suma, una matriz, un polinomio, etc) en forma de producto. Existen diferentes métodos de factorización, dependiendo de los objetos matemáticos estudiados; el objetivo es simplificar una expresión o reescribirla en términos de «bloques fundamentales», que recibe el nombre de factores, como por ejemplo un número en números primos, o un polinomio en polinomios irreducibles.



### **Geometría:**

Es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, politopos (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.).

### **Grados Fahrenheit:**

(Representado como °F) es una escala de temperatura propuesta por Daniel Gabriel Fahrenheit en 1724. La escala establece como las temperaturas de congelación y ebullición del agua, 32 °F y 212 °F, respectivamente. El método de definición es similar al utilizado para el grado Celsius (°C).

### **Gráfica:**

Tipo de representación de datos, generalmente numéricos, mediante recursos gráficos (líneas, vectores, superficies o símbolos), para que se manifieste visualmente la relación matemática o correlación estadística que guardan entre sí.



### **Homogénea:**

Que está formado por elementos con una serie de características comunes referidas a su clase o naturaleza que permiten establecer entre ellos una relación de semejanza: la formación académica de alumnos de un mismo curso es homogénea.



### **Longitud:**

La longitud es una medida de una dimensión (lineal; por ejemplo la distancia en m), mientras que el área es una medida de dos dimensiones (al cuadrado; por ejemplo  $m^2$ ), y el volumen es una medida de tres dimensiones (cúbica; por ejemplo  $m^3$ ).

### **Lenguaje algebraico:**

Lenguaje propio de la matemática, reconocible por la utilización de letras representando a números, en sus expresiones



### **Medida:**

La determinación de la relación entre la dimensión de un objeto y la unidad de medida.

### **Método:**

Es el procedimiento utilizado para llegar a un fin. Su significado original señala el camino que conduce a un lugar.

### **Método de igualación:**

Consiste en una pequeña variante del antes visto de sustitución. Para resolver un sistema de ecuaciones por este método hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado.

### **Método de sustitución:**

Método para resolver ecuaciones algebraicas sustituyendo una variable con una cantidad equivalente en términos de otra(s) variable(s) de manera que el número total de incógnitas se reduzca a 1.

### **Método empírico:**

Es un modelo de investigación científica, que se basa en la experimentación y la lógica empírica, que junto a la observación de fenómenos y su análisis estadístico, es el más usado en el campo de las ciencias sociales y en las ciencias naturales.

### **Monomio:**

Es una expresión algebraica en la que se utilizan exponentes naturales de variables literales que constan de un solo término (si hubiera + ó - sería binomio) , un número llamado coeficiente. Las únicas operaciones que aparecen entre las letras son el producto y la potencia de exponentes naturales. Se denomina polinomio a la suma de varios monomios. Un monomio es una clase de polinomio con un único término.

### **Múltiplo:**

Un múltiplo de un número es el que lo contiene un número entero de veces. En otras palabras, un múltiplo de  $a$  es un número tal que, dividido por  $a$ , da por resultado un número entero (el resto de la división euclídea es cero). Los primeros múltiplos del uno al diez suelen agruparse en las tablas de multiplicar.



### **Número Pi:**

Es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, en geometría euclidiana. Es un número irracional y una de las constantes matemáticas más importantes. Se emplea frecuentemente en matemáticas, física e ingeniería.

### **Números enteros:**

Son un conjunto de números que incluye a los números naturales distintos de cero (1, 2, 3, ...), los negativos de los números naturales (... , -3, -2, -1) y al 0. Los enteros negativos, como -1 o -3 (se leen «menos uno», «menos tres», etc.), son menores que todos los enteros positivos (1, 2, ...) y que el cero.

### **Números irracionales:**

Es un número que no puede ser expresado como una fracción  $\frac{p}{q}$ , donde  $p$  y  $q$  son enteros y  $q$  es diferente de cero. Es cualquier número real que no es racional.

### **Números naturales:**

Es cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto.

### **Números racionales:**

Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros o, más precisamente, un entero y un natural positivo

### **Números reales:**

Incluyen tanto a los números racionales (positivos, negativos y el cero) como a los números irracionales; y en otro enfoque, trascendentes y algebraicos.



### **Potenciación :**

Es una operación matemática entre dos términos denominados: base  $a$  y exponente  $n$ . Se escribe  $a^n$  y se lee usualmente como « $a$  elevado a  $n$ » o « $a$  elevado a la  $n$ » y el sufijo en femenino correspondiente al exponente  $n$ . Hay algunos números especiales, como el 2, al cuadrado o el 3, que le corresponde al cubo.

### **Progresiones geométricas:**

Es una secuencia en la que elemento se obtiene multiplicando el elemento anterior por una constante denominada razón o factor de la progresión. Se suele reservar el término progresión cuando la secuencia tiene una cantidad finita de términos mientras que se usa sucesión cuando hay una cantidad infinita de términos, si bien, esta distinción no es estricta.

**Parábola:**

Es la sección cónica resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz. El plano resultará por lo tanto paralelo a dicha recta.



**Rectángulo:**

Un rectángulo es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud. El perímetro de un rectángulo es igual a la suma de todos sus lados.

**Regla de carmer:**

Es un teorema del álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes.



**Serie aritmética:** Suma indicada de todos los términos de una serie aritmética.

**Serie geométrica:**

Es una serie en la cual la razón entre los términos sucesivos de la serie permanece constante.

**Software:**

Al equipamiento lógico o soporte lógico de un sistema informático, que comprende el conjunto de los componentes lógicos necesarios que hacen posible la realización de tareas específicas, en contraposición a los componentes físicos que son llamados hardware.

**Solución:**

Se denomina raíz o cero de una función, o solución de la ecuación asociada, al valor o valores de las incógnitas de la función que la anulan

### **Sucesión numérica:**

Es una secuencia ordenada de números, dispuestos entre sí por una ley de formación, la cual se obtiene empleando las operaciones básicas de: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.



### **Trinomio:**

Un trinomio es la suma indicada de tres monomios, es decir, un polinomio con tres términos que no puede simplificarse más.

### **Trinomio cuadrático:**

Es un polinomio de tres términos que resulta de elevar al cuadrado un binomio



### **Variables:**

Es un símbolo que puede ser reemplazado o que toma un valor numérico en una ecuación o expresión matemática en general.

### **Velocidad:**

La velocidad es una magnitud física de carácter vectorial que expresa el desplazamiento de un objeto por unidad de tiempo.

### **Volumen:**

A unidad de medida de volumen en el Sistema Internacional de Unidades es el metro cúbico. Para medir la capacidad se utiliza el litro. Por razones históricas, existen unidades separadas para ambas, sin embargo están relacionadas por la equivalencia entre el litro y el decímetro cúbico.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## BÁSICA

- Barnett, R. (1992). *Precálculo*. México: Limusa.
- Fleming, W. y Varberg, D. (1991). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall.
- Cobran, A. (1990). *Álgebra Elemental*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Parra, L. H. (1995). *Algebra Preuniversitaria*. México: Limusa.
- Rees, S. y Col. (1992). *Álgebra*. México: McGraw Hill.
- Smith, S. y Col. (2001). *Álgebra*. E.U.A.: Addison Wesley Iberoamericana.

## COMPLEMENTARIA:

- Dolciani y Col. (1989). *Álgebra Moderna Libro 1*. México: Publicaciones Cultural.
- García, M. A. (1995). *Matemáticas 1 para preuniversitarios*. México: Esfinge
- Leilthold, L. (1994). *Álgebra y trigonometría con Geometría Analítica*. México: Harla.
- Taban, M. (1992). *El hombre que calculaba*. México: Noriega Editores .

## ELECTRÓNICA:

- [http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_real](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real)
- [http://1canek.uam.mx/Calculo\\_1/Teoria/Reales/FfRepresentacion.pdf](http://1canek.uam.mx/Calculo_1/Teoria/Reales/FfRepresentacion.pdf)

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de  
Bachilleres del Estado de Sonora

Bld. Agustín de Vildósola; Sector Sur.  
Hermosillo, Sonora, México

La edición consta de 12, 689 ejemplares.  
Impresos en México/Printed in Mexico.



COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA