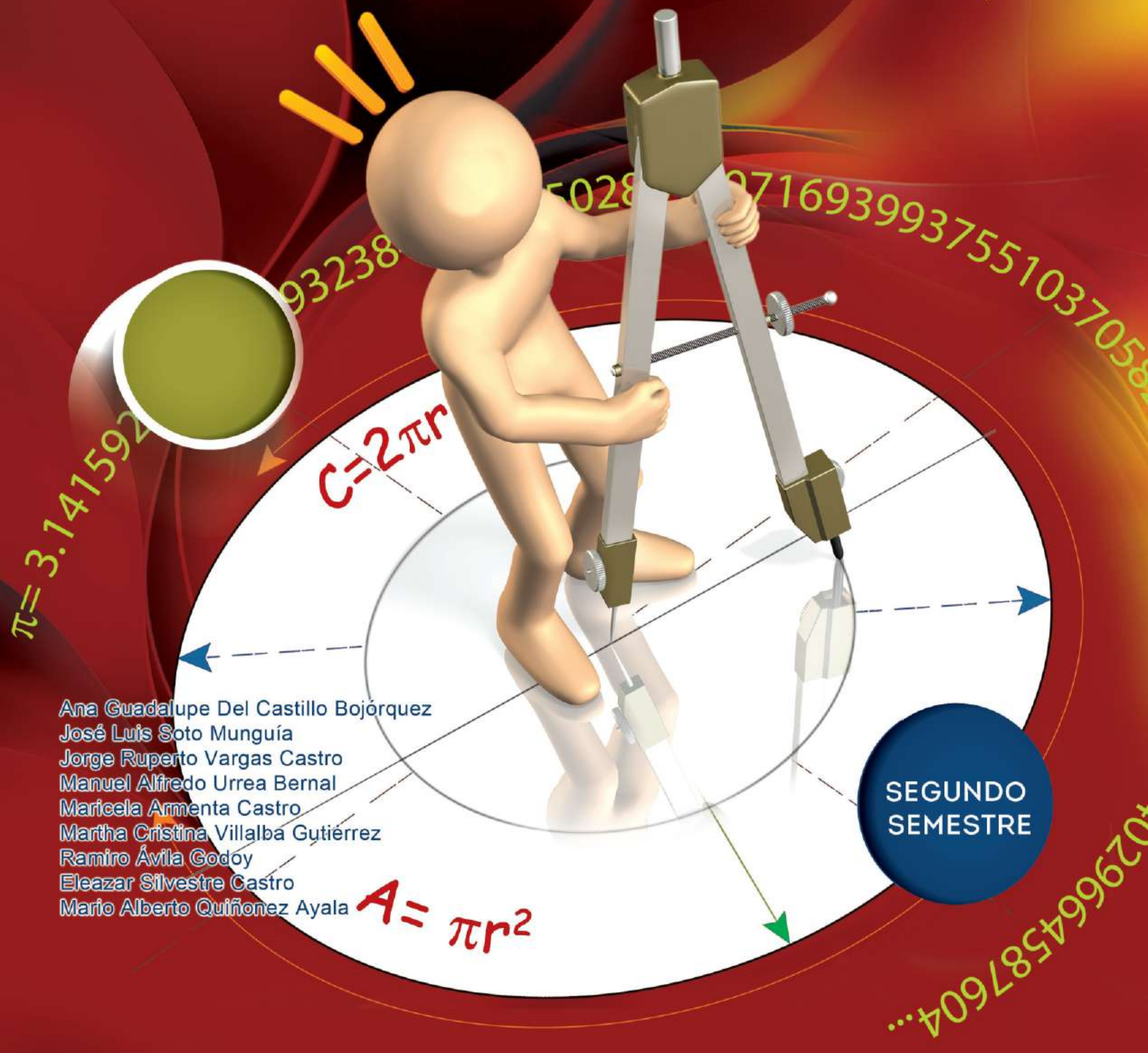
COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Matemáticas 2

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos



Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
José Luis Soto Munguía
Jorge Ruperto Vargas Castro
Manuel Alfredo Urrea Bernal
Maricela Armenta Castro
Martha Cristina Villalba Gutiérrez
Ramiro Ávila Godoy
Eleazar Silvestre Castro
Mario Alberto Quiñonez Ayala

SEGUNDO SEMESTRE

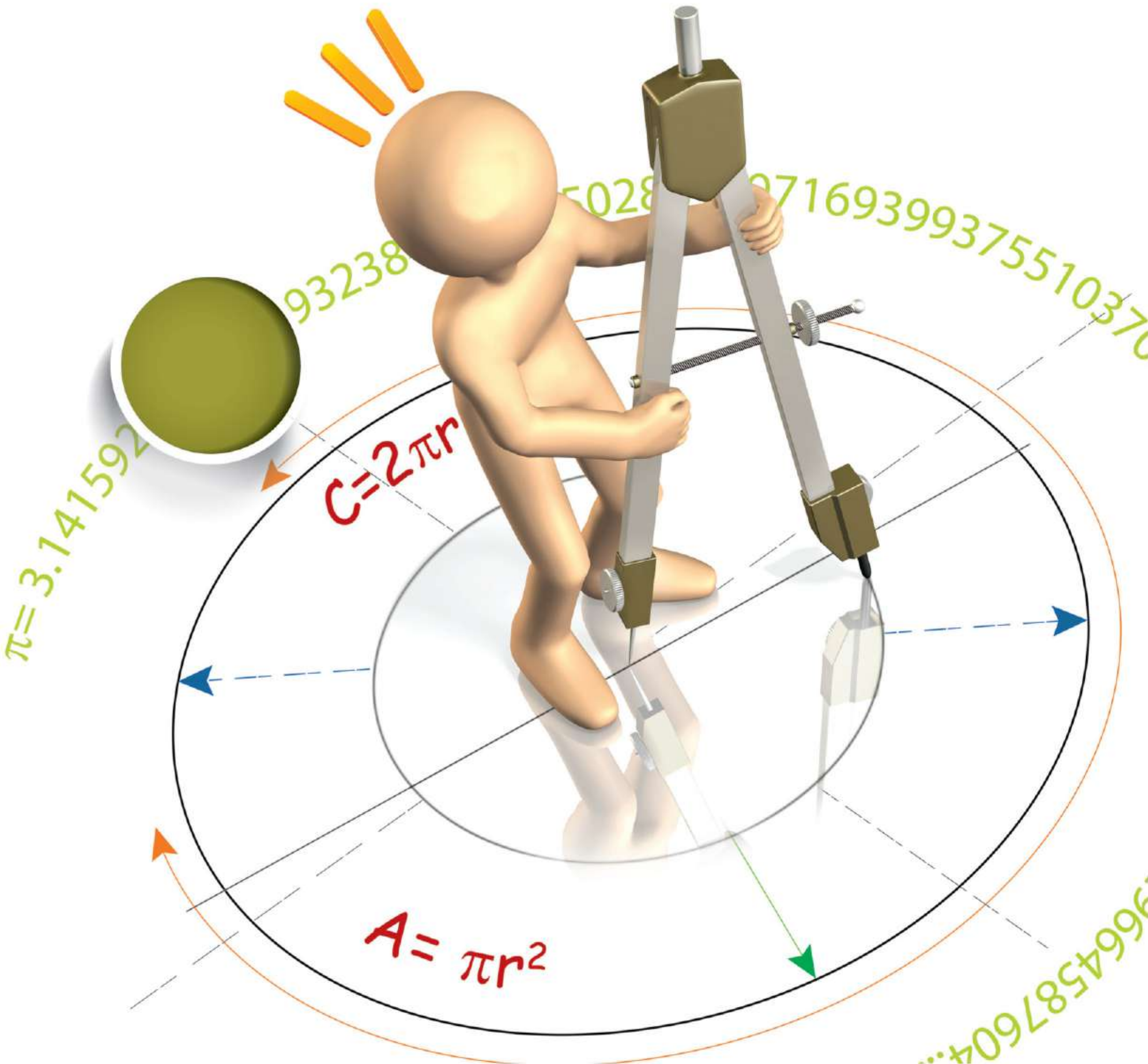
Matemáticas 2

- Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
- José Luis Soto Munguía
- Jorge Ruperto Vargas Castro
- Manuel Alfredo Urrea Bernal
- Maricela Armenta Castro
- Martha Cristina Villalba Gutiérrez
- Ramiro Ávila Godoy
- Eleazar Silvestre Castro
- Mario Alberto Quiñonez Ayala

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Matemáticas 2

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos



COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Director General
Mtro. Julio Alfonso Martínez Romero

Director Académico
Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

Director de Administración y Finanzas
C.P. Jesús Urbano Limón Tapia

Director de Planeación
Ing. Raúl Leonel Durazo Amaya

Desarrollo Editorial: Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.
Coordinación Editorial: LDG. Luis Ricardo Sánchez Landín
Edición: Yolanda Yajaira Carrasco Mendoza
Corrección de Estilo:
Esperanza Brau Santacruz
Lucía Ordoñez Bravo

Coordinación General:
Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

Coordinación Técnica:
Claudia Yolanda Lugo Peñúñuri
Vanesa Guadalupe Angulo Benítez

Revisores:
Margarita León Vega
Concepción Valenzuela García
Joaquín Miranda Gil
Raúl Amavizca Carlton
Miguel Ángel Barceló Lara

Contenido: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

MATEMÁTICAS 2

Autores:

Ana Guadalupe Del Castillo Bojórquez
José Luis Soto Munguía
Jorge Ruperto Vargas Castro
Manuel Alfredo Urrea Bernal
Maricela Armenta Castro
Martha Cristina Villalba Gutiérrez
Ramiro Ávila Godoy
Eleazar Silvestre Castro
Mario Alberto Quiñonez Ayala

ISBN: 978-607-730-032-8

Primera Edición: 2014
Se terminó la impresión de esta obra en Diciembre del 2013.
En los talleres de ***Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.***
Lambda No. 216 • Fraccionamiento Industrial Delta • C.P. 37545
León, Guanajuato, México.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 3681

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México
La edición consta de 12,463 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico

Contenido

Contenido

Contenido

Mensaje del Gobernador

Joven Estudiante Sonorense:

2014 Es el año de la Transformación

Ante nosotros está la oportunidad de hacer mejor todo lo que hemos hecho hasta ahora.

Es así como hemos iniciado, dentro de la transformación total y profunda de la administración pública, la transformación de nuestro sistema educativo.

Este es un esfuerzo sin precedente. Se propone garantizar calidad en la educación, escuelas dignas, limpias y seguras, así como una formación integral para la vida, con énfasis en el desarrollo del pensamiento lógico y matemático.

Tú, que estás cerca de elegir el camino hacia el éxito profesional, tendrás bases sólidas para tomar la mejor decisión.

Por eso, en el Colegio de Bachilleres, te ofrecemos alta calidad educativa, conocimiento, cultura y deporte: el ambiente propicio para que desarrolles tu creatividad y tu talento.

Nosotros, como padres de familia y como responsables de tu desempeño, estamos seguros que tu educación te comprometerá con el bienestar, el crecimiento y el desarrollo de Sonora y México.

Puedes estar seguro: estamos transformando nuestro sistema educactivo, estamos construyendo Un Nuevo Sonora.

Guillermo Padrés Elías
Gobernador Constitucional
del Estado de Sonora

Un Nuevo Sonora

Gobierno del Estado de Sonora

COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA

Presentación

Actualmente, el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora cuenta con un modelo curricular con base en el desarrollo de competencias. Sobre el significado de la palabra competencia existen diferentes versiones y formas de referirse al término, pero, en general, se establece que se trata de la conjunción de actitudes, habilidades y conocimientos desarrollados por una persona, que lo capacitan para enfrentar y resolver problemas, particularmente problemas no escolares.

De esta manera, en la escuela se pone énfasis no sólo en los conocimientos que un estudiante pueda construir, sino fundamentalmente en su capacidad para aplicarlos en la resolución de problemas cotidianos en diferentes ámbitos, que en el modelo curricular se traducen en el desarrollo de competencias genéricas y disciplinares.

El presente módulo de aprendizaje Matemáticas II, que el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora pone a tu disposición, está integrado por una serie de temáticas que deberán ayudarte a desarrollar competencias disciplinares, ésto es, aquéllas que son específicas de las matemáticas, como las competencias para manejar datos numéricos, para interpretar información, para modelar matemáticamente situaciones propias de otros campos del conocimiento y de la vida diaria en general. El módulo se centra, en su parte matemática, en el desarrollo de competencias ligadas a la Geometría, Trigonometría, Probabilidad y Estadística, como a continuación se describe:

Geometría:
Los primeros tres bloques del módulo están dedicados a la Geometría y en ellos se presentan situaciones del mundo real o de carácter estrictamente matemático, que exigen del uso de la geometría como herramienta para resolver problemas, pero también conducen a la necesidad de estudiar los objetos geométricos (ángulos, triángulos, círculos, etc.) como tales.

Aunque la Geometría cuenta con sus propios métodos para demostrar la certeza o falsedad de sus afirmaciones, y aunque estos métodos han jugado un importante papel en el desarrollo de esta disciplina, en el presente material de estudio, estos métodos no son el punto de partida; la prioridad más bien, es la percepción y el uso de los objetos geométricos como instrumentos para resolver problemas y modelar el mundo físico.

Presentación

Trigonometría:
Durante siglos la Trigonometría fue vista como parte de la Geometría y estuvo dedicada al estudio y la resolución de triángulos, es decir a problemas cuya resolución dependía de encontrar la medida del lado o del ángulo de un triángulo, conocidos otros lados o ángulos. En el presente material encontrarás, en primer lugar, este enfoque de la trigonometría íntimamente ligado a la solución de problemas prácticos.

Conforme la medida de los ángulos fue conectándose con el tamaño de arcos de circunferencia, la trigonometría evolucionó hacia un enfoque más funcional, en el cual el interés principal es el estudio de lo que hoy se conoce como funciones trigonométricas. También este enfoque, tan importante para el estudio de ramas de la matemática como el cálculo diferencial e integral, está incluido aquí. Al igual que en otras partes del texto, se trata de dar sentido a estas funciones a partir de los problemas que se resuelven con ellas.

Probabilidad y Estadística:
En el último bloque, la discusión se centrará en algunos objetos de estudio propios de la Probabilidad y la Estadística. En la primera parte del bloque estudiarás cuestiones relacionadas con la recolección, organización, presentación y análisis de datos acerca de características de interés en un grupo de personas u objetos, en las que se enfatizarán aspectos como la interpretación de la información y su utilidad para la toma de decisiones en diversas situaciones. También se incluye la reflexión acerca de ideas básicas sobre el azar, analizando situaciones en contextos cotidianos y fenómenos que son de interés para otras ramas de conocimiento; en todo momento, lo que interesa es que puedas reflexionar sobre los conceptos matemáticos involucrados y su potencia para la resolución de problemas.

Así como con el desarrollo de competencias disciplinares, el presente módulo de aprendizaje también deberá ayudarte a desarrollar competencias genéricas, por ejemplo para comunicar, para el manejo de las **Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)**, para el diseño de estrategias de solución a un problema y para la selección de la que se considere mejor o más adecuada, y otras competencias más que no se restringen al tratamiento y estudio de las matemáticas.

Presentación

Es muy importante entonces que trabajes con este módulo de aprendizaje de Matemáticas II atendiendo a las indicaciones del mismo y de tu profesora o profesor, trabajando en ocasiones de forma *individual*, otras en pequeños *equipos* y en otras en discusiones *grupales*. Cada una de esas dinámicas tiene propósitos establecidos relacionados con el desarrollo de competencias y trascienden a las versiones que centran la enseñanza en la construcción de conocimiento matemático, como si eso fuera lo único importante. Para el desarrollo de este trabajo, el módulo está organizado en cinco bloques que contienen una o más secuencias didácticas cuya estructura es la siguiente:

Actividades de Inicio: En esta parte se presentan problemas o situaciones seleccionados con el propósito de rescatar los conocimientos, actitudes y habilidades que se requieren para el nuevo conocimiento a estudiar. También pueden incluirse situaciones o problemas que se espera puedas resolver al final de la secuencia o del bloque.

Actividades de Desarrollo: En éstas se presentan situaciones o problemas que te conducirán a construir nuevos conocimientos y desarrollar nuevas habilidades, en concordancia con la temática central del bloque.

Actividades de Cierre: En esta etapa se hace un recuento de lo aprendido en las actividades anteriores y se enuncian los conocimientos matemáticos que previamente has usado para la resolución de problemas de la secuencia.

Al final de cada bloque se presentan dos secciones más. La primera de ellas es una **Sección de problemas** que pueden servir para ejercitar lo aprendido en el bloque y, en ciertos casos, para usar creativamente lo que has aprendido en problemas novedosos.

Se incluye también una serie de problemas y de preguntas para la reflexión individual, en una sección denominada **Autoevaluación.** Para que esta sección sea de utilidad es necesario que la respondas individualmente, ubiques bien lo que ya aprendiste adecuadamente y señales las dudas y dificultades que aún se presentan en tu aprendizaje. La autoevaluación sólo será de utilidad si la contestas con honestidad y planteas tus dudas y dificultades a tus compañeros de clase y, principalmente a tu profesor o profesora. Es conveniente que antes de cualquier proceso formal de evaluación, compartas con tus profesores las reflexiones de la autoevaluación.

Los Autores

Estructura Metodológica de los Textos

Actividades de Inicio

Desarrollo

Actividad: 2

Práctica del conocimiento adquirido mediante acciones a ejecutar o proyectos a llevar a cabo.

Actividad de Cierre

Actividades Individuales

Actividades de Equipo

Actividades Grupales

Actividad: 5

Al hacer las construcciones de cuadrados sobre los lados de un *triángulo rectángulo*, pudiste observar que en todos los casos resultó que *la suma de las áreas de los cuadrados* construidos sobre los lados que *forman el ángulo recto* fue la misma que la del cuadrado construido sobre el lado opuesto a dicho *ángulo recto*.

1. En el applet *pitagoras1*, disponible en *appletbachdach.mat.usan.mx*, puedes observar las relaciones entre la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa para cualesquiera valores que tomen las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Escribe lo que observas acerca de esta relación:

El enunciado formal de esta relación se conoce como el **Teorema de Pitágoras**, el cual aparece como la proposición 47 del Libro I de los Elementos de Euclides:

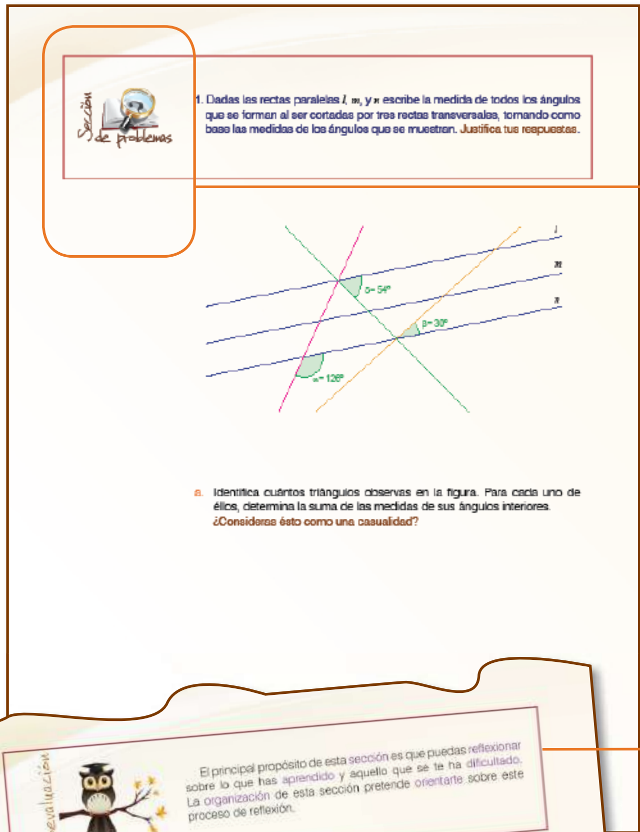
En un *triángulo rectángulo* el cuadrado del lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de los lados que forman el ángulo recto.

Asimismo, la proposición 48 establece lo siguiente:

Si en un *triángulo* el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los dos lados restantes, ... comprendido por esos dos lados restantes del ...

TIC

Sitios Web recomendados o confiables que puedes consultar por tu cuenta vía internet para que puedas ampliar tus conocimientos.



Sección de problemas

1. Dadas las rectas paralelas *l*, *m*, y *n* escribe la medida de todos los ángulos que se forman al ser cortadas por tres rectas transversales, tomando como base las medidas de los ángulos que se muestran. Justifica tus respuestas.

a. Identifica cuántos triángulos observas en la figura. Para cada uno de ellos, determina la suma de las medidas de sus ángulos interiores. *¿Consideras ésto como una casualidad?*

Sección de problemas

Sirve para ejercitar lo aprendido en el bloque y, en ciertos casos, para usar creativamente lo que has aprendido, en problemas novedosos.

Autoevaluación

El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

Problema 1. En la siguiente figura se reproduce parte del plano de una colonia de la Ciudad de Hermosillo en la que se muestra la ubicación del Hospital General de la Zona 6 del IMSS. Una ambulancia ...

Autoevaluación

Serie de problemas y preguntas para la reflexión individual, es necesario que la respondas individualmente, con honestidad y plantear tus dudas y dificultades a tu profesor o profesora y compañeros de clase.

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

BLOQUE 1

BLOQUE 2

- Expresa ideas y conceptos mediante representaciones linguísticas, matemáticas o gráficas.
- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- Construye hipótesis; diseña y aplica modelos para probar su validez.
- Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- Elige las fuentes de información más relevantes para un propósito específico y discrimina entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- Define metas y da seguimiento a sus procesos de construcción de conocimientos.
- Propone la manera de solucionar un problema y desarrolla un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
- Asume un actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

BLOQUE 5

BLOQUE 3

BLOQUE 4

GENÉRICAS

COMPETENCIAS A DESARROLLAR EN LOS:

BLOQUE 1
BLOQUE 2
BLOQUE 3
BLOQUE 4

1.- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2.- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3.- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4.- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnolgía de la información y la comunicación.

6.- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.

BLOQUE 5

1.- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2.- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3.- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4.- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnolgía de la información y la comunicación.

5.- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

7.- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

8.- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS 2

- **GEOMETRÍA**
  - **BLOQUE 1** Estudio de los ángulos, triángulos y el círculo.
    - Secuencia Didáctica 1.- Eratóstenes y la medida de la tierra.
    - Secuencia Didáctica 2.- Construir triángulos.
    - Secuencia Didáctica 3.- En el centro ecológico del Estado de Sonora.
  - **BLOQUE 2** Problemas y situaciones relacionadas con los polígonos, circunferencias y círculos.
    - Secuencia Didáctica 1.- Ángulos interiores de los polígonos.
    - Secuencia Didáctica 2.- La geometría de los canales hidraúlicos.
    - Secuencia Didáctica 3.- Áreas y perímetros de polígonos.
    - Secuencia Didáctica 4.- La geometría del riego por aspersión.
    - Secuencia Didáctica 5.- Métodos geométricos prácticos.
  - **BLOQUE 3** Congruencia y semejanza de triángulos.
    - Secuencia Didáctica 1.- Armado de torres de transmisión eléctrica.
    - Secuencia Didáctica 2.- Situaciones de semejanza de triángulos.
- **TRIGONOMETRÍA**
  - **BLOQUE 4** Resolver problemas utilizando conceptos de la geometría.
    - Secuencia Didáctica 1.- Haciendo la tarea de matemáticas.
    - Secuencia Didáctica 2.- Funciones trigonométricas
    - Secuencia Didáctica 3.- Trigonometría y astronomía.
    - Secuencia Didáctica 4.- Medidas de distancias inaccesibles.
- **PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA**
  - **BLOQUE 5** Los números respecto a quiénes y cómo somos.
    - Secuencia Didáctica 1.- Estadísticas sobre redes sociales y población joven en Sonora.
    - Secuencia Didáctica 2.- Situaciones de azar y probabilidad.

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

BLOQUE 1

Estudio de los...

Ángulos, triángulos y círculos

En este bloque del curso se te propone un primer acercamiento al estudio de los *ángulos*, los *triángulos* y el ***círculo***. Estos *elementos geométricos* se ven articulados de diferentes maneras en las *tres secuencias didácticas presentadas*, pues ha sido la intención que cuando las abordes, tengas oportunidad de aprender algo más que un glosario de fórmulas y figuras ilustradas, o un nutrido muestrario de procedimientos formales que difícilmente logran tener sentido por sí mísmos fuera del salón de clases.

Para estar de acuerdo con el enfoque actual de la enseñanza de la Geometría es preciso que te enfrentes a situaciones reales en las que la Geometría juega un papel fundamental, o bien que agudices tu forma de percibir visualmente las relaciones que existen en las figuras que se te van a presentar y las que tendrás que construir; que trates de expresar esas relaciones mediante argumentaciones que las validen y que de estas acciones puedas producir conjeturas (suposiciones) que a su vez te sea posible validar. Es por ello que en las diferentes tareas contenidas en estas secuencias se presentan contextos de aplicación, de construcción y de investigación. Así, por ejemplo, las actividades de construcción de figuras pretenden que busques *relaciones y propiedades geométricas* para que puedas convertir esas construcciones en un medio para desarrollar el *razonamiento geométrico*. Además, la forma en la que trabajes en el salón de clases, o fuera de él, te permitirá experimentar, reflexionar, validar y comunicar tus procedimientos y resultados con el fin de que mediante todas esas acciones le des sentido a lo que finalmente se te propone como un objeto de *conocimiento geométrico*.

Con todo ésto se procura contribuir al desarrollo tanto de las *competencias genéricas* como de las *competencias disciplinares asociadas a este bloque*. Para que tú mísmo puedas valorar tus logros en estos aspectos, al final del *bloque* se incluye la *sección de autoevaluación* correspondiente.

Tiempo asignado: 19 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividades de Inicio

Eratóstenes y la medida de la tierra

Actividad: 1

¿Te has preguntado alguna vez cuántos kilómetros tendrías que recorrer para darle la vuelta a la Tierra? Por supuesto, esto dependería de la ruta que siguieras. Pensemos en una ruta máxima sobre una *circunferencia*, como por ejemplo, sobre el Ecuador.

1.- Investiga cuál es el valor del ***radio*** y ***perímetro*** de la Tierra.

Eratóstenes fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego, de origen cirenaico.

Desde la antigüedad, muchos hombres de ciencia estimaron el ***perímetro*** de la Tierra. Uno de estos hombres fue *Eratóstenes*, matemático, astrónomo y geógrafo nacido en Cirene en el año 276 A.C. *Eratóstenes* es célebre por la estimación tan precisa que obtuvo en esta medición. Lo más extraordinario de su logro, fue la simplicidad matemática de su estrategia. Estando en la Biblioteca de *Alejandría* encontró un informe de observaciones sobre *Siena* (hoy Asuán), ciudad situada a unos 800 Km. al sur de *Alejandría*, en el que se declaraba que a mediodía del solsticio de verano (21 de junio), una vara vertical no producía sombra. Esto significa que los rayos del sol llegaban perpendiculares a la superficie terrestre en ese lugar. Se dice que *Eratóstenes* confirmó este hecho observando que en el fondo de un pozo se reflejaba completamente la luz del sol, y la orilla del pozo no proyectaba sombra alguna sobre el agua del mismo, hecho que no se producía de la misma manera en *Alejandría* en ese día y a esa hora. *Eratóstenes* supuso acertadamente que por la lejanía del sol, sus rayos llegaban a la tierra de forma paralela y la diferencia observada en *Alejandría* y *Siena*, con respecto a la proyección de las sombras, ratificaba que la tierra no era plana.

Figura 1

Eratóstenes utilizó lo siguiente para realizar su estimación:

- La distancia entre *Alejandría* y *Siena* era conocida, y se estimaba en *5000 estadios* y se encontraban aproximadamente en el mismo meridiano.

Figura 2

- Puede suponerse que los rayos del sol llegan paralelamente a la superficie terrestre, debido a su lejanía.

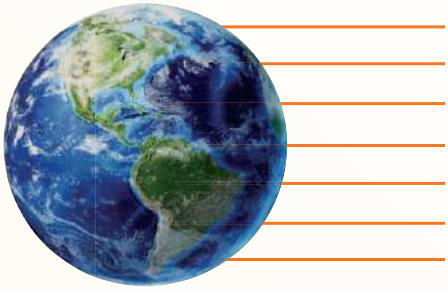


Figura 3

- Una línea recta imaginaria a través de un pozo en *Siena* pasaría por el centro de la tierra y, al mediodía en el solsticio de verano, esta línea coincidiría con un rayo del sol.

- Una línea recta imaginaria conteniendo una vara vertical en *Alejandría*, también pasaría por el centro de la tierra, pero no coincidiría con un rayo del sol al mediodía en el solsticio de verano.

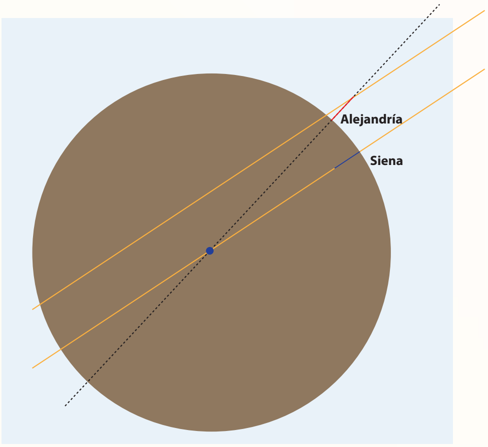


Figura 4

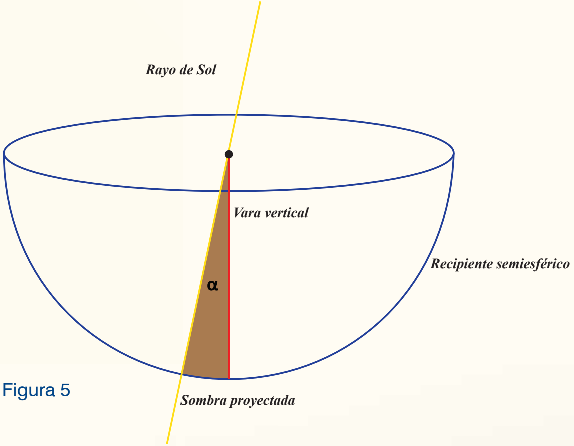


Figura 5

Para determinar el *ángulo* formado por los rayos del sol y una vara vertical en *Alejandría*, se dice que *Eratóstenes* la colocó en el centro de un recipiente semiesférico para captar la sombra proyectada al interior del mismo, en el cual se habían incluido algunas marcas.

♣ *Eratóstenes* pudo afirmar, gracias a sus conocimientos *geométricos*, que el *ángulo* α formado por la vara y el rayo del sol en *Alejandría,* es el mismo que el que se forma en el centro de la tierra con los ***radios*** correspondientes a *Siena* y *Alejandría*.

2.- Localiza en la Figura 4 los *ángulos* a los que se refiere *Eratóstenes*.

3.- Si *Eratóstenes* conocía la distancia entre dos puntos de la tierra, en este caso las ciudades de *Siena* y *Alejandría*, entonces:

a). ¿Por qué estaba en lo cierto al considerar que esa distancia correspondía a una ***longitud de arco***?

b). ¿Qué otro dato requería para saber cuántas veces cabía ese ***arco*** en todo el ***perímetro*** de la tierra?

c). ¿Podía hacer una medida directa para obtener ese dato y luego calcular el ***perímetro*** buscado?

4.- Comenta tus respuestas con tus compañeros de grupo.

Desarrollo

En esta sección se tratará de que reconstruyas o recuperes aquellos conocimientos de Geometría que fueron fundamentales en el proceso que llevó a cabo *Eratóstenes* para calcular la *circunferencia* de la tierra al articularlos estratégicamente con información y suposiciones verosímiles; entre otras, lo que significaban las sombras de objetos expuestos a la luz solar y la forma en la que llegan los rayos del sol a la tierra.

Actividad: 2

1.- En la Figura 6 se tiene una parte del esquema en donde se representan los rayos del sol que llegan paralelos a la tierra y que *Eratóstenes* tomó como referencia. Como ya viste antes, la línea recta punteada, transversal a las paralelas, representa *la vertical* de una edificación en *Alejandría*.

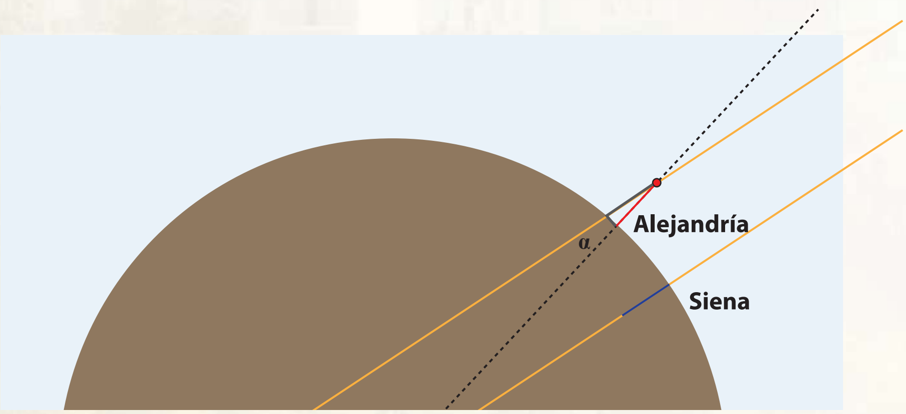


Figura 6

Toma como referencia los datos del esquema y sobre éste anota lo que se te pide a continuación.

a). Si la sombra que midió *Eratóstenes* corresponde a $\frac{1}{50}$ de la *circunferencia* completa ¿Cuál es la medida en grados del *ángulo* $\boldsymbol{\alpha}$?

b). Dado que la medida del *ángulo* que forma el rayo del sol con la vertical ya la calculaste, determina y escribe el valor de los otros *tres ángulos* que se forman entre la línea punteada y la recta que representa el rayo del sol. Anótalos sobre la figura.

Actividades Individuales

Compara y analiza con tus compañeros de grupo las razones que les permitieron calcular cada uno de esos *ángulos*. A continuación resume brevemente las razones que en el grupo acordaron como las que mejor explican por qué se dieron esos valores a los *ángulos*:

c). Reescribe ahora sobre el esquema de la Figura 7 la medida de los *ángulos* determinados en el punto anterior. Sin tener que hacer de nuevo los cálculos, escribe las medidas de los otros *cuatro ángulos* que se forman con la recta que representa el otro rayo de sol que pasaría por el centro de la tierra (también representa la dirección del pozo de agua en *Siena* hacia el centro de la tierra) y su intersección con la misma línea recta punteada.

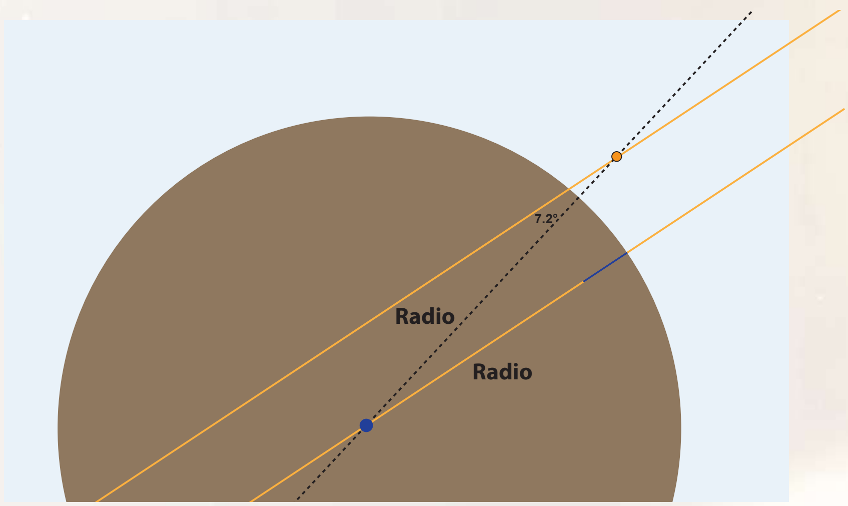


Figura 7

Actividades Individuales

Expresa qué relaciones encontraste entre los *ángulos* que se forman con las dos rectas *paralelas* cortadas por una *transversal* o *secante*, las cuales te permitieron determinar los *ángulos* en el centro de la tierra:

____
____
____
____
____
____
____
____

Actividades Grupales

Compara tu respuesta con lo expresado por tus compañeros y a continuación escribe brevemente las explicaciones o argumentos que en el grupo hayan seleccionado como los más claros:

____
____
____
____
____
____
____

d). Mediante los argumentos que expresaste en el punto anterior, explica por qué *Eratóstenes*, al conocer el *ángulo* que formaban el rayo del sol y la línea que señala la vertical en *Alejandría*, pudo deducir, según su esquema, cuál era el *ángulo* que en el centro de la tierra había entre los ***radios*** correspondientes a las ciudades de *Siena* y *Alejandría*.

____
____
____
____
____
____
____

2. Con el conocimiento de ese *ángulo central*, y conociendo que la distancia entre *Siena* y *Alejandría* es la medida de la ***longitud de arco*** correspondiente a ese *ángulo*, responde lo siguiente para que finalmente compares tus respuestas con lo que consigna la historia sobre el cálculo de la ***circunferencia*** de la tierra:

a). Fíjate en el esquema de la Figura 7 donde se muestra el valor del *ángulo central* cuya medida es de 7.2°, ¿Cuántas veces cabe ese *ángulo* en toda la ***circunferencia***?

____

____

b). ¿Cuántas veces cabe el ***arco*** de ***5000 estadios***, subtendido por ese *ángulo central*, en toda su ***circunferencia***?

____

____

c). Entonces, ¿Cuántos estadios calculó ***Eratóstenes*** que tenía la ***circunferencia*** de la tierra?

____

____

Ilustración de Siena

3. Por otra parte, el dato que *Eratóstenes* obtuvo sobre ese *ángulo central* entre *Siena* y *Alejandría*, también pudo haber permitido calcular el ***radio*** de la tierra al relacionarlo con la ***longitud de arco*** entre las dos ciudades (él no tenía a la mano la fórmula $C = 2\pi r$ como ahora). Solamente pudo haber utilizado la característica de proporcionalidad entre esos elementos, es decir, entre la ***longitud de arco*** y el ***radio*** de la *circunferencia* a la que corresponde:

   a). Si trazas una *circunferencia* en el esquema de la figura 7, con el mismo centro y la mitad del ***radio***, ¿Crees que la ***longitud de arco*** subtendida por el mismo *ángulo central* se reduce a la mitad? Comprueba con los medios a tu alcance:

   b). Como en el inciso anterior, ¿Crees que la ***longitud de arco*** se reduce a un cuarto de la original si el ***radio*** se reduce a una cuarta parte del original?

   c). Si reduces o aumentas el ***radio*** de una *circunferencia*, pero mantienes fijo el *ángulo central*, ¿Cómo se reduce o aumenta respectivamente la ***longitud de arco*** en cada una de las *circunferencias*? Consulta el *applet* ***arcos*** disponible en *appletscobach.mat.uson.mx.* Enseguida denota por L la ***longitud del arco***, por r el ***radio*** y por θ el *ángulo central* y escribe la expresión que corresponde a este comportamiento:

   d). Usa la relación anterior para que, como pudo haberlo hecho *Eratóstenes*, calcules el ***radio*** que le corresponde a una *circunferencia* que con un *ángulo* $\theta = 7.2°$ subtiende un ***arco*** $L = 5000$ *estadios*.

TIC

4. Si se toma la equivalencia entre estadios y metros como: 1 estadio $=$ 160 m, convierte a km las medidas que obtuvo *Eratóstenes* para la *circunferencia*, y con base en ello determina el ***radio*** que corresponde a la tierra.

5. Compara las medidas obtenidas por *Eratóstenes* con las que actualmente se le dan al ***radio*** y a la *circunferencia* de la tierra trazada sobre el ecuador. Toma nota de la diferencia entre estas medidas y las calculadas por *Eratóstenes*. Finalmente reflexiona acerca del papel de la **Geometría** en este cálculo hecho en la antigüedad y escribe brevemente tus conclusiones:

____

____

____

Actividad de Cierre

Como has visto, el conocimiento de las relaciones de los *ángulos* que se forman cuando se tienen dos *rectas paralelas* cortadas por otra *recta secante* o *transversal* a éllas, fue la clave para que, con asombroso ingenio, *Eratóstenes* pudiera llevar a cabo sus cálculos y obtener la medida de la ***circunferencia*** de la tierra. Asimismo, te pudiste dar cuenta de que la relación que tiene el *ángulo central* de una ***circunferencia*** con el ***arco*** que subtiende está determinada por la medida de su ***radio***.

En lo que sigue, se presentan los nombres de los *ángulos* mencionados y se proponen tareas para que encadenes algunas relaciones ya conocidas de manera que te conduzcan a dar certeza a las que interesa determinar. Igualmente se establece la expresión que en la actualidad se utiliza para denotar la relación entre la ***longitud de arco*** de una ***circunferencia***, el *ángulo* que la subtiende y su ***radio***.

A continuación se te presentan algunas tareas de identificación de *ángulos* y relaciones que se pueden establecer entre ellos según estén situados los lados que los forman. Esta parte constituyó la importantísima cadena de fundamentos veraces para que *Eratóstenes*, basado en ellos, hiciera de manera certera sus cálculos.

1. Dos *rectas secantes* forman cuatro *ángulos*. En la Figura 8 se han señalado esos *ángulos* con las letras del alfabeto griego: α, β, δ, y γ. En cada caso, responde a lo que se indica:

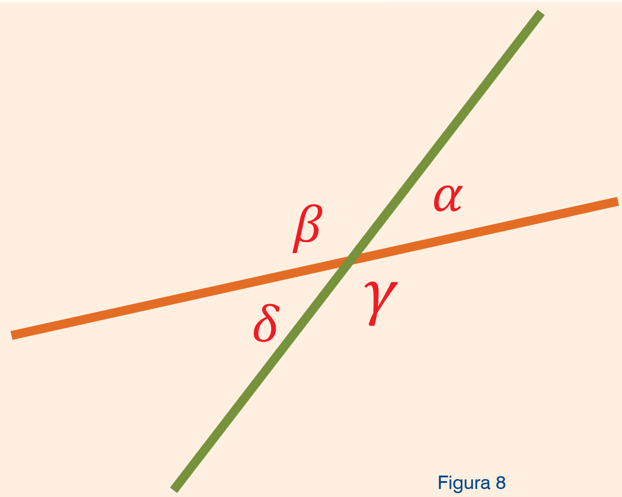


Figura 8

a). ¿Cuánto miden $\alpha+\beta$?________ ¿Por qué?

____

____

____

b). ¿Cuánto miden $\beta+\delta$? ________ ¿Por qué?

____

____

____

c). Entonces ¿Es válido establecer que $\alpha+\beta = \beta+\delta$?______ ¿Por qué?

____

____

____

d). Basándote en la igualdad anterior, ¿Qué relación puedes establecer entre los *ángulos* α y δ?

____

____

____

e). Argumenta con otras razones que no tengan que ver con las sumas, la relación que acabas de establecer en el inciso anterior.

____

____

____

f). ¿Qué relación puedes establecer entre los *ángulos* β y γ?

____

____

____

g). Argumenta mediante un razonamiento que exprese la suma de cada uno de éllos con otro que te convenga seleccionar (un razonamiento expresado en forma análoga al que se desarrolló através de los incisos del a) hasta el d). Luego argumenta de otra manera.

____

____

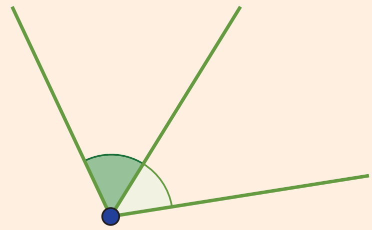
____

____

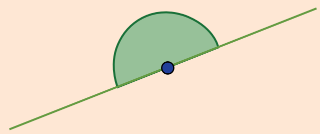
____

Recuerda que:

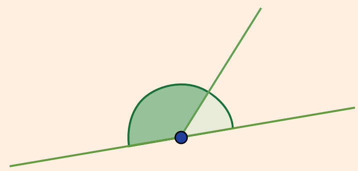
Los *ángulos adyacentes* son aquellos que tienen el *vértice común*, *un lado común*, pero no tienen puntos comunes en su interior.



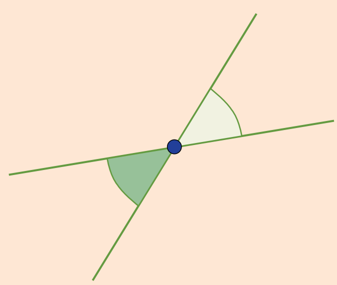
Un *ángulo llano* es aquel cuyos *lados son colineales*.



Los *ángulos adyacentes* que forman un *ángulo llano* se llama *suplementarios.*



Los *ángulos opuestos por el vértice* tienen el *vértice común* y los *lados* de uno son, correspondientemente, *colineales* a los del otro.



2. En la Figura 9 se representa el caso en que dadas dos rectas a y b *paralelas*, y otra recta c *transversal* a ellas, se forman *ocho ángulos* que puedes distinguir mediante las letras griegas que los denotan. En una figura que cumple estas condiciones de construcción, queda determinado (*se postula*) *que los ángulos correspondientes son iguales, es decir, aquellos ángulos que están en la misma posición respecto a la transversal y a cada una de las paralelas*. Por ejemplo, α y θ son *correspondientes* porque están a la derecha de la *transversal* y arriba de cada *paralela*.

Dadas dos rectas *paralelas* cortadas por un *transversal*, los ángulos correspondientes son iguales.

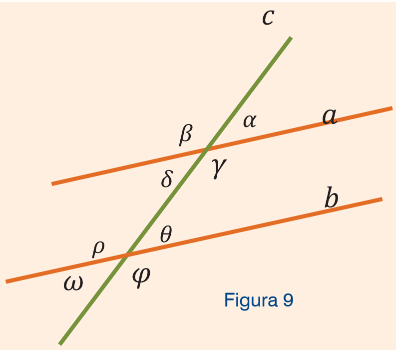


Figura 9

a). ¿Cuáles otros pares de *ángulos son correspondientes*?

____

____

____

3. De acuerdo a los argumentos que diste en el punto 1 de esta actividad, se puede establecer que:

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

a). Con base en lo que se acaba de establecer, ¿Cómo son los pares de *ángulos* θ, ω, y α, δ?

____

____

____

b). ¿Qué otros pares de *ángulos opuestos por el vértice* en la Figura 9 son *iguales entre sí*?

____

____

____

4. Los *ángulos alternos* en una configuración como la de la Figura 9 son aquéllos que están situados en distintas *paralelas* y en distintos *lados* de cada una de ellas, a la vez que se sitúan en distintos *lados de la secante o transversal*. Si dichos *ángulos* están entre la *paralelas* se llaman *alternos internos*, si están en el exterior de las *paralelas*, se denominan *alternos externos.*

a). Identifica los pares de *ángulos* que en la Figura 9 son *alternos externos*.

b). Identifica los pares de *ángulos* que en la Figura 9 son *alternos internos*.

5. ¿Cómo se llaman los *ángulos* que en el esquema de Eratóstenes se tomaron como referencia para determinar el ***perímetro*** de la tierra?

A lo largo de la presente **secuencia** tuviste oportunidad de explorar la relación existente entre el *ángulo* ***central*** de una *circunferencia* y el ***arco*** que subtiende, relación importante que también pudo haber utilizado Eratóstenes para la estimación del ***radio*** de la Tierra. Tuviste oportunidad de comprobar que su aproximación a la medida que ahora se conoce es bastante cercana.

El *arco* L **que subtiende un** *ángulo central* θ **en una** *circunferencia* **de** ***radio*** r **está dado por la relación** $L = r\,\theta$ **, donde** θ **está medido en *radianes*.**

Secuencia Didáctica 2.-

Actividades de Inicio

Construir triángulos

Construir *triángulos* no es una actividad nueva para ti. Desde la escuela primaria aprendiste que hay diferentes tipos de *triángulos* según sus lados y según sus *ángulos*.

Para recordar... *Escribe lo que recuerdes de tales clasificaciones.*

Actividad: 1

Para la siguiente Actividad necesitarás varios *palillos* de dientes, o bien, si tienes acceso a internet, abre el *applet palillos* , disponible en appletscobach.mat.uson.mx, para simular el trabajo con *palillos* de dientes. Se trata de construir todos los *triángulos* posibles con un determinado número de *palillos*, colocándolos uno seguido de otro. Considera que los *palillos* de dientes son todos de la misma medida y que ésta se toma como la unidad.

1. Para iniciar, utiliza solamente *tres palillos* de dientes y *construye todos los triángulos posibles*. Para cada uno de ellos, escribe las medidas de los lados (recuerda tomar como unidad la medida de *un palillo*), el tipo de *triángulo según sus lados* y *según sus ángulos*. Organiza tus hallazgos en la siguiente Tabla (puedes agregar o ignorar renglones, según sea conveniente):

Tabla 1

Tres Palillos				
Lados			Tipo de triángulo	
			Según sus lados	Según sus ángulos

a). ¿Cuántos *triángulos* diferentes es posible construir? ¿Por qué?

2. Ahora utiliza exactamente *cuatro palillos*.

Tabla 2

Cuatro Palillos				
Lados			Tipo de triángulo	
			Según sus lados	Según sus ángulos

a). ¿Cuántos *triángulos* diferentes es posible construir? ¿Porqué?

Desarrollo

Actividad: 2

Continuaremos nuestras construcciones de triángulos utilizando los *palillos* de dientes o el *applet* señalado en la actividad anterior. Completa las siguientes **Tablas** (puedes agregar o ignorar renglones, según sea conveniente):

1.

Tabla 3

Cinco Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	3			
1	2	2			

a). ¿Cuántos *triángulos* diferentes es posible construir?

b). ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el *triángulo*? ¿Por qué?

2.

Tabla 4

Seis Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	4			
1	2	3			
2	2	2			

a). ¿Cuántos *triángulos* diferentes es posible construir?

b). ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el *triángulo*? ¿Por qué?

3.

Tabla 5

Siete Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	5			
1	2	4			
1	3	3			
2					

a). ¿Cuántos *triángulos* diferentes es posible construir?

b). ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el *triángulo*? ¿Por qué?

Tabla 6

Ocho Palillos					
Lados			¿Es posible construir el triángulo?	Tipo de triángulo	
				Según sus lados	Según sus ángulos
1	1	6			
1	2	5			
1	3	4			
2	2	4			
2					
3	3				

a). ¿Cuántos *triángulos* diferentes es posible construir?

b). ¿Con cuáles medidas resulta imposible construir el *triángulo*? ¿Por qué?

4. Continúa con la exploración y organiza la información en la siguiente tabla.

Tabla 7

Número de Palillos		**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Número de triángulos posibles											
Número de triángulos	*Equiláteros*										
	Isósceles										
	Escalenos										
	Acutángulos										
	Rectángulos										
	Obtusángulos										

a). ¿Qué criterios utilizaste para decidir cuándo dos *triángulos* son diferentes?

b). ¿Qué criterios utilizaste para decidir si un *triángulo es rectángulo*?

c). Escribe ternas de números que no representan las longitudes de los *lados* de un *triángulo*. ¿Qué característica esencial tienen estas ternas de números?

d). De acuerdo con lo observado hasta el momento ¿Qué condición adviertes que deben satisfacer los números a, b y c para que representen las medidas de los *lados* de un *triángulo*?

5. En la siguiente **tabla**, escribe ternas de números enteros que representen las *medidas* de un *triángulo* que corresponda a la categoría de la fila y columna correspondiente.

Tabla 8

Triángulo	*Acutángulo*	*Rectángulo*	*Obtusángulo*
Equilátero			
Isósceles			
Escaleno			

6. ¿Cómo cambiaría la **tabla** anterior si quitamos la restricción de utilizar números enteros?

En esta actividad ***iniciaremos*** trabajando con los palillos de dientes, pero dedicaremos nuestra atención a *los triángulos rectángulos*.

Hasta el momento, mediante las actividades anteriores te diste cuenta que, si trabajas con números enteros, solamente con ciertas ternas de ellos es posible construir *triángulos rectángulos*. También te diste cuenta que siempre hay un lado mayor a cualquiera de los otros dos.

1. ¿Es posible que uno de los *lados* del *triángulo* que forman el *ángulo recto* sea el mayor de los tres *lados*? Explica tu respuesta.

2. Observa la construcción de los cuadrados construidos sobre los *lados* del *triángulo rectángulo* que se muestra en la Figura 1.

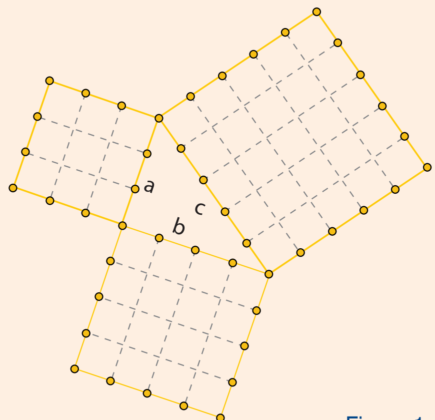


Figura 1

a). ¿Cuáles son las medidas de los *lados* que forman el *ángulo recto*?

____

____

b). ¿Cuál es la medida del *lado* mayor?

____

____

c). ¿Cuáles son las ***áreas*** de los cuadrados construidos sobre cada uno de los *lados* del *triángulo*?

____

____

d). ¿Encuentras alguna relación entre las ***áreas*** de los cuadrados? Si es así, exprésala:

____

____

3. Junto con tus compañeros de equipo construyan con los palillos (o hagan la construcción sobre el papel con sus instrumentos geométricos) cualquier otro *triángulo rectángulo* con medidas enteras (ustedes deciden el tamaño de la unidad); luego, en cada uno de los *lados* del *triángulo* completen un cuadrado de manera similar a la que se muestra en la anterior Figura 1.

a). ¿Cuáles son las medidas de los *lados* que forman el *ángulo recto* en el *triángulo* que construyeron?

b). ¿Cuál es la medida del *lado* mayor?

c). ¿Cuáles son las ***áreas*** de los cuadrados construidos sobre cada uno de los *lados* del *triángulo rectángulo* que construyeron?

d). ¿Encuentras alguna relación entre las ***áreas*** de los cuadrados? Si es así, ¿Es la misma que para la Figura anterior?

4. Como se dieron cuenta en la Actividad 2, la construcción de otros *triángulos rectángulos* con medidas enteras en todos sus *lados* y diferentes a los dos anteriores requeriría utilizar muchos palillos. Por tal razón, se les pide que en cada equipo:

a). Asignen medidas enteras posibles a cada uno de los *lados* a, b y c del *triángulo rectángulo* de la Figura 2; tales medidas se encuentran en las tres primeras columnas de la **Tabla 9**. Asegúrense, con la ayuda del profesor, que cada equipo seleccione una terna diferente y válida.

b). Enseguida calculen el ***área*** de cada uno de los cuadrados construidos sobre los *lados* del *triángulo* basándose en las medidas asignadas.

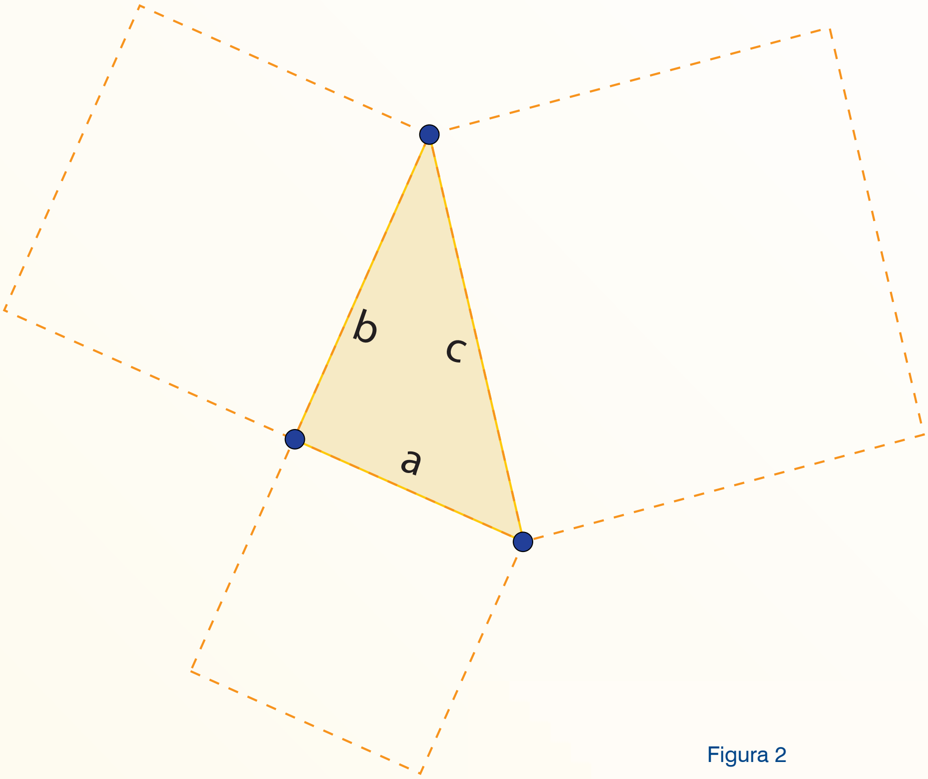


Figura 2

c). Anoten sobre la figura cada una de las ***áreas*** calculadas en su equipo.

5. Con la ayuda del profesor organicen la información sobre las medidas asignadas por los diferentes equipos en la Tabla 9.

Tabla 9

Medidas enteras de lados			Área del cuadrado de lado a	Área de cuadrado de lado b	Suma de áreas de cuadrados de lados a y b	Área del cuadrado de lado c
Lados que forman *ángulo* recto		Lado mayor				
a	b	c				
3	4	5	9	16	25	25
8	6	10				
12	9	15				
12	16	20				
5	12	13				
24	10	26				
21	28	35				
15	36	39				
27	36	45				

a). ¿Cómo son las cantidades registradas en las dos últimas columnas?

____
____
____
____
____
____
____
____

b). Escriban un enunciado que exprese la relación entre las medidas que se asignaron en la **Tabla 9** a los *lados* del *triángulo rectángulo* y las ***áreas*** de los cuadrados construidos sobre ellos. Compartan en el grupo sus respuestas y ajusten la redacción si es necesario.

____
____
____
____
____
____

6. Ahora, asignando cualesquiera medidas enteras a los *lados* a y b del *triángulo rectángulo*, sin importar que el *lado* c no sea entero, utiliza la relación que enunciaste en la tarea anterior para completar la **Tabla 10**:

Tabla 10

Medidas enteras de lados			Área del cuadrado de lado a	Área de cuadrado de lado b	Suma de áreas de cuadrados de lados a y b	Área del cuadrado de lado c
Lados que forman *ángulo* recto		Lado mayor				
a	b	c				
1	2		1	4	5	5
1	1					
2	3		4	9		
4	1					17
5	6				61	
3	5					
8		$\sqrt{128}$	64		128	
7	3				58	58
10						200

a). Escribe otros tres casos en los que usando esta relación, logres encontrar el ***área*** del cuadrado construido sobre uno de los *lados* de un *triángulo rectángulo* cuando se te proporcionan datos relacionados con los otros dos (*lados* o cuadrados construidos sobre ellos).

I. Caso 1

____

____

____

II. Caso 2

____

____

____

III. Caso 3

____

____

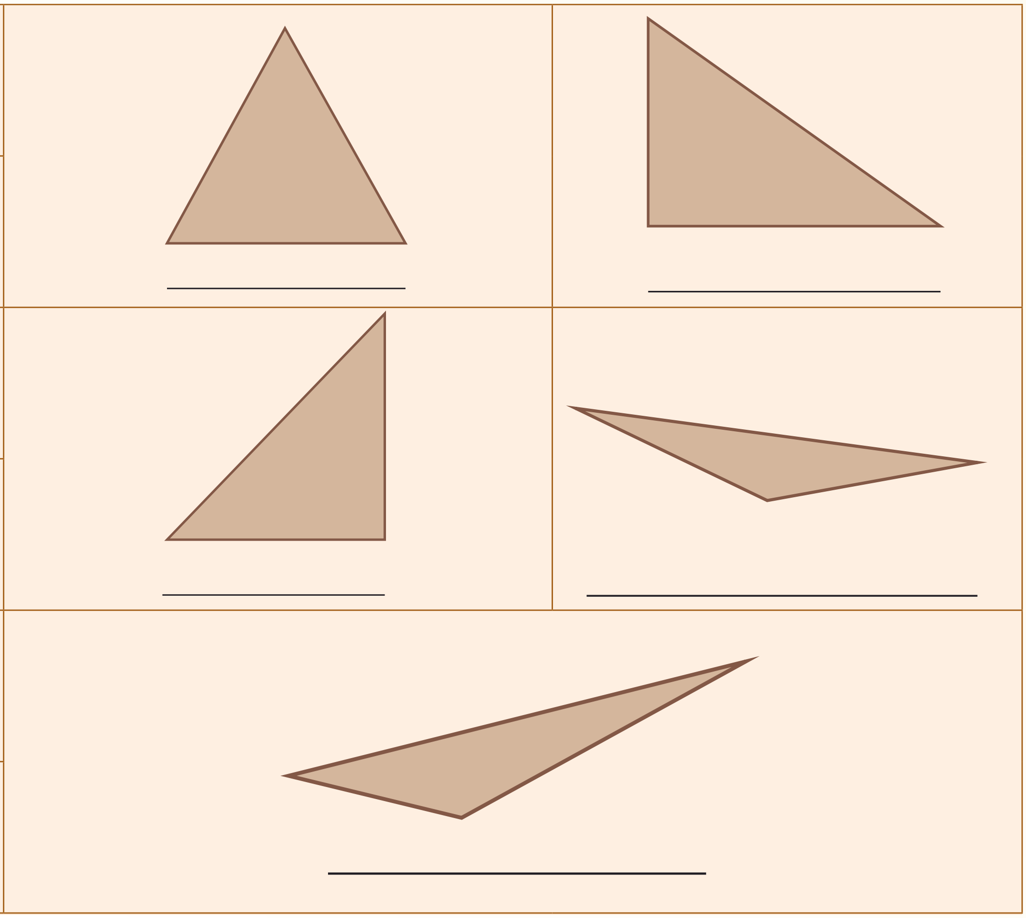
____

Actividad de Cierre

En esta **secuencia** se te han propuesto tareas de construcción de *triángulos* con la finalidad de que al hacerlo tuvieras oportunidad de identificar las ***características*** que los determinan y observar que sus *lados* y *ángulos* están fuertemente relacionados. En esta sección se tratará de reafirmar y organizar tales ***características***, además de expresar formalmente y dar nombre a las ***propiedades*** que descubriste o identificaste.

Actividad: 4

1. ***Etiqueta*** los siguientes *triángulos* usando como ***claves*** los siguientes ***incisos***. Para cada *triángulo* utiliza el mayor número de ***etiquetas*** posible.

i. Acutángulo	
ii. Obtusángulo	
iii. Isósceles	
iv. Equilátero	
v. Rectángulo	
vi. Escaleno	

2. De la misma manera, etiqueta las siguientes ***características*** asociadas a ***triángulos***:

Triángulo	*Característica*
	Tiene *tres lados* iguales
	Tiene un *ángulo recto*
	Tiene *dos lados* iguales
	Tiene *tres ángulos agudos*
	Tiene *tres lados desiguales*
	Tiene un *ángulo agudo*

3. Es posible definir un ***triángulo isósceles*** de dos maneras distintas.

- *"Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales".*
- *"Un triángulo isósceles tiene solamente dos lados iguales".*

a). ¿Es posible construir un *triángulo isósceles* que sea *equilátero* tomando en cuenta cualquiera de las dos definiciones? Explica:

b). Explica ¿Por qué las dos definiciones no son iguales y qué efecto tendría tomar una u otra al clasificar *triángulos*?. Ilustra con un ejemplo.

4. En el inciso "d" de la tarea 4 en la *Actividad 2*, se te pidió que enunciaras una ***condición*** que, de acuerdo a las experiencias de *construcción* de *triángulos* con los palillos, consideraste como necesaria para que tal *construcción* fuera posible. Esta condición se identifica con una ***propiedad*** que se conoce como la ***desigualdad del triángulo*** que podemos expresar de la siguiente manera:

> *La suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.*

Tal condición es necesaria para la ***construcción*** de un *triángulo*, dadas las medidas de *tres lados*. Además, es una ***condición suficiente****,* es decir, que siempre que se cumpla la ***condición*** será posible ***construir*** un *triángulo*.

a). Dadas las siguientes proposiciones, haz uso de lo que se ha establecido hasta aquí para que las valores como falsas (F) o verdaderas (V):

i. En un *triángulo obtusángulo* el *lado mayor* es parte del *ángulo obtuso*. ___

ii. Las medidas 4, 4, 10 corresponden a los *lados* de un *triángulo isósceles.* ___

iii. Existen *triángulos* que son a la vez *rectángulos* e *isósceles.* ___

iv. Las medidas 5, 8, 9 corresponden a los *lados* de un *triángulo escaleno*. ___

v. Las medidas 8, 15, 17 corresponden a los *lados* de un *triángulo rectángulo*. ___

vi. La amplitud de los *ángulos* de un *triángulo equilátero* depende de la longitud de sus *lados*. ___

vii. Todo *triángulo rectángulo* es *escaleno*. ___

Actividad: 5

Al hacer las ***construcciones*** de cuadrados sobre los *lados* de un *triángulo rectángulo*, pudiste observar que en todos los casos resultó que *la suma de las* ***áreas*** *de los cuadrados* ***construidos*** sobre los *lados* que *forman el ángulo recto* fue la misma que la del cuadrado ***construido*** sobre el lado opuesto a dicho *ángulo recto*.

1. En el *applet* *pitagoras1*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx*, puedes observar las relaciones entre la suma de las ***áreas*** de los cuadrados ***construidos*** sobre los ***catetos*** y el ***área*** del cuadrado ***construido*** sobre la ***hipotenusa*** para cualesquiera valores que tomen las longitudes de los *lados* del *triángulo rectángulo*. Escribe lo que observas acerca de esta relación:

El enunciado formal de esta relación se conoce como el **Teorema de Pitágoras,** el cual aparece como la proposición 47 del Libro I de los Elementos de Euclides:

> En un ***triángulo rectángulo*** el cuadrado del *lado opuesto* al *ángulo recto* es igual a la suma de los cuadrados de los *lados* que forman el *ángulo recto.*

Asimismo, la proposición 48 establece lo siguiente:

> Si en un ***triángulo*** el cuadrado de uno de los *lados* es igual a la suma de los cuadrados de los *dos lados* restantes, el *ángulo* comprendido por esos *dos lados* restantes del ***triángulo es recto***.

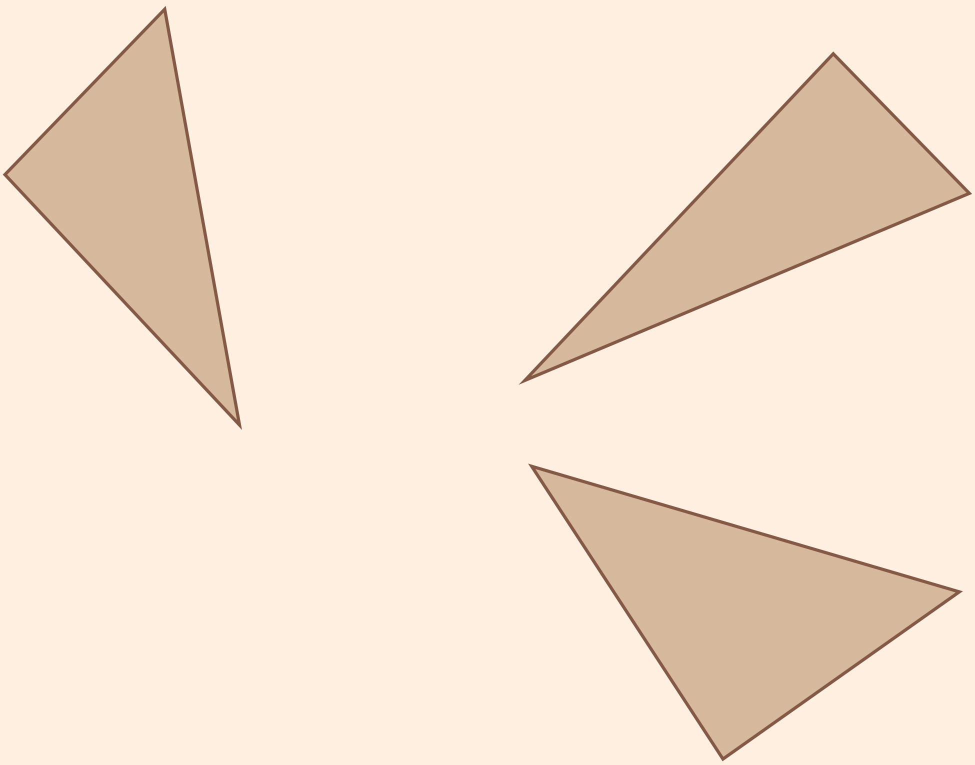
2. ¿En cuáles tareas de las propuestas a lo largo de esta **secuencia** resulta útil esta última proposición?

Actualmente, *los lados* de un ***triángulo rectángulo*** se conocen de la siguiente manera:

> En todos los ***triángulos rectángulos*** *los lados* que forman *el ángulo recto* se llaman ***catetos*** y el lado opuesto al *ángulo recto* se llama ***hipotenusa.***

3. Investiga el origen histórico de los términos ***cateto*** e ***hipotenusa***. Resume brevemente tus hallazgos.

4. Señala en los siguientes *triángulos rectángulos* los ***catetos*** con las letras a y b, y la ***hipotenusa*** con la letra c.



El Teorema de Pitágoras queda algebraicamente establecido de la siguiente manera: Si se denota por $\boldsymbol{c}$ ***la hipotenusa*** y por $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ ***los catetos*** de un *triángulo rectángulo*, entonces

$$c^2 = a^2 + b^2$$

5. Una demostración informal de este *teorema* la puedes realizar recortando papel. Para ello requieres tener a la mano una hoja blanca tamaño carta donde reproduzcas la Figura 3. Es importante que los cuadrados construidos sobre los ***catetos*** los rellenes de distintos colores para que percibas las equivalencias importantes durante el proceso.

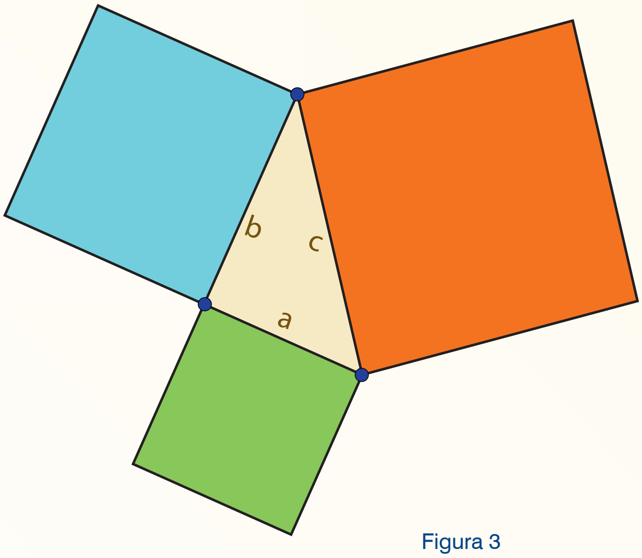


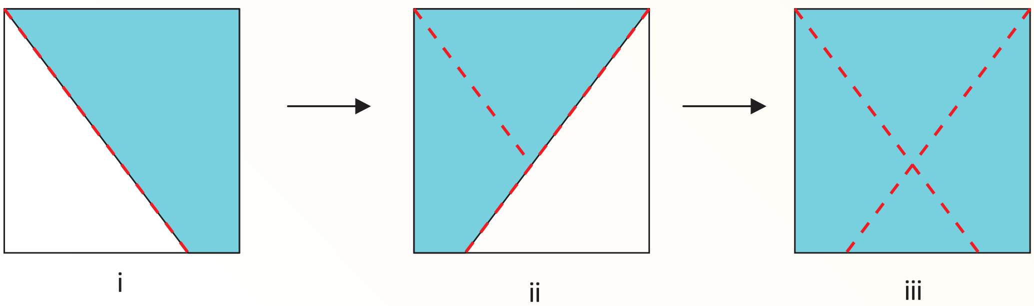
Figura 3

a). En la figura que reprodujiste en tu hoja, recorta con cuidado los tres cuadrados y el *triángulo* que la componen.

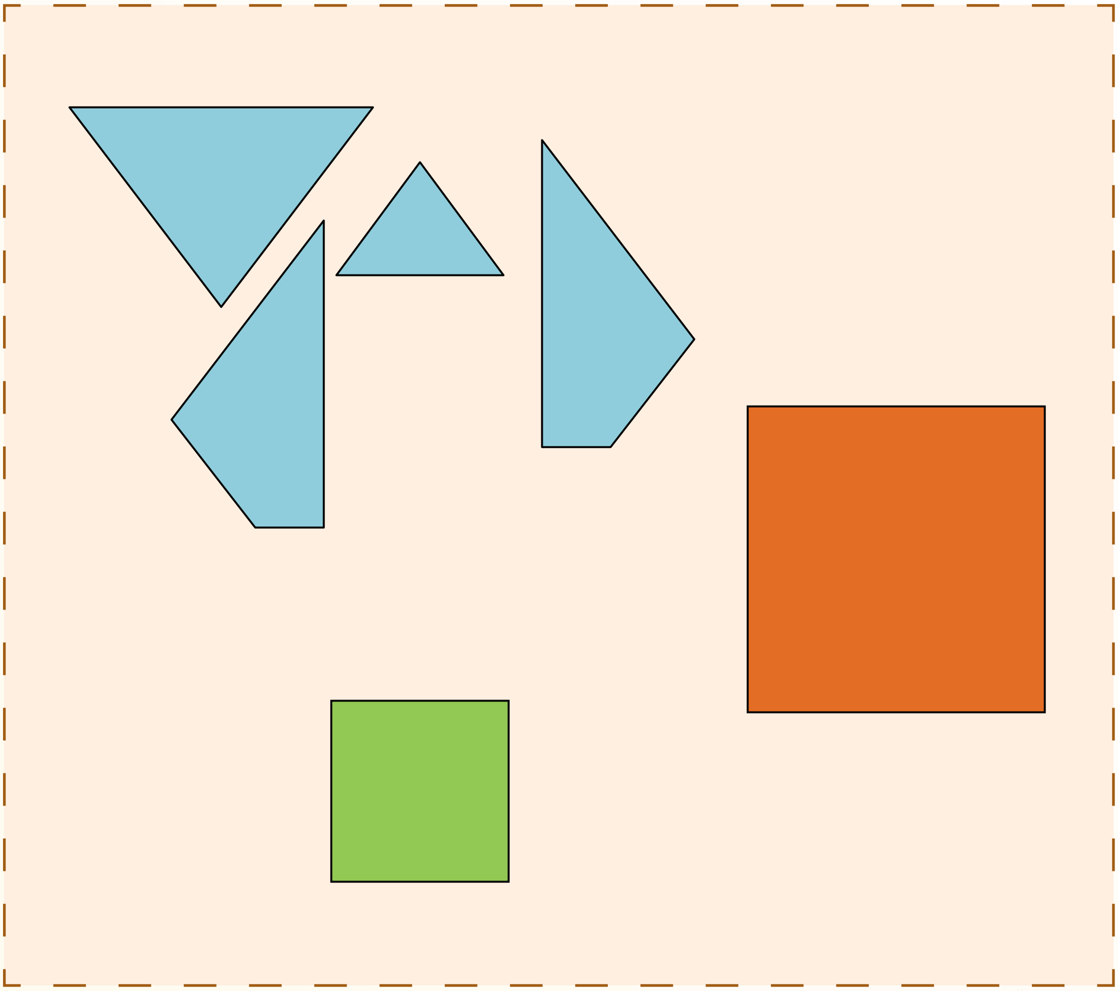
i. Coloca el *triángulo* sobre el cuadrado del mayor de los ***catetos*** haciendo que coincida el *ángulo recto* del *triángulo* con uno de los vértices del cuadrado; marca sobre éste la ***hipotenusa*** del *triángulo*.

ii. Voltea el *triángulo* y desliza para que coincida el *ángulo recto* con el vértice contiguo. De nuevo marca, sobre el cuadrado, la ***hipotenusa***.

iii. Recorta las rectas punteadas.



b). Ahora lo que resta por hacer es que reacomodes las piezas recortadas para que con ellas y el cuadrado menor cubras completamente y sin traslapes el cuadrado construido sobre la ***hipotenusa***. ¿Qué significa para ti que se logre hacer esto?



Secuencia Didáctica 3.-

Actividades de Inicio

En el Centro Ecológico del Estado de Sonora

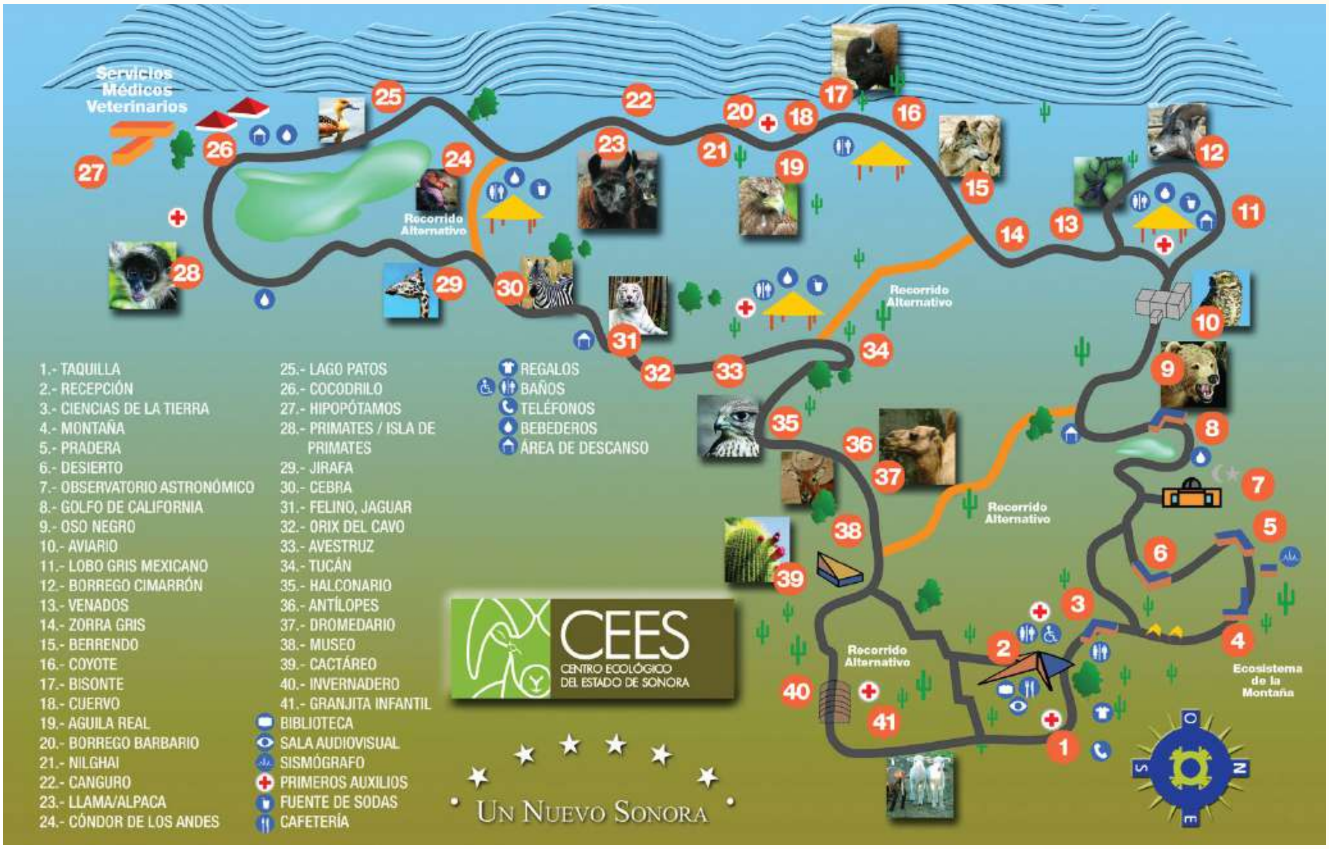
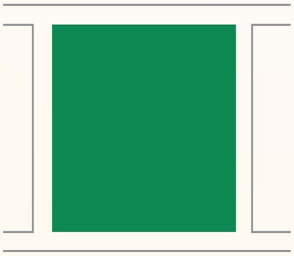


Figura 1. Plano del Centro Ecológico del Estado

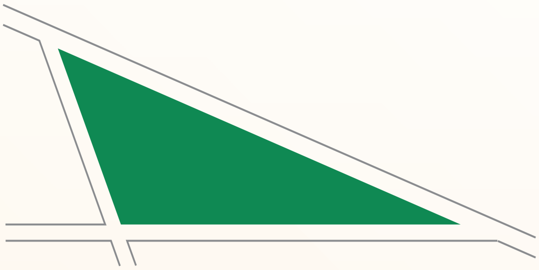
El Director General del *Centro Ecológico del Estado* está llevando a cabo distintas obras de mejora y mantenimiento con el fin de dar mejor atención a los visitantes y a las especies de animales y plantas que alberga la institución.

Por una parte, acaba de inaugurar un nuevo estacionamiento para los visitantes. Entre los detalles pendientes se encuentra la organización del mantenimiento que éste requiere. Por tal motivo está en espera de que el encargado de mantenimiento reporte que ya *han sido instalados aspersores de agua para césped en las* ***áreas*** *verdes* del estacionamiento.

Estas ***áreas*** *verdes tienen formas triangulares y cuadradas* de diferentes tamaños. Enseguida, en la **Figura 2**, se muestra el croquis de dos ***áreas*** verdes representativas.



Área Verde Cuadrada



Área Verde Triangular

Figura 2

El Sr. Máximo Riego –conocido como **Don Max**–, jefe de mantenimiento, está tratando de encontrar el sitio adecuado para *instalar los aspersores* de manera que cubran la mayor ***área*** posible de césped sin mojar los andadores que la limitan. Estos *aspersores* cuentan con un mecanismo que permite cubrir un ***área*** circular, por lo que **Don Max** requiere encontrar el *mejor lugar para colocar uno de ellos en cada* ***área*** *verde* y que cumpla con las condiciones señaladas.

Por otra parte, **Don Max**, tiene la encomienda de *situar un centro de abasto de materiales* para las obras de remodelación que se están llevando a cabo en el interior del Centro, particularmente en los albergues de Dromedarios, Osos Negros y Venados. Para facilitar el traslado de dichos materiales a cada uno de estos sitios, requiere situar el *centro de abasto* a la misma distancia de los tres. En la **Figura 1** puedes localizar los sitios mencionados, están etiquetados con los números 37, 9 y 13, respectivamente.

Actividad: 1

Ayuda a **Don Max**:

1. En el caso de las ***áreas*** cuadradas, **Don Max** consideró dos posibilidades: *instalar el aspersor* en el centro del jardín o en una de sus esquinas, dado que se puede restringir el *ángulo* de rociado. Si el agua no debe mojar las vías peatonales ¿Cuál será la mejor opción? Explica brevemente el porqué de tu elección.

a). Coloca sobre el ***área cuadrada*** de la **Figura 2** el punto en donde consideres que debe *instalarse el aspersor*. Verifica si el punto cumple con las condiciones del contexto.

b). En el caso de que se coloque *el aspersor* en el centro del cuadrado, determina (considerando de manera genérica que su lado mide a metros):

- i. El alcance que éste debe tener.
- ii. El ***área*** que se logra regar.
- iii. El ***área*** que no se alcanza a regar.

c). En el caso de que se *coloque el aspersor* en un vértice del cuadrado, determina (considerando de igual manera que su lado mide a metros):

i. El alcance y el *ángulo* de rociado que éste debe tener.
ii. El ***área*** que se logra regar.
iii. El ***área*** que no se alcanza a regar.

2. En el caso de las ***áreas triangulares***, si se considera *instalar el aspersor* en el centro de cada jardín ¿Dónde deberá ser colocado? Ubica sobre el ***área triangular*** de la Figura 2 el punto en donde consideres que debe *instalarse el aspersor*. Verifica, utilizando un compás, si el punto cumple con las condiciones del contexto. Describe enseguida qué hiciste para decidir la posición del punto y cómo fue que verificaste si resultó adecuada o no.

3. Explora la posición y cobertura de riego de este tipo de *aspersores* en jardines triangulares en el *applet* *Jardin triangular* que se encuentra en la siguiente dirección electrónica , *appletscobach.mat.uson.mx,*

TIC

4. De la misma manera, explora en el *applet* *centroecologico.ggb*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx*, el punto donde consideras que debe *colocarse el centro de abasto de materiales* para la remodelación de los albergues de los dromedarios, osos negros y venados para que cumpla con las condiciones establecidas. Escribe y comenta las dificultades que tuviste para localizar el punto adecuado.

TIC

Desarrollo

Es posible determinar con precisión la *colocación adecuada del aspersor y del centro de abasto de materiales* que exploraste en la Actividad anterior, si conoces algunas propiedades de rectas y puntos notables que se identifican en los *triángulos*. Algunas de esas propiedades están relacionadas con el centro de una circunferencia inscrita (dentro del *triángulo* y tangente a sus *tres lados*), o de una ***circunferencia*** circunscrita (que pasa por los tres vértices del *triángulo*).

Enseguida se te plantean dos Actividades con algunas tareas para que logres hacer diferentes construcciones, descubrir sus propiedades y, finalmente, decidir qué te sirve para dar una solución precisa tanto a la *colocación del aspersor* como a la del *centro de abasto de materiales*.

Actividad: 2

1. En la mitad de una hoja blanca dibuja un *triángulo* cualquiera y etiqueta los vértices como se muestra en la Figura 3.

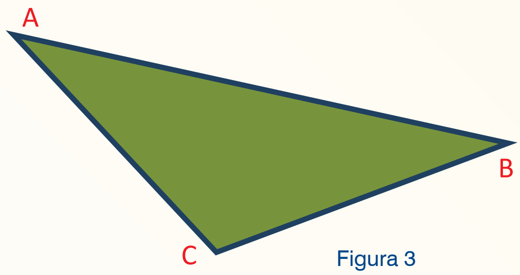


Figura 3

2. Toma la hoja y desde el vértice A del *tiángulo*, haz un doblez de manera que el *ángulo* que corresponde a ese vértice (*ángulo* CAB) quede dividido en dos partes iguales. Describe cómo lo hiciste y cómo te aseguras que el doblez está marcando exactamente la mitad del *ángulo*.

____

____

____

____

____

____

____

____

3. Comparte con tus compañeros la estrategia y acuerden cuál resulta ser la más apropiada.

a). Ahora marca los dobleces que corresponden a la mitad de los otros *dos ángulos* del *triángulo*.

b). Extiende la hoja y remarca con lápiz o pluma las rectas marcadas por los dobleces y señala el punto donde se intersecan las tres rectas. Si no se intersecan las tres es que algún doblez estuvo mal hecho o mal remarcado; si este es el caso, rectifica.

c). Etiqueta el punto de intersección como centro O y traza algunas *circunferencias*. Trata de encontrar alguna inscrita o circunscrita, según tenga sentido para el problema del *aspersor* en el ***área*** triangular.

4. Si consideras que has identificado el tipo de *circunferencia* que responde al problema del *aspersor*, reproduce en el *triángulo* de la Figura 4 las rectas trazadas en la hoja donde hiciste los dobleces y la exploración:

a). Traza en este *triángulo* las rectas que bisecan sus *ángulos internos* (sigue las instrucciones dadas en el recuadro o consulta el *applet* *Trazodebisectriz.ggb*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx)*, y señala el punto de intersección de esas rectas, llámale O.

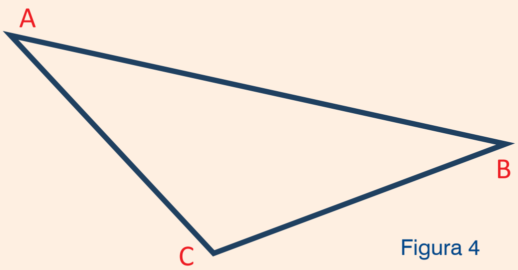
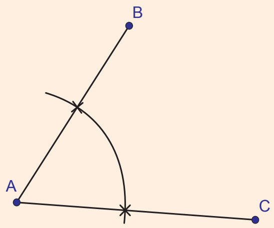
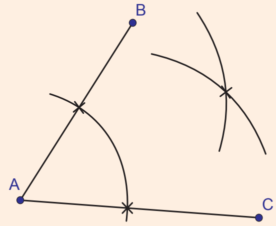
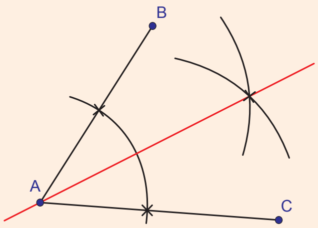


Figura 4

Dado el ángulo **CAB**, *trazar con regla y compás la línea que lo biseca.*







1. *Apoya tu compás en* A *y con una abertura adecuada, traza un* ***arco*** *que interseque los lados del ángulo. Marca los puntos de intersección.*

2. *Apoya tu compás en uno de los puntos de intersección; abre tu compás un poco más y traza un* ***arco*** *de circunferencia; con la misma abertura traza otro* ***arco*** *apoyándote en el otro punto marcado. Señala el punto de intersección de ambos* ***arcos****.*

3. *Traza la recta que pasa por* A *y por el punto de intersección de ambos* ***arcos.***

b). Traza la *circunferencia* que consideraste importante para dar respuesta al problema del *aspersor*.

c). Compara tu construcción con las de tus compañeros de equipo y comenten qué tipo de *circunferencia* es (inscrita o circunscrita). En el siguiente espacio explica porqué:

d). Señala los puntos que son comunes a la *circunferencia* y al *triángulo*; nómbralos como P, Q y R únelos con el centro ***O*** ¿Qué elementos de la *circunferencia* son estos tres segmentos?

___

___

___

e). Los *lados* del *triángulo*, ¿Son tangentes o son secantes a la *circunferencia*?

___

___

___

f). ¿Qué tipo de *ángulo* forma cada uno de los segmentos $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$, con el *lado* correspondiente del *triángulo*?

___

___

___

5. Ahora marca sobre la Figura 2 el punto en donde debe colocarse el *aspersor* para que cumpla con las condiciones dadas. Enseguida argumenta por qué ese punto es el adecuado.

___

___

___

___

___

6. Si llamas R al alcance del *aspersor* que cumple con las especificaciones dadas, ¿Cómo calculas el ***área*** que se alcanza a regar?

___

___

___

___

___

7. ¿Qué datos necesitas para calcular el ***área*** que queda sin regar?

___

___

___

___

___

Actividad: 3

Para dar respuesta al problema de la *colocación del centro de abastos de materiales*, deberás seguir también un procedimiento de dobleces, pero las rectas que vas a construir las harás de diferente manera:

1. Traza en la mitad de una hoja blanca un *triángulo* parecido al formado por las rectas que conectan *los tres albergues* que se van a remodelar (Ver Sección de Inicio), representados en la Figura 5. Nombra los vértices del *triángulo* como A,B y C

Figura 5

2. Doblando adecuadamente el papel, encuentra el punto medio de un *lado* del *triángulo*. Remarca con lápiz o pluma la línea de doblez que lo determinó.

   a). ¿Qué tipo de *ángulos* forman entre sí el *lado* del *triángulo* y la línea del doblez?

   ____
   ____
   ____

   b). ¿Qué nombre reciben las rectas que forman *ángulos* de este tipo?

   ____
   ____
   ____

   c). Haz lo mismo con los otros *dos lados*.

   ____
   ____
   ____

3. Localiza el punto donde se intersecan las tres rectas remarcadas. Si no se intersecan las tres es que algún doblez estuvo mal hecho o mal remarcado, o bien se sale de la hoja, en cuyo caso es recomendable que dibujes de nuevo tu *triángulo* en una hoja más grande. Llámale ***D*** a ese punto de intersección y traza ***circunferencias*** de diferente ***radio***. Explora para que veas si hay alguna que quede inscrita o circunscrita.

4. Reproduce en el siguiente *triángulo* –Figura 6– las líneas rectas que remarcaste en tu hoja (para hacerlo, utiliza regla y compás. Las indicaciones dadas en el recuadro que sigue pueden ser de utilidad, o bien, consulta el *applet* *Trazo perpendiculares*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx.* Señala el punto de intersección ***D*** como centro y traza la ***circunferencia*** que pasa por los tres vértices del *triángulo*. Explica por qué esta ***circunferencia*** te ayuda a verificar que el punto ***D*** equidista de los tres albergues representados por los vértices del *triángulo*.

TIC

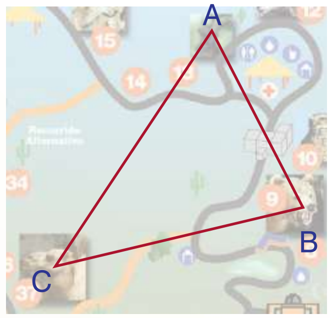
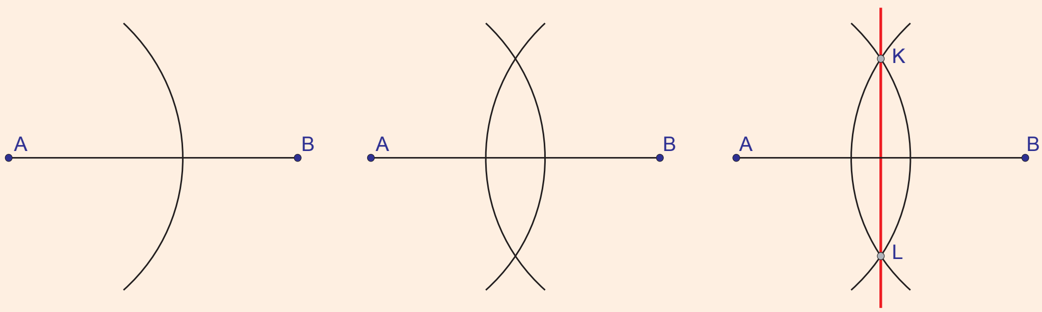


Figura 6

Trazo de una perpendicular con regla y compás:

Dado el segmento $\overline{AB}$, sigue los siguientes pasos para trazar una recta perpendicular en su punto medio utilizando regla y compás:



1. *Apoya tu compás en* A *y con una abertura mayor que la mitad del segmento, traza un arco de circunferencia.*
2. *Con la misma abertura, apoya el compás en* B *y traza otro arco de circunferencia.*
3. *Marca los puntos de intersección de los dos arcos y traza la recta que los une: Esta recta es la perpendicular al segmento* $\overline{AB}$ *en su punto medio.*

5. Une cada uno de los vértices del *triángulo* con el centro ***D***, ¿Qué elementos de la circunferencia son esos segmentos?

____

____

____

6. Señala en el croquis el punto donde deberá colocarse el *centro de abastos de materiales* y proporciona argumentos que sostengan tu elección.

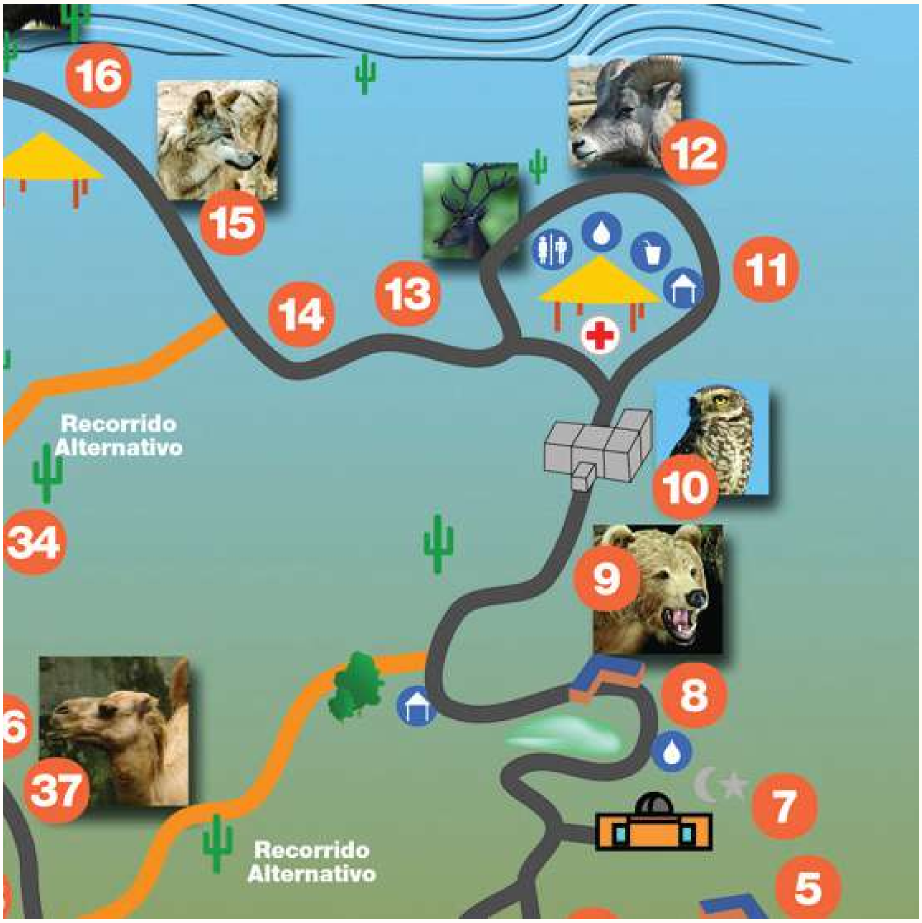


Figura 7

Actividad de Cierre

Hasta aquí has hecho trazos en dos *triángulos* apoyándote en doblado de papel. En la solución de los problemas planteados encontraste el centro de cada una de dos *circunferencias* especiales relacionadas con los *triángulos*: una *inscrita* y una *circunscrita*. Las líneas que te sirvieron para encontrar dichos centros se llaman, respectivamente, *bisectrices* y *mediatrices*.

También tuviste que hacer el trazo apropiado para localizar una *altura* en el *triángulo* y exploraste la localización del punto donde las líneas rectas que contienen esas *alturas* se intersecan.

A continuación organizaremos y definiremos las rectas y puntos notables en los *triángulos*, pidiéndote que realices pequeñas tareas que confirmen un significado adecuado de estos términos:

1. Las *Mediatrices*.

> En un ***triángulo*** hay tres *mediatrices*:
>
> ***La mediatriz*** es una recta perpendicular al ***lado*** del ***triángulo*** en su punto medio.
>
> El punto de intersección de las *mediatrices* se llama circuncentro y es el centro de una ***circunferencia*** *circunscrita* al ***triángulo***.

a). ¿Por qué los vértices de un *triángulo* equidistan del punto de intersección de sus *mediatrices*?

____

____

b). En la Figura 8 verifica con el compás que cualquier punto de la *mediatriz* de un segmento AB equidista de los puntos extremos A y B.

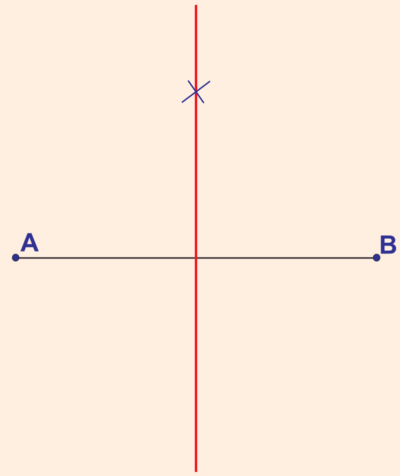
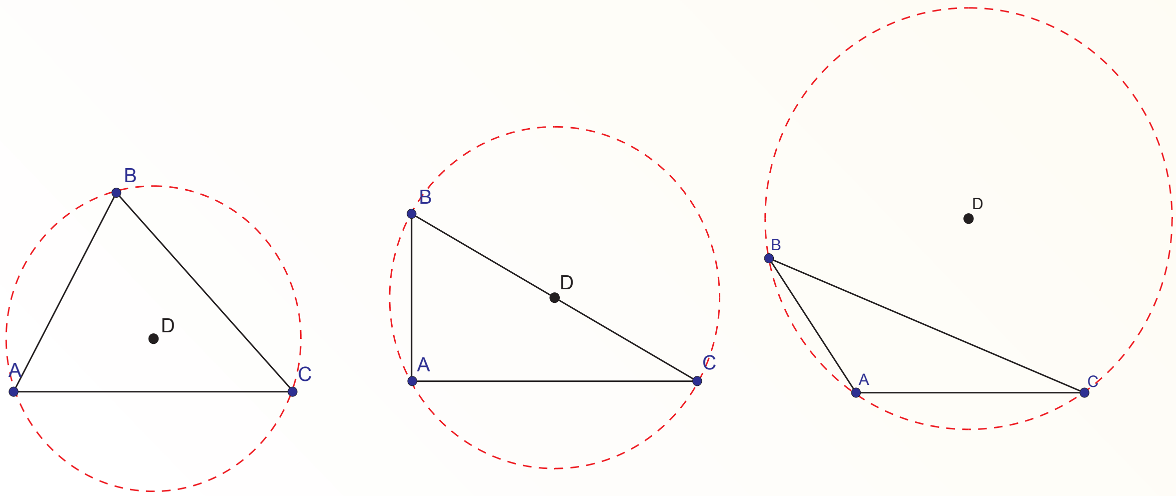


Figura 8

TIC

Observa lo que pasa con el circuncentro ***D*** en cada uno de los *triángulos* en la Figura 9 . Explora en el *applet* *visualiza circuncentro*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx,* si el circuncentro se comporta de acuerdo a lo que observas en esta Figura 9 según el tipo de *triángulo*:

Posición del circuncentro



Triángulo acutángulo *Triángulo rectángulo* *Triángulo obtusángulo*

Figura 9

c). Si en la *Actividad 3* se le pide a **Don Max** que coloque un *centro de abasto de materiales* para cuando inicien las remodelaciones en el albergue de los antílopes, en el de las jirafas y en el de los felinos ¿Conviene que sea colocado en un punto que equidiste de esos tres sitios? En la Figura 1 puedes localizar los sitios mencionados, están etiquetados con los números 36, 29 y 31, respectivamente. *Justifica tu respuesta*.

____

____

____

____

____

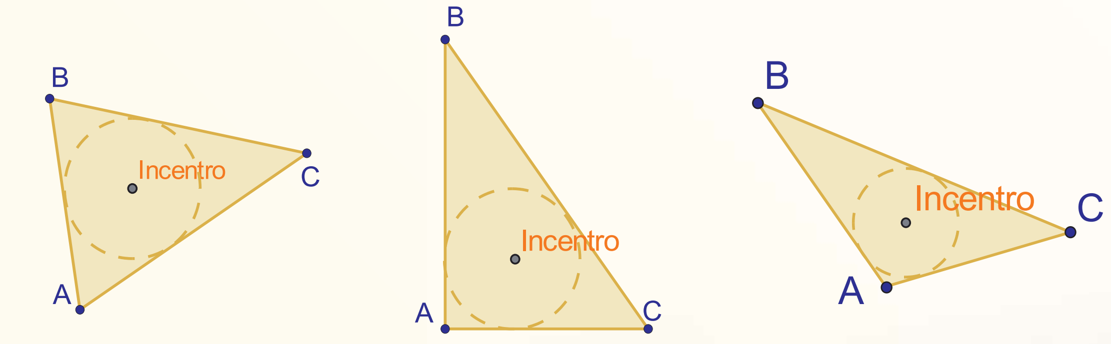
____

2. Las *Bisectrices*.

> En un *triángulo* hay tres *bisectrices*:
>
> **La bisectriz** es una recta que **biseca** (divide en dos partes iguales) el *ángulo **interior*** del ***triángulo***.
>
> El punto de intersección de las *bisectrices* se llama **incentro** y es el centro de una *circunferencia inscrita* al *triángulo*.

Observa lo que pasa con el incentro en cada uno de los *triángulos* en la Figura 10. Explora en el *applet* visualiza incentro , disponible en *appletscobach.mat.uson.mx*, si el incentro se comporta de acuerdo a lo que observas en esta Figura 9 según el tipo de *triángulo*:

Posición del Incentro



Triángulo acutángulo *Triángulo rectángulo* *Triángulo obtusángulo*

Figura 10

a). Cualquier punto en la *bisectriz* de un *ángulo* equidista de sus *lados*.

Verifica esta propiedad en las *bisectrices* que has trazado: recuerda que la ***distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular que la une al punto dado***. En la Figura 11 se muestran los segmentos que parten del punto D de la *bisectriz* del *ángulo* $C\hat{A}B$ y son respectivamente perpendiculares a sus *lados*, toma otro punto de la *bisectriz*; traza las distancias a ambos *lados* del *ángulo* y verifica que son iguales.

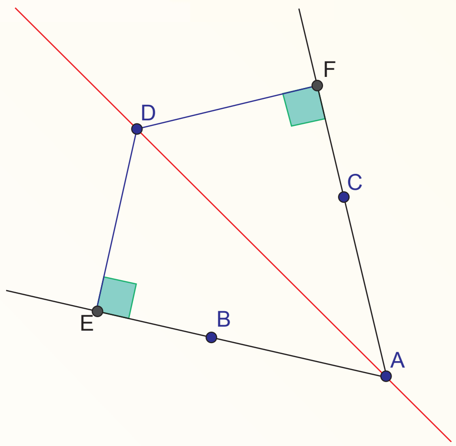


Figura 11

De la misma manera puedes utilizar el *applet* *distancia bisectriz*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx*, para que explores y hagas ahí la verificación pedida.

3. Las *Alturas.*

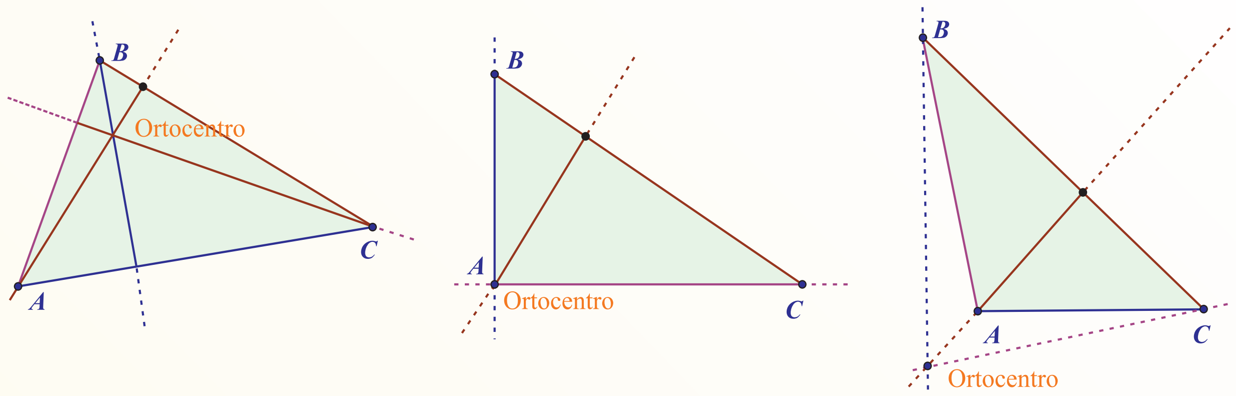
En un *triángulo* hay tres *alturas*:

Cada **altura** es un segmento de recta que parte perpendicularmente desde un vértice hasta el **lado** opuesto o a su prolongación.

La intersección de las tres alturas o sus prolongaciones se llama **ortocentro**.

Observa lo que pasa con el ortocentro en cada uno de los triángulos en la Figura 12. Explora en el *applet* *visualizaortocentros*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx*, si el ortocentro se comporta de acuerdo a lo que observas en esta Figura 12 según el tipo de *triángulo*:

Posición del ortocentro



Triángulo acutángulo *Triángulo rectángulo* *Triángulo obtusángulo*

Punto M de intersección de las alturas de un triángulo

Figura 12

a). En *tres triángulos* distintos, como se muestra en la Figura 13, ¿Qué características tienen en común, dado que las rectas ***a*** y ***b*** son paralelas? ¿Qué características los hacen diferentes?

____

____

____

____

b). ¿Cuál de ellos tiene mayor ***área***? *Justifica tu respuesta.*

____

____

____

____

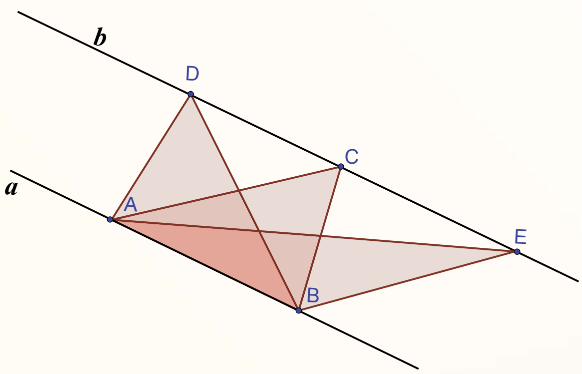


Figura 13

TIC

c). Explora el *applet* *triangulosyparalelas*, disponible en *appletscobach.mat.uson.mx*, para que verifiques tus respuestas.

4. Construye en cada uno de los siguientes *triángulos* (figura 14) el **incentro**, el **circuncentro** y el **ortocentro**. Escribe luego la característica que encuentras en cada uno de ellos.

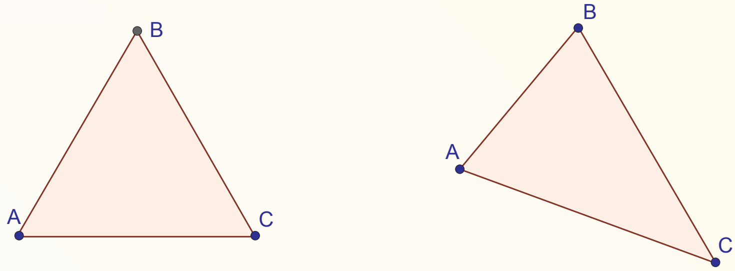


Figura 14

Características de **incentro**:

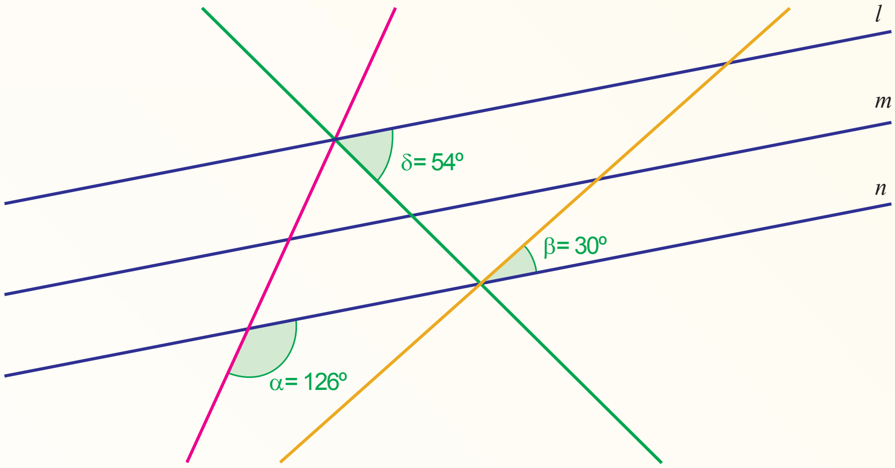
Características de **circuncentro**:

Características de **ortocentro**:

5. Elabora un *Glosario de términos geométricos* utilizados en esta secuencia:

Perpendicular :	Cuando dos rectas se intersecan y forman ángulos adyacentes iguales, se dice que cada recta es una perpendicular a la otra. Los ángulos así formados se llaman rectos.	
Ángulo:		
Triángulo acutángulo:		
Triángulo obtusángulo:		
Triángulo rectángulo:		
Triángulo Isósceles:		
Triángulo Equilátero:		
Triángulo Escaleno:		
Circunferencia:		
	Centro:	
	Radio:	
	Cuerda:	
	Secante:	
	Tangente:	

1. Dadas las rectas paralelas *l, m*, y *n* escribe la medida de todos los *ángulos* que se forman al ser cortadas por *tres rectas transversales*, tomando como base las medidas de los *ángulos* que se muestran. *Justifica tus respuestas*.

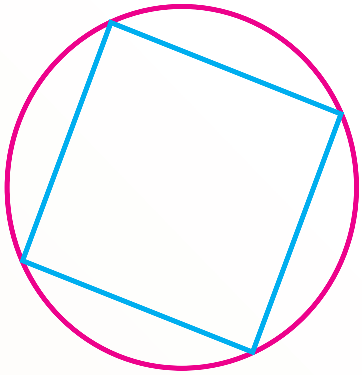


a). Identifica cuántos *triángulos* observas en la figura. Para cada uno de ellos, determina la suma de las medidas de sus *ángulos interiores*.

¿Consideras ésto como una casualidad?

2. Un *cuadrado* está inscrito en una *circunferencia* de ***radio*** $r=8$ *cm*.

a). ¿Cuál es el ***área*** del *cuadrado*? Resuelve mediante dos procedimientos distintos.

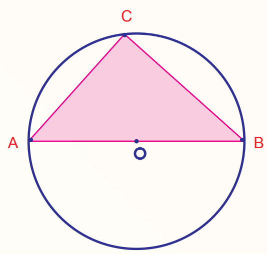


b). ¿Cuál es el ***área*** del *círculo* que queda fuera del *cuadrado*?

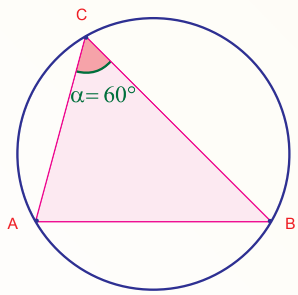
3. La longitud del *lado* de un hexágono regular es 12 cm. Determina los ***radios*** de la *circunferencia inscrita* y *circunscrita*. Encuentra la longitud de los ***arcos*** de cada una de las *circunferencias* correspondientes al *ángulo central* determinado por los *lados* del *hexágono*.

4. Las casas de *Juan, Ricardo y Ana* se encuentran en las esquinas de una manzana *triangular*. La *distancia* entre las casas de *Juan y Ricardo* es de 100 m, la *distancia* entre las casas de *Ricardo y Ana* es de 50 m. Encuentra las *distancias* posibles entre las casas de *Juan y Ana*.

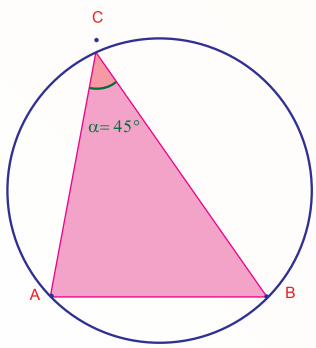
5. Clasifica los *triángulos* inscritos en una ***circunferencia***, según sus *lados* y según sus *ángulos*. En cada caso, analiza los *triángulos* que se formarían al deslizar el punto C sobre la ***circunferencia***, manteniendo fijos los puntos A y B. Utiliza los *applets* *triangulos inscritos*, disponibles en appletscobach.mat.uson.mx. Marca las posibilidades en la tabla contigua y ejemplifica.



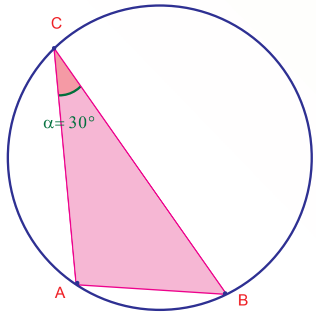
	Escaleno	*Isósceles*	*Equilátero*
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			



	Escaleno	*Isósceles*	*Equilátero*
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

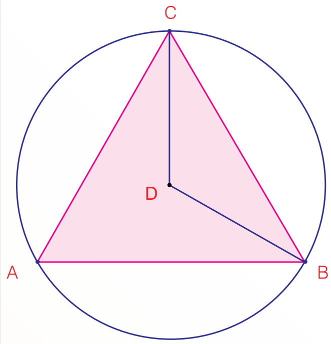


	Escaleno	*Isósceles*	*Equilátero*
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			



	Escaleno	*Isósceles*	*Equilátero*
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

a). Observa el *triángulo equilátero* y su ***circunferencia*** *circunscrita*. Encuentra el valor del *ángulo central* BDC que subtiende el ***arco*** correspondiente a uno de los *lados* del *triángulo*. ¿Qué relación existe entre el *ángulo central* BDC y el *ángulo inscrito* BAC? Investiga si esta relación se mantiene si en lugar del *triángulo equilátero* se tiene un *cuadrado* o un *pentágono regular*. ¿Crees que se puede generalizar la relación para los *polígonos regulares*?



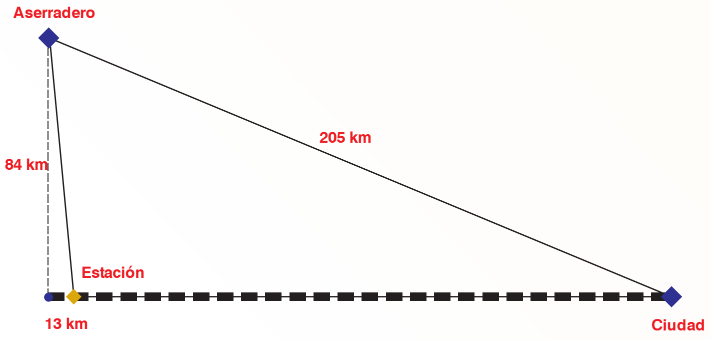
6. Encuentra el ***área*** de un *triángulo equilátero* de *lado* 2. Describe el procedimiento para encontrar la *altura* del *triángulo*.

7. Considera un *triángulo rectángulo isósceles* cuyo *cateto* mide una unidad. Encuentra su ***perímetro*** y su ***área***.

8. Al comprar una escalera de $5\ m$ de longitud, se le advierte al comprador que lo más cercano que puede estar el pie de la escalera del muro donde se recargue es de $1.2\ m$; si se acerca más pierde estabilidad y quien la sube podría sufrir un grave accidente. Bajo esta condición de seguridad, ¿Cuál es la altura máxima que se puede alcanzar al recargar la escalera en el muro?

9. La *diagonal* de un *rectángulo* cuyos *lados* miden $12\ cm$ y $7\ cm$ mide lo mismo que el *lado* de un *cuadrado*, ¿Cuál es la medida de la *diagonal* de ese *cuadrado*?

10. La distancia de un **aserradero** a la vía del ferrocarril es de $84\ Km$ Se necesita transportar la madera a una **ciudad** que se encuentra a $205\ Km$ del **aserradero**, medida la distancia en línea recta. Una **estación** de carga de ferrocarril se encuentra a $13\ Km$ del punto que indica la distancia mínima entre las vías del tren y el **aserradero**. Si el costo del transporte por carretera de cada tonelada de madera por Km cuesta el doble que transportarla por ferrocarril, compara los costos de transporte: ¿Qué opción es menos costosa; llevar la madera por carretera hasta la **ciudad** o llevarla hasta la **estación** de carga por carretera y luego hasta la **ciudad** por ferrocarril?



11. Una de los principales centros de esparcimiento en Chicago es el Navy Pier. Una de sus más visibles atracciones es "The Ferris Wheel" , una rueda que se ve desde la distancia, y a la que todos quieren subir. Se dice que tiene 150 pies de altura y cuenta con 40 góndolas para seis pasajeros cada una.

Encuentra la longitud del arco que une una góndola con otra.

The Ferris Wheel

TIC

Ver más en http://www.hispago.com/lugares-top/navy-pier#sthash.p9Cexxzf.dpuf

a). Si se quiere construir una rueda de la fortuna que tenga 8 metros de diámetro ¿Cuántas góndolas podrían colocarse de modo que la longitud de ***arco*** que las separa sea similar a la de "The Ferris Wheel"?

Autoevaluación

El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

Problema 1. En la siguiente figura se reproduce parte del plano de una colonia de la *Ciudad de Hermosillo* en la que se muestra la ubicación del *Hospital General de la Zona 6 del IMSS*. Una ambulancia tiene varias alternativas para llegar al *Hospital*.

Señala en el plano la medida de los *ángulos* de giro que lleva a cabo en los siguientes casos:

a). Viene circulando de Norte a Sur por la calle Bernardo Reyes y da vuelta sobre la calle Huépac.

b). Circula de Sur a Norte por la calle Bernardo Reyes y da vuelta sobre la calle San Felipe.

c). Viene circulando de Sur a Norte por la calle Gral. José Yáñez y da vuelta sobre la calle San Felipe.

d). Circula de Norte a Sur por la calle Gral. José Yáñez y da vuelta sobre la calle Huépac.

e). ¿Cuál será la ruta más conveniente para salir del *Hospital*, si tomamos en cuenta que la ambulancia habrá de hacerlo a gran velocidad y se dirigirá al este o al oeste? ¿Por qué?

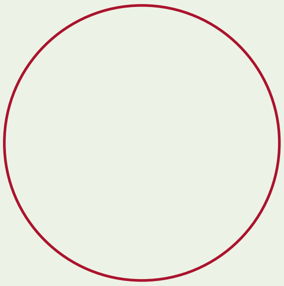
Reflexiones relacionadas con el problema 1:

Señala qué te resultó fácil y qué te resultó difícil al abordar esta situación.	¿Qué contenidos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a abordarla?	¿Cómo puedes validar que tus respuestas son adecuadas?

Problema 2. Realiza las construcciones que se te piden, describe paso a paso tu estrategia para hacerlo y el porqué puedes asegurar que la construcción es la que se solicita:

a). Un *triángulo isósceles*.

b). El *centro* de la siguiente *circunferencia*.



c). Un *triángulo* con *lados* 3 y 7 cm, y *altura* de 4 cms, sobre el *lado* menor.

Reflexiones relacionadas con el **problema 2**:

En relación con la construcción del triángulo isósceles:

¿Qué elementos tienen en común el *triángulo isósceles* que construiste y el de tus compañeros?	¿Qué elementos los hacen diferentes?	Compara la estrategia de construcción que utilizaste con las de tus compañeros. Consideras que es
		✓ Más eficiente
		✓ Menos eficiente
		✓ Igualmente eficiente
		¿Por qué?

Reflexiones relacionadas con el problema 2:

En relación con la construcción del centro de la circunferencia:

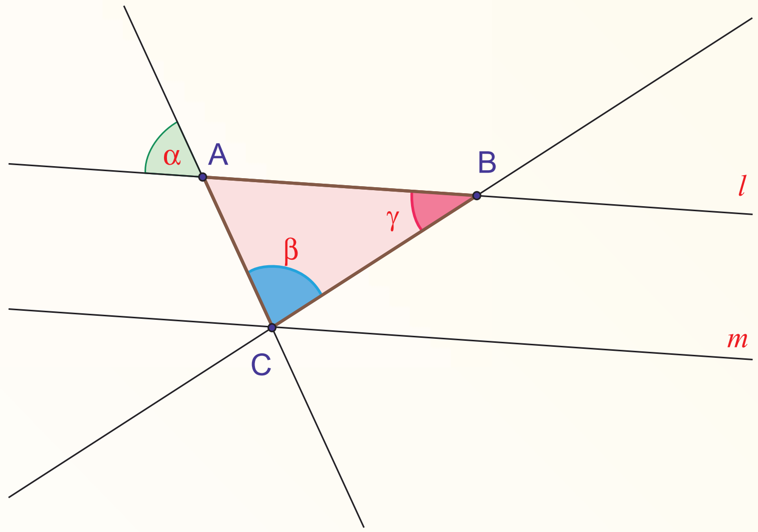
¿Qué conceptos de los estudiados en este bloque, pusiste en juego para encontrar el *centro* de la *circunferencia* dada?	¿Cómo consideras tu estrategia en términos de eficiencia, al compararla con la de tus compañeros? ¿Por qué?

Reflexiones relacionadas con el problema 2:

En relación con la construcción del triángulo, dados dos de sus lados y una altura:

¿Enfrentaste alguna dificultad para realizar la construcción? Si es así, descríbela y comenta con tus compañeros.	¿Se puede construir este *triángulo* si la *altura* se considera sobre el *lado* mayor? Justifica tu respuesta	¿Qué conceptos de los estudiados en este bloque utilizaste para llevar a cabo la construcción?

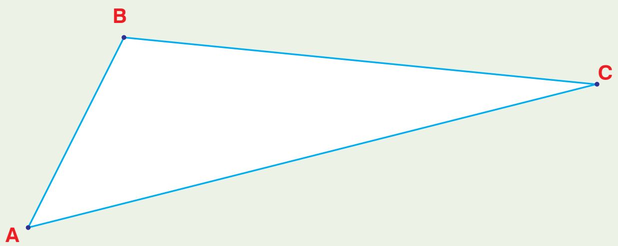
Problema 3. Etiqueta con las letras α, β, γ y operaciones entre éllas, cada *ángulo* de la siguiente figura según corresponda y encuentra el valor de $\alpha+\beta+\gamma$. Toma en cuenta que las *rectas* l y m son *paralelas*.



a). Señala sobre la figura al menos tres maneras de visualizar la suma de $\alpha+\beta+\gamma$.

b). ¿Qué conclusión obtienes con respecto a la suma de los *ángulos interiores* del *triángulo*?

c). Dado un *triángulo* cualquiera **ABC**, ¿Qué construcción debes hacer para mostrar que la suma de sus *ángulos interiores* es siempre la misma? Reprodúcela con el siguiente *triángulo*:



Reflexiones relacionadas con el problema 3:

¿Qué conceptos de los estudiados en este bloque pusiste en juego para resolver la tarea propuesta?	¿Se te dificultó encontrar el valor de la suma de los *tres ángulos* mostrados, $\alpha+\beta+\gamma$? Si fue así, explica qué dificultad tuviste y cómo lograste superarla.	¿Qué resultado general adviertes, una vez hecha la construcción del inciso c) del problema 3?

Reflexiones generales relacionadas con el **BLOQUE 1**:

¿Lograste comunicar tus ideas o puntos de vista al trabajar en equipo o en grupo?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Tomaste en cuenta la participación de tus compañeros para modificar tus respuestas, tus acercamientos a los problemas…etc.?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Lograste interpretar las ideas de tus compañeros al realizar alguna tarea o actividad de clase?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Expresaste alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades a tus compañeros o al profesor?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Te entusiasma ayudar a tus compañeros o que ellos te ayuden a resolver dudas?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
En este bloque me pareció interesante:			

BLOQUE 2

Problemas y situaciones relacionadas con los...

Polígonos, circunferencias y círculos

En este bloque se abordan ***problemas y situaciones*** relacionadas con los *polígonos*, *circunferencias* y *círculos*; en el caso de *polígonos* se abarcan aspectos como su clasificación en *regulares e irregulares*, *ángulos interiores y exteriores*, suma de las medidas de *ángulos interiores*, así como de los *exteriores*. Para el caso de los *polígonos regulares* se proporciona un método para obtener una fórmula de la medida de cada uno de los *ángulos interiores* de un *polígono regular* de n lados, yendo de lo particular a lo general, sin tener que obtener antes una fórmula para la suma total de los *ángulos* de un *polígono arbitrario* de n *lados*.

Otro aspecto en el estudio de los *polígonos* es lo relacionado con la obtención del ***área*** de distintos tipos de ellos, sin restringirse a la aplicación ciega de una fórmula, sino partiendo de actividades que permiten comprender primero el concepto de ***área*** y sus propiedades, desarrollándose métodos ingeniosos para obtenerla y se induce a un trabajo conjunto para construir algunas de las fórmulas más conocidas del ***área*** de algunos tipos de *polígonos*; también se estudia la relación de variación al comparar ***área*** con ***perímetro*** en ciertos *polígonos*.

En cuanto a *circunferencias* y *círculos*, se hace un estudio relacionado con partes importantes como ***cuerdas, arcos, ángulos centrales e inscritos***, estudiando sus *relaciones y propiedades*. Se presentan interesantes actividades relacionadas que permiten comprender las fórmulas que conocemos desde la escuela primaria para obtener el ***perímetro*** y el ***área*** de un *círculo*, conociendo solo su ***radio***.

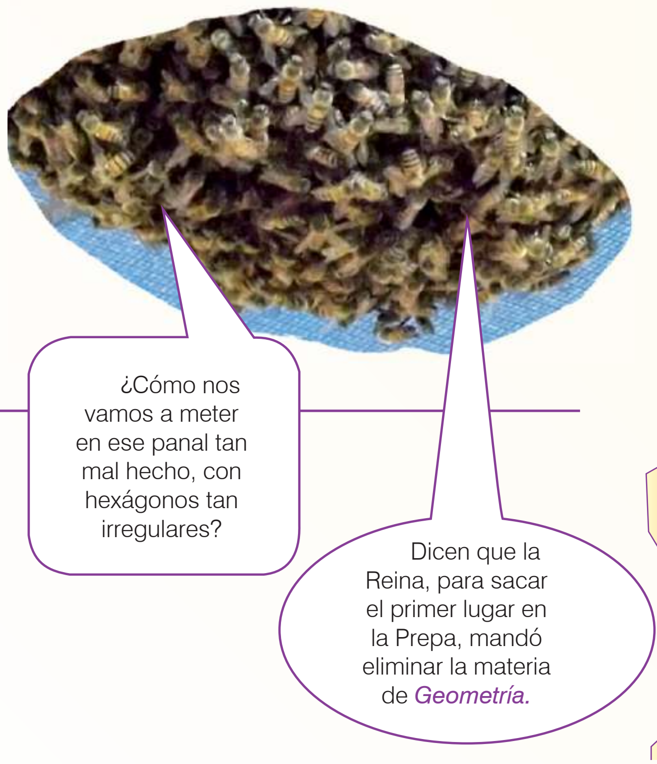
Tanto para propiciar los conceptos mencionados como para afianzarlos, se presentan dominantemente en situaciones contextuales de la vida diaria, que le dan un sentido social y práctico a estas herramientas matemáticas, y aun a las actividades que surgen en un contexto matemático, se procura darles un sentido de aplicación al final, intentando con ello el avance en algunas competencias que se pretenden desarrollar.

Tiempo asignado: 16 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividades de Inicio

Ángulos interiores de los Polígonos



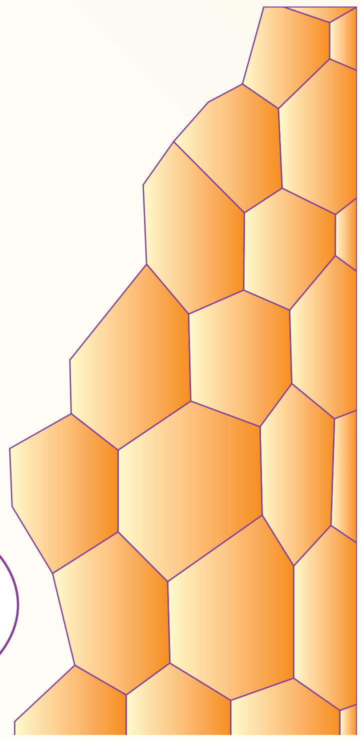


Figura 1.- Panal defectuoso

Miguel Ángel, un estudiante de *Arquitectura*, tiene como tarea diseñar un nuevo tipo de mosaico para piso, diferente en forma y colorido a los convencionales hechos a base de *cuadrados*, para ello, como primera etapa, se propone hacer diseños utilizando solo *polígonos regulares*, ya sea de un solo tipo o combinados. Para ayudar a **Miguel Ángel** en su tarea, hacemos la siguiente actividad.

Actividades Individuales

Actividad: 1

En los siguientes *polígonos*, señala con una X los que consideras son *polígonos regulares* y explica *la razón* de tu elección. Después comenta con tus compañeros de equipo tu elección y tus *razones*.

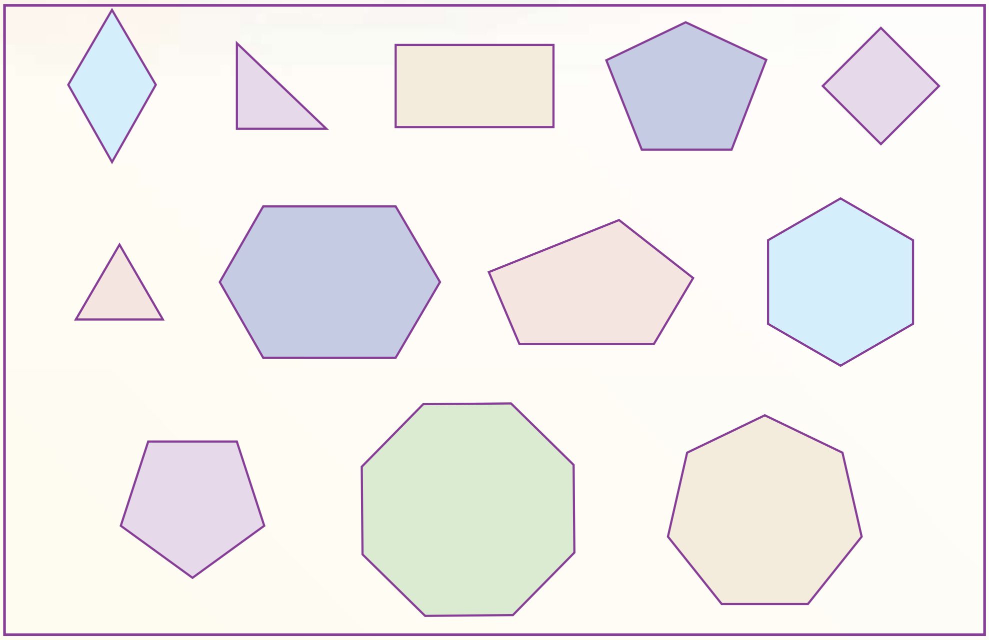


Figura 2.- *Polígonos regulares e irregulares*

De los *polígonos regulares* que se proporcionan en la Figura 2, indica los que consideras sirven por sí mismos, sin necesidad de combinarse con otros, para utilizarse como mosaico para piso e indica *tus razones*.

Puedes utilizar material recortable proporcionado. Se sugiere trabajar en equipo.

Desarrollo

Después de experimentar con las figuras recortables trabajando en equipo, habrás hecho algunas observaciones, por ejemplo, si utilizamos el tradicional diseño de mosaicos basado en *cuadrados*, caracterizado por ser el único *cuadrilátero regular*, por lo que todos sus ***lados*** son iguales entre sí, así como sus 4 *ángulos interiores*, entonces, por servir de mosaico, se acoplan exactamente, por lo que en cada *vértice* concurren 4 *ángulos iguales* completando ***360***°, de donde podemos deducir que cada uno de los *ángulos interiores* mide la cuarta parte de ***360***° equivalente a ***90***°, o sea, los cuatro *ángulos* son rectos. Como resultado de las observaciones hechas para los demás casos, realizamos la siguiente actividad:

Actividades de Equipo

Actividad: 2

Resume en la siguiente **tabla** los resultados obtenidos por tus observaciones directas con los demás ***polígonos regulares*** que se te solicitó observar, si el acoplamiento fue posible, incluyendo posibles combinaciones:

Tabla 1

Polígonos Regulares	Número de lados	Número de *polígonos regulares* que coinciden en un *vértice*.	Medida del *ángulo interior*
Triángulo Equilátero			
Cuadrado			
Pentágono regular			
Hexágono regular			
Heptágono regular			
Octágono regular			
Polígono regular de n lados			

Actividades
Individual y de Equipo

Según lo que observaste en tus experimentaciones, en el caso particular del ***pentágono regular***:

1. ¿Puede utilizarse por sí mismo como mosaico, sin ayuda de otros *polígonos*?

____

____

2. ¿Puede determinarse, por observar el acoplamiento, el valor de cada uno de sus *ángulos interiores*?

____

____

____

____

____

Independientemente de los resultados de tus observaciones previas, analiza la siguiente figura:

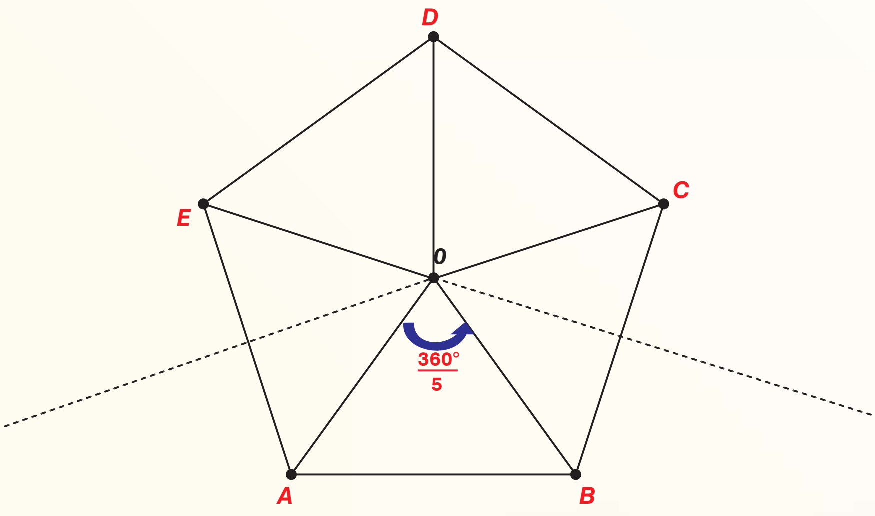


Figura 3.- *Pentágono regular*

Por las propiedades de las *mediatrices* que has estudiado previamente, en cualquier ***polígono regular***, la intersección de *dos mediatrices* de ***dos*** cualesquiera de sus lados, se intersecan en un punto equidistante a todos los *vértices* del ***polígono***, esto lo comprobarás en uno de los ejercicios que tendrás como tarea; en el caso particular del pentágono regular de la Figura 3, continuando con la Actividad 3, contesta las siguientes preguntas:

3.- Al unir el centro O con los cinco *vértices*, ¿cómo son los cinco *triángulos* en que se divide internamente el ***pentágono***?

____

____

4.- ¿Cuánto mide cada uno de los cinco *ángulos centrados* en O (por ejemplo $\angle AOB$)?

____

5.- Aprovechando que el *triángulo* AOB y los otros cuatro son *isósceles* y tienen sus tres ***lados*** respectivamente iguales (***radios*** y ***lados*** iguales), por lo cual son *congruentes* entre sí (Criterio LLL que estudiaste en secundaria y volverás a estudiar en el BLOQUE 3), responde a la siguiente pregunta: ¿cuánto mide él $\angle BAO$?

____

6.- ¿Cuánto mide el $\angle OAE$?

____

7.- ¿Cuánto mide el $\angle BAE$?

____

8.- ¿Cuánto mide cada *ángulo interior* de cualquier ***pentágono regular***?

____

9.- Completa lo que te faltó de la **Tabla 1**.

____

10.- Sabiendo que todos los *ángulos interiores* de un ***polígono regular*** son iguales ¿cuánto es la suma de las medidas de todos los *ángulos interiores* de un ***polígono regular*** de n lados?

____

Actividad de Cierre

Al desarrollar el punto 9 de la *Actividad 3*, generalizando lo que en particular se hizo con el ***pentágono regular***, se espera que hayas seguido un procedimiento en el siguiente orden:

a). Cada uno de los *ángulos* con *vértice* en el centro mide, en grados, $\frac{360}{n}$.

b). La suma de las medidas de los *ángulos iguales* de la base de cada uno de los n *triángulos isósceles* es $180 - \frac{360}{n}$.

c). Con base en lo analizado para el caso particular del ***pentágono regular***, cada uno de los *ángulos interiores* del *polígono regular* de n ***lados*** mide

$$\alpha_n = 180 - \frac{360}{n} = \frac{180n - 360}{n} = \frac{(n-2)\,180}{n}$$

d). Además, como los *ángulos interiores* del *polígono regular* de n ***lados***, por definición, son iguales, el valor de la suma total de las medidas de sus *ángulos interiores* es $S_n = (n-2)180$.

Así como en los *triángulos*, al prolongar uno de sus ***lados***, al *ángulo* formado por la prolongación de un ***lado*** y el ***lado*** adyacente, se le llama *ángulo exterior* (ver figura 4).

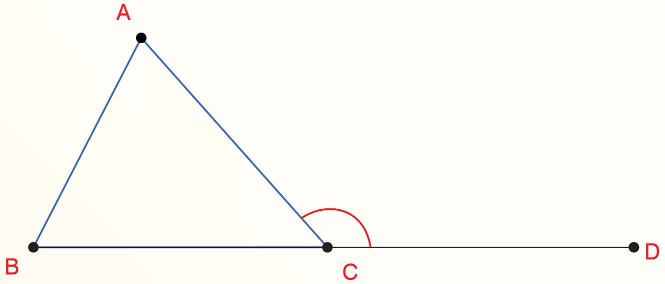


Figura 4.- ∠DCA es exterior

"*También podemos hablar de ángulo exterior en cualquier polígono convexo* [1] *como se ilustra en la figura 5 para el caso del **hexágono regular***".

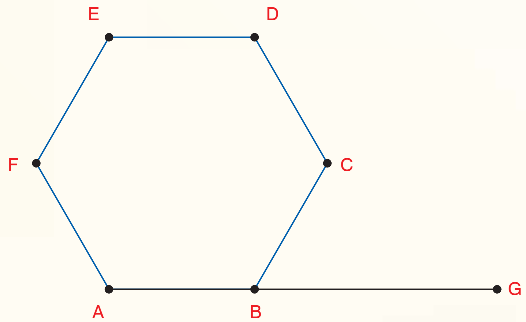


Figura 5.- ∠GBC es exterior

[1] *"Un polígono es convexo, si al unir con un segmento dos puntos cualesquiera del polígono, el segmento queda completamente contenido en el polígono".*

Actividades de Equipo

Actividad: 4

El caso de los *polígonos irregulares*.

Debido a que, por definición, en los *polígonos irregulares* sus *ángulos* no son necesariamente iguales, no es posible obtener una fórmula para conocer el valor de cada uno de los *ángulos interiores* de un *polígono irregular* de n ***lados***, sin embargo, surge la interrogante ¿es posible encontrar una fórmula que nos permita obtener el valor de la suma de las medidas de los n *ángulos interiores* de un *polígono arbitrario* de n ***lados***? En el caso particular de los *polígonos regulares* ya se vio que dicha fórmula sí existe y es $S_n = (n\text{ -}2)180$.

Como primer momento en la búsqueda de una respuesta a la interrogante recién planteada, abre el *Applet* titulado "Angulos exteriores" ubicado en: appletscobach.mat.uson.mx

En él aparece un *polígono* con sus ***lados*** prolongados, definiéndose así sus *ángulos exteriores*; experimenta con el deslizador que aparece en la parte superior y contesta las siguientes preguntas:

¿Qué sucede con el valor de r y con el *polígono* cuando mueves el punto hacia la derecha?

____

____

____

¿Qué sucede con el valor de r y con el *polígono* cuando mueves el punto hacia la izquierda?

____

____

____

¿Qué sucede con el *polígono* cuando el punto del deslizador está por llegar al extremo izquierdo?

____

____

Al variar el tamaño del *polígono* ¿varía la medida de los *ángulos exteriores*?

Cuando el punto del deslizador está en el extremo izquierdo, ¿qué se puede observar acerca de la suma de las medidas de los *ángulos exteriores*?

Por lo observado anteriormente, ¿qué esperas que suceda con la suma de *ángulos exteriores* de un *polígono* si tiene mayor o menor número de ***lados*** del que observaste?

¿Aceptas como verdadera la afirmación enmarcada a continuación?

> En cualquier *polígono* de n ***lados***, *regular* o *irregular*, la suma total de las medidas de sus *ángulos exteriores* es ***360***°.

Actividades de Equipo

En esta actividad responderemos la pregunta de cómo calcular la suma de las medidas de los *ángulos interiores* de cualquier *polígono* de n *lados*.

Si en un *polígono* de n *lados*, sus *ángulos interiores* miden $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\ldots \alpha n$, respectivamente (ver Figura 6), a cada uno le corresponde un *ángulo exterior adyacente suplementario*.

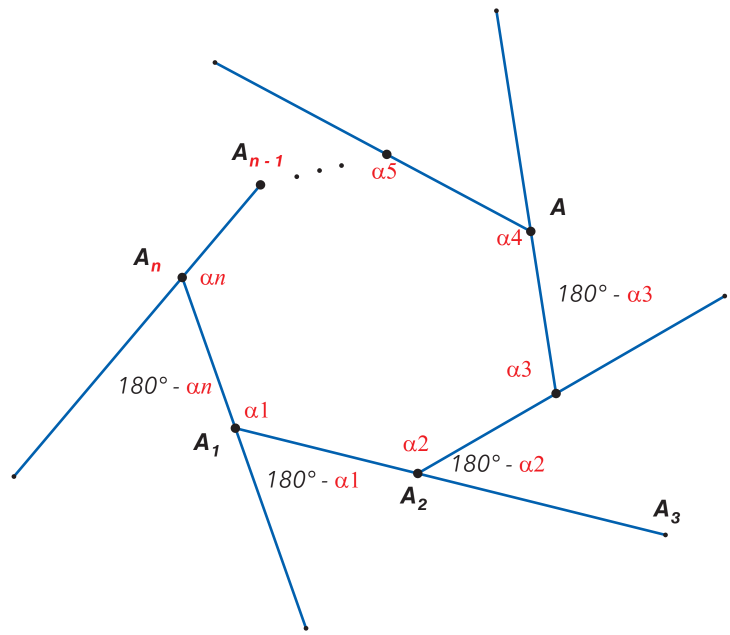


Figura 6.- *Suma de ángulos interiores*

Así, al *ángulo interior* αn le corresponde el *ángulo exterior* $180° - \alpha n$
La expresión para la suma de los *ángulos interiores* del *polígono* sería:

$$I_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$$

Mientras que la suma de los *ángulos exteriores* queda expresada por:

$$En = (180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + (180° - \alpha_3) + \ldots + (180° - \alpha_{n-1}) + (180° - \alpha_n)$$

Según lo que se analizó en la Actividad 4, ¿Cuál es el valor de En?

Observando que en el miembro derecho de la igualdad que define el valor de E_n aparece n veces 180° y aplicando las propiedades asociativa y conmutativa de la suma, la expresión puede reescribirse de la siguiente manera:

$$E_n = 180° \, n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n)$$

Con base en ello, contesta las siguientes preguntas:

¿Cuál es el valor de I_n?

____

¿El valor de I_n es igual a S_n correspondiente a la suma de los *ángulos interiores* de un *polígono regular* de n *lados*?

____

____

Si ya conoces la expresión para I_n correspondiente a la suma de las medidas de los *ángulos interiores* de un *polígono* de n *lados* (*regular* o *irregular*), ¿cómo lo puedes utilizar para obtener la medida de cada *ángulo interior* de un *polígono regular* de n *lados*?

____

____

____

____

____

Con los nuevos conocimientos adquiridos, amplía la **Tabla 1** hasta $n = 20$.

Ahora que ya cuentas con toda esta información, regresa ***al problema*** *inicial de diseño de mosaicos y presenta al menos cinco proyectos diferentes con polígonos regulares, de un solo tipo o combinados.*

Secuencia Didáctica 2.-

Actividades de Inicio

La Geometría de los canales hidráulicos

Actividad: 1

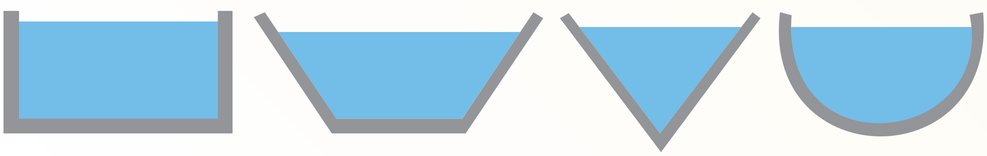
Actividades Individuales

Para la distribución del agua, sobre todo en regiones como la nuestra, donde este recurso es escaso, siempre han sido importantes las herramientas técnicas en la construcción de la infraestructura hidráulica. Los canales diseñados para transportar este líquido, constituyen una parte central de las redes de distribución.

"Por lo que en esta actividad" abordaremos algunos aspectos técnicos relacionados con el diseño de canales artificiales, construídos para que las condiciones de transporte de agua sean las mejores posibles.

Para el diseño de estos canales es importante estudiar sus *secciones transversales*, conocidas también como *secciones hidráulicas*. La ***sección transversal*** de un canal se define simplemente como el “**corte**” perpendicular a la dirección del flujo.

Dependiendo del diseño del canal, las ***secciones*** pueden tener diferentes formas, siendo las más frecuentes, las siguientes:



Rectangular *Trapezoidal* *Triangular* *Circular*

Si se tratara de diseñar un canal, ¿cuál de las formas anteriores preferirías? Justifica tu respuesta.

____
____
____
____
____
____

Hay una serie de conceptos en ingeniería que están relacionados con estas ***secciones***, damos una lista a continuación de los más importantes.

1. ***Área hidráulica*** o ***área mojada*** (A). Es el ***área*** de la *sección transversal* que ocupa el líquido.

2. ***Perímetro mojado*** (P). Es la ***longitud*** de la línea de contorno del ***área mojada*** entre el agua y las paredes del canal.

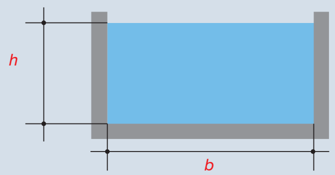
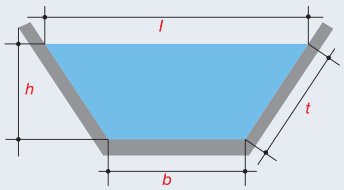
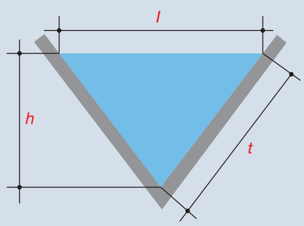
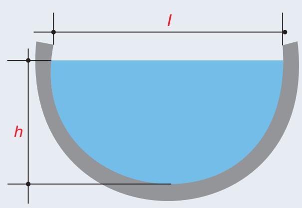
3. ***Radio hidráulico*** (R). Es la relación del ***área mojada*** con respecto a su ***perímetro mojado***, se calcula como el cociente:

$$\boxed{R=\frac{A}{P}}$$

Actividades de Equipo

Actividad: 2

1.- Para cada una de las ***secciones*** siguientes, expresa los parámetros solicitados, en términos de las literales usadas en los dibujos.

Secciones	*A*	*P*	*R*
			
			
			
			

2.- Como se ha visto hasta aquí, las ***secciones*** de los canales tienen formas y tamaños distintos. Al diseñar un canal, habrá que seleccionar primero la forma que tendrá su ***sección*** y luego escoger las dimensiones. Por los costos que tiene el recubrimiento de los canales, lo más conveniente es estimar lo que será el ***área mojada*** y luego minimizar el ***perímetro mojado***.

a). Supongamos que se requiere construir un canal de ***sección rectangular***. Por el volumen de agua que se quiere transportar, se desea que su ***sección*** tenga ***área*** de $72\ m^2$. En la siguiente tabla propón dos ***secciones rectangulares*** distintas que tengan todas $72\ m^2$ de ***área*** y luego completa los cálculos.

Sección rectangular	A	P	R
Dibujo	$72\ m^2$		
Dibujo	$72\ m^2$		

b). ¿Cuál de los dos diseños será mejor? Justifica la respuesta

____

____

____

c). "Usa la calculadora para proponer en la siguiente **tabla**, la ***sección rectangular*** cuya ***área*** sea de $72\ m^2$, y que tenga el menor ***perímetro mojado***".

Sección rectangular	A	P	R
Dibujo	$72\ m^2$		

d). Compara tus resultados con los obtenidos por otros equipos, para verificar si se ha encontrado el menor ***perímetro mojado***.

3.- Si la forma seleccionada para la ***sección*** del canal fuese *trapezoidal*, habría que escoger las dimensiones del *trapecio* que representa el ***área mojada***. Para calcular el ***área*** de un *trapecio* es suficiente contar con las medidas de la base menor, la base mayor y la *altura*, pero estas dimensiones son insuficientes para calcular el ***perímetro mojado***. En la Figura 2 se muestra el ejemplo de un *trapecio* de ***área*** igual a $72\ m^2$ y en el que se sugiere una manera de calcular los ***lados*** no paralelos.

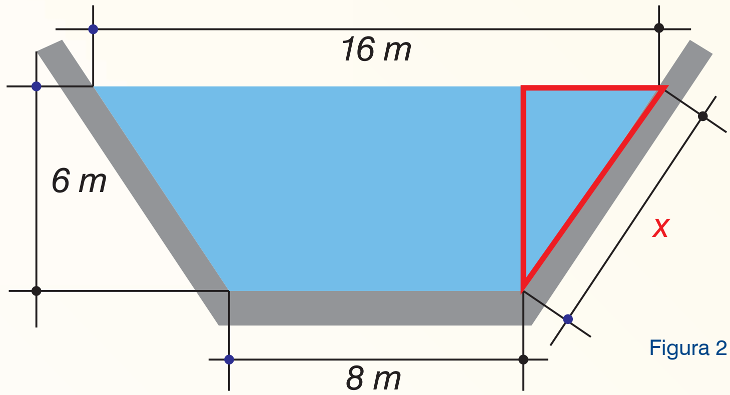


Figura 2

a). Supón ahora que la forma que se ha escogido para la ***sección*** es *trapezoidal* y de nuevo se desea que su ***sección*** tenga $72\ m^2$ de ***área***. En la siguiente tabla propón dos ***secciones trapezoidales*** distintas que tengan ambas $72\ m^2$ de ***área*** y luego completa los cálculos.

Sección trapezoidal	A	P	R
Dibujo	$72\ m^2$		
Dibujo	$72\ m^2$		

b). ¿Cuál de los dos diseños será mejor? Justifica tu respuesta.

c). Usa la calculadora para proponer en la siguiente **tabla**, la ***sección trapezoidal***, cuya ***área*** sea de $72\ m^2$, y que tenga el menor ***perímetro mojado***.

Sección trapezoidal	A	P	R
Dibujo	$72\ m^2$		

d). Compara tus resultados con los obtenidos por otros equipos, para seleccionar el menor ***perímetro mojado*** encontrado en el grupo.

4.- Abre el *applet* canaltriangular, en la dirección: appletscobach.mat.uson.mx, en pantalla observarás una construcción como la que se muestra en la Figura 3.

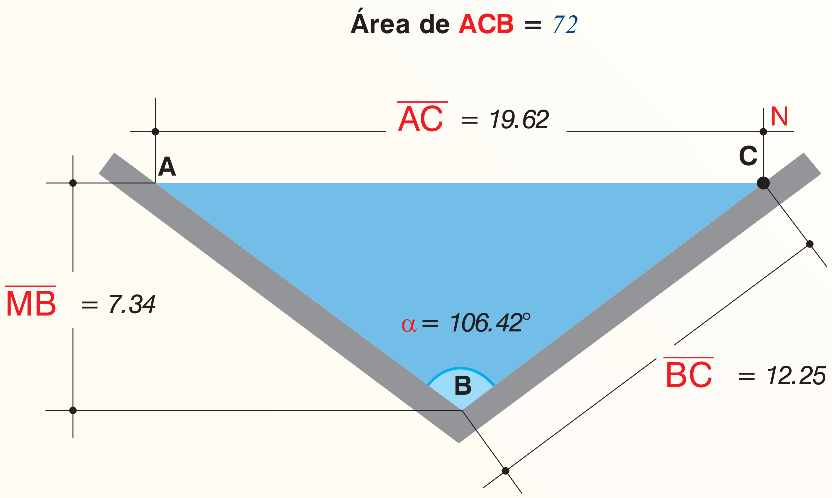


Figura 3

5.- En el *applet* anterior, al *"arrastrar"* en pantalla el punto C, las dimensiones del *triángulo* ABC cambiarán, pero dicho *triángulo* conservará la misma ***área*** de $72\ m^2$.

a). Arrastra el punto C hasta obtener el menor ***perímetro mojado*** de la ***sección triangular***. Usando los datos de la ***sección*** obtenida, completa la **tabla** siguiente.

Sección triangular	A	P	R
Dibujo	$72\ m^2$		

b). ¿Qué tipo de *triángulo* corresponde a la ***sección*** de menor ***perímetro mojado***?

____

6.- Si la forma de la ***sección*** del canal fuese semicircular (Figura 4), y el ***área mojada*** fuera la misma ($72\ m^2$):

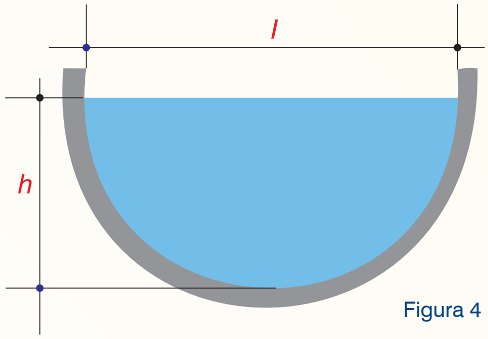


Figura 4

a). Calcula el valor del ***radio*** del semicírculo, representado en la Figura 4 con la letra h.

____

____

____

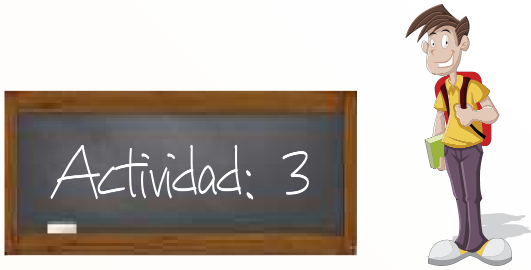
____

____

b). Usa el valor de h para completar la **tabla** siguiente:

Sección semicircular	A	P	R
Dibujo	$72\ m^2$		

Actividad de Cierre



Actividades de Equipo

Para cada una de las cuatro formas de ***secciones*** analizadas, se tienen unos diseños mejores que otros. En cada caso, un canal está mejor diseñado que otro, si su ***perímetro mojado*** es menor, para la misma ***área mojada***.

Otra manera de establecer si un canal tiene mejor diseño que otro, consiste en comparar los radios hidráulicos respectivos; como todos los casos analizados se refieren a la misma ***área mojada***, entonces cuando P sea mínimo, R será máximo. Podemos decir en resumen que el diseño de un canal es mejor que otro, si su radio hidráulico es mayor.

a). Concentra en la tabla siguiente, los datos que corresponden a cada uno de los canales mejor diseñados de cada forma.

Sección semicircular	A	P (mínimo)	R (máximo)
Sección rectangular Dibujo	$72\ m^2$		
Sección trapezoidal Dibujo	$72\ m^2$		

Sección semicircular	A	P *(mínimo)*	R *(máximo)*
Sección rectangular Dibujo	$72\ m^2$		
Sección trapezoidal Dibujo	$72\ m^2$		

b). ¿Cuál de las cuatro formas analizadas debe usarse para construir un mejor canal? Justifica tu respuesta con base en los datos de la **tabla** anterior.

____

____

____

____

c). En los canales que tú has visto construidos, ¿se ha utilizado el mejor diseño posible?

____

____

____

____

____

____

d). Si tu experiencia te dice que no siempre se utilizan las formas y dimensiones que ofrecen el mejor diseño posible de canales hidráulicos, ¿a qué crees que se deba? Ofrece dos posibles razones.

1.- ____

____

____

____

____

2.- ____

____

____

____

____

BLOQUE 2

Secuencia Didáctica 3.-

Áreas y Perímetros de Polígonos

Actividades de Inicio

Actividad: 1

Actividades Individuales

Los conceptos de ***área*** y ***perímetro*** están ligados al origen mismo de la Geometría. La versión de Proclo (410-485 D. C.) sobre el surgimiento de esta disciplina, queda resumida en una de sus obras: *"diremos, junto a lo que ha sido narrado por la mayoría, que la Geometría fue descubierta primeramente por los egipcios, y que debió su origen a la medición de tierras. Tuvieron necesidad de ella, en efecto, a causa de las crecidas del Nilo, que borraban los límites propios de cada lote"* (Eggers, 1985).

Calcular el ***área*** de una figura, significa encontrar las unidades de ***área*** que contiene. En la Figura 1, se muestra un *rectángulo* que ha sido *cuadriculado* y en el que cada *"cuadrito"* representa una unidad de ***área***. Para calcular su ***área***, basta con multiplicar su base por su *altura*, que en este caso es una manera de contar con rapidez, el número de unidades de ***área*** que contiene.

Para calcular el ***perímetro*** del *rectángulo* ABCD, podemos simplemente contar el número de unidades de *longitud* que contiene su contorno, aunque siempre podremos hacerlo de manera más eficiente sumando las medidas de la base y la *altura*, y luego multiplicando el resultado por dos.

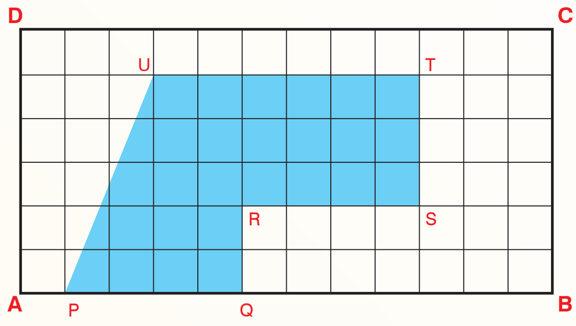
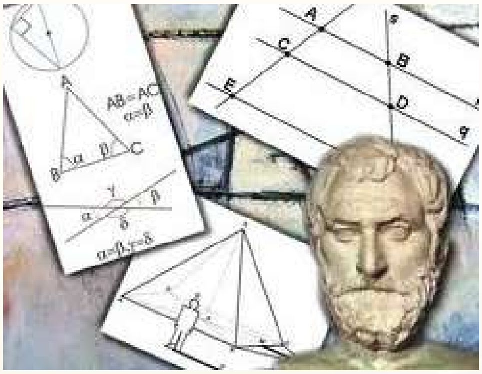


Figura 1



Proclo (410-485 D.C.)

En cambio el ***área*** y el ***perímetro*** de la figura PQRSTU dibujada en su interior, no pueden calcularse del mismo modo.

1.- Calcula el ***área*** de la figura PQRSTU. Explica cómo hiciste el cálculo.

2.- Calcula el ***perímetro*** de la figura PQRSTU. Explica cómo procediste.

3.- Calcular el ***área*** de una figura, consiste esencialmente en encontrar el número de unidades de ***área*** y calcular su ***perímetro*** consiste en encontrar el número de unidades de *longitud* que contiene su contorno; aunque a veces contemos con fórmulas que nos permiten hacer estos cálculos de manera eficiente. En el caso de la figura PQRSTU, se pueden calcular su ***área*** y su ***perímetro*** de manera precisa, aunque no contemos con fórmulas para hacerlo. Sin embargo en otros casos, tendremos que conformarnos con hacer una estimación de estas cantidades.

En la Figura 2 se muestra un mapa de la *Cd. de Hermosillo* (Google, 2013), al que se ha sobrepuesto una *cuadrícula* para subdividir el mapa en unidades de ***área*** de $1\ Km^2$.

a). Usa la *cuadrícula* para hacer una estimación del ***área*** de la ciudad en Km^2

Explica cómo hiciste la estimación.

____
____
____
____
____
____
____
____

b). ¿Podrás hacer una estimación del ***perímetro*** de la ciudad, usando la *cuadrícula* de la Figura 2?

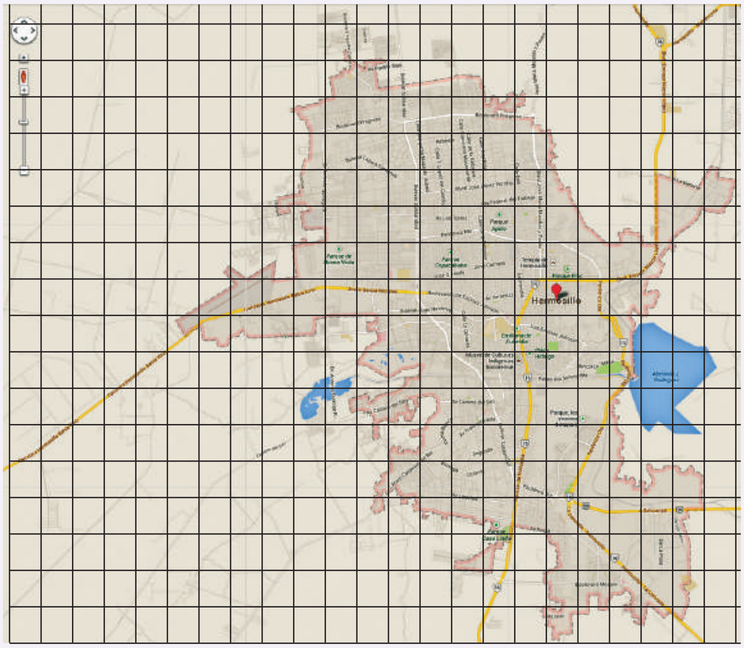


Figura 2

Justifica tu respuesta.

____
____
____
____
____
____
____

Cuadriláteros y triángulos

Actividad: 2

Actividades de Equipo

Las medidas de los ***lados*** del *rectángulo* ABCD (*12* y *6)* mostrado en la Figura 1, son números enteros; es natural que obtengamos como ***área***, un número entero de unidades de ***área*** (*72*). Aunque ésto no suceda, se acepta que el ***área*** de un *rectángulo* se calcule como la multiplicación de la base por la altura. Esto es, si b y h son números reales cualesquiera, (ver Figura 3), se tiene:

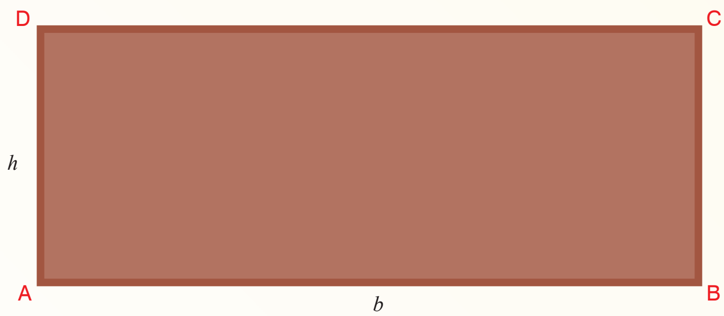


Figura 3

$$A = b \times h$$

1.- A partir de la Figura 3 y de la fórmula para calcular el ***área*** de un *rectángulo*, puede deducirse la fórmula del ***área*** de un *triángulo*. En la Figura 4, explica porqué, si el ***área*** del *rectángulo* ABCD es b x h, entonces el ***área*** del *triángulo* ABE puede calcularse usando la fórmula $\frac{b \times h}{2}$.

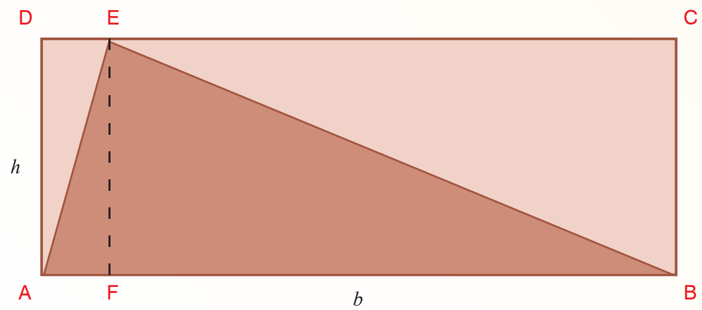


Figura 4

2.- En la Figura 5 se ha dibujado sobre el *rectángulo* ABCD de la Figura 3, un *paralelogramo* que tiene la misma base y la misma *altura* que el *rectángulo*. En ambos casos, el ***área*** se calcula como b x h, lo cual significa que el *rectángulo* ABCD y el *paralelogramo* ABEF tienen la misma ***área***. Usa la Figura 5, para explicar por qué estas ***áreas*** son iguales.

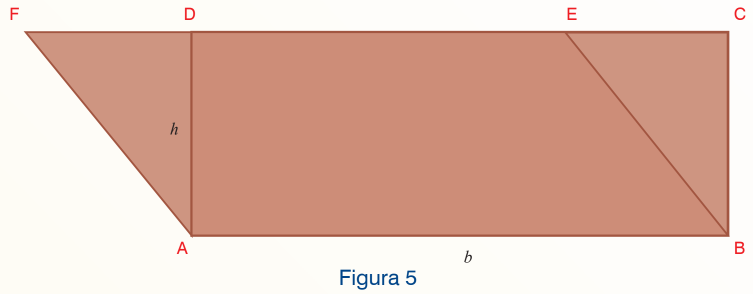


Figura 5

3.- Veamos cómo se obtiene la fórmula para calcular el ***área*** de un trapecio. En la Figura 6 se muestra un *trapecio* ABEF de base mayor $\boldsymbol{B}$, base menor b y *altura* h, enmarcado en un *rectángulo*.

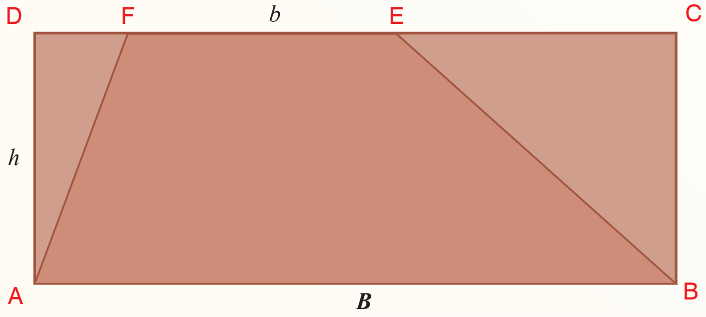


Figura 6

4.- Si recortamos la Figura 6 mediante cortes paralelos a la *altura*, que pasen por F y E, como se muestra en la Figura 7:

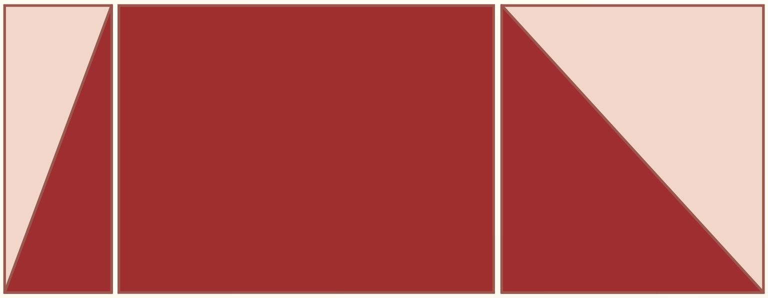


Figura 7

Y luego reacomodamos las partes como se ilustra en la Figura 8:

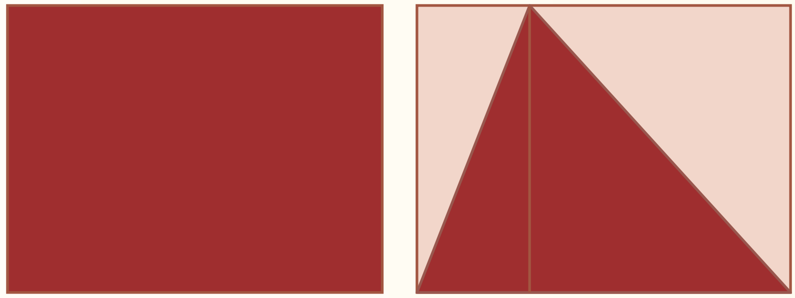


Figura 8

Observa las medidas del *trapecio* en la Figura 6 y responde lo siguiente:

a). Escribe la base y la *altura* del *rectángulo* de la Figura 8, en términos de $\boldsymbol{B}$, b y h.

___

b). Escribe la base y la *altura* del *triángulo* de la Figura 8, en términos de $\boldsymbol{B}$, b y h.

___

c). Expresa las ***áreas*** del *rectángulo* y del *triángulo*, en términos de $\boldsymbol{B}$, b y h. suma estas ***áreas*** y luego simplifica la expresión obtenida. Compara tu resultado con la fórmula más conocida para calcular el ***área*** de un *trapecio*.

5.- En los casos anteriores, del *paralelogramo* y del *trapecio*, se ha usado ***la descomposición y recomposición*** de figuras para obtener las fórmulas que permiten calcular sus ***áreas***. Esto es, se ha cortado la figura en partes apropiadas (***descomposición***) para que al reacomodarlas se transformen en figuras cuya ***área*** sepamos calcular (***recomposición***).

En la Figura 9 se muestra un *cometa*, que en Geometría, se define como un *cuadrilátero* que tiene dos pares de ***lados*** consecutivos iguales.

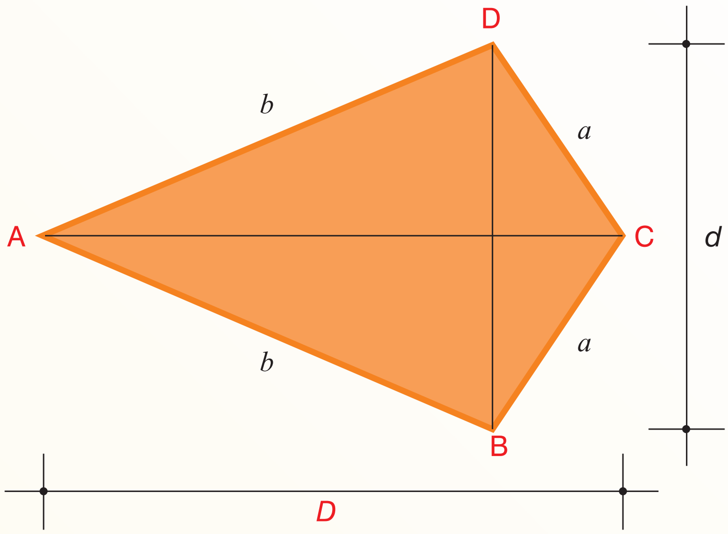


Figura 9

Establece la fórmula para calcular el ***área*** del cometa en términos de sus *diagonales* D y d. Para ello descompón y recompón el *cometa* de la Figura 9, según las indicaciones siguientes:

a). En una cartulina reproduce el *cometa* ABCD de la Figura 9, anotando sobre la cartulina los datos que te parezcan relevantes.

b). Recorta el *cometa* en las partes que te parezca conveniente (***descomposición***), a fin de que puedas armar con las partes otra figura (***recomposición***), cuya fórmula para calcular el ***área*** conozcas.

c). Con las partes que has recortado arma otra figura y calcula su ***área***, en términos de las *diagonales* D y d del *cometa*.

d). Explica cómo procediste y por qué consideras que la fórmula que encontraste es correcta.

Actividad: 3

Polígonos regulares

Desde la escuela primaria has visto cómo se calcula el ***área*** de un *triángulo*. En la *Actividad* anterior se dieron además, algunos argumentos para justificar por qué la fórmula para calcular esta ***área***, está dada como: $\frac{b \times h}{2}$. La insistencia en esta fórmula se debe a que puede aplicarse en el cálculo del ***área*** de cualquier *polígono*; su utilidad es evidente, si se toma en cuenta que no existe una fórmula para calcular el ***área*** de un *polígono* cualquiera. En las Figuras 10 y 11 se muestran dos *polígonos* que han sido triangulados con el propósito de calcular sus respectivas ***áreas***. Este método de triangulación es conocido en topografía y se usa para calcular ***áreas*** de terrenos irregulares: triangulado el *polígono* se toman medidas sobre los *triángulos* que permiten calcular sus ***áreas***, el ***área*** del *polígono* será entonces *la suma de las **áreas** de todos los triángulos en los que se ha **descompuesto***.

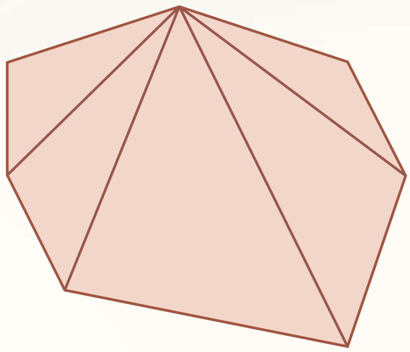


Figura 10

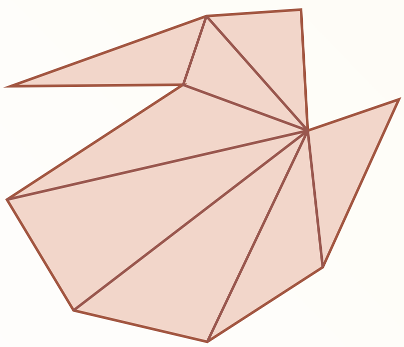


Figura 11

El método topográfico mencionado se basa en que siempre podremos subdividir un *polígono* en *triángulos* y calcular su ***área*** por partes, no importa que se trate de *polígonos irregulares*, como los mostrados en las (Figuras 10) y 11; tampoco importa si el *polígono es convexo* (Figura 10), o es *no convexo* (Figura 11).

En el caso particular de los *polígonos regulares*, ***la descomposición*** puede hacerse siempre en *triángulos isósceles*, a partir del centro del *polígono*. Si tenemos, por ejemplo, un *heptágono* regular de ***lado*** L y apotema a, como el mostrado en la Figura 12.

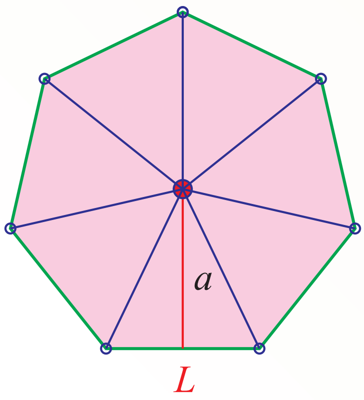


Figura 12

Observa que la apotema a es la *distancia* entre el centro del *polígono* y uno cualquiera de sus ***lados*** y por lo tanto será la *altura* de uno de los *triángulos isósceles* en los que se ha dividido el *heptágono*.

Si ahora recortamos y luego alineamos los *triángulos* de la Figura 12, podemos *recomponer* los *triángulos* que integran el *heptágono* hasta *"acomodarlos"* como en la Figura 13. Con el *applet* llamado area_de_polígonos_regulares podrás hacer todo esto de manera dinámica, con otros ***polígonos regulares***.

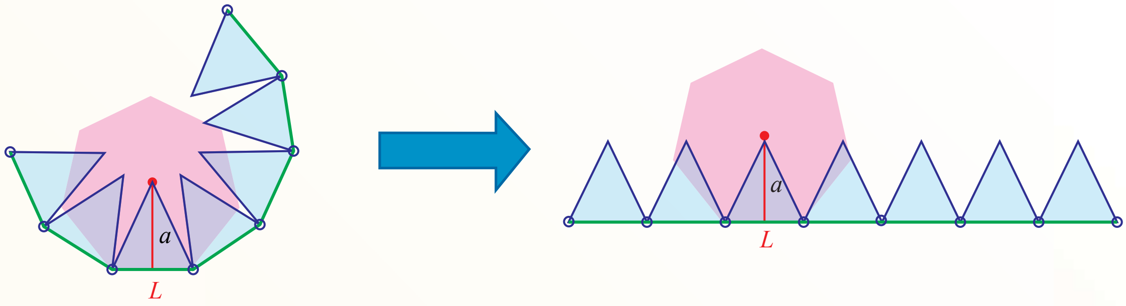


Figura 13

Una vez alineados los *triángulos*, podemos trazar un *rectángulo* que los contenga, observa la Figura 14 y responde las preguntas siguientes:

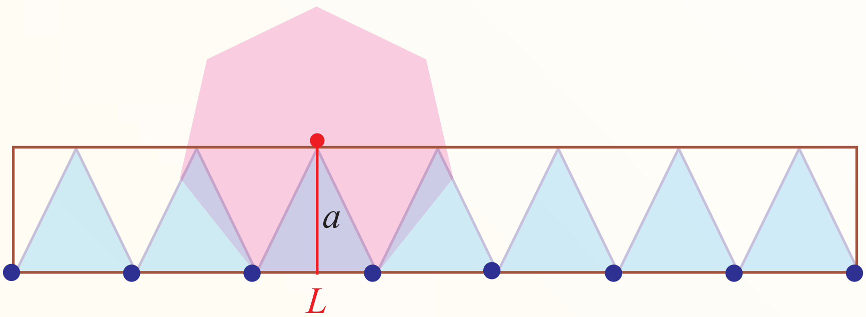


Figura 14

a). ¿Qué parte del *heptágono* original representa la base del *rectángulo*?

____

____

b). ¿Cómo expresarías el ***área*** del *rectángulo*?

____

____

c). ¿Qué parte del *rectángulo* ocupan los siete *triángulos* interiores del *heptágono*?

____

____

d). ¿Cómo expresarías el ***área*** del *heptágono*?

____

____

Actividad de Cierre

Actividad: 4

Actividades de Equipo

Resolver problemas geométricos eficientemente exige el uso de algunas fórmulas que ya hemos empleado en esta **secuencia**, pero la noción de ***área***, como cantidad de unidades que contiene una superficie delimitada, se requiere para ***resolver problemas*** ahí donde las fórmulas no funcionan. En esta actividad redondearemos algunas ideas sobre ambas cosas.

1.- El rectángulo MNOP de la Figura 15 tiene una ***área*** de *24* unidades y un ***perímetro*** de *22* unidades.

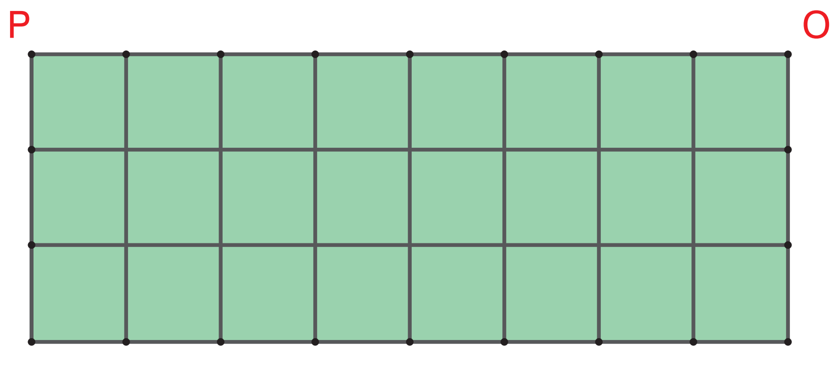


Figura 15

a). Reacomoda las unidades de ***área*** contenidas en MNOP, para formar otro *rectángulo* que tenga la misma ***área***, pero un ***perímetro*** mayor. Dibuja aquí tu nuevo *rectángulo*.

b). Ahora reacomoda las unidades de ***área*** contenidas en MNOP, para formar otro *rectángulo* que tenga la misma ***área***, pero un ***perímetro*** menor. Dibuja aquí tu nuevo *rectángulo*.

c). ¿Habrá algún *rectángulo* que tenga una ***área*** de *24* unidades, pero tenga el menor de todos los ***perímetros***? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

2.- En la Figura 16 se ha trazado un *cuadrado* con *8* unidades por ***lado*** y en este *cuadrado* se ha inscrito un *octágono*.

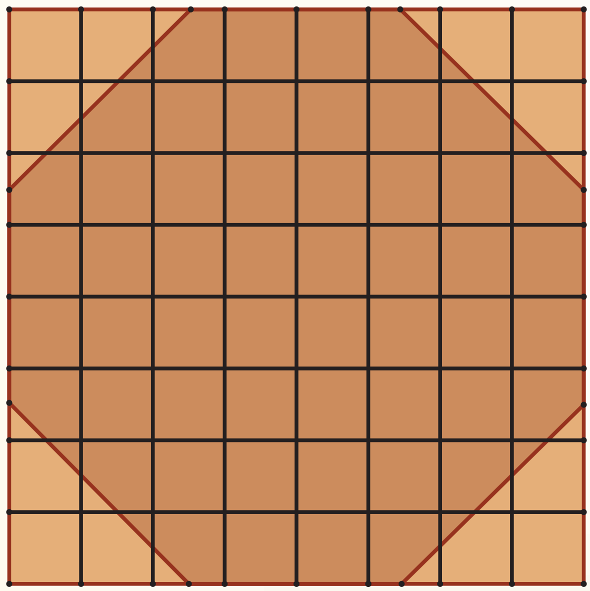


Figura 16

a). ¿El *octágono* inscrito es un *octágono regular*? Justifica tu respuesta

b). Calcula el ***área*** del *octágono*, contabilizando las unidades de ***área*** que contiene.

c). Ahora calcula la misma ***área*** del *octágono* mediante la ***descomposición*** y ***recomposición*** de figuras.

d). ¿Cuál de los dos métodos prefieres? Justifica tu respuesta.

e). ¿Cuál de los dos ***polígonos*** tiene mayor ***perímetro***, el *octágono* o el *cuadrado*? Justifica tu respuesta.

3.- En la Figura 17 se ha construido el *cuadrado* ABCD cuya ***área*** es de *4* unidades y luego se ha construido el *cuadrado* EFBD.

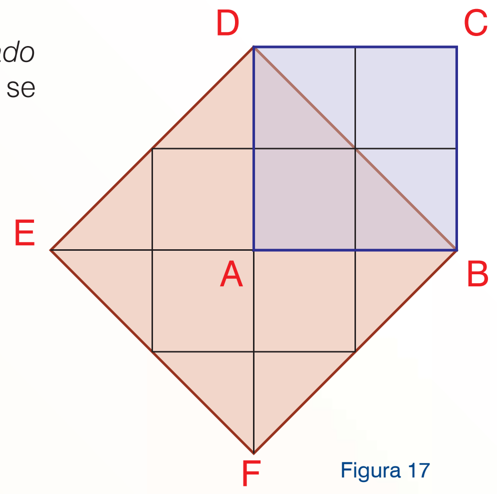


Figura 17

a). Calcula el ***área*** del *cuadrado* EFBD.

b). ¿Qué método usaste para calcular el ***área***? Justifica por qué seleccionaste ese método.

____

____

____

____

c). Calcula el ***perímetro*** del *cuadrado* EFBD.

Secuencia Didáctica 4.-

Actividades de Inicio

La Geometría del riego por aspersión

Actividad: 1

Actividades Individuales

En regiones desérticas como la que habitamos, es un asunto de primera importancia administrar el consumo de agua. Según datos de la *FAO*, en nuestro país el *77%* de los recursos hídricos disponibles se consumen en actividades agrícolas. Pero, según la *Conagua* (*2011*, p. *49*) en el Estado de Sonora, casi el *85%* del agua se destina a la agricultura.

El alto nivel de consumo agrícola del agua se debe a varios factores que no analizaremos aquí, pero uno de esos factores es el uso generalizado de técnicas deficientes de riego, como el riego por inundación (total o por surcos). Estas técnicas resultan económicas para el agricultor, pero representan un alto desperdicio de agua. De aquí la necesidad de promover técnicas modernas de riego, una de estas técnicas se conoce como ***riego por aspersión***.

La *FAO* (*2008*, p. *32*) estima que los sistemas de riego por inundación alcanzan una eficiencia entre el *40%* y *65%*, mientras que los sistemas de ***riego por aspersión*** tienen una eficiencia que fluctúa entre el *80%* y el *85%*. Esto datos nos dicen que los primeros pueden desperdiciar más de la mitad del agua que utilizan, mientras el desperdicio en los segundos es menor al *20%*. Las ventajas de instalar estos sistemas modernos de riego son obvias, sobre todo en Estados como el nuestro en el que el agua es cada vez más escasa. Además del ahorro de agua, estos sistemas producen un menor daño sobre las plantas y permiten distribuir el agua de manera más homogénea sobre el cultivo.

El riego por aspersión consiste en la instalación de un sistema de tuberías y aspersores que simulan el fenómeno de lluvia. ***Un aspersor*** es un mecanismo diseñado para esparcir un líquido a presión, los que se usan en los sistemas de riego son giratorios y al girar lentamente mojan un círculo de manera progresiva. También existen ***aspersores*** que sólo giran *ángulos* de *180°* ó *90°*.

1.- Para regar un *jardín cuadrado* que tiene *10 m* por ***lado***, se han instalado dos ***aspersores*** en los puntos B y D que giran un *ángulo* de *90°* y tienen ***radio*** de alcance de *10 m*. Como puede verse en la Figura 1, al activar ambos ***aspersores***, una parte del *jardín* se riega dos veces y otra solamente una vez.

a). ¿Qué ***área*** tiene la *superficie del jardín* que se riega dos veces?

____

____

____

____

____

____

b). ¿Qué ***área*** es más grande, la que se riega dos veces o la que se riega una vez? Justifica tu respuesta.

____

____

____

____

____

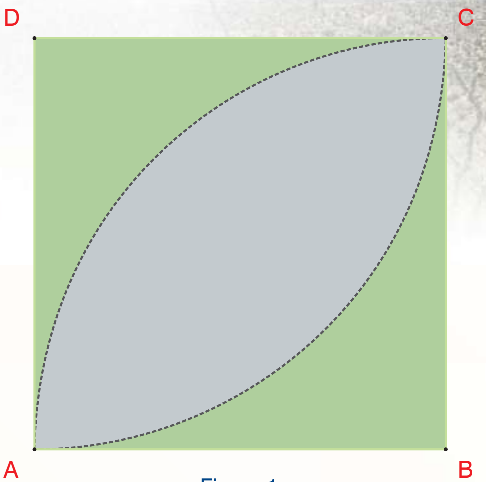


Figura 1

2.- En la Figura 2 se muestra el mismo *jardín* de la Figura 1, pero sin ***aspersores*** instalados. Si quisiéramos regar el *jardín* con un solo ***aspersor***:

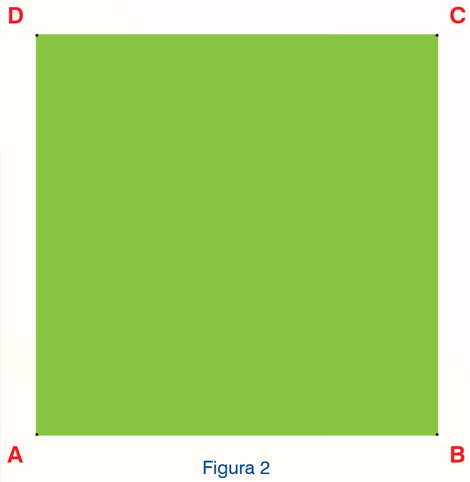


Figura 2

a). ¿En qué punto instalarías el ***aspersor***? Traza este punto en la Figura 2.

b). ¿Qué *ángulo* de giro tendría el ***aspersor***?

____

____

c). ¿Cuánto mediría el ***radio*** de giro del ***aspersor***?

____

____

____

d). ¿Qué ventajas y qué desventajas tendría este ***sistema de riego***, comparado con el que se ha instalado en la Figura 1?

____

____

____

Desarrollo

Actividad: 2

Actividades de Equipo

En el riego agrícola, los ***aspersores*** son instalados sobre los tubos que abastecen de agua al sistema, estos tubos se denominan ***ramales de aspersión***. Para lograr un riego más uniforme es necesario que la superficie regada por cada ***aspersor*** se traslape con las demás. Existe más de una manera de distribuir los ***aspersores*** en la superficie por regar, pero las disposiciones más usuales son ***cuadradas, triangulares y rectangulares***; abordaremos aquí las dos primeras.

1.- Cuando la distribución es ***cuadrada***, los *aspersores* se instalan en los *vértices* de los *cuadrados* en los que se ha subdividido el *terreno*. La determinación del tamaño de los *cuadrados* está sujeta a la regla ilustrada en la Figura 3, en la que r representa el ***radio*** de alcance de los *aspersores*.

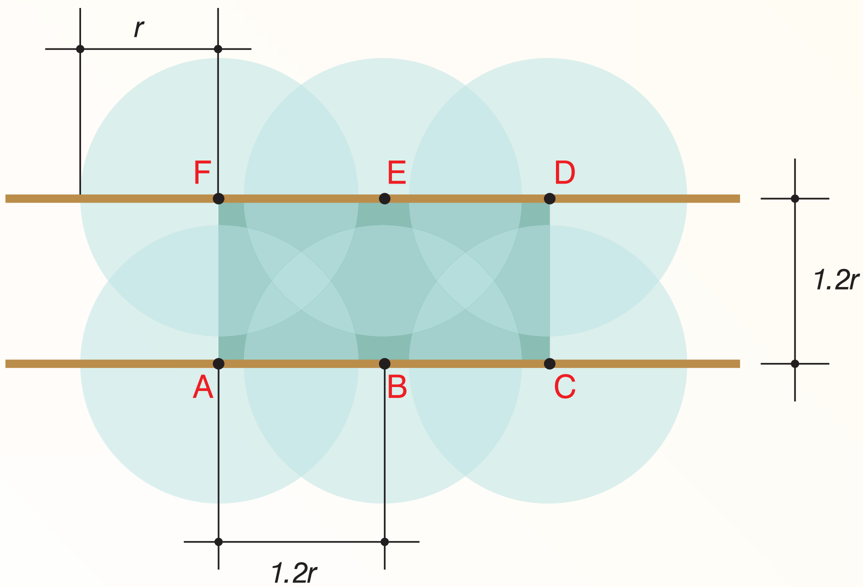


Figura 3

a). ¿Cuál es el *ángulo de giro* de los ***aspersores*** mostrados en la Figura 3?

____

b). Si el ***radio*** de alcance *r* de los *aspersores* a instalar es de *10 m*:

¿Cuál será la *distancia* que separe los ***ramales de aspersión?***

____

¿Cuánto medirá el ***lado*** de los *cuadrados* en los que se ha subdividido el *terreno*?

____

¿Cuánto será el ***área*** de cada uno de estos *cuadrados*?

____

c). Como puede verse en la Figura 3, los ***aspersores*** riegan el *terreno* más de una vez, debido a los *traslapes* de las superficies que cubren. Señale con el *número 1*, en la Figura 3, las regiones que el *sistema* riega una sola vez, con un *2* las que riega dos veces y así sucesivamente, hasta que todas las regiones de los *cuadrados* estén señaladas por un número.

d). Si *u* es la cantidad de agua requerida por el *sistema*, para regar un *cuadrado* una sola vez (cosa que no ocurre). ¿Cuántas *u* de agua consume aproximadamente el *sistema*, para regar cada *cuadrado*?

____
____
____

2.- Cuando la distribución es ***triangular***, los ***aspersores*** se instalan en los *vértices* de los *triángulos*, en este caso *equiláteros*, en los que se ha subdividido el *terreno*. La determinación del tamaño de los *triángulos* está sujeta a la regla ilustrada en la Figura 4, en la que *r* representa el ***radio*** de alcance de los *aspersores*.

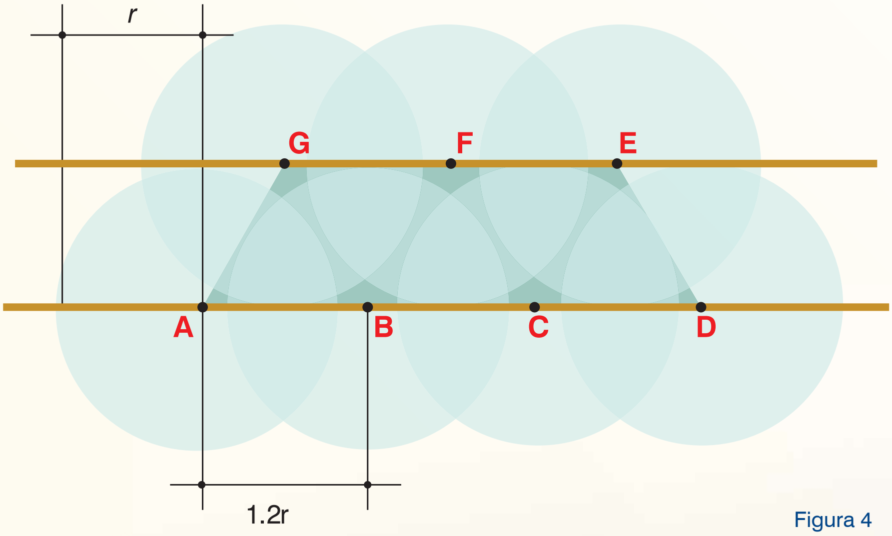


Figura 4

a). ¿Cuál es el *ángulo de giro* de los ***aspersores*** mostrados en la Figura 4?

b). Si el ***radio*** de alcance r de los ***aspersores*** a instalar es de *10 m*:

¿Cuál será la *distancia* que separe los ***ramales de aspersión***?

¿Cuánto medirá el ***lado*** de los *triángulos equiláteros* en los que se ha subdividido el *terreno*?

¿Cuánto será el ***área*** de cada uno de estos *triángulos*?

c). Como puede verse en la Figura 4, los ***aspersores*** riegan el *terreno* más de una vez, debido a los traslapes de las superficies que cubren. Señala con el número *1*, en la Figura 4, las regiones que el *sistema* riega una sola vez, con un *2* las que riega dos veces y así sucesivamente, hasta que todas las regiones de los *triángulos* estén señaladas por un número.

d). Si u es la cantidad de agua requerida por el *sistema*, para regar un *triángulo* una sola vez (cosa que no ocurre). ¿Cuántas u de agua consume aproximadamente el *sistema*, para regar cada *triángulo*?

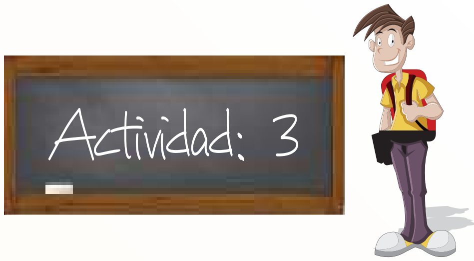
3.- Compara los dos ***sistemas de riego por aspersión*** analizados antes (***el cuadriculado*** *y* ***el triangulado***).

a). ¿Qué ventajas tendría el ***cuadriculado*** sobre el ***triangulado***?

b). ¿Qué ventajas tendría el ***triangulado*** sobre el ***cuadriculado***?

c). ¿Cuál de los dos te parece mejor? Justifica tu respuesta.

Actividad de Cierre



Actividades de Equipo

Desde la escuela primaria, has utilizado algunas fórmulas para calcular ***áreas*** y ***perímetros*** relacionados con el ***círculo***. Algunas de las más conocidas se muestran en la **Tabla 1**:

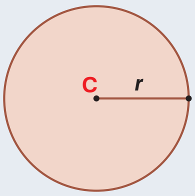
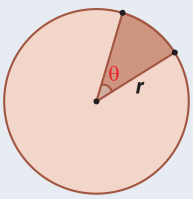
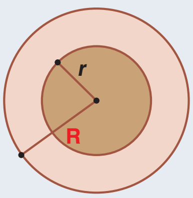
Figura	*Área*	*Perímetro*
 *círculo*	$A = \pi r^2$	$P = 2\pi r$
 *sector circular*	$A = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$ θ dado en grados	$P = 2r + \frac{\theta}{360°} 2\pi r$ θ dado en grados
 *corona circular*	$A = \pi R^2 - \pi r^2$	$P = ?$

Tabla 1

La última casilla de la **Tabla 1** se ha dejado a propósito como una interrogación, para que investigues si existirá una fórmula para el ***perímetro*** de una ***corona circular***. Antes de responder, observa *la curva que "rodea" la corona*, ¿se trata de una *curva cerrada*?

La aplicación mecánica de fórmulas, como las mostradas en la **Tabla 1**, no siempre resulta el mejor método para resolver ***problemas*** geométricos y en algunos casos esta aplicación es insuficiente.

Los problemas siguientes ilustran estas limitaciones.

1.- Sobre una ***circunferencia*** que tiene el punto C como centro y cuyo *diámetro* AB mide diez unidades (Figura 5), se han trazado *semicircunferencias de diámetro* AC= CB =5.

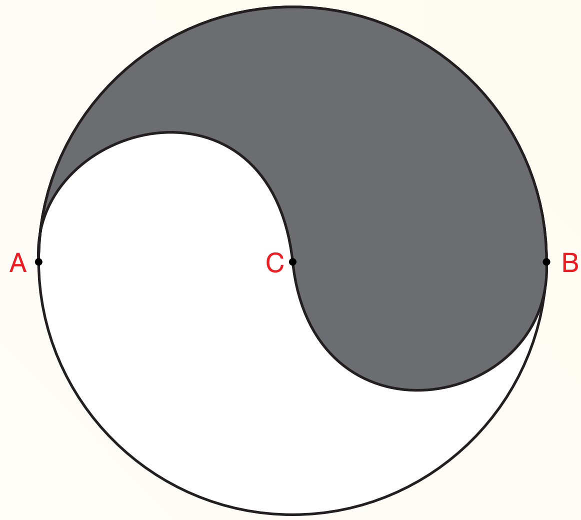


Figura 5

a). Calcula el ***área*** sombreada.

b). Calcula el ***perímetro*** del ***área*** sombreada.

A pesar de que no contamos con una fórmula para calcular el ***área*** solicitada en a), el problema puede ser resuelto de diversas maneras que se explican a continuación:

Solución 1. Una manera de resolverlo consiste en dividir la figura sombreada en partes cuyas ***áreas*** puedan ser calculadas, por ejemplo dividiéndola en las ***áreas*** A_1 y A_2 que se muestran en la Figura 6:

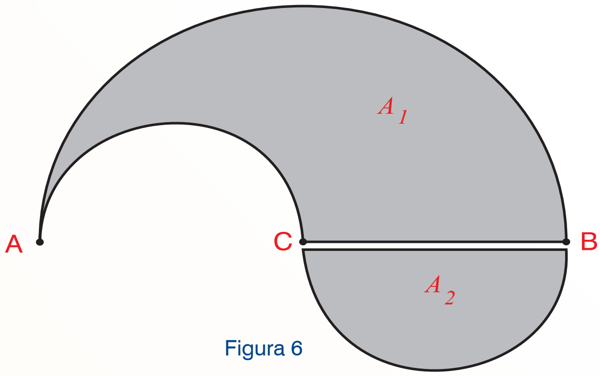


Figura 6

Si llamamos a las ***áreas*** de las ***semicircunferencias de diámetro*** AB, AC y CB como S_{AB}, S_{AC} y S_{CB} respectivamente, entonces:

$$A_1 = S_{AB} - S_{AC} = \frac{\pi(5)^2}{2} - \frac{\pi(\frac{5}{2})^2}{2}$$

$$A_2 = S_{CB} = \frac{\pi(\frac{5}{2})^2}{2}\text{, luego,}$$

$$A_1 + A_2 = S_{AB} - S_{AC} + S_{CB} = \frac{\pi(5)^2}{2} - \frac{\pi(\frac{5}{2})^2}{2} + \frac{\pi(\frac{5}{2})^2}{2} = \frac{\pi(5)^2}{2}$$

Solución 2. En esta solución, al igual que en la anterior, separamos la figura en dos partes A_1 y A_2, pero luego separamos la parte A_2 y la colocamos en el hueco dejado por la *semicircunferencia de diámetro* AC. (Figura 7).

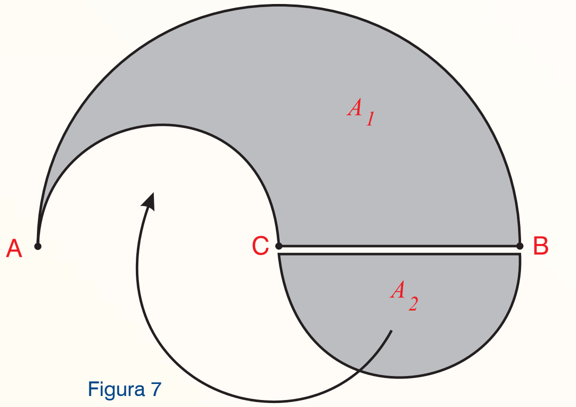


Figura 7

Completamos de esta manera una *semicircunferencia*, que al tener ***radio*** 5, tendrá como ***área***:

$$\frac{\pi(5)^2}{2}$$

Solución 3. Como el ***área*** no sombreada del *círculo* y el ***área*** sombreada son iguales, entonces el ***área*** sombreada es la mitad del ***área*** total del *círculo*, por lo tanto el ***área*** solicitada es:

$$\frac{\pi(5)^2}{2}$$

2.- De los tres métodos de solución expuestos antes,

¿cuál prefieres? Argumenta tu respuesta.

____
____
____
____
____

3.- Calcula ahora el ***perímetro*** de la superficie sombreada de la Figura 5.

a). ¿Cómo es el ***perímetro*** calculado, comparado con el ***perímetro*** de la *circunferencia*?

____
____

b). Observa todas las trayectorias que se han trazado del punto A al punto B (marcadas en color rojo y cada una con un tipo de línea distinto, en la Figura 8. ¿Tu respuesta al inciso anterior, significa que todas estas trayectorias miden lo mismo? Justifica tu respuesta.

____
____
____
____
____

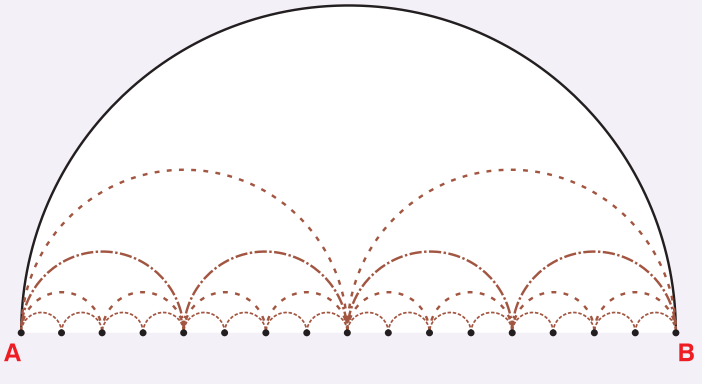


Figura 8

4.- En la dirección appletscobach.mat.uson.mx, encontrarás el *applet* área_circ, al abrirlo tendrás una pantalla como la que muestra la Figura 9:

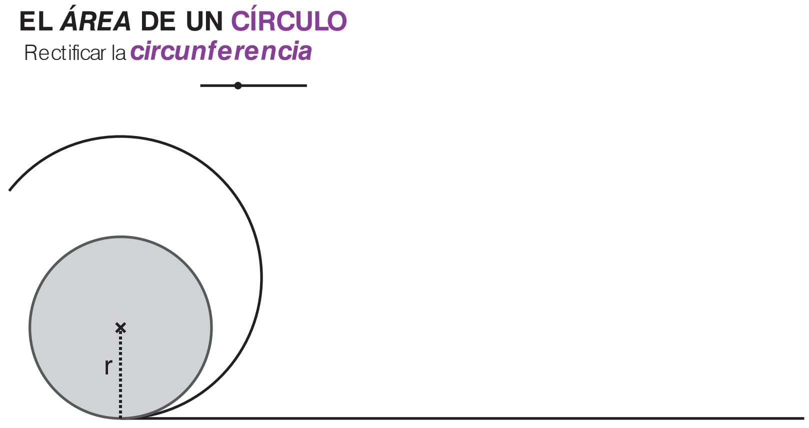


Figura 9

a). Al *"arrastrar"* el deslizador, la *circunferencia* se *"desenvolverá"* del *círculo*. ¿Cuánto mide la *circunferencia*?

____

____

Para verificar tu respuesta, activa la casilla llamada *"perímetro"*

b). Ahora activa la casilla llamada *"subdivisión"* y *"arrastra"* el deslizador correspondiente para subdividir el *círculo* en 12 partes. En pantalla observarás lo que muestra la Figura 10.

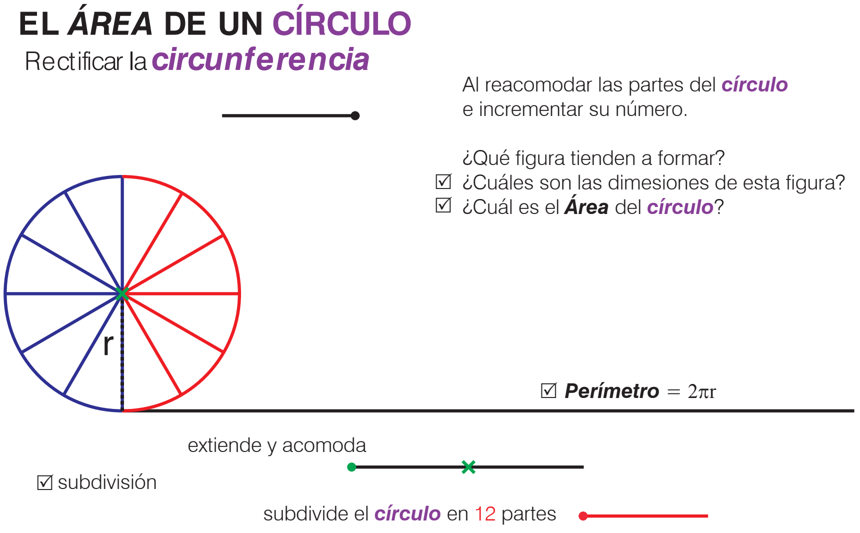


Figura 10

c). *"Arrastrando"* el deslizador *"extiende y acomoda"* descomponemos las secciones del *círculo*, buscando un arreglo más apropiado, en pantalla obtendrás una gráfica similar a la mostrada en la Figura 11.

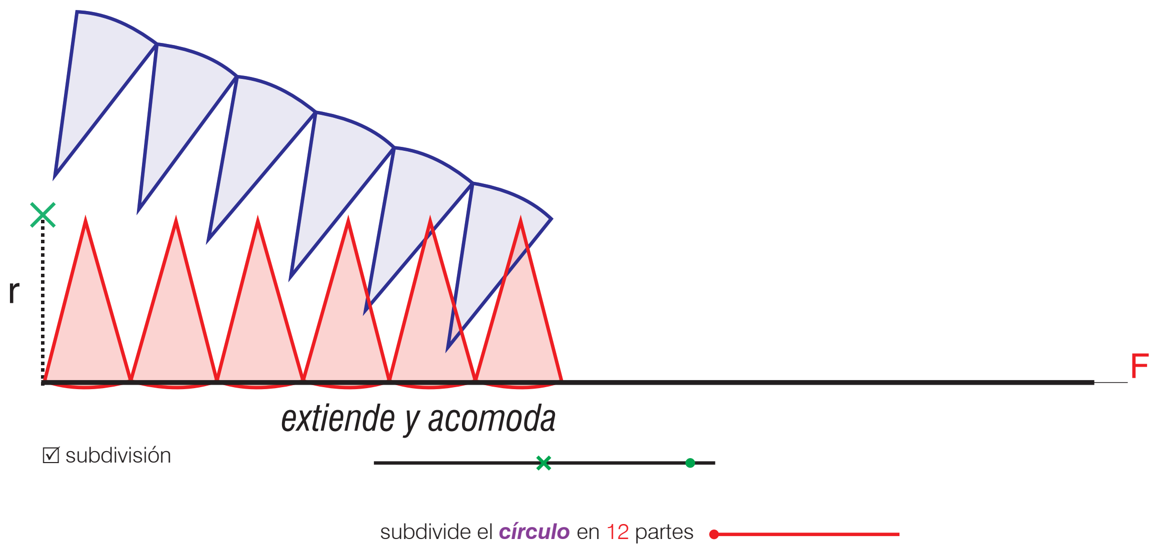


Figura 11

d). Se obtendrá así para cada subdivisión, una figura parecida a un *rectángulo*. ¿Qué dimensiones tendrá este *rectángulo*?

____

____

____

____

e). Aumentando el número de subdivisiones, tendremos una figura cada vez más parecida a un *rectángulo*, que tendrá la misma ***área*** que el *círculo*.

f). ¿Cuál es entonces el ***área*** del *círculo* original?

____

____

____

____

Secuencia Didáctica 5.- Métodos geométricos prácticos

Actividades de Inicio

Actividad: 1

Actividades Individuales

En diversas actividades humanas se utilizan *métodos prácticos* para ***resolver problemas***, estos *métodos* se han ganado un lugar en diferentes oficios, simplemente porque funcionan, aunque el usuario no sepa con precisión a qué se debe su funcionamiento. En esta actividad revisaremos algunos de estos *métodos*, ligados a la construcción de edificaciones, y discutiremos los fundamentos matemáticos sobre los que están construidos.

Un elemento constructivo muy conocido en arquitectura es el ***arco***, que se utiliza para salvar el espacio abierto entre dos paredes o muros.

Cuando el ***arco*** es de medio punto, esto es, cuando su forma es *semicircular,* puede trazarse fijando el punto medio del *diámetro* que tendrá el ***arco*** y luego trazándolo con ayuda de una ***cuerda***. Se trata en este caso de la simple aplicación de la definición de *circunferencia*, *como el conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia (**radio**) de un punto fijo (centro)*. Todos estos trazos pueden hacerse sin grandes dificultades sobre la cimbra que sostendrá al ***arco*** mientras se construye (ver Figura 1).

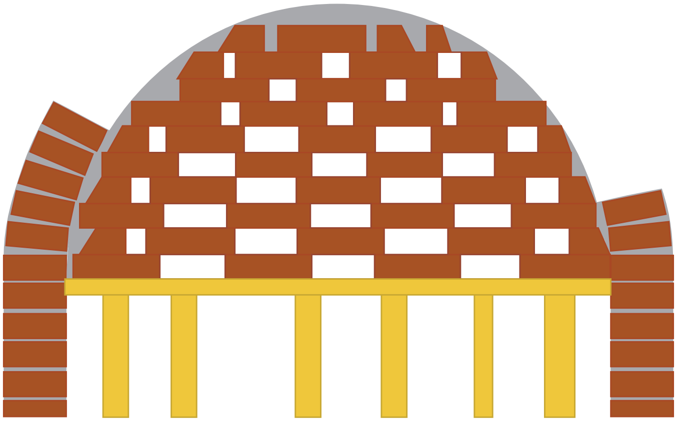


Figura 1

Hay otros *métodos* igualmente simples que se usan en otros oficios. Por ejemplo, para cortar un mantel circular, de una tela cuadrada, se puede doblar la tela en cuatro y luego cortar a través de un ***arco***; como se observa en la Figura 2.

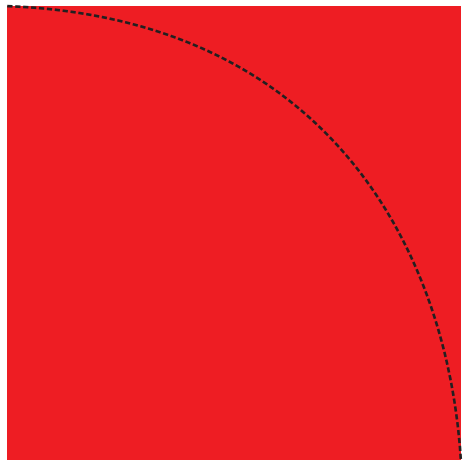


Figura 2

Justifica geométricamente ¿por qué al hacer un corte como el mostrado en la Figura 2, se obtiene un mantel *circular*?.

Desarrollo

Actividades Individuales

Otro *método* muy utilizado al iniciar una edificación es el método 3,4,5 aplicado frecuentemente para trazar los muros *"a escuadra"*, es decir para que las esquinas de una edificación tengan *ángulos rectos*.

El *método* consiste en incrustar dos caballetes de madera en cada esquina del futuro muro (ver Figura 3), para luego fijar sobre estos caballetes los hilos que marcarán la dirección de los muros. A partir del punto donde se cruzan los hilos, se miden 3m y 4m respectivamente sobre cada uno de los hilos y estos se ajustan hasta que una tercera medida resulta de 5m, tal como se muestra en la Figura 3. Cuando los lados respectivos del *triángulo* formado por los hilos y una cinta métrica miden 3,4,5, entonces los obreros de la construcción concluyen que el *ángulo* de la esquina *es recto*.

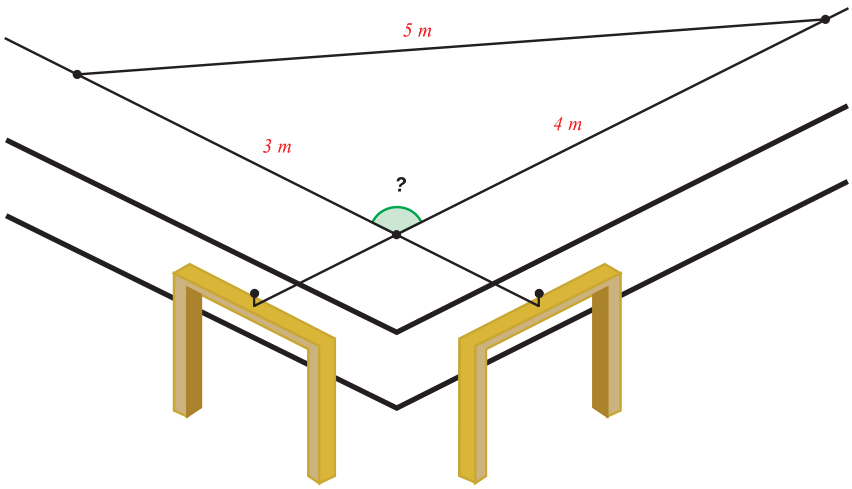


Figura 3

1.- Si el espacio para tomar las medidas de 3m y 4m no fuera suficiente, ¿podrían usarse otras medidas sobre los hilos?

2.- Propón otras medidas que podrían usarse en lugar de las medidas 3,4,5 y que garanticen que el *método* sigue funcionando bien. Justifica tu respuesta.

3.- De los dos *teoremas* que se enlistan a continuación:

Teorema 1	*Teorema 2*
Si un *triángulo* es *rectángulo*, entonces el *cuadrado* del ***lado*** mayor es igual a la suma de los *cuadrados* de los otros ***dos lados***.	Si en un *triángulo*, el *cuadrado* del ***lado*** mayor es igual a la suma de los *cuadrados* de los otros dos ***lados***, entonces el *triángulo es rectángulo*.

1.- ¿Cuál de los dos *teoremas* anteriores es el que garantiza que el *método* descrito, efectivamente sirve para trazar muros perpendiculares? Justifica tu respuesta.

2.- Compara entre sí los dos *teoremas* enlistados antes, ¿qué relación existe entre ellos?

¿Los dos son verdaderos?

3.- Analiza los dos *teoremas* siguientes sobre números enteros:

a). Si m es múltiplo de 4, entonces m es un número par.

b). Si m es un número par, entonces m es un múltiplo de 4.

1.- ¿Qué relación existe entre ellos?

2.- ¿Los dos son verdaderos?

Justifica tu respuesta.

Actividades de Equipo

Actividad: 2

Un albañil necesita trazar un ***arco circular*** como el que se muestra en la Figura 4. El fragmento de plano que muestra las especificaciones de este ***arco*** son las siguientes:

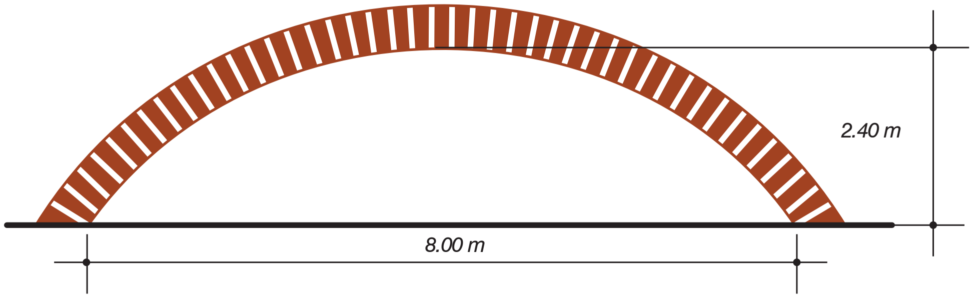


Figura 4

Para construir el ***arco*** requiere armar la cimbra sobre la que lo montará. Su experiencia le dice que el ***arco*** puede ser trazado localizando el centro del ***arco*** y auxiliándose luego con una ***cuerda*** (tal como se ha construido el ***arco*** de la Figura 1), pero *las dimensiones* del ***arco*** le dicen que este centro se localiza muy por debajo del nivel del suelo y que tendría que excavar para encontrarlo.

El Maestro de Obras le recomienda usar el siguiente *método* para trazarlo: *Primero* utiliza los dos puntos de la base del ***arco*** (A y B) y el punto donde el ***arco*** alcanzará la mayor altura (P), para trazar con barrotes de madera el *ángulo* que se observa en la Figura 5.

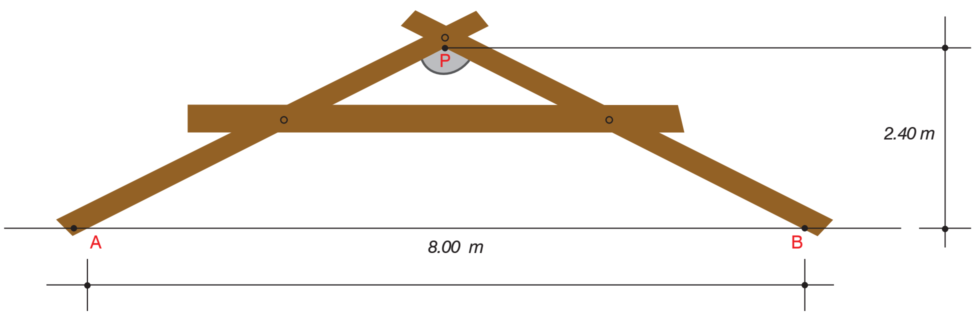


Figura 5

Una vez construido y fijado este *ángulo*, construye un segundo *ángulo* de madera copiando el primero, pero modificando la *longitud* de los maderos, tal como se ilustra en la Figura 6:

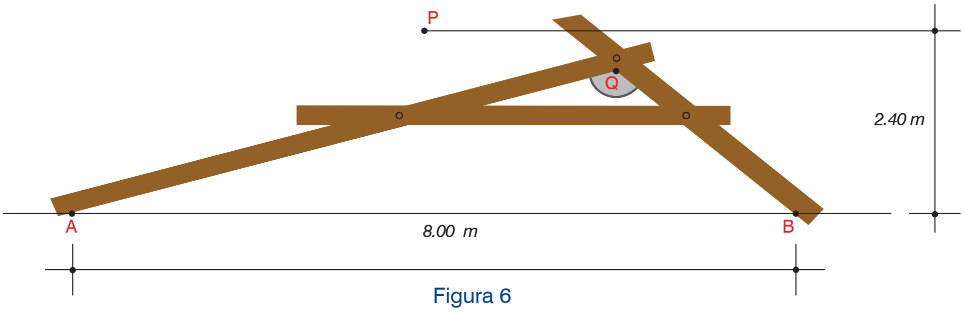


Figura 6

Ahora se tiene otro punto (llamado aquí Q), que también está sobre el ***arco***. La simetría del ***arco*** permite manipular este último *ángulo* para localizar otro punto R, como se ilustra en la Figura 7:

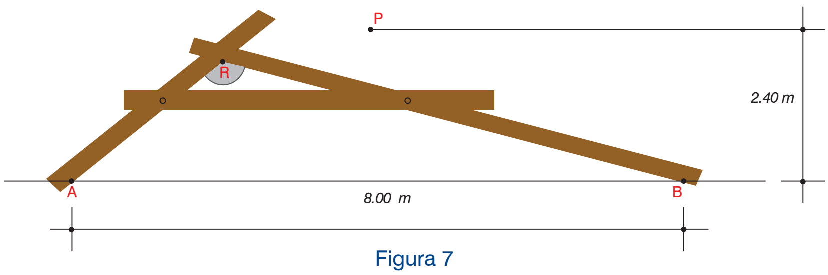


Figura 7

El resto del trazo se haría copiando el *ángulo* APB tantas veces como se quiera para localizar tantos puntos sobre el ***arco*** como se desee.

Ahora reproduciremos a escala, el *método* utilizado por el **albañil** para trazar el ***arco***. En lugar de barrotes usaremos tiras de cartón (incluidas en tu material recortable) y en lugar de los clavos usados para fijar los barrotes, usaremos tachuelas o chinches (el maestro te las proporcionará).

1.- La gráfica de la Figura 8 muestra los datos que conoce **el albañil**. Usa las tiras de cartón y las chinches, para trazar en esta gráfica los puntos Q, R, S, T, U y V, de tal modo que estén sobre el ***arco*** que se pretende trazar.

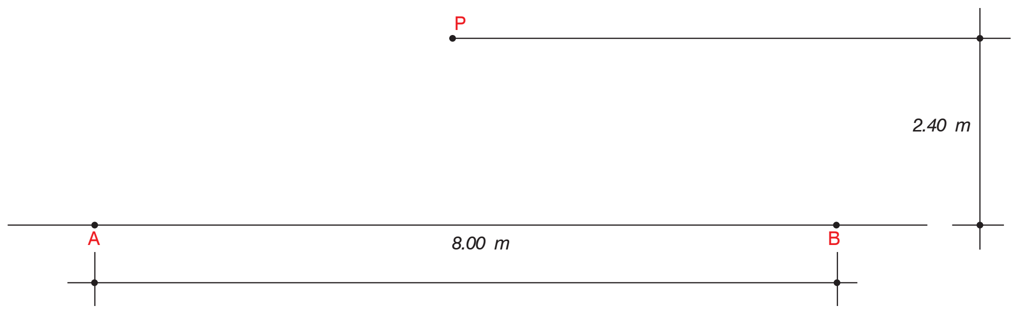


Figura 8

2.- Analiza el dispositivo construido con las tiras de cartón que usaste para trazar los puntos Q, R, S, T, U y V. ¿Qué característica tienen en común estos dispositivos?

Actividad: 3

Actividades de Equipo

En esta **actividad** se buscará el fundamento geométrico del funcionamiento del *método* con el que se ha trazado el ***arco*** de la Actividad anterior.

1.- En la Figura 9 se muestran ***dos arcos*** de *circunferencia* con un *ángulo inscrito* en cada una de ellas.

a). Si en el primer ***arco*** trazas un punto D (diferente de C) sobre el ***arco***, ¿cuánto medirá el *ángulo* ADB?

b). Si en el segundo ***arco*** trazas un punto S (diferente de R) sobre el ***arco***, ¿cuánto medirá el *ángulo* PSQ?

TIC

c). También puedes observar el comportamiento de estos *ángulos* inscritos, abriendo el applet llamado *ángulos_inscritos*, en la dirección *appletscobach.mat.uson.mx* y luego *arrastrando* los puntos C y R sobre los ***arcos***. ¿Qué observas sobre el comportamiento de las medidas de los *ángulos*?

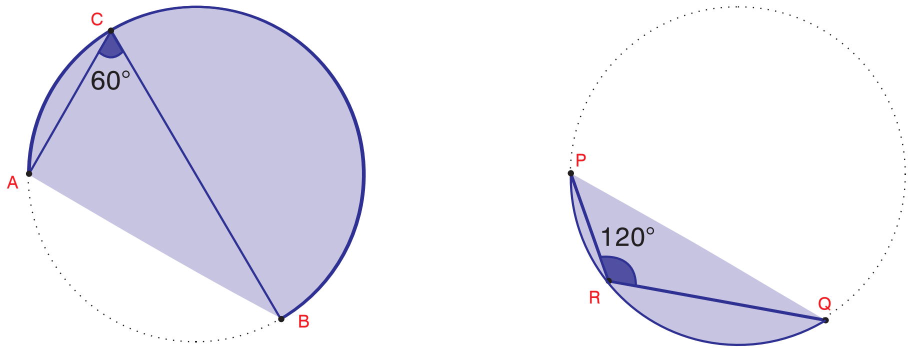


Figura 9

Los resultados obtenidos de la Figura 9 pueden resumirse en el *Teorema 3*, que se enuncia aquí sin demostración:

Teorema 3

Todos los *ángulos inscritos* en un ***arco*** de *circunferencia* tienen la misma medida.

2.- El método para trazar ***arcos*** de la Actividad anterior, ¿tendrá como base el *Teorema 3*? Justifica tu respuesta.

3.- En la Figura 10 se muestra el *ángulo* ACB trazado a partir del segmento AB.

a). Con la ayuda de una de las escuadras de tu Juego Geométrico, traza los *ángulos* ADB, AEB, AFB y AGB, todos del mismo lado de la recta AB y todos con la misma medida del *ángulo* ACB. ¿Sobre qué curva estarán los vértices D, E, F y G?

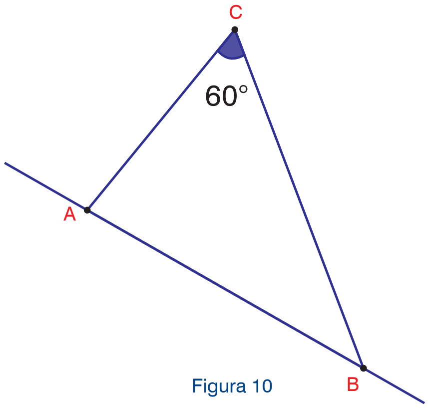


Figura 10

b). También puedes observar el comportamiento de los puntos D, E, F y G abriendo el *applet* llamado ángulos_segmento, en la dirección appletscobach.mat.uson.mx y luego *arrastrando* el punto C.

¿Qué observas sobre el comportamiento del punto C?

Las conclusiones sobre la Figura 10, pueden resumirse en el *Teorema 4*, que se enuncia aquí sin demostración.

Teorema 4
Sean A y B dos puntos fijos. El conjunto de puntos C tales que el *ángulo* ACB es constante, forman un ***arco*** de *circunferencia* de ***radio*** fijo.

4.- *El método* para trazar ***arcos*** de la *Actividad* anterior, ¿tendrá como base el *Teorema 4*? Justifica tu respuesta.

5.- ¿Qué relación existe entre los *teoremas* 3 y 4?

Actividad de Cierre

Actividad: 4

Actividades de Equipo

En la Figura 11 se muestran algunas *partes importantes de una* ***circunferencia***.

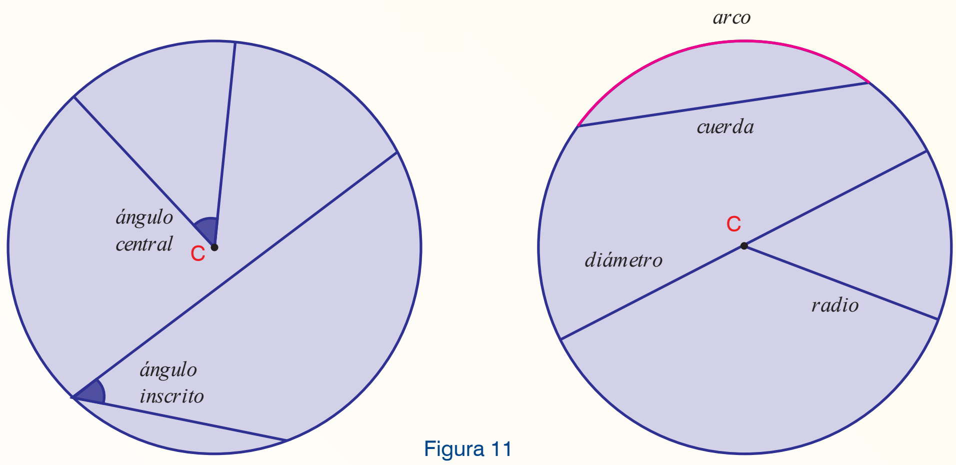


Figura 11

Investiga *la definición* de cada una ***de estas partes*** y escríbelas en la **tabla** siguiente:

Concepto	Definición
Ángulo central	
Ángulo inscrito	
Arco	
Cuerda	
Diámetro	
Radio	

2.- Un resultado conocido en Geometría es el siguiente: si en una *circunferencia*, se tienen dos *ángulos*, uno *central* y otro *inscrito*, subtendidos por el mismo ***arco***, entonces la medida del *ángulo inscrito* es igual a la mitad de la medida del *ángulo central*. Tomando esta afirmación por cierta, calcula la medida de los *ángulos* marcados en la Figura 12, en la que se ha inscrito un *pentágono regular* en una *circunferencia* y luego se han trazado las *diagonales* de este *pentágono*.

Calcula el valor de los *ángulos* RPQ y RCQ.

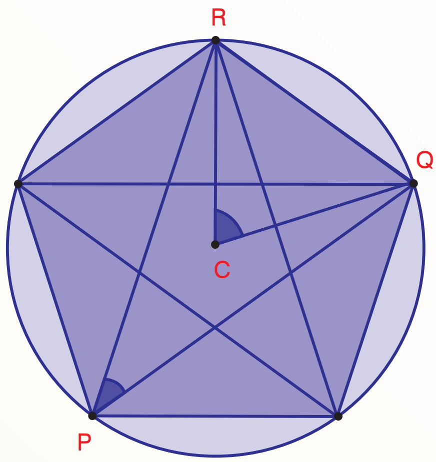


Figura 12

3.- Volvamos ahora a los *teoremas* enunciados durante la presente **secuencia**. Los *teoremas* 1 y 2, se enunciaron así:

Teorema 1	*Teorema 2*
Si *un triángulo es rectángulo*, entonces *el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados*.	Si, en un *triángulo*, *el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados*, entonces *el triángulo es rectángulo*.

En ambos *teoremas* se ha *subrayado en color rojo* la primera parte, que es una afirmación tomada como cierta, como punto de partida del *teorema* y se le denomina la **HIPÓTESIS** del *teorema*. A partir de esta hipótesis se tratará de establecer la **TESIS**, que en ambos *teoremas* es la segunda parte y ha sido *subrayada en azul*.

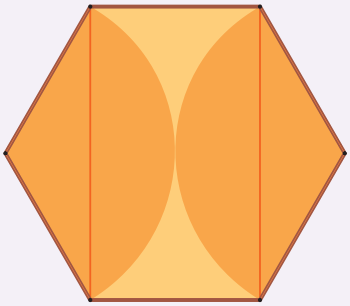
La diferencia entre el *Teorema 1* y el *Teorema 2* es que la **HIPÓTESIS** y la **TESIS** están intercambiadas, cuando esto sucede se dice que los *teoremas* son **RECÍPROCOS** entre sí. En este caso, tanto el *Teorema 1* como el 2 son ciertos, pero no siempre es así.

En la **tabla** siguiente se presenta un *teorema*, llena la **tabla** enunciando el recíproco del *teorema* y respondiendo las preguntas.

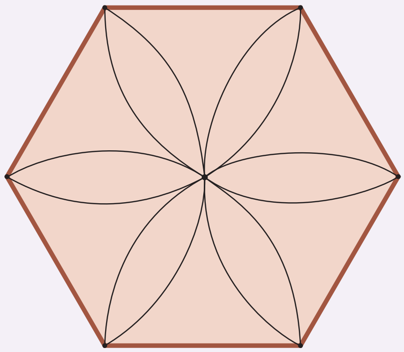
Teorema	Recíproco
Si m y n son números pares, entonces mn es un número par.	
¿Es cierto o falso este *teorema*? Justifica tu respuesta. ______ ______ ______	¿Es cierto o falso este *teorema*? Justifica tu respuesta. ______ ______ ______

1.- Se tiene un *hexágono* cuyo lado mide 2 unidades y cuya apotema mide $\sqrt{3}$.

a). Calcula el ***área sombreada***.



b). Calcula el ***área*** de la flor trazada en el interior del *hexágono*.

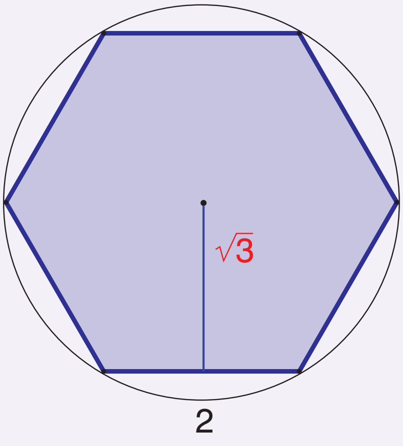


2.- En la figura se muestra un *hexágono* inscrito en una *circunferencia*, cuyo lado mide 2 y cuya apotema mide $\sqrt{3}$.

a). Calcula el ***área*** del *hexágono*.

b). Calcula el ***área*** de la *circunferencia*.

c). Con los dos datos anteriores, estima el ***área*** que tendrá un *dodecágono* inscrito en la misma *circunferencia*.



3.- En la figura siguiente se muestran dos *circunferencias concéntricas*, la mayor tiene ***radio*** R y la menor tiene ***radio*** r . El ***área*** no sombreada puede calcularse recortando simplemente la menor de la mayor.

Expresa el ***área*** no sombreada en términos de r y R. La expresión que encontraste es una fórmula para la región no sombreada del *círculo*. Investiga cómo se llama esta región.

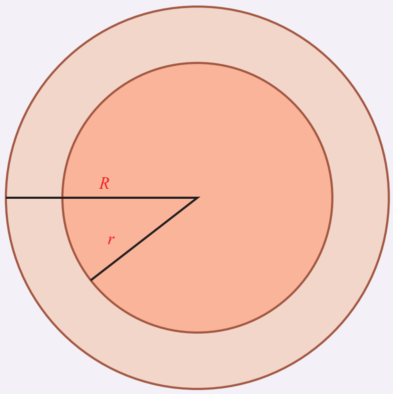


Figura 16

4.- Un ***documento*** se ha escrito usando el procesador de texto llamado "Word", en hojas tamaño carta; para escribirlo se han usado los ***márgenes*** normales de la hoja. La figura siguiente muestra las dimensiones de la hoja tamaño carta y las medidas de los ***márgenes***.

El documento tiene una extensión de 250 páginas y para disminuir su extensión, el autor ha disminuido un centímetro, tanto al ***margen izquierdo*** como al ***derecho***. ***¿Cuál será la extensión del nuevo documento?***

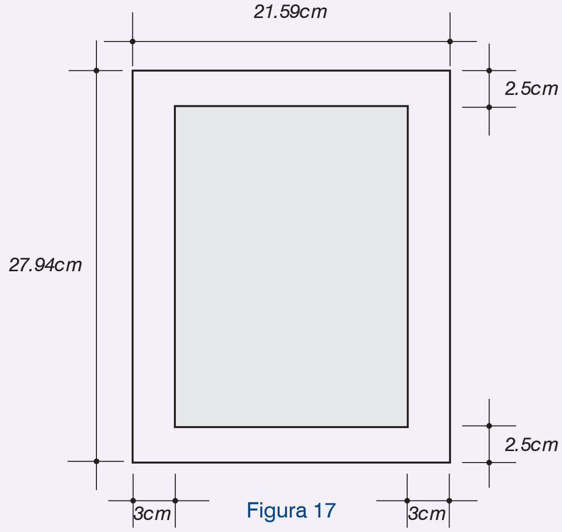
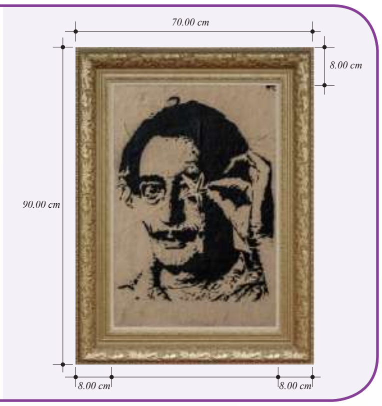


Figura 17

5.- *Una pintura* enmarcada mide $90\ cm$. por $70\ cm$. Si el ***marco*** tiene un ancho de $8\ cm$. Usa el *método* de ***composición*** y ***recomposición*** para calcular el ***área*** del ***marco***.



6.- ***El tambor*** de una máquina aplanadora mide *155 cm*. de diámetro y *213 cm.* de ancho. ¿Qué tanta ***área*** aplana, cuando el ***tambor*** da *10* vueltas?

7.- Explica por qué en cualquier ***polígono regular*** hay un punto que equidista de todos los *vértices*.

8.- En el *Applet* llamado *"Angulos exteriores"* que utilizaste en la Actividad 4 de la **Secuencia 1**, activa el botón llamado *"Polígono Original"*, mueve uno de sus vértices hasta convertirlo en *polígono cóncavo*, activa de nuevo el botón para ocultarlo y utiliza el deslizador; según lo que observaste, ¿Es válida la afirmación de que los *ángulos exteriores* suman *360°* aun en el caso de *polígonos cóncavos*?

TIC

Autoevaluación

1.- Al final del cierre de la **Secuencia 1** se te pide ampliar la **Tabla 1** hasta *polígonos regulares* de *20 lados*. Utilizando los datos de la **tabla** ampliada, muestra un ejemplo donde algunos de los nuevos *polígonos* se combinan con otros permitiendo un nuevo diseño de mosaicos.

2.- En la siguiente Figura se muestra el *triángulo rectángulo* ABC, al que se ha trazado la *altura* que pasa por C.

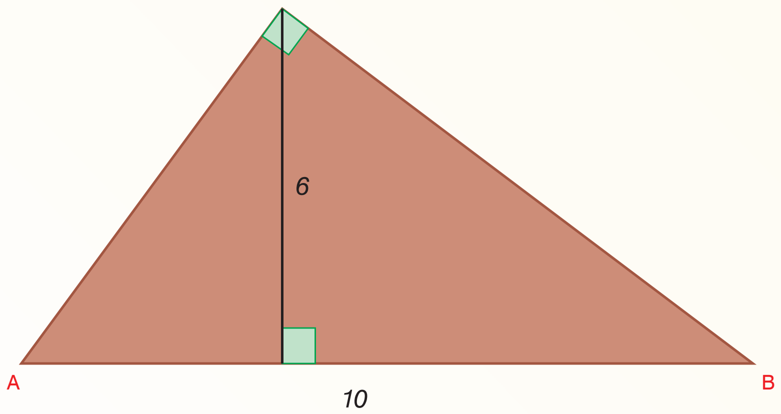


Figura 18

a). Calcula el ***área*** del *triángulo* ABC.

b). ¿Existirá un *triángulo rectángulo* que tenga los datos de la Figura?

c). ¿Se pueden calcular ***áreas*** de figuras que no existen?

3.- Usa la fórmula $A = \frac{Pa}{2}$ para calcular las dos ***áreas*** siguientes:

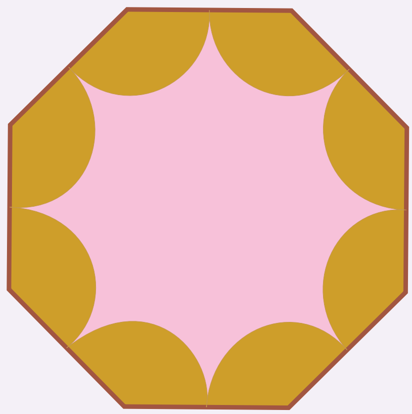
a). ***Área*** de un *hexágono regular*, cuyo lado mide *4* y cuya apotema mide *3*.

b). ***Área*** de un *hexágono regular*, cuyo lado mide *4* y cuya apotema mide *4*.

c). Los *dos hexágonos* a los que se refieren los dos incisos anteriores, son idénticos, puesto que sus ***lados*** son iguales. ¿Podrán *dos hexágonos* idénticos tener ***áreas*** distintas? Justifica su respuesta.

4.- En el *octágono regular* siguiente, cuyo ***lado*** mide *2*, se han trazado ***arcos*** de ***circunferencia*** de ***radio*** *1*, en cada uno de los *ángulos interiores*.

El ***área sombreada*** en la figura es la misma que la contenida en tres ***círculos***, cada uno de ellos de ***radio*** *1*. ¿Por qué?



Si hacemos lo mismo con otros ***polígonos regulares*** de ***lado*** *2*, podremos medir las ***áreas sombreadas*** usando como medida el ***área*** de una ***circunferencia*** de ***radio*** *1*. Calcula esas ***áreas*** usando esta misma unidad para los ***polígonos*** enlistados en la **tabla** siguiente y completa los datos que faltan.

Polígono regular	*Área de la región medida en círculos de radio 1*
Triángulo equilátero	.5
Cuadrado	
Pentágono	
Hexágono	
Heptágono	
Octágono	3
Eneágono	

BLOQUE 3

Congruencia y semejanza de Triángulos

Este **bloque** está formado por dos **secuencias** que abordan la *congruencia y semejanza* de *triángulos*. Identificar, construir o validar cuándo dos figuras son *congruentes o semejantes*, en particular los *triángulos*, te permitirá dar solución a diferentes situaciones en las que las medidas directas o cálculos inmediatos para obtenerlos no son posibles, tal como hasta ahora lo has hecho en los bloques anteriores mediante la *congruencia* (igualdad) de *ángulos*. Esta habilidad de transferir los conocimientos geométricos a situaciones problemáticas que requieren solución, conforma una de las competencias que tu aprendizaje de la geometría estará fomentando sustancialmente.

Se espera también que a través de las dos **secuencias** del **bloque**, mantengas el interés por asociar información oral y visual; que a partir de *razonamientos* encadenados apropiadamente, logres hacer suposiciones o conjeturas que posteriormente puedas validar mediante proposiciones ya establecidas como verdaderas, y que seas capaz de comunicar esos argumentos con claridad. Estas acciones, la *inducción* y la *deducción* propias de la Geometría, son igualmente importantes en tu formación personal pues se orientan a que estructures tus *pensamientos* de una manera ordenada y lógica: desarrollas el *pensamiento geométrico* en particular y desarrolles el *pensamiento lógico en general*.

Resumiendo, se espera que tengas una vez más la oportunidad de hacer Geometría mientras expandes tu forma de pensar y entender cuando la uses como una herramienta para resolver problemas dentro de la misma *matemática* y en otros contextos. Al trabajar en colaboración con tus compañeros y bajo la guía de tu profesor podrás comunicar esa manera de pensar, así como valorar la de los demás. Así, de nuevo, tendrás oportunidad de que pongas en juego e incrementes algunas de las competencias asociadas a las múltiples acciones que este acercamiento al estudio de la Geometría te propone.

Tiempo asignado: 11 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividades de Inicio

Armado de Torres de Transmisión Eléctrica

El Ingeniero **Armando Torres** fue contratado por la *Comisión Federal de Electricidad* (CFE) para que modificara el ***diseño*** de cierto tipo de torres que sostienen cables de alta tensión, como las que podemos localizar en el *"Boulevard Las Torres"* en Hermosillo Sonora. Figura 1.

Figura 1. Torres de Transmisión Eléctrica

En una tesis de Ingeniería Civil titulada *"Diseño de Torres de Transmisión Eléctrica"*, realizada en el Instituto Politécnico Nacional (IPN), se presenta el ***diseño*** básico de cada una de las cara laterales de la llamada *"Torre Remate 4BR2"*, similar a las que mostramos en la Figura 1, esquemáticamente el ***diseño*** es de la siguiente manera:

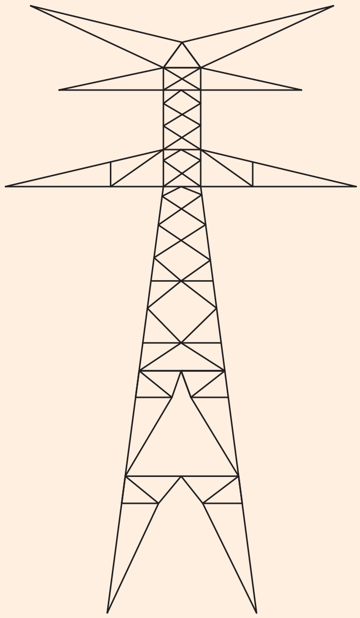


Figura 2. Diseño de un tipo de Torre de Transmisión Eléctrica

El nuevo ***diseño*** será aceptado si reúne las dos siguientes condiciones:

1.- Debe mantener cuando menos la misma resistencia y capacidad de soportar esfuerzos que el anterior.

2.- Debe resultar más económico.

Lo primero que sugiere el Ingeniero Armando Torres es eliminar una cantidad considerable de piezas, proponiendo un ***diseño*** como el que se muestra en la Figura 3.

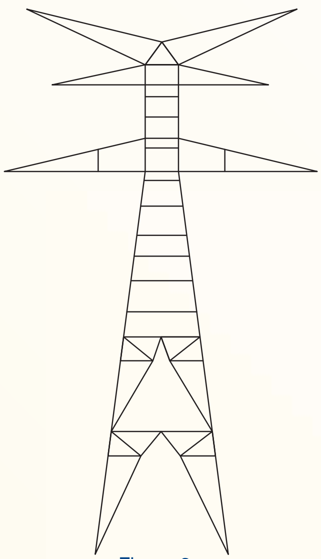


Figura 3.

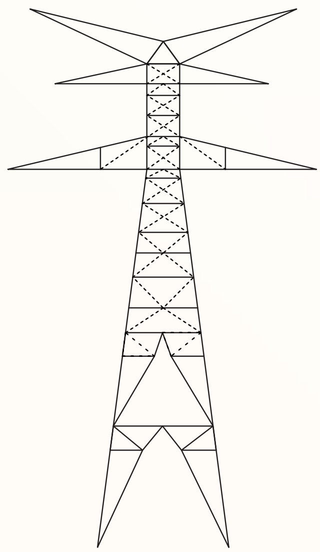


Figura 4.

En la Figura 4 se indican, mediante líneas punteadas, las piezas que eliminó, agregando en su lugar la respectiva diagonal horizontal del cuadrilátero que formaban. Las demás piezas horizontales del ***diseño*** original se mantuvieron.

Actividades de Equipo

Reunidos en equipo asesoren al Gerente Regional de CFE:

Con respecto al nuevo ***diseño***, respondan las siguientes preguntas:

¿Resulta el nuevo ***diseño*** más económico suponiendo que se utilizó la misma materia prima?

____

____

____

____

¿Se puede garantizar la misma solidez en el nuevo ***diseño***?

____

____

____

____

Argumenten sus respuestas en lo individual, después discútanlas con los compañeros de equipo y posteriormente con el resto del grupo.

Desarrollo

Actividad: 2

Actividades de Equipo

TIC

Utilizando el material disponible en *appletscobach.mat.uson.mx*, construyan los dos tipos de caras laterales correspondientes a las torres de las figuras 3 y 2 respectivamente.

Una vez concluido el trabajo en el equipo, analicen sus construcciones y posteriormente respondan las siguientes preguntas:

¿Qué tipo de construcción requirió menos material?

____
____
____
____

¿Qué tipo de construcción resultó más resistente al esfuerzo?

____
____
____
____

¿A mayor cantidad de material mayor resistencia?

____
____
____
____

Argumenten más ampliamente las razones que provocaron que un tipo de construcción fuera más sólido y resistente que el otro.

____
____
____
____

Actividad: 3

Actividades Individuales

Construcción de *cuadriláteros* dadas las medidas de sus lados:

Utilizando el material recortable disponible en el sitio appletscobach.mat.uson.mx, construye los ***cuadriláteros*** cuya *longitud* de sus lados se indican en la **Tabla** de abajo y llena los espacios en blanco respectivos en las dos columnas de la derecha, previa experimentación con cada uno de los ***cuadriláteros*** que fue posible armar, intentando cambiarles de forma sin modificar sus medidas.

Lado A (Unidades)	*Lado B (Unidades)*	*Lado C (Unidades)*	*Lado D (Unidades)*	*¿Se puede construir el cuadrilátero? (Si/No)*	*¿Se puede deformar el cuadrilátero? (Si/No)*
10	10	10	10		
10	7	5	4		
10	5	6	4		
7	6	3	4		
8	6	4	4		
6	4	1	2		
8	3	3	2		
9	2	3	3		

Tabla 1

¿Se pueden construir ***dos cuadriláteros*** diferentes, dadas las medidas de ***sus lados***? *Justifique su respuesta.*

Escribe con tus propias palabras una *regla* que describa cuándo se puede construir un ***cuadrilátero***, dadas las *longitudes* de sus ***lados***. Compara la *regla* que escribiste con la de tus compañeros.

En el ***cuadrilátero*** de medidas 8, 6, 4, 4, elimina uno de los *lados* que miden 4 unidades y cierra la figura, ¿Qué observas en cuanto a la flexibilidad de la nueva figura?

¿Es posible construir dos *triángulos* diferentes que tengan sus respectivos *lados* de igual *longitud*?

Después de haber analizado las ***características distintivas de cuadriláteros*** y *triángulos* y haber comparado sus diferencias, en especial en lo relativo a la posibilidad de deformar la figura manteniendo *longitudes* de ***lados***, argumenta de nuevo acerca de las ***características*** que hacen a una torre más sólida que otra de las que se construyeron previamente con el material proporcionado.

Si fueras el gerente regional de CFE, ¿Aceptarías e implementarías el ***diseño*** del Ing. Armando Torres? *¿Por qué?*

Actividad de Cierre

Actividades de Equipo

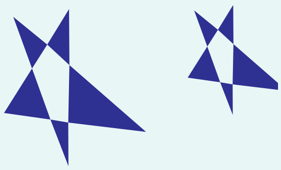
Actividad: 4

*El cuarto Axioma o Noción Común enunciado en el Libro I de los Elementos de **Euclides** (Siglo III A.C.) afirma lo siguiente:*

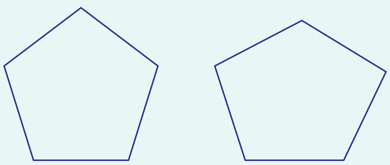
> *"Cosas que pueden superponerse una a la otra son iguales (congruentes) entre sí"*

1.- De los siguientes ***tres pares de figuras***, indica las que según ***Euclides*** son ***congruentes*** y cuáles no, argumentando primero en lo individual y después en equipos:

a)

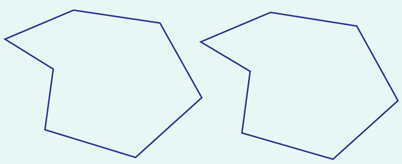


b)



*¿Son iguales sus **lados**?*

c)



2.- Si usas de nuevo el material recortable y "chinches" para construir el ***cuadrilátero*** correspondiente al ***tercer renglón de la "Tabla 1"***, dado que ya observaste que se puede *deformar*:

a). ¿Es posible construir ***dos cuadriláteros*** *no congruentes* manteniendo las mismas *longitudes* de sus respectivos ***lados***?

b). Sabiendo que la *deformación* producida no cambia las l*ongitudes* de los ***lados***, sólo varía los *ángulos interiores* del ***cuadrilátero***, escribe las *condiciones* que deben cumplirse para que ***dos cuadriláteros*** sean ***congruentes***.

c). Escribe las *condiciones* que deben cumplirse para que *dos polígonos* ***de cuatro o más lados*** sean ***congruentes***.

d). ¿Es posible calcular el ***Área*** de un ***cuadrilátero*** dado, si sólo conozco las *longitudes* de sus ***lados***?

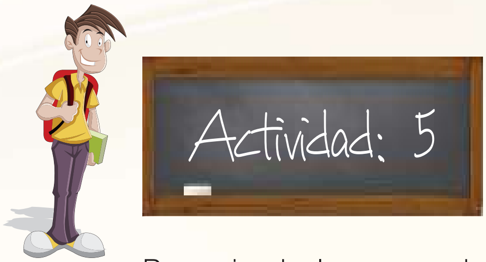
3.- Repitiendo la acción de *eliminar* un ***lado*** de *longitud* 4 en el ***cuadrilátero*** cuyos ***lados*** miden 8, 6, 4, 4 respectivamente (***quinto caso de la "Tabla 1")*** y cerrando la figura:

a). ¿Qué *figura* se obtiene?

b). ¿Se puede *deformar* la *figura* obtenida?

c). ¿Es posible *construir* *dos triángulos* diferentes (***no congruentes***) manteniendo sus respectivos ***lados*** de igual *longitud*?

d). Escribe las *condiciones* que deben cumplirse para que *dos triángulos* sean ***congruentes***.



Casos de congruencia de triángulos:

Resumiendo lo que acabamos de escribir en el inciso d) de la Actividad inmediata anterior, hacemos el siguiente enunciado:

> *"Para que dos triángulos sean congruentes, es necesario y suficiente que tengan sus respectivos lados de igual longitud".*

A este enunciado, en muchos libros de Geometría se le conoce como uno de los *"tres" criterios de congruencia de triángulos* al cual, en forma sintética, lo nombran como el *"Criterio LLL"*.

¿Cuáles otros casos conoces?

Para profundizar en el tema y poder dar respuesta certera acerca de cuántos y cuáles son los casos de *congruencia* de *triángulos*, se abordarán las siguientes cuestiones:

¿Qué significa que un determinado enunciado (Como el *caso LLL*) sea un criterio de *congruencia*?

¿Cómo decidir si un *enunciado* no es criterio de *congruencia*?

¿Cómo determinar la *cantidad* de criterios de *congruencia*?

El principio en el cual nos basaremos para decidir si *dos triángulos* son ***congruentes*** o no estará basado en la constructibilidad, es decir, poder decidir si el conjunto de condiciones listadas en el *enunciado* respectivo establecen un único *triángulo* en el sentido de que si se construye otro con las mismas cualidades, es necesariamente ***congruente*** al original. Por ejemplo, por lo que hemos analizado hasta ahorita, si *dos triángulos* tienen sus respectivos ***lados*** de igual *longitud*, son necesariamente ***congruentes***, por lo cual ***LLL*** sí es un ***criterio*** de ***congruencia***. Ahora nos dedicaremos a establecer la *cantidad* y *cualidad* de *condiciones* para establecer los demás ***criterios*** de ***congruencia***.

El tipo de datos que analizaremos se refieren a combinaciones de medidas de ***lados*** (*tamaño*) y a medidas de *ángulos* (*forma*).

Trabajando en equipo, explica por qué no basta con uno ni con dos datos, entre ***lados*** y *ángulos*, para *construir* en forma única un *triángulo*.

Tres datos sí pueden ser suficientes, como en el ***caso LLL***.

Haremos ahora la lista de todas las posibles combinaciones de ***tres datos*** combinando ***lados*** y *ángulos*:

LLL
LLA
LAL
ALL
LAA
ALA
AAL
AAA

Donde ***las siglas*** se refieren a situaciones como la siguiente:

LAA se refiere a *dos triángulos* que tengan un ***lado*** de igual *longitud*, y que respectivamente, el *ángulo* en un extremo del ***lado*** y el *ángulo opuesto* a ese ***lado*** sean iguales. ¿Es este un ***criterio de congruencia***? *¿Por qué?*

____
____
____
____

En la lista anterior marca los que consideras sí corresponden a casos de *congruencia* y de ser posible la razón de tu afirmación.

Un posible camino es hacer un recorrido en orden de los ***ocho posibles casos*** para ir *discriminando* entre los que son ***casos de congruencia*** y los que no lo son; el primer caso ya fue analizado y fue el punto de partida para iniciar este tema.

A manera de ilustración, enseguida se considera el ***segundo caso*** para explicar por qué no es ***caso de congruencia***.

Caso LLA.

A continuación se enuncia en extenso este caso:

Si dos triángulos tienen dos lados consecutivos respectivamente iguales y el ángulo en el extremo de uno de ellos (no en el vértice común) respectivamente iguales, entonces los dos triángulos NO son necesariamente congruentes.

Obsérvese, en la **Figura 5** que:

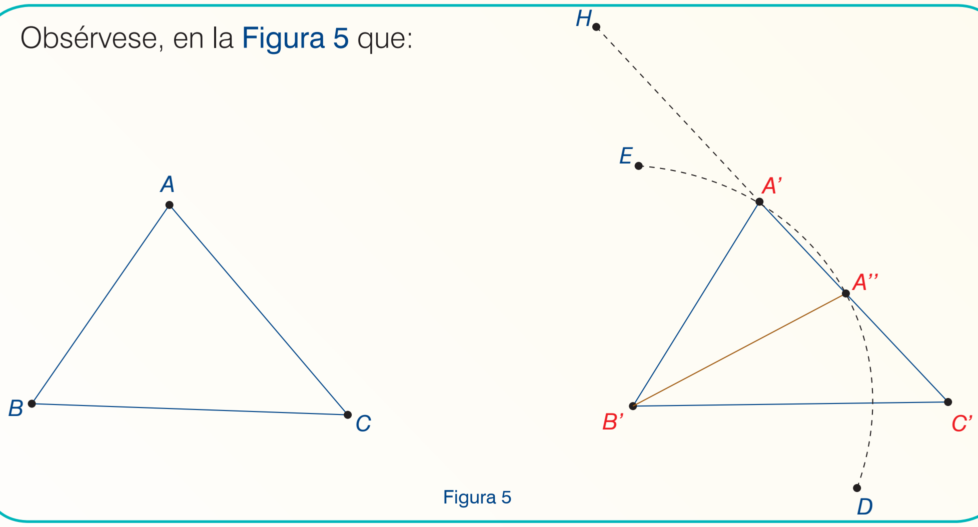


Figura 5

¿Qué te ilustran los *dos dibujos* de la Figura 5 acerca de ***LLA***? *Argumenta*.

____

____

____

Sabiendo que la línea C'H se trazó de tal manera que el ∠HC´B´≅ ∠ACB y que el ***arco*** DE se trazó con centro en B' y ***radio*** igual a BA. ¿Cuántos y cuáles *triángulos* puedes encontrar en el *dibujo derecho* de la Figura 5, que tengan ***dos lados*** iguales a AB y BC respectivamente y *ángulo igual* a <ACB?

____

____

____

¿Es ***LLA*** ***criterio de congruencia***? *¿Por qué?*

____

____

____

Comparte tus *conclusiones* con tus compañeros de equipo.

El tercer caso es la Proposición 4 del Libro I de los Elementos de Euclides, donde se demuestra, sin llamarlo así, que sí es caso de congruencia.

¿Qué podemos *afirmar* del resto de los ***casos*** y *por qué*?

El criterio ALA, ¿Se considera en los libros que conoces o en las clases de secundaria que recibiste como ***caso de congruencia***? *¿Sabes por qué?*

El caso ALL puede considerarse *equivalente* al ***caso LLA***, ya que *equivale* a invertir el orden de presentación de la configuración analizada para el ***caso LLA***.

El caso AAA es fácil comprobar que no es caso de ***congruencia***, ya que si consideramos la Figura 6.

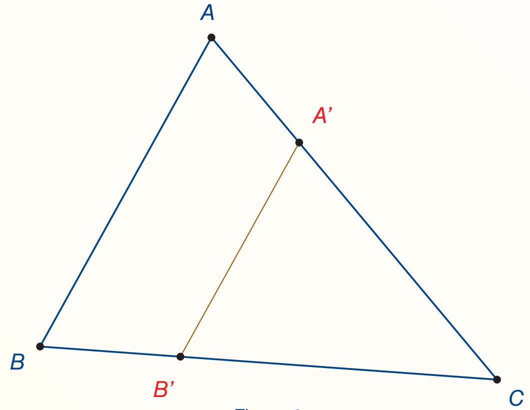


Figura 6

Dado el $\triangle$ ABC, elijo un punto (A´) sobre el lado CA y trazo un segmento paralelo al lado AB por el punto A´, intersecando al lado BC en el punto B´.

¿Cómo son entre sí los *ángulos interiores* con *vértices* en A y A´ y *por qué?*,

____

____

____

¿Cómo son entre sí los *ángulos interiores* con *vértices* en B y B´y *por qué?*; obsérvese que el *ángulo interior* con *vértice* en C es común a ambos *triángulos*.

____

____

____

¿Cómo son entonces los respectivos *ángulos interiores* de los *triángulos* ABC y A'B'C?

____

____

____

¿Son ***congruentes*** los mencionados *triángulos*?

____
____
____

¿Es *AAA* ***criterio de congruencia***?

____
____
____

Los *casos* equivalentes *LAA y AAL*, que generalmente no se consideran como *casos de congruencia*, se sugiere que se analicen después de estudiar el tema de ***semejanza*** de *triángulos*, para poder proporcionar *argumentos* al respecto.

En segundo de secundaria estudiaste un tema llamado *"Transformaciones Geométricas",* con especial interés en las *traslaciones, rotaciones y reflexiones*, que se caracterizan porque la *figura imagen* es ***congruente*** con la *figura original*.

Secuencia Didáctica 2.-

Actividades de Inicio

Situaciones de Semejanza

Actividades de Equipo

Actividad: 1

Helena diseñó un *gafete* para un evento académico de la universidad en la que estudia y necesita ajustar el *tamaño* para poder incluir varios en una sola página, de modo que pueda ahorrar en el trabajo de impresión. Sin embargo, se da cuenta que al cambiar el *tamaño* no siempre queda la imagen parecida a la original.

Figura original

Figura 1

1.- ¿Cuál de las siguientes reproducciones *del gafete* te parece la *"mejor"*?

Figura 2

Figura 3

Figura 4

a) Explica brevemente en qué basas tu decisión.

____

____

____

2.- Para precisar el *tamaño* requerido para efectos de impresión, Sasha midió el *tamaño* del diseño original del ***gafete***, el cual resultó ser de 12 cm de ancho por 9 cm de alto. El área de impresión de una hoja *tamaño carta* es de 19 cm de ancho por 27 cm de alto. ¿Cuáles deben ser las medidas del ***gafete***, de modo que preserven su forma original, y que puedan imprimirse por lo menos seis en una hoja, tomando en cuenta que el ancho de cada uno no sea menor a 9 cm?

____

____

____

____

Desarrollo

Recuerda que en ***matemáticas*** se utiliza el adjetivo "semejantes" para describir ***dos figuras*** que tienen ***la misma forma***, pero no necesariamente ***el mismo tamaño***. Si una se obtiene como una ***"copia a escala"*** de la otra, entonces ***las dos figuras son semejantes***.

Actividades Individuales

Actividad: 2

1.- En la Figura 5, dibuja ***dos rectángulos*** tomando como base los segmentos dados, y que sean ***semejantes*** al mostrado. En la parte inferior, dibuja ***un rectángulo*** que no sea ***semejante***. Observa las *figuras* que construiste y responde lo que se te pide:

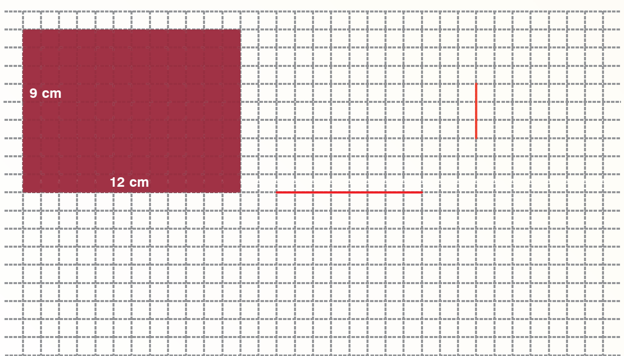


Figura 5

a). *¿Qué **criterios** utilizaste para trazar los **rectángulos semejantes**?*

¿Qué tienen en común?

¿Qué los hace diferentes?

*¿Cómo aseguras que son **semejantes** al original?*

b). *¿Qué **criterio** utilizaste para construir un **rectángulo no semejante**?*

¿Qué tiene en común con el original?

*¿Cómo aseguras que no es **semejante**?*

Actividades Grupales

2.- Establece el o los ***criterios*** para determinar cuándo ***dos rectángulos son semejantes***:

Actividades Individuales

Actividad: 3

1.- ***Reproduce dos veces***, a escala, la imagen mostrada en la Figura 6. En ***la primera reproducción*** los ***lados*** deben medir el doble de lo que miden en el dibujo, mientras que en la ***segunda***, los ***lados*** que miden ***tres centímetros***, deben ***medir cinco*** (considera que cada ***cuadrito*** tiene **1 cm** de ***lado***).

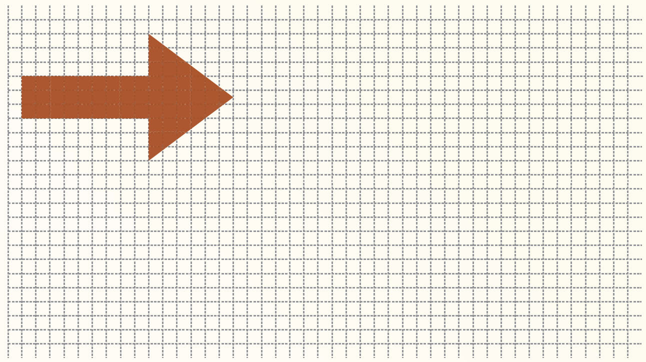


Figura 6

Actividades de Equipo

Comenten en equipo:

a). ¿Cómo procedieron en la ***primera reproducción*** y cómo en la ***segunda***?

____

____

b). ¿Utilizaron el mismo procedimiento en cada caso o diferente?

____

____

c). Si utilizaron diferentes procedimientos en cada una de las ***reproducciones***, expliquen por qué no usaron el mismo.

____

____

d). En la ***primera reproducción***, ¿qué relación hay entre el tamaño de los lados de la figura original y la ***reproducida***?

____

____

e). ¿Y en la ***segunda reproducción***?

____

____

Actividades Grupales

Comenten en grupo:

f). ¿Cómo pueden asegurar que ***ambas reproducciones*** son ***semejantes*** a la original? ¿Qué elementos son importantes en la comparación?

____

____

La profesora Méndez utilizó en su clase el ***truco del espejo*** para enseñar el concepto de ***semejanza***. Este ***truco*** consiste en *"adivinar"* la estatura de un estudiante una vez que se coloca en cierta posición con referencia a un ***espejo*** colocado en el suelo. **La maestra** previamente conoce la *distancia* desde ***el espejo*** a la posición que ocupará el estudiante, y conoce también *la distancia* desde el suelo hasta la altura de sus ojos. También tiene manera de medir rápidamente *la distancia* que habrá desde ***el espejo*** hasta su posición. Esta posición la determinará viendo a través ***del espejo*** el borde de la cabeza del estudiante. Con estas medidas **la profesora** puede calcular la estatura del estudiante que se coloque en la posición indicada. En la Figura 7 se representa la situación.

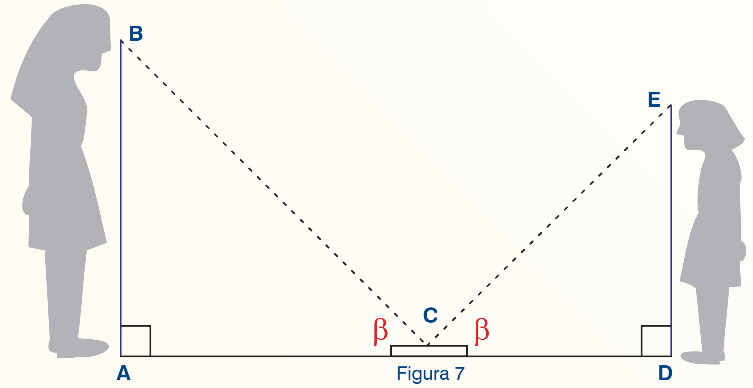


Figura 7

1.- ¿Por qué ambos *triángulos* son ***semejantes***, es decir, por qué podemos decir que tienen la misma forma? ¿En qué elementos del *triángulo* apoyas esta afirmación?

____
____

2.- ¿Los *triángulos* son ***congruentes***? ¿En qué caso serían ***congruentes***?

____
____

3.- ¿Qué relación existe entre los *triángulos semejantes* que le permite a **la maestra** determinar la estatura del estudiante? ¿Qué operaciones debe realizar para lograrlo?

____
____

Actividades Grupales

Establece el o los ***criterios*** para determinar cuándo *dos triángulos rectángulos* son ***semejantes***:

Actividad: 5

Actividades de Equipo

Las relaciones de ***semejanza*** resultan útiles en varios contextos. Supongamos que queremos medir la ***altura de un objeto*** que se sitúa *verticalmente* sobre el **suelo** y que su ***altura*** es tal que no podemos medirla directamente. Entonces podremos medirla utilizando la ***sombra*** que proyecta a determinada hora del día y comparándola con la ***sombra*** que proyecta otro ***objeto***, cuya ***altura*** sí podemos medir directamente. Recordemos que, como vimos en la **Secuencia 1** del **BLOQUE 1**, es válido suponer que los *rayos del sol* llegan en forma paralela a la tierra.

1.- Observa la Figura 8 y determina la altura de la palmera.

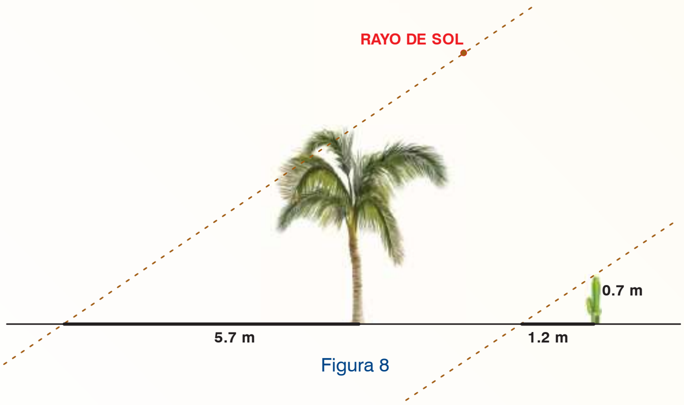


Figura 8

2.- Dibuja en la Figura 8 los *triángulos* ***semejantes*** que son útiles para la determinación de la cantidad buscada.

Actividades Grupales

3.- Explica las *características* que tienen esos *triángulos* que los hacen ***semejantes***.

TIC

4.- Explora el *applet Sol y sombras* disponible en *appletscobach.mat.uson.mx* y calcula la ***altura de la palmera*** considerando otras ***sombras*** proyectadas al cambiar la dirección de los *rayos del sol*.

Explica el porqué de tus resultados.

Actividad: 6

Actividades de Equipo

1.- A lo largo de esta **secuencia** se te solicitó que expresaras los ***criterios*** que determinan particularmente la ***semejanza*** de *rectángulos* y *triángulos rectángulos*.

TIC

¿Qué se requiere para determinar si *dos triángulos* cualesquiera son ***semejantes***? Explora el *applet Triángulos Semejantes* disponible en appletscobach.mat.uson.mx y responde lo siguiente:

a. ¿Qué relación existe entre las medidas de los ***lados*** correspondientes de los *triángulos* ***semejantes***?

b. ¿Qué relación existe entre los *ángulos* de *dos triángulos* ***semejantes***?

Gracias a la rigidez del *triángulo*, propiedad estudiada en la **secuencia 1** de este **BLOQUE**, podemos establecer condiciones mínimas para determinar la *semejanza* de *dos triángulos*. Para identificarlas realiza las siguientes tareas.

- Para cada par de medidas de *ángulos*, traza un *triángulo* y enseguida compara con los que trazaron tus compañeros.

90° y 60°	*45° y 45°*
120° y 30°	*80° y 40°*

- ¿Qué se advierte? Argumenta brevemente por qué es así.

____

____

____

____

Actividades Grupales

Enuncia, consecuentemente a tus observaciones anteriores, el o los ***criterios*** que determinan la ***semejanza*** de *triángulos* únicamente en función de sus *ángulos*:

Actividades Grupales

¿Es suficiente, para determinar la ***semejanza*** de *dos triángulos*, considerar únicamente la *proporcionalidad* de ***dos de sus lados*** correspondientes? *¿Por qué?*

Actividades de Equipo

Actividad: 7

1.- En la clase de ***matemáticas*** están trabajando con *fracciones*, de modo que se requiere dividir el *segmento* AB en *medios, cuartos, tercios y quintos* exactos. Todos cuentan con regla y escuadras sin graduar y con compás, así que en el equipo de **Eduardo**, él propone que los *medios y cuartos* los determinen usando las *mediatrices*, pero Ana le dice que eso no les serviría para los *tercios y quintos*. Ella sugiere un *método* que ha visto utilizar a su papá y lo reproduce como aparece en la Figura 9. Conforme lo va haciendo va diciéndoles lo que hace:

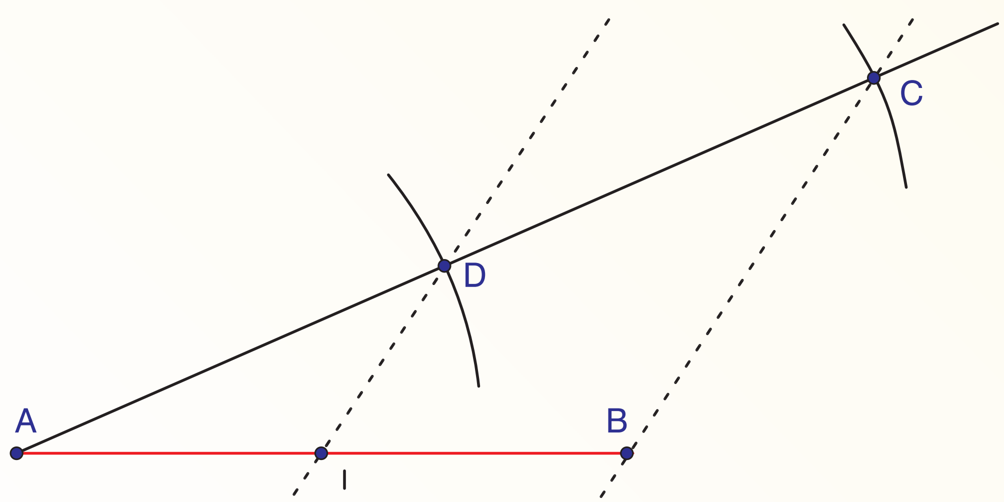
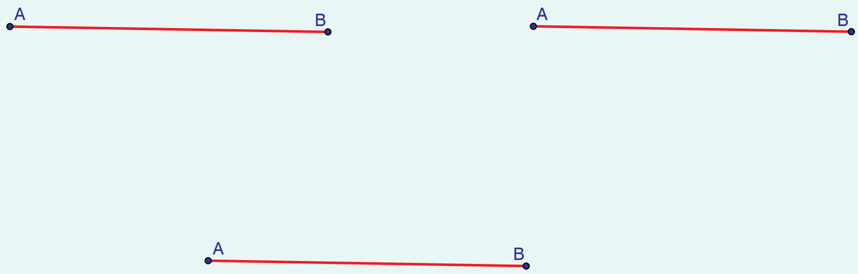


Figura 9

"Trazo una semirrecta que parta del punto A en alguna dirección distinta de la del segmento, formando un ángulo agudo. Con una abertura del compás de cualquier tamaño, apoyo en A y trazo un ***arco*** *sobre ella y marco el punto donde se cortan, luego me apoyo en ese punto y con la misma abertura anterior marco el siguiente. Como quieres dos partes ahí dejo de marcar puntos. Luego uno el último que marqué con el extremo del segmento, o sea con B; después, usando las escuadras, apoyo una sobre esa línea y la otra la fijo en uno de sus lados para que se deslice y pueda trazar otra línea que una el otro punto con el segmento. Esto es muy importante pues deben quedar paralelas; con eso queda dividido en las dos partes que quieres. Luego, si quieres tres partes, pues haces lo mismo pero usas tres marcas iguales en la semirrecta… así salen todas".*

a). ¿Crees que Ana tiene razón? Comprueba su técnica en los tres casos faltantes:



b). ¿Qué tipo de relación tienen las divisiones hechas sobre la línea auxiliar y las que quedan finalmente hechas sobre el *segmento*?

____

____

2.- En el *triángulo* ABC se ha trazado una *paralela* al ***lado*** AB que pasa por el punto medio K de BC como se muestra en la figura 10.

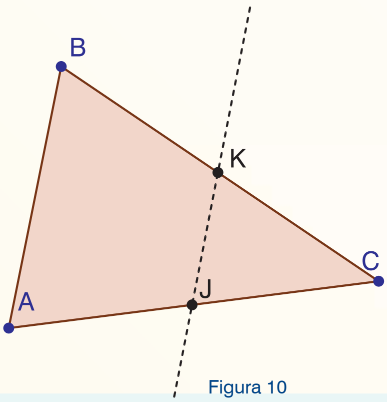


Figura 10

a). ¿Cómo crees que el punto J divide al ***lado*** AC? *Explica*:

____

____

b). ¿Qué relación tienen los *triángulos* ABC y JKC? *Justifica*:

____

____

Actividad de Cierre

En el desarrollo de esta **secuencia** tuviste oportunidad de abordar situaciones en las que el concepto de ***semejanza*** juega un papel central:

> *El término **"semejantes"** se utiliza para calificar **dos figuras** que tienen la **misma forma**, pero no necesariamente el **mismo tamaño**. Si una se obtiene como una **"copia a escala"** de la otra, entonces las **dos figuras** son **semejantes**.*

En la Actividad 2 se buscó establecer un ***criterio*** para la ***semejanza*** de *rectángulos*. Es importante notar que aunque los *rectángulos* tienen todos sus *ángulos rectos*, esto no es suficiente para garantizar su ***semejanza***: la *proporcionalidad* de los ***lados*** *correspondientes* es *la condición* que la garantiza.

> *En el caso de los **polígonos**, al estar estos determinados por sus **lados** y **ángulos**, la **semejanza** se da si los **ángulos** correspondientes son iguales y los **lados** correspondientes son proporcionales.*

Actividades Grupales

1.- En la Figura 11 marca los *rectángulos* que son ***semejantes*** y encuentra en *cada par* de ellos, la *constante* de *proporcionalidad* o *razón* de ***semejanza*** entre sus ***lados***.

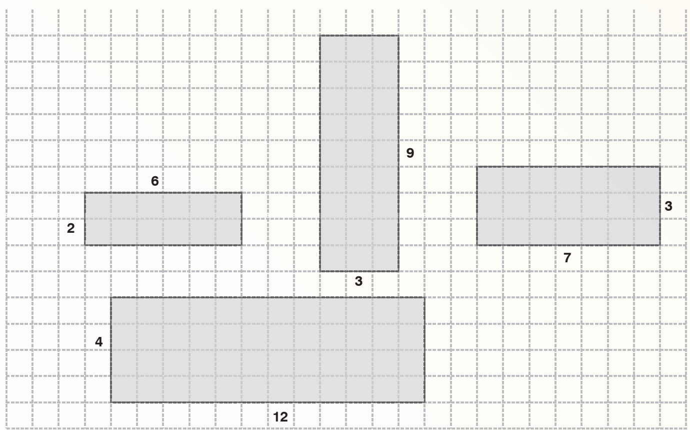


Figura 11

2.- En el caso de *cuadriláteros*, *la proporcionalidad de los lados* por sí sola no es suficiente. Como ejemplo podemos construir un *cuadrado* y un *rombo* que no sea *cuadrado*, como se muestra en la Figura 12.

a). Determina la *constante de proporcionalidad* entre los lados de las figuras. ¿Por qué esta *constante de proporcionalidad* no es una razón de ***semejanza***?

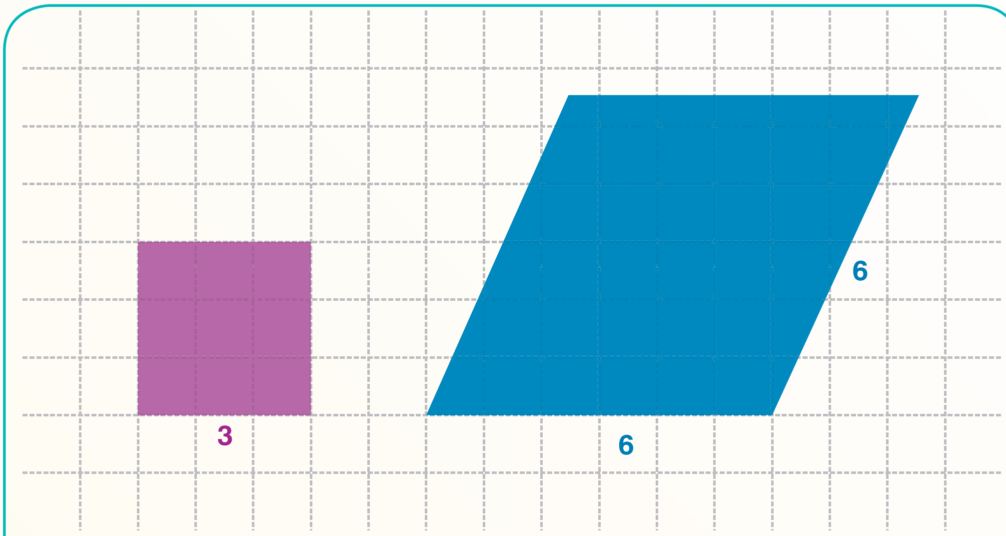


Figura 12

Justifica tu respuesta.

____

____

____

3.- ¿Qué puedes decir de los *cuadrados* en cuanto a la ***semejanza***?

____

____

____

a). ¿Y de los *polígonos regulares*?

____

____

____

4.- En el caso de los *triángulos rectángulos*, para garantizar la ***semejanza entre dos de ellos***, es suficiente *verificar la igualdad* ***entre uno*** de sus *ángulos agudos*, puesto que el otro *ángulo agudo* quedaría totalmente *determinado*. En este caso, *la proporcionalidad de los lados* se dá, gracias a la *propiedad de rigidez* de los *triángulos* que estudiaste en la **secuencia 1** de este **BLOQUE**.

a). ¿Cuántos *triángulos* identificas en la Figura 13?

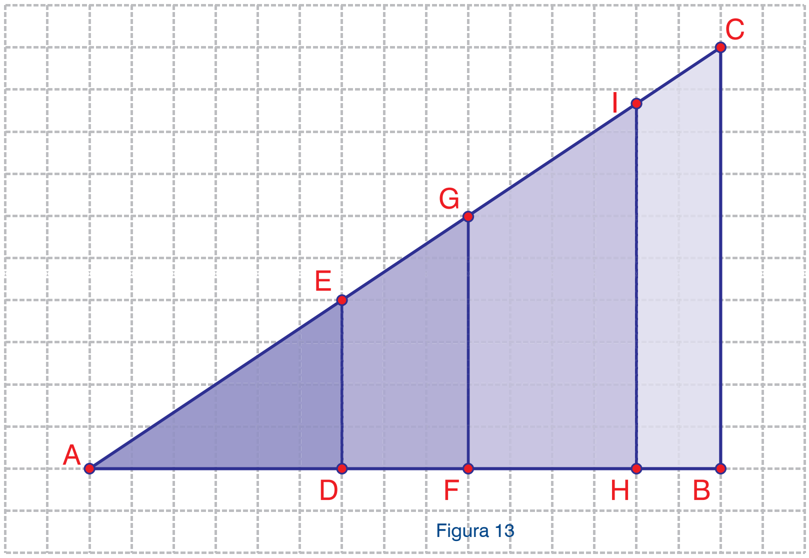


Figura 13

Explica por qué los *triángulos* mostrados son ***semejantes*** y encuentra la *razón* de **semejanza** entre cada pareja de *triángulos*.

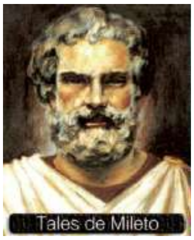
____
____
____

Podemos decir que los *ángulos agudos* de un *triángulo rectángulo* son *complementarios*, es decir, su *suma es de 90°*. Lo anterior se deduce del hecho de que la *suma* de los *ángulos interiores* de un *triángulo es de 180°.*

En el caso general de los *triángulos*, se puede determinar la ***semejanza entre dos de ellos***, considerando lo siguiente:

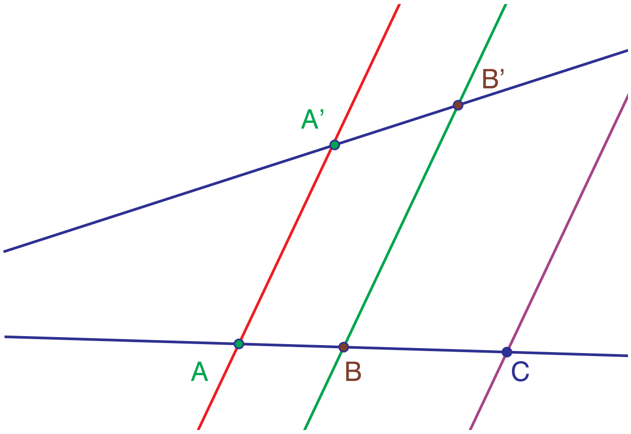
- *Por una parte, la proporcionalidad de los lados garantiza la igualdad de los ángulos.*
- *Y por otra parte, la igualdad de los ángulos garantiza la proporcionalidad de los lados.*

Lo anterior puede *justificarse* por la *propiedad de rigidez* del *triángulo*, ya mencionada en el caso anterior.



Esto también se relaciona de forma inmediata con el *Teorema de Tales* en el que se afirma lo siguiente:

> *Si **dos rectas cualesquiera** se cortan por **varias rectas paralelas**, los segmentos determinados en **una de las rectas** son proporcionales a los segmentos correspondientes **en la otra**. Ver Figura 14.*



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

Figura 14

5.- ¿Cuántos *triángulos* identificas en la Figura 15?

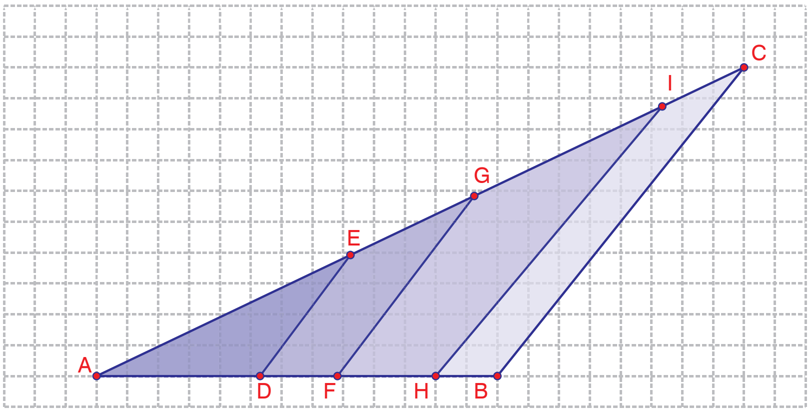


Figura 15

¿Son ***semejantes*** entre sí? *¿Por qué?*

____

____

____

a). De acuerdo a la ***semejanza*** de triángulos y al ***Teorema de Tales***, *establece el mayor número de igualdad* entre razones que puedas identificar, como las mostradas en la Figura 14.

____

____

____

Concluyendo:

6.- Para *verificar* que ***dos*** *triángulos* son ***semejantes*** es suficiente *comprobar* que ***dos*** de sus *ángulos internos* ***son iguales***.

*¿Por qué?*____

____

7.- Para *verificar* que ***dos*** *triángulos* son ***semejantes***, en relación con la *proporcionalidad* de los ***lados***, debemos *probar* que se cumple para los ***tres lados***, con ***dos*** no es suficiente. Para fundamentar esta *afirmación*:

a). *Construye* un *triángulo* de modo que ***dos*** de sus ***lados*** midan *2 cm y 5 cm.*

b). *Construye* un *triángulo* de modo que ***dos*** de sus ***lados*** midan *4 cm y 10 cm*, que no sea ***semejante*** al del inciso anterior.

¿Es ésto posible? ____

____

¿Cómo lo logras? ____

____

*¿Qué condición adicional tendría que satisfacerse para asegurar la **semejanza** de los **dos** triángulos?*

____

____

En la **Tabla 1** se muestra un resumen de los ***criterios*** de ***semejanza*** para *triángulos*. En ellos la ***literal*** L se refiere a *proporcionalidad* de ***lados*** *correspondientes* y la ***literal*** A se refiera a la ***igualdad*** de *ángulos correspondientes*.

Criterio	Enunciado
AA	***Dos*** *triángulos* son ***semejantes*** si ***dos*** de sus *ángulos* son ***iguales***
LLL	***Dos*** *triángulos* son ***semejantes*** si los ***tres lados*** *correspondientes* son *proporcionales*
LAL	***Dos*** *triángulos* son ***semejantes*** si tienen ***dos lados*** *proporcionales* y forman *ángulos* ***iguales***.

Tabla 1

Sección de problemas

1.- Da un ***argumento*** que te permita ***afirmar*** que en todo ***paralelogramo***, cualquiera de sus ***diagonales*** lo divide en ***dos*** *triángulos* ***congruentes***.

2.- Dado un *triángulo* cuyos ***lados*** miden a, b y c respectivamente, su ***área*** puede ***calcularse*** mediante la llamada ***"Fórmula de Herón de Alejandría"***, la cual es:

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \textit{donde} \quad s=\frac{a+b+c}{2}$$

Calcula el ***área*** de los *triángulos* cuyos ***lados*** miden:

a)	$a=15,$	$b=17,$	$c=20$
b)	$a=3,$	$b=5,$	$c=10$
c)	$a=5,$	$b=12,$	$c=13$
d)	$a=5,$	$b=7,$	$c=12$
e)	$a=5,$	$b=11,$	$c=12$

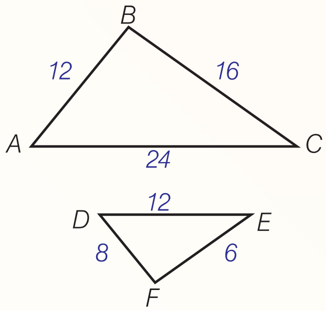
Explica el significado del resultado en cada caso.

3.- Determina si en las situaciones que se describen a continuación se trata necesariamente de *figuras* ***semejantes***.

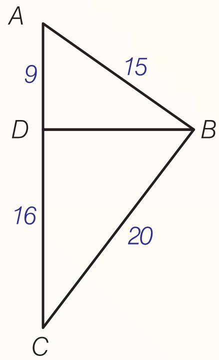
a)	***Dos*** *triángulos* cualesquiera.	____________
b)	***Dos*** *triángulos isósceles* ABC, A'B'C' en los que el *ángulo* formado por los ***lados iguales*** mide *45*°.	____________
c)	***Dos*** *triángulos rectángulos* ABC y A'B'C' en los que un *cateto* de ABC es el doble de un cateto de A'B'C'.	____________
d)	***Dos*** *triángulos rectángulos* ABC y A'B'C en que un *ángulo agudo* de ABC es ***congruente*** con el *ángulo agudo* de A'B'C' *correspondiente*.	____________
e)	***Dos*** *triángulos rectángulos* ABC y A'B'C' en los que la ***hipotenusa*** y un *cateto* son ***proporcionales***.	____________
f)	***Dos rectángulos*** cualesquiera.	____________
g)	***Dos rectángulos*** ABCD y A'B'C'D' en los que un ***lado*** de ABCD es la mitad de un ***lado*** A'B'C'D'.	____________
h)	***Dos cuadrados*** cualesquiera.	____________

Decide en ***cada caso*** si es válida la relación de ***semejanza***. Si es así, determina la *constante de proporcionalidad* entre los ***lados***.

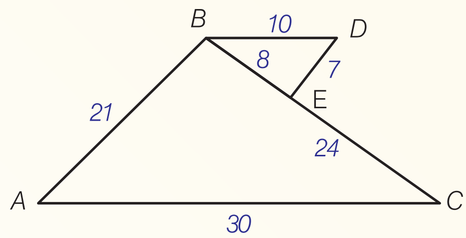
(a) $\Delta ABC \approx \Delta DEF$



(b) $\Delta ABD \approx \Delta BCD$



(c) $\Delta ABC \approx \Delta BDE$



Solución

5.- Se requiere ***medir la distancia*** a un *árbol* no muy lejano, pero inalcanzable porque existe una reja que impide llegar físicamente hasta él para ***medir*** directamente. Valiéndose de un teodolito, Raúl y Ana fijaron inicialmente una señal **B** perfectamente alineada al *árbol*. Luego marcaron un *ángulo recto* y en esa dirección ***midieron*** una *longitud* de *5 m*. Marcaron el punto **A** y siguieron en línea recta hasta completar una *longitud* de *1 m* adicional. En ese punto giran en *ángulo recto* y avanzan hasta que quedan alineados el *árbol* y el punto **A**. Las ***medidas*** que tomaron se muestran en el siguiente esquema.

a). ¿Por qué resulta útil esta construcción?

____

____

b). ¿Cómo validas la relación entre los *triángulos* resultantes?

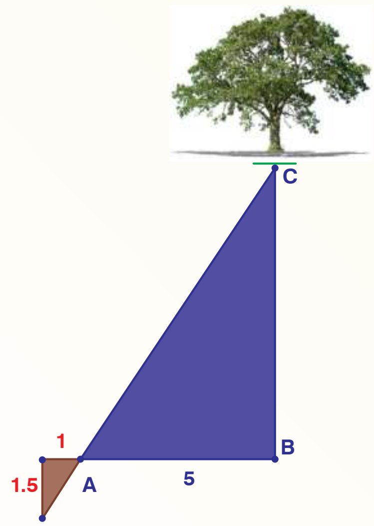
____

____

c). Utiliza la relación encontrada para determinar la distancia al *árbol*, medida desde el punto **B**.

____

____



Autoevaluación

El principal propósito de esta **sección** es que *puedas reflexionar* sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta **sección** pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al BLOQUE se describe lo que se espera que aprendas; léela con detenimiento, luego *resuelve los problemas planteados* y *responde los cuestionamientos* que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la *sección de autoevaluación* te des cuenta de tus *avances, errores, dificultades* y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario *solicitar asesoría*.

Problema 1. Después de analizar la **Tabla 1** de la Actividad 3 en el Desarrollo de la **Secuencia 1**, contesta la siguiente pregunta.

¿Es posible que exista una fórmula como la de **Herón** para *triángulos* o alguna otra que te permita conocer el **área** de un ***cuadrilátero*** conociendo sólo las *longitudes* de sus ***lados***? *¿Por qué?*

____

____

Reflexiones relacionadas con el problema 1:

a). ¿Cómo te resultó dar solución al problema?

Muy difícil	*Difícil*	*Fácil*	*Muy fácil*

b). ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este BLOQUE te ayudaron a resolver la situación planteada?

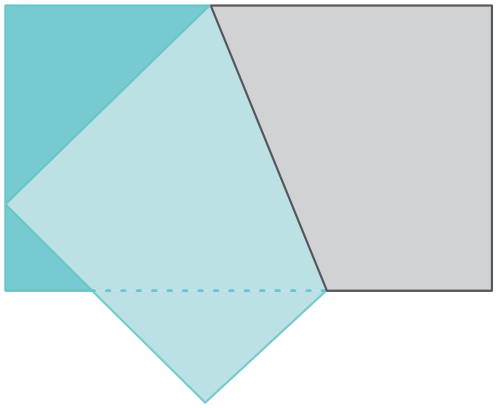
____

____

____

____

Problema 1. Al doblar una *hoja rectangular* como se indica en la *figura*, se obtienen ***tres*** *triángulos* ***semejantes***



*¿Por qué son **semejantes**?*

Reflexiones relacionadas con el problema 2:

a). ¿Cómo te resultó dar solución al problema?

Muy difícil	*Difícil*	*Fácil*	*Muy fácil*

b). ¿Qué ***criterios*** de ***semejanza*** utilizaste y cómo identificaste los elementos a comparar entre los *triángulos*?

___

___

___

Reflexiones generales relacionadas con el **BLOQUE 3**:

¿Lograste comunicar tus ideas o puntos de vista al trabajar en equipo o en grupo?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Tomaste en cuenta la participación de tus compañeros para modificar tus respuestas, tus acercamientos a los problemas…etc.?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Lograste interpretar las ideas de tus compañeros al realizar alguna tarea o actividad de clase?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Expresaste alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades a tus compañeros o al profesor?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Te entusiasmó ayudar a tus compañeros o que ellos te ayudarán a resolver dudas?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
En este **BLOQUE** *me pareció interesante:*			
En este **BLOQUE** *me pareció difícil :*			

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos

COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA

BLOQUE 4

Aprendiendo a resolver problemas utilizando conceptos de la Trigonometría

En este nuevo BLOQUE ***aprenderás a resolver varios problemas*** que de seguro te resultarán muy interesantes y te sorprenderás de la forma en que, ***utilizando algunos conceptos de la*** Geometría que estudiaste en el BLOQUE anterior, pueden resolverse. En particular utilizarás lo que aprendiste sobre *triángulos* ***semejantes*** y el Teorema de Pitágoras, conceptos que, incluso, empezaste a estudiar desde la escuela secundaria.

Algunos de los ***problemas que resolverás*** en este BLOQUE, tal vez te los hayas formulado tú mismo o tal vez te los hayan planteado en algún curso de ***Matemáticas*** en la Escuela Secundaria. Mencionemos algunos: Te has preguntado alguna vez ***¿Cómo se pudo*** *medir* ***el radio de la Tierra?*** O ***¿La distancia de la Tierra a la luna o la distancia de la Tierra al sol?*** o simplemente ***¿Cómo puede*** *medirse* ***la altura de una montaña o la anchura de un barranco?***

En realidad éstos son sólo algunos ejemplos de ***problemas*** que han sido resueltos utilizando una rama de las ***Matemáticas*** basada fundamentalmente en las *propiedades* de los *triángulos* ***semejantes*** y en el Teorema de Pitágoras que se conoce como *Trigonometría*, palabra de origen griego que significa *la medida de los triángulos* ya que *trigonon* es equivalente a *"triángulo"* y *metron* puede definirse como *"medida"*. Los conceptos y métodos de la *Trigonometría* permiten determinar la *medida* de los ***tres lados*** de cualquier *triángulo* y de los ***tres*** *ángulos* a partir de conocer ***tres*** de los ***seis*** datos, siempre que uno de los datos sea la *medida* de ***uno*** de los ***lados***.

Tiempo asignado: 18 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividades de Inicio

Haciendo la tarea de Matemáticas

Actividad: 1

En la clase de ***Matemáticas II***, *la profesora* comentó que, utilizando lo estudiado sobre *triángulos* ***semejantes***, era posible calcular *la altura de un edificio*, de *una torre*, de *un poste* y de otros muchos *objetos* sin necesidad de *medirla* directamente. Habiendo comentado esto dejó como *tarea* a sus alumnos que, organizados *en parejas*, idearan una manera de *calcular la altura de algún objeto* que ellos mismos eligieran, poniendo en práctica lo aprendido en el **BLOQUE** anterior sobre *triángulos*, *a unos equipos* les asignó que calcularan la *altura* utilizando las *propiedades* de los *triángulos equiláteros* y *a otros* las de los *triángulos isósceles*. También aclaró que dicha *tarea* deberían **reportarla** por escrito describiendo la manera en que lo hicieron y justificando el o los procedimientos utilizados.

A continuación vas a conocer algunos de los **reportes** presentados, **reportes** que deberás estudiar cuidadosamente para conocer cómo lo hicieron y opinar sobre si lo hicieron bien o no.

1.- **Reporte** presentado por **Carlos** y **Juan**:

A *nosotros* nos tocó utilizar las *propiedades* de los *triángulos isósceles* y decidimos calcular la *altura del árbol*, cuya foto aparece en la Figura 1.

Para calcularla hicimos lo siguiente:

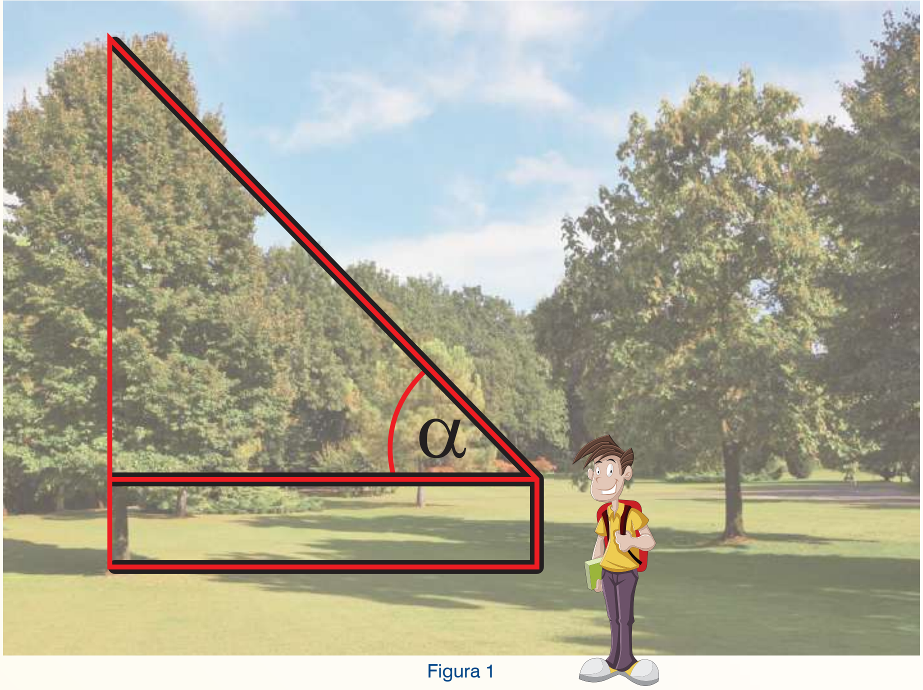


Figura 1

- Buscamos un punto en ***la superficie de la Tierra*** desde el cual, la parte *más alta del árbol*, **Juan** la viera, estando de pie, con un *ángulo de elevación* de *45°*.

- Para medir el *ángulo de elevación* construimos un aparato como el de la foto que hemos incluido en la Figura ***2*** de este **reporte**.

- Luego medimos *la distancia* desde el punto que localizamos en ***la superficie de la Tierra***, *hasta el pie del árbol*, que resultó ser *8.8 m* y a esa *distancia* le sumamos *1.70 m*, que es la medida desde ***la Tierra*** a los ojos de **Juan** habiendo obtenido *10.5 m*, que *es la altura del árbol*.

- Al *ángulo* α señalado en la Figura 1, es al que se denomina *ángulo de elevación* y a la *línea imaginaria* que va del ojo del observador al punto observado, se denomina ***línea de visión del observador.***

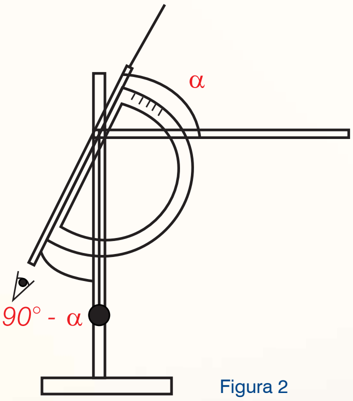


Figura 2

a. ¿Qué opinas de lo dicho por Carlos y Juan, cuando afirman que *la altura del árbol* es igual a la suma de *la distancia* que midieron *más la altura* a que se encuentran de ***la Tierra*** los ojos de Juan? Tanto si estás de acuerdo con ellos o no, **argumenta** tu opinión para que luego la comentes con tus compañeros de equipo y oigas las de ellos tratando de ponerse de acuerdo respecto a si lo que dijeron Carlos y Juan, está bien o no.

____
____
____
____
____
____

b. ¿Por qué elegirían que el *ángulo de elevación* fuera de *45°*?

____
____

c. Para explicar su procedimiento, Juan y Carlos, **trazaron** en la **foto del árbol** las líneas que se observan y luego hicieron **un dibujo** como el que aparece en la Figura 3 aclarando que se trataba de una figura igual a la que habían **dibujado** en la **foto del árbol** y que iban a utilizarla para justificar su procedimiento.

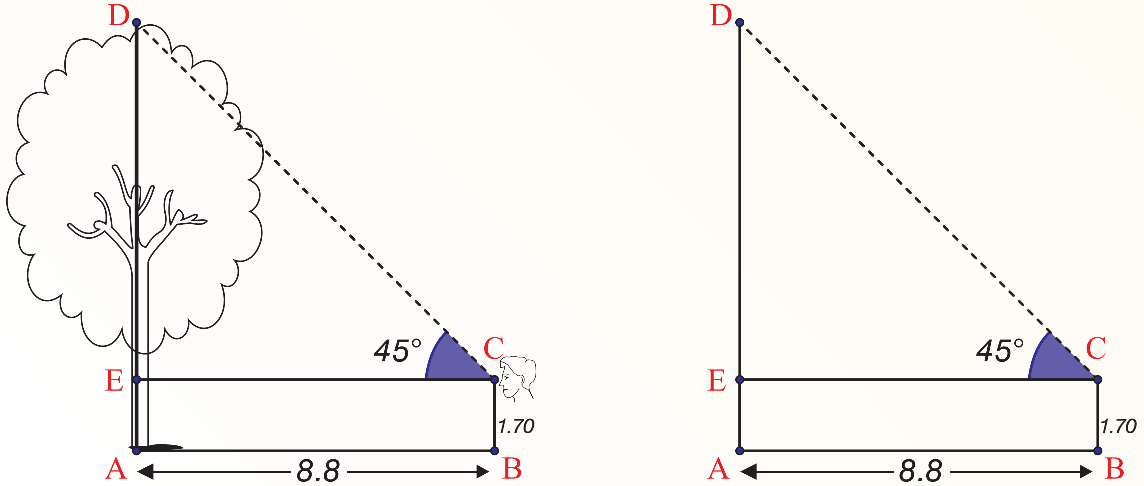


Figura 3

Empezaron diciendo:

El segmento AD representa *al árbol*, de donde es fácil concluir que D representa el punto más alto y A, el *pie del árbol*. Ellos siguieron diciendo lo que representaban los otros puntos y los segmentos, pero aquí debes ser tú el que diga lo que representan.

- Los puntos B y C
- Los segmentos AB, BC, EC y CD
- Los ángulos ECD, DEC y CDE

Además, Carlos y Juan anotaron los datos que obtuvieron en sus mediciones, como medidas de los segmentos y ángulos correspondientes en el dibujo y a partir de los datos que tenían, calcularon las medidas de los otros segmentos y ángulos y también los anotaron. Ahora hazlo tú.

Anota lo que miden:

- Los segmentos AB y BC
- Los ángulos ECD y DEC,

Utilizando esta información determina lo que miden:

- Los segmentos EA, EC, ED y CD
- El ángulo CDE

d) Justifica cómo determinaste las medidas del ángulo CDE y de los segmentos ED y CD.
____
____
____
____
____

e) ¿Qué tipo de *triángulo* es el *triángulo* ECD?
____

f) ¿Qué hiciste para calcular *la longitud* de la *línea de visión* de Juan a la parte *más alta del árbol*?
____
____

g) ¿Cómo resultaron ser los segmentos EC y ED?

____

____

¿Por qué? ____

h) ¿Cuál es la *razón* entre los *catetos* del *triángulo isósceles*?

____

i) Y entre el *cateto* adyacente al *ángulo de elevación* y la ***hipotenusa*** ¿Cuál es la *razón*?

____

____

j) ¿Y entre el *cateto opuesto* y la ***hipotenusa***?

____

k) ¿Dependen estas *razones* del tamaño del *triángulo*?

____

Desarrollo

Karen y Jorge formaron otro equipo y decidieron calcular *la altura de una antena* y de dos postes. Ellos debían basarse en lo aprendido sobre *la altura* de los *triángulos equiláteros*.

En la Figura 4 está la *foto de la antena* y a su derecha está el dibujo de dos *triángulos* con base en los cuales describieron y justificaron el procedimiento que utilizaron para calcular *la altura de la antena*.

Figura 4

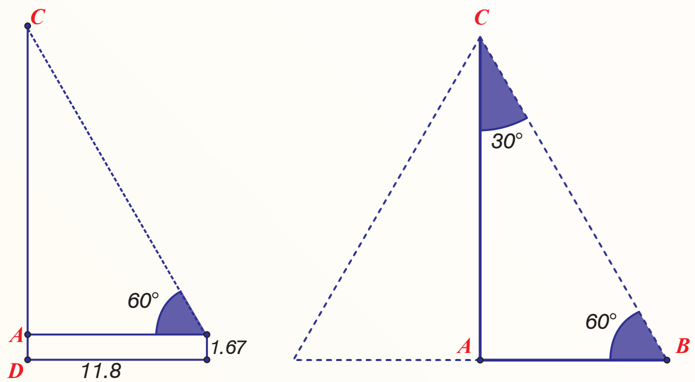


Figura 5

El procedimiento que utilizaron lo describieron de la siguiente manera:

- Para calcular *la altura de la antena* localizamos un punto en el pavimento desde el cual la *línea de visión* de Jorge a la parte *más alta de la antena* formara con la horizontal un *ángulo* de *60*°, es decir, buscamos el punto desde el cual el *ángulo de elevación* fuera de *60*°.

- Luego medimos la distancia del punto localizado *a la antena* que resultó ser de *11.8 mts*.

- El siguiente paso fue hacer el dibujo que hemos incluido en este **reporte**, en el que puede verse que el *ángulo* que forma *la antena* con la *línea de visión* de Jorge es de *30*°, es decir *que la antena*, *la línea de visión* y la línea que va del punto donde nos colocamos *a la antena* forman un *triángulo rectángulo* cuyos *ángulos agudos* miden *30* y *60* grados.

- Luego, procedimos a dibujar un *triángulo* igual al que ya teníamos donde *la antena* es lado común a los *dos triángulos* (como puede verse la Figura 5). Hicimos esto porque los *dos triángulos* juntos forman *un triángulo equilátero*, lo cual lo habíamos aprendido en el BLOQUE anterior.

- Observando el *triángulo equilátero* dibujado, nos quedó claro cómo calcular *la altura de la antena*.

Hasta aquí dejamos la descripción que hicieron Jorge y Karen del procedimiento que utilizaron para calcular *la altura de la antena*. Ahora tú, observando el dibujo que ellos hicieron, *calcula dicha altura* justificando el procedimiento que utilices. Guíate contestando las siguientes preguntas.

a). ¿Por qué dicen Karen y Jorge que el *triángulo* que se formó es *equilátero*?

b). ¿Cuánto mide la base del *triángulo equilátero*?

c). Y los otros ***dos lados*** de dicho *triángulo* ¿Cuánto miden?

d). Si ahora sólo observas el *triángulo rectángulo* original, esto es, el formado *por la antena*, *la línea de visión* y la línea horizontal que va de los ojos de Jorge *a la antena* ¿Cuánto mide ***la hipotenusa*** de dicho *triángulo*?

e). Y el *cateto adyacente* al *ángulo de elevación* ¿Cuánto mide?

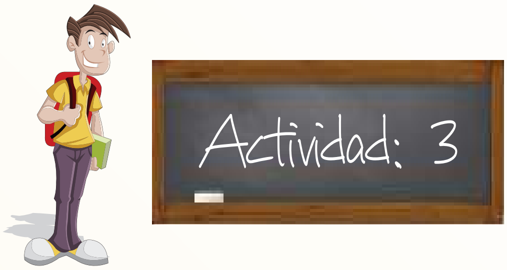
f). Conociendo la *longitud* de ***la hipotenusa*** y del *cateto adyacente* ¿Cómo puedes calcular la *longitud* del *cateto opuesto*?

g). Y *la altura de la antena* ¿Cómo la calculas?

h). Realiza los cálculos y determina *la altura de la antena.*

i). ¿Cuál es la *razón* entre el *cateto opuesto* al *ángulo* de *60°* y ***la hipotenusa*** del *triángulo*?

j). Y la *razón* entre el *cateto opuesto* y el *cateto adyacente*, ¿Cuánto vale?



Para calcular *la altura del poste* que aparece en la foto ligeramente a la derecha *de la antena* Figura 6, procedieron de igual manera que la que utilizaron para calcular *la altura de la antena*, es decir localizaron el punto en el pavimento que permitía a Karen observar el punto *más alto del poste* con un *ángulo de elevación* de *60°* y midieron la distancia de dicho punto *al pie del poste*, obteniendo la siguiente medida: *5.4 m.*

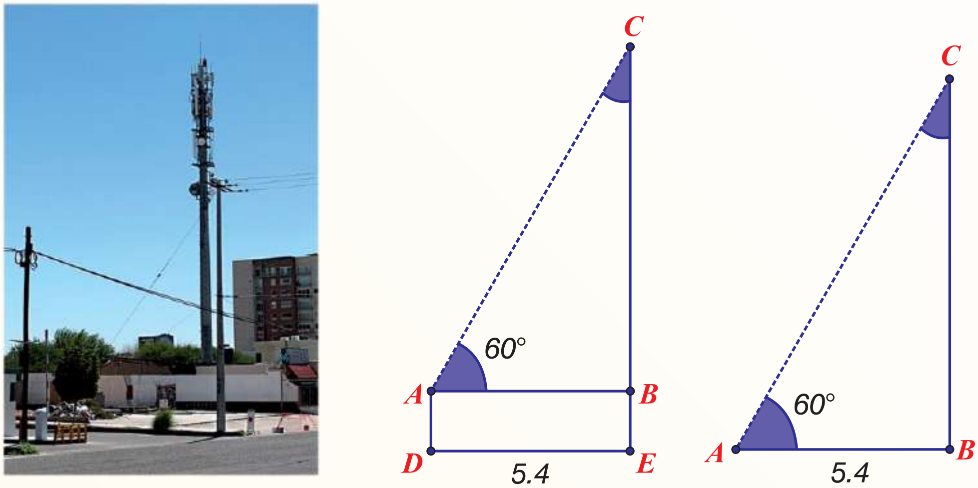
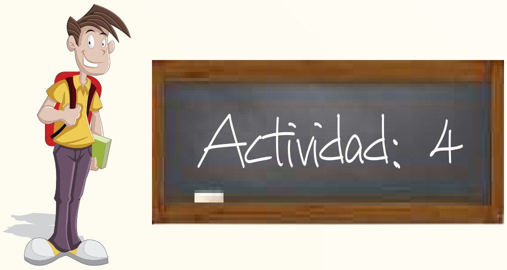


Figura 6

Con estos datos, *calcula la altura del poste* utilizando el procedimiento con que Karen y Jorge determinaron *la altura de la antena*.



Para calcular *la altura del poste* que en la foto se ve a la izquierda *de la antena*, decidieron localizar el punto en el pavimento desde el cual *el ángulo de elevación* con que Jorge, estando de pie, veía la parte más alta de *dicho poste,* fuera de *30°*. **En su reporte** dijeron que habían decidido utilizar este *ángulo* porque sabían que el *triángulo* que se forma con *la línea de visión* de Jorge a la parte *más alta del poste*, la horizontal del ojo de Jorge *al poste* y la vertical trazada desde el punto *más alto del poste* a la línea horizontal (el cual dibujaron como se ve en la Figura 7, es ***semejante*** a los que habían utilizado en *los dos casos anteriores* puesto que los *tres ángulos* de éste eran respectivamente iguales a los *tres ángulos* de los otros y que por ese hecho se podía calcular *la altura del poste* utilizando un procedimiento igual al de los dos casos anteriores.

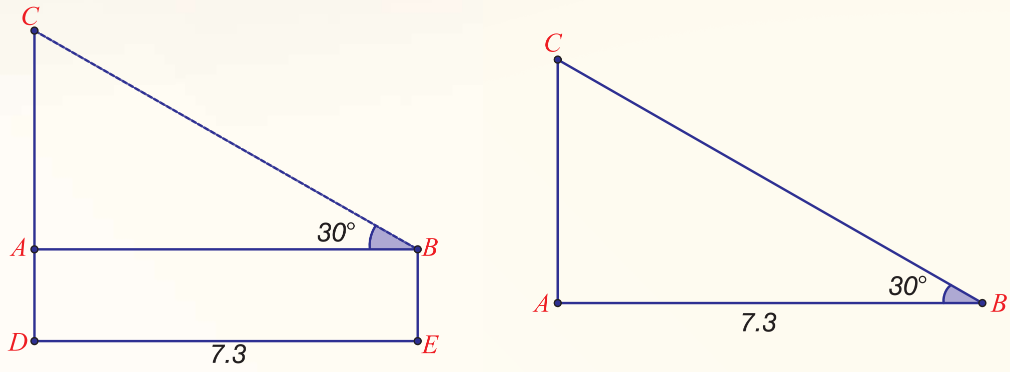


Figura 7

a). En la Figura 7 aparece el *triángulo* que dibujaron Karen y **Jorge** para explicar la forma en que calcularon *la altura de este poste*. Con base en ella, determina:

- ¿Qué representan los segmentos AB, BC y AC?
- ¿Cuánto miden los *ángulos* BAC, CBA y ACB?
- ¿Cuánto mide el segmento AB?

b). **Jorge** y Karen partiendo de la ***semejanza*** del *triángulo* ABC con los que habían dibujado para calcular *la altura de la antena* y del *otro poste*, decidieron seguir el mismo procedimiento y empezaron trazando un *triángulo* igual al ABC para formar un *triángulo equilátero*. Tú haz lo mismo con el *triángulo* de la Figura 7 y determina *la razón* entre la longitud del segmento AC y la del segmento BC.

c). Para calcular la *longitud* del segmento AC, Karen y **Jorge** procedieron de la siguiente manera:

- Llamaron ***x*** a la *longitud* del segmento AC por ser la *longitud* que querían conocer.

- Luego, sabiendo que *la razón* entre las *longitudes* de los segmentos AC y BC, era *1/2*, concluyeron que *la longitud* de BC debían representarla con 2*x* *¿Por qué?*

- Estos datos los anotaron en el *triángulo* de la *figura* y procedieron a calcular el valor de ***x*** utilizando el Teorema de Pitágoras.

- Escribe tú la expresión que relaciona los *catetos* y la ***hipotenusa*** del *triángulo* de la Figura 7 en el que previamente has anotado lo que Jorge y Karen dicen haber anotado.

- A partir de la expresión que escribiste determina *la longitud* de AC y de BC y *la altura del poste.*

d). Cuando ya habían calculado *la altura del poste* Karen dijo que podían haberla calculado utilizando otro procedimiento que le parecía más sencillo y se lo explicó a Jorge de la siguiente manera:

- En el inciso j) de la Actividad 2 calculamos *la razón* entre el *cateto opuesto* y el *cateto adyacente* al *ángulo* de *60°* que resultó ser $\sqrt{3}$. Como en este nuevo *triángulo* el *cateto opuesto* al *ángulo* de *60°* mide *7.3 m* y sabemos que esta *razón* es la misma independientemente de lo que midan ***los lados***, podemos aprovechar este hecho para calcular el valor del *cateto adyacente* al *ángulo* de *60°*.

- Representa con ***x*** el valor del *cateto adyacente* al *ángulo* de *60°* y calcula su valor utilizando el procedimiento comentado por Karen. Cuando lo hayas hecho cerciórate de si obtuviste el mismo valor que habías obtenido con el otro procedimiento.

Actividad: 5

En las primeras *Cuatro Actividades* de esta **secuencia** calculaste *la altura de un árbol*, la de *una antena* y las de *dos postes*. En todos los casos, para hacerlo, utilizaste *propiedades* de los *triángulos rectángulos*. Por ejemplo:

☑ En el caso *del árbol*, para calcular *su altura* utilizaste *propiedades* de los *triángulos rectángulos* que tienen *un ángulo* de *45°* pues sabías que en ese caso, el otro *ángulo agudo* del *triángulo* también mide *45°*, lo cual hace que el *triángulo* sea *isósceles* y que, como consecuencia, ***los lados*** que forman el *ángulo recto* (los llamados *catetos*) sean iguales. Así que, conociendo la *longitud* de uno de esos ***lados***, pudiste determinar la *longitud* del otro.

☑ Es importante que te des cuenta que esta ***propiedad*** es válida para todos los *triángulos rectángulos* que tengan *un ángulo agudo* de *45°*. Independientemente de qué tan grandes o qué tan pequeños sean sus ***lados***, *la razón* entre sus *longitudes* va a ser siempre la misma; por ejemplo, *la razón* entre las *longitudes* de los *catetos* siempre va a ser *1*.

a). ¿Cuál es *la razón* entre la *longitud* del *cateto opuesto* al *ángulo agudo* y la ***hipotenusa*** del *triángulo*?

b). Y *la razón* entre el *cateto adyacente* al *ángulo* y la ***hipotenusa***, *¿Cuál es?*

c). En este caso ¿Cómo resultan ser estas *dos razones*? ¿Por qué crees que haya sido así?

d). ¿También *estas razones* son independientes del tamaño de los ***lados*** del *triángulo*?

☑ En el caso *de la antena* y *de los postes*, para calcular *la altura de cada uno* de ellos, utilizaste *propiedades* de los *triángulos rectángulos* que tienen *ángulos agudos* de *60* y *30* grados. En este caso lo que sabías es que *la razón* entre el *cateto opuesto* al *ángulo* de *30°* y la ***hipotenusa*** del *triángulo* es *1/2* (lo cual es equivalente a decir que la *longitud* de dicho *cateto* siempre será igual a la *mitad* de la *longitud* de la ***hipotenusa*** independientemente de qué tan grandes o qué tan pequeños sean los ***lados*** del *triángulo*).

☑ Esta *propiedad* y el Teorema de Pitágoras (que es válido para todos los *triángulos rectángulos*) te permitieron *calcular la altura de la antena* y *la altura de cada uno de los dos postes*.

e). En estos *triángulos* ¿Cuál es *la razón* entre la *longitud* del *cateto adyacente* al *ángulo* de *30°* y la ***hipotenusa*** del *triángulo*?

____

____

f). Y *la razón* entre el *cateto opuesto* al *ángulo* de *30°* y el *cateto adyacente* *¿Cuál es?*

____

____

g). En la **Tabla 1.1** aparecen dibujados, en la *primera columna tres triángulos*, con *ángulos agudos* de *45°*, *60°* y *30°* respectivamente. En la *segunda* y *tercera columna* de la **tabla** están indicadas *las razones* entre los ***lados*** del *triángulo*. Calcula su valor y anótalo donde corresponda. Sugerencia: Considera los *triángulos* cuya ***hipotenusa*** mide 1 y con ese dato calcula lo que miden los *catetos* para luego calcular *las razones* solicitadas.

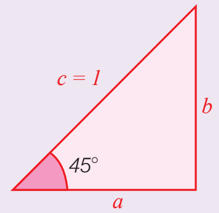
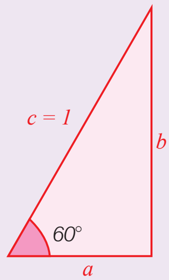
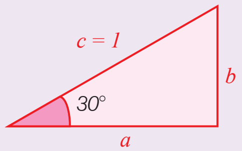
	$\frac{b}{c} =$ $\frac{a}{c} =$ $\frac{b}{a} =$	$\frac{c}{b} =$ $\frac{c}{a} =$ $\frac{a}{b} =$
	$\frac{b}{c} =$ $\frac{a}{c} =$ $\frac{b}{a} =$	$\frac{c}{b} =$ $\frac{c}{a} =$ $\frac{a}{b} =$
	$\frac{b}{c} =$ $\frac{a}{c} =$ $\frac{b}{a} =$	$\frac{c}{b} =$ $\frac{c}{a} =$ $\frac{a}{b} =$

Tabla1.1

h). Si hubieras considerado otro valor de la ***hipotenusa*** ¿Crees que *las razones* habrían sido otras? Tanto si crees que no como si crees lo contrario justifica tu respuesta.

____

____

i). Considera ahora que el valor conocido fuera el del *cateto opuesto*, esto es, considera que $b = 1$ y determina de nuevo el valor de cada una de *las razones* anotándolos en la nueva **Tabla** y cerciórate si resultaron los mismos o diferentes a los calculados en el inciso g).

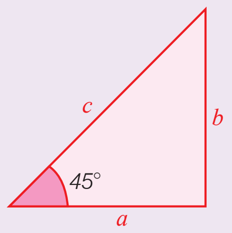
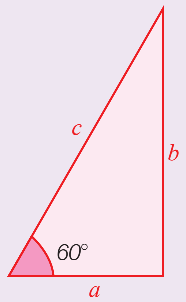
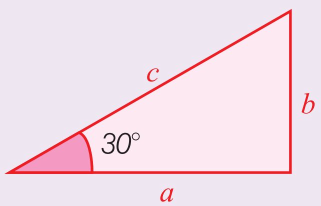
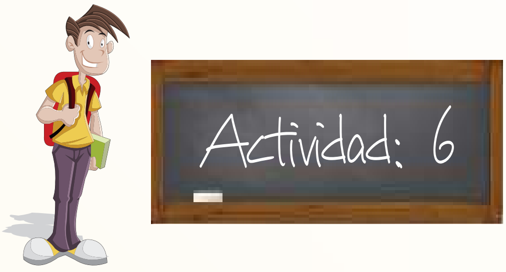
	$\frac{b}{c} =$ $\frac{a}{c} =$ $\frac{b}{a} =$	$\frac{c}{b} =$ $\frac{c}{a} =$ $\frac{a}{b} =$
	$\frac{b}{c} =$ $\frac{a}{c} =$ $\frac{b}{a} =$	$\frac{c}{b} =$ $\frac{c}{a} =$ $\frac{a}{b} =$
	$\frac{b}{c} =$ $\frac{a}{c} =$ $\frac{b}{a} =$	$\frac{c}{b} =$ $\frac{c}{a} =$ $\frac{a}{b} =$

Tabla1.2

Actividad de Cierre



Como te habrás dado cuenta, conocer *las razones* entre los ***lados*** de un *triángulo rectángulo*, ha resultado muy útil para calcular *la altura de objetos* que resulta difícil medir e incluso, en ocasiones, resulta imposible, como veremos más adelante.

El problema de calcular *alturas* que resulta difícil medir, es sólo un ejemplo de la importancia de conocer y aprender a utilizar *las razones* entre los ***lados*** de los *triángulos rectángulos* pues con ellas se pueden resolver y se han resuelto una gran cantidad de ***problemas***, tanto de la vida cotidiana como de la ciencia y la ingeniería.

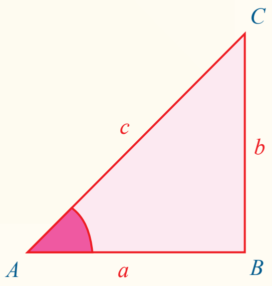
Considerando lo dicho en el *párrafo anterior*, vamos a estudiar un poco más *estas razones*. Para que, sabiendo más sobre ellas, puedas utilizarlas para resolver otros ***problemas*** que te permitan apreciar de mejor manera su importancia y utilidad.

i. Primeramente es importante que sepas que son ***seis*** *las razones* que pueden establecerse entre los ***lados*** de todo *triángulo rectángulo*.

ii. Estas razones se conocen con el nombre *genérico* de *razones* ***trigonométricas.***

iii. Cada una de estas *razones* tiene *nombre propio*: *Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante*.

iv. En la siguiente **Tabla** aparece *la razón* a la que se denomina con cada uno de los nombres citados y la manera abreviada en que se escribe.



$$Sen A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \qquad Csc A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}}$$

$$Cos A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \qquad Sec A = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}}$$

$$Tan A = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} \qquad Cot A = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}}$$

Tabla1.3

v. La expresión $SenA = \dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$ se lee: "*Seno* de A igual a cateto opuesto entre ***Hipotenusa***" donde A indica el ángulo agudo que determina cuál es el cateto opuesto y cuál el cateto adyacente.

vi. El resto de *las razones* se leen de manera similar, es decir: "*CosA*" se lee "*Coseno de A*", "*CscA*" se lee "*Cosecante de A*" y así sucesivamente.

Es importante que sepas que:

a). En la Figura 8 aparecen dibujados 3 *triángulos rectángulos*, en los cuales están indicadas las medidas *de dos* de los *tres **lados***. Con esta información determina, para cada uno de los *tres triángulos*, el valor de:

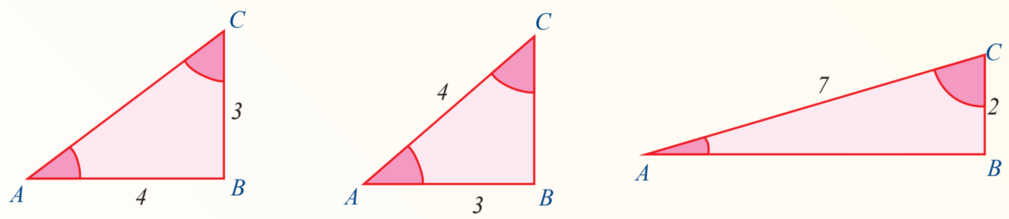


Figura 8

i) $Sen\ A =$	ii) $Cos\ A =$	iii) $Tan\ A =$
iv) $Cot\ A =$	v) $Sec\ A =$	vi) $Csc\ A =$
vii) $Sen\ C =$	viii) $Cos\ C =$	ix) $Tan\ C =$
x) $Cot\ C =$	xi) $Sec\ C =$	xii) $Csc\ C =$

b). Explica cómo hiciste para calcular *las razones* solicitadas.

____
____
____

c). ¿Puede el ángulo A, en alguno de los *tres triángulos*, medir *45°*? Tanto si tu respuesta es *afirmativa* como *negativa*, justifícala.

____
____
____

d). El *ángulo* A tampoco puede medir *30°* ni *60°*. Explica por qué.

____
____
____

e). Traza un *triángulo rectángulo* que tenga un *ángulo* A, tal que $Tan\, A = \frac{5}{12}$ y luego determina el valor de las otras ***cinco*** *razones* ***trigonométricas*** de ese *ángulo*.

f). De acuerdo con los cálculos que has estado haciendo en las Actividades de esta **secuencia**, ¿De qué depende el valor de las *razones* ***trigonométricas***?

g). Explica cómo hiciste para calcular *las razones* solicitadas.

h). ¿Puede el *ángulo* A, en alguno de los *tres triángulos*, medir *45°*? Tanto si tu respuesta es *afirmativa* como *negativa*, justifícala.

i). El *ángulo* A tampoco puede medir *30°* ni *60°*. Explica por qué.

j). Traza un *triángulo rectángulo* que tenga un *ángulo* A, tal que $Tan\, A = \frac{5}{12}$ y luego determina el valor de las otras ***cinco*** *razones* ***trigonométricas*** de ese *ángulo*.

Secuencia Didáctica 2.-

Actividades de Inicio

Funciones Trigonométricas

Actividad: 1

En la **Secuencia Didáctica 1** aprendiste que *las razones* ***trigonométricas*** son *las relaciones* entre **los lados** de un *triángulo rectángulo* y que dichas *razones* ***son seis*** y se denominan *Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante* y que al nombrarlas se hace referencia a uno de los *ángulos agudos* del *triángulo* para poder identificar cuál es el *cateto opuesto* al *ángulo* y cuál el *cateto adyacente*.

Así que, cuando se pide determinar el valor del *Sen 30°* en el *triángulo* de la Figura 1, se sabe que el *cateto opuesto* es el representado con la letra b, mientras que el *cateto adyacente* al *ángulo* de *30°* es el representado con la letra a. En cambio, si en la misma figura se pide determinar el *Seno* de *60°*, que es el otro *ángulo agudo*, entonces el *cateto opuesto* al *ángulo* será el representado con la letra a y el representado con la letra b será el *cateto adyacente*.

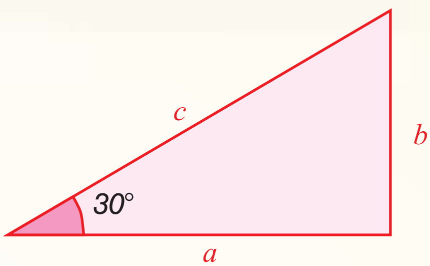


Figura 1

También aprendiste que a cada valor de uno de los *ángulos agudos*, le corresponde un valor específico, único, para cada una de *las razones*, esto es, dado el valor de un *ángulo* A, hay un valor del $SenA$, un valor del $CosA$, un valor de la $TanA$ y un valor de cada una de las otras *tres razones*.

En el caso de los *ángulos* de *30*, *45* y *60 grados*, basándote en *las propiedades* de los *triángulos isósceles* y *equiláteros* pudiste determinar el valor de cada una de *las razones* de dichos *ángulos*. Seguramente recuerdas que la $Tan45° = 1$ y que el $Sen30° = .5$ y si no lo recuerdas, al menos se espera que recuerdes cómo puedes calcular dichos valores.

Estas razones resulta fácil calcularlas para estos *ángulos*, pero no podrás calcularlas para un *ángulo* cualquiera. Teniendo presente que vas a necesitarlas para resolver algunos ***otros problemas*** que se espera te interese resolver, vas ahora a aprender cómo puedes conocer el *valor* de cada una de *las razones* ***trigonométricas*** para un determinado *ángulo*; por ejemplo, supongamos que necesitas saber cuánto *vale* el *Sen38°* o el *Cos23°* o la *Tan69°*, para conocer el *valor* de *estas razones* necesitarás una calculadora cuyo uso tal vez ya conozcas, pero si no es así puedes preguntar a tu maestro o a algún compañero que sepa usarla pues es relativamente fácil. Al pedirle a la calculadora el *Seno*, el *Coseno* o la *Tangente* de un determinado *ángulo*, de inmediato te aparecerá en pantalla el *valor* de l*a razón* representada con esos nombres.

a). Utilizando una calculadora encuentra *el valor* de *las siguientes razones*:

i) $Sen\ 38° =$ ii) $Cos\ 23° =$ iii) $Tan\ 69° =$

b). Cuando lo que conoces es *la razón* y quieres saber *el valor* del *ángulo* al que le corresponde, también puedes hacerlo utilizando la calculadora, así es que determina *el valor* del *ángulo* α para el cual:

i) $Sen\ \alpha = .6347$ ii) $Cos\ \alpha = .7823$ iii) $Tan\ \alpha = 2.1415$

El cálculo del valor de la *Cotangente* de un *ángulo*, no se puede hacer de manera directa con la calculadora ya que no existe una tecla para ello. Sin embargo *su valor* puede calcularse a partir *del valor* de la *Tangente* del mismo *ángulo* ya que estas *dos razones* son recíprocas, lo cual quiere decir que su producto es *igual a 1*.

c). De acuerdo con las definiciones dadas para la *Tangente* y la *Cotangente* de un *ángulo* comprueba que su producto es *igual a 1* y luego utiliza esa *propiedad* para determinar cómo puede calcularse *el valor* de la *Cotangente* de un *ángulo* a partir *del valor* de la *Tangente* del mismo *ángulo*.

d). Con base en lo que has hecho para calcular el valor de la *Cotangente* de un *ángulo*, determina cómo puedes *calcular el valor* de la *Secante* y *el valor* de la *Cosecante* ya que para ellas tampoco existe en la calculadora, una tecla que te permita obtener de manera directa *el valor* de *tales razones*.

e). Determina *el valor* de *las seis razones **trigonométricas*** para los *ángulos* $A = 17°$, $B = 34.15°$ y $C = 78.4°$

De acuerdo con las *Actividades* hasta aquí realizadas, se espera que te haya quedado claro que *el valor* de cada una de *las razones* que estamos estudiando, depende *del valor* del *ángulo agudo* al que se hace referencia y que dado *el valor* del *ángulo*, *el valor* de *la razón* es único.

Este tipo de relaciones, en las que *al valor de una variable* se le asocia con un único *valor de otra variable*, se le llama *función*, tal como lo estudiaste en el curso de **Matemáticas I** en el que estudiaste ***funciones lineales*** y ***funciones cuadráticas***. De acuerdo con esto, la relación entre *el valor* del *ángulo* y *el valor* del *Seno* del *ángulo* constituye una *función* que se denomina "*Función Seno*"; de la misma manera la relación entre *el valor* del *ángulo* y *el valor* del *Coseno* del *ángulo* constituye una *función* que se denomina "*Función Coseno*" y como podrás suponer hay también una "*Función Tangente*", una "*Función Cotangente*", una "*Función Secante*" y una "*Función Cosecante*"; a todas ellas se les denomina con el nombre genérico de *"Funciones Trigonométricas"*

Desarrollo

Actividad: 2

Los faros marítimos

Los faros marítimos fueron creados en la antigüedad para que sirvieran de referencia a los navegantes indicándoles dónde se encuentra la tierra firme. En la actualidad, utilizando nuevas tecnologías, ha sido posible fabricar medios más eficaces para ubicar la posición de una embarcación cuando se encuentra en altamar, tal es el caso de los **GPS**; sin embargo **los faros** siguen cumpliendo su función original de servir de principal medio de referencia a los navegantes de las pequeñas embarcaciones y constituir un sistema de seguridad para la embarcaciones que utilizan medios electrónicos para ubicarse, en caso de que éstos fallen.

Los faros son torres de unos *diez metros de altura*, construidas en puntos estratégicos de la costa o ligeramente dentro del mar, siempre sobre bases elevadas, muy firmes, por lo general de roca, con un balcón elevado aproximadamente unos *60 metros* sobre el nivel del mar, desde el cual se envía periódicamente una señal luminosa con un potente **faro** que llegan a tener un alcance de varios kilómetros.

Figura 2

Suponte que desde lo alto de un **faro** observas una **embarcación** que está **en problemas** (Figura 2). ¿Qué harías para determinar *la distancia* a que se encuentra **la embarcación** del **faro**? Guiándote por el dibujo que aparece en la Figura 2, responde las siguientes preguntas:

a). En el *triángulo* de la Figura 2 ¿Qué segmento representa *la distancia* de **la embarcación** al **faro**?

____

____

b). Utilizando lo que hasta aquí has aprendido de *Trigonometría*, ¿Qué datos necesitarías conocer para calcular *esa distancia*?

____

____

c). ¿Qué *función trigonométrica* utilizarías?

____

____

d). Desde lo alto del **faro**, ¿Cómo puede determinarse la medida del *ángulo* que se requiere conocer para calcular *la distancia* de la **embarcación** al **faro**? Justifica tu respuesta.

____

____

e). El *ángulo* que estando en lo alto del **faro** forman la horizontal del *observador* y su *línea de visión* a la **embarcación** se denomina *ángulo de depresión* (que es el análogo del llamado *ángulo de elevación*). Utilizando el aparato medidor de *ángulos* que construyeron **Juan** y **Carlos** para calcular *la altura del árbol* y que aparece en la **Secuencia 1** ¿Cómo medirías el *ángulo de depresión*?

____

____

f). Suponte que el *ángulo de depresión* con que se observa la **embarcación** midiera *15°* y *la altura* a que te encuentras en el **faro** fuera *60 metros*, ¿A qué distancia se encontraría **la embarcación** del **faro**?

____

____

g). Si **la embarcación** estuviera a *1 km* del **faro** ¿Cuánto mediría el *ángulo de depresión*?

____

____

h). Y si estuviera a *2 km* del **faro** *¿Cuánto mediría?*

____

____

i). Si el *ángulo de depresión* midiera menos de lo que obtuviste en *el inciso* g), ¿Qué puedes decir de *la distancia* a que se encuentra **la embarcación** del **faro**?

____

____

j). Y si midiera más *¿Qué podrías decir?*

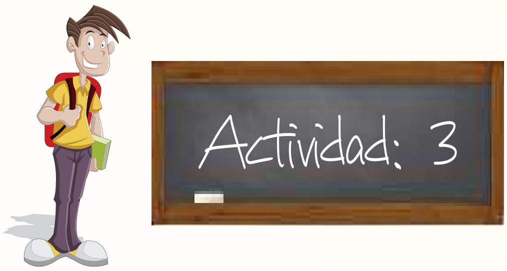
____

____

k). Con base en las respuestas que has dado a las preguntas de los últimos cinco incisos ¿Qué puedes decir de lo que sucede con *la distancia* de **la embarcación** al **faro** si el *ángulo de depresión* es cada vez menor?

____

____



La *Función Tangente*

En la Actividad 2 estuviste analizando la relación existente entre *el valor* del *ángulo de depresión* y *la distancia* a que se encontraba **la embarcación** del **faro**.

a). ¿Qué *función* utilizaste para hacer este análisis?

____

____

____

Desde luego se espera que del análisis hayas concluido que al decrecer el *ángulo de depresión*, *la distancia* del **faro** a **la embarcación**, aumenta. En los *triángulos* que aparecen dibujados en la Figura 3, en los cuales el *cateto opuesto* al *ángulo* es el mismo para todos, puede observarse que el *ángulo* va disminuyendo, a medida que el *cateto adyacente* aumenta.

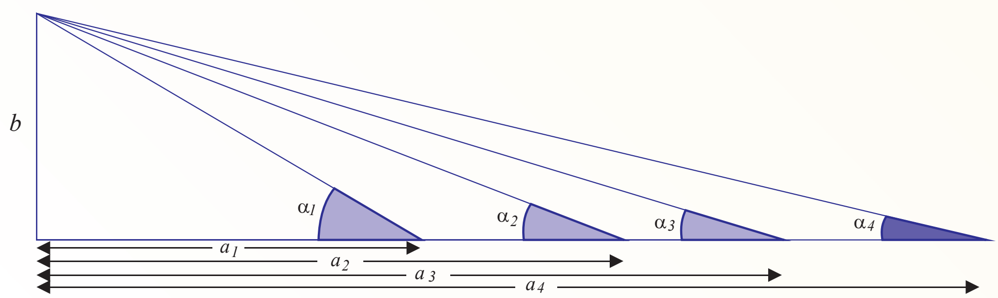


Figura 3

b). Observa de nuevo los mismos *triángulos* y determina lo que sucede con *el valor* de la *Tangente* del *ángulo* al ir aumentando el *cateto adyacente*.

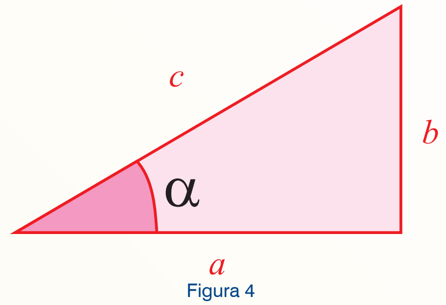


Figura 4

c). En el *triángulo rectángulo* de la Figura 4 sabes que la $Sen\alpha=\frac{b}{c}$ por ser b el *cateto opuesto* al *ángulo* α y a el *cateto adyacente*. A partir del análisis de *la razón* $\frac{b}{a}$ determina. ¿Qué sucede con *el valor* de la *función* $Tan\ \alpha$, si b permanece constante y a va aumentando?

La forma más común de representar esta *función* es por medio de ***la expresión analítica:***

$$y=Tan\alpha$$

donde α representa *el valor* del *ángulo* y y *el valor* de la $Tan\alpha$

El estudio de *las funciones* tiene, entre otros propósitos, entender la manera en que la *variable*, representada con la y varía al variar *el valor* de *la variable* representada con la letra α.

En el caso de *la función* $y=Tan\alpha$ una manera muy sencilla de visualizar la forma en que cambia *el valor* de la $Tan\alpha$, al ir aumentando *el valor* del *ángulo* α, es observando los *triángulos* trazados en la Figura 5 en la cual aparece una *circunferencia* cuyo ***radio*** mide *1* y varios *triángulos*.

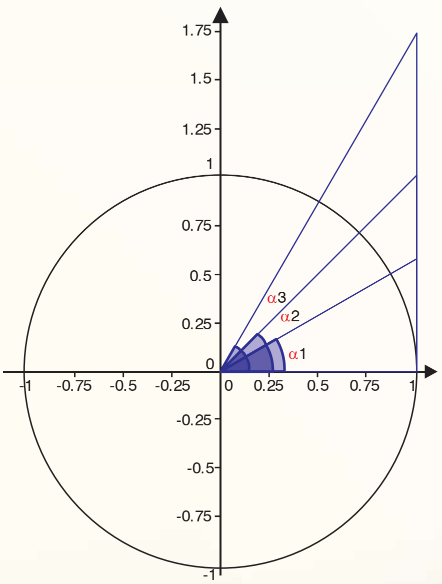


Figura 5

d). ¿Qué tienen en común todos los *triángulos*?

____

____

e). ¿Cuánto mide el *cateto adyacente* de todos ellos?

____

____

f). Sabiendo que $Sen\alpha = \frac{b}{c}$ y que $a = 1$ ¿Cuál es *el valor* de la $Tan\alpha$?

____

____

g). Ahora observa lo que sucede con *el valor* de la $Tan\alpha$ a medida que *el valor* de α va aumentando.

____

____

h). Cuando $\alpha = 45°$ ¿Cuánto *vale* $Tan\alpha$?

____

____

i). Si el *valor* del *ángulo* α es menor de *45°*, ¿Cómo es el *valor* de la $Tan\alpha$?

____

____

j). Y para los *valores* mayores de *45°* ¿Cómo son los *valores* de la $Tan\alpha$?

____

____

k). ¿Puede la $Tan\alpha$ ser *mayor* que *100*?

____

____

l). ¿Cuál será el *mayor valor* que puede tener la $Tan\alpha$?

____

____

m). Investiga con la calculadora *el valor* de $Tan90°$ y explica lo que significa la respuesta que te dio la calculadora.

____

____

n). Describe la manera en que varía $Tan\alpha$ cuando α varía de *0°* a *90°*.

____

____

1.- Las *Funciones Seno* y *Coseno.*

Al igual que en el caso de la *función Tangente* la forma más común de representar *las funciones Seno* y *Coseno* es por medio de las *expresiones analíticas*.

$$y = Sen\alpha \quad \text{y} \quad y = Cos\alpha$$

donde α representa *el valor* del *ángulo* y y *el valor* del $Sen\alpha$ en un caso y del $Cos\alpha$ en el otro. Además, sabes que con la palabra *Seno* se hace referencia a *la razón* entre el *cateto opuesto* a un determinado *ángulo* de un *triángulo rectángulo* y la ***hipotenusa***; y se espera hayas aprendido que *el valor* de dicha *razón* depende del *valor* del *ángulo* y que es única. Lo mismo ha sucedido con la palabra *Coseno* con la cual se hace referencia a *la razón* entre el *cateto adyacente* a un determinado *ángulo* de un *triángulo rectángulo* y la ***hipotenusa***.

También ha quedado establecido que este tipo de *relaciones* se llaman *funciones* y en consecuencia, las *relaciones* entre *el valor* del *ángulo* y *el valor* de *las razones Seno* y *Coseno* constituyen *funciones* del *ángulo*.

En el caso de las *funciones Seno* y *Coseno* es necesario analizar y entender cómo varía *el valor* del $Sen\alpha$, en un caso y del $Cos\alpha$ en el otro, al variar *el valor* de la α.

Empezaremos analizando la variación en el caso de la *función* representada por *la expresión*:

$$y = Sen\alpha$$

Para analizar cómo varía *la razón* representada por el $Sen\alpha$ al variar el *ángulo*, vamos a introducir algunos cambios en la manera en que hemos formulado dicha *razón* con el propósito de que resulte más fácil de observar la variación.

Hasta este momento al hablar del $Sen\alpha$ entendemos que se está refiriendo a *la razón* entre el *cateto opuesto* al *ángulo* representado con α y la ***hipotenusa*** del *triángulo rectángulo* al que pertenece el *ángulo* α, es decir, si el *triángulo* al que estamos haciendo referencia es el de la Figura 4 y el *ángulo* al que nos estamos refiriendo es el señalado con la letra α, entonces:

$$Sen\alpha = \frac{b}{c}$$

Por ser b el *cateto opuesto* al *ángulo* a y c la ***hipotenusa***.

a). Cuando la ***hipotenusa*** del *triángulo* mide *1* ¿A qué es igual el $Sen\alpha$?

De acuerdo con esto y considerando que *el valor* de *la razón* no depende de los valores de b y c sino del *ángulo*; resulta conveniente, para estudiar la variación del $Sen\alpha$, elegir un *triángulo* que tenga una ***hipotenusa*** que mida *1*.

b). ¿Por qué resulta conveniente elegir un *triángulo* así?

c). En la Figura 6 se ha dibujado, en un *sistema de coordenadas cartesianas,* una *circunferencia* con centro en el origen y cuyo ***radio*** mide *1* (a esta *circunferencia* se le denomina *circunferencia unitaria*). En dicha *circunferencia* se observa que el *ángulo* α determina un punto $P(x,y)$ sobre la *circunferencia* donde el $Sen\alpha$ es igual a y, la ordenada del punto P *¿Por qué?*

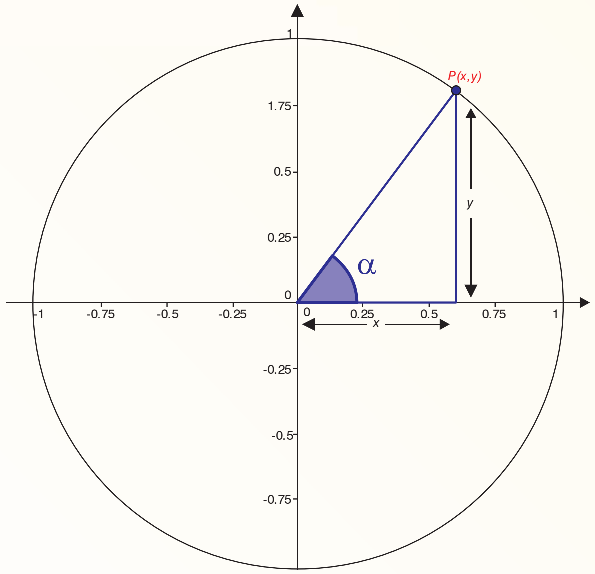


Figura 6

d). Considerando que *el valor* del $Sen\alpha$ es igual a la ordenada del punto P, resulta fácil observar lo que sucede con *el valor* del $Sen\alpha$ a medida que *el valor* del *ángulo* α va aumentando. Observa la figura y explica cómo varía *el valor* del $Sen\alpha$ al variar el *ángulo*.

- ¿Cuál es el *menor valor* que puede tomar α y cuál es el *mayor*?

____
____
____

- Y el $Sen\alpha$ ¿Cuál es el *menor valor* y cuál es el *mayor valor* que puede tomar?

____
____
____

2.- La unidad angular llamada ***Radián***

Desde tus estudios de Primaria y Secundaria aprendiste que el número π indica las veces que el *diámetro* cabe en la *circunferencia* y como el ***radio*** mide la mitad de lo que mide el *diámetro*, entonces el ***radio*** cabe 2π veces en la *circunferencia*; por esta *razón* si trazamos un *arco* de *circunferencia* cuya *longitud* sea igual a la del ***radio***, este *arco* determinará un *ángulo* central que cabrá 2π veces en el *arco* de vuelta completa.

a). De acuerdo con esto, si el *ángulo* central subtendido por el *arco* cuya *longitud* es igual a la del ***radio*** se toma como unidad, ¿Cuánto medirá el *ángulo* de vuelta completa, es decir, el llamado *ángulo perigonal*?

Esta nueva unidad angular se denomina ***Radián*** y su *dimensión* puede verse en la *circunferencia* de la Figura 7 en la que está señalado un *arco* con color rojo, cuya *longitud* es igual a la del ***radio***; por esta *razón*, de acuerdo con la definición que se ha dado de ***Radián***, este *ángulo* mide un ***Radián***. Si el ***radio*** de la *circunferencia* mide *1*, entonces el *arco* también mide *1* y, en consecuencia, la medida del *ángulo* (en ***radianes***) y la del *arco* (en unidades de *longitud*) tienen el mismo *valor numérico*,

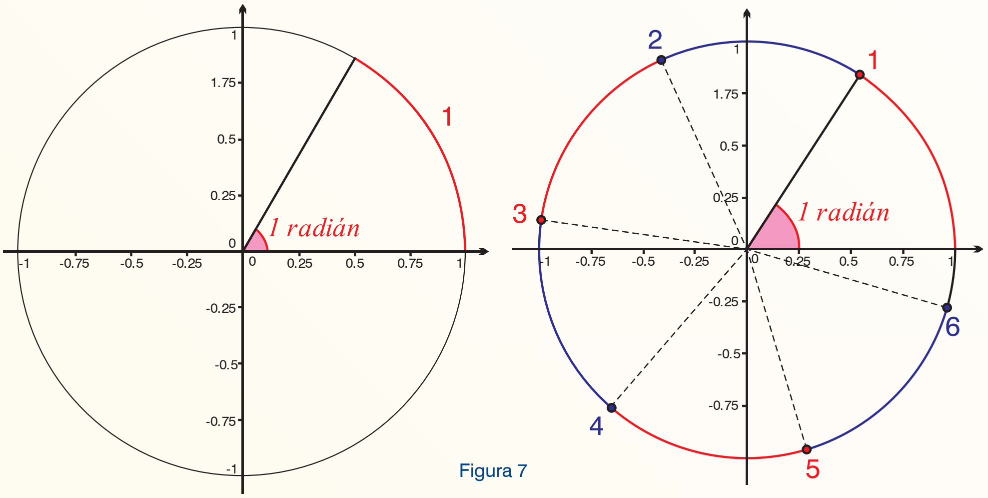


Figura 7

Ésta es una de las ventajas de esta nueva unidad angular, el que en el caso de la *circunferencia* de ***radio*** *1*, coincidan *el valor* del *ángulo* con la *longitud* del *arco*.

b). Sabiendo que con esta nueva unidad angular, el *ángulo* de vuelta completa, que en grados mide *360*, en ***radianes*** mide 2π, completa los datos de la Tabla 1 en la que se indican ciertas medidas y se preguntan otras, lo cual te permitirá familiarizarte con sus equivalencias.

Tabla 1

Medida del ángulo en grados	*Medida del ángulo en radianes*	*Medida del arco cuando el radio mide 1*
$0°$		
$360°$	2π	
	π	
$90°$		
	$\frac{\pi}{4}$	
$60°$		
	$\frac{\pi}{6}$	
$270°$		
	$\frac{3\pi}{4}$	
$120°$		
	$\frac{5\pi}{6}$	
$15°$		
	$\frac{\pi}{18}$	
$330°$		
	1	
$1°$		
$35°$		
	$\frac{11\pi}{12}$	
	$\frac{13\pi}{8}$	

En el inciso c) se hizo ver que en la *circunferencia unitaria* (la *circunferencia* con centro en el origen de un *sistema de coordenadas* y ***radio*** de *longitud 1*), el $Sen\alpha = y$, donde y es la *ordenada* del punto P, determinado por el *ángulo* α .

De acuerdo con esto, vamos a definir, en *la circunferencia unitaria*, *la función* $Sen\alpha$ como *la ordenada* del punto P determinado por el *ángulo* α.

Esta manera de *definir* el $Sen\alpha$ tiene consecuencias muy importantes y muy útiles. Veamos algunas:

Si en la expresión $y=Sen\alpha$, interpretamos *el valor* del $Sen\alpha$ como *la ordenada* del punto P, entonces podremos hablar del $Sen\alpha$ para valores de α mayores de *90°*, por ejemplo, tendrá sentido hablar del $Sen180°$ o del $Sen130°$ y si el *ángulo* lo medimos en ***radianes***, entonces tendrá sentido hablar del $Sen\pi$ o del $Sen\frac{11\pi}{6}$.

Además, como *la longitud* del *arco* del *círculo unitario*, coincide con *el valor* del *ángulo* cuando éste se mide en ***radianes***, entonces adquirirá sentido hablar del *Seno* del *arco* y significará lo mismo que hablar del *Seno* del *ángulo*, cuando éste esté medido en ***radianes***.

c). Hechas estas aclaraciones, usando una calculadora, determina *el valor* de:

i) $Sen\ 180°$	ii) $Sen\ 120°$	iii) $Sen\ 240°$
iv) $Sen\ 315°$	v) $Sen\ 330°$	vi) $Sen\ 355°$

Determina, utilizando la calculadora, también *el valor* del *Seno* de los siguientes *ángulos* medidos en ***radianes***:

i) $Sen\ \pi$	ii) $Sen\ \frac{11\pi}{6}$	iii) $Sen\ 1$
iv) $Sen\ 3$	v) $Sen\ \frac{7\pi}{24}$	vi) $Sen\ \frac{8\pi}{15}$

El signo de la función $Sen\alpha$

d). De los valores del $Sen\alpha$ que calculaste en los incisos g) y h), algunos resultaron *negativos*, observa cuáles y determina en qué casos *el valor* del $Sen\alpha$ es *negativo*, en qué casos es *positivo*, cuándo vale cero y por qué. (Sugerencia: No olvides que hemos definido el $Sen\alpha$ como *la ordenada* del punto P de la *circunferencia unitaria*, determinado por el *ángulo* α).

e). Describe la variación de *los valores* del $Sen\alpha$ cuando α varía:

i) de *0°* a *90°* ii) de *90°* a *180°* iii) de *180°* a *270°* iv) de *270°* a *360°*

f). Determina el signo del $Sen\alpha$ en los intervalos señalados en el *inciso anterior*.

g). Habiendo analizado la variación de la *función* $y=Sen\alpha$, bosqueja la *gráfica* de dicha *función* para *los valores* de *0* a 2π ***radianes***. Representa en el eje de las abscisas *los valores* de α y en el eje de *las ordenadas*, *los valores* del $Sen\alpha$.

3.- La *función Coseno.*

a). De la misma manera que la *función* $Sen\alpha$ fue definida, en la ***circunferencia unitaria***, como *la ordenada* del punto P determinado por el *ángulo* α, *la función* $Cos\alpha$, se define como *la abscisa* del punto P. Partiendo de la definición original de $Cos\alpha$, como *la razón* entre el *cateto adyacente* y la ***hipotenusa*** de un *triángulo rectángulo*, justifica la validez de la nueva definición.

b). Observando la ***circunferencia unitaria*** de la Figura 6, describe cómo varía *el valor* del $Cos\alpha$ cuando α varía de *0°* a *90°*.

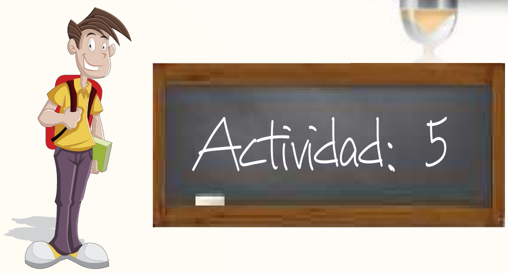
c). Efectúa las actividades propuestas para la *función* $Sen\alpha$ en los incisos g), h), i), j), k) y l), pero ahora para *la función* $Cos\alpha$.

4.- Algunas relaciones importantes entre las *funciones Seno* y *Coseno.*

Observa la Figura 6 y *argumenta* por qué las *siguientes igualdades* son verdaderas para cualquier *valor* del *ángulo* α:

a) $Sen^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$	*b)* $Tan\,\alpha = \dfrac{Sen\,\alpha}{Cos\,\alpha}$	*c)* $Cot\,\alpha = \dfrac{Cos\,\alpha}{Sen\,\alpha}$
d) $Tan\,\alpha\,Cot\,\alpha = 1$	*e)* $Sen\,\alpha\,Csc\,\alpha = 1$	*f)* $Sec\,\alpha\,Cos\,\alpha = 1$

Actividad de Cierre



Al realizar las *Actividades* de esta **Secuencia**, se espera hayas alcanzado un mayor nivel de comprensión de la forma en que *las razones trigonométricas* se utilizan para resolver cierto tipo ***de problemas*** y que esto te permita valorar cada vez más la utilidad y la importancia de las **Matemáticas** como herramienta ***para resolver problemas***.

También se espera que el **nivel de comprensión** que hayas logrado del comportamiento de las *funciones trigonométricas* te permita utilizarlas para analizar, interpretar y ***resolver nuevos problemas***.

Por ejemplo, ***en el problema*** del **faro**, el hecho de saber que el *ángulo de depresión* con que se observa **una embarcación**, está relacionado con *la distancia* a que se encuentra dicha **embarcación** del **faro** y que mientras más chico es el *ángulo*, más lejos se encuentra, es una muestra de cómo pueden utilizarse las *funciones trigonométricas* para interpretar ciertas situaciones y no sólo interpretar, sino resolver ***ciertos problemas*** pues se espera que además de saber cómo están relacionadas las variables, puedas, a partir de conocer *el valor* de una de ellas, calcular *el valor* de la otra; en el caso del **faro**, se espera que conociendo el *ángulo de depresión*, puedas calcular *la distancia* a que se encuentra **la embarcación**.

En particular se espera que tengas claro cómo varían las *funciones Seno*, *Coseno* y *Tangente* al variar el *ángulo*, que puedas calcular *valores* de las *funciones trigonométricas* utilizando una calculadora, tanto si el *ángulo* está medido en grados como si está medido en ***radianes*** y que conocido *el valor* de la *función* puedas determinar *el valor* del *ángulo* al que le corresponde.

Otra expectativa que se tiene con lo que has aprendido en esta **secuencia**, es que te permita analizar por ti mismo el comportamiento de las *funciones* que no se incluyeron en ella, como es el caso de las *funciones Cotangente*, *Secante* y *Cosecante*.

Secuencia Didáctica 3.-

Actividades de Inicio

Trigonometría y Astronomía

Actividad: 1

En las **Secuencias Didácticas 1 y 2** pudiste darte cuenta que *la Trigonometría* resulta sumamente útil para *calcular alturas y distancias* que son difíciles de medir; ahora vas a conocer una de las aplicaciones más importantes de esta **rama** de las **Matemáticas**, pues gracias a ella los astrónomos, desde hace muchos siglos, pudieron calcular e***l tamaño de la Luna y del Sol*** y *la distancia* a que se encuentran de **la Tierra**.

En el Siglo III A. de C., ***Aristarco***, *astrónomo y matemático griego*, ideó un ***método***, para determinar tanto ***el tamaño de la Luna y el Sol*** como *la distancia* a que se encuentran de **la Tierra**.

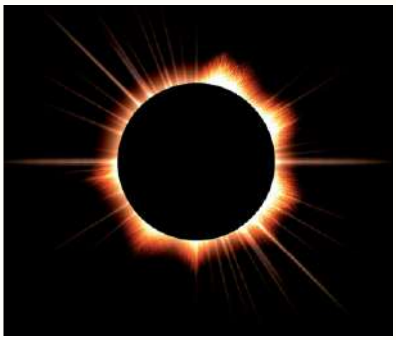


Figura 1.- Eclipse total (anular) de Sol

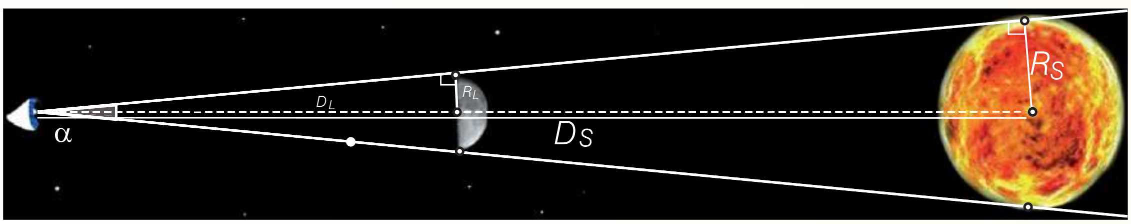


Figura 2

En la Figuras 1 y 2 se observa *un eclipse total (anular) de sol* (que sucede cuando la Luna se interpone entre la Tierra y el Sol y logra cubrirlo totalmente durante unos cuantos minutos).

Aristarco, de la observación de *un eclipse total (anular) de sol*, dedujo:

- Que la Luna está más cerca de **la Tierra** que el Sol.
- Que el Sol es más grande que la Luna.
- Que *la razón* entre *las distancias* debe ser igual a *la razón* entre los tamaños de los ***radios*** (considerando a la Luna y al Sol como esferas)

a). ¿Qué observó *Aristarco* que le permitió deducir que la Luna está más cerca de **la Tierra** que el Sol?

____

____

b). ¿En qué basó su deducción de que el Sol es más grande que la Luna?

____

____

c). ¿Qué lo hizo pensar que *la razón* entre *las distancias* debe ser igual a *la razón* entre los tamaños de los ***radios***?

____

____

d). Observa tú el dibujo de la Figura 2 y determina ¿Cómo resulta ser *la razón* entre el ***radio*** de la Luna y su *distancia* a **la Tierra** con respecto a la razón entre el ***radio*** del Sol y su *distancia* a **la Tierra**?

____

____

Aristarco tenía claro que conociendo *el valor* del *ángulo* α (al que se denomina **tamaño angular del objeto**, en este caso la Luna) podía calcular *la razón* entre *las distancias* a que se encuentran de **la Tierra**, el Sol y la Luna.

e). Según se ve en la figura, ¿A qué *ángulo* se necesita aplicar ***la función Seno*** para determinar *el valor* de *las razones* $\frac{R_L}{D_L}$ y $\frac{R_S}{D_S}$, dónde D_L y D_S representan *la distancia* de **la Tierra** a la Luna y *la distancia* de **la Tierra** al Sol, respectivamente?

____

____

f). También la Figura 2 permite observar que *las razones* $\frac{R_S}{R_L}$ y $\frac{D_S}{D_L}$ son iguales ¿Cómo puede verse esto en la *figura*? y ¿Cómo puede deducirse de la igualdad de *las razones* $\frac{R_L}{D_L}$ y $\frac{R_S}{D_S}$?

____

____

Sin embargo, ***Aristarco*** estaba consciente de que determinando una de esas *razones*:

- Sabría cuántas veces más grande era el Sol que la Luna y qué tantas veces más lejos estaba el Sol de **la Tierra**, que la Luna, es decir, sabía que determinando, por ejemplo, *la razón* $\frac{R_S}{R_L}$, donde R_S representa el ***radio*** del Sol R_L y representa el ***radio*** de la Luna, podría calcular cuántas veces más grande era el Sol que la Luna ¿Cómo podría determinar esto?

- Sabría cuántas veces más grande era *la distancia* de **la Tierra** al Sol que *la distancia* de **la Tierra** a la Luna. ¿Por qué, conociendo *la razón* $\frac{R_S}{R_L}$ entre los ***radios***, podría conocer *la razón* entre *las distancias* y cómo podría calcular las veces que *una distancia* era mayor que *la otra*?

- Por ejemplo, él sabía que si *la razón* entre los ***radios*** del Sol y la Luna fuera *10*, entonces *la razón* entre *las distancias* sería también *10*. Argumenta por qué sería así.

Desarrollo

Actividad: 2

Para determinar *la razón* entre *las distancias* del Sol y la Luna a **la Tierra,** consideró necesario esperar el momento en que la Luna, el Sol y **la Tierra** estuvieran en los *vértices* de un *triángulo rectángulo* y observando la Luna concluyó que esto sucedía cada vez que desde **la Tierra** se observaba media Luna iluminada, tal como se ve en la Figura 3.

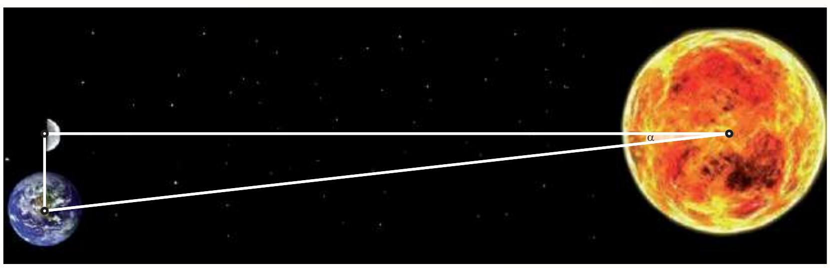


Figura 3

a). ¿Por qué crees que ***Aristarco*** consideró que en el momento en que se observa media Luna iluminada los **tres astros** están en los *vértices* de un *triángulo rectángulo*?

____

____

Observa el dibujo y determina:

b). ¿Qué **astro** se encuentra en el *vértice* del *ángulo recto*?

____

____

c). ¿Qué *distancia* representa la ***hipotenusa*** del *triángulo*?

____

____

d). Respecto al *ángulo* α ¿Qué representa *la distancia* **Tierra** – Luna?

____

____

e). ¿Cómo podrá determinarse, desde **la Tierra**, *el valor* del *ángulo* α?

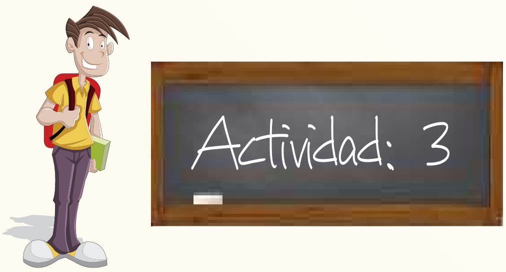
____

____

f). La medición actual del *ángulo* α indica que es aproximadamente $(1/6)°$ (en la época de ***Aristarco***, sin aparatos tan precisos como los actuales, *el valor* que se obtuvo fue de *3°,* lo cual ocasionó que la distancia de **la Tierra** al Sol, calculada por ***Aristarco***, fuera errónea, mas no el **método** para calcularla). Utiliza *el valor* actual para calcular cuántas veces más lejos está el Sol de **la Tierra**, que la Luna.

____

____



Aristarco sabía que para determinar *las distancias absolutas* de **la Tierra** al Sol y de **la Tierra** a la Luna, necesitaba establecer *la razón* entre alguna de esas *distancias* y alguna otra *magnitud* que fuera ya conocida. En ese momento *la magnitud absoluta* que se conocía, gracias al trabajo de *Eratóstenes* que conociste en el BLOQUE anterior, era el ***radio*** de **la Tierra**. Y otra vez ***Aristarco*** se basó en observaciones hechas en un ***eclipse*** (esta vez un ***eclipse de luna***, que sucede cuando **la Tierra** se interpone entre el Sol y la Luna) para determinar, a partir del ***radio*** de **la Tierra**, *el valor* del ***radio*** de la Luna.

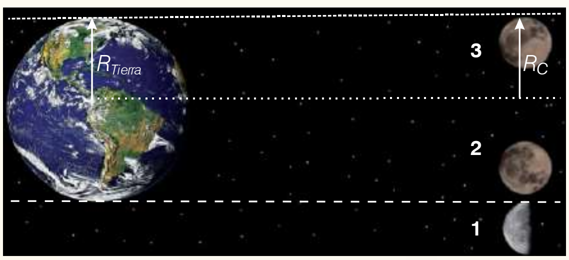


Figura 4

En el dibujo de la Figura 4 se ilustra un ***eclipse lunar***, en el que la posición *1* de la Luna indica el momento en que ésta va entrando al **cono** (casi cilindro) de sombra de **la Tierra**, la posición señalada con el número *2* indica el momento en que la Luna quedó totalmente cubierta por la sombra de **la Tierra** y la posición *3* indica el momento en que la Luna empieza a salir del **cono** de sombra de **la Tierra.**

a). ¿Dónde consideras que está ubicado el Sol?

____

b). ¿Qué representa R_C?

____

c). Basados en la consideración de *Eratóstenes*, de que *los rayos de luz* que llegan del Sol a **la Tierra** son prácticamente *paralelos* (*¿Por qué?*), el **cono de sombra** de **la Tierra** es prácticamente **un cilindro de sombra**. De acuerdo con esta consideración ¿Cómo es el ***radio*** del **cono de sombra** con respecto al ***radio*** de **la Tierra**?

____
____
____

Basándose en la consideración anterior, ***Aristarco*** entendió que *la razón* entre los ***radios*** de la Luna y de **la Tierra** (que era *la razón* que necesitaba conocer) era prácticamente igual a *la razón* entre el ***radio*** de la Luna y el ***radio*** del **cono de sombra** de **la Tierra** y se dispuso a calcular esta *razón*, para lo cual hizo lo siguiente:

Midió el tiempo que tarda la Luna en pasar de la posición *1* a la posición *2* y le llamó t_1, luego midió el tiempo que tarda la Luna en pasar de la posición *1* a la posición *3* y le llamó t_2 que resultó ser un poco más del triple que t_1.

Con base en estos datos y considerando que la velocidad de la Luna es constante, dedujo que *la distancia* que recorre la Luna en el tiempo t_2 es un poco más del triple que *la distancia* que recorre en el tiempo t_1.

d). ¿A qué equivale *la distancia* que recorre la Luna en el tiempo t_1?

____

e). Y *la distancia* que recorre la Luna en el tiempo t_2 *¿A qué equivale?*

____

f). ¿Qué representa *la razón* entre *las distancias* recorridas en t_2 y en t_1?

____
____

g). ¿Cómo es esta *razón* comparada con l*a razón* entre los ***radios*** de **la Tierra** y la Luna?

____
____
____
____

h). En la actualidad, con mediciones mucho más precisas que las que hizo *Aristarco*, se sabe que esta *razón* es aproximadamente *3.41*, y que el ***radio*** de **la Tierra** es aproximadamente *6,400 km*, Con base en estos datos, calcula el ***radio*** de la Luna.

____

____

____

____

Actividad de Cierre

En la Actividad 1 quedó establecido que:

- *La razón* entre los ***radios*** del Sol y de la Luna era igual a *la razón* entre *las distancias* del Sol a **la Tierra** y de la Luna a **la Tierra**, es decir, quedó establecido que

$$\frac{R_S}{R_L} = \frac{D_S}{D_L}$$

- De la misma manera, *la razón* entre el ***radio*** de la Luna y *su distancia* a **la Tierra**, era igual a *la razón* entre el ***radio*** del Sol y *su distancia* a **la Tierra**, es decir, quedó establecido que

$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L}$$

En la Actividad 2 pudo determinarse *el valor* de *la razón* $\frac{D_S}{D_L}$, que resultó ser aproximadamente, *400*.

a). ¿Qué significa esta *razón*?

y ¿Cómo se calculó?

En la $\boxed{\text{Actividad 3}}$ se determinó *el valor* de *la razón* entre el ***radio*** de **la Tierra** y el ***radio*** de la Luna, es decir, se determinó *el valor* de $\frac{R_T}{R_L}$.

b). *El valor* de esta *razón* y *el valor* del ***radio*** de **la Tierra** permitieron calcular el ***radio*** de la Luna, que a su vez se necesitaba para calcular *la distancia* de **la Tierra** a la Luna ¿Cómo se calculó esta *distancia*?

c). ¿De qué manera *el valor* del ***radio*** de la Luna permitió calcular el ***radio*** del Sol y *las distancias* de **la Tierra** a la Luna y al Sol?

Las Actividades de esta **secuencia**, se espera te hayan permitido vivir una experiencia de uso de la *Trigonometría* ***para analizar, interpretar y resolver problemas*** que, sin esta **herramienta matemática**, no se hubieran podido ***resolver***.

También se espera que este tipo de Actividades te haga cada vez ***más consciente de que utilizar las Matemáticas para resolver problemas requiere, además de los conocimientos, creatividad, paciencia, perseverancia, planeación, coordinación*** de Actividades, entre otras muchas cualidades; y que estas cualidades se van adquiriendo poco a poco si uno se lo propone y está dispuesto a entrenarse en la resolución ***de problemas***.

Esto último, es decir, ***la disposición para intentar resolver problemas***, aún en el caso de que nuestras experiencias anteriores no hayan sido muy exitosas, permite, con el tiempo, adquirir nuevos conocimientos, pero a la vez origina que cada vez, seamos ***más creativos, más tenaces, más ordenados,*** mejores para elaborar y desarrollar planes, en síntesis, ***que seamos cada vez más competentes para resolver problemas*** cada vez más difíciles.

Lo dicho en los dos párrafos anteriores puede expresarse de manera más breve diciendo que, las Actividades de esta **secuencia**, lo mismo que las de todo el **BLOQUE** ***y las de todo el curso tienen, entre sus principales propósitos, el permitirte apreciar cada vez más, la utilidad e importancia de las matemáticas para resolver problemas y convencerte de que utilizándolas te desarrollarás como persona.***

BLOQUE 4

Secuencia Didáctica 4.-

Actividades de Inicio

Medidas de distancias inaccesibles

Actividad: 1

Actividades Individuales

En varias ciudades del *Estado de Sonora*, en los últimos años se han instalado algunas *tirolesas* en lugares representativos, en **Ciudad Obregón** se ha instalado una sobre la Laguna del Náinari, en **Hermosillo** en el *Centro Ecológico* y en **Navojoa** sobre el Río Mayo. *La instalación de estas tirolesas*, en lugares propios para el esparcimiento y la convivencia familiar, ofrece a chicos y grandes una opción más para divertirse.

En **Ciudad Obregón**, un profesor de **matemáticas** de preparatoria les presentó a los estudiantes un ***problema*** que le plantearon a él. ***El problema es el siguiente***:

En uno de los balnearios que hay rumbo a la **presa del Oviáchic** quieren instalar una *tirolesa* que pase por arriba de un lago que está en el centro del lugar, el profesor les muestra el croquis en el que se bosqueja la idea de lo que se quiere instalar, y les señala que la pregunta que le hacen es *¿Cuál debe ser la longitud del cable que va a colocarse de un poste a otro?* El **croquis** que les muestra a los estudiantes aparece en la Figura 1.

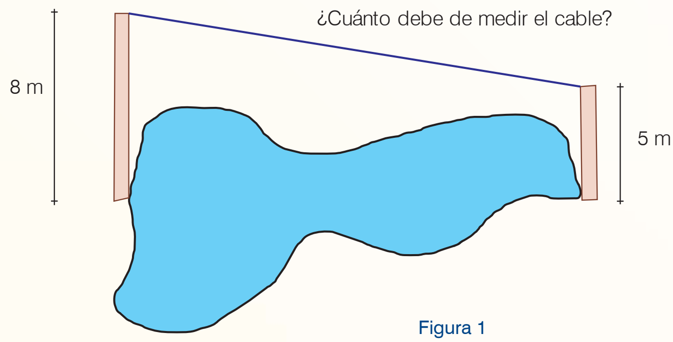


Figura 1

El profesor les informa a los estudiantes que el equipo o los equipos que le quieran entrar a resolver ***el problema*** realizarán una visita al lugar para hacer las mediciones o cálculos que necesiten, y una vez realizado el trabajo deberán hacer una presentación al grupo en la que expongan tanto la estrategia utilizada como los resultados obtenidos.

Actividades de Equipo

El profesor les informa a los estudiantes que la **herramienta matemática** que pueden utilizar para resolver ***el problem***a es lo que se ha visto hasta el momento en clase, *triángulos semejantes*, *polígonos, circunferencia,* Teorema de Pitágoras, *relaciones trigonométricas*, así como transportador, calculadora, hilo, clavos, etc.

Con la información que se presenta en **el croquis**, en equipo describan una estrategia de solución ***al problema planteado***.

Desarrollo

Actividad: 2

Fueron **dos equipos** los que se anotaron para tratar ***de resolver el problema***, en esta Actividad se presenta la exposición que hicieron, los integrantes del **equipo 1** al resto del grupo cuando concluyeron el trabajo.

Para que todos los estudiantes del grupo estuvieran atentos a la exposición, el profesor les sugirió que en la exposición fueran dando información de cómo le hicieron, pero que al mismo tiempo plantearan preguntas para que el grupo las contestara.

A ti te corresponde responder las preguntas que hagan los integrantes del equipo.

Presentación del equipo 1

Cuando llegamos al lugar nos dimos cuenta que ya estaban instalados los postes sobre los que se sujetará *la tirolesa* en ambos extremos, tal como se muestra en la Figura 2.

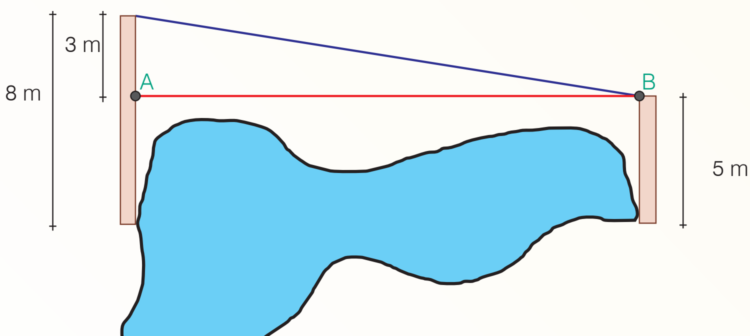


Figura 2

Antes de explicarles lo que nosotros hicimos traten ustedes de contestar las preguntas que nos planteamos al principio?

1. ¿A qué *altura* del piso quedará sujeta *la tirolesa* en la parte más alta?

   ____

2. ¿A qué *altura* del piso quedará sujeta *la tirolesa* en la parte más baja?

   ____

3. Verticalmente, ¿Qué tanto más arriba queda el punto más alto de *la tirolesa* que el punto más bajo?

   ____

4. Si los postes están verticales, ¿Qué tipo de *triángulo* forman el segmento que mide *tres metros*, el segmento que representa el cable y el segmento AB que representa *la distancia* entre los postes?

   ____

5. ¿Qué lado del *triángulo* representa al cable?

   ____

Como el cable es la ***hipotenusa*** del *triángulo rectángulo* que aparece en la Figura 2, sabíamos que podríamos calcular *su longitud* si conociéramos los dos *catetos* pues podríamos utilizar el Teorema de Pitágoras o podríamos calcular *su longitud* si conociéramos un *cateto* y uno de los *ángulos agudos* para utilizar alguna *relación trigonométrica*, pero sólo conocíamos un *cateto*. Finalmente decidimos entrarle utilizando el Teorema de Pitágoras y nos planteamos cómo podríamos conocer el otro *cateto*.

6. ¿Alguno de ustedes sabe cómo hacerle?

   ____
   ____
   ____

Nosotros, después de pensarle un buen rato decidimos hacer lo siguiente:

Fijamos un clavo al pie del poste grande y otro al pie del poste pequeño, en cada uno de ellos amarramos un hilo de esos que utilizan los albañiles y los jalamos por fuera del lago hasta que los hilos se cruzaron, luego con un transportador, medimos el *ángulo* que formaron los hilos y con una cinta métrica medimos los hilos. Todo esto que hicimos lo representamos en el dibujo de la Figura 3. En el dibujo, los puntos C y D son los puntos donde pusimos los clavos; los segmentos CE y DE representan los hilos y a cada uno le anotamos lo que midió. Con todo esto queríamos calcular *la longitud* del segmento CD que en el dibujo aparece punteado

7. Intenta tú calcular la *longitud del segmento* CD utilizando la información que aparece en la Figura 3.

____

____

____

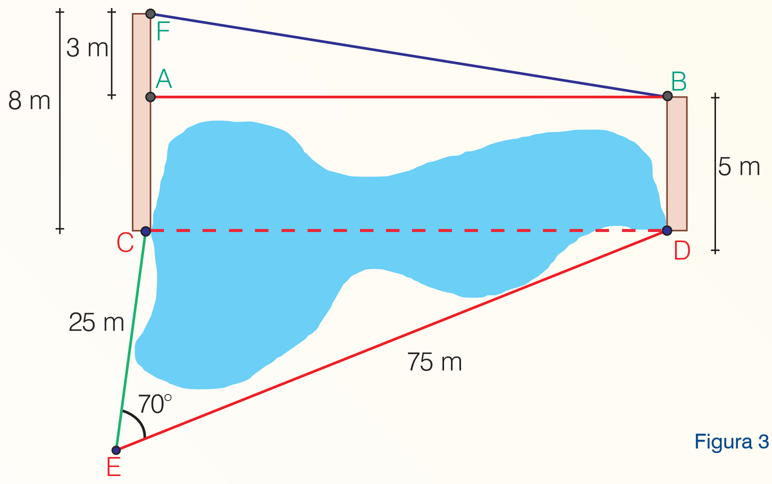


Figura 3

8. ¿Por qué creen que queríamos calcular *la longitud* del segmento CD si el que necesitábamos saber cuánto mide es el segmento AB para poder calcular *la longitud* de *la tirolesa*?

____

____

9. ¿Cómo es *la longitud* del segmento AB comparada con *la longitud* del segmento CD? Argumenta tu respuesta.

____

____

10. Como puede verse en el dibujo, con los hilos y la línea (imaginaria) que va de un clavo a otro, se forma un *triángulo* ¿Qué tipo de *triángulo* es y qué conocen de él?

____

____

Nosotros, lo primero que nos dimos cuenta es que el *triángulo* CDE no es *triángulo rectángulo* y que no podríamos aplicar directamente el Teorema de Pitágoras para calcular *la longitud* de CD, ni tampoco podríamos utilizar alguna *relación trigonométrica*; sin embargo no nos desanimamos y después de pensarle un poco más se nos ocurrió hacer lo siguiente:

En una hoja de papel dibujamos el *triángulo* CDE, tal como se muestra en la Figura 4, colocando el segmento DE sobre la horizontal; luego trazamos el segmento CF, perpendicular al segmento DE para formar los *triángulos* CFE y CFD.

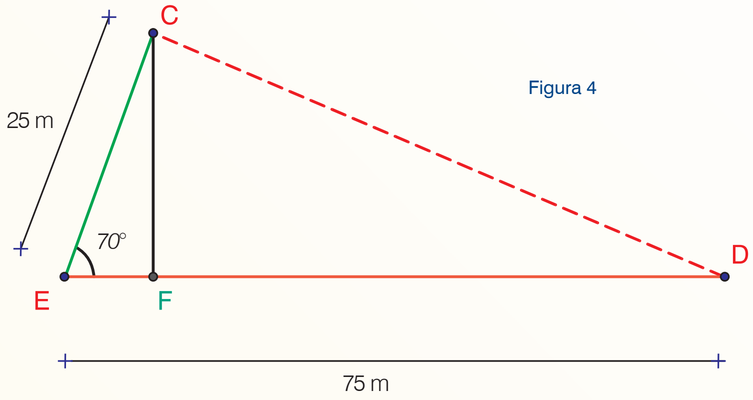


Figura 4

11. ¿Cómo resultan ser estos *triángulos*?

____

12. ¿Qué conoces del *triángulo* CFE?

____

____

13. ¿Puedes calcular la *longitud* del segmento CF? ¿Cómo?

____

____

____

14. ¿Cómo puedes calcular *la longitud* del segmento EF?

____

____

____

15. Y *la longitud* del segmento DF ¿Cómo la calculas? Hazlo y determina cuánto mide.

16. ¿Puedes ahora calcular *la longitud* del segmento CD? Hazlo.

17. Si ya la calculaste, di cuánto mide el segmento AB.

18. Ahora calcula *la longitud* del cable de *la tirolesa*.

De esta manera termina la presentación del **equipo 1** y el profesor deja la siguiente tarea para el grupo, aclarando que deberán hacerla de manera individual.

1. ¿Qué tipo de *figuras geométricas* se utilizaron en la estrategia de solución que se ha presentado?

2. ¿Qué *relaciones trigonométricas* se utilizaron al resolver *el problema*?

3. ¿Qué otra **herramienta matemática** se utilizó?

4. Describe de manera breve la estrategia que se utilizó para resolver *el problema*.

En esta *Actividad* se presenta la estrategia y resultados obtenidos por el **equipo 2**, siguiendo las mismas recomendaciones que hizo el profesor.

De la misma manera que antes, te corresponde responder las preguntas que hagan los integrantes del equipo a sus compañeros de curso.

Presentación del equipo 2

Los integrantes del **equipo 2** iniciaron con un planteamiento del problema muy similar al que hicieron los integrantes del **equipo 1**, también hicieron mediciones y presentaron dicha información en el esquema que aparece en la Figura 5.

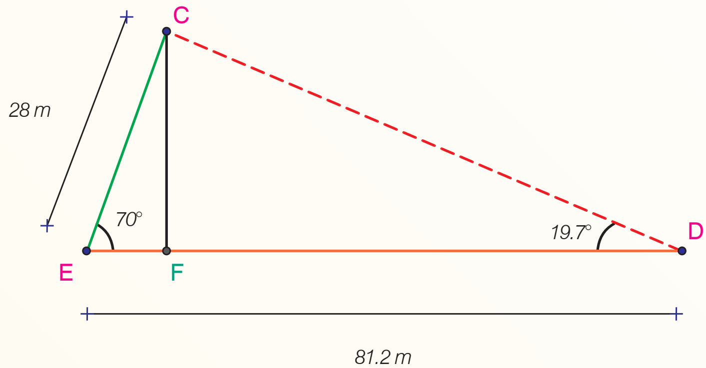


Figura 5

1. ¿Qué información adicional encuentras en el planteamiento que hacen los integrantes del **equipo 2**?

____

2. Utilizando la información del *triángulo* CEF, determina *la longitud* del segmento CF.

____
____
____

3. Si ya conoces cuanto mide el segmento CF y el *ángulo* en el punto D, determina *la longitud* del segmento CD.

____
____
____

4. ¿Ya tienes información suficiente para saber cuánto mide el cable?

____

5. Calcula su *longitud*.

____
____
____
____

Al obtener este resultado terminó la presentación del **equipo 2** *y para cerrar la Actividad, realiza lo que se pide.*

1. ¿Qué tipo de *relaciones trigonométricas* se utilizaron en la estrategia presentada por el equipo 2?

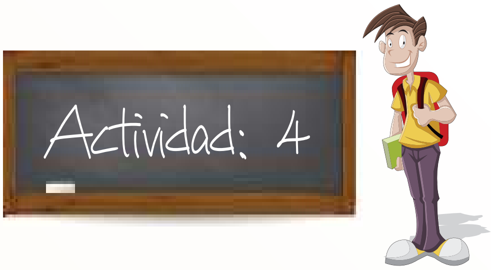
____
____

2. Señala la diferencia o las diferencias que observas en las estrategias que utilizaron ambos equipos.

____
____
____

3. ¿A qué se debe la diferencia del resultado final que presentaron los equipos?

____
____
____



Actividades Individuales

Una empresa que se dedica a realizar trabajos de topografía, está desarrollando **dos proyectos**, en uno de ellos necesitan *determinar las dimensiones de los lados* **de un terreno** destinado a la agricultura, y en el otro, deben *determinar la longitud* **de un puente** que se va a construir sobre un barranco.

Proyecto del Puente

En este proyecto el propósito es determinar *la longitud del puente* que va de un lado del barranco al otro. En la Figura 6 aparece un boceto del barranco y los resultados de las mediciones realizadas por los topógrafos.

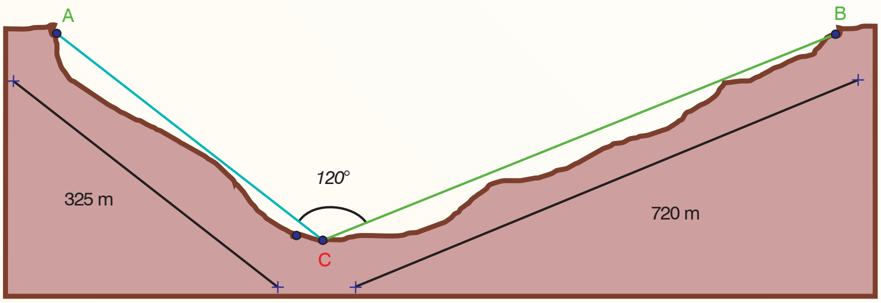


Figura 6

1. Como **el puente** debe tener una *longitud* igual o mayor que *la distancia* de A a B, lo primero que hicieron los topógrafos fue calcular dicha *distancia* y para calcularla procedieron de la siguiente manera:

   - Primero calcularon los cuadrados de *325* y *720*, que son *las longitudes* de los segmentos AC y CB señalados en la Figura 6.
   - Luego calcularon el producto de estos dos números y lo duplicaron y el resultado lo multiplicaron por el *Coseno* de *60*°.
   - Luego procedieron a sumar los tres resultados que habían obtenido.
   - Finalmente, al resultado de esta suma le sacaron ***raíz cuadrada***.
   - Y concluyeron diciendo que *la distancia* de A a B era igual al resultado de la ***raíz cuadrada***.

2. ¿Por qué los topógrafos no usaron directamente el Teorema de Pitágoras?

____

3. Para entender lo que hicieron los topógrafos apóyate observando el dibujo de la *Figura 7* en el cual aparecen dibujados los segmentos AC y CB formando el *ángulo* de *120°*, es decir se ha reproducido el dibujo de la figura 6 pero con AC horizontal, luego el segmento AC se ha prolongado y se ha trazado el segmento BD, perpendicular al segmento AD que se obtuvo al prolongar el segmento AC. ¿Cuál crees que haya sido el propósito de prolongar AC y trazar la perpendicular BD?

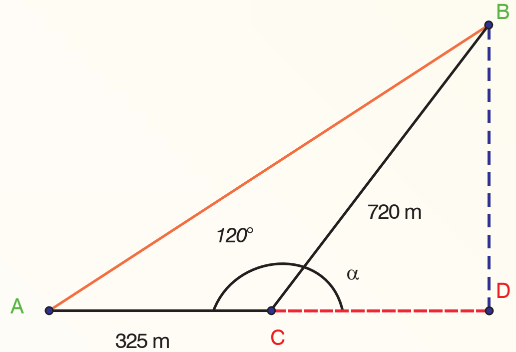


Figura 7

4. ¿Cómo resultan ser los *triángulos* CDB y ADB?

____
____
____

5. ¿Cuánto mide el *ángulo* representado con α? Justifica tu respuesta

____

6. Si representas con a lo que mide el segmento AC y con x lo que mide el segmento CD, ¿Cómo representas lo que mide el segmento AD?

____
____

7. Si además representas con y lo que mide el segmento BD y con b lo que mide el segmento CB, ¿Cómo puedes calcular el valor de x y el valor de y, utilizando el valor de b y el del *ángulo* α, que ya conoces?

____
____
____

8. Considerando que el *triángulo* ADB es *rectángulo*, puedes calcular *la longitud* de su ***hipotenusa*** utilizando el Teorema de Pitágoras. Sugerencia: Representa lo que mide la ***hipotenusa*** y utilizando las representaciones que ya hiciste de los *catetos* escribe ***la expresión*** que resulta al aplicar el Teorema de Pitágoras y desarróllala.

9. Describe el procedimiento representado con ***la expresión*** que acabas de escribir.

10. Utiliza los datos que conoces para calcular *la longitud* de AB.

11. Compara con tus compañeros de otros equipos la estrategia utilizada y los resultados obtenidos.

Proyecto de los límites del terreno

SAGARPA es una dependencia del Gobierno Federal que apoya a los productores del país para que mejoren los procesos productivos de su actividad, los apoyos los dan a conocer a través de convocatorias que hacen públicas en la página web de la dependencia. En el caso del sector ganadero apoya, entre otros rubros, la instalación o renovación de los cercos de los ***terrenos de agostadero***[1]. En la convocatoria de este año **un ganadero** de un pueblo de **la sierra sonorense** ha decidido participar solicitando recursos para **cercar un corral** dentro de su terreno, parte de uno de los **lados del corral** está en el represo que colinda con el rancho vecino tal como se muestra en la Figura 8.

La información que aparece en la Figura 8 es parte de la información que obtuvo al hacer el levantamiento topográfico del terreno.

En los requisitos de la convocatoria de la SAGARPA, se pide *la longitud* del ***perímetro* del corral** que se quiere cercar así como el ***área***. En este caso **el corral** que se desea cercar es el que está determinado por el cuadrilátero que tiene *vértices* en los puntos A, B, C y D, es decir parte de uno de **los lados del corral** está dentro del represo.

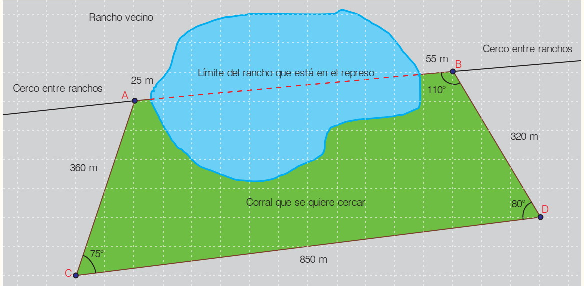


Figura 8

Ayúdale al ganadero a encontrar la información que le falta.

1. ¿Qué información hace falta para determinar ***el perímetro* del corral** que ha de cercarse?

2. ¿Cuánto mide *la diagonal* del cuadrilátero que va del punto B al punto C?

3. ¿Cuál es *el valor* del *ángulo* que se forma entre ***los lados*** del terreno en el punto A?

4. ¿Cuánto mide ***el lado*** del terreno representado por el segmento AB?

5. ¿Cuál es ***el perímetro* del corral** que se desea cercar?

6. ¿Cuál es *el valor* del **área del corral** que se desea cercar?

[1] *Terrenos dedicados a la ganadería*.

Actividad de Cierre

En esta sección se han utilizado las *relaciones trigonométricas*, para resolver ***problemas*** en los que la situación que se ha de resolver queda modelada por un *triángulo oblicuángulo*, por tal motivo se ha tenido la necesidad de descomponer dichos *triángulos* en *triángulos rectángulos*. Una vez que se han identificado los *triángulos rectángulos* en los que se puede descomponer un *triángulo oblicuángulo*, se emplean las *relaciones trigonométricas* y/o el Teorema de Pitágoras para resolver ***el problema planteado***.

Por ejemplo, en la Actividad 2, que corresponde a la parte de desarrollo, aparece un *triángulo no rectángulo* (EDC) de la siguiente forma:

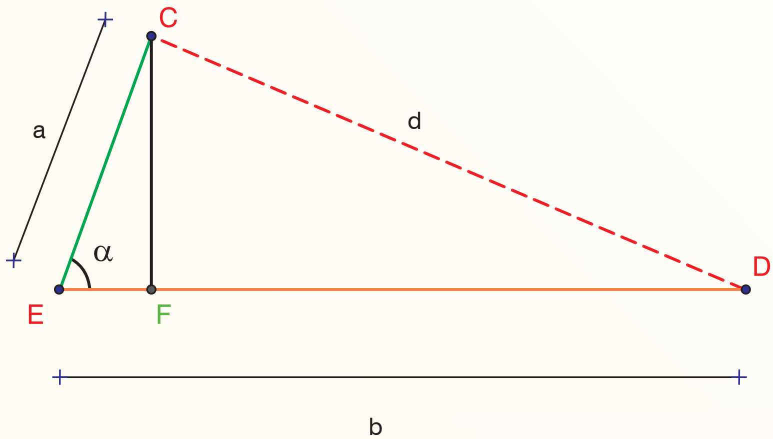


Figura 9

Con el trazo del segmento CF, se forman *dos triángulos rectángulos* (EFC y CFD) dentro del *triángulo* CDE. Siguiendo la misma estrategia que utilizó el **equipo 1** vamos a elaborar un método que permita calcular *la longitud* de uno de ***los lados*** de un *triángulo oblicuángulo* a partir de las medidas de los otros dos y del *ángulo* que forman entre ellos.

De acuerdo a la información que aparece en la Figura 9.

1. ¿Cómo están representadas *la longitud* de los segmentos CE y ED?

   ____

2. Y lo que mide el *ángulo* del *vértice* E, ¿Cómo está representado?
____
____
____

3. A partir de esta información y sabiendo que

$$Sen\ \alpha = \frac{CF}{a}$$

¿Cómo puede calcularse *la longitud* del segmento CF?
____
____

4. Y del *cateto adyacente*, EF ¿Cómo puede calcularse su *longitud*?

5. En la Figura 8 es fácil darse cuenta que ED = EF + FD y como *la longitud* de ED es *b* y en el numeral 4 has establecido cómo calcular EF, determina cómo puede calcularse *la longitud* de DF.

6. Como CF y FD son los *catetos* del *triángulo* CFD y en los numerales 3 y 5 has visualizado cómo puede determinarse *su longitud*, utilizando el Teorema de Pitágoras, puedes ahora determinar cómo puede calcularse el cuadrado de *d*, que representa *la longitud* de la **hipotenusa** del *triángulo* CFD.

7. Simplificando la expresión obtenida y recordando que

$$Sen\,\alpha^2 + Cos\,\alpha^2 = 1$$

Se llega a la expresión

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2\,abCos\,\alpha$$

Observando la Figura 9, puedes ver que ***d*** representa la medida del ***lado*** opuesto al *ángulo* α, mientras que ***a*** y ***b*** representan lo que miden ***los lados*** que forman dicho *ángulo*. A esta relación que hay entre ***los lados*** que forman uno de los *ángulos* de un *triángulo* y ***el lado*** opuesto al *ángulo*, se le llama ***Ley de los Cosenos***, y se enuncia de la siguiente manera:

Ley de los cosenos

El cuadrado de la longitud de **uno de los lados** *de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros* **dos lados**, *menos el doble del producto de la longitud de* **estos lados** *por el coseno del ángulo que se forma entre ellos.*

8. Utilizando la expresión de la *Ley de los cosenos* encuentra *la distancia* que hay entre los postes de la Actividad 2 de la parte de desarrollo.

9. ¿Cómo es el resultado que obtuviste con respecto al resultado que habías obtenido en la Actividad 1?

____

10. Si hay alguna diferencia, ¿A qué crees que se debe?

____

En la Actividad 3 de la parte de desarrollo, **el equipo 2** presentó una estrategia de ***solución al problema*** planteado, diferente de la utilizada por **el equipo 1**, pues ellos calcularon *la longitud* de un ***lado*** de un *triángulo oblicuángulo* a partir de conocer *la longitud* de uno de ***los lados*** y los *ángulos interiores* del *triángulo*. El propósito de lo que se espera hagas a continuación, es que puedas comprobar que se trata de una *propiedad general de los triángulos*.

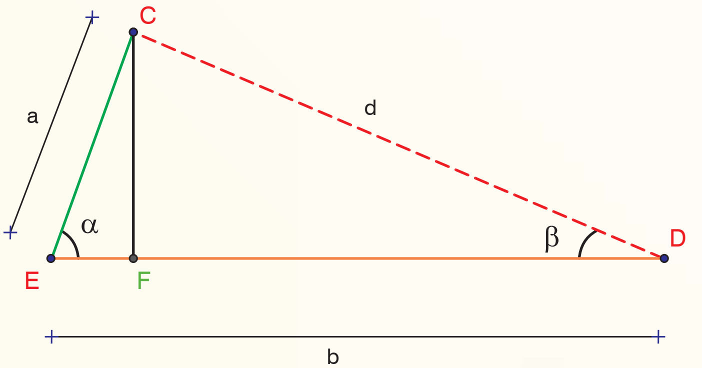


Figura 10

Empieza observando el *triángulo* de la Figura 10, en él al igual que en el caso anterior, se han utilizado las letras ***a*** y ***b*** para representar *las longitudes* de los segmentos CE y ED respectivamente y las letras α y β para representar lo que miden los *ángulos* de los *vértices* E y D; en este caso también se ha trazado el segmento auxiliar CF, perpendicular al segmento ED para formar *dos triángulos rectángulos* (EFC y CFD) dentro del *triángulo* CDE. Ahora, siguiendo la misma estrategia que utilizó el **equipo 2** para encontrar la medida del segmento CD, determina:

11. ¿A qué es igual el $Sen\alpha$ en el *triángulo* EFC?

12. Y el $Sen\ \beta$ ¿A qué es igual en el *triángulo* CFD?

13. Tanto en *la expresión* que debes haber escrito en el numeral 11 para el $Sen\ \alpha$, como en la que debes haber escrito para el $Sen\ \beta$, en el numeral 12, debe aparecer CF pues en ambos *triángulos* es el *cateto opuesto* al *ángulo*. De cada una de esas *expresiones* despeja CF.

14. Sustituyendo *el valor* de CF de una de *las expresiones* en la otra, obtén una *igualdad* que no incluya a CF

15. La igualdad que debes haber obtenido es: $a\ Sen\ \alpha = d\ Sen\ \beta$
donde d representa *la longitud* del segmento CD

16. Esta igualdad también puede escribirse $\dfrac{d}{Sen\,\alpha} = \dfrac{a}{Sen\,\beta}$

¿Cómo se transforma *la igualdad* $a\ Sen\ \alpha = d\ Sen\ \beta$ en esta *nueva igualdad*?

17. Observa que en la Figura 10 d y a representan lo que miden *dos de los lados* del *triángulo* y α es el *ángulo opuesto al lado* que mide d y β es el *ángulo opuesto al lado* que mide a. Con esta información enuncia *la propiedad* de los *triángulos* que está expresada en la *última igualdad* obtenida.

Esta relación que existe entre *los lados* de un *triángulo* y los *Senos* de los *ángulos opuestos* se le denomina *Ley de los senos* y se enuncia de la siguiente manera:

Ley de los senos

*En cualquier triángulo las razones que se obtienen al dividir la magnitud de **los lados** entre el seno del ángulo opuesto correspondiente son iguales.*

Esto es: $\frac{d}{Sen\,\alpha} = \frac{a}{Sen\,\beta} = \frac{b}{Sen\,\delta}$, donde *el lado* que mide b es opuesto al *ángulo* δ.

Este es otro resultado que permite ***resolver problemas*** donde aparecen *triángulos oblicuángulos*.

18. Si quisieras calcular *la longitud* de uno de *los lados* del *triángulo* utilizando la *Ley de los Senos* ¿Cómo lo harías?

19. Utilizando la *Ley de los senos* encuentra *la distancia* que hay *entre los postes* de la Actividad 2 de la parte de desarrollo.

20. ¿Cómo es el resultado que obtuviste con respecto al resultado obtenido por los integrantes del equipo 2?

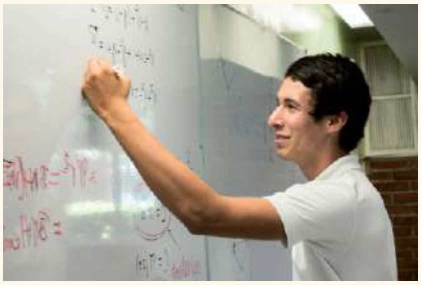
Actividad: 6

Utilizando **la herramienta** que te proporciona la *ley de los cosenos* y/o la *ley de los senos*, ***resuelve los problemas*** planteados en la *Actividad 4* de desarrollo:

Problema 1. *El puente*

Problema 2. *Los límites del terreno.*

Sección de problemas



Problema 1.

En la Figura 1 aparece el **dibujo de un puente** que se quiere construir para cruzar un río. ***Los ingenieros encargados del proyecto*** han decidido que en un *primer tramo el puente* tenga una rampa con una pendiente de *18°* hasta alcanzar una altura de *2* m sobre la *horizontal* y lo han señalado en el **dibujo**, *el segundo tramo del puente* será *horizontal* y finalmente *el tercer tramo* baja de nuevo con un *ángulo de depresión* de *18°* hasta alcanzar el otro lado del río. *La distancia* desde el punto donde empieza la primera rampa al punto donde termina el puente debe ser de *120 m*.

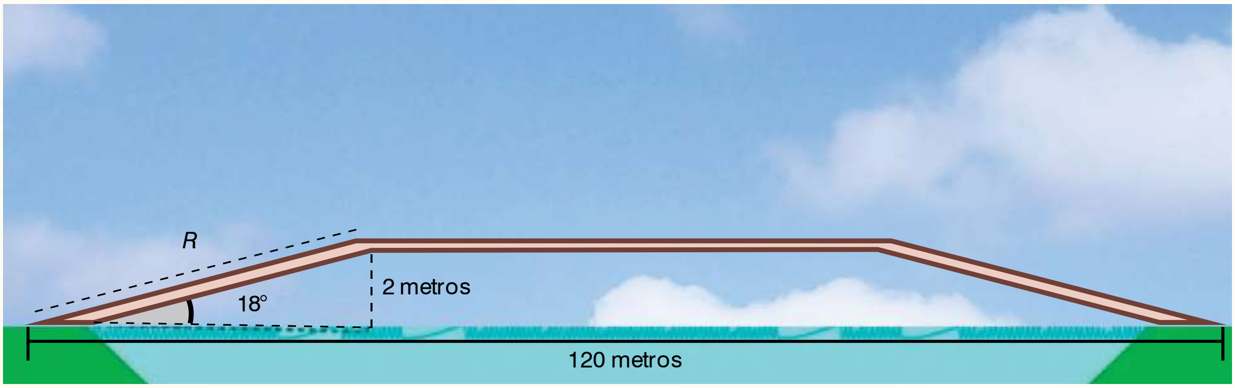


Figura 1

Con esta información, *calcula la longitud de cada uno de los tres tramos del puente*.

Problema 2.

En la actualidad es posible *medir la distancia* a algunos **astros** utilizando señales de radar. Se envía una señal **al astro** y se mide el tiempo que tarda en regresar el eco y como se conoce la velocidad a la que viaja la señal, que es la velocidad de la luz, se calcula *la distancia* recorrida por la señal que es el doble de la distancia **al astro**.

En el **dibujo** de la Figura 2 aparecen ***el Sol, la Tierra y el*** *planeta Venus*, que por estar más cerca del *Sol* ***que la Tierra***, gira alrededor del *Sol*, en una órbita que pasa entre el Sol ***y la Tierra***, como puede apreciarse en el **dibujo**. **El dibujo** también permite darse cuenta que *la distancia* de ***la Tierra*** a *Venus* es diferente en diferentes momentos, lo mismo que el *ángulo* que forman las **líneas de visión** a *Venus* y ***al Sol***, de un observador que está en ***la Tierra***. A ese *ángulo* se le denomina *elongación de Venus*. En **el dibujo** se ilustran diferentes posiciones de *Venus* en su tránsito alrededor del *Sol* y las diferentes *elongaciones* con que se observa *Venus* desde ***la Tierra***. También puede verse que cuando se alcanza la máxima *elongación*, que es de aproximadamente *46°*, *Venus*, el *Sol* y ***la Tierra*** ocupan los *vértices* de un *triángulo rectángulo*, con *Venus* en el *vértice* del *ángulo recto*. En ese momento, utilizando una señal de radar se determinó *la distancia* de ***la Tierra*** *a Venus*, que resultó ser de *104 millones de km*. Con esos datos, se calculó la distancia de ***la Tierra*** al *Sol*.

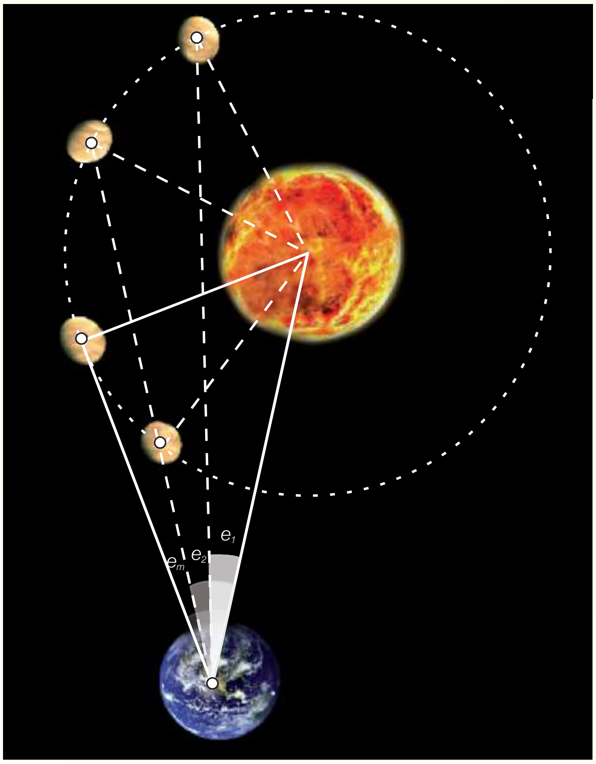


Figura 2

Calcúlala tú también.

Problema 3.

Para analizar la variación de la ***función Tangente***, se recurrió a los *triángulos* dibujados en una *circunferencia* unitaria como los de la Figura 3, en los cuales el **valor** de la ***función Tangente***, se asociaba con el **valor** del *cateto opuesto* al *triángulo*.

En esos mismos *triángulos*, se puede analizar la variación de la ***función Secante***, que recordarás se *define como la razón entre la **hipotenusa** de un triángulo rectángulo y el cateto adyacente al ángulo.*

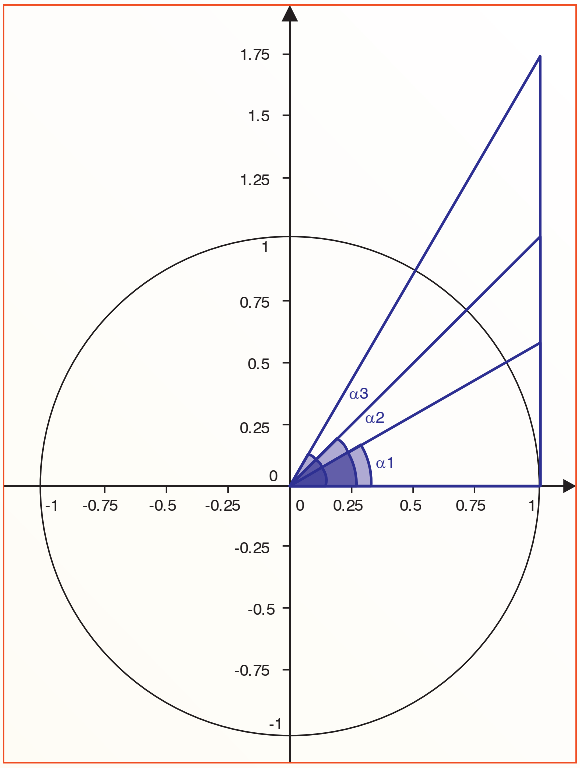


Figura 3

Para cada uno de los *triángulos rectángulos* de la figura ¿Quién representa el **valor** de la ***función Secante***?	¿Qué sucede con el ***valor*** de ***Sec*** α a medida que el *ángulo* α aumenta?

¿Cuál es el ***valor*** de ***Sec*** 0°?

____

____

¿Cuál es el ***valor*** de ***Sec*** 90°?

____

____

Problema 4.

Para analizar ***la variación de la función Cotangente*** y ***la variación de la función Cosecante***, se puede recurrir a los *triángulos* dibujados en la *circunferencia* unitaria que aparece en la figura. Teniendo presente que la ***función Cotangente*** *se define como* ***la razón*** *entre el* *cateto adyacente* y el *cateto opuesto* al *ángulo*; y que la ***función Cosecante*** *se define como* ***la razón*** *entre la* **hipotenusa** *y el* *cateto opuesto* *al* *ángulo*, observa la Figura 4 y contesta las siguientes preguntas:

En los *triángulos* de la figura ¿Quién representa el **valor** de la ***función Cotangente*** ?	¿Qué sucede con el **valor** de ***Cot*** α a medida que el *ángulo* α aumenta?	¿Cuál es el **valor** de ***Cot 0°***? y ¿Cuál es el **valor** de ***Cot 90°***?
Y el **valor** de la función ***Cosecante*** ¿Quién lo representa?	Y el **valor** de ***Csc*** α ¿Cómo varía al variar el *ángulo* α?	¿Cuál es el valor de ***Csc*** 0°? y ¿Cuál es el valor de ***Csc*** 90°?

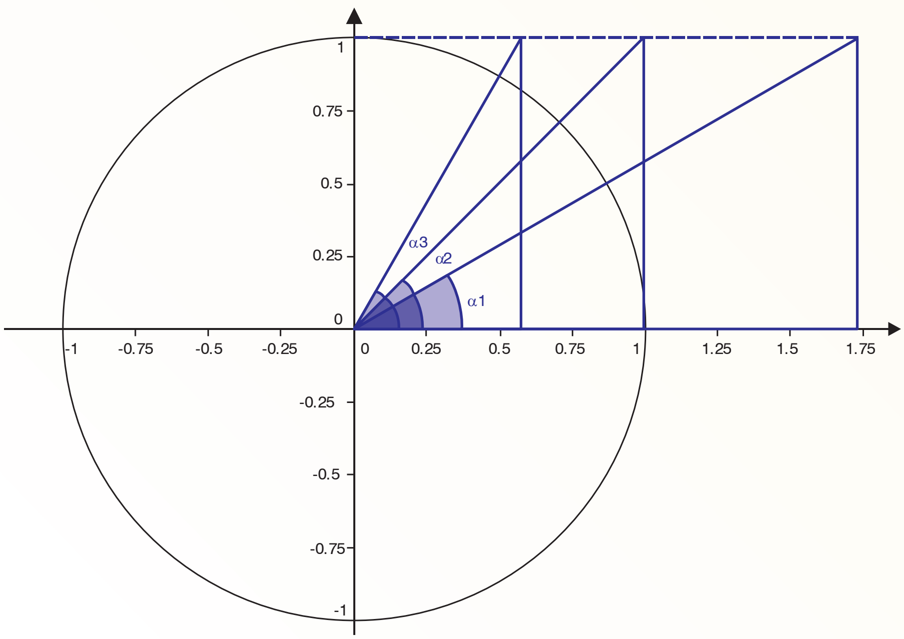


Figura 4

Problema 5.

La torre que aparece en la Figura 5 tiene una altura de *25 m* y está sobre una montaña. Para calcular la altura de la montaña **dos estudiantes** procedieron de la siguiente manera:

Buscaron un punto, que en la Figura señalaron con la letra *A*, que estimaron estaba al mismo nivel del pie de la montaña. Desde ahí midieron el *ángulo de elevación* con que veían el pie de la torre, que resultó ser de *36°*, luego enfocaron la parte más alta de la torre y midieron el nuevo *ángulo de elevación* que midió *63°* y con estos datos, utilizando la ***función Tangente***, calcularon la altura de la montaña.

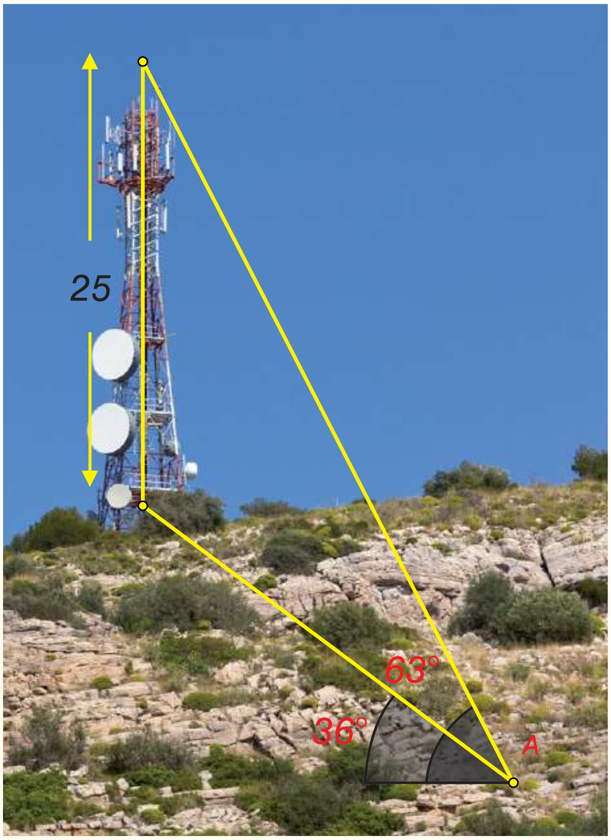


Figura 5

Tú también haz el cálculo:

Problema 6.

Una persona desea saber la altura de un edificio de varios pisos al que no tiene acceso, para ello cuenta con un ***transportador*** y una ***cinta métrica de seis metros***. Para resolver ***su problema*** fue al edificio y realizó algunas mediciones, mismas que resumió en una hoja de papel en la siguiente Figura 6.

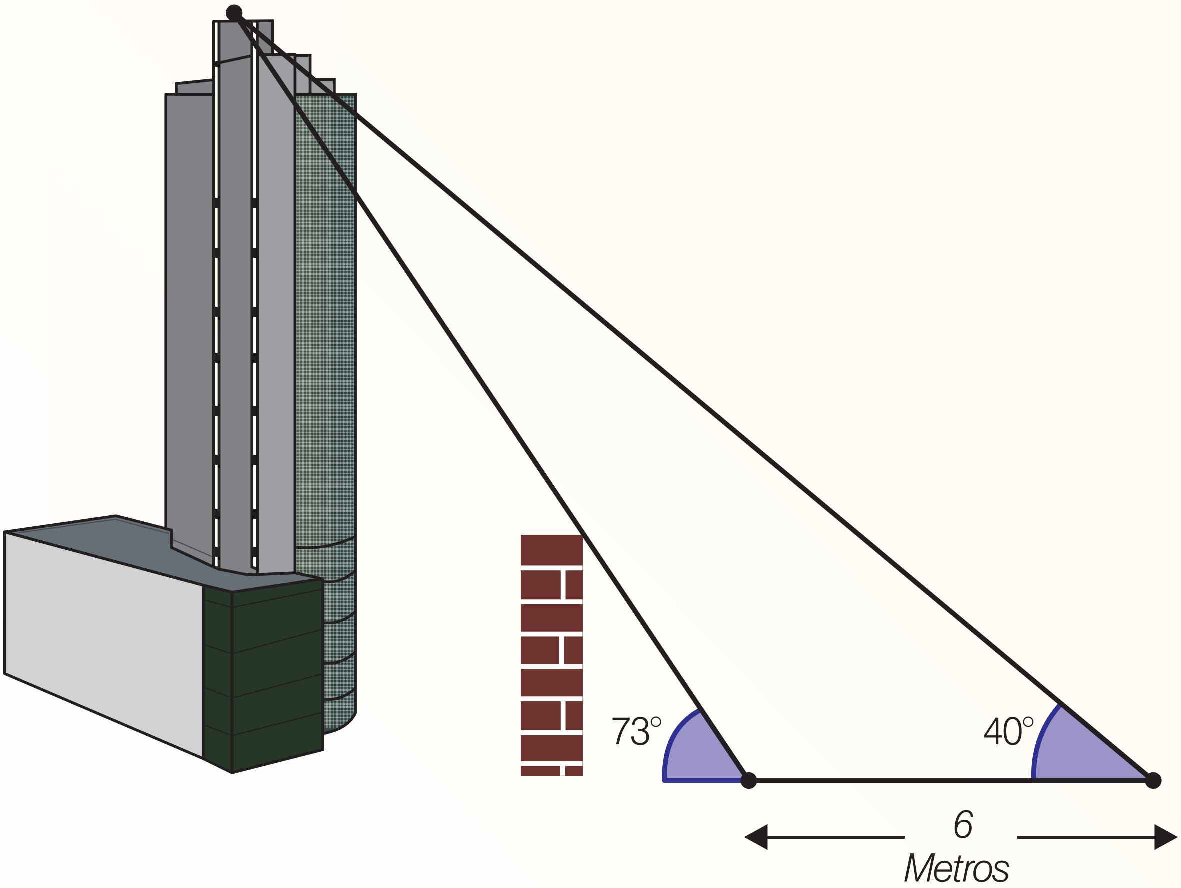


Figura 6

Problema 7.

Sobre una mesa de billar chocan *dos bolas*, salen disparadas en *línea recta* y caen en ***dos buchacas diferentes***, *una de ellas* recorrió *80 cm*, *la otra* recorrió *65 cm* y el *ángulo* que se formó entre las *líneas* que determinan la trayectoria de las *bolas* es de *70°*.

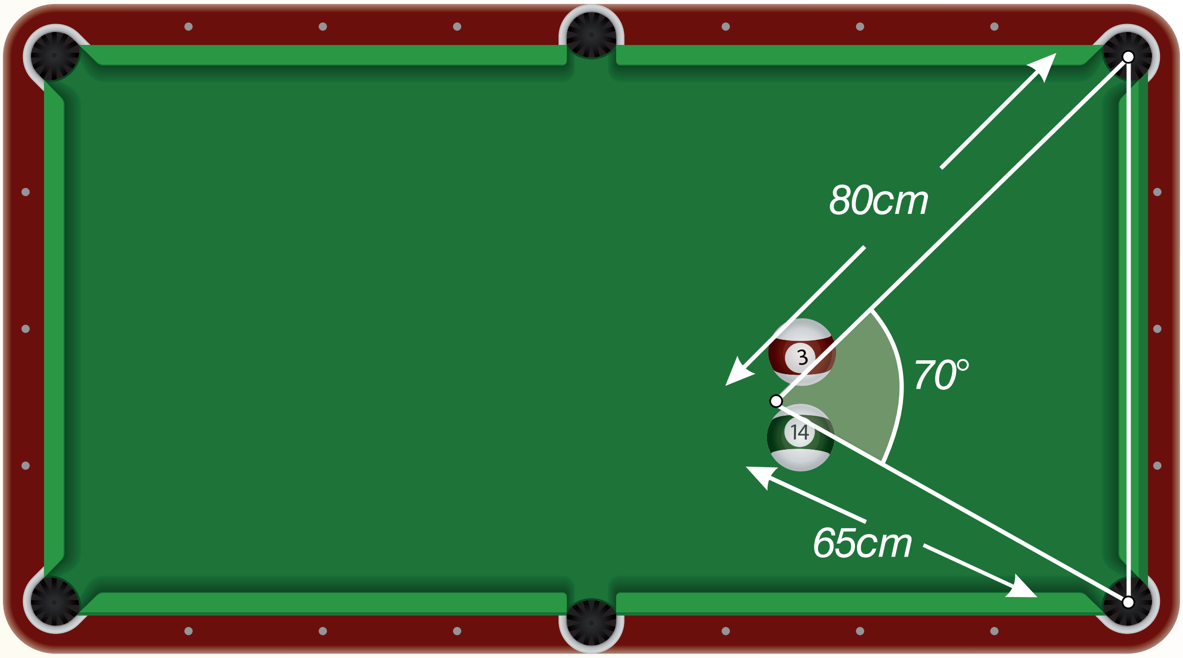


Figura 7

¿Cuál es la distancia que hay entre las buchacas en las que cayeron las bolas?

Autoevaluación

Seguramente ya te habrás acostumbrado a realizar, al final de cada **BLOQUE**, un proceso de *autoevaluación*, es decir, ***un proceso de reflexión*** sobre lo que has aprendido y sobre lo que consideras que todavía no has comprendido bien. Con ese propósito, es muy conveniente que realices las *Actividades* de esta **sección** pues hacerte consciente de lo que has logrado y de lo que consideras que te falta, te permitirá tomar decisiones sobre lo que deberás hacer para mejorar.

En la *introducción* al **BLOQUE** se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve **los problemas** planteados en esta **sección** y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. Esto te permitirá darte cuenta de tus avances, errores, dificultades e identificar aquellos aspectos sobre los que consideres necesario solicitar asesoría.

Problema 1.

Figura 1

Si la parte más **alta del edificio** que aparece en la Figura 1, estando de pie a *13.3 m* de su base, puedes verla con un *ángulo de elevación* de *45°* ***¿Cuál es la altura del edificio?***

a) ¿A qué **distancia del edificio** te colocarías para que su parte **más alta** se viera con un *ángulo de elevación* de *60°*?	b) Y para que se viera con un *ángulo de elevación* de *30°* ¿A qué **distancia del edificio** te colocarías?

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 1:

*a) ¿Qué hiciste para obtener la respuesta a cada una de las **tres preguntas**?*	*b) ¿Qué **criterios** utilizas para decidir el procedimiento que vas a emplear para obtener el producto que se te pide?*

Problema 2.

Los **lados** del *triángulo* ABC de la Figura 2 miden *3, 4 y 5 cm*.

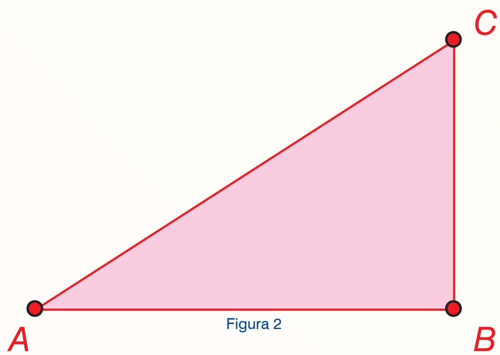


Figura 2

a) ¿Cómo puedes saber si este *triángulo* es *rectángulo*? ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________	Determina si lo es o no y explica qué hiciste para saberlo. **Solución:**

b) Sabiendo que el *triángulo* DEF de la Figura 3 es semejante al *triángulo* ABC de la Figura 2 y que el ***lado*** EF de dicho *triángulo* mide 6 cm ¿Cuánto miden los otros ***dos lados*** del *triángulo*? Explica qué hiciste para determinar lo que miden.

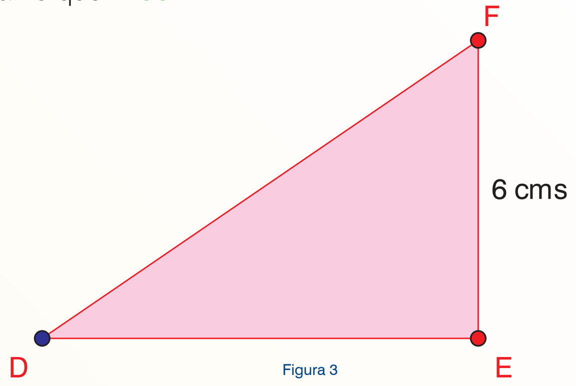


Figura 3

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 2:

a) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este BLOQUE *te ayudaron a resolver el* ***problema****?*	*b) ¿Cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaste?*

Problema 3.

Si sabes que el triángulo *HKL* que aparece en la Figura 4, es *rectángulo* y que el ***Seno*** del *ángulo HLK* es igual a $\frac{5}{4}$, determina el ***valor*** de cada una de las otras ***cinco funciones trigonométricas***.

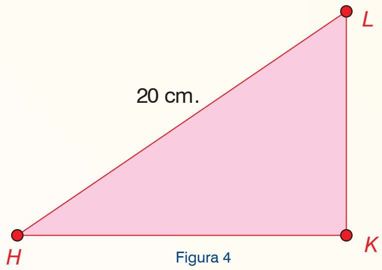


Figura 4

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 3:

*c) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este BLOQUE te ayudaron a resolver el **problema**?*	*d) ¿Cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaste?*

Problema 4.

Sabiendo que la ***Tangente*** del *ángulo PRQ* del *triángulo rectángulo PQR* de la Figura 5 es *5/4*,

¿Cuál es el *valor* de la ***Cotangente*** del mismo *ángulo*?

Y el *valor* de la ***Tangente*** del *ángulo RPQ*

¿Cuánto vale?

Explica qué hiciste para calcular los valores pedidos.

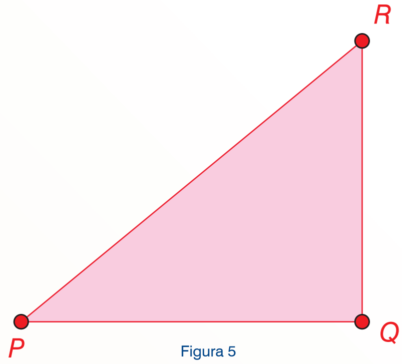


Figura 5

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 4:

e) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este BLOQUE *te ayudaron a resolver el **problema**?*	*f) ¿Cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaste?*

Problema 5

a) ¿Qué sucede con el *valor* del **Sen** α, cuando los *valores* del *ángulo* α están entre *0°* y *90°* y α aumenta?

b) Y cuando los *valores* de α están entre *90°* y *180°* ¿Qué sucede con el *valor* del **Sen** α, si α aumenta?

c) En los *dos casos anteriores* ¿Qué sucede con el *valor* del **Cos** α?

Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 5:

*a) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este BLOQUE te ayudaron a resolver el **problema**?*	*b) ¿Cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaste?*

Problema 6

Un teleférico lleva a los pasajeros del punto A al punto **P**, que está en la **cima de la montaña**, si *la distancia* de A a B ***(punto localizado en la base de la montaña)***, es de *3.4 km*, el *ángulo de elevación* desde el punto A hasta el punto **P**, es de *18°* y el de B a **P** es de *68°*, determina *la distancia* A**P**, que recorre **el teleférico**.

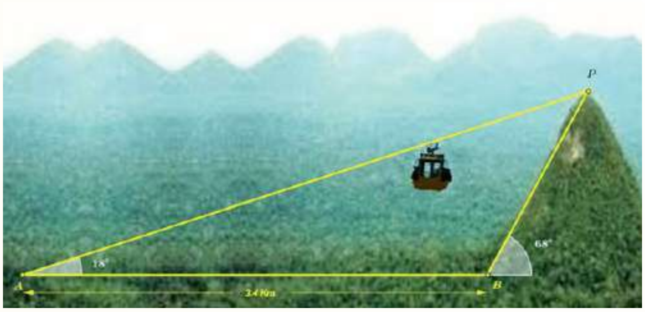


Figura 6

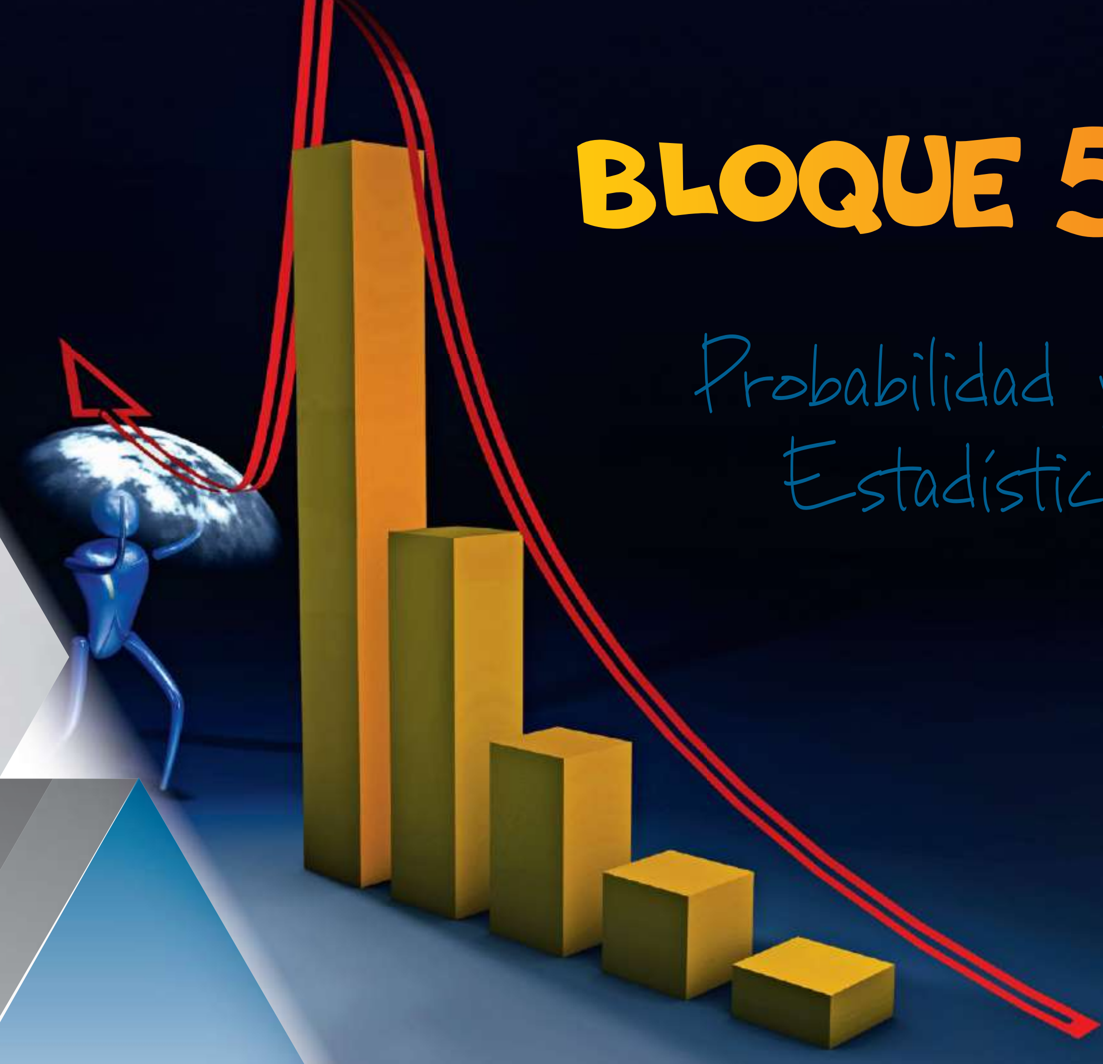
Solución:

Reflexiones relacionadas con el problema 6:

a) ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este BLOQUE *te ayudaron a resolver el* ***problema****?*	*b) ¿Cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaste?*

Reflexiones generales relacionadas con el **BLOQUE 4**:

¿Lograste comunicar tus ideas o puntos de vista al trabajar en equipo o en grupo?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Tomaste en cuenta la participación de tus compañeros para modificar tus respuestas, tus acercamientos a los problemas…etc.?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Lograste interpretar las ideas de tus compañeros al realizar alguna tarea o actividad de clase?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Expresaste a tus compañeros o al profesor alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Te entusiasma ayudar a tus compañeros a resolver dudas?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Te ayudaron tus compañeros a resolver las dudas que les planteaste?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
En este bloque me pareció interesante:			



BLOQUE 5

Probabilidad y Estadística

En este bloque encontrarás tres secuencias didácticas. **Las dos primeras** están formuladas *para que estudies algunas cuestiones alrededor del uso de la recolección, organización y representación gráfica de* **datos** *de un grupo de personas o cosas, así como para que puedas identificar y analizar variables estadísticas, determinar valores representativos e interpretar la dispersión de grupos de* **datos** *recolectados.*

En la última secuencia del bloque se abordarán algunas ideas básicas sobre el **azar**, distinguiendo los sucesos de tipo determinista de los de tipo aleatorio. *Se estudiará particularmente el enfoque clásico de probabilidad, que se utiliza para cuantificar el grado de ocurrencia de eventos aleatorios.*

Como en el resto de los bloques de este módulo de aprendizaje, las Actividades que integran las secuencias están diseñadas para que su estudio contribuya al desarrollo de *competencias genéricas y disciplinares*, por ejemplo, las que se refieren a la comunicación se ponen en juego escuchando las propuestas y argumentos de tus compañeros, compartiendo oralmente tus estrategias de resolución, redactando algún texto sobre la situación analizada, en este caso, en el contexto de las **matemáticas** se espera que vayas incorporando poco a poco su propio lenguaje.

Tiempo asignado: **16 horas**

Secuencia Didáctica 1.-

Actividades de Inicio

¿Qué dicen los números, respecto a quiénes y cómo somos?

Recolección de datos y variables estadísticas

Utilizando operaciones básicas con ***números reales*** podemos encontrar información importante que nos ayuda a sintetizar información que se presenta de *una persona, un grupo de personas, un objeto, un grupo de objetos, fenómenos sociales o físicos, etc.*

1. Cuando alguien quiere tener una idea de cómo eres **como estudiante** por lo regular te preguntan:

- *¿Qué semestre estás cursando?*
- *¿Trabajas?*
- *¿Cuál es tu promedio del semestre anterior?*
- *¿Cuánto llevas de promedio en este semestre?*
- *Más o menos, ¿Cuánto tiempo le dedicas al día a las tareas que te dejan en la escuela?*
- *¿Tienes reportes de mala conducta?*
- *Si respondes afirmativamente la pregunta anterior, casi siempre viene acompañada de la siguiente ¿Cuántos en este semestre?*
- *¿Cuántas faltas tienes en lo que va del semestre?*

Por lo regular cada una de estas *preguntas* está motivada por alguna característica tuya que le interesa conocer a la persona que pregunta, y se hacen de acuerdo a la parte de ti que le interesa conocer. Para responder a las preguntas anteriores:

a.) ¿Necesitas hacer *operaciones aritméticas* en todos los casos?

____

____

b.) ¿En cuáles consideras que tienes que utilizar *operaciones aritméticas*?

____

____

c.) ¿Qué tipo de *operaciones aritméticas* necesitar realizar en cada caso?

____

____

2. Cuando alguien tiene la intención de **comprar una computadora**, por lo regular se fija en ciertas características que son de interés de acuerdo a sus gustos personales, al uso que le dará al equipo, a su capacidad económica para adquirirla, entre otros. Si tú estuvieras en esa situación, ¿en qué características te fijarías antes de decidir la compra de una computadora?

____

____

a.) En la siguiente tabla escribe otras características, valores que puede tomar y de qué tipo son dichos valores.

Característica	*Valor (es)*	*Tipo de valor (es):numéricos[1] o no numéricos*
Color	Gris, Negra, Blanca…	No numérica

[1] *Por **valores numéricos** nos referimos a valores que se representan por números que mantienen sus propiedades como tales, como hacer operaciones con ellos. Por ejemplo: los números de las camisetas de los deportistas no son valores numéricos porque su propósito sólo es distinguir a un jugador de otro, ni los nombres de los semestres porque sólo tienen el propósito señalar el lugar que ocupan en los diferentes grados escolares de la preparatoria.*

Actividades de Equipo

b.) Compara con tus compañeros de equipo y agrega a la **tabla** otras características que no hayas anotado.

Al **comprar un computadora portátil**, una característica en las que más se fija la gente es la duración de la **carga de la batería**, normalmente ésta es una información que viene en las especificaciones técnicas que describen las características del equipo.

c). ¿Cómo crees que se determina el número de horas de duración de la **carga de la batería**, que se señala en el manual?

____
____
____
____
____
____
____

d). Si compraras un equipo, ¿cómo le harías para verificar que dicha información es correcta?

____
____
____
____
____
____
____
____

Como puedes ver en estas dos situaciones el propósito es analizar características de personas u objetos de cualquier tipo, a estas características en los estudios estadísticos se les conoce como variables. Es probable que este término ya te sea familiar pues desde el nivel básico se estudian situaciones en las que la recopilación y manejo de ***datos*** aparece como una **herramienta** necesaria en la toma de decisiones.

Desarrollo

Actividad: 2

Información de mis compañeros

Los estudiantes de tu escuela, ¿tendrán pocas o muchas cosas en común?, por ejemplo ¿Conoces la siguiente información de ***los estudiantes de tu escuela***?

- *Edad* ______________
- *Semestre que cursan* ______________
- *Turno al que asisten a la escuela* ______________
- *Promedio del semestre anterior* ______________
- *Medio de transporte en que se van de su casa a la escuela* ______________
- *Tiempo que tardan en llegar de su casa a la escuela* ______________
- *Número de miembros de su familia* ______________
- *Si tienen pensado seguir estudiando después de la preparatoria* ______________
- *Carrera que pretenden estudiar* ______________
- *Número de materias que han reprobado en la preparatoria* ______________
- *Deporte que prefieren ver o practicar* ______________
- *Usan teléfono celular* ______________
- *Más o menos, ¿cuánto tiempo lo usan al día?* ______________
- *Más o menos, ¿cuánto gastan en la semana?* ______________
- *Comunidad (ciudad, colonia, pueblo, comisaria, etc.) donde viven* ______________
- *Trabajan* ______________

1. Para cada una de las *variables* que se señalan, de ***los estudiantes de tu escuela,*** escribe en la línea que está a su derecha si las respuestas posibles son ***valores numéricos o no numéricos***.

2. ¿Cuáles son las *variables* a las que no se les puede asignar ***valor numérico***?

____

____

____

3. ¿El semestre que cursan ***los estudiantes*** lo ubicaste en la relación anterior?, ¿por qué?

____

____

____

4. ¿Qué tienen en común las *variables* a las que no se les puede asignar un ***valor numérico***?

____
____
____

Existen varias clasificaciones para las** variables **estadísticas, en una de ellas a las *variables no numéricas* o *cualitativas* que sólo tienen la función de distinguir una categoría de otra de las posibles, se les denomina *variables nominales*, y a las que además tienen la función de establecer un orden entre las categorías se les llama *variables ordinales*.

5. En la siguiente **tabla** coloca las *variables* que se muestran al inicio de la Actividad 2, según corresponda.

Variables nominales	*Variables ordinales*

6. ¿Cuáles son las *variables* a las que se les puede asignar ***valor numérico***?

____
____
____

7. ¿Qué diferencia encuentras entre los tipos de ***valores*** que pueden tomar las *variables*, número de miembros de su familia y número de materias reprobadas con respecto a los ***valores*** que puede tomar la *variable* promedio del semestre anterior?

____
____
____

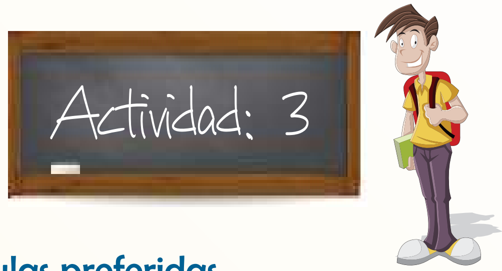
Las ***variables numéricas*** o ***cuantitativas*** se pueden clasificar en dos tipos:

- *variables discretas* son aquellas que teóricamente sólo pueden tomar un número finito de ***valores*** o un número infinito pero que se pueden numerar;
- *variables continuas* son aquellas que teóricamente pueden tomar cualquier ***valor*** en algún intervalo de los ***números reales***.

8. En la siguiente tabla coloca las *variables* que se muestran al inicio de la *Actividad 2*, según corresponda.

Variables discretas	*Variables continuas*

Actividades de Equipo



Películas preferidas

El área de artes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora desea conocer el ***tipo de películas que sus** estudiantes **prefieren ver en el cine***, así como la frecuencia con que lo hacen; para recolectar información de los estudiantes de los *planteles del COBACH en el estado*, se ha diseñado la siguiente encuesta:

i. Género: *Masculino* ______ *Femenino* ______

ii. ¿Cuál es el ***tipo de películas*** que prefieres ver?

Terror/Suspenso _______	*Ficción* _______________
Romance _____________	*Aventura/Acción* ______
Drama/Suspenso ______	*Infantil/Animación* _____
Comedia _____________	

iii. Más o menos, *¿cuántas veces acudes **al cine** al mes?* ____________________________

iv. Más o menos, *¿cuánto dinero gastas cuando acudes **al cine**?* _____________________

Con base en la **encuesta**, responde a las preguntas siguientes:

1. ¿A qué universo de *personas* está dirigido el *cuestionario*?

   ____
   ____
   ____

2. ¿*Los estudiantes* de tu plantel forman parte de ese *universo*?

   ____
   ____
   ____

3. ¿*Los estudiantes de tu plantel* son todo el *universo* a quién está dirigido el *cuestionario*?

   ____
   ____
   ____

4. ¿Cuáles son las *variables* involucradas en el *estudio*?

   ____
   ____
   ____

5. ¿De qué tipo es cada una de las *variables* involucradas?

   ____
   ____
   ____

Si a ti te solicitan recolectar la información de tu plantel:

6. ¿Qué *estrategia* utilizarías para hacerlo?

   ____
   ____
   ____

7. ¿Aplicarías el *cuestionario* a todos *los estudiantes de tu plantel*? *Argumenta* tu respuesta.

   ____
   ____
   ____

8. Aproximadamente, ¿cuántos *estudiantes hay en tu plantel*?

   ____
   ____
   ____

9. ¿Crees que es práctico aplicar el cuestionario a todos *los estudiantes de tu plantel*? *Argumenta* tu respuesta.

____
____
____

10. Si tuvieras que decidir aplicar el *cuestionario* sólo a una parte de *los estudiantes del plantel*, ¿cómo le harías para decidir a cuántos y a quienes?

____
____
____

11. ¿Consideras que la forma de selección que formulaste en la pregunta anterior te generará resultados que representen a todos *los estudiantes del plantel*? *Argumenta* tu respuesta.

____
____
____

En estadística al conjunto de todos los sujetos (personas, animales, cosas, fenómenos, físicos, fenómenos sociales, etc.) a los que está dirigido un estudio o proyecto estadístico se le llama población física, y al conjunto de ***datos*** que se obtiene de dicha población física se conocen como población estadística (para la misma población física cambia dependiendo de la *variable* que se esté estudiando). *Estadísticamente* hablando es la población estadística (conjunto de datos) la que nos permite hacer un tratamiento *estadístico* de la situación. A cualquier subconjunto de la población se le llama muestra física o estadística, según sea el caso.

Para la situación que se ha planteado:

12. ¿Cuál es la población física?

____
____
____

13. ¿Cuál es la población estadística para cada una de las *cuatro variables* que se están analizando?

____
____
____

14. ¿Cuál es una muestra de la población física?

____
____
____

Actividades de Equipo

Actividad: 4

La encuesta

Retoma la encuesta de la actividad anterior y realiza las tareas que se indican en seguida:

i. Género: *Masculino* ______ *Femenino* ______

ii. ¿Cuál es el ***tipo de películas*** que prefieres ver?

Terror/Suspenso _______	*Ficción*______________
Romance _____________	*Aventura/Acción*______
Drama/Suspenso ______	*Infantil/Animación*_____
Comedia _____________	

iii. Más o menos, *¿Cuántas veces* ***acudes al cine*** *al mes?* ___________________________

iv. Más o menos, *¿Cuánto dinero gastas cuando* ***acudes al cine***? ____________________

1. Aplícala a los *estudiantes de tu grupo*.

2. Organiza la información obtenida.

3. A partir de la información obtenida, qué puedes decir de:

a). El ***tipo de películas*** que prefieren ver.

____
____
____

b). El número de veces al mes que ***van al cines***.

____
____
____

c). La cantidad de dinero que gastan cuando ***van al cine***.

____
____
____

d). ***Tipo de películas*** que prefieren ver las mujeres.

____
____
____

4. De acuerdo a quien está dirigido el cuestionario, ¿tu grupo representa a la población física o a una muestra? ¿Por qué?

____
____
____

5. ¿Qué puedes decir de *los estudiantes de tu grupo* a partir de las respuestas que dieron a las *cuatro variables* que se estudian?

____
____
____

6. Con la información que obtuviste de *los estudiantes de tu grupo*, ¿puedes concluir como son *los estudiantes del plantel*? *Argumenta* tu respuesta.

____
____
____

Actividad de Cierre

Actividad: 5

Actividades Grupales

A manera de resumen

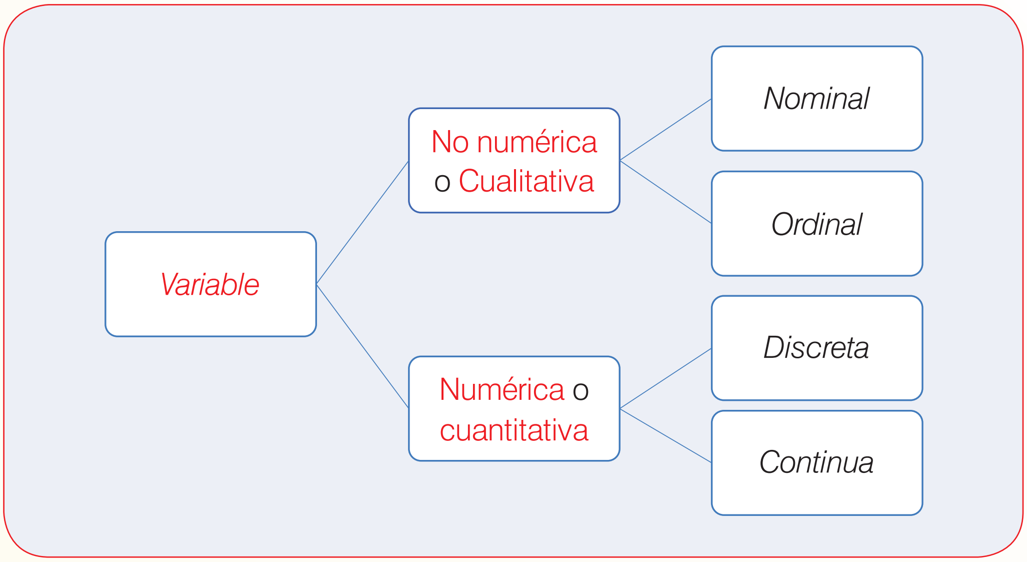
En las *Actividades* de esta **secuencia** se plantean varias situaciones, y al resolverlas tuviste la oportunidad de poner en juego algunos **conocimientos matemáticos** que has utilizado desde primaria y secundaria, uno de los propósitos es que los sigas enriqueciendo y que al mismo tiempo construyas otros nuevos.

En la *Actividad 1*, de la **parte de inicio**, se plantea una situación en la que se describen una serie de características de una persona, el propósito es recordarte que:

> Una *variable* en ***estadística*** *es una característica que se desea estudiar de un grupo de personas, animales o cosas*; por ejemplo: edad, estatura, promedio de la escuela, deporte favorito, grado escolar, duración de la batería, color, etc. *Las variables* se pueden *clasificar* en *no numéricas* o *cualitativas* y *numéricas* o *cuantitativas*.

En la Actividad 2, de la **parte de desarrollo**, se presenta una situación que permite hacer una *subclasificación de las variables*, de tal modo que *las variables no numéricas* o *cualitativas* pueden ser *nominales* y *ordinales*, mientras que las *numéricas* o *cuantitativas* pueden ser *discretas* y *continuas*.

La clasificación anterior se muestra en la siguiente gráfica:



Finalmente en las Actividades 3 y 4 se *definen* los siguientes términos:

Población física, *como el universo de sujetos (personas, animales o cosas, fenómenos físicos o sociales, etc.) sobre los que se pretende hacer un estudio estadístico, en base al análisis de alguna o algunas variables.*

Población estadística, *como el universo de* ***datos*** *que se obtienen de la población física al observar una de las variables.*

Muestra, *como un subconjunto de objetos de la población.*

Es importante señalar que cuando el **estudio estadístico** se hace sobre una muestra y no sobre la totalidad de la población física, que es el caso de un **censo**, entonces lo deseable es que la composición de la muestra que se seleccione sea muy parecida a la *composición de la población*, cuando una muestra cumple con esta condición se dice que es una muestra representativa.

Por ejemplo, si interesa conocer el rendimiento académico de *los estudiantes de un plantel* en particular, de acuerdo al *promedio de sus estudiantes* y debemos seleccionar una muestra porque el plantel es muy grande, podemos hacer lo siguiente:

Primera opción:
Seleccionar una muestra de l*os estudiantes* que tienen mayor promedio.

Segunda opción:
Seleccionar ***al "azar"*** *estudiantes* de todos los grados y que tengan de todos los tipos de promedios (bajos, medios y altos).

En la **primera opción**, es muy probable que la forma en que seleccionamos la muestra nos proporcione una que no sea representativa porque está cargada a los promedios mayores, mientras que la **segunda opción** tiene más posibilidades de serlo ya que para su elección se toman en cuenta todos los sectores de la población.

1. Cuando de la *oficina de comunicación social del Ayuntamiento* se señala que el *85%* de los usuarios han cumplido con el **pago del predial**, y que el resto son morosos, esta información la tuvieron que obtener de una base de datos:

   a). ¿Cuál es la población física sobre la que se están fijando en la *oficina de comunicación social*?

   ____

   ____

   ____

   b). ¿Cuál es la *variable* que están analizando de los elementos de la población física?

   ____

   ____

   ____

   c). ¿Qué tipo de *variable* es?

   ____

   ____

   ____

   d). En este caso, ¿cuál es la población estadística?

   ____

   ____

   ____

BLOQUE 5

Secuencia Didáctica 2.-

Actividades de Inicio

Algunas estadísticas sobre redes sociales y población joven en Sonora

Redes sociales

El uso de **las redes sociales** ha impactado en nuestra vida diaria en diferentes aspectos, no sólo se han convertido en un poderoso recurso para mantener comunicación con personas alrededor del mundo, es también de gran utilidad para todo tipo de empresas e inclusive tiene el potencial de promover y divulgar temáticas de tipo cultural, tecnológico, social, ambiental, político entre otras.

Por dichos motivos, se han realizado diversos **estudios estadísticos** para conocer el impacto de estas redes en términos de los hábitos de los usuarios. Por ejemplo, estudios recientes acerca del uso de **redes sociales** muestran que el *70%* de la **población mundial** es miembro de al menos una **red social**, que un usuario promedio consulta su **red social** al menos dos veces al día, y por último, en lo que respecta a la popular **red social Facebook**, se dice que el promedio de amigos de un usuario es de *200* (lo cual puede variar en algunos países inclusive hasta duplicar dicha cifra), entre otros.

Ahora bien, como podrás observar, cuando se analiza o describe alguna temática de interés, no pasa mucho tiempo para que aparezca información que se brinda en *términos de porcentajes, índices, tablas, gráficas y demás*. En este caso, se habla también de **promedios** que es un término que probablemente conoces desde temprana edad, es de hecho, **una herramienta estadística básica** sumamente utilizada en diferentes situaciones a lo largo de nuestra vida diaria para referirnos a **conjuntos de *datos* sin tener necesariamente acceso a ellos**. A continuación se plantean algunas preguntas para analizar ciertos aspectos básicos de estas **herramientas**.

1. Cuando lees o escuchas la expresión "**el promedio** de amigos de un usuario de **Facebook** es de *200* amigos", ¿Qué quiere decir eso para ti?

   ____

   ____

   ____

2. ¿Cómo se determina el **promedio** de un conjunto de datos?

   ____

   ____

   ____

3. Propón un conjunto de cinco ***datos*** cuyo **promedio** es *200*.

   ____

   ____

   ____

4. ¿Cómo se puede verificar que *200* es el **promedio** del conjunto de *datos* que propusiste? Escribe una *estrategia* o *procedimiento* de cómo hacerle para verificar que el *200* es el **promedio** del conjunto propuesto.

Actividades Grupales

5. Utilizando los ***datos*** proporcionados por los otros compañeros, verifica si la *estrategia* que utilizaste con tu ***conjunto de datos*** sigue siendo válida para el ***conjunto de datos*** de tus compañeros.

6. ¿Son iguales el ***conjunto de datos*** que propusieron tus compañeros y el ***conjunto*** que propusiste tú? ¿Tienen algo en común? ¿Qué?

7. Para cada ***conjunto de datos***, ¿cuántos son menores y cuántos son mayores que el **promedio**?

8. ¿Qué hay más, números menores que el **promedio** o números mayores?

9. ¿Cuál es el valor de la diferencia entre cada **dato** del conjunto propuesto y el **promedio** que determinaste?

10. ¿Cómo es la suma de las diferencias de los *datos* menores que el **promedio** con respecto a la suma de las diferencias de los *datos* mayores que el **promedio**?

Desarrollo

Actividad: 2

Actividades de Equipo

Población joven en Sonora

La información que se presenta en las Figuras 1 y 2 corresponde a **información** del *Estado de Sonora* obtenida por *INEGI* en el *censo nacional de población 2010* (INEGI, *2013*).

Entidad: Sonora (26)

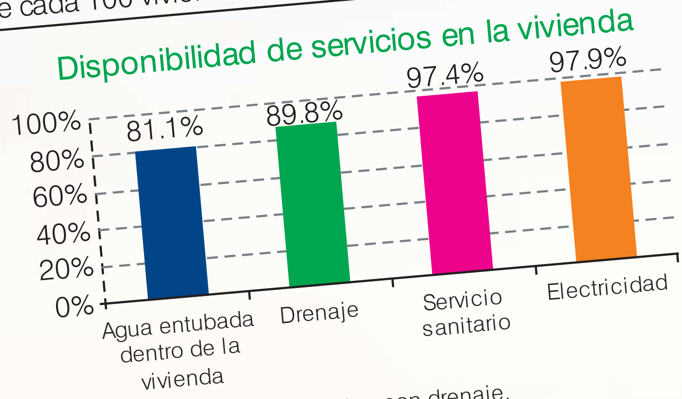
Composición por edad y sexo

Población total: Representa el 2.4% de la población nacional.	2 662 480
Relación hombres-mujeres: Hay 101 hombres por cada 100 mujeres.	101.3
Edad Mediana: La mitad de la población tiene 26 años o menos.	26
Razón de dependencia por edad: Por cada 100 personas en edad productiva (15 a 64 años) hay 54 en edad de dependencia (menores de 15 años o mayores de 64 años).	54.0

Figura 1

Vivienda

Total de viviendas particulares habitadas	712 108
Promedio de ocupantes por vivienda*: * Se excluyen las viviendas sin información de ocupantes y su población estimada.	3.7
Viviendas con piso de tierra: De cada 100 viviendas, 5 tienen piso de tierra.	5.3%



De cada 100 viviendas, 90 cuentan con drenaje.

Figura 2

Con base en esta información:

1. Aproximadamente, ¿cuánta *población* había en *2010* en el país?

2. ¿Qué entiendes por edad mediana?

3. ¿Edad *mediana* es lo mismo que edad promedio? *Argumenta* tu respuesta.

4. ¿Qué quiere decir que el promedio de ocupantes por vivienda es de *3.7*?

5. De acuerdo a lo que sabes, ¿hay alguna diferencia entre **promedio** y *mediana*? *Argumenta* tu respuesta.

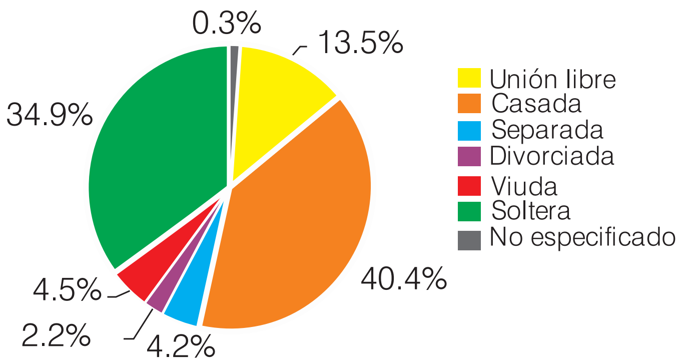
____

____

La *gráfica* de la Figura 3, *muestra* información del municipio de Cajeme, Sonora, obtenida en el *CENSO 2010* (*INEGI*, *2013*).

Situación conyugal

Distribución de la población de 12 años y más según situación conyugal



De cada 100 personas de 12 años y más, 40 son casadas y 14 viven en unión libre.

Figura 3

6. ¿Cuál es la población física sobre la que se enfoca esta información?

____

____

____

7. ¿Cuál es la *variable* que interesa estudiar en este caso?

____

____

____

8. ¿Cuál es un valor representativo de la *variable*? *Argumenta* tu respuesta.

____

____

____

9. En este último caso, ¿se puede obtener un **promedio** o *mediana*? ¿Por qué?

____

____

____

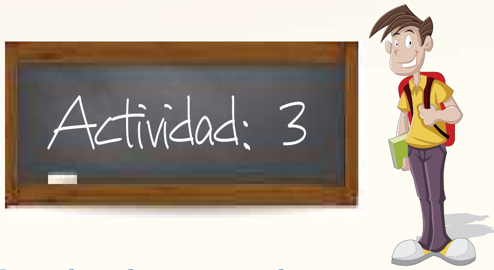
Actividades Grupales

Desde los primero años de la escuela primaria has **estudiado situaciones** en las que utilizaste el **promedio** o la *mediana* de un conjunto de *datos*. Es importante recordar que para calcular el **promedio** se suman todos los *datos* de un conjunto (*muestra* o **población**) y el resultado se divide entre el total de *datos*, a este valor en *Estadística* se le llama *Media Aritmética* o *simplemente Media*. A la *mediana* se le identifica como el *dato central*, cuando los *datos* están ordenados, en orden ascendente o descendente y la *moda* es aquel *dato* que aparece con mayor frecuencia. Tanto la *media* como la *mediana* y la *moda* se utilizan con mucha frecuencia para estimar un valor representativo de un *conjunto de datos*.

Las siguientes son expresiones generales o fórmulas para calcular la *media*, la *mediana* y la *moda* cuando se tiene un *conjunto de datos* sin agrupar:

Media	$\bar{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ Donde $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ representan cada uno de los *datos de conjunto* (*muestra* o **población**) y n el número de *datos del conjunto.*
Mediana	Si el número de *datos* es impar, se ordenan los *datos* y se selecciona el que está en el centro, es decir, si $n = 2k - 1$ $\tilde{X}= x_k$ Si el número de *datos* es par, se ordenan los *datos* y se obtiene la *media* de los dos *datos centrales*, es decir, si $n = 2k$. $\tilde{X}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$
Moda	$\hat{X}=x_i$ Donde x_i es el *dato* que tiene mayor frecuencia.

Estas tres medidas son útiles para resumir la información de un *conjunto de datos* y por eso se les llama en *Estadística* *medidas de tendencia central* y pueden tener varias interpretaciones; por ejemplo, se puede interpretar como: el resumen del *conjunto de datos*, el valor representativo del *conjunto de datos*, o cómo el valor a partir del cual se distribuyen los *datos del conjunto*, entre otros (Entendiendo por distribución la forma en que se comporta el *conjunto de datos*, por ejemplo muy cercanos a un valor determinado del *conjunto*, muy dispersos entre ellos o respecto a un valor del *conjunto*, etc.).

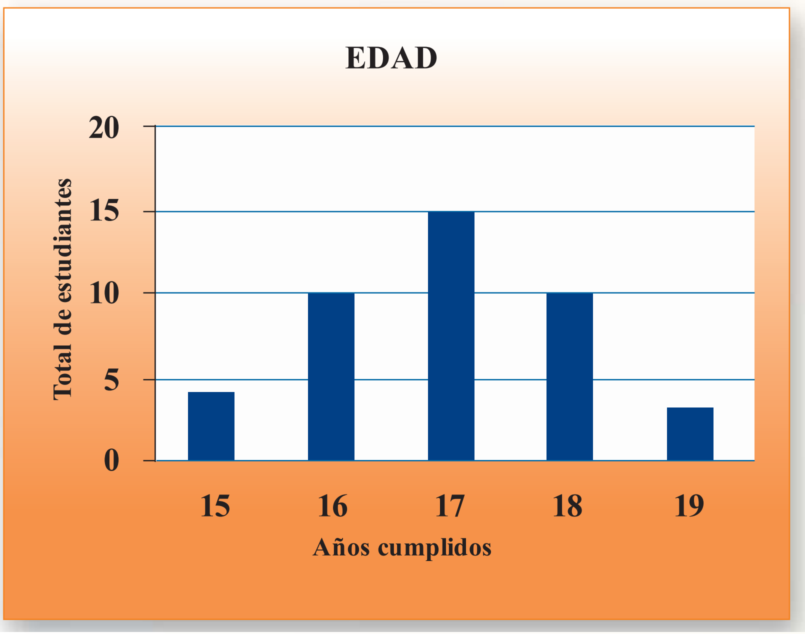


Estudio de mercado

Actualmente algunas **cadenas comerciales** han enfocado sus campañas publicitarias a la promoción de productos dirigidos a la *población joven*, ya que ellos representan una parte muy importante de ésta, de acuerdo al *Informativo oportuno. Conociendo…nos Todos del INEGI*, (*2013*) el *25%* de la **población mexicana** son *jóvenes entre los 15 y 26 años*.

Una firma comercial pretende introducir al mercado sonorense uno de esos productos y para ello realizan un *estudio de mercado*, con el propósito de conocer algunas de las características de los *jóvenes sonorenses*. Para realizar el *estudio* se consideró a la *población del área rural y a la del área urbana*, para el área urbana se seleccionó una de las ciudades más grandes del Estado en la que se aplicó una encuesta a un grupo de *jóvenes preparatorianos* seleccionados al ***azar***. A continuación se presenta la información que se obtuvo de las primeras cuatro preguntas de la encuesta, que se aplicó en el área urbana:

Pregunta 1: *¿Qué edad (años cumplidos) tienes?*



Pregunta 2: *¿Qué semestre cursas?*

Semestre	*No. de estudiantes*
Primero	17
Tercero	14
Quinto	11

Pregunta 3: *¿Cuánto tiempo (en horas) le dedicas al día a las redes sociales?*

0.75	0.75	1	1	1	1	1.25	1.25	1.5	1.5	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2.5	2.5	2.5	2.5
2.5	2.75	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4
4.5	4.5	5	5	5	5.5						

Pregunta 4: *¿En qué te trasladas de tu casa a la escuela?*

Medio de transporte	*No. de estudiantes*
Bicicleta	4
Autobús	18
Auto propio	6
Caminando	14

Actividades de Equipo

A partir de la información que se proporciona en las primeras *cuatro preguntas* de la **encuesta**, responde lo siguiente:

1. ¿A cuántos *jóvenes* se les aplicó la **encuesta**?

____

____

____

2. ¿Qué tipo de *variable* se presenta en cada pregunta?

____

____

____

3. A partir de los ***datos*** obtenidos de *los jóvenes* **encuestados**, determina para cada *variable* al menos un valor representativo.

4. ¿Se puede obtener la ***media*** para cada una de las *variables Estadísticas* seleccionadas? *Argumenta* tu respuesta.

5. ¿Se puede obtener la ***mediana*** para cada una de las *variables*? *Argumenta* tu respuesta.

6. Para cada *variable*, ¿se puede determinar el valor que aparece con mayor frecuencia?

7. Para cada una de las *variables* determina el valor que tiene mayor frecuencia.

Actividades Grupales

Como puedes ver, a partir de la ***media, la mediana y la moda*** es posible encontrar un valor representativo a un **conjunto de datos**, por ejemplo se puede saber: la edad promedio de un grupo de personas, la edad hasta la que se acumula el *50%* de *los estudiantes*, el tipo de transporte más utilizado por *los estudiantes*, el tiempo promedio que le dedican *los jóvenes* a las redes sociales, etc.

La información de la *variable* edad (*variable discreta*) está representada en la *gráfica de barras* de la pregunta *1*, como se puede ver los ***datos*** están agrupados, en estos casos la ***media*** se puede calcular de la siguiente manera:

Media	$\overline{X}=\dfrac{x_1 f_1+x_2 f_2+\cdots+x_k f_k}{n}$ Donde x_1, x_2, x_3, ..., x_k representan los valores diferentes de los ***datos*** **del conjunto** (muestra o **población**), k el número de valores diferentes y n el número de ***datos*** **del conjunto**.

Distribución de variables según el área

En la *Actividad* anterior se presenta información que se obtuvo al realizar un **estudio de mercado**, dicha información corresponde al *área urbana*. En esta *Actividad* nos centraremos en analizar las respuestas que dieron *los jóvenes* a la pregunta 3, que corresponde al tiempo que dedican al uso de las redes sociales, en particular nos interesa saber cómo es la distribución de esta *variable* de acuerdo al *área* donde viven *los jóvenes*. La siguiente información corresponde a la respuesta que dieron los entrevistados a la pregunta 3: ¿cuánto tiempo (en horas) le dedicas al día a las redes sociales?

Área urbana											
1	1	1	1	1	1	1.25	1.25	1.5	1.5	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2.5	2.5	2.5	2.5
2.5	2.75	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4
4.5	4.5	5	5	5	5						

Área rural											
0.5	0.5	0.75	.075	0.75	1	1	1	1	1	1	1
1	1.25	1.25	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	2	2	2	2
2.5	2.5	2.5	2.5	3	3	3	3	3	4	4	4
4.25	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5						

1. Para cada tipo de población, ¿cuál es la ***media*** del tiempo que le dedican *los jóvenes* a las **redes sociales**? ¿cómo interpretas este valor?

2. Los valores que obtuviste, ¿son diferentes? ¿cómo interpretas eso?

3. Para cada *área*, ¿cuál es la ***mediana*** del tiempo que le dedican *los jóvenes* a las **redes sociales**? ¿qué representa este valor?

4. ¿Hay diferencia entre los valores que obtuviste? ¿cómo interpretas eso?

5. A partir de la información que tienes de la ***media*** y ***mediana*** de estos grupos de *jóvenes*, ¿qué puedes decir acerca de la distribución del conjunto de *datos* del *área urbana* comparada con el del *área rural*?

6. ¿Cuál de los dos grupos presenta una distribución más dispersa o heterogénea?

Una manera que has estudiado desde secundaria ***para medir la dispersión de un conjunto de datos es el rango***, que se obtiene restando al dato mayor el dato menor, es decir:

Rango	$R = x_{mayor} - x_{menor}$ Donde x_{mayor} es el ***dato mayor*** y x_{menor} es el ***dato menor***.

7. Determina el valor del rango para cada **conjunto de datos**.

____

____

____

8. Si se considera más disperso **al conjunto** de mayor rango. ¿Cuál de los dos **conjuntos de *datos*** es más disperso?

____

____

____

Actividades Grupales

El rango nos proporciona información de la separación o distancia que hay entre los *valores extremos* del **conjunto de datos**. Por sí mismo éste no es un buen indicador del grado de *dispersión u homogeneidad* de un **conjunto de datos**, pero junto con otros *valores* importantes que podemos ubicar entre el **dato menor** y el **dato mayor** (*valores extremos*), pueden ser una **herramienta** útil para describir dicha *dispersión u homogeneidad*.

Un conjunto de *datos* tiene algunos *valores* que son importantes para hacer un análisis global de la forma en que se distribuyen, por ejemplo, los *valores extremos* (*valor mínimo* y *valor máximo*) y la ***mediana***, que tiene la característica de acumular el *50%* de los ***datos*** ordenados del ***conjunto***. A la ***mediana*** también se le conoce en **estadística** como segundo cuartil ya que acumula dos cuartas partes de los ***datos*** del ***conjunto*** ordenado.

Así como la ***mediana*** representa el *valor* que acumula las dos cuartas partes de los ***datos*** ordenados, también podemos encontrar los *valores* que acumulan la cuarta parte y las tres cuartas partes de los ***datos*** ordenados, al primero de ellos se le llama primer cuartil y al otro tercer cuartil.

Identificaremos cada uno de estos elementos como:

x_m: *Valor mínimo*

x_M: *Valor máximo*

Q_1: Primer cuartil

Q_2: Segundo cuartil

Q_3: Tercer cuartil

Con la siguiente información, que corresponde a las respuestas de la pregunta 3 de *los jóvenes* del **área urbana**, podemos observar que **la encuesta** se aplicó a *42 jóvenes*, que el valor mínimo es *1* y que el valor máximo es *5*.

1	1	1	1	1	1	1.25	1.25	1.5	1.5	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2.5	2.5	2.5	2.5
2.5	2.75	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4
4.5	4.5	5	5	5	5						

De acuerdo a la definición de los cuartiles, para calcularlos hacemos lo siguiente:

Primer cuartil: Dividir el número de ***datos*** entre cuatro (o multiplicar el número de ***datos*** por un cuarto), en este caso al dividir *42* entre cuatro resulta *10.5*, como esta división no da un valor entero para garantizar que el valor seleccionado acumule la cuarta parte de los ***datos*** se toma el ***dato*** que está en el lugar *11*, en este caso el primer cuartil es *2 hrs*.

Segundo cuartil: Dividir el número de ***datos*** entre cuatro y multiplicar por dos (o multiplicar el número de ***datos*** por dos cuartos o un medio), en este caso al dividir *42* entre dos resulta igual a *21*, como esta división da un valor entero para garantizar que el valor seleccionado acumule las dos cuartas partes (la mitad) de los ***datos*** se toma el valor central de los ***datos*** que están en el lugar *21* y *22* $\left(\frac{2.5+2.5}{2}=2.5\right)$, en este caso el segundo cuartil es *2.5 horas*.

Tercer cuartil: Dividir el número de ***datos*** entre cuatro y multiplicar por tres (o multiplicar el número de ***datos*** por tres cuarto), en este caso al dividir *42* entre cuatro y multiplicar por tres tenemos *31.5*, recuerda que cuando esta división no da un valor entero para garantizar que el valor seleccionado acumule las tres cuartas partes de los ***datos*** se toma el ***dato*** que está en el lugar *32*, en este caso el tercer cuartil es *3 horas*.

Actividades de Equipo

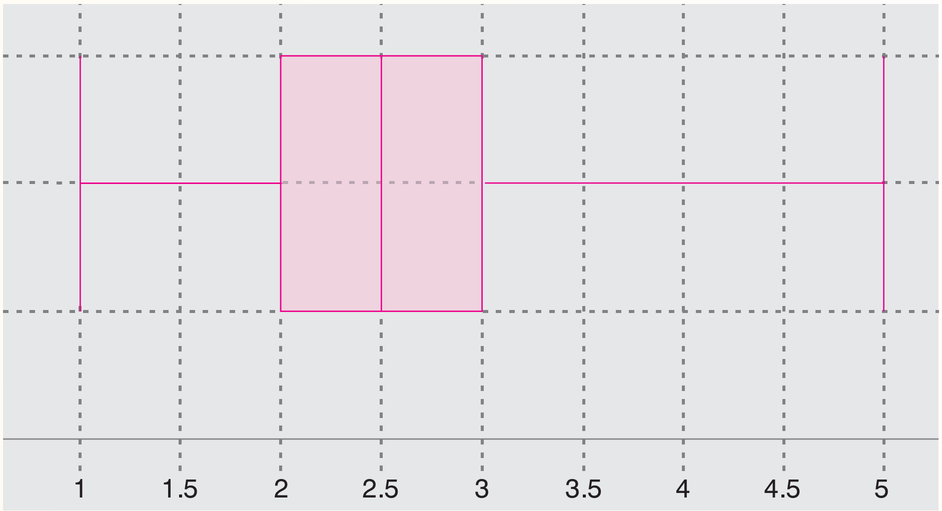
Coloca los ***datos*** obtenidos en la siguiente **tabla**:

Medida	*Valor*
x_m	
Q_1	
Q_2	
Q_3	
x_M	

Tabla 1

Tanto los cuartiles como los valores extremos del ***conjunto***, son elementos muy importantes para representar *gráficamente* la distribución de ***conjuntos de datos***. Con la información de la **Tabla 1** (jóvenes del **área urbana**), podemos hacer la siguiente *gráfica* llamada diagrama de caja o de caja y bigotes.

El diagrama de caja se hace tomando en cuenta lo siguiente: el primer segmento horizontal inicia donde está el valor mínimo y termina donde está el primer cuartil, la parte izquierda de la caja inicia donde está el primer cuartil y termina donde está el segundo cuartil (mediana), la parte derecha de la caja inicia en el segundo cuartil y termina donde está el tercer cuartil, finalmente el segundo segmento horizontal inicia donde está el tercer cuartil y termina donde está el valor máximo. El diagrama correspondiente a la información del *área urbana* es el que se muestra en la *gráfica 1*, para estas *gráficas* la altura de la caja es arbitraria.



Gráfica 1: Tiempo dedicado a las redes sociales en horas. Área Urbana

9. ¿Qué representa el segmento (bigote) izquierdo?

____

____

____

10. ¿Qué representa el segmento (bigote) derecho?

____

____

____

11. ¿Qué puedes decir de la cantidad de ***datos*** que hay a la izquierda de la caja respecto a los que hay a la derecha de la caja?

____

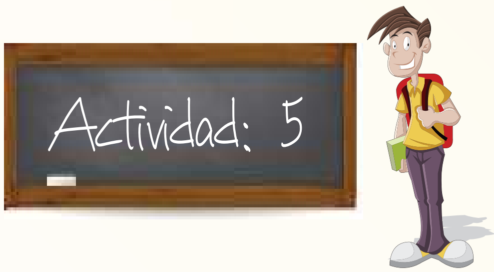
____

____

12. Si te fijas los ***datos*** están organizados en cuatro grupos:

a). ¿En cuál de ellos los ***datos*** están más dispersos?

b). ¿En cuál de ellos los ***datos*** están menos dispersos?



Con la información de la pregunta 3, generada por *los jóvenes* del **área rural**, que se presenta a continuación,

0.5	0.5	0.75	.075	0.75	1	1	1	1	1	1	1
1	1.25	1.25	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	2	2	2	2
2.5	2.5	2.5	2.5	3	3	3	3	3	4	4	4
4.25	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5						

1. Completa la Tabla 2.

Medida	*Valor*
x_m	
Q_1	
Q_2	
Q_3	
X_M	

Tabla 2

2. En el sistema de referencia de la *figura 2*, en el que aparece el diagrama de caja de los ***datos*** correspondientes al área urbana, construye el diagrama de caja utilizando los ***datos*** que corresponden al área rural (ubica tu gráfica en la parte superior) de los tiempos que los *jóvenes* dedican a las **redes sociales**.

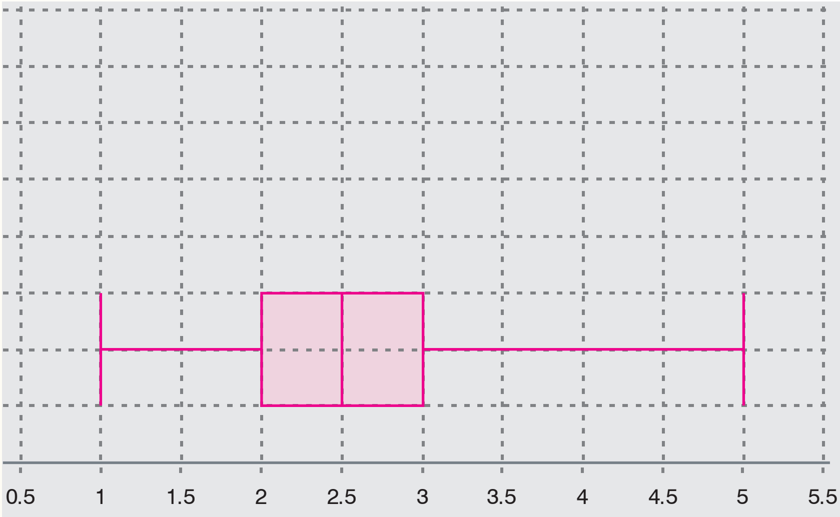


Figura 2 Tiempo dedicado a las redes sociales en horas, área Urbana y Rural

3. ¿Presentan la misma distribución ambos grupos?

____
____
____

4. Describe las diferencias que encuentras entre la distribución de un grupo respecto al otro.

____
____
____

5. Viendo los ***datos*** en conjunto, ¿cuál de los dos grupos presenta mayor dispersión? *Argumenta* tu respuesta.

____
____
____

Actividad de Cierre

Actividades Grupales

En esta **secuencia didáctica**, iniciamos trabajando con la interpretación de valores representativos de un ***conjunto de datos***, realizamos cálculos de dichos valores representativos en diferentes situaciones con el fin de resumir información que se presenta en ***conjuntos de datos***. Lo anterior se realiza con el propósito de tener una idea de cómo pueden comportarse y distribuirse un ***conjunto de datos***, entre otras cosas para poder hacer comparaciones entre ellos.

Para el caso de las *variables nominales* se vio que la única *medida* de tendencia central que se puede obtener es la ***moda***, ya que ésta se define como el ***dato*** o los ***datos*** del ***conjunto*** que aparecen con mayor frecuencia. Para obtener el valor de la *moda*, sólo se necesita contar el número de veces que aparece cada ***dato***, si hay dos ***datos*** o más que aparecen con mayor frecuencia entonces se dice que el ***conjunto de datos*** es *multimodal* (*bimodal* si sólo hay dos *modas*). Es común denotar a la *moda* de un conjunto de ***datos*** como $\hat{X}$.

La *moda* se puede obtener para cualquier tipo de *variable*, pero no en todos los casos tiene sentido utilizarla ya que el contexto es el que determina la pertinencia o no de su uso.

También se presentó una manera de interpretar a la *media* como el *punto de equilibrio* de un ***conjunto de datos***, en el sentido de que la suma de las diferencias a la *media* de todos los valores menores a ella es igual a la suma de las diferencias respecto a la *media* de todos los valores mayores que ella; además, se vio que la forma de calcular el valor de la *media* cuando se tiene un ***conjunto de datos*** sin agrupar es:

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

Donde $x1$, $x2$, $x3$, ..., x_n representan cada uno de los ***datos*** de conjunto (muestra o **población**) y n el número de ***datos del conjunto***.

Cuando los ***datos*** están agrupados, no en intervalos, en el caso de *variables discretas* con pocos valores posibles, la *media* se puede calcular de la siguiente manera:

$$\overline{X}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$$

La diferencia de calcular la *media* de esta forma con respecto a cuándo los ***datos*** no están agrupados, es que en este caso el valor de la *variable* se multiplica por la frecuencia del valor correspondiente.

Además se trabajó con la *mediana* como la medida de tendencia central que está determinada por el ***dato*** que divide exactamente a la mitad el ***conjunto de datos ordenados***, esto es, en el ***conjunto de datos*** ordenados hay el mismo número de ***datos*** *"menores"* y *"mayores"* que la *mediana*. Dependiendo del número de ***datos*** del conjunto, la *mediana* se puede calcular de la siguiente manera:

Si el número de ***datos*** es impar, se ordenan los ***datos*** y se selecciona el que está en el centro, es decir:

$$\breve{X} = x_k \qquad si\ n = 2k - 1$$

Si el número de ***datos*** es par, se ordenan los ***datos*** y se obtiene la *media* de los dos ***datos*** centrales, es decir:

$$\breve{X} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \quad si\ n = 2k$$

En este texto sólo se está centrando la atención en el estudio de tres medidas de *tendencia central*: *media*, *mediana* y *moda*.

También trabajamos con otra **noción estadística** fundamental que complementa la información que una *medida de tendencia central* puede proporcionar sobre la distribución de un ***conjunto de datos***, en particular nos referimos a la *variación*, *dispersión* o *variabilidad* de un ***conjunto de datos***. Se presentaron dos formas de analizar la *dispersión*.

Por una parte se planteó una manera de cuantificar el grado de *dispersión* de un ***conjunto de datos***, para ello definimos el rango como la diferencia entre el ***dato menor*** y ***el mayor***, el cual se calcula de la siguiente manera:

$$R = x_M - x_m$$

donde x_M es el ***dato mayor*** y x_m es el ***dato menor***.

El Rango, por definición, sólo considera los dos valores extremos del ***conjunto de datos*** y *"deja de lado"* el resto, siendo así una medida limitada para medir la *dispersión*.

Otra manera que se presentó para analizar la *dispersión* de un ***conjunto de datos*** es el *ambiente gráfico*, utilizando para ello diagramas de caja y bigotes, en los que es posible describir la *dispersión* de un ***conjunto de datos*** (muestra o **población**) a partir de reagruparlos en *cuatro grupos* que contienen el mismo número de elementos. Para establecer los límites de estos *grupos* de ***datos*** se hace lo siguiente:

El límite inferior del *primer grupo* es el valor mínimo de los datos, que representamos con x_m.

El límite superior del *primer grupo* es el valor que acumula la cuarta parte de los ***datos*** (menores o iguales a él), por esta razón se le llama primer cuartil y lo representamos con Q_1.

El límite inferior del *segundo grupo* es el primer cuartil Q_1.

El límite superior del *segundo grupo* es el valor que acumula dos cuartas parte (un medio o el *50%)* de los ***datos*** (menores o iguales a él), por esta razón se le llama segundo cuartil y lo representamos con Q_2.

El límite inferior del *tercer grupo* es el segundo cuartil Q_2.

El límite superior del *tercer grupo* es el valor que acumula tres cuartas parte de los ***datos*** (menores o iguales a él), por esta razón se le llama tercer cuartil y lo representamos con Q_3.

El límite inferior del *cuarto grupo* es el tercer cuartil Q_3.

El límite superior del *cuarto grupo* es el valor máximo de los datos, que representamos con x_m.

BLOQUE 5

Secuencia Didáctica 3.-

Actividades de Inicio

Situaciones de azar y probabilidad

Actividad: 1

Los “cachitos” de la lotería

A Pedro le gusta comprar “**cachitos**” de *lotería* frecuentemente. En algunas ocasiones al comprar sus “**cachitos**”, el vendedor le comenta que la terminación que el acostumbra jugar no ha salido ganadora en los más recientes *sorteos* y que por tanto ***“su terminación tiene más probabilidad de salir en el próximo sorteo”***.

En los *sorteos* de la ***Lotería Nacional***, se otorga un premio *por terminación* a **los billetes** cuyos *dos, tres y cuatro últimos dígitos* sean iguales al que obtenga el Premio Mayor y a aquellos cuyos *últimos cuatro dígitos* sean iguales al segundo premio (consultar en http: www.lotenal.gob.mx.)

1. ¿Qué puedes decir acerca de la afirmación del vendedor?

____

____

____

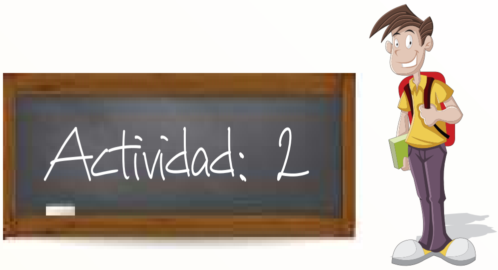
2. ¿Cómo se calculará la ***probabilidad*** de obtener un premio en la ***lotería nacional***? Escribe tus ideas al respecto y después coméntalas con tus compañeros de equipo.

____

____

____

Desarrollo



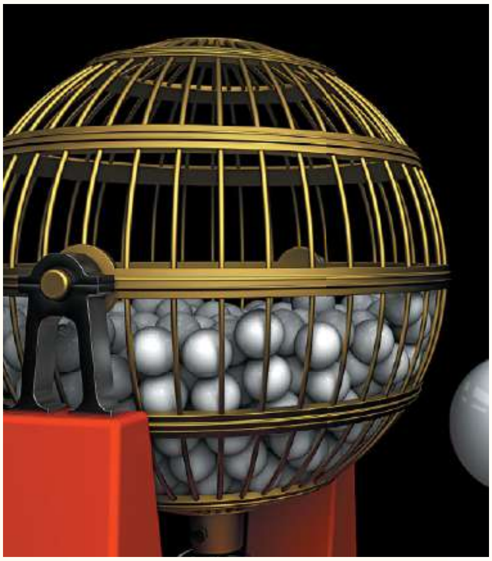
Actividades de Equipo

Cálculo de probabilidades

Las bases para la realización de los ***sorteos*** de la ***Lotería Nacional*** establecen, en el artículo *9*, el instrumental y el procedimiento para la celebración de los ***sorteos***, un fragmento se presenta enseguida:

Instrumental

- *"Una esfera conformada con varillas de latón que se accione mecánicamente para girar sobre su eje, que albergue las* ***bolitas*** *que lleven impresas, en forma individual, el número de cada uno de los* ***billetes*** *que participen en el* ***sorteo*** *de que se trate".*



- *"Una esfera conformada con varillas de latón de menor tamaño que la anterior, que se accione manualmente y que contenga las bolitas que lleven impreso, en forma individual, cada uno de los premios directos…."*

Procedimiento

- La asignación de los premios directos "se hará en primer término y mediante la extracción de una ***bolita*** de la *esfera "A"*, correspondiendo al **número de billete** en ella **impreso**, el premio que en simultánea extracción se haga de la *esfera "B"* y así sucesivamente".

Por ejemplo, en el ***sorteo*** *Mayor* que se juega *los martes*, la emisión es de **60,000 billetes**, "cachitos" con numeración del **00001** al **60000**. El *martes 1 de Octubre de 2013*, la ***bolita*** con numeración impresa correspondiente **al billete 57515** fue extraída de la *esfera "A"* y el premio de *$80,000 pesos* de la *esfera B*, por lo cual ese fue uno de los **billetes ganadores** de ese *sorteo*.

Enseguida, responde primero de *manera individual* y luego comenta *con tus compañeros*, considerando uno de los *sorteos* de ese tipo próximos a realizarse:

a). ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que un **billete premiado** tenga la *numeración* **61234**?

____
____
____

b). ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que *el último dígito* de **un billete** premiado sea menor o igual a **9**?

____
____
____

c). ¿Qué es más probable que ocurra:

i). premio mayor cuyo **billete** tenga *numeración par*
ii). premio mayor cuyo **billete** tenga *numeración impar*

d). ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que el ***último dígito*** del premio principal o premio mayor sea **5**?

____
____
____

e). ¿Cuál es la ***probabilidad*** de obtener un premio por igual terminación a las *dos últimas cifras* del premio mayor, si se compró un **billete** cuya terminación es **95**?

____
____
____

f). ¿Cuál es la *probabilidad* de que se obtenga un premio por haber obtenido los *cuatro últimos dígitos iguales* a los del segundo premio del ***sorteo***?

g). ¿Qué *probabilidad* tiene Pedro de obtener ***reintegro en el sorteo*** de los martes, si siempre compra el mismo **billete**? Los ***reintegros*** son repartidos de la siguiente forma:

- *Para números cuya última cifra sea igual a la última del* primer premio
- *Para números cuya última cifra sea igual a la última del* segundo premio
- *Para los números cuya última cifra sea igual la última del* tercer premio

h). ¿Cuál es la *probabilidad* de que Pedro obtenga ***triple reintegro***, esto es, los tres premios terminan en el mismo *dígito*?

i). Y si cambiara de **billete**, ¿se modificaría la *probabilidad* de los *incisos anterior d y e*?

Actividades de Equipo

Posibilidad y probabilidad

De acuerdo a las características del ***sorteo***, planteadas en la Actividad anterior, las siguientes son numeraciones posibles de **billetes**. Para cada grupo de números, expresa, al menos una *característica común:*

a). 33333, 44444, 55555

b). 12345, 23456, 34567

c). 34568, 21678, 90548

d). 45678, 57801, 89345

e). 44567, 22983, 19018

f). Si tuvieras que escoger alguno de los **billetes** cuya numeración sea como la de los *incisos anteriores*, ¿cuál seleccionarías? *Argumenta* tu respuesta y luego discútela con tus compañeros.

Actividades de Equipo

Azar y Genética

¿Por qué los hijos se parecen a la madre en algunos rasgos y en otros se parecen al padre? ¿Por qué en ocasiones el niño se parece más a su abuelo que a su padre? ¿Por qué ciertos caracteres no aparecen en una generación y en una siguiente vuelven a aparecer?

Las leyes de Mendel explican y predicen este tipo de fenómenos. Se basan en cuatro principios:

- Factores en pareja: *Los caracteres genéticos están controlados por factores que se encuentran en pares en cada organismo. Pueden ser de dos factores iguales o dos distintos.*
- Dominancia: *Para un caracter determinado, cuando los dos factores responsables de dicho caracter que se encuentran en un individuo son distintos, uno de los factores (llamado dominante) domina sobre el otro (llamado recesivo).*
- Segregación: *En la formación de los gametos, los factores emparejados se separan al azar, de forma que cada gameto recibe uno u otro con igual probabilidad.*
- Transmisión: *Si consideramos dos caracteres, cada uno determinado por sus dos factores, estos pares de factores que segregan se transmiten a los gametos independientemente el uno del otro.*

La primera Ley de Mendel establece que al cruzar dos líneas puras distintas para un caracter, el 100% de los descendientes serán iguales entre sí e iguales al parental dominante. Esto se explica en términos del principio de factores en pareja y de dominancia.

En el **cuadro siguiente** podemos ver las **combinaciones** posibles de los factores heredados en una **primera generación**. Cada ***uno de los padres*** tiene un factor a heredar, ***pero uno de ellos domina sobre el otro***, así los hijos tendrán el rasgo dominante pero podrán heredar en una **siguiente generación** el carácter recesivo.

Factor hereditario ***con caracteres iguales*** *Color de ojos.*		Padre	
		Negro (N)	*Negro (N)*
Madre	*Azul (a)*	*Na*	*Na*
	Azul (a)	*Na*	*Na*

1. Con base en la **tabla** y considerando que el **color negro** es dominante **sobre el azul**:

   b). ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que una pareja con las características de la **tabla anterior** tenga hijos con **ojos de color azul**?

   ____
   ____
   ____

   c). ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que una pareja con las características de la **tabla anterior** tenga hijos con **ojos de color negro**?

   ____
   ____
   ____

La segunda ley de Mendel establece que en la formación de los gametos, los factores emparejados se separan al azar, de forma que cada gameto recibe uno u otro con igual probabilidad. Así, al cruzar dos individuos portadores de dos factores distintos podrán tener descendencia con rasgos similares a los de sus abuelos.

Factor hereditario ***con caracteres distintos*** *Color de ojos: Negro* y *Azul*		Padre	
		Negro (N)	*Azul (a)*
Madre	*Negro (N)*	*NN*	*Na*
	Azul (N)	*Na*	*aa*

1. Con base en la **tabla**, ¿cuál es la ***probabilidad*** de que una pareja con las características de la **tabla anterior** tenga hijos con **ojos de color azul**?

____

____

2. Con base en la **tabla**, ¿cuál es la ***probabilidad*** de que una pareja con las características de la **tabla anterior** tenga hijos con ojos de color negro?

____

____

> ***Finalmente**, **la tercera ley de Mendel**, basada en el principio de transmisión independiente, establece que los caracteres son independientes y se combinan al azar. De este modo si agregamos a la tabla anterior el factor hereditario tipo de cabello, rizado dominante sobre el lacio, se obtendría la siguiente:*

Factores hereditarios *con caracteres distintos* *Color de ojos: Negro y azul* *Tipo de Cabello:* Rizado y Lacio			Padre			
			Negro (N)		*Azul (a)*	
			Rizado (R)	*Lacio (l)*	*Rizado (R)*	*Lacio (l)*
Madre	*Negro (N)*	*Rizado (R)*	*NNRR*	*NNlR*	*a NRR*	*a Nl R*
		Lacio (l)	*NNRl*	*NN ll*	*NaRl*	*N a ll*
	Azul (a)	*Rizado (R)*	*Na RR*	*N a l R*	*a a RR*	*a a l R*
		Lacio (l)	*Na Rl*	*Na ll*	*a a Rl*	*a a ll*

1. Con base en esta **última tabla**, ¿cuántas combinaciones de caracteres son posibles?

____

____

____

2. ¿Cuáles de esas combinaciones dan origen a un descendiente con *cabello rizado* y ojos negros?

____

____

____

3. ¿Cuál es la ***probabilidad***, en ese caso, de que un descendiente tenga *cabello rizado* y **ojos negros**?

____
____
____

4. ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que un hijo de **una pareja** con esas características tenga cabello lacio y **ojos azules**?

____
____
____

5. ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que un hijo de **una pareja** con esas características no tenga cabello lacio ni **ojos azules**?

____
____
____

En párrafos anteriores se planteó que cada uno de los pares de caracteres se hereda con igual ***probabilidad***, así la ***probabilidad*** de heredar el caracter **color de ojos negro** es $\frac{1}{2}$ tanto para **el padre** como para **la madre** y similarmente para el caracter **color de ojos azules**. Lo mismo ocurre con los caracteres cabello rizado y cabello lacio. Utilizando esto puedes verificar que la ***probabilidad*** de una combinación en particular se puede calcular multiplicando las ***probabilidades*** individuales de cada carácter, por ejemplo, la ***probabilidad*** de que el hijo de **una pareja** como la descrita en la **tabla** tenga **ojos azules** y cabello lacio se puede expresar como:

$$p(aall) = p(a)p(a)p(l)p(l) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Actividad: 5

Actividades de Equipo

Servicio Militar y azar

*La **Ley del Servicio Militar** establece la obligatoriedad de los mexicanos de realizar el servicio militar, así como el procedimiento a seguir por quienes deben registrarse para realizar dicha obligación. Los interesados primero se inscriben al proceso y posteriormente participan en un **sorteo** que determinará la forma en que cumplirán.*

Hay dos posibilidades:

- ***Bola blanca,*** significa que cumplirá con el ***servicio militar*** en situación de "ENCUADRADO", por lo que deberá asistir al adiestramiento todos los sábados que el calendario establezca para tal fin.

- *Bola negra,* significa que cumplirá el ***servicio militar en*** situación "A DISPONIBILIDAD", en este caso no es necesario asistir al adiestramiento.

El Artículo 46 de la citada ley establece:

*"**Los sorteos** serán públicos, verificándose en presencia de los inspectores militares que en cada caso se nombren; una vez reunida para el **sorteo** la Junta Municipal de Reclutamiento hará comparecer a todos los individuos que aparezcan en las listas respectivas, por sí o por su representante legítimo cuando haya causa justificada para la no presencia. Reunidos los interesados, la Junta les hará saber el derecho que les asiste para nombrar de entre ellos mismos, tres representantes durante el acto del sorteo, con el único objeto de garantizar la legalidad del mismo. Nombrados los representantes del contingente para la operación del sorteo, éste se llevará a cabo en la forma siguiente: **a cada uno de los miembros de la Junta Municipal de Reclutamiento y a cada uno de los tres representantes del contingente, se les proporcionará una lista del personal a sortear; en una ánfora cubierta se pondrán tantas** bolas de color **como conscriptos se hayan asignado a esa región, más un veinte por ciento; el resto hasta llegar el número de los participantes se completará con bolas blancas**. Acto seguido el presidente de la Junta irá nombrando de la lista los enlistados y simultáneamente un menor de diez años sacará una bola del ánfora, formándose en seguida las listas de conscriptos que se notificará a los presentes".*

En este contexto se le llama **conscripto** a quien recibe *la instrucción militar obligatoria* (soldado por ese período de tiempo).

1. En la IV Zona Militar ubicada en Hermosillo, Sonora, participaron en el ***sorteo*** en el año *2012* alrededor de *2500* jóvenes. Suponiendo que esta cifra se presentara para el *2016*, año en el que prestarán su servicio militar los jóvenes nacidos en *1998* y que entonces se destinen *300* lugares para **conscriptos**.

   a). ¿Cuántas bolas de color (negras) se deberán depositar en el **ánfora** antes de realizar el *sorteo*?

   ____
   ____
   ____

   b). ¿Cuántas **bolas blancas** se deberán depositar en el ánfora antes de realizar el *sorteo*?

   ____
   ____
   ____

2. ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que el primer enlistado obtenga **bola blanca** o **bola negra**?

   ____
   ____
   ____

3. ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que en el ***sorteo*** el primer enlistado obtenga **bola negra**?

   ____
   ____
   ____

4. ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que en el ***sorteo*** el primer enlistado obtenga **bola blanca**?

   ____
   ____
   ____

5. ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que a los primeros dos enlistados les toque **bola negra**?

   ____
   ____
   ____

6. ¿Cuál es la ***probabilidad*** de que a los dos primeros enlistados les toque **bola blanca**?

   ____
   ____
   ____

7. ¿Y de que los tres primeros sorteados obtengan exactamente **dos bolas blancas**?

   ____
   ____
   ____

Actividad de Cierre

Actividad: 6

Actividades Grupales

Cierre de la secuencia

En muchas de nuestras acciones cotidianas nos enfrentamos a la incertidumbre y tomamos decisiones basadas en la ***posibilidad*** o ***probabilidad*** de ocurrencia de algo de una manera intuitiva e incluso sin darnos cuenta de ello. ***Expresiones*** como *“al parecer lloverá en los próximos días”*, *“posiblemente los yaquis de Ciudad Obregón sean los campeones del béisbol del pacífico en esta temporada”*, *“es muy probable que apruebe todos los exámenes durante el semestre”*, *“es casi seguro que las tasas de interés bancario aumentarán en los próximos meses”*, ejemplifican situaciones comunes que manifiestan la ausencia de certeza absoluta sobre la ocurrencia de algo y las explicamos en términos del ***azar*** o como **sucesos aleatorios**.

Algunos fenómenos de la naturaleza se pueden predecir con **mucha precisión**, como los *eclipses*, otros, como *los sismos* o *terremotos* son **muy complejos de predecir** y cuando se hace el nivel de certeza es muy bajo. En este último ejemplo, la ocurrencia de un **fenómeno** de este tipo puede traer consecuencias muy graves y por lo tanto la sola advertencia de la ***posibilidad de ocurrencia*** aun cuando sea remota debe de considerarse para la toma de decisiones.

Existen **diversas situaciones** en las que se puede **estimar o calcular** la ***probabilidad de ocurrencia de un evento***. Para expresar numéricamente la ***probabilidad* se utiliza una escala** que va desde **cero** hasta **uno**. El **0** indica la certeza de que algo no ocurrirá, por ejemplo, que se obtenga un **7** en el lanzamiento de un **dado normal** (*numerado del **uno** al **seis***), y el **1** indica la certeza absoluta de que algo ocurrirá, por ejemplo, en el mismo experimento la ***probabilidad*** de que se obtenga un *número menor que* **7**. Los valores para la ***probabilidad*** se expresan ya sea utilizando *fracciones, decimales o porcentajes*.

En el enfoque frecuencial o frecuentista, la ***probabilidad*** se estima mediante **la frecuencia de ocurrencia** de los acontecimientos en el pasado, por ejemplo, para estimar la ***probabilidad de lluvia*** en los próximos días se tiene que recurrir a los registros históricos de lluvia en años anteriores en condicione similares.

En el enfoque clásico las ***probabilidades*** se determinan sin que haya necesidad de recurrir a la historia del evento. Es este **enfoque** el que se ha desarrollado a lo largo de las *Actividades* de la presente **secuencia**. En este **enfoque** la ***probabilidad*** se determina considerando los posibles resultados de un experimento específico. Por ejemplo, en el lanzamiento de **un dado normal**, la ***probabilidad de ocurrencia*** de cada una de **las caras** es $\frac{1}{6}$, que indica un resultado favorable a cada **cara** de los **seis** resultados posibles que corresponden al total de **caras** del **dado**, esta asignación de la ***probabilidad*** se basa en el supuesto de que todos los eventos simples asociados al experimento tienen igual ***probabilidad de ocurrencia***.

En este breve texto se han utilizado algunos términos como: *experimento aleatorio, evento, espacio muestra o muestral, fenómeno, posibilidad, incertidumbre, azar, aleatorio.* En la biblioteca de tu escuela o en internet consulta cada uno de los *términos anteriores* y escribe una definición para cada uno de ellos y otros que les indique su profesor.

a). Azar	*b). Aleatorio*	*c). Experimento aleatorio*

d). Evento	*e). Espacio muestral*	*f). Fenómeno determinista*

g). Fenómeno aleatorio	*h). Incertidumbre*	*i). Posibilidad*

En el enfoque clásico la *probabilidad de ocurrencia* de un evento A, al realizar un *experimento aleatorio*, *se define como el cociente del número de casos favorables al evento A entre el número de casos posibles al realizar el experimento o también número de elementos del espacio muestral asociado a dicho experimento.*

$$p(A)=\frac{\textit{Número de casos favorables a } A}{\textit{Número de resultados posibles del experimento}}$$

Esta definición supone igual *probabilidad* de todos los elementos del *espacio muestral* y además que éste debe contener un número finito de elementos.

La probabilidad cumple con algunas propiedades básicas que se han utilizado en las Actividades anteriores:

1. $0 \leq p(A) \leq 1$, esto es la *probabilidad* es un valor mayor o igual a cero y menor o igual a *1*. Cuando es cero es seguro que no ocurrirá y cuando es *1* se dice certeza absoluta.

2. *Ley aditiva de la probabilidad*: Si A y B son dos eventos del mismo espacio muestral, entonces:

$$p(A \cup B)= p(A)+p(B)-p(A \cap B),$$

esto es, la *probabilidad* de que ocurra al menos uno de los dos eventos (A y B) se puede calcular sumando la *probabilidad de ocurrencia* de cada evento y restando la *probabilidad* de que ambos eventos ocurran simultáneamente.

3. *Ley multiplicativa de la probabilidad*:

   La ***probabilidad*** de que ocurran simultáneamente **dos eventos** distintos dependerá de la relación entre **los eventos dados**. En general ésta queda expresada por:

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B/A)$$

donde $p(B/A)$ es la ***probabilidad*** de que ocurra B condicionada a la ocurrencia de A .

Para el caso en que **los eventos** A y B sean independientes entonces, la expresión se reduce a:

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B),$$

ya que la ***probabilidad*** de que B ocurra no depende de que ocurra o no **el evento** A.

Sección de problemas

1. Completa la siguiente **tabla**, escribiendo en la columna correspondiente lo que falta.

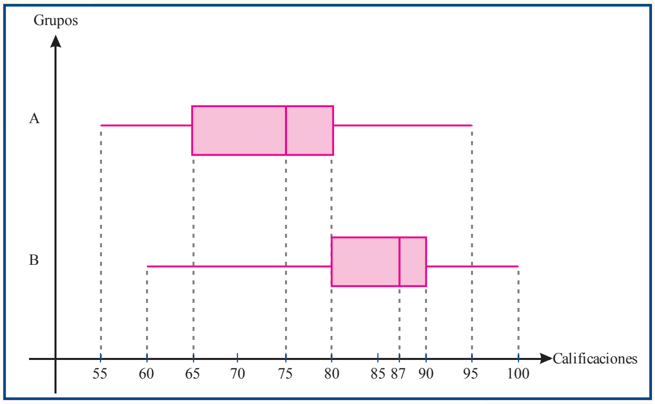
Variable	*Tipo de Variable*
Peso	
Estatura	
Número de hermanos	
Cantidad a pagar en el recibo de la luz	
Nivel del tabulador de un trabajador	
Número de expediente de la escuela	
	Continua
	Discreta
	Nominal
	Ordinal

2. En una agencia de publicidad desean saber las preferencias de los jóvenes del estado de Sonora, de entre *17* y *25* años, respecto a los diferentes **tipos de comida rápida**. Para ello realizaron **2500 llamadas a teléfonos celulares** al mismo número de jóvenes sonorenses para preguntarles cuál es **la comida rápida que prefieren** consumir normalmente. A partir de la información que se presenta en la situación, responde lo siguiente:

¿Cuál es la *variable* de interés en el estudio?	¿Qué tipo de *variable* es?	¿Cuál es la población física?

¿Cuál es la muestra física?	¿Cuál es la muestra *estadística*?	Para obtener **un valor representativo** de la *variable* de interés en el estudio, ¿utilizarías la *media*, la *mediana* o la *moda*? *Argumenta* tu respuesta.

3. Los siguientes diagramas de caja y bigotes resumen la información de las calificaciones del segundo parcial de los estudiantes de dos grupos (A y B) de **Matemáticas 2**.



Para el **grupo A** determina el valor de:						
Calificación mínima	**Calificación máxima**	Primer cuartil	Segundo cuartil	Tercer cuartil	Mediana	Rango

¿Cuál es el rango de las **calificaciones** del **grupo B**?

Determina la *mediana* del **grupo B**.

¿Cuál de los **dos grupos** presenta mayor dispersión respecto a la **calificación** de los estudiantes?

Describe:	
La distribución que tienen las **calificaciones** del **grupo A**	**La distribución** que tienen las **calificaciones** del **grupo B**

4. El Índice de Masa Corporal (IMC), el cual se obtiene relacionando el peso (kg) con la altura (m) de las personas de la siguiente manera: $IMC=\frac{P}{E^2}$, Donde P representa el peso y E la estatura.

El criterio que se sigue para clasificar a un individuo aparece en la tabla siguiente:

Índice de Masa Corporal	Se clasifica a la persona como:
< 18.5	Con peso insuficiente
18.5 - 24.9	Normal
25-29.9	Con sobrepeso
≥ 30	Obesa

Clasificación del estado nutricional de un individuo, según el IMC.

Tomando como base la información proporcionada, organiza los *datos* de las siguientes muestras, mismas que corresponden a dos grupos de estudiantes del Colegio de Bachilleres de un plantel de Hermosillo. Para tu organización formula algunas preguntas e incluye las siguientes:

¿Hay problemas de obesidad en alguno de los grupos? ¿Dónde es mayor?	¿Dónde es mayor el problema de obesidad, en *hombres* o en *mujeres*?

¿Se identifica en algún grupo problemas de peso insuficiente?	¿En qué grupo de edad el problema de obesidad es mayor?

Escribe un reporte de los resultados obtenidos. Cuando hayas concluido **esta tarea**, organízate en equipo para que recolecten ***datos*** de **un grupo de tu plantel**, los organizan como en las **tablas** que presentamos en **este problema**, elaboran la *distribución de frecuencias y las gráficas* que consideren pertinentes y finalmente utilícenlas para elaborar un reporte acerca **del problema de obesidad en tu escuela.**

MUESTRA 1

Peso (Kg)	*Estatura (m)*	*Edad (Años cumplidos)*	*Género*
98	1.6	18	M
61	1.6	17	M
112	1.86	17	H
73	1.75	17	H
48	1.56	17	M
46	1.63	18	M
51	1.57	17	M
60	1.7	17	H
80	1.7	18	H
50	1.62	17	M
78	1.65	17	M
48	1.61	18	M
62	1.64	17	M
75	1.72	18	H
104	1.84	17	H
67	1.7	17	H
49	1.6	18	M
79	1.71	17	H
81	1.69	17	H
61	1.6	17	M
49	1.59	17	M
76	1.68	18	H
70	1.7	17	H
80	1.63	17	M
53	1.69	18	M
50	1.64	17	M
62	1.66	17	M
64	1.62	17	M
75	1.61	18	H
88	1.87	17	H

MUESTRA 2

Peso (Kg)	*Estatura (m)*	*Edad (Años cumplidos)*	*Género*
67	1.59	18	M
90	1.8	18	H
71	1.62	17	M
64	1.64	17	M
72	1.73	18	H
83	1.76	17	H
89	1.81	18	H
64	1.71	17	M
48	1.59	17	M
50	1.66	17	H
60	1.62	17	M
90	1.85	18	H
80	1.7	18	H
60	1.65	15	H
75	1.64	18	H
50	1.4	15	M
82	1.8	17	H
45	1.62	17	M
63	1.71	17	H
63	1.71	17	H
79	1.6	18	M
68	1.7	18	M
60	1.63	17	M
80	1.75	18	M
45	1.6	17	M
65	1.64	17	M
60	1.62	17	M
60	1.59	17	M
66	1.55	17	M
66	1.8	17	H

5. A continuación se plantean algunas situaciones, coloca sobre la línea de la derecha si representa un *evento determinista* o *aleatorio*:

Evento	*Tipo de evento*
El dólar mañana estará a la venta a $13.25 en el banco MEX.	
Mañana lloverá a las 15:00 horas.	
La inflación de este año será del 4.5%.	
Un alumno que tiene promedio final de 88 en el curso de **Matemáticas 2**, aprobará el curso.	
Si lanzamos una moneda de diez pesos girando hacia arriba en la cancha de basquetbol, ésta caerá al piso.	
Al lanza una moneda de diez pesos la cara que quede hacia arriba es águila.	
Si Fernanda compró un boleto del *sorteo* de la Universidad de Sonora, tiene oportunidad de obtener el primer premio.	
Si Paola compró un boleto del *sorteo* de la Universidad de Sonora ganará un premio.	
Exactamente 30 **estudiantes** aprobarán el curso de Matemáticas 2.	

6. Para realizar una rifa de un teléfono celular, de los más modernos, se hicieron **1000** boletos, numerados del **000** al **999**,

¿Qué número obtendrá el premio?	Realizar el sorteo, ¿es un evento determinista o aleatorio?	Si fuera el caso, ¿cuál es el espacio muestra o muestral?

Determina la ***probabilidad*** de que el número del **boleto** ganador sea:						
Par	Impar	Mayor de *800*	Entre *300* y *500*	Impar o mayor que *800*	Par o entre *300* y *500*	Que tenga iguales los *tres dígitos*

7. En un juego de dados normales suponga que se lanzan un par al mismo tiempo. Para cada inciso, determina la ***probabilidad*** de que la suma de puntos de las caras que quedan hacia arriba sea:

a). 7	*b). 11*	c). Mayor de 7	*d). Mayor a 3 pero menor a 10*

8. Para la presentación de un proyecto, un grupo ha decidido formar varios equipos de entre algunos *estudiantes* seleccionados por ellos mismos y realizar un ***sorteo*** para determinar qué equipo se hará cargo de la presentación. Si en **el grupo** de *estudiantes* seleccionados hay *4 hombres* y *4 mujeres*, determina la ***probabilidad*** de que:

El equipo esté formado únicamente por *mujeres*	En el equipo haya **dos hombres** y dos mujeres	Haya **un hombre** y tres mujeres	Haya una mujer y **tres hombres**

Autoevaluación

El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al BLOQUE se describe **lo que se espera que aprendas**; *léelo con detenimiento*, ***luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida***. La idea es que al finalizar toda la sección de Autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

Problema 1.

La siguiente **información** representa los tiempos de espera (en horas) de **dos grupos de clientes** que acuden a **solicitar algún servicio o aclaración** a las instalaciones de la empresa correspondiente.

Tiempos de espera de la empresa T

0.5	0.5	0.5	0.75	0.75	0.75	0.75	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
0.8	0.8	0.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.2	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.25
1.25	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1.6	1.6	2	2	2	2	2.4	2.4	2.4	2.4	2.5	2.5

Tiempos de espera de la empresa M

0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	1	1	1	1	1	1	1
1.25	1.25	1.25	1.25	1.25	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5

*¿Cuál es la variable de interés en este **estudio**?*	*¿Qué tipo de variable es?*	***La información** que se presenta, ¿es una **población** o una muestra?*

Reflexiones relacionadas con el problema 1:

¿Tuviste algún ***problema*** para determinar la *variable* y el tipo de *variable* que es?
Si tuviste alguna ***dificultad*** para hacerlo, describe en que consistió ***dicha dificultad***.

¿Se te presentó alguna ***dificultad*** para distinguir si los ***conjuntos de datos*** representan una muestra o una población? Si es el caso, describe en que ***consiste la dificultad***.

Problema 2.

Para el ***conjunto de datos*** de la empresa M del **problema** ***1***, determina:

El valor de la moda

El valor de la mediana

El valor de la media

El valor del rango

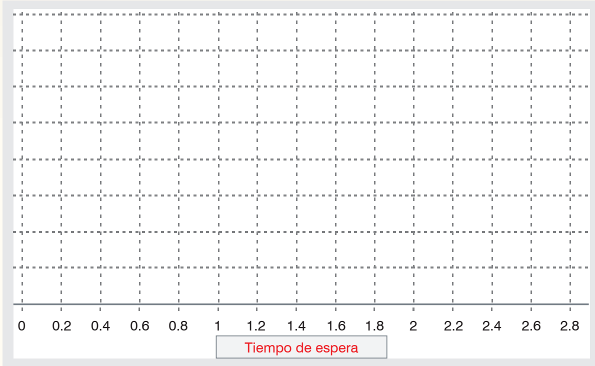
Reflexiones relacionadas con el problema 2:

Si tuviste alguna *dificultad* para obtener el valor de las **medidas solicitadas**, describe en que se te **dificultó**.

¿Siempre es posible obtener el valor de la *moda*, *mediana* y *media*? ______
Si tu respuesta es negativa, esto es, que no siempre sea posible, **ejemplifícalo**.

Problema 3.

Utilizando los tiempos de espera de los clientes **de ambas compañías**, elabora *los diagramas de caja* correspondientes en el siguiente **sistema de referencia** y después responde las preguntas.



Para la empresa T, ¿entre qué cuartiles están menos dispersos *los datos*?

Para la empresa T, ¿entre qué cuartiles están más dispersos *los datos*?

¿En cuál de las dos empresas los tiempos de espera son menos dispersos?

Viendo los ***datos*** globalmente, ¿en cuál de las dos empresas **el cliente** tiene que esperar menos tiempo?

¿**Se te dificulta** la interpretación de los diagramas de caja y bigotes? Explica

Reflexiones relacionadas con el problema 3:

¿Qué hiciste para construir los diagramas de caja y bigotes?

¿Qué representan las diferentes secciones del diagrama de caja y bigotes?

¿Ya habías estudiado en secundaria los diagramas de caja y bigotes?

Escribe lo que resultó nuevo para ti en este BLOQUE sobre los diagramas de caja y bigotes.

Problema 4.

En el contexto de juegos de dados y monedas, determina *la probabilidad de ocurrencia* de cada uno de los eventos señalados:

Que en cuatro lanzamientos consecutivos de un dado normal se obtenga:

Todas las caras con cantidad de puntos par

Igual cantidad de puntos en todos los lanzamientos

Al menos un tres en los cuatro lanzamientos

En cinco lanzamientos consecutivos de una moneda normal.

¿*Cuál es la probabilidad* de obtener águila en todos los lanzamientos?

¿*Cuál es la probabilidad* de obtener exactamente dos águilas en los cinco lanzamientos?

¿*Cuál es la probabilidad* de obtener exactamente dos sellos en los cinco lanzamientos?

¿*Cuál es la probabilidad* de obtener al menos dos sellos en los cinco lanzamientos?

Reflexiones relacionadas con el problema 4:

¿Resolviste todas las preguntas formuladas para *cada juego*?

¿Qué hiciste para obtener todos los resultados posibles en cada experimento aleatorio?

¿Utilizaste **algún recurso** de los siguientes para ayudarte en la resolución?

Si tu respuesta es *negativa*, explica por qué no los utilizaste.	Un diagrama de árbol	Una tabla

Reflexiones generales relacionadas con el **BLOQUE 5**:

¿Tuviste problemas para interpretar correctamente los planteamientos que se presentan en las actividades?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿El trabajo en equipo te ayuda a clarificar dudas?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Participaste activamente en las discusiones grupales que promovió el profesor?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Utilizaste recursos tecnológicos (calculadora y/o computadora) al trabajar con las actividades?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Asististe a asesoría cuando se te presentó alguna dificultad al trabajar con las actividades en clase o con las que te dejaron de tarea?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre
¿Expresaste alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades a tus compañeros o al profesor?			
Nunca	Muy pocas veces	Frecuentemente	Siempre

Menciona al menos tres aspectos que te hayan parecido los más relevantes del presente **BLOQUE**.

- ♣•
- ♣•
- ♣•
- ♣•

GLOSARIO
DE TÉRMINOS UTILIZADOS

A

Ángulo:

Figura plana formada por *dos segmentos* de recta que se cortan en un punto. El punto donde *se cortan* se llama *vértice*.

Ángulos correspondientes:

Ángulos iguales que están en la misma posición respecto a la transversal y a cada una de las paralelas.

Ángulos congruentes:

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida

Ángulos consecutivos:

En un polígono, dos ángulos son consecutivos si tienen un lado común.

Ángulos alternos:

Son aquellos que están situados en distintas paralelas y en distintos lados de cada una de ellas, a la vez que se sitúan en distintos lados de la secante o transversal. Si dichos ángulos están entre la paralelas se llaman alternos internos, si están en el exterior de las paralelas, se denominan alternos externos.

Ángulos adyacentes:

Son aquellos que tienen el *vértice común*, un lado común, pero no tienen puntos comunes en su interior.

Ángulo de elevación:

Es el formado por la horizontal y la línea que une a un observador con un objeto situado por encima del nivel de observación.

Ángulos opuestos por el vértice:

Tienen el vértice común y los lados de uno son, correspondientemente, colineales a los del otro.

Ángulo llano:

Es aquel cuyos lados son *colineales,* y el vértice es su único punto común.

Ángulos suplementarios:

Son los ángulos adyacentes que forman un ángulo llano, cuya suma es 180 grados.

Ángulo central:

Es el ángulo cuyo vértice es el centro de una circunferencia.

Ángulos complementarios:

Son aquellos cuya suma es 90 grados.

Ángulo inscrito:

Ángulo cuyo vértice pertenece a una circunferencia y cuyos lados son cuerdas de la misma.

Ángulo recto:

Ángulo cuyos lados son perpendiculares entre sí.

Ángulo agudo:

Ángulo cuya medida es menor a la de un ángulo recto.

Ángulo perigonal:

Ángulo que mide lo mismo que cuatro ángulos rectos, “es decir“ 360°.

Ángulo obtuso:

Ángulo que mide más que un ángulo recto, pero menos que un ángulo llano, "es decir" mide más de 90º, pero menos que 180º.

Ángulo de depresión:

Ángulo formado por la horizontal y la línea que une a un observador con un objeto situado por debajo del nivel de observación.

Apotema:

En un polígono regular, la apotema es el segmento que va desde el centro del polígono al punto medio de uno de sus lados.

Arco:

En geometría es una parte de una circunferencia.

Área:

Es una cantidad que expresa el tamaño de una superficie bidimensional, usualmente una región limitada por una curva cerrada.

Asimétrico:

Una figura geométrica es asimétrica cuando no presenta algún tipo de simetría.

Altura de un triángulo:

Es un segmento de recta que parte perpendicularmente desde un vértice hasta el lado opuesto o a su prolongación.

Aleatorio:

En probabilidad, un evento o proceso es *aleatorio* si no es posible predecir el siguiente resultado o el siguiente paso del proceso.

Azar:

Decimos que un experimento o evento por azar esta sujeto al azar cuando no es posible predecir su resultado.

B

Base de un triángulo:

Es el lado opuesto al vértice desde el cual se traza la altura.

Bimodal:

Se dice de un conjunto de datos que tiene dos modas.

Bisectriz de un ángulo:

Es una recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

C

Cateto:

En geometría, es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo, los que conforman el ángulo recto.

Cateto opuesto:

Lado opuesto a un ángulo agudo tomado como referencia.

Cateto adyacente:

Lado adyacente a un ángulo agudo tomado como referencia.

Centro:

El centro de una figura es el punto de simetría de la misma.

Círculo:

Figura geométrica plana determinada por una circunferencia, esto es; la región del plano interior a una circunferencia.

Circuncentro:

Punto de intersección de las mediatrices de los lados de un triángulo.

Circunferencia:

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan (están a la misma distancia) de un punto fijo o llamado centro de la circunferencia, dicha distancia recibe el nombre de radio.

Colineal:

Se dice que varios puntos son colineales cuando están sobre una misma recta.

Cuadrado:

Polígono regular de cuatro lados.

Cuadrilátero:

Polígono de cuatro lados.

Cuartil:

Valores que dividen a las mediciones, realizadas en cuatro partes iguales.

Cuerda:

Segmento que une dos puntos de una circunferencia.

Congruencia de triángulos:

Dos triángulos son congruentes si tienen todos sus lados y ángulos respectivamente iguales.

D

Decágono:

Polígono de diez lados. El decágono regular tiene todos sus lados y ángulos iguales.

Diámetro:

La mayor de las cuerdas de una circunferencia.

Diagonal de un polígono:

Es el segmento de recta que une dos vértices no consecutivos del polígono.

Diagrama:

En matemáticas un diagrama es una representación gráfica de la relación entre varios objetos matemáticos.

Desigualdad del triángulo:

En un triángulo que se encuentra en un plano, la suma de las longitudes de dos de sus lados es siempre más grande que la longitud de su tercer lado.

E

Eratóstenes:

Matemático, astrónomo y geógrafo nacido en Cirene en el año 276 A.C., es célebre por la estimación tan precisa que obtuvo en la medición del perímetro de la tierra.

Equilátero:

Un polígono es equilátero si todos sus lados tienen la misma medida.

Estadística:

Rama de las matemáticas que se encarga de la recolección, representación, análisis, interpretación y aplicaciones de datos numéricos a través de un conjunto de técnicas con rigor científico. *La estadística se divide en inferencial y descriptiva.*

Estadística descriptiva:

Rama de la estadística que se dedica a encontrar formas de representar información numérica de una forma comprensible y útil en forma de tablas, gráficas y diagramas para extraer de ellas información sobre los datos.

Espacio muestral:

El espacio muestral de un evento aleatorio consiste en el conjunto de todos los posibles resultados de ese evento, de tal forma que a cada resultado le corresponda un elemento o punto del espacio muestral y a cada elemento del espacio muestral le corresponda un resultado.

Estadística inferencial:

Rama de la estadística que se dedica a estimar valores descriptivos de la población a partir de la información que se tiene de una muestra de la misma usando algunos parámetros conocidos como estadísticos.

Evento:

Es un conjunto de resultados posibles, subconjunto del espacio muestral.

F

Figuras iguales:

Dos figuras geométricas son iguales si una puede superponerse en la otra de manera que ambas coincidan en todos sus puntos.

G

Geometría:

Rama de las matemáticas que se encarga del estudio de las propiedades de los puntos, las líneas, ángulos, superficies y sólidos.

Grado:

Unidad de medida de ángulos, definida a partir de la división de la circunferencia en 360 partes iguales.

H

Heptágono:

Polígono de 7 lados.

Hexágono:

Polígono de 6 lados.

Hipotenusa:

Lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo.

I

Incentro:

Es el punto de intersección de las tres bisectrices interiores de un triángulo.

Intersección (Geometría):

Conjunto de puntos donde se intersecan dos cuerpos o figuras geométricas.

L

Lado:

En un polígono, un lado es un segmento de recta cuyos extremos son dos vértices consecutivos del polígono.

Ley de los cosenos:

El cuadrado de la longitud de uno de los lados de un triángulo, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble del producto de la longitud de estos lados por el coseno del ángulo que se forma entre ellos.

Ley de los senos:

En cualquier triángulo las razones que se obtienen al dividir la magnitud de los lados entre el seno del ángulo opuesto correspondiente son iguales.

Línea:

Objeto geométrico que tiene solamente una "dimensión" longitud.

Longitud:

En Geometría significa Dimensión mayor de un objeto. Distancia más corta entre dos puntos. Medida de una distancia. Magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos.

M

Matemáticas:

Es la ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos y sus relaciones.

Media aritmética:

En estadística es una medida de tendencia central, en general la media o promedio es el resultado que se obtiene al dividir la suma de varias cantidades por el número de sumandos.

Mediana de un triángulo:

Es la recta que pasa por el punto medio de un lado y por el vértice opuesto.

Mediatriz de un triángulo:

Es una recta perpendicular al lado del triángulo en su punto medio.

Medida:

Dimensión o capacidad de algún objeto.

Metro:

Unidad de medida de la distancia usado en el Sistema Internacional de Unidades. El símbolo utilizado para el metro es *m*.

Metro cuadrado:

Unidad de área que consiste en un cuadrado cuyos lados miden un metro de longitud. El símbolo para denotar al metro cuadrado es m^2.

Metro cúbico:

Unidad de volumen que consiste en un cubo cuyas aristas miden un metro de longitud. El símbolo para denotar al metro cúbico es m^3.

Moda:

En un conjunto de datos, la moda es el dato que aparece con mayor frecuencia. Para el caso de datos agrupados, la moda está representada por la marca de clase de la clase con mayor frecuencia.

Muestra:

Es un subconjunto de una población que se obtiene a través de algún proceso, para que represente a la población.

Muestreo:

Selección de una muestra de una población para que la represente en un estudio estadístico.

N

Número:

Valor aritmético expresado por una palabra, un símbolo o una figura, que representa una cantidad particular y es usado para contar o hacer cálculos.

O

Octágono:

Polígono de 8 lados.

Ortocentro:

La intersección de las tres alturas de un triángulo o sus prolongaciones.

Operación:

Proceso definido por medio del cual se obtiene un valor a partir de otros. Las operaciones más frecuentemente usadas con los números son: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

P

Paralelogramo:

Cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

Paralelas (rectas):

Dos rectas que se encuentran en un mismo plano son paralelas si no se cortan por más que se prolonguen.

Pentágono:

Polígono de cinco lados.

Perpendiculares (rectas):

Dos rectas son *perpendiculares* si al cortarse forman cuatro ángulos iguales.

Perímetro:

Medida del contorno de una figura plana. En el caso de un polígono, esta medida es la suma de las medidas de sus lados.

Polígonos:

Figura geométrica plana cerrada delimitada por segmentos de recta que no se cortan entre ellos, salvo en sus extremos. Cada uno de los segmentos de recta es un lado del polígono y el punto donde se intersecan dos lados consecutivos del polígono se llama vértice.

Polígono regular:

Cuando un polígono tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales se llama polígono regular. Es decir, un polígono es regular si es equilátero y equiángulo a la vez.

Polígonos irregulares:

Un polígono es irregular si tiene por lo menos dos ángulos distintos o dos lados distintos.

Polígono circunscrito:

Se dice que un polígono es circunscrito cuando todos sus lados son tangentes a una misma circunferencia.

Población:

Se refiere al universo de donde se elige una muestra para su estudio.

Población física:

Se dice de la población a la que está dirigida un estudio o proyecto estadístico. El universo de sujetos (*personas, animales, cosas, fenómenos físicos o sociales),* sobre los que se pretende hacer un estudio estadístico, en base al análisis de alguna (s) variables.

Polígono inscrito:

Se dice que un polígono es inscrito cuando todos sus lados son cuerdas de una misma circunferencia.

Porcentaje:

Fracción de una cantidad que se toma por cada cien contenida en ella y que se denota con el símbolo %.

Pi:

Número que representa la razón entre el perímetro de una circunferencia y la medida de su diámetro.

Plano cartesiano:

Utiliza un sistema de coordenadas cartesianas (*rectangulares*) para determinar las coordenadas de los puntos.

Probabilidad:

Es la rama de las matemáticas que estudia los posibles resultados de eventos dados junto con las posibilidades relativas y su distribución.

Proposición:

Enunciado al que se puede asignar un valor de verdad: falso o verdadero.

R

Radio:

Es el ángulo plano entre dos radios de un círculo que cortan sobre la circunferencia un arco de longitud igual al radio.

Radián:

Unidad de medida de ángulo que es igual al ángulo subtendido por un arco de longitud igual al radio.

Rango:

Diferencia entre los vaores mayor y menor en un conjunto de datos.

Razón:

La razón de dos números *a, b* es el resultado que se obtiene al dividirlos.

Raíz cuadrada:

La raíz cuadrada de un número x es un número *r*, que al multiplicarlo por sí mismo, se obtiene el número x.

Recta:

Línea que está completamente determinada por dos puntos de un plano y se extiende indefinidamente en ambas direcciones.

Rectángulo:

Cuadrilátero con 4 ángulos rectos.

Regla:

Instrumento usado en geometría para trazar rectas.

S

Segmento:

Parte de una recta, comprendida entre dos puntos.

Semejantes (figuras):

Figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño.

T

Teorema:

Proposición que requiere de demostración.

Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo que se encuentra en un plano, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Triángulo:

Es un polígono plano de tres lados.

Triángulo acutángulo:

Es aquel que todos sus ángulos son agudos.

Triángulo equilátero:

Es aquel que sus tres lados tienen la misma medida.

Triángulo escaleno:

Es aquel que todos sus lados tienen distinta medida.

Triángulo rectángulo:

Es aquel que tiene un ángulo recto.

Triángulo isósceles:

Es aquel que dos de sus lados tienen la misma medida.

Triángulo obtusángulo:

Es aquel que tiene un ángulo obtuso.

Trigonometría:

Rama de la matemática que se encarga del estudio de los triángulos, en particular las relaciones entre sus lados y ángulos. Estudia también las funciones trigonométricas, sus propiedades y sus aplicaciones.

V

Valor absoluto:

El valor absoluto de un número real es el número mismo, cuando éste es positivo o cero; y es el número con signo cambiado, cuando éste es negativo.

Variación:

Cambio que sufre una variable. Usualmente se denota anteponiendo a la variable el símbolo **Δ**.

Variable:

Símbolo utilizado para representar un miembro no especificado de algún conjunto.

Variables continuas:

Son aquellas que teóricamente pueden tomar cualquier valor en algún intervalo de los números reales.

Variables discretas:

Son aquellas que teóricamente sólo pueden tomar un número finito de valores o un número infinito pero se pueden numerar.

Variable estadística:

Una característica que se desea estudiar de un grupo de personas, animales o cosas.

Variables no numéricas o cualitativas:

Sólo tienen la función de distinguir una categoría de otra de las posibles, si solamente indica alguna cualidad sin indicar un número.

Vértice:

Es el punto de intersección entre dos lados consecutivos de un polígono.

Vértices consecutivos:

En un polígono, dos vértices son consecutivos si son extremos de un mismo lado.

Volumen:

Espacio que ocupa un cuerpo. Sus unidades se miden en litros, o unidades de longitud cubicas, como metro cúbico (m3).

SITIOS WEB
RECOMENDADOS

- appletscobach.mat.uson.mx
    - » Todos los applets de apoyo para este texto de Matemáticas 2.
- http://www.geogebra.org/cms/es/download/
    - » Para descargar el programa GeoGebra y consultar applets y materiales que también se encuentran en "geogebratube.org."
- http://mathworld.wolfram.com/
    - » Para consultar diccionario de términos matemáticos (en inglés), acceder a graficador de funciones, calculadora, convertidor de unidades, entre otras poderosas herramientas.
- http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/matechavos/html/
    - » Sitio de juegos, retos e información matemática interesante.
- http://arquimedes.matem.unam.mx/PUEMAC/PUEMAC_2008/aurea/html/aurea.html
    - » Para que te enteres sobre "la razón áurea".
- http://rae.es/
    - » Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española. Para que consultes significado de palabras en español, la forma correcta de escribirlas, de conjugar verbos y mucho más.
- http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm
    - » Se encuentran los 13 libros que componen los "Elementos" de Euclides, además de applets que ilustran lo que en ellos se refiere, datos sobre la vida de Euclides e importantes definiciones.
- http://www.korthalsaltes.com/es/index.html
    - » Un catálogo de poliedros, sus nombres, sus desarrollos e información adicional.

REFERENCIAS

BIBLIOGRÁFICAS

• Burton, D. (1997). *The history of mathematics: An introduction.* Mc Graw Hill.

• Dolciani, M. Donnelly, A. y Jurgensen, R (1970). *Modern Geometry. Structure and Method.* Hougthon Miffly Company. Boston.

• Clemens, et al. (1998) *Geometría*, Pearson Education, México.

• Kasten, S. y Newton, J. (2009) *Rasoning and sense –making activities for high school mathematics*. National Council of Techers of Mathematics. E.U.A.

• López, O. y García, S. (2008). *La enseñanza de la Geometría.* Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México, D. F.

• Martínez A. Recio F. J. Coord. (1998) Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría. En *Colección matemáticas: Cultura y aprendizaje*, num. 16. Editorial Síntesis, España

• INEGI (2013) http://www.inegi.org.mx/prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/censos/poblacion/2010/panora_socio/son/Panorama_Son.pdf (Consultada el 6 de septiembre de 2013).

• INEGI Artículos (2013) http://www.inegi.org.mx/inegi/contenidos/espanol/prensa/contenidos/Articulos/sociodemograficas/mexico-jovenes.pdf (Consultado el 26 de septiembre de 2013).

• Google (2013). Mapa interactivo de la Ciudad de Hermosillo. Consultado el 6 de octubre de 2013, en

https://www.google.com.mx/mapmaker?ll=29.072975,-110.934792&spn=0.209445,0.41851&t=m&z=12&vpsrc=6&q=mapa+hermosillo&utm_medium=website&utm_campaign=relatedproducts_maps&utm_source=mapseditbutton_normal

- Eggers, C. (1985). Eudemo y el "Catálogo de Geómetras" de Proclo. *Emerita* Vol. 53.1, 1985, pp. 127-157.

- CONAGUA (2011). Estadísticas del Agua en México, edición 2011. Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales: México.

- FAO (2008). *El Desarrollo del Microrriego en América Central: Oportunidades, Limitaciones y Desafíos*. Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y las Alimentación Oficina Regional para América Latina y el Caribe: Santiago, Chile. Recuperado el 8 de octubre de 2013, de *http://www.fao.org/nr/water/aquastat/dbase/AquastatWorldDataEng_20101129.pdf*












COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Diseñada en Dirección Académica del
Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur.
Hermosillo, Sonora, México

La edición consta de 12,463 ejemplares.
Impreso en México/Printed in Mexico

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA