



COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

# Matemáticas 3

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos

José Luis Soto Munguía  
Martín Gildardo García Alvarado  
María Antonieta Rodríguez Ibarra  
Jorge Ruperto Vargas Castro  
Manuel Alfredo Urrea Bernal

**TERCER SEMESTRE**  
REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

# Matemáticas<sup>3</sup>

**Bufete de Asesoría en Educación  
Matemática de la Universidad de Sonora:**

- José Luis Soto Munguía
- Martín Gildardo García Alvarado
- María Antonieta Rodríguez Ibarra
- Jorge Ruperto Vargas Castro
- Manuel Alfredo Urrea Bernal



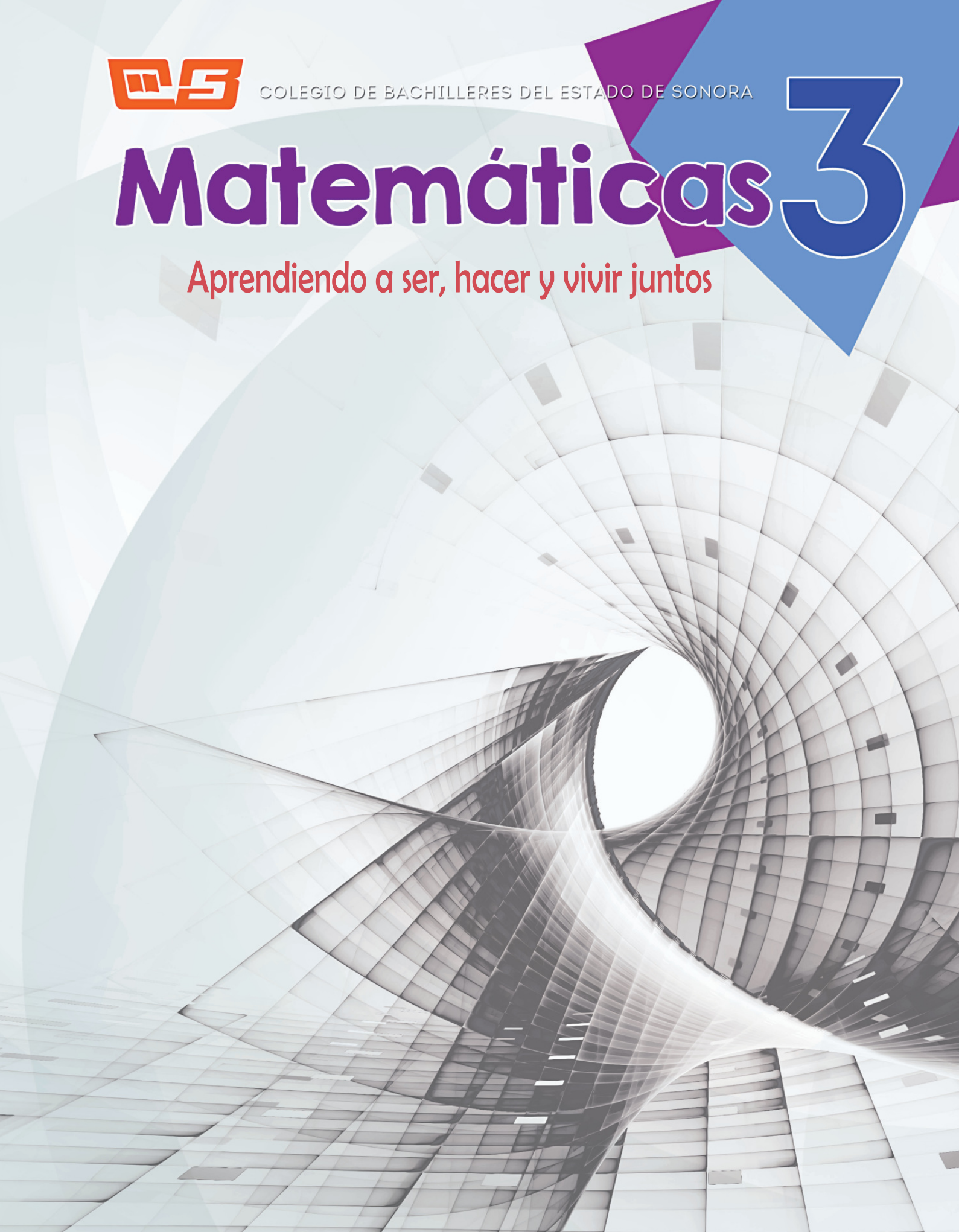




COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

# Matemáticas 3

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos



## COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

### Director General

Profr. Julio Alfonso Martínez Romo

### Director Académico

Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

### Director de Administración y Finanzas

C.P. Jesús Urbano Limón Tapia

### Director de Planeación

Ing. Raúl Leonel Durazo Amaya

**Desarrollo Editorial:** Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.

**Coordinación Editorial:** LDG. Luis Ricardo Sánchez Landín

**Edición:** LDG. Yolanda Yajaira Carrasco Mendoza

### Coordinación General:

Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

### Supervisión Académica:

Vanessa Guadalupe Angulo Benítez

### Coordinación Técnica:

Rubisela Morales Gispert

### Revisores:

Margarita León Vega

Concepción Valenzuela García

Joaquín Miranda Gil

Raúl Amavizca Carlton

Miguel Ángel Barceló Lara

**Contenido:** Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

## MATEMÁTICAS 3

### Módulo de Aprendizaje

Copyright ©, 2014 por el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora  
todos los derechos reservados.

### Dirección Académica

Departamento de Innovación y Desarrollo  
de la Práctica Docente  
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur  
Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280

### Bufete de Asesoría en Educación

#### Matemática de la Universidad de Sonora:

José Luis Soto Munguía

Martín Gildardo García Alvarado

María Antonieta Rodríguez Ibarra

Jorge Ruperto Vargas Castro

Manuel Alfredo Urrea Bernal

**ISBN: 978-607-730-036-6**

---

### Primera Edición: 2014

Se terminó la impresión de esta obra en Junio del 2014.

En los talleres de **Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.**

Lambda No. 216 • Fraccionamiento Industrial Delta • C.P. 37545

León, Guanajuato, México.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana

Registro No. 3681

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México

La edición consta de 11, 295 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico



<i>Mensaje del Gobernador</i> .....	VII
<i>Presentación</i> .....	VIII
<i>Estructura metodológica de los textos</i> .....	XII
<i>Competencias genéricas</i> .....	XIV
<i>Competencias disciplinare</i> .....	XV
<i>Mapa de la asignatura</i> .....	XVI

## **BLOQUE 1: RESUELVE PROBLEMAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> Sistemas de coordenadas.....	02
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Razón, distancia y lugares geométricos.....	13
<b>Problemas</b> .....	29
<b>Autoevaluación</b> .....	32
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 1</b> .....	39

## **BLOQUE 2: RESUELVE PROBLEMAS CON LA RECTA**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> ¿Muy empinado o poco empinado?.....	42
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Diferentes formas de expresar la ecuación de una recta....	62
• <b>Secuencia didáctica 3:</b> Paralelismo y Perpendicularidad.....	72
<b>Problemas</b> .....	82
<b>Autoevaluación</b> .....	84
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 2</b> .....	86

## **BLOQUE 3: RESUELVE PROBLEMAS DE LA CIRCUNFERENCIA**

• <b>Secuencia didáctica 1:</b> La circunferencia.....	88
• <b>Secuencia didáctica 2:</b> Ecuación general de la circunferencia.....	96
• <b>Secuencia didáctica 3:</b> Determinación de una circunferencia, circunferencia dados uno, dos y tres puntos.....	101
<b>Problemas</b> .....	105
<b>Autoevaluación</b> .....	108
<b>Reflexiones generales relacionadas con el bloque 3</b> .....	112

# Contenido

## BLOQUE 4: LA ELIPSE

• Secuencia didáctica 1: La elipse a nuestro alrededor .....	114
• Secuencia didáctica 2: La elipse como objeto geométrico.....	120
• Secuencia didáctica 3: El concepto analítico de la elipse.....	126
• Secuencia didáctica 4: La ecuación de la elipse - Forma canónica.....	134
• Secuencia didáctica 5: La ecuación de la elipse - Forma general.....	139
• Secuencia didáctica 6: Propiedades geométricas de la elipse .....	143
Problemas .....	150
Reflexiones generales relacionadas con el bloque 4 .....	152

## BLOQUE 5: UTILIZA LA PARÁBOLA

• Secuencia didáctica 1: Adquiriendo una noción del concepto parábola.....	154
• Secuencia didáctica 2: Ecuación de la Parábola.....	160
Problemas .....	167
Autoevaluación .....	170

Glosario.....	173
Referencias bibliográficas.....	183



### **Joven estudiante:**

Hoy Sonora es más fuerte. Y una de sus principales fortalezas es, precisamente la enseñanza.

Gracias a tu esfuerzo, junto al de tus padres y maestros, nuestros alumnos y estudiantes son ahora primer lugar nacional de educación por tercer año consecutivo.

Este logro nos enorgullece a todos y es el ejemplo más noble de lo que resulta cuando todos trabajamos unidos, de común acuerdo.

Quiero decirte que Sonora seguirá depositando inversión, recursos y esfuerzos a la educación: nuevas preparatorias y universidades, así como la apertura del Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa ya son una realidad.

Una realidad que nos impulsa en el camino de mayor certeza y futuro, el de tu educación.

Sigue adelante en tus estudios. Puedes estar seguro que nosotros, desde el Gobierno de Sonora, redoblabamos esfuerzos a favor de una mejor enseñanza para todos.

**Guillermo Padrés Elías**  
GOBERNADOR DE SONORA  
2009 - 2015



**SONORA**  
★ ★ ★ ★ ★  
2014 | AUSTERIDAD, TRANSPARENCIA  
Y BUEN GOBIERNO





# Presentación

Actualmente, el **Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora** cuenta con un modelo curricular basado en el desarrollo de competencias. Sobre el significado de la palabra competencia existen diferentes versiones y formas de referirse al término, pero en general, se establece que se trata de la conjunción de actitudes, habilidades y conocimientos desarrollados por una persona, que lo capacitan para enfrentar y resolver problemas, particularmente problemas no escolares.

De esta manera, en la escuela se pone énfasis no sólo en los conocimientos que un estudiante pueda construir, sino fundamentalmente en su capacidad para aplicarlos en la resolución de problemas cotidianos en diferentes ámbitos, que en el modelo curricular se traducen en el desarrollo de **competencias genéricas** y **disciplinares**.

El presente módulo de aprendizaje **Matemáticas III**, que el **Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora** pone a tu disposición, contiene los temas básicos de la **Geometría Analítica** plana, que deberán ayudarte a desarrollar competencias disciplinares propias de la matemática, como las competencias para manejar datos numéricos, para interpretar información, para modelar matemáticamente situaciones propias de otros campos del conocimiento y de competencias genéricas aplicables a la vida diaria en general. A continuación se describe el objeto de estudio de la **Geometría Analítica**, las recomendaciones para usar el Módulo y brevemente su contenido:

## 1. La Geometría Analítica



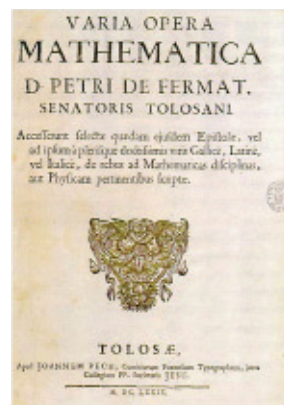
Cuando René Descartes y Pierre de Fermat publicaron sus primeros resultados de lo que hoy se conoce como **Geometría Analítica**, a mediados del siglo XVII, la **Geometría Euclidiana**, tenía ya más de 20 siglos de desarrollo. Las primeras contribuciones se deben posiblemente a Tales de Mileto (Siglo VI a. de C.), alcanzando su esplendor alrededor del Siglo III a. C. con los trabajos de Euclides de Alejandría, Arquímedes de Siracusa y Apolonio de Perga, por mencionar apenas algunos.

Sin embargo, a mediados del Siglo XVII, los adelantos en **Geometría** contrastaban con lo que se había logrado en **Álgebra**, Francois Vieta apenas había publicado sus reglas para operar con **símbolos algebraicos** a finales del siglo XIV.

Puede decirse entonces que la **Geometría Analítica** fue inventada inmediatamente después de que se contó con los dos ingredientes indispensables requeridos: la **Geometría** y el **Álgebra**.

En tu primer curso de matemáticas estudiaste y aplicaste los conceptos básicos del **Álgebra** y gran parte de tu segundo curso, estuvo dedicado al estudio de la **Geometría**, conocida también como **Geometría Euclidiana**. En el presente curso, resolverás problemas geométricos, usando el álgebra como herramienta.

El sistema cartesiano de coordenadas, que también conociste ya en otros cursos, será usado para representar situaciones y objetos geométricos y también para obtener representaciones algebraicas de esos mismos objetos.



# Presentación

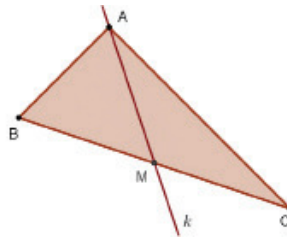
La *Geometría Analítica* permite resolver los problemas geométricos con métodos distintos a los de la *geometría euclidiana*, con los que tuviste contacto el semestre pasado.

Veamos un ejemplo.

Dado el triángulo  $ABC$ , se nos pide encontrar la mediana del triángulo que pasa por el vértice  $A$ .

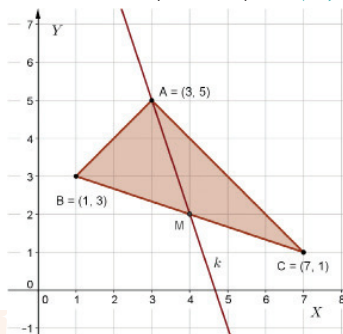
En *geometría euclidiana*, “encontrar” la mediana quiere decir usualmente trazarla con regla y compás. Para trazarla necesitamos dos puntos, de los cuales ya tenemos el vértice  $A$ .

Para obtener el otro punto, trazamos con regla y compás un punto  $M$ , que sea el punto medio del lado  $BC$ . Luego trazamos la recta  $k$  que pase por los puntos  $A$  y  $M$ . Con frecuencia el problema incluye la demostración de que los trazos son correctos, es decir, que se ha trazado lo que se quería. [Ver Figura1.](#)



En cambio en *Geometría Analítica* este problema se resuelve de manera muy diferente. Lo primero es que el triángulo “dado” no ha sido previamente trazado, como sucede en *Geometría Euclidiana*, aquí “dado” significa que han sido dadas las coordenadas de sus vértices. El punto  $M$  no se busca entonces mediante trazos con regla y compás, simplemente se supone que existe y tiene coordenadas  $(x, y)$ . Así el punto  $M$  quedará completamente determinado una vez que estas coordenadas sean encontradas. Pero la *Geometría Analítica* ha desarrollado herramientas algebraicas que permiten determinar las coordenadas del punto medio del segmento  $BC$ . Por ejemplo, las coordenadas de  $M$  pueden calcularse usando las fórmulas  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  y  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ , válidas para cualesquiera dos puntos  $B(x_1, y_1)$  y  $C(x_2, y_2)$ . Se determina así que el punto  $M$  tiene coordenadas  $(4, 2)$  y luego se determina la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $M$ . Pero determinarla significa ahora encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , la cual resulta ser  $3x + y = 14$ .

Vemos entonces que la respuesta al problema también es muy diferente a la recta trazada con la regla y el compás. Esta respuesta tiene algunas ventajas sobre una recta trazada sobre el papel; nos permite, por ejemplo verificar rápidamente que el punto  $R(1, 10)$  no pertenece a la recta, puesto que  $3(1) + (10) \neq 14$ , o bien que el punto  $S(10, -16)$  sí está sobre la recta, puesto que  $3(10) + (-16) = 14$ .



# Presentación

Como esperamos haber ilustrado con el ejemplo, la *Geometría Analítica* es una rama de la matemática con las características siguientes:

1. Recurre al método de análisis, que consiste en suponer que un problema ha sido resuelto, para desprender consecuencias de este supuesto. En el ejemplo mostrado aquí, este método se aplica al suponer que el punto M existe y solo resta calcular sus coordenadas.
2. Mediante un sistema de coordenadas, aprovecha la visualización de la Geometría y la potencia del álgebra, para resolver problemas geométricos y visualizar problemas algebraicos.
3. En este sistema de coordenadas, un punto del plano queda completamente determinado por sus dos coordenadas, y ciertas curvas pueden determinarse completamente por una ecuación algebraica en las variables  $x$  y  $y$ .
4. Si tenemos una curva graficada en el sistema de coordenadas cartesianas y también la ecuación que la representa algebraicamente, entonces las propiedades de la curva pueden investigarse usando la ecuación y por otra parte, las características de la ecuación pueden explicarse con base en la curva graficada.

## 2. RECOMENDACIONES PARA USAR EL MÓDULO

A pesar de que la *Geometría Analítica*, es una rama de las matemáticas eminentemente teórica, y su aprendizaje está necesariamente ligado al desarrollo de competencias disciplinares, el presente módulo de aprendizaje también deberá ayudarte a desarrollar competencias genéricas, por ejemplo para comunicar, para el manejo de las *Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)*, para el diseño de estrategias de solución a un problema y para la selección de la que se considere mejor o más adecuada, y otras competencias más que no se restringen al tratamiento y estudio de las matemáticas.

Es muy importante entonces que trabajes con este módulo de aprendizaje de *Matemáticas III* atendiendo a las indicaciones del mismo y de tu profesora o profesor, trabajando en ocasiones de forma individual, otras en pequeños equipos y en otras en discusiones grupales. Cada una de esas dinámicas tiene propósitos establecidos relacionados con el desarrollo de competencias y trascienden a las versiones que centran la enseñanza en la construcción de conocimiento matemático, como si eso fuera lo único importante. Para el desarrollo de este trabajo, el módulo está organizado en cinco bloques que contienen una o más secuencias didácticas cuya estructura es la siguiente:

**Actividades de Inicio:** En esta parte se presentan problemas o situaciones seleccionados con el propósito de rescatar los conocimientos, actitudes y habilidades que se requieren para el nuevo conocimiento a estudiar. También pueden incluirse situaciones o problemas que se espera puedas resolver al final de la secuencia o del bloque.

**Actividades de Desarrollo:** En éstas se presentan situaciones o problemas que te conducirán a construir nuevos conocimientos y desarrollar nuevas habilidades, en concordancia con la temática central del bloque.

**Actividades de Cierre:** En esta etapa se hace un recuento de lo aprendido en las actividades anteriores y se enuncian los conocimientos matemáticos que previamente has usado para la resolución de problemas de la secuencia.



# Presentación

Al final de cada bloque se presentan dos secciones más. La primera de ellas es una **Sección de problemas** que pueden servir para ejercitar lo aprendido en el bloque y, en ciertos casos, para usar creativamente lo que has aprendido en problemas novedosos.

Se incluye también una serie de problemas y de preguntas para la reflexión individual, en una sección denominada **Autoevaluación**.

Para que esta sección sea de utilidad es necesario que la respondas individualmente, ubiques bien lo que ya aprendiste adecuadamente y señales las dudas y dificultades que aún se presentan en tu aprendizaje. La autoevaluación sólo será de utilidad si la contestas con honestidad y planteas tus dudas y dificultades a tus compañeros de clase y, principalmente a tu profesor o profesora. Es conveniente que antes de cualquier proceso formal de evaluación, compartas con tus profesores las reflexiones de la autoevaluación.

## 3. EL CONTENIDO DEL MÓDULO

En el **BLOQUE 1** se introducen los conceptos básicos de la *Geometría Analítica*, las primeras actividades están planeadas para que te familiarices con el plano cartesiano y con los conceptos de distancia entre dos puntos, razón en la que un punto divide a un segmento y las primeras nociones sobre lugares geométricos.

El **BLOQUE 2** está dedicado a la **línea recta**, para estudiarla se discute la forma que adquieren en *Geometría Analítica* algunos conceptos ya estudiados en cursos anteriores, tales conceptos son los de colinealidad entre **puntos** y **pendiente**, éste último como medida de la inclinación de un segmento o de una recta. Posteriormente se aborda la **recta** como lugar geométrico en el plano cartesiano y las diversas formas que puede darse a la ecuación de una **recta**, dependiendo del uso que se le pretenda dar. El bloque concluye con los conceptos de **paralelismo** y **perpendicularidad** entre **rectas**.

En los **BLOQUES 3, 4 y 5** se desarrollan los resultados básicos sobre tres de las curvas conocidas como cónicas, a saber la **circunferencia**, la **elipse** y la **parábola**. En todos los casos las curvas se introducen a partir de ejercicios de reconocimiento visual de estas cónicas, posponiendo hasta el final de cada Bloque las definiciones formales.

Cada vez que se ha considerado necesario, se han construido **Applets** elaborados en **GeoGebra**, que podrán usarse como apoyo para el estudio y la discusión de los conceptos bajo estudio, el uso de estos **Applets** es particularmente importante en los tres últimos bloques.

Los Autores

# Estructura Metodológica de los Textos

## Actividades de Inicio

## Desarrollo

## Actividad: 2

Práctica del conocimiento adquirido mediante acciones a ejecutar o proyectos a llevar a cabo.

## Actividad de Cierre

### Actividad Individual

### Actividad de Equipo

### Actividad Grupal

## Secuencia Didáctica 1-

### Actividad de Inicio

### Sistemas de coordenadas

#### Traectoria de huracanes

Durante las temporadas de huracanes, es frecuente encontrar en la prensa información gráfica que advierte a la población civil sobre la evolución y trayectoria de estos fenómenos meteorológicos. La gráfica siguiente corresponde a la posición del huracán 'Katrina' que golpeó las costas de Estados Unidos en el año 2005. Este huracán ha sido considerado uno de los más potentes y destructivos en la historia de ese país, y causó grandes pérdidas humanas y materiales. En la gráfica se observa que el domingo 26 de agosto a las 4:00 PM, el centro del huracán (pequeño círculo color naranja) se encuentra a 26.9N y a 89.0W. Estos últimos datos se refieren a la graduación horizontal y vertical mostrada en el mapa y significan **Latitud Norte** (graduación vertical) y **Longitud Oeste** (graduación horizontal). Aunque los ejes de la gráfica corresponden a circunferencias trazadas sobre planos

### Desarrollo

#### Actividad: 3

Los sistemas de coordenadas revisados en las dos primeras actividades fueron diseñados para localizar objetos sobre superficies reales, en el primer caso estos objetos son puntos sobre la superficie terrestre y en el segundo caso son casillas del Tablero de Ajedrez. En ambos casos se trata de métodos para determinar la posición de un punto o un objeto (casillas en el caso del ajedrez) mediante números u otros símbolos (letras en el caso del ajedrez).

Estudiaremos ahora un sistema de coordenadas del plano, construido sobre un plano euclidiano ideal, es decir no ha sido construido para que funcione sobre una superficie física especial, lo cual lo hace más general y más abstracto. Se trata del **sistema de coordenadas rectangular**, conocido también como **plano cartesiano** y con el cual ya has tenido contacto en la escuela secundaria y en tu primer curso de matemáticas de preparatoria. Como recordaras, el sistema se constituye trazando dos ejes numéricos perpendiculares entre sí. Al eje horizontal se le llama eje de las abscisas y al vertical eje de las ordenadas (ver Figura 1).

### Actividad de Cierre

#### Actividad: 5

Un sistema de coordenadas permite determinar la posición de un punto o un objeto mediante números y signos.

Las coordenadas geográficas, mostradas en la **Actividad 1**, permiten localizar puntos sobre la superficie terrestre usando dos números llamados **longitud** y **latitud**. Ambos números representan medidas tomadas a partir de un punto de referencia ubicado sobre la superficie de la tierra. Este punto es la intersección de dos líneas que no son rectas.

1. Investiga:

- Cómo se llaman las líneas que sirven como referencia en el sistema de coordenadas geográficas.
- Cuáles son las coordenadas geográficas de la ciudad donde vives.

2. Comenta en equipo si tus compañeros llegaron a soluciones similares en la pregunta anterior.

3. ¿Qué es lo que tienen en común esas circunferencias? Argumenta su respuesta.

4. Para verificar las respuestas anteriores, abren el applet Circ3, activen las casillas de control C1 hasta C10. ¿Sus respuestas coinciden con lo que se observa en pantalla?

### Desarrollo

#### Actividad: 2

En el siguiente plano cartesiano ubica tres puntos A, B y C no colineales.

1. Dibuja en el plano a la circunferencia o circunferencias que contienen al mismo tiempo a dos de los puntos (A con B, A con C y B con C).

La Circunferencia



Sitios Web recomendados o confiables que puedes consultar por tu cuenta vía internet para que puedas ampliar tus conocimientos.

BLOQUE 6



En la página Web del **Congreso del Estado de Sonora** aparece, entre otras la Ley de Ingresos del Estado. En ella, en el **Artículo 212 G-7** encontramos una tabla que indica la manera en cómo se realiza el cálculo de la depreciación de un automóvil.

*Ley de Ingresos del Estado de Sonora*  
Artículo 212 G-7

Modelo del vehículo	Factor de depreciación
2012	0.850
2011	0.725
2010	0.600
2009	0.500
2008	0.400
2007	0.300
2006	0.225
2005	0.150
2004 y anteriores	0.075

Tabla 6.5

a) Asigna tres valores hipotéticos a los precios de factura de tres diferentes tipos y modelos de automóvil, para que calcules en cada caso cuál es el valor de esos vehículos en 2013.

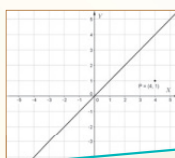
b) Si un automóvil es modelo 2005 y su valor en 2013 es de \$ 485,000.00, ¿cuál fue su valor original?

Supongamos un vehículo modelo 2006, con valor actual de \$ 514,500.00, ¿cuál fue su precio de factura?



En las actividades de inicio se presentaron las coordenadas geográficas y las coordenadas del Ajedrez. Investiga sobre otro sistema de coordenadas que se use con fines prácticos y descríbelo aquí.

1. Grafica en un plano cartesiano los vértices P, Q y R de un triángulo isósceles.
2. Grafica un punto P en un plano cartesiano. Grafica dos puntos R y S, de tal modo que la distancia de P a R, sea el triple que la distancia de P a S.
3. Grafica dos puntos P y Q en el plano cartesiano. Luego grafica dos puntos R y S, de tal manera que los triángulos PQR y PQS tengan la misma área.
4. Grafica un rombo, cuyos vértices estén sobre los ejes cartesianos. Calcula el área del rombo.
5. Grafica los vértices P, Q, R y S de un trapecio isósceles. Calcula el área del trapecio trazado.
6. En la gráfica siguiente se ha trazado la bisectriz a uno de los ángulos definidos por los ejes coordenados. Si Q es el punto que resulta de la reflexión de P con respecto a esta recta. Grafica Q y escribe sus coordenadas.



Los problemas y preguntas planteados en esta sección son de carácter individual, para hacerse preferentemente en casa y tiene el propósito fundamental de proporcionarte elementos de reflexión para que identifiques lo que has aprendido, lo que aún te ocasiona dificultades y lo que es necesario reforzar.

Para una mejor estimación de cómo han evolucionado tus aprendizajes, contrasta tus respuestas con los propósitos de aprendizaje presentados en la introducción al presente bloque. De esta manera te podrás dar cuenta de lo que has aprendido, de lo que aún te cuesta dificultad hacer, de los errores que cometes y de los temas en los que necesitas estudiar con mayor detenimiento o pedir asesoría, ya sea a tu profesor o a tus compañeros de clase.

En caso de considerarlo necesario, el profesor te podrá solicitar los resultados de autoevaluación.

**Problema 1.** En la novela de Julio Verne...



Sirve para ejercitar lo aprendido en el bloque y, en ciertos casos, para usar creativamente lo que has aprendido, en problemas novedosos.



Serie de problemas y preguntas para la reflexión individual, es necesario que la respondas individualmente, con honestidad y plantear tus dudas y dificultades a tu profesor o profesora y compañeros de clase.



### COMPETENCIAS A DESARROLLAR

**BLOQUE 1**

**BLOQUE 2**

**BLOQUE 3**

**BLOQUE 4**

**BLOQUE 5**

1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.

2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.

3. Elige y practica estilos de vida saludables.

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.

6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.

7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.

8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.

9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.

10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.

11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

# GENÉRICAS

# COMPETENCIAS Disciplinares



## COMPETENCIAS A DESARROLLAR

**BLOQUE 1**

**BLOQUE 2**

**BLOQUE 3**

**BLOQUE 4**

**BLOQUE 5**

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.

5. Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.

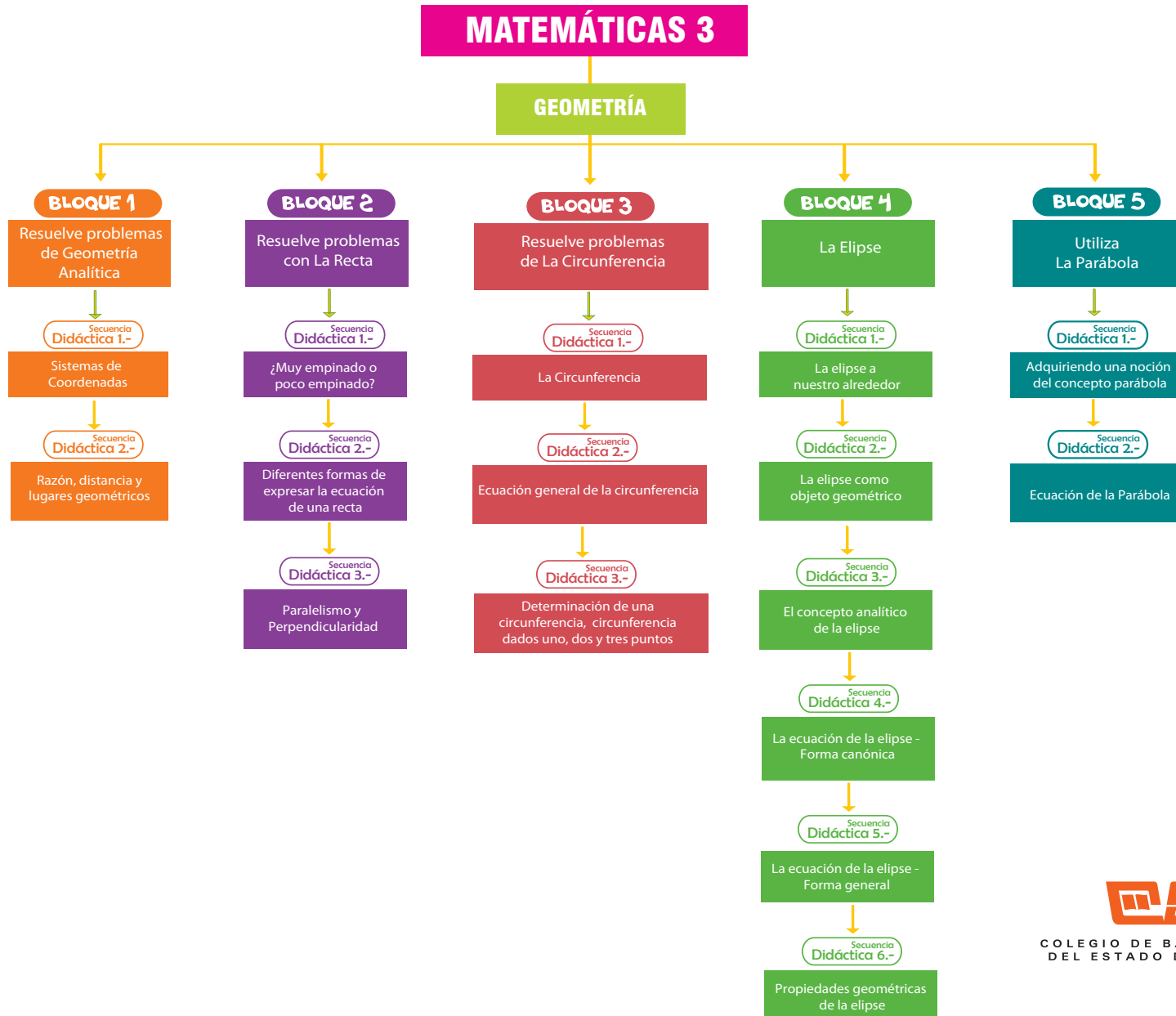
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los objetos que los rodean.

7. Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.

8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

# DISCIPLINARES<sup>xv</sup>

# MAPA DE LA ASIGNATURA





# BLOQUE 1

Resuelve problemas de...

*Geometría Analítica*

## INTRODUCCIÓN:

En los cursos de **Matemáticas I y II**, has estudiado diferentes tópicos de **álgebra** y **geometría**. En este curso te introducirás a una rama de la Matemática que está dedicada a estudiar objetos geométricos, pero con herramientas algebraicas.

En el presente **BLOQUE** se desarrollan los elementos preliminares de la *Geometría Analítica*. Aunque ya has tenido oportunidad de trabajar con el **plano cartesiano** desde tus estudios de secundaria, iniciamos comparándolo con algunos sistemas de coordenadas que han sido diseñados para aplicarse directamente a problemas de la vida cotidiana. Algunos conceptos de la **geometría euclidiana** se enriquecen y se multiplican en el **plano cartesiano**, este es el caso de la introducción de segmentos dirigidos, pero también el estudio de curvas que no están incluidas en los cursos de **geometría elemental**.

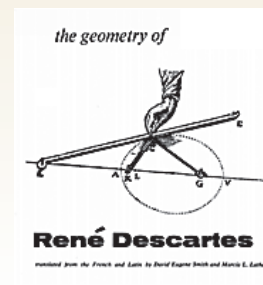
El propósito de este **BLOQUE** es que analices algunas características del **plano cartesiano**, a través de la graficación y la interpretación de los objetos geométricos bajo estudio. Posteriormente se abordan algunos conceptos básicos, como el de distancia, razón en la que un punto divide a un segmento y la noción de lugar geométrico.

A lo largo del **BLOQUE** se te estarán proponiendo actividades, orientadas hacia los conceptos mencionados, y a partir de la discusión con tus compañeros y con el profesor podrás pulirlos y aplicarlos. Es muy importante que propongas a tu equipo, al grupo y al profesor todas las dudas o ideas que se te ocurran durante el desarrollo de las actividades.

El **BLOQUE** está diseñado para crear un ambiente de aprendizaje colaborativo que promueva la comunicación en el salón de clase y el intercambio de reflexiones entre los estudiantes.

## Bosquejo histórico

Lo que hoy conocemos como *Geometría Analítica* es una rama de la matemática fundada principalmente por **René Descartes** (1596-1650) y **Pierre de Fermat** (1601-1665). A partir de los avances logrados por **Francois Vieta** (1540-1603), estos dos matemáticos, trabajando cada uno por su cuenta, pusieron las bases de un nuevo método que usa el álgebra para estudiar la geometría y viceversa. Una parte crucial de la *Geometría Analítica* es la construcción de un sistema de referencia en el plano euclidiano, que permite identificar cada punto del plano con una pareja de números y cada pareja de números con un punto del plano.





# Secuencia Didáctica 1.-

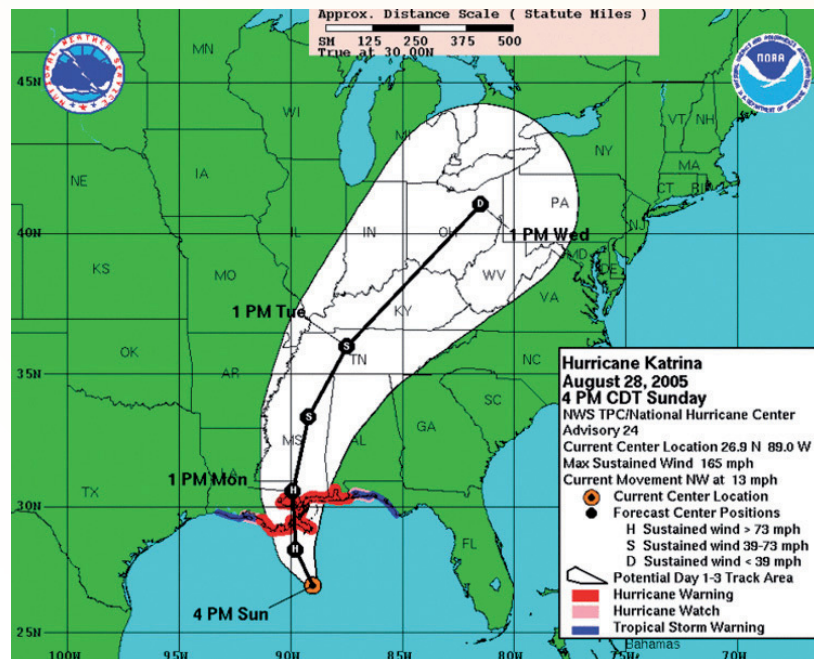
## Actividad de Inicio

### Sistemas de coordenadas

#### Trayectoria de huracanes



Durante las temporadas de huracanes, es frecuente encontrar en la prensa información gráfica que advierte a la población civil sobre la evolución y trayectoria de estos **fenómenos meteorológicos**. La gráfica siguiente corresponde a la posición del huracán **Katrina**<sup>1</sup> que golpeó las costas de Estados Unidos en el año 2005. Este huracán ha sido considerado uno de los más potentes y destructivos en la historia de ese país, y causó grandes pérdidas humanas y materiales. En la gráfica se observa que el domingo 28 de agosto a las 4:00 PM, el centro del huracán (pequeño círculo color naranja con centro negro) se encuentra a 26.9N y a 89.0W. Estos últimos datos se refieren a la graduación horizontal y vertical mostrada en el mapa y significan respectivamente: **Latitud Norte** (graduación vertical) y **Longitud Oeste** (graduación horizontal). Aunque las líneas parecen **rectas**, en realidad no lo son, corresponden a circunferencias trazadas sobre planos paralelos o perpendiculares al plano del ecuador.



<sup>1</sup> La gráfica corresponde al Cuadro No. 21, tomada de [http://www.nhc.noaa.gov/archive/2005/KATRINA\\_graphics.shtml](http://www.nhc.noaa.gov/archive/2005/KATRINA_graphics.shtml)

1. Usa las graduaciones horizontales y verticales del mapa para describir la posición posible del centro del huracán el lunes, martes y miércoles a la 1:00 PM.

---



---

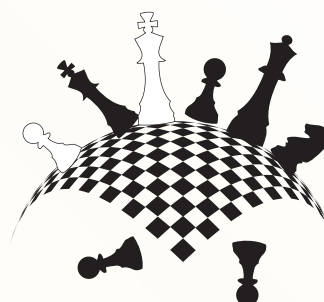
2. Usa la escala del mapa para estimar la distancia posible que recorrerá el huracán entre la 1:00 PM del lunes y la 1:00 PM del martes, luego haz lo mismo con la distancia que recorrerá entre la 1:00 PM del martes y la 1:00 PM del miércoles.

a) ¿Cuál de las dos distancias es mayor?

---

b) ¿Por qué en períodos de tiempo iguales, el huracán avanzará más, en un período que en el otro?

---



## Una leyenda sobre el ajedrez



Se dice que un joven llamado **Sessa** acudió ante un Rey Indio a mostrarle el juego de ajedrez, el juego gustó tanto al Rey que pidió al joven escoger como premio, el regalo que se le antojara. **Sessa** le pidió entonces, que simplemente le diera un grano de trigo por el primer cuadro, dos granos por el segundo, cuatro por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez, hasta acabar los 64 cuadros que hay en el tablero de ajedrez.

Pero el Rey estaba versado en matemáticas y rápidamente se dio cuenta que la petición no era tan inocente como parecía, pues tan solo por el último cuadro tendría que otorgar un número de granos igual a  $2^{63}$  y que tan sólo esta cantidad de granos era tan grande que era imposible reunirlos.

El Rey respondió a **Sessa**, que el juego le había gustado tanto que le daría lo que estaba pidiendo, pero que lo haría pensando en un tablero que tuviera, en lugar de 8 cuadros por lado, un número infinito de cuadros por cada lado. La cantidad de granos que te estoy ofreciendo, dijo el Rey puede calcularse así:

Si  $A$  es la cantidad de granos que debo darte, entonces:

$$A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots$$

Luego :

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + \dots) \\ A &= 1 + 2A \\ A &= -1 \end{aligned}$$

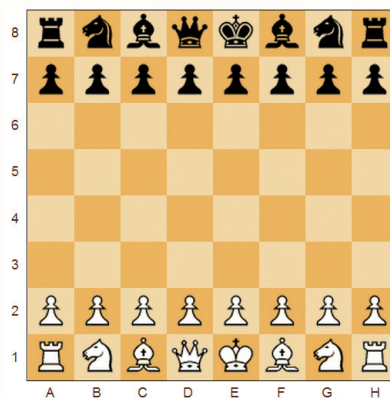
Entonces me debes un grano de trigo, dijo el Rey, déjaselo al guardia cuando salgas<sup>2</sup>.

1. ¿Consideras que el Rey hizo trampa al calcular el número de granos de trigo que debía de entregar?

2. ¿Puedes explicar en qué consistió la trampa del Rey?

## El juego de ajedrez

El ajedrez se juega sobre un tablero cuadrado que tiene ocho cuadros por lado, alternando cuadros negros y blancos, cada contrincante cuenta con 16 piezas de 6 tipos diferentes, estas piezas se acomodan inicialmente como se muestra en la figura siguiente:

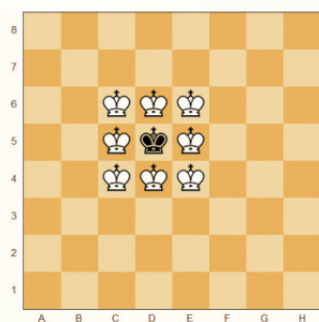


Un contrincante juega con piezas blancas y el otro con negras, el que juega con blancas empieza la partida.

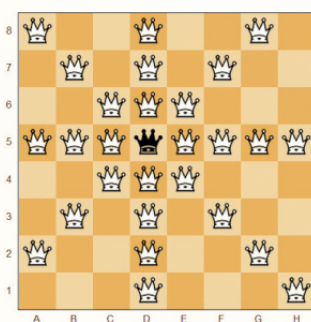
<sup>2</sup> Esta versión de la historia ha sido resumida de "Las cifras. Historia de una invención", (Alianza Editorial. Madrid, 1987).

Las letras y los números escritos en los bordes del tablero permiten ubicar cada una de las casillas de manera precisa. Por ejemplo, antes de iniciar una partida, uno de los caballos blancos está en **b1**, mientras que uno de los alfiles negros está en la casilla **f8**.

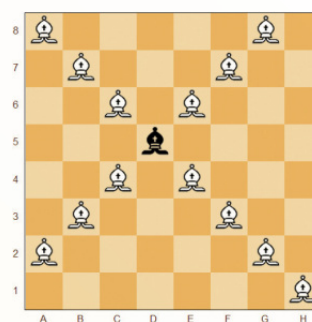
En las figuras siguientes se ilustran los movimientos de cada una de las diferentes piezas, la pieza que se muestra en negro, no indica que se trata de una pieza negra, sólo indica que a partir de esa casilla la pieza podría moverse a cualquiera de las casillas en las que hay una pieza blanca.



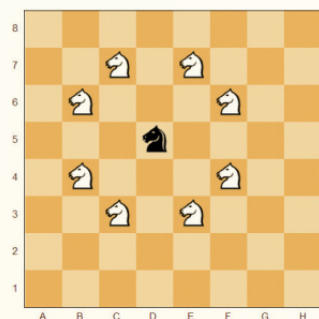
Rey



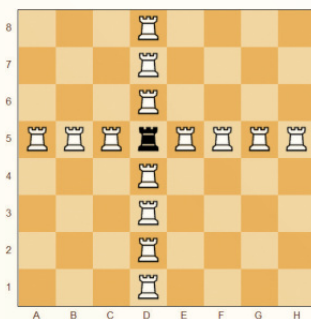
Dama (Reina)



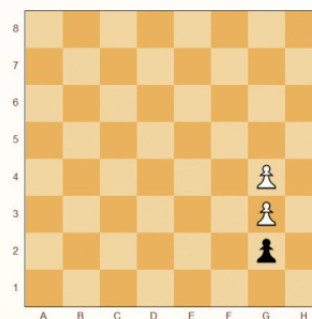
Alfil



Caballo



Torre



Peón

Tomemos el ejemplo del Caballo, la figura indica que si está en la casilla **d5**, podría moverse a cualquiera de las casillas: **c3**, **b4**, **b6**, **c7**, **e7**, **f6**, **f4** o **e3**. Esta notación que usa letras para denotar las columnas y números para denotar las filas se conoce como *notación algebraica*.

1. Escriba en *notación algebraica* la casilla en donde aparece la torre en negro.

a) Haz una lista con las casillas a las que puede moverse la Torre, incluyendo la casilla en la que se encuentra.

---



---



- b) Analiza la lista de casillas escritas en el inciso anterior, observa las características comunes de las casillas y describe la lista con tus propias palabras.

---

---

2. Escriba en *notación algebraica* la casilla en donde aparece el Alfil en negro.

- a) Haz una lista con las casillas a las que puede moverse el Alfil, incluyendo la casilla en la que se encuentra.

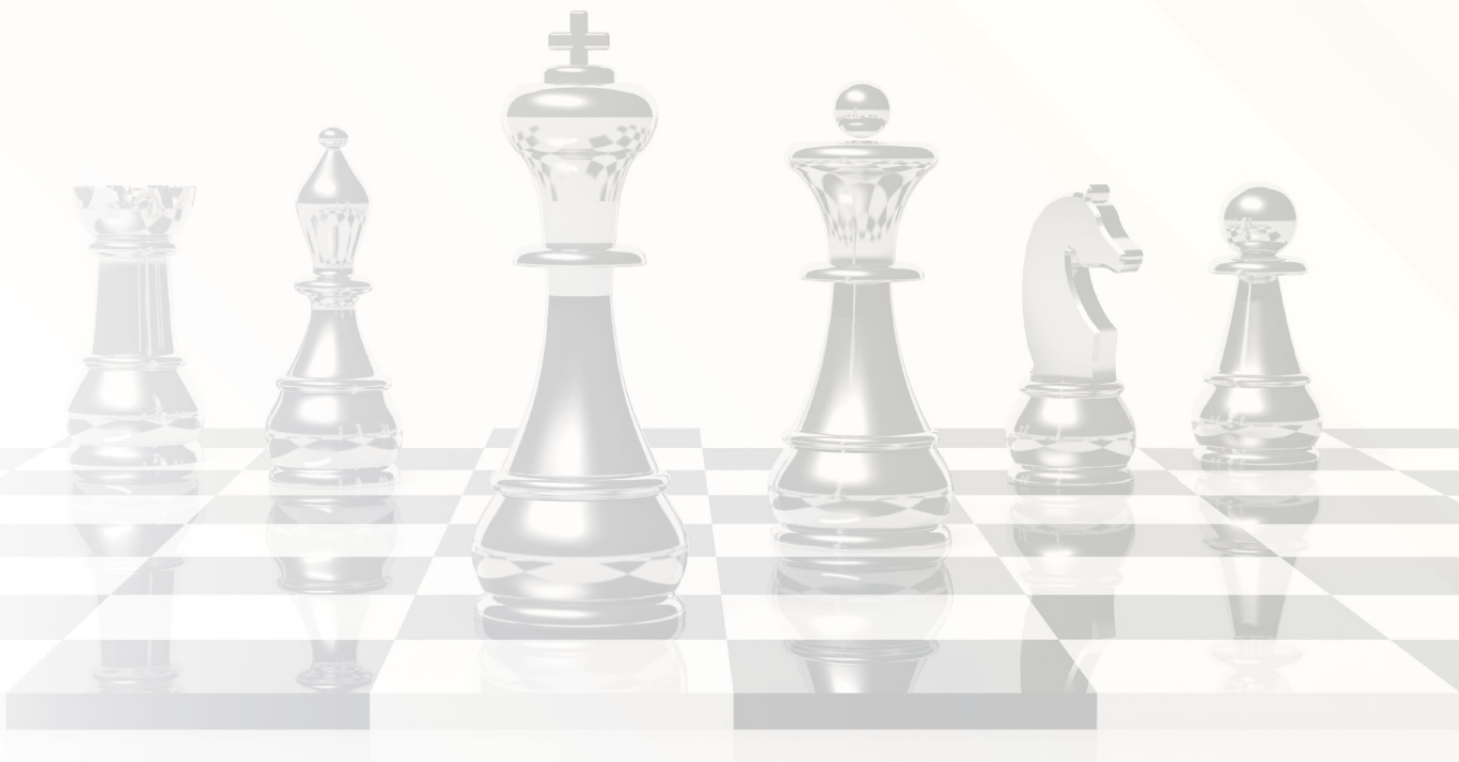
---

---

- b) Analiza la lista de casillas escritas en el inciso anterior, observa las características comunes de las casillas y describe la lista con tus propias palabras.

---

---





## Desarrollo



Los sistemas de coordenadas revisados en las dos primeras actividades fueron diseñados para localizar objetos sobre superficies reales, en el primer caso estos objetos son *puntos* sobre la superficie terrestre y en el segundo caso son *casillas* del Tablero de Ajedrez.

En ambos casos se trata de métodos para determinar la posición de un punto o un objeto (casillas en el caso del ajedrez) mediante números u otros símbolos (letras en el caso del ajedrez).

Estudiaremos ahora un sistema coordenado del plano, construido sobre un plano euclidiano ideal, es decir no ha sido construido para que funcione sobre una superficie física especial, lo cual lo hace más general y más abstracto. Se trata del **sistema coordenado rectangular**, conocido también como **plano cartesiano** y con el cual ya has tenido contacto en la escuela secundaria y en tu primer curso de matemáticas de preparatoria. Como recordarás, el sistema se construye trazando dos ejes numéricos perpendiculares entre sí. Al eje horizontal se le llama *eje de las abscisas* y al vertical *eje de las ordenadas* (ver **Figura 1**).

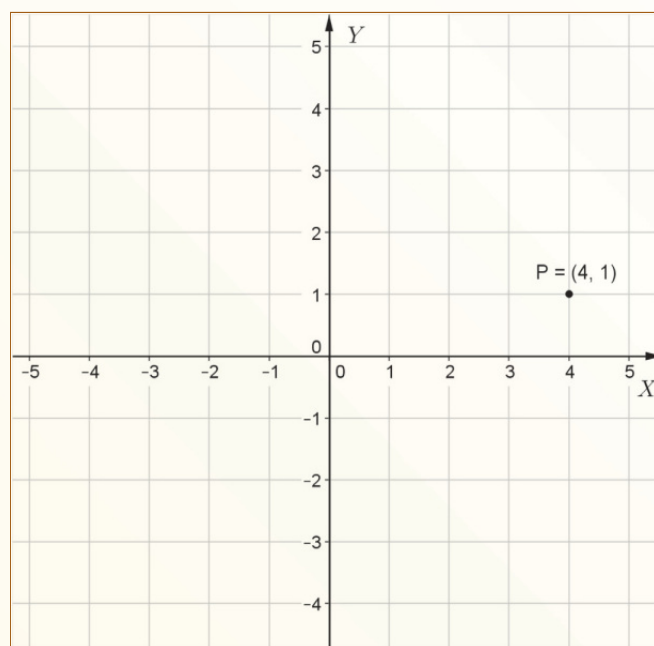


Figura 1

1. En el plano cartesiano de la **Figura 1**, se ha graficado el punto  $P=(4,1)$

- Grafica sobre la misma **Figura 1** el punto  $Q$ , que resulta de reflejar  $P$  sobre el eje de las ordenadas. Anota las coordenadas de  $Q$ .
- Grafica sobre la **Figura 1** el punto  $R$ , que resulta de rotar  $P$  un ángulo de  $180^\circ$ , con respecto al origen de coordenadas. Anota las coordenadas de  $R$ .

2. En el sistema cartesiano de la **Figura 2**, grafica cuatro puntos que sean los vértices de un cuadrado y anota sus coordenadas.

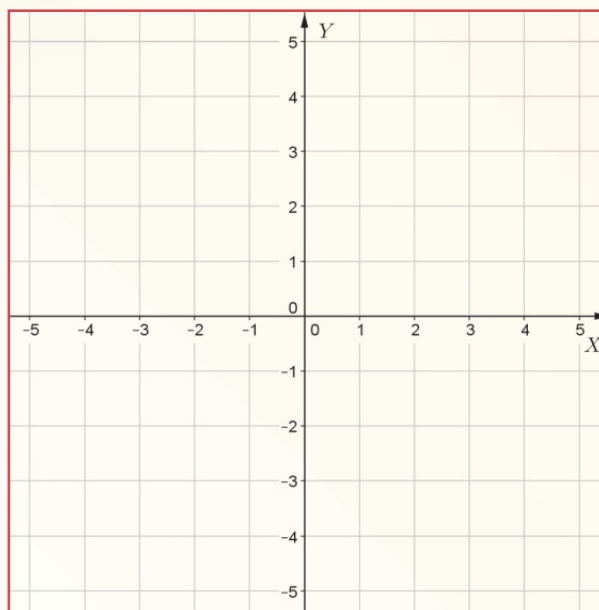


Figura 2

- a) Calcula el perímetro del cuadrado.
- b) Calcula el área del cuadrado.

3. El segmento **PQ** de la **Figura 3** es el lado de un cuadrado.

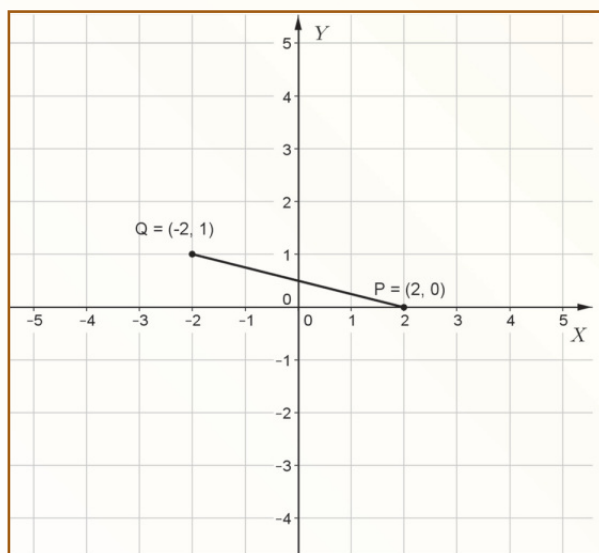
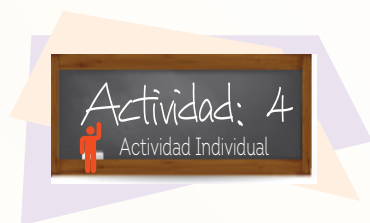


Figura 3

- a) Grafica los otros dos vértices **R** y **S** del cuadrado y anota sus coordenadas.
- b) Calcula el área del cuadrado **PQRS**.
- c) Calcula el perímetro del cuadrado **PQRS**.
- d) Encuentra las coordenadas del punto **M**, si **M** es el punto medio del segmento **PQ**.



En la **Figura 4** se han graficado los puntos **P** y **Q**.

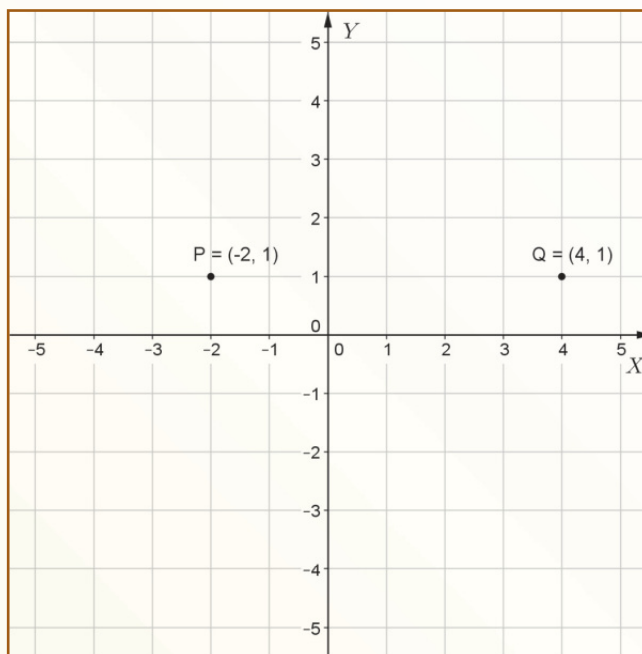


Figura 4

- ¿Cuál es la distancia entre los puntos **P** y **Q**?
- Grafica dos puntos **R** y **S** que estén a la misma distancia de **P** y de **Q**. Anota las coordenadas de **R** y **S**.
- ¿Qué tipo de triángulos son **PQR** y **PQS**?



## Actividad de Cierre

### Actividad: 5

Actividad de Equipo



Un sistema de coordenadas permite determinar la posición de un punto o un objeto mediante números y signos.

Las coordenadas geográficas, mostradas en la *Actividad 1*, permiten localizar puntos sobre la superficie terrestre usando dos números llamados *longitud y latitud*. Ambos números representan medidas tomadas a partir de un punto de referencia ubicado sobre la superficie de la tierra. Este punto es la intersección de dos líneas que no son *rectas*.

#### 1. Investiga:

- Cómo se llaman las líneas que sirven como referencia en el sistema de coordenadas geográficas.
- Cuáles son las coordenadas geográficas de la ciudad donde vives.

En el juego de ajedrez, el sistema de coordenadas explicado en la *Actividad 2*, permite determinar cada casilla mediante la escritura de una letra y un número. La notación utilizada permite a su vez, escribir jugadas y partidas completas, de manera compacta, lo cual resulta de mucha utilidad para la escritura de los libros de ajedrez.

En la Tabla siguiente está escrita una partida de ajedrez, en donde las blancas vencen a las negras usando el “mate al pastor”, un jaque mate para principiantes.

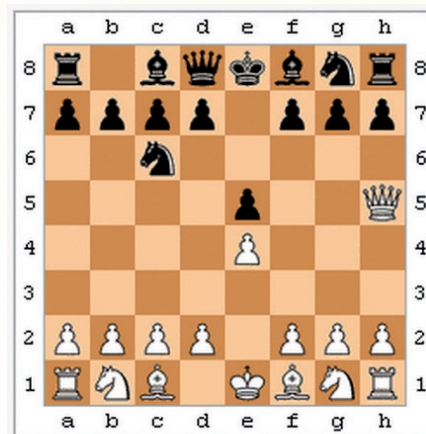
#### 2. Reproduce sobre un tablero de ajedrez, la partida completa.

Jugada      Blancas      Negras      Partida después de las primeras dos jugadas

1	Pe4	Pe5
2	Dh5	Cc6
3	Ac4	Cf6
4	Dxf7#	

#### Notación adicional:

P: Peón (usualmente se omite)  
D: Dama  
C: Caballo  
A: Alfil  
x: “se come a”  
#: Jaque mate



Animación del mate del pastor.

En las coordenadas cartesianas, todos los puntos del plano pueden ser localizados mediante parejas ordenadas  $(x,y)$  de números reales y todas las parejas  $(x,y)$  pueden ser graficadas en el plano.

Basta con trazar dos ejes reales perpendiculares, establecer el punto de intersección como el origen  $O$  del sistema y escoger una medida común como unidad en ambos ejes.

Al eje horizontal se le llama *Eje de las Abscisas* y al vertical *Eje de las Ordenadas*. Cada uno de las cuatro regiones definidas al trazar los ejes, se enumeran del I al IV, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, tal como se ve en la **Figura 5**.

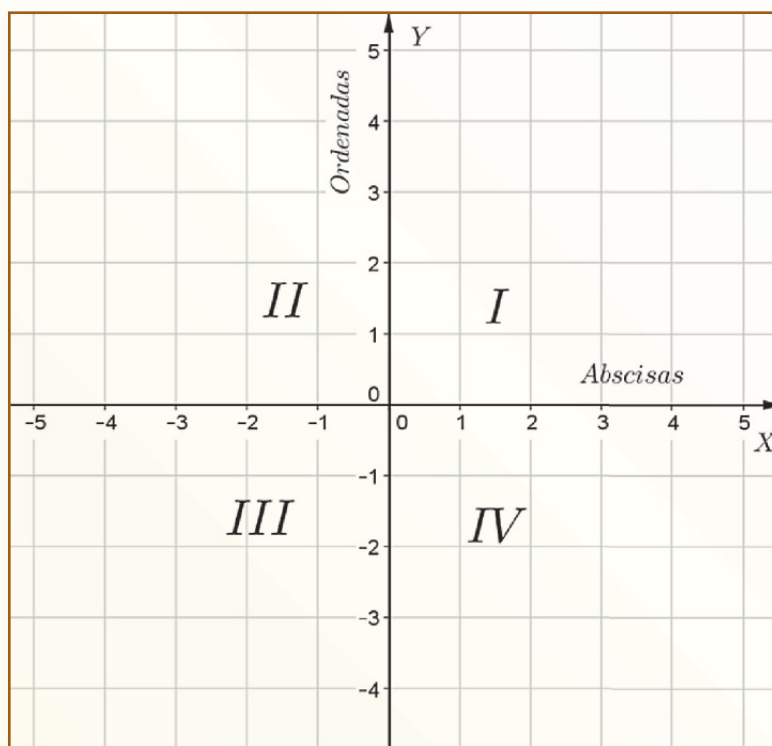


Figura 5



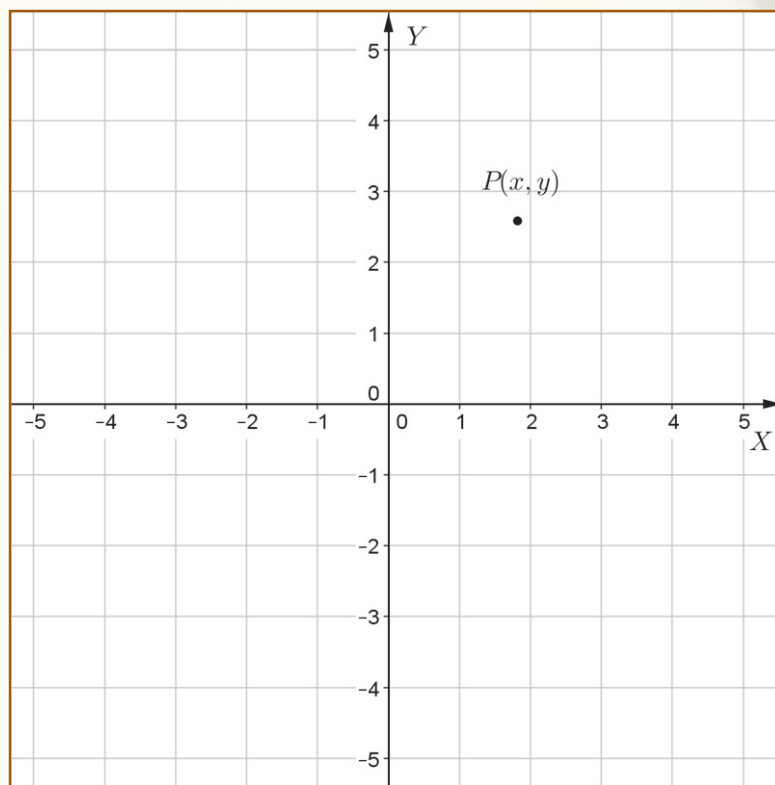


Figura 6

3. En la **Figura 6** se ha graficado un punto  $P(x,y)$  que está en el primer cuadrante:
- Grafique en la **Figura 6**, los puntos  $Q$ ,  $R$  y  $S$ , de tal modo que  $PQRS$  sea un rectángulo centrado en el origen. Escriba las coordenadas de los puntos  $Q$ ,  $R$  y  $S$ .
  - Expresa algebraicamente el perímetro y el área del rectángulo  $PQRS$ .

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Razón, distancia y lugares geométricos



En tu curso de **Matemáticas II**, calculaste áreas y perímetros de diferentes figuras geométricas (**triángulos, cuadrados, trapecios, círculos, etc.**). Requerías para hacerlo algunas medidas que se te proporcionaban o bien que podían ser obtenidas.

Una ventaja de que las figuras estén determinadas mediante parejas ordenadas, es que las distancias pueden ser directamente calculadas, si conocemos las parejas ordenadas que las determinan.

Por ejemplo, en la **Figura 1** se han trazado los vértices de un cuadrilátero:

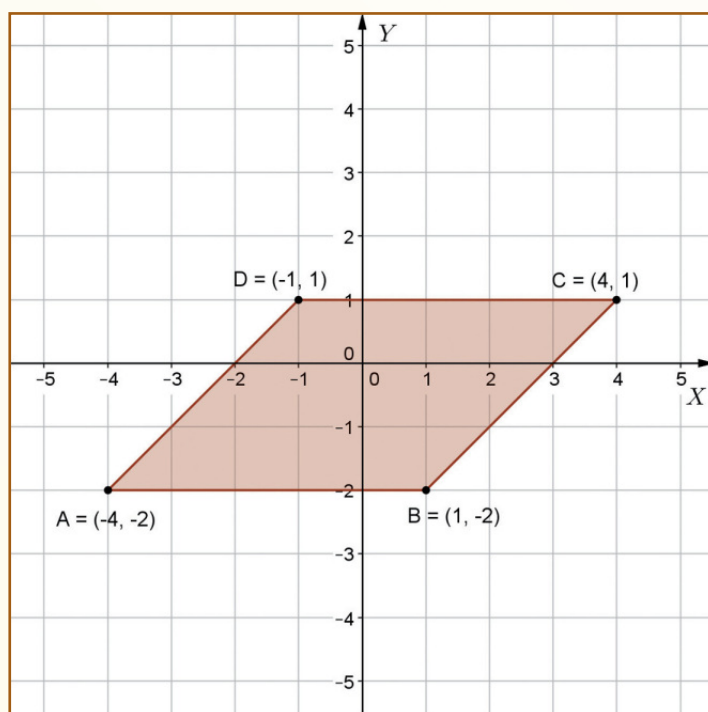


Figura 1



3. ¿Qué tipo de cuadrilátero es ABCD? Justifique la respuesta.

---

---

Si se trata de calcular el área de este cuadrilátero, una posibilidad es usar la base y la altura. Estas medidas no están dadas, pero pueden calcularse con facilidad, ya sea contando las unidades de longitud en la **Figura 1**, o bien usando las coordenadas de los vértices.

Por ejemplo la medida de AB, que puede tomarse como la base  $b$ , puede calcularse como:

$$b = 1 - (-4) = 5$$

Es decir como la diferencia de las abscisas de los puntos A y B, puesto que las ordenadas de todos los puntos sobre el segmento AB, son iguales. Este cálculo parece ocioso, puesto que la medida de AB puede obtenerse del conteo directo de las unidades contenidas en AB, sin embargo, este conteo no siempre podrá hacerse. Por ejemplo en la **Figura 2**, se ha trazado el segmento AB.

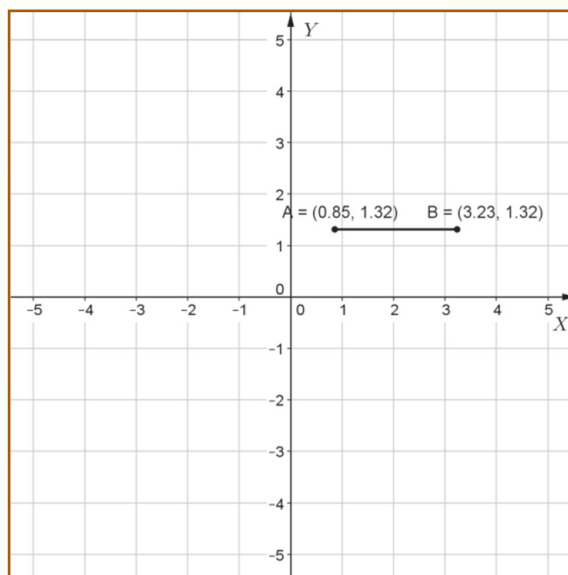


Figura 2

4. ¿Cuánto mide el segmento AB de la **Figura 2**?

---

---

Regresando a la **Figura 1**, puede verse que el cuadrilátero tiene una altura  $h$  que mide tres unidades. Para calcularla aritméticamente, puede tomarse, por ejemplo, el punto  $P(4,-2)$  y luego calcular la medida del segmento PC.



5. Calcula aritméticamente la altura  $h$  del cuadrilátero, usando las coordenadas de los puntos P y C.

---



---

6. Usa los valores de  $b$  y  $h$  para calcular el área del cuadrilátero ABCD. Verifica que el área calculada coincide con el número de unidades de área que contiene ABCD.

---



---

Como ha podido verse, las medidas de segmentos paralelos a los ejes, son fáciles de calcular a partir de las coordenadas de los puntos extremos del segmento. Ahora veremos cómo aprovechar estas distancias para calcular aquellas tomadas sobre segmentos no paralelos a los ejes coordenados.

Por ejemplo, si queremos calcular el perímetro del cuadrilátero ABCD de la misma **Figura 1**, solamente faltaría obtener las medidas de los segmentos AD y BC, puesto que ya conocemos las medidas de los otros dos. **La Figura 3** sugiere cómo calcular las distancias faltantes.

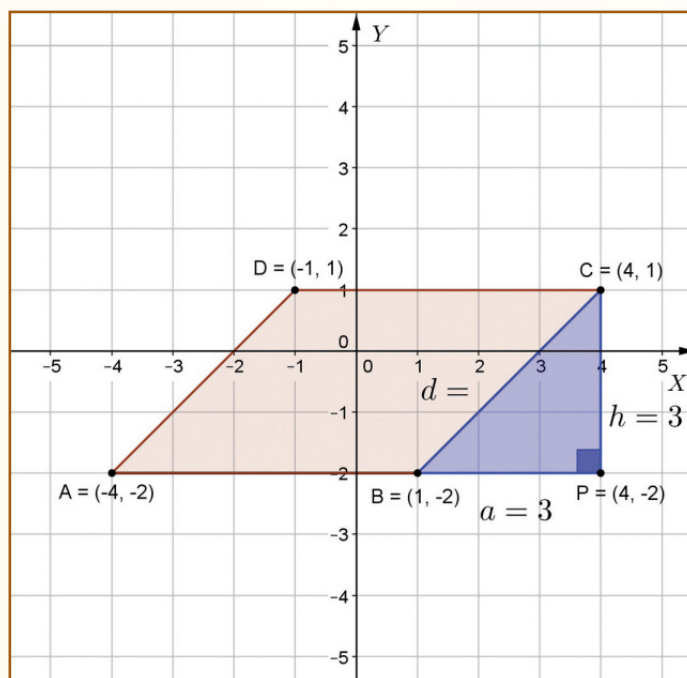


Figura 3

7. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD.

---



---



## Desarrollo

### Actividad: 2

Actividad de Equipo



Calcular distancias medidas sobre segmentos paralelos a los ejes, se reduce a calcular una diferencia entre las abscisas o entre las ordenadas de dos puntos. **La Figura 4**, ilustra el caso general de este cálculo.

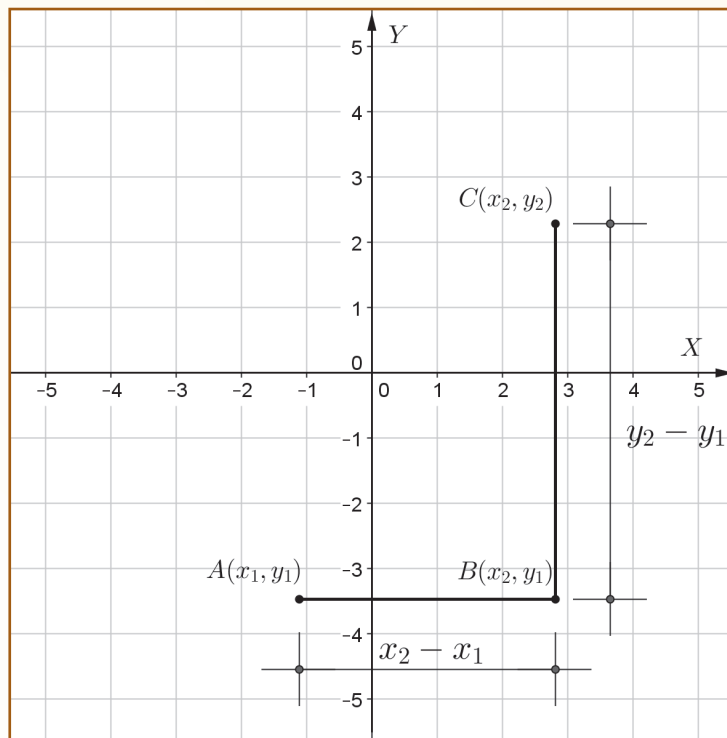


Figura 4

Estas distancias serán siempre positivas, por eso se dice, por ejemplo, que la distancia entre los puntos A y B, es  $|x_2 - x_1|$ , es decir el **valor absoluto** de la diferencia. Lo cual se traduce en la práctica en tomar siempre las distancias como positivas, independientemente del signo que tenga la diferencia.

1. Usa el **Teorema de Pitágoras** en la **Figura 4**, para expresar algebraicamente la distancia del punto A al punto C.

---

---

2. Aplica la **expresión algebraica** de la distancia entre dos puntos, para calcular las diagonales del cuadrilátero trazado en la **Figura 1**.

3. En la **Figura 5** se ha trazado un **rectángulo** centrado en el origen de coordenadas.

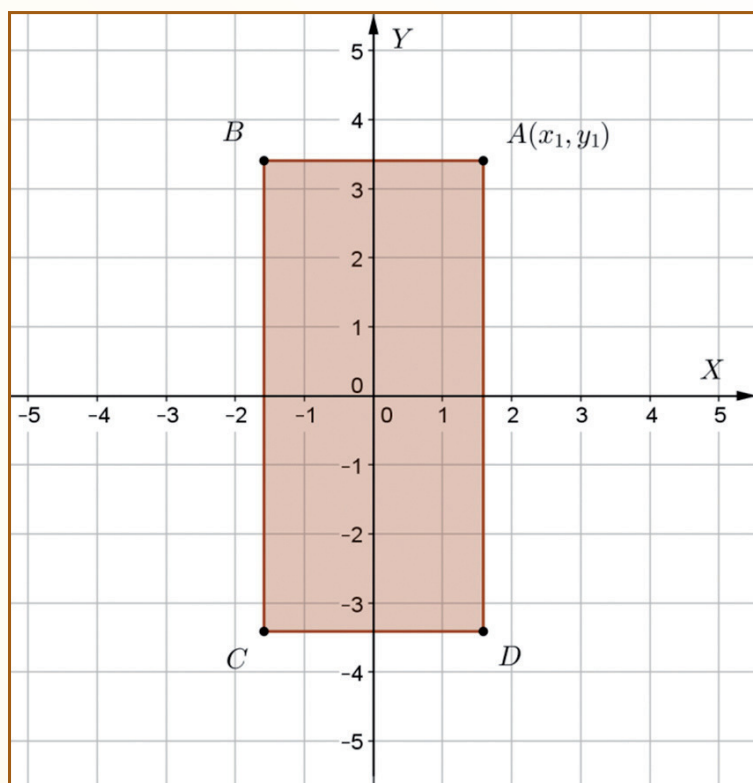


Figura 5



Con base en las coordenadas del punto **A**, escribe las coordenadas de los otros tres vértices y demuestra que en todo **rectángulo**, las dos diagonales miden lo mismo.

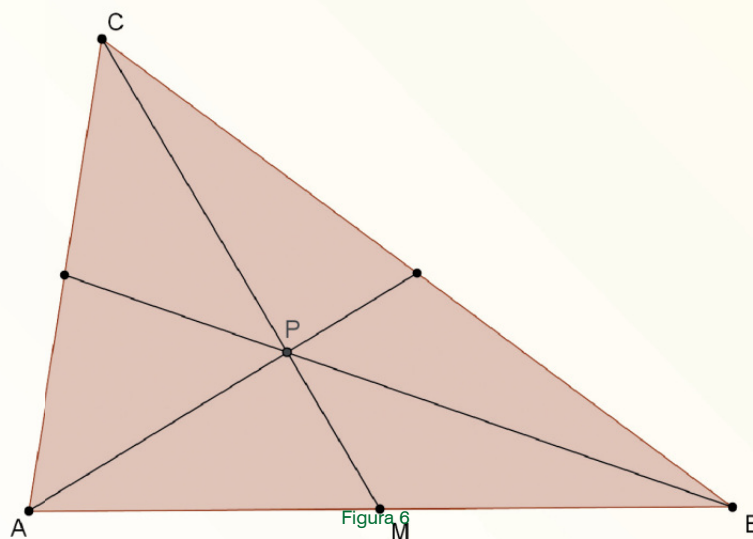
### Actividad: 3

Actividad de Equipo



En los cursos de *Geometría* se discute la razón en la que un punto divide a un segmento. Se sabe, por ejemplo, que en todo triángulo el *baricentro* divide a cada una de las medianas en una razón 1:2, o en la razón  $\frac{1}{2}$ . Esto significa (ver **Figura 6**) que al trazar las medianas de un triángulo, estas se intersectan en un punto P llamado *baricentro*, que divide a la mediana MC en la razón  $\frac{MP}{PC} = \frac{1}{2}$ . Lo cual también quiere decir que MP mide la mitad de PC.

Es decir, la razón en la que P divide a MC, compara las dos partes en las que MC queda dividido por P.



1. En cada uno de los siguientes casos, calcula la razón en la que el punto P divide al segmento AB.

a)



b)



2. En cada uno de los siguientes casos, grafica el punto  $P$  que divide al segmento  $AB$  en la razón indicada.

a)  $\frac{3}{5}$



b) 5



En la actividad anterior puede observarse que:

- a) Todas las razones involucradas son números positivos
- b) Todos los puntos  $P$  de división están contenidos en el segmento analizado.

Veamos ahora el caso en el que  $P$  es un punto que no está sobre el segmento  $AB$ , sino sobre su prolongación, como el caso mostrado en la figura siguiente:



¿Cuál será la razón en la que  $P$  divide al segmento  $AB$ ?

Como  $AP$  mide la mitad de  $PB$ , entonces podríamos decir que la razón es  $\frac{1}{2}$ ; pero sabemos que el punto  $Q$ , mostrado también en la figura, divide al mismo segmento  $AB$  en la razón  $\frac{1}{2}$ . Si nos dicen entonces que un punto divide al segmento  $AB$  en la razón  $\frac{1}{2}$ , ¿cómo sabremos si se trata de  $P$  o de  $Q$ ?

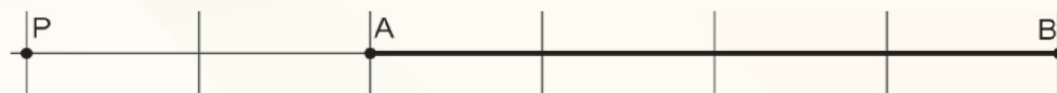
Para distinguir una situación de la otra, introduciremos la noción de segmento dirigido. Diremos entonces que:

Como  $AQ$  y  $QB$  tienen la misma dirección, diremos que la razón  $AQ/QB$  es  $\frac{1}{2}$ . En cambio, como  $AP$  y  $PB$  tienen direcciones distintas, entonces diremos que la razón  $AP/PB$  es  $-\frac{1}{2}$ .



1. En cada una de las figuras siguientes, calcula la razón en la que  $P$  divide al segmento  $AB$ .

a)



b)



Un problema típico en *Geometría Analítica* consiste en encontrar las coordenadas del punto  $P$ , que divide a un segmento  $AB$  en una razón dada.

En la **Figura 7**, se ilustra un caso en el cual se tiene un segmento  $AB$ , siendo  $A(-1,-6), B(4,4)$  y  $r = \frac{3}{7}$  es la razón en la que  $P$  divide al segmento  $AB$ . Se trata de calcular las coordenadas del punto  $P$ .

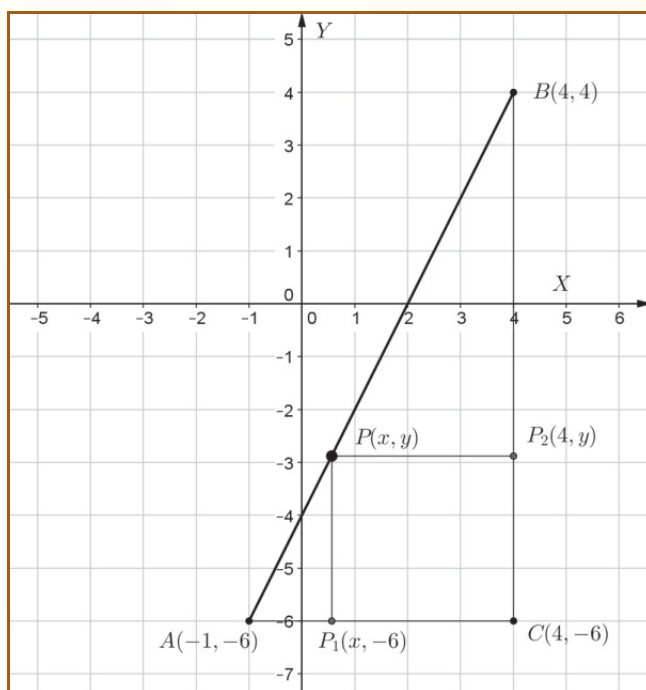


Figura 7

Por los puntos  $A$ ,  $P$  y  $B$  se han trazado paralelas a los ejes de coordenadas para localizar los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $C$ , que muestra la **Figura 7**.

Por el **paralelismo** entre  $PP_1$  y  $BC$ , se tiene que

$$\frac{3}{7} = \frac{AP}{PB} = \frac{AP_1}{P_1C}$$

Pero las distancias sobre segmentos paralelos a los ejes se calculan de manera directa, así:

$$\frac{AP_1}{P_1C} = \frac{x - (-1)}{4 - x} = \frac{3}{7}$$

O bien,

$$7(x+1) = 3(4-x)$$

Y al resolver esta ecuación se tiene:

$$x = \frac{1}{2}$$



Tenemos así la coordenada en  $x$  de l punto  $P$ .

2. Con base en la **Figura 7**, calcula la ordenada del punto  $P$ .

---



---



---



---

3. En general, si un punto  $P$  divide a un segmento  $AB$  en una razón dada  $r$ , sus coordenadas pueden determinarse con base en las coordenadas de los puntos  $A$  y  $B$ . La **Figura 8** ilustra esta situación.

Veamos cómo obtener las ordenadas del punto  $P$ :

Por los puntos  $A$ ,  $P$  y  $B$  se trazan paralelas a los ejes de coordenadas para localizar los puntos  $P_1$ ,  $P_2$  y  $C$ .

Por el paralelismo entre  $PP_1$  y  $BC$ , se tiene que

$$r = \frac{AP}{PB} = \frac{CP_1}{P_1B}$$

Pero las distancias sobre segmentos paralelos a los ejes se calculan de manera directa, así:

$$\frac{CP_1}{P_1B} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

O bien,

$$y - y_1 = r(y_2 - y)$$

Luego:

$$\begin{aligned} y + r y &= r y_2 + y_1 \\ y(1 + r) &= y_1 + r y_2 \end{aligned}$$

Y por último:

$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

Tenemos así la ordenada del punto  $P$ .

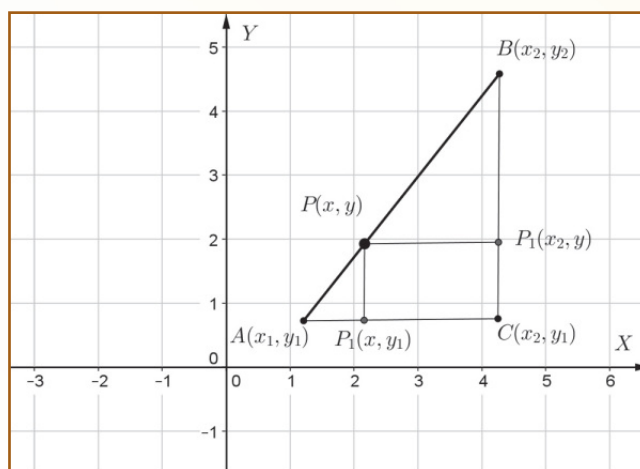


Figura 8

4. Utiliza la **Figura 8** para expresar la **abscisa** del punto  $P$ , que divide al segmento  $AB$  en la razón  $r$ , en términos de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $r$ ; tal como se hizo para calcular la ordenada del punto  $P$ .

## Actividad: 5

Actividad Individual



Un problema fundamental de la *Geometría Analítica* es la descripción algebraica de curvas. Para describir estas curvas, se requiere analizar las condiciones geométricas que las definen y luego traducir al álgebra estas condiciones. En realidad estas condiciones geométricas se establecen usualmente sobre los puntos

$P$  que al moverse sobre el plano cartesiano, las determinan. Una curva como éstas se conoce como el lugar geométrico generado por el punto  $P$ .

1. ¿Cuál será el lugar geométrico de un punto  $P$  que mantiene siempre su *abscisa* igual a su ordenada?

- a) En el plano cartesiano de la **Figura 9**, grafica algunos puntos que cumplan con esta condición.

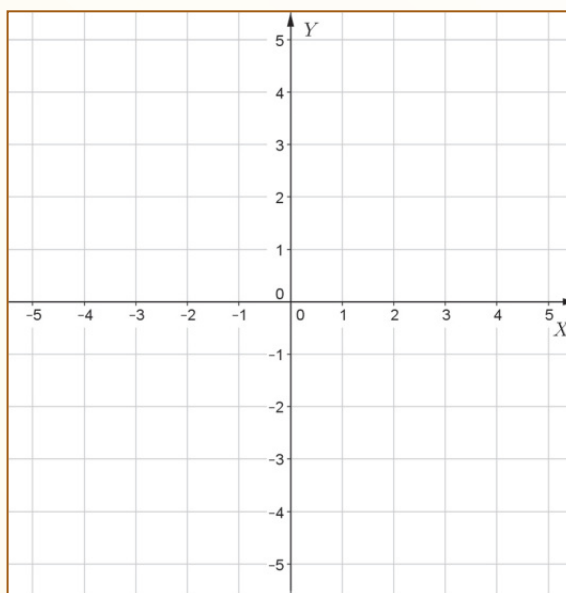


Figura 9

- b) ¿Qué curva generarán todos los puntos que cumplan con esta condición?

- c) Si un punto  $P(x,y)$  está sobre esta curva, expresa algebraicamente la relación que existe entre  $x$  y  $y$ .

2. Dado el segmento  $AB$ , donde  $A(0,1)$  y  $B(0,5)$ , encuentre el lugar geométrico de un punto  $P$  que se mueve de tal manera que el triángulo  $ABP$  se mantiene como triángulo isósceles.

a) Primero traza en el plano cartesiano de la **Figura 10**, algunos de los puntos que pertenecen al lugar geométrico.

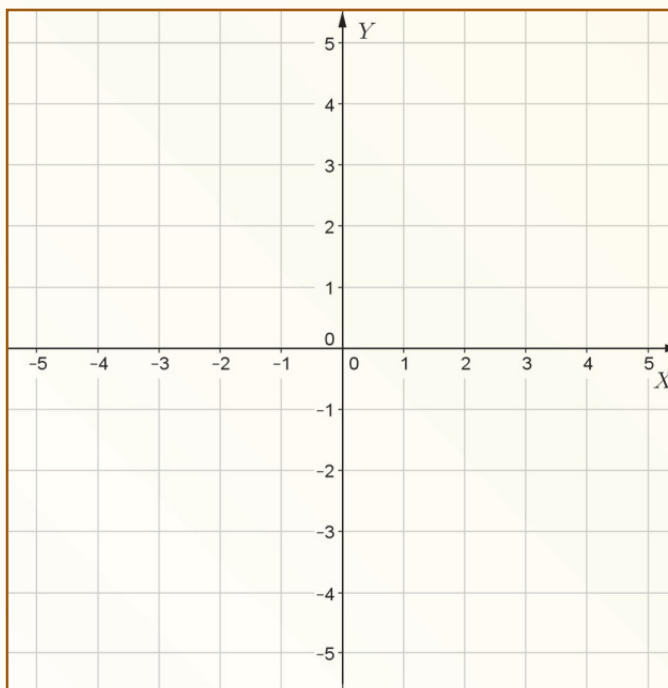


Figura 10

b) ¿De qué tipo de curva se trata?

---

c) Encuentra la ecuación del lugar geométrico.

---

---

3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen de coordenadas es siempre igual a 2, encontrar la ecuación de su lugar geométrico.





## Actividad de Cierre

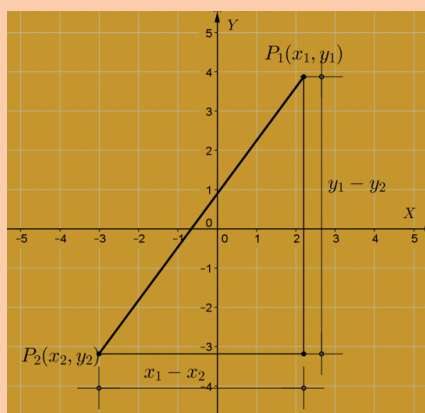


En esta secuencia hemos revisado y aplicado tres conceptos fundamentales en *Geometría Analítica*, el concepto de distancia, el de razón y el de lugar geométrico.

La manera como se calcula la distancia entre dos puntos puede formalizarse de la manera siguiente:

La distancia  $d$  entre dos puntos  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$ , está dada por:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



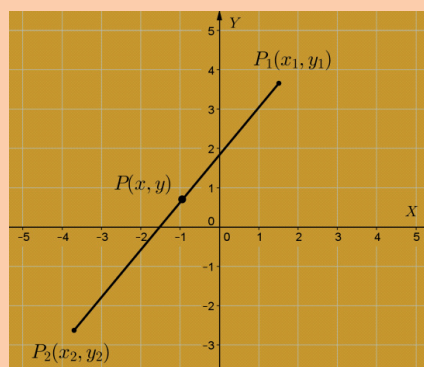
Las coordenadas del punto  $P$  que divide a un segmento en una razón  $r$  puede calcularse, usando las fórmulas siguientes:

Las coordenadas  $(x, y)$  del punto  $P$  que divide al segmento  $P_1P_2$ , en la razón  $r = \frac{P_1P}{PP_2}$  con  $P_1(x_1, y_1)$  y  $P_2(x_2, y_2)$

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

donde  $r \neq -1$ .



En el recuadro siguiente se resume la noción de lugar geométrico:

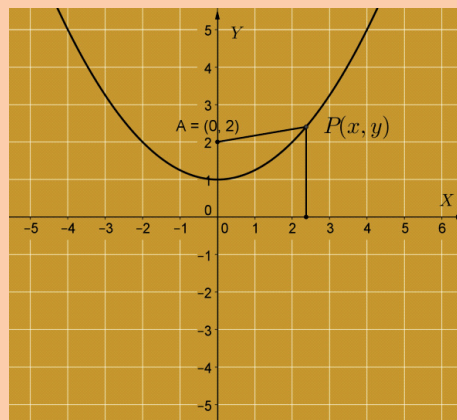
Una curva es el *lugar geométrico*, o conjunto de puntos que satisfacen algunas condiciones geométricas dadas.

La *ecuación de un lugar geométrico* es una ecuación en las variables  $x$  y  $y$ , cuyas soluciones son las parejas  $(x,y)$ , que satisfacen las condiciones geométricas que definen el lugar geométrico.

En la gráfica puede verse el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje  $X$  es igual a su distancia a punto  $(0,2)$ .

La ecuación de este lugar geométrico es:

$$y = \frac{x^2}{4} + 1$$



Se plantean ahora algunas situaciones relacionadas con estos conceptos.

1. Si  $M$  es el punto medio del segmento  $P_1P_2$ ,
  - a) Traza en la **Figura 11**, la ubicación aproximada de  $M$ .

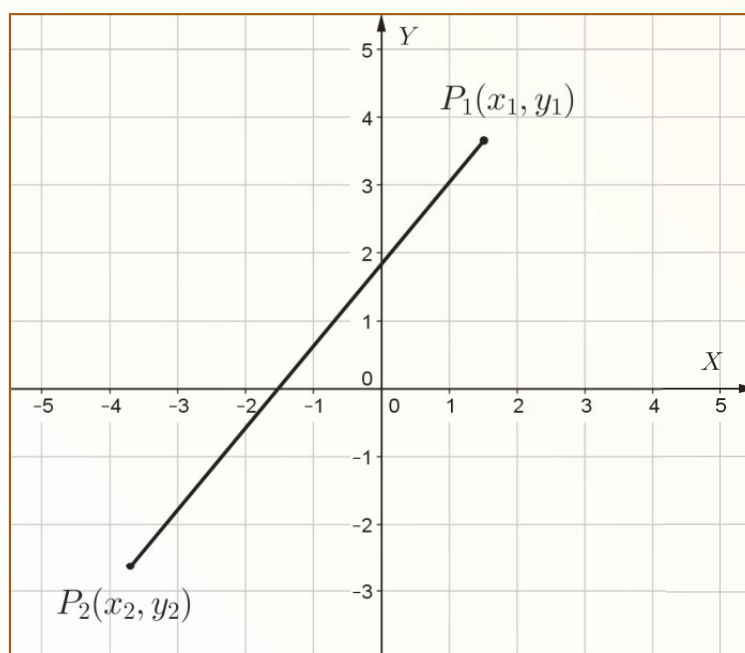


Figura 11

- b) ¿En qué razón divide  $M$  al segmento  $P_1P_2$ ?

- c) Si el punto M tiene coordenadas  $(x,y)$ , usa las expresiones:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

y

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

para expresar las coordenadas del punto M, en términos de las coordenadas de  $P_1$  y  $P_2$ .

2. En la **Figura 12** se ha trazado el segmento  $AB$ , con  $A(-4,-5)$  y  $B(2,3)$ .

- a) Calcula la distancia entre  $A$  y  $B$ .

---

- b) Si  $P$  es un punto que divide al segmento  $AB$  en la razón  $\frac{1}{5}$ , traza aproximadamente el punto  $P$ .

- c) Calcula las coordenadas del punto  $P$ .

---

- d) Calcula la distancia  $AP$ , para verificar que esta distancia es la sexta parte de la distancia  $AB$ .

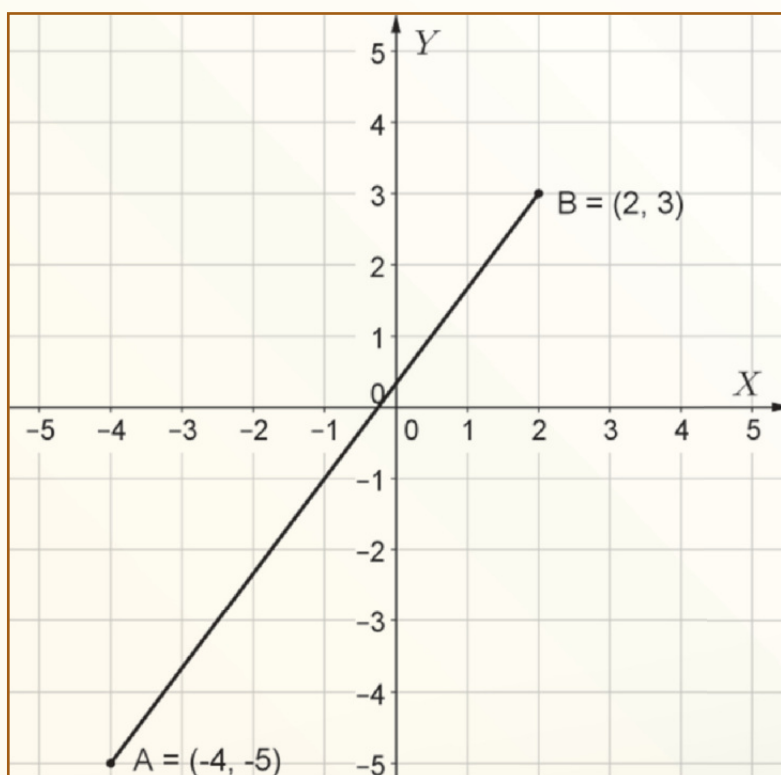


Figura 12

3. En la **Figura 13** se ha trazado el triángulo rectángulo  $ABC$ , cuyos vértices tienen las coordenadas indicadas.

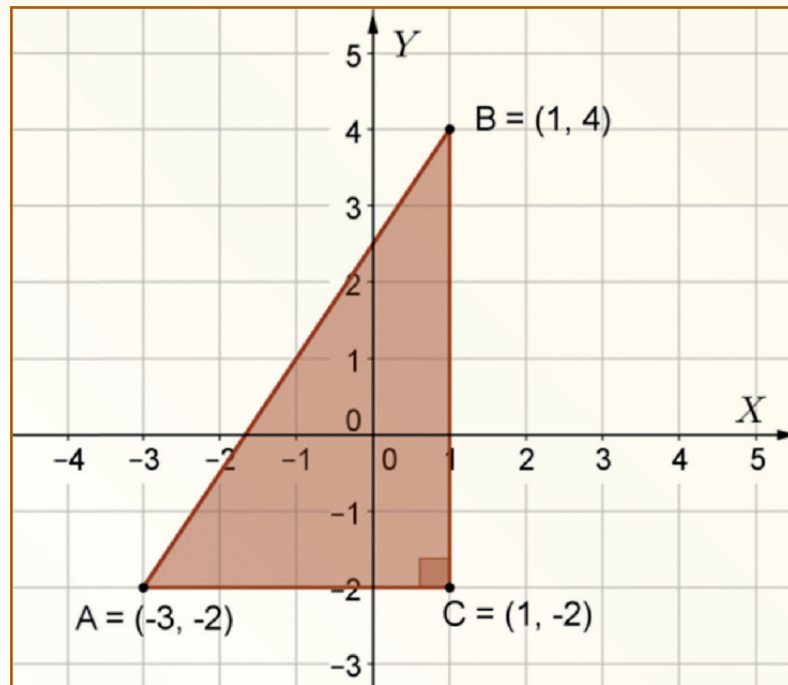


Figura 13

- a) Si  $P$  es el punto medio del lado  $AC$ , calcula las coordenadas de  $P$ .

---

---

- b) Calcula la distancia  $PC$  y verifica que el punto  $P$ , está a la misma distancia de los tres vértices del triángulo  $ABC$ .

---

---

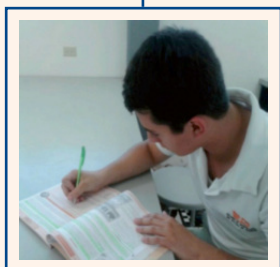
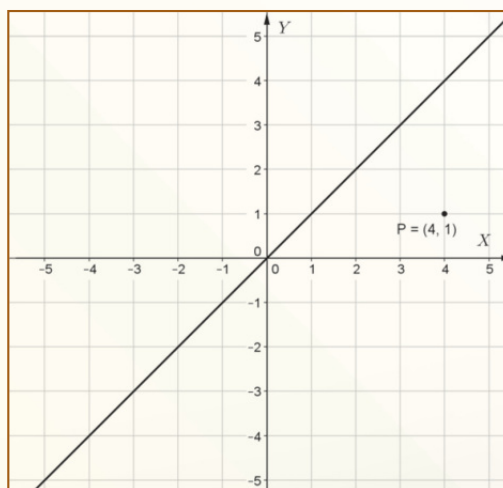


1. En las actividades de inicio se presentaron las coordenadas geográficas y las coordenadas del Ajedrez. Investiga sobre otro sistema de coordenadas que se use con fines prácticos y descríbelo aquí.

---

---

2. Grafica en un plano cartesiano los vértices P, Q y R de un triángulo isósceles.
3. Grafica un punto P en un plano cartesiano. Grafica dos puntos R y S, de tal modo que la distancia de P a R, sea el triple que la distancia de P a S.
4. Grafica dos puntos P y Q en el plano cartesiano. Luego grafica dos puntos R y S, de tal manera que los triángulos PQR y PQS tengan la misma área.
5. Grafica un rombo, cuyos vértices estén sobre los ejes cartesianos. Calcula el área del rombo.
6. Grafica los vértices P, Q, R y S de un trapecio isósceles. Calcula el área del trapecio trazado.
7. En la gráfica siguiente se ha trazado la bisectriz a uno de los ángulos definidos por los ejes coordenados. Si Q es el punto que resulta de la reflexión de P con respecto a esta recta. Grafica Q y escribe sus coordenadas.

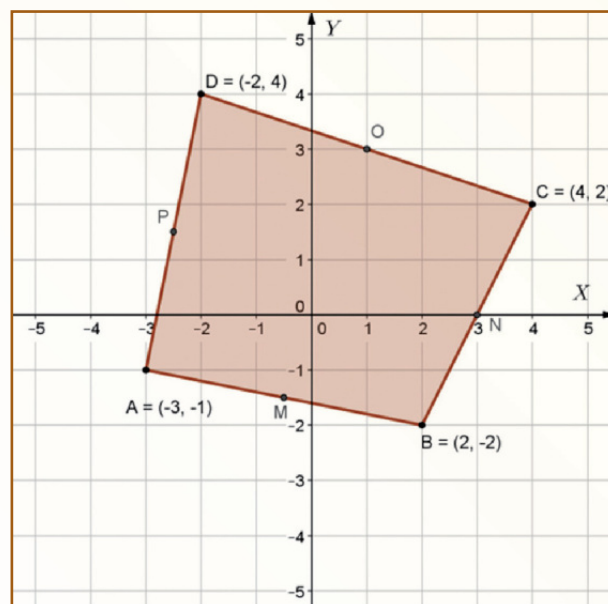




8. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos  $A(-2,0)$  y  $B(2,0)$ . Halla las coordenadas del tercer vértice.
9. En la tabla siguiente se te pide el cuadrante en el que está ubicado cada uno de los puntos. Llena la tabla, sin graficar los puntos:

Punto	Cuadrante
$(8,-1)$	
$(\frac{7}{2}, \frac{2}{5})$	
$(-21,-11)$	
$(-\frac{2}{3}, -5)$	
$(0,7)$	

10. Los vértices de un triángulo son  $A(-1,0)$ ,  $B(3,0)$  y  $C(4,4)$ . Si  $M$  es el punto medio de  $AB$ , calcula la longitud de la mediana  $CM$ .
11. En el cuadrilátero  $ABCD$  de la Figura, se han trazado los puntos medios de los lados.



- a) Calcula las coordenadas de los puntos medios  $M$ ,  $N$ ,  $O$  y  $P$ .
- b) Verifica que los lados opuestos del cuadrilátero  $MNOP$  son iguales.

12. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje de las ordenadas siempre es igual a 4. Grafica su lugar geométrico y encuentra la ecuación algebraica que describe este lugar geométrico.
13. ¿Qué curva representa la ecuación  $x=3$ ?
14. Un punto P se mueve de tal forma que su distancia al origen es siempre igual a 4.
- c) Grafica el lugar geométrico de P.
  - d) Halla la ecuación que describe este lugar geométrico.
5. Un punto P se mueve de tal manera que su distancia al eje de las ordenadas es siempre igual a su distancia al punto  $F(6,0)$ .
- a) Grafica el lugar geométrico de P.
  - b) Encuentra la ecuación que describe el lugar geométrico de P.



Los problemas y preguntas planteados en esta **sección** son de carácter individual, para hacerse preferentemente en casa y tiene el propósito fundamental de proporcionarte elementos de reflexión para que identifiques lo que has aprendido, lo que aún te ocasiona dificultades y lo que es necesario reforzar.

Para una mejor estimación de cómo han evolucionado tus aprendizajes, contrasta tus respuestas con los propósitos de aprendizaje presentados en la introducción al presente **BLOQUE**. De esta manera te podrás dar cuenta de lo que has aprendido, de lo que aún te cuesta dificultad hacer, de los errores que cometes y de los temas en los que necesitas estudiar con mayor detenimiento o pedir asesoría, ya sea a tu profesor o a tus compañeros de clase.

En caso de considerarlo necesario, el profesor te podrá solicitar los resultados de autoevaluación.

### Problema 1.

En la novela de Julio Verne titulada Los hijos del capitán Grant, los protagonistas de la historia estaban en busca de un naufragio, pero el único dato que tenían para localizarlo era la latitud sur de  $37^\circ$ . Así, tuvieron que recorrer todos los puntos posibles del naufragio. Describe el recorrido que hicieron.

---

---

---

Responde las preguntas siguientes:

- ¿Has leído el libro de Julio Verne mencionado en este problema?
- ¿Has tenido que hacer alguna consulta antes de describir el recorrido solicitado?
- ¿Has tenido que hacer algún dibujo para orientarte antes de hacer la descripción?
- ¿En qué podría ayudarte un dibujo para describir el recorrido del problema?
- ¿Qué conceptos estudiados en este **BLOQUE** te han ayudado a describir el recorrido solicitado?

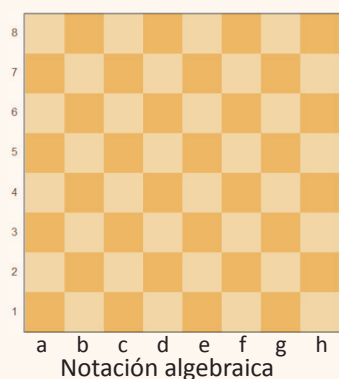
### Problema 2.

En la segunda actividad de este **BLOQUE**, se introduce la notación algebraica usada en el juego de Ajedrez; esta notación está basada en referencias numéricas y literales. La figura siguiente muestra un primer tablero donde han sido anotadas estas referencias y un segundo tablero donde las referencias son solamente numéricas. Éste último nos permitiría introducir una nueva notación para el ajedrez asociando a cada casilla, una pareja ordenada. La equivalencia entre ambas notaciones, se ilustra con los siguientes ejemplos:

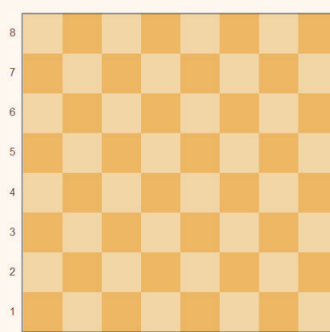
$$c2 \leftrightarrow (3,2)$$

$$g6 \leftrightarrow (7,6)$$

$$h1 \leftrightarrow (8,1)$$



Notación algebraica



Nueva notación

Usaremos esta nueva notación para plantear los problemas siguientes:

- a) Si la única pieza sobre el tablero es un alfil colocado en la casilla (1,1) y queremos mover esta pieza a la casilla (8,8). Usa la nueva notación para describir la trayectoria que seguiría el alfil.
  
- b) Si la única pieza sobre el tablero es una torre colocada en la casilla (1,1) y queremos mover esta pieza a la casilla (8,8). ¿Cuál será el número mínimo de jugadas necesarias para llevar la torre de la casilla inicial a la casilla final? Usa la nueva notación para describir la trayectoria que seguiría la torre.
  
- c) ¿Cuál de las dos notaciones mostradas aquí te parece más ventajosa? Justifica tu respuesta.
  
- d) ¿Con qué propósito se inventaría la notación algebraica para el ajedrez?
  
- e) Sin consultar el tablero de la figura anterior y atendiendo solamente la descripción que has dado, ¿podrías imaginarte las trayectorias que seguirían el alfil y la torre en este problema? Explica.
  
- f) ¿Encuentras alguna relación entre la nueva notación para el ajedrez y el sistema de coordenadas cartesianas? Explica.



### Problema 3.

En el cierre de la segunda secuencia didáctica (*Actividad 6*) se estableció que:

Las coordenadas  $(x,y)$  del punto  $P$  que divide al segmento  $P_1P_2$ , en la razón

$r = \frac{P_1P}{PP_2}$  con  $P_1(x_1,y_1)$  y  $P_2(x_2,y_2)$ , están dadas por:

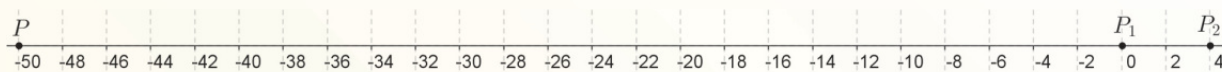
$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}$$

$$y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

Especificándose que  $r \neq -1$ .

a) ¿Qué valor toman las coordenadas del punto  $P$ , cuando  $r = -1$ ?

Veamos en la figura siguiente, cuál es la razón en la que  $P$  divide al segmento  $P_1P_2$



Como  $P_1P$  y  $PP_2$  son segmentos dirigidos y tienen sentidos contrarios, entonces  $P_1P = -50$  y  $PP_2 = 54$ , luego  $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{-50}{54} \cong -0.9259$ .

Usa la calculadora para llenar la tabla siguiente, en donde se han tomado diferentes posiciones para  $P$ .

$P$	$P_1$	$P_2$	$P_1P$	$PP_2$	$\frac{P_1P}{PP_2}$
$(-50,0)$	$(0,0)$	$(4,0)$	$-50$	$4$	$-0.9259$
$(-100,0)$	$(0,0)$	$(4,0)$			
$(-500,0)$	$(0,0)$	$(4,0)$			
$(-1000,0)$	$(0,0)$	$(4,0)$			

Conforme  $P$  se aleja del punto  $P_1$ , explica a qué se aproxima  $\frac{P_1P}{PP_2}$ .

---

---

c) ¿Cómo tendrían que ser  $P_1P$  y  $PP_2$ , para que  $\frac{P_1P}{PP_2} = -1$ ?

d) ¿Existirá un punto  $P$ , tal que  $\frac{P_1P}{PP_2} = -1$ ? Justifique su respuesta.

---

---

e) Si  $P$  se aproxima cada vez más a  $P_1$ , ¿a qué se aproximará  $\frac{P_1P}{PP_2}$ ?  
Justifica tu respuesta.

---

---

f) Haz una lista con los conceptos que usaste para responder las preguntas de la situación anterior.

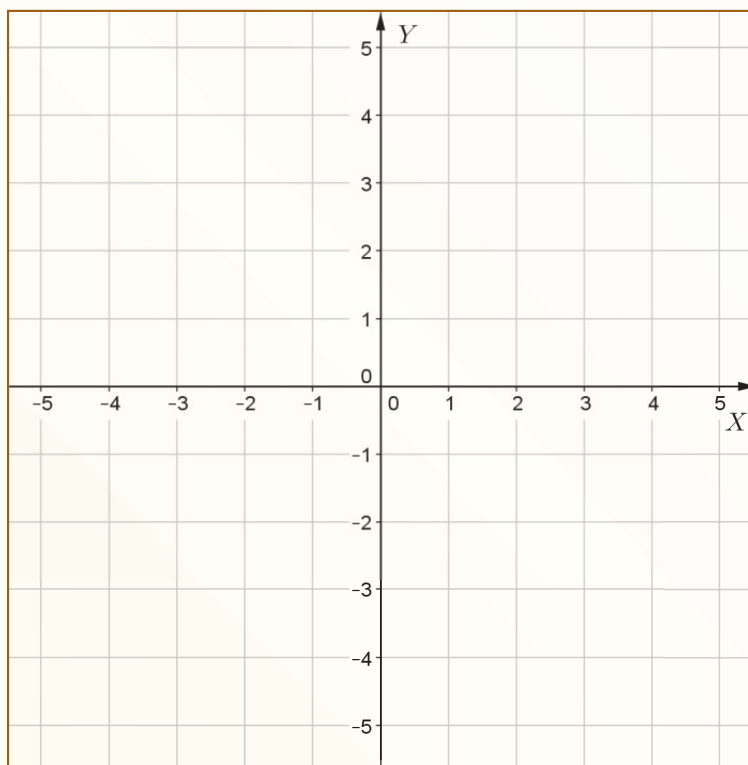
---

---

## a) Problema 4.

Se tienen dos puntos fijos  $A(-5,0)$  y  $B(5,0)$  y un punto  $P(x,y)$  se mueve de tal manera que el ángulo  $APB$  siempre es un ángulo recto. Encuentre la ecuación del lugar geométrico descrito por el punto.

- a) En el plano cartesiano siguiente, traza los puntos  $A$  y  $B$  y algunos puntos  $P$  que cumplan con la condición establecida en el problema, hasta que tengas una conjetura sobre qué tipo de curva describe el punto  $P$ .



- b) ¿Cuál es el valor de la distancia  $AB$ ?

---



---

- c) Aunque en general desconocemos las coordenadas del punto  $P$ , podemos suponer que ese punto existe y tiene coordenadas  $(x,y)$ . Usa estas coordenadas de  $P$ , para encontrar una expresión de las distancias  $AP$  y  $BP$ .

---



---

d) ¿Qué tipo de triángulo será el triángulo  $APB$ ?

---

---

---

e) Aplica un teorema conveniente para relacionar algebraicamente las distancias  $AB$ ,  $AP$  y  $BP$ .

---

---

---

f) Simplifica lo más que puedas la relación que estableciste entre las distancias.

---

---

---

g) ¿Reconoces la curva que representa la ecuación que encontraste?

---

---

h) Haz una lista con los conceptos matemáticos utilizados para resolver este problema, separando aquellos que estudiaste en este **BLOQUE**, de los que aprendiste en otros cursos.

---

---

---

Reflexiones generales sobre el **BLOQUE 2**:

1. Si tuvieras que explicar a tus compañeros de equipo las ideas que te han quedado sobre los conceptos siguientes:

- a) Plano Cartesiano
- b) Distancia entre dos puntos
- c) Razón en la que un punto divide a un segmento.
- d) Lugar geométrico
- e) Ecuación de un lugar geométrico

¿Te sientes preparado para hacerlo?

¿Con cuáles de los conceptos tendrías mayor dificultad al explicarlo?

2. Al resolver problemas en equipo, ¿te han resultado útiles las ideas propuestas por tus compañeros?



3. Al resolver problemas en equipo, ¿has propuesto ideas a tus compañeros para resolverlos?
4. Haz una lista con las nociones que te han resultado más difíciles de entender y con los problemas que no has podido resolver.
5. ¿A quién piensas pedir asesoría para superar tus dificultades, en caso de que tengas alguna con este bloque?
6. ¿Puedes usar algún software matemático para ayudarte con las gráficas que aparecieron en este **BLOQUE**? ¿Cuál? ¿Dónde aprendiste a usarlo?



# BLOQUE 2

Resuelve problemas con...

La Recta

## INTRODUCCIÓN:

Este **BLOQUE** está organizado en tres **secuencias didácticas**, en las que tendrás la oportunidad de estudiar aspectos relacionados con **la recta**. La primera de las secuencias se centra en el estudio de **la pendiente** como elemento indispensable para definir lo que es una **recta** en el **plano cartesiano**; en la segunda se presentan situaciones en las que se obtienen e identifican diferentes formas en las que se puede representar analíticamente (algebraicamente) una **recta**; en la tercera se trata sobre la relación que tienen las pendientes de dos **rectas** cuando éstas son **paralelas o perpendiculares**, así como situaciones en las que se debe poner en juego la manera de determinar la distancia entre un punto y una **recta**.

Por otra parte, se espera que al trabajar con las secuencias vayas desarrollando tanto **competencias disciplinares** como **genéricas**, un ejemplo de estas últimas es que tienes la oportunidad de participar y colaborar de manera efectiva en diversos equipos. Esto lo puedes identificar cuando se propone trabajar en equipo o de manera grupal, ya que para ello requieres compartir con tus compañeros el diseño de estrategias para enfrentar una situación, así como los resultados que obtienes. Para lograr un intercambio eficaz de ideas con los miembros de tu equipo requieres comunicarte de manera escrita o verbal al expresar tus opiniones, argumentar el porqué de tus resultados, refutar lo que tus compañeros dicen o corregir tus estrategias y/o resultados cuando tus compañeros te convencen con sus argumentos, utilizando para ello no sólo tu lengua materna, sino también los recursos que te proporciona la matemática.

# Secuencia Didáctica 1.-

## Actividad de Inicio

¿Muy empinado o poco empinado?

Coloquialmente se dice que una escalera está “muy empinada” o “poco empinada” dependiendo del grado de inclinación que tenga, lo mismo se aplica para rampas, resbaladeros, cerros, etc.



1. ¿Qué otros términos conoces o has escuchado que sean empleados para referirse a la inclinación de una escalera, rampas, resbaladeros o cerros?

En la **Figura 1** se puede observar la forma que tienen las escaleras en la mayoría de los planteles del **Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora** que constan de al menos dos plantas. Si te fijas, para subir de una planta a otra hay dos escaleras, una inclinada a la derecha y otra a la izquierda (hacia enfrente o hacia atrás dependiendo de la forma en que la observes).

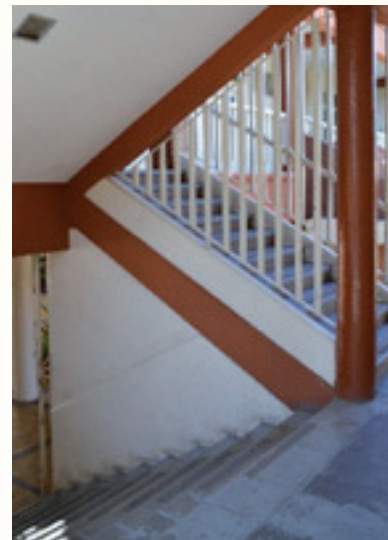


Figura 1

## 2. ¿A qué crees que se debe este tipo de diseño?

Diseñar este tipo de escaleras requiere determinar la **longitud** de la **altura** de cada escalón (peralte) y el espacio disponible para poner el pie (huella). Para ello es indispensable conocer la longitud disponible para cubrir las huellas y la **altura** en la que deberán estar distribuidos los escalones, tal como se señala en la **Figura 2**.

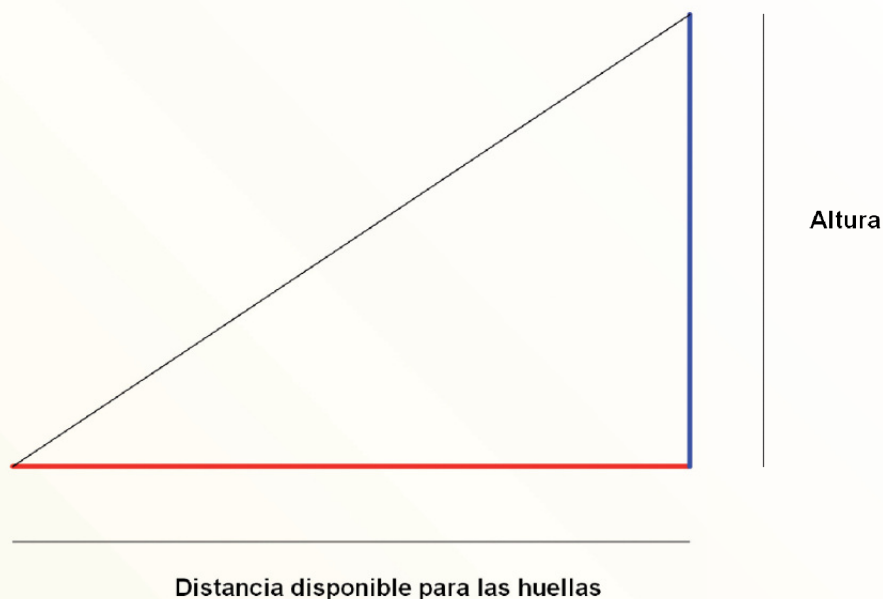


Figura 2

## 3. ¿Qué tipo de figura geométrica se forma en la Figura 2?

En la **Figura 3** se muestran los elementos de este tipo de escaleras.

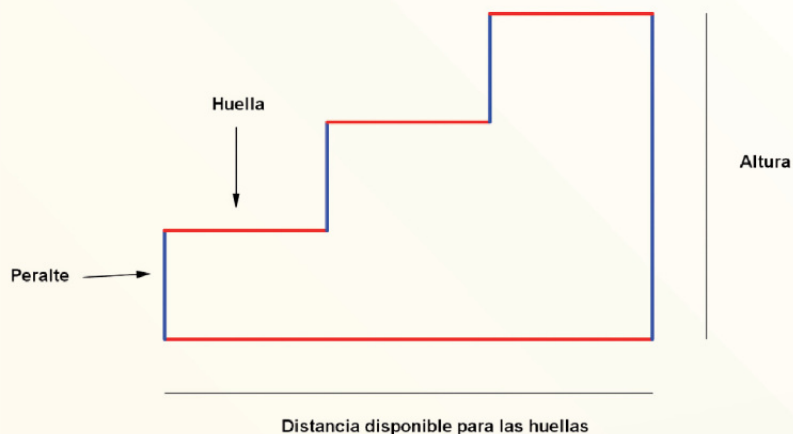


Figura 3



4. Si se quiere disminuir la inclinación de la escalera (qué esté menos empinada), sin modificar la distancia disponible para las huellas, ¿qué debes hacer con la altura? Argumenta tu respuesta.

---



---



---

5. Si se quiere aumentar la inclinación de la escalera (qué esté más empinada), sin modificar la altura, ¿qué debes hacer con la distancia disponible para las huellas? Argumenta tu respuesta.

---



---

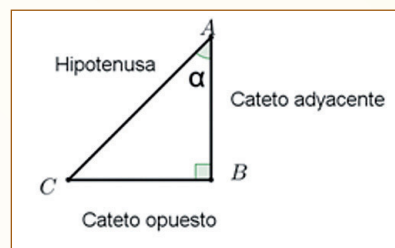
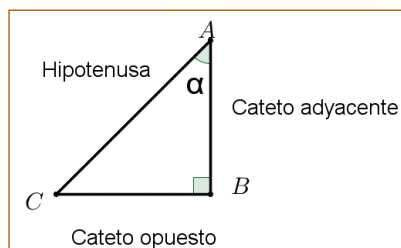


---



En el curso de **Matemáticas 2** estudiaste el tema de razones trigonométricas en el contexto de la semejanza de triángulos, en ellas se relacionan los lados de un triángulo rectángulo con alguno de los ángulos agudos.

En la siguiente figura se muestran dos triángulos rectángulos:



En ellos se señala el **ángulo agudo** de interés sobre el que se identifican las razones trigonométricas: *Seno*, *Coseno*, *Tangente*, *Cotangente*, *Secante* y *Cosecante* las cuales se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Sen } \alpha &= \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \\ \text{Cos } \alpha &= \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} \\ \text{Tan } \alpha &= \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cot } \alpha &= \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} \\ \text{Sec } \alpha &= \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} \\ \text{Csc } \alpha &= \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} \end{aligned}$$

Con cualquiera de estas razones trigonométricas se puede conocer el ángulo agudo que se desee de un triángulo rectángulo, siempre y cuando se tengan los datos apropiados del triángulo.

1. Para construir una escalera se tienen las dimensiones que se muestran en la **Figura 4**.

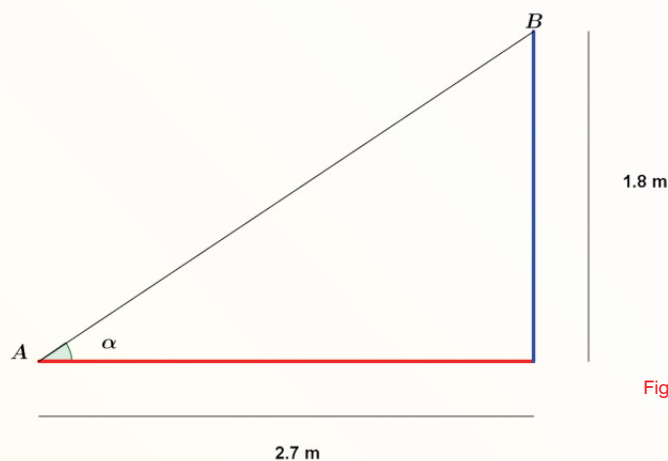


Figura 4

- Si se quiere utilizar de manera directa la información que se muestra en la figura, ¿cuál es la razón trigonométrica que te permite encontrar el ángulo  $\alpha$  (ángulo de inclinación de la escalera)?
- ¿Cuál es el valor del ángulo de inclinación que debe tener la escalera?

2. Si la Norma Oficial Mexicana (NOM) establece que: ... la longitud de las huellas de los escalones, debe ser como mínimo de 25 cm, y el peralte tener un máximo de 23 cm. Estas dos variables...

- Propón una longitud de huella y peralte que se ajuste a las dimensiones que se tienen disponible (que no sobre y que no falte nada), pero que cumpla con la NOM, y coloca la longitud propuesta sobre línea correspondiente en la **Figura 5**.

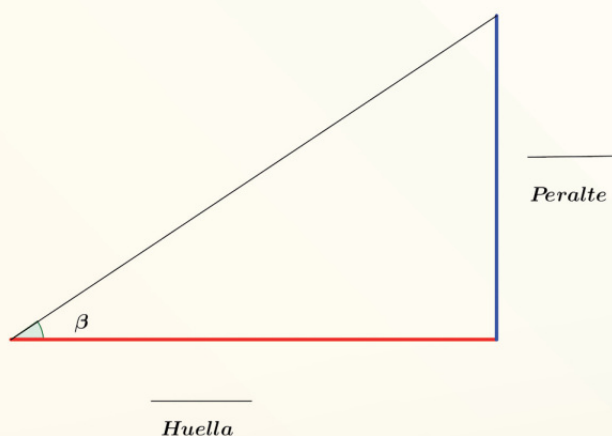


Figura 5



b) Compara las dimensiones que propusiste con las de tus compañeros de equipo.

---

---

---

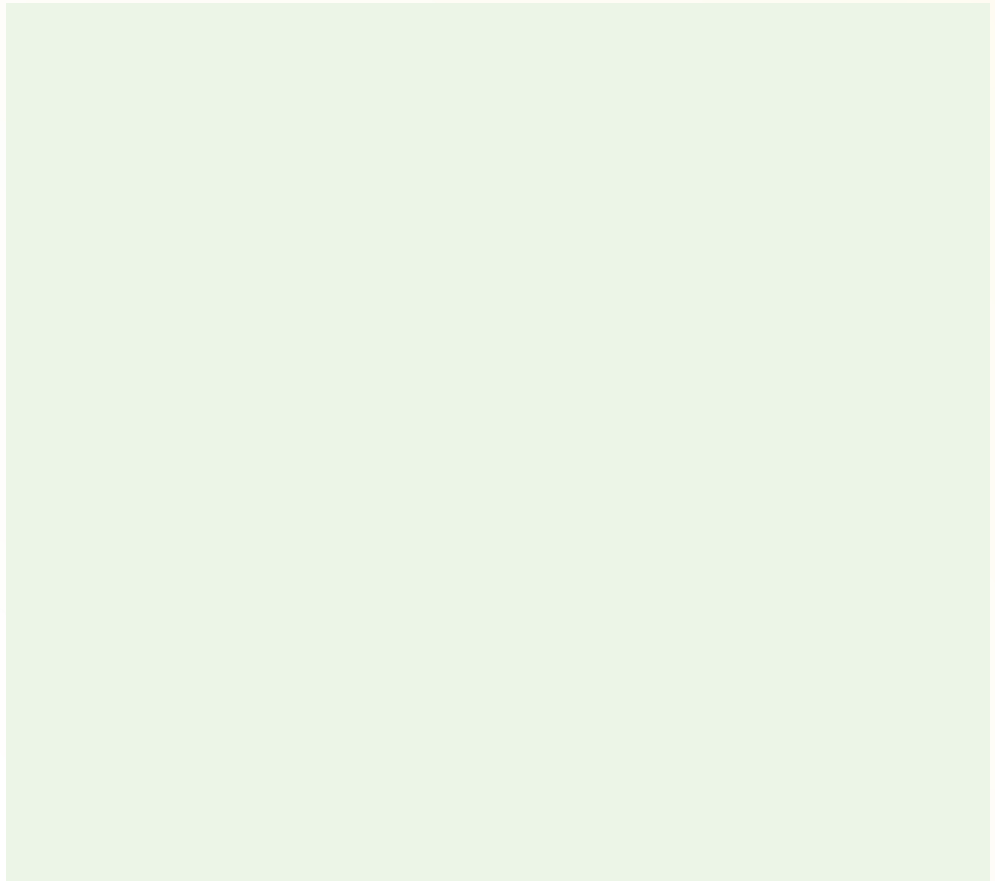
c) ¿Coincidieron las longitudes propuestas?

---

---

---

d) ¿Cómo es el valor de la **tangente** del **ángulo  $\beta$**  (**ángulo de inclinación** del escalón) respecto al **ángulo  $\alpha$**  (**ángulo de inclinación** de la escalera)?





## Desarrollo

### Actividad: 3

Actividad Grupal



En *Geometría* una manera de medir la inclinación de **segmentos** es el **ángulo**  $\alpha$  o cualquier razón trigonométrica relacionada con este **ángulo**, pero la razón más utilizada para medir dicha inclinación es la **tangente** del **ángulo**  $\alpha$  (ver **Figura 6**).

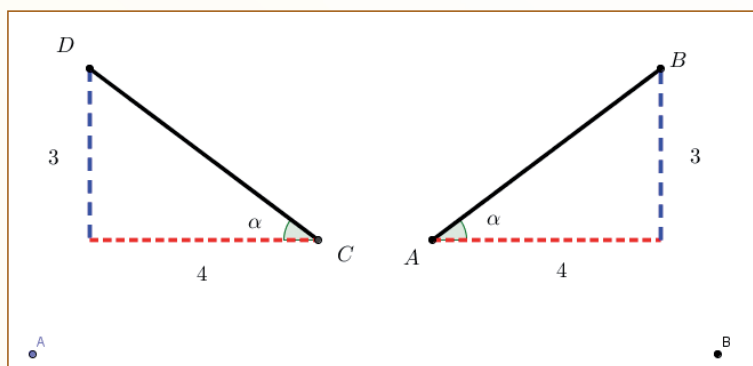


Figura 6

Si quisiéramos comparar la inclinación de los **segmentos** **AB** y **CD** de la figura utilizando la **tangente** de  $\alpha$ , en ambos casos obtendríamos  $3/4$ ; pero es evidente que los **segmentos** no tienen la misma inclinación, ya que uno está inclinado a la derecha y el otro a la izquierda.

Hay situaciones donde es importante saber la orientación de la inclinación, por ejemplo de una escalera como la que se muestra en la **Figura 7**.



Figura 7

1. ¿En cuántos tramos se construyó la escalera de la **Figura 7**?

---

---

---

2. Si en todos los tramos se utilizaron **2.4 m.** para colocar las huellas y **1.35 m.** para colocar los peraltes, ¿cuál es el valor de la **tangente** del **ángulo de inclinación** de cada tramo de escalera?

---

---

---

3. Describe la forma en que se está moviendo la persona de la imagen de la izquierda de la **Figura 7** (desde tu **perspectiva**).

---

---

---

4. Describe la forma en que se está moviendo la persona de la imagen de la derecha de la **Figura 7** (desde tu **perspectiva**).

---

---

---

5. ¿Coinciden las descripciones que hiciste?

---

---

---



## Actividad Individual



Traslademos los dos primeros tramos de la escalera a un plano cartesiano, tal como se muestra en la **Figura 8**.

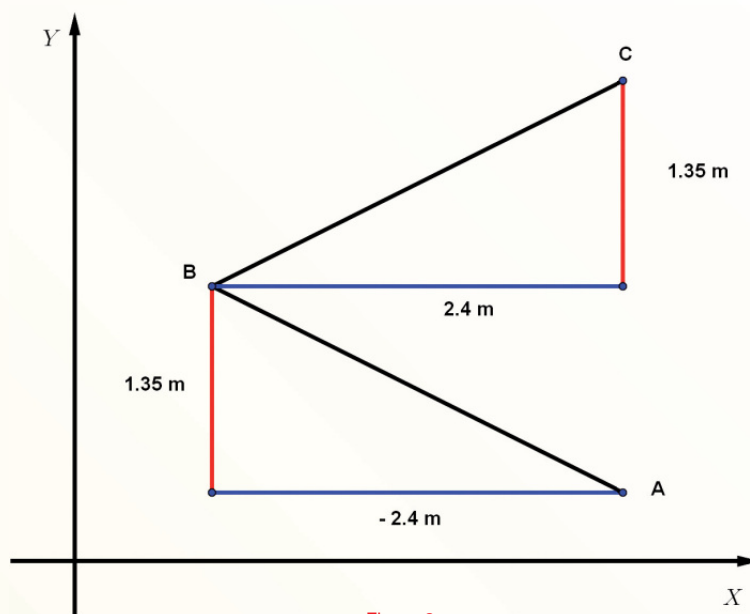


Figura 8

Si los segmentos  $AB$  y  $BC$  representan las escaleras, para describir los movimientos horizontal y vertical que realiza una persona al subir o bajar, se toma en cuenta el punto de partida y el punto de llegada, así como el signo correspondiente según sea el caso de acuerdo a la siguiente tabla.

Movimiento	Hacia donde	Signo
Horizontal	Derecha	+
	Izquierda	-
Vertical	Arriba	+
	Abajo	-

Para utilizar este criterio al determinar la **tangente** del **ángulo** de inclinación de un **segmento** en *Geometría Analítica*, es fundamental determinar cuál es el punto de partida y cuál es el punto de llegada. Si observas el ejemplo que se muestra en la **Figura 8**, no importa cuál sea el punto de partida o el punto de llegada.

Por ejemplo, en el caso del segmento  $AB$ , al aplicar los criterios que se muestran en la tabla describe un movimiento vertical hacia arriba de 1.35 unidades (1.35) y un movimiento horizontal a la izquierda de 2.4 unidades (-2.4), esto quiere decir que el punto de partida es  $A$  y el punto de llegada es  $B$ .

6. Si se considera que el punto de partida es  $B$  y el punto de llegada es  $A$ ,

a) ¿Cuál es el valor que le corresponde al movimiento vertical?

---

---

b) ¿Cuál es el valor que le corresponde al movimiento horizontal?

---

---

c) ¿Cuál es el valor de la **tangente** del **ángulo** del **segmento**?

---

---

d) ¿Cambió el valor de la **tangente** del **ángulo** al cambiar el punto inicial y final del **segmento**?

---

---

7. De acuerdo a la información que se muestra en la figura, en el **segmento**  $BC$ ,

a) ¿Cuál es el punto de partida?

---

---

b) ¿Cuál es el punto de llegada?

---

---

c) ¿Cuál es el valor de la **tangente** del **ángulo de la inclinación del segmento**?

---

---



En *Geometría Analítica* esta manera definir la **tangente** del **ángulo de inclinación** de un **segmento** se concreta mediante la siguiente razón:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A esta razón se le llama **pendiente**.

Para que el signo corresponda con lo que se señala en la tabla,  $P_2$  es el punto de llegada y  $P_1$  es el punto de partida, de acuerdo al esquema que se muestra en la **Figura 9**.

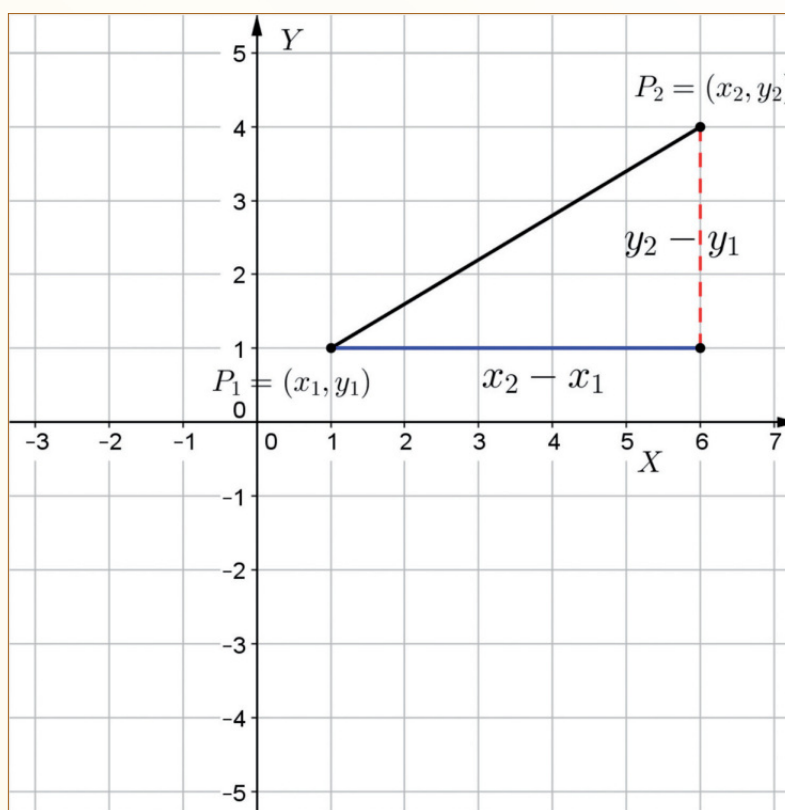


Figura 9

Donde  $y_2 - y_1$  puede interpretarse como lo que **sube o baja** el punto  $P_1$  al trasladarse al lugar donde está el punto  $P_2$ , mientras que  $x_2 - x_1$  puede interpretarse como lo que **avanza o retrocede** según sea el caso.

Un ejemplo similar al anterior consiste en determinar la dirección de los **segmentos AB y CD** que se muestran en la **Figura 10**, para ello hay que establecer cuál es el punto de partida y cuál el punto de llegada para calcular el valor de la pendiente.



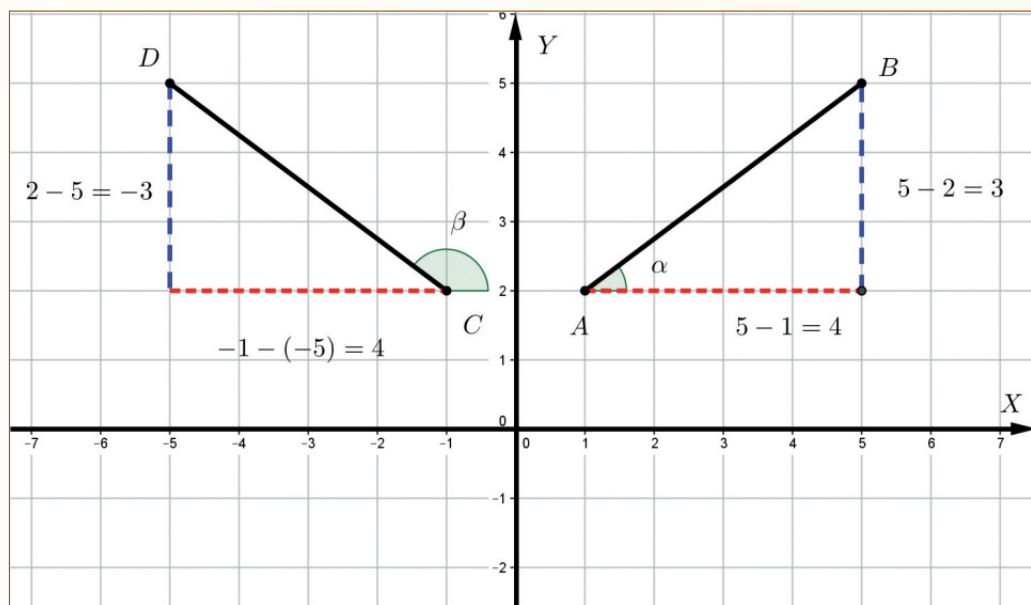


Figura 10

De donde se tiene que:

$$m_{AB} = \frac{3}{4}$$

$$m_{CD} = -\frac{3}{4}$$

En el caso del segmento  $AB$ , la pendiente es positiva y corresponde a la *tangente* del *ángulo*  $\alpha$  (*agudo*), mientras que la pendiente del segmento  $CD$  es negativa y corresponde a la *tangente* del *ángulo*  $\beta$  (*obtuso*).

## Actividad: 4

Actividad Individual



1. Para cada uno de los siguientes casos, determina el valor de la pendiente de los **segmentos**<sup>1</sup> que se forman con las siguientes parejas de puntos:

**Caso 1.** Pendiente de los **segmentos**:

$AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  y  $CD$ , utilizando la información que se proporciona en la **Figura 11**.

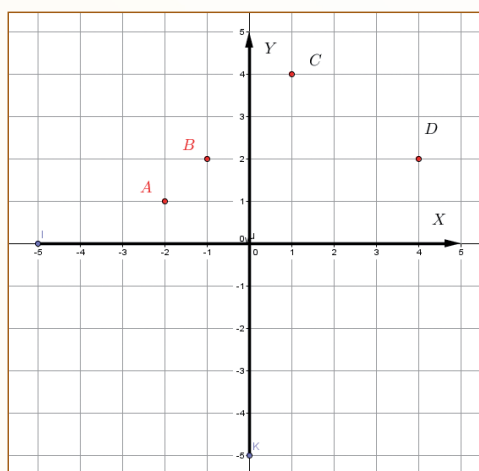


Figura 11

**Caso 2.** Pendiente de los **segmentos**:  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  y  $CD$ , utilizando la información que se proporciona en la **Figura 12**.

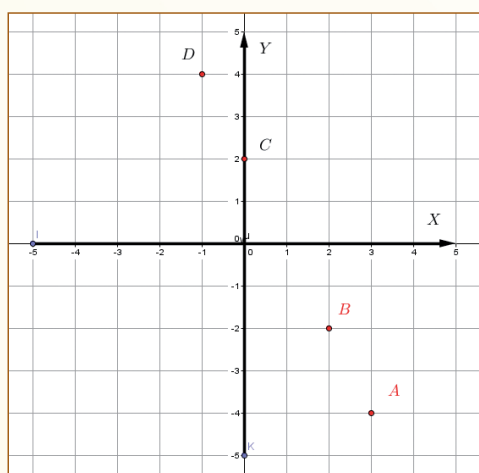


Figura 12

<sup>1</sup>Cuando se dice segmento nos referimos a segmentos de recta

**Caso 3.** Pendiente de los **segmentos**:  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$ ,  $BD$  y  $CD$ , utilizando la información que se proporciona en la **Figura 13**.

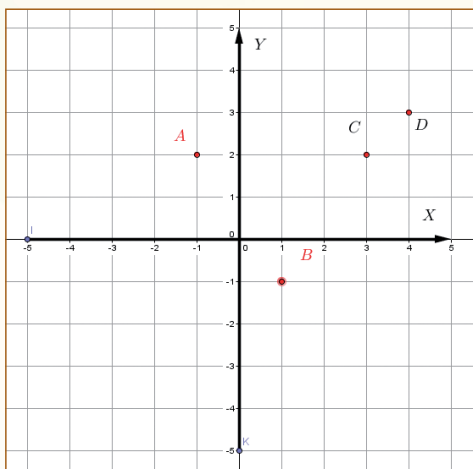


Figura 13



Actividad de Equipo



2. Comenta con tus compañeros de equipo los resultados obtenidos, y escribe tus conclusiones en el siguiente espacio.



Actividad: 5  
Actividad Individual

Para el primer caso de la *Actividad 4*,



1. ¿Cómo son, entre ellos, los valores de las pendientes que calculaste?

\_\_\_\_\_

2. Si unes todos los puntos que están en el plano con **segmentos de recta** (con regla o con GeoGebra), ¿todos los **segmentos** están contenidos en una misma **recta**?

\_\_\_\_\_

3. Si la respuesta a la pregunta anterior es NO, ¿hay algunos **segmentos** que están sobre la misma **recta**?

\_\_\_\_\_

4. Si hay **segmentos** que están sobre la misma **recta**, ¿qué es lo que tienen en común?

\_\_\_\_\_



Actividad de Equipo



5. Comenta con tus compañeros de equipo las respuestas de las preguntas anteriores, y escribe tus conclusiones en el siguiente espacio.



1. Hacer lo mismo que en la *Actividad 5*, pero con los casos *2* y *3<sup>2</sup>*.

2. ¿Sucedé lo mismo en todos los casos?

<sup>2</sup>Sigue las indicaciones de tu profesor para ver si son actividades de clase o de tarea.

3. Si hay diferencias entre lo que sucede en los tres casos, describe esas diferencias.

---

---

4. ¿En alguno o algunos de los casos todos los puntos que hay en el plano están en la misma recta? Argumenta tu respuesta.

---

---



Los extremos del segmento  $AB$  tienen las siguientes coordenadas:  $A=(1,2)$  y  $B=(5,4)$ .

1. Determina la pendiente del segmento  $AB$ .

---

2. Encuentra las coordenadas del punto medio ( $C$ ) del segmento  $AB$ .

---

3. Calcula la pendiente de los segmentos  $AC$  y  $CB$ .

---

4. ¿Cómo son los valores de las pendientes de los segmentos  $AC$  y  $CB$  con respecto a la pendiente de  $AB$ ?

---

5. Si encuentras las coordenadas de los puntos medios ( $D$  y  $E$ ) de los segmentos  $AC$  y  $CB$ , ¿cómo crees que es el valor de la pendientes de los cuatro nuevos segmentos ( $AD, DC, CE$  y  $EB$ ) respecto a la del segmento  $AB$ ? Argumenta tu respuesta.

6. ¿Qué crees que sucederá con la pendiente de un segmento definido por cualquier pareja de puntos que estén contenidos en el segmento  $AB$ ?



Actividad Grupal



7. Atiende las indicaciones del profesor para que participes en la discusión grupal.

-----



Actividad: 8  
Actividad Individual



Los extremos del segmento  $AB$  tienen las siguientes coordenadas:  $A=(1,2)$  y  $B=(5,4)$ .

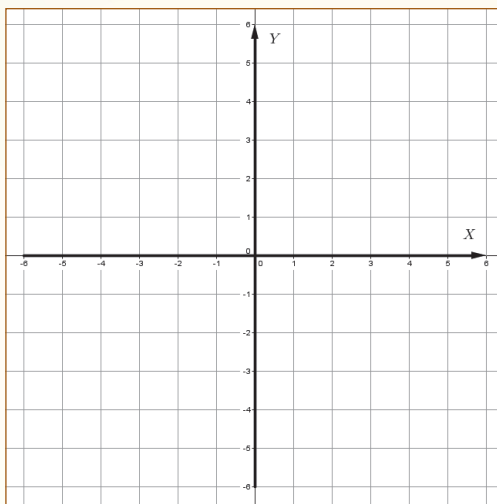
1. Determina la pendiente del segmento  $AB$ .

2. Si el punto  $B$  es el punto medio del segmento  $AF$ , determina las coordenadas del punto  $F$ .

3. ¿Cómo es el valor de la pendiente del segmento  $AF$ , respecto a la pendiente de los segmentos  $AB$  y  $BF$ ?



4. ¿Es posible trazar una **recta** que contenga a los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $F$ ? En caso de que sea posible hacer el trazo, hacerlo.



## Actividad de Cierre

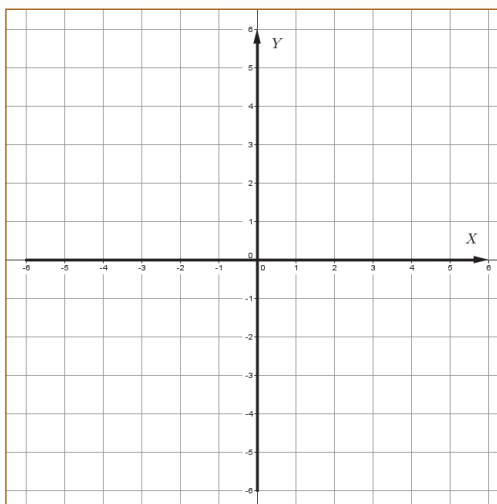


Actividad: 9  
Actividad de Equipo

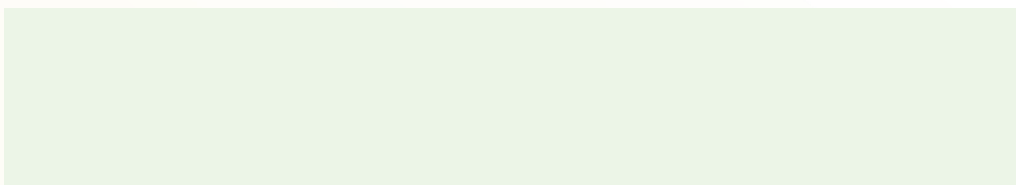


Los puntos  $A=(-4,-3)$  y  $B=(-2,1)$  determinan el segmento  $AB$ , el cual está contenido en una **recta**.

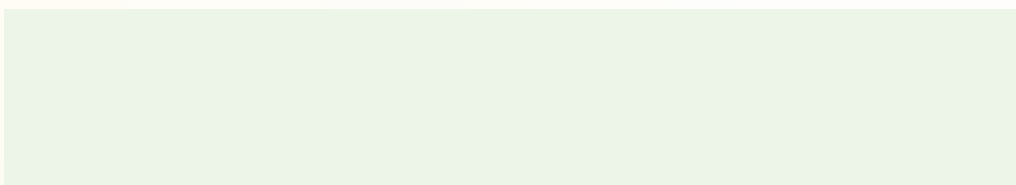
1. Ubica los puntos  $A$  y  $B$  en el plano cartesiano y traza la **recta** que los contiene.



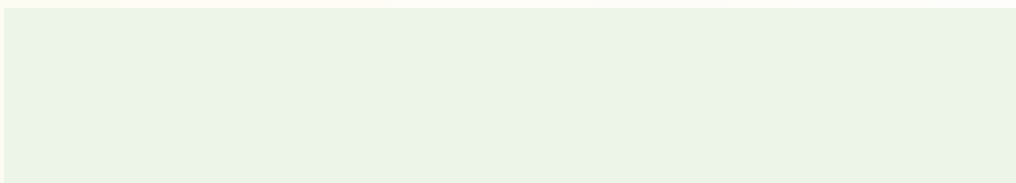
2. Propón gráficamente un punto  $D$  que cumpla con que al unirlo con un segmento de recta al punto  $A$  o al punto  $B$ , dicho segmento tenga la misma pendiente que el segmento  $AB$ . En el siguiente espacio verificar que se cumple la condición solicitada.



3. Propón otros cuatro puntos ( $E, F, G$  y  $H$ ) que al unirlos con un segmento de recta al punto  $A$  o al punto  $B$ , dicho segmento tenga la misma pendiente que el segmento  $AB$ . Verificar que se cumpla la condición solicitada para cada punto propuesto.



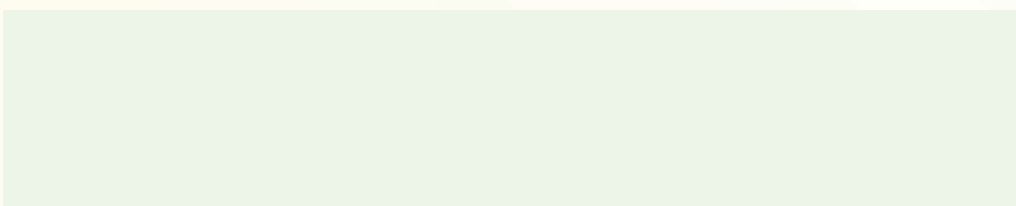
4. Los puntos propuestos y que cumplen con la condición, ¿están en una misma recta?



Actividad Grupal



5. Atiende las indicaciones del profesor para participar en la discusión grupal aportando tus comentarios e ideas, y escribe en el siguiente espacio tus conclusiones.



- Como viste en las actividades previas de este BLOQUE, para que un conjunto de puntos estén en una misma recta se necesita que todos los segmentos que quedan definidos entre ellos tengan la misma pendiente.

Tal como se ha discutido en el **BLOQUE 1**, una línea en el plano cartesiano se define como el lugar geométrico de un conjunto de puntos que se ubican en el plano bajo ciertas condiciones.

En el caso de la **recta**, ésta se define como:

*El lugar geométrico de los puntos en el plano tales que al tomar dos cualesquiera de ellos, la pendiente<sup>3</sup> del segmento que se define es una constante.*

1. Los puntos  $A=(-1,2)$  y  $B=(3,4)$  están en una **recta**:

a) Determina el valor de la pendiente del segmento  $AB$ .

b) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la **recta** que contiene al segmento  $AB$ ?

c) Si el punto  $P=(x,y)$  está en la misma **recta** que  $A$  y  $B$ , determina el valor de la pendiente del segmento  $AP$ .

d) Si los tres puntos están en la misma **recta**, ¿cómo deben ser las pendientes de los segmentos  $AB$  y  $AP$ ?

e) De acuerdo a la definición de **recta** que se presenta al inicio de esta actividad, si los tres puntos están en la misma **recta** entonces las dos pendientes deben ser iguales. Como los puntos  $A, B$  y  $P$  están en la misma **recta** las pendientes de los segmentos  $AB$  y  $AP$  son iguales.

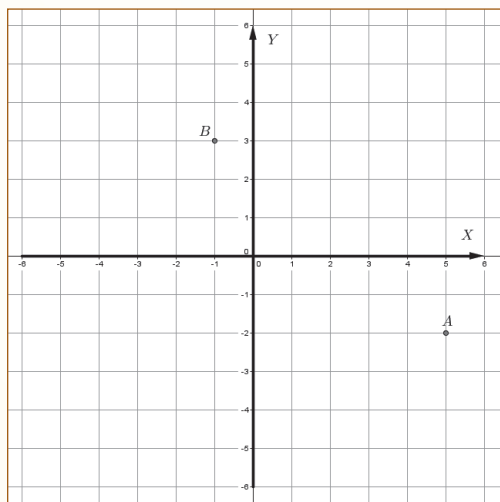
Iguala las pendientes de los segmentos  $AB$  y  $AP$ .

<sup>3</sup> Excepto en los casos en que no está definida la pendiente, en cuyo caso la condición de la recta es que la abscisa es constante, es decir la ecuación de ese tipo de rectas es de la forma  $x=k$ , donde  $k$  es un número real.



La expresión que has obtenido es una ecuación que representa la recta que contiene los puntos  $A$  y  $B$ .

2. Si lo que se desea es encontrar la ecuación de la recta que contiene los puntos  $A$  y  $B$  que aparecen en el siguiente plano:



entonces una estrategia posible es:

Encontrar la pendiente del segmento  $AB$

$$m = \frac{3 - (-2)}{-1 - (-5)}$$

Ahora se tiene que identificar un punto  $P=(x,y)$ , que represente a cualquier punto de la recta, con este punto  $P$  y con uno de los conocidos  $A$  o  $B$  expresar el valor de la pendiente del segmento  $AP$  o  $BP$ . Si utilizamos el punto  $A$ , la pendiente del segmento  $AP$  se determina de la siguiente manera:

$$m = \frac{y - (-2)}{x - (-5)}$$

Como

$$m_2 = m_1$$

se tiene que

$$\frac{y - (-2)}{x - (-5)} = \frac{3 - (-2)}{-1 - (-5)}$$

Simplificando la expresión se tiene que

$$\frac{y + 2}{x + 5} = \frac{5}{4}$$

lo cual representa la ecuación de la recta que contiene los puntos  $A$  y  $B$ .

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Diferentes formas de expresar la ecuación de una recta

Tal como se vio en la secuencia anterior de este **BLOQUE**, si se tienen al menos dos puntos de una **recta** es posible encontrar su ecuación utilizando el siguiente procedimiento:

Se calcula el valor de la pendiente de la **recta** utilizando dos puntos conocidos, posteriormente se determina la pendiente de un segmento cuyos extremos son un punto conocido de la **recta** y otro que represente a cualquier punto de ella, y finalmente se igualan dichas pendientes.



Los puntos  $A=(-2,-1)$ ,  $B=(1,5)$  y  $C=(3,2)$  son los vértices de un **triángulo**.

1. Determina la ecuación de la recta que contiene los puntos del:

a) Lado **AB**.

b) Lado **AC**.

c) Lado **BC**.



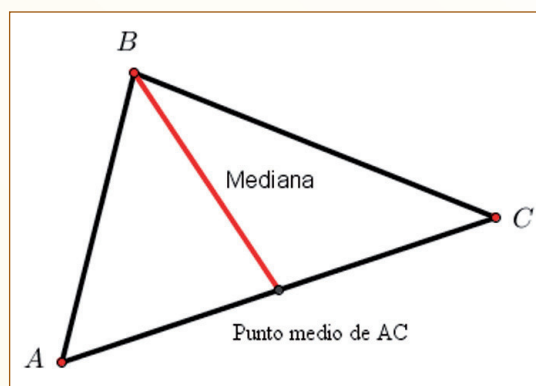
## Actividad de Equipo



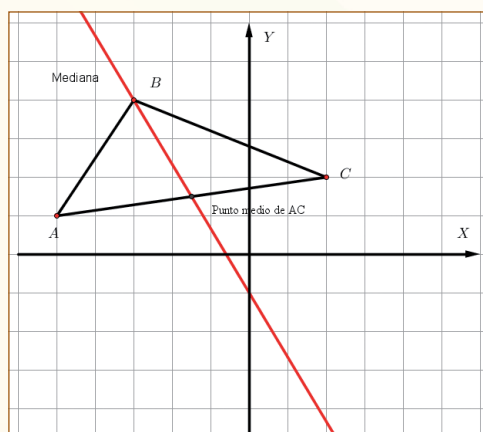
2. Compara las ecuaciones que obtuviste con las de tus compañeros y haz los ajustes que sea necesarios.



De los cursos de *Geometría* se tiene que una *mediana* de un *triángulo* es un *segmento que está determinado por el punto medio de uno de los lados del triángulo y el vértice opuesto a dicho lado*.



En *Geometría Analítica* la *mediana es una recta* que pasa por un vértice del *triángulo* y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.







Actividad de Equipo



1. Determina la ecuación de la mediana que pasa por el vértice:

a) *A*.

b) *B*.

c) *C*.



Actividad de Equipo



2. Compara las ecuaciones que obtuviste con las de sus compañeros haz los ajustes que sea necesarios.



Actividad Grupal



3. Cuando se utilizan dos puntos de una recta,  $P_1=(x_1, y_1)$  y  $P_2=(x_2, y_2)$ , para encontrar su ecuación, y la **expresión algebraica** es de la forma:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

a esta expresión se le llama **ecuación dos puntos de la recta**.



Actividad Individual



4. Escribe la ecuación dos puntos de los lados y las medianas del triángulo *ABC*, de las *Actividades* 1 y 2.

*Lados*

---

---

---

*Medianas*

---

---

---

5. Hay muchas formas para expresar la ecuación de una **recta**, basta con hacer operaciones entre las expresiones que hay en la ecuación para obtener una nueva. Esto lo podemos notar si retomamos el ejemplo del punto 2 de la **Actividad 7** de la **secuencia 1**, en donde se tiene que:

$$\frac{y - (-2)}{x - (-5)} = \frac{3 - (-2)}{-1 - (-5)}$$

Que simplificada queda de la forma

$$\frac{y + 2}{x + 5} = \frac{5}{4}$$

De la cual se puede obtener la siguiente expresión equivalente:

$$y + 2 = \frac{5}{4}(x + 5)$$

Y así, se pueden seguir realizando **operaciones aritméticas** para obtener otras expresiones que siguen representando a la misma recta.

Existen muchas formas de representar algebraicamente una recta, hay algunas que resultan especiales, ya sea por la forma en se pueden obtener (como la de dos puntos que se vio en la secuencia anterior) o por los elementos de ésta que se pueden identificar de manera explícita en la expresión.



1. Si se quiere encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos **A**=(-3,-4) y **B**=(6,2), se puede aplicar la definición, esto es:

Calcular la pendiente del segmento **AB**

$$m_1 = \frac{2 - (-4)}{6 - (-3)} = \frac{2 + 4}{6 + 3} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Donde 2-(-4) es la diferencia en el eje vertical (lo que sube o baja) y 6-(-3) es la diferencia en el eje horizontal (lo que avanza o retrocede), tal como se muestra en la **Figura 14**.

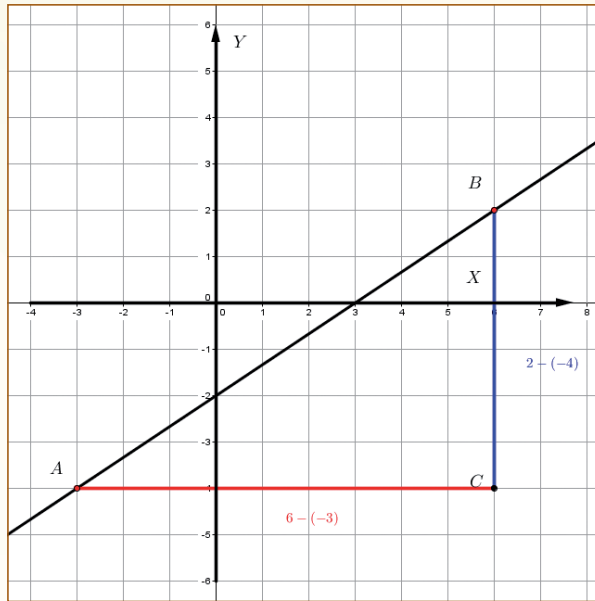


Figura 14

Determinar la pendiente del segmento  $AP$  o  $BP$ , donde  $P=(x, y)$  representa cualquier punto de la recta, si utilizamos  $AP$  se tiene que:

$$m_2 = \frac{y - (-4)}{x - (-3)} = \frac{y + 4}{x + 3}$$

gráficamente las diferencias de las componentes (horizontal y vertical) de los puntos  $A$  y  $P$  quedan representadas en la **Figura 15**.

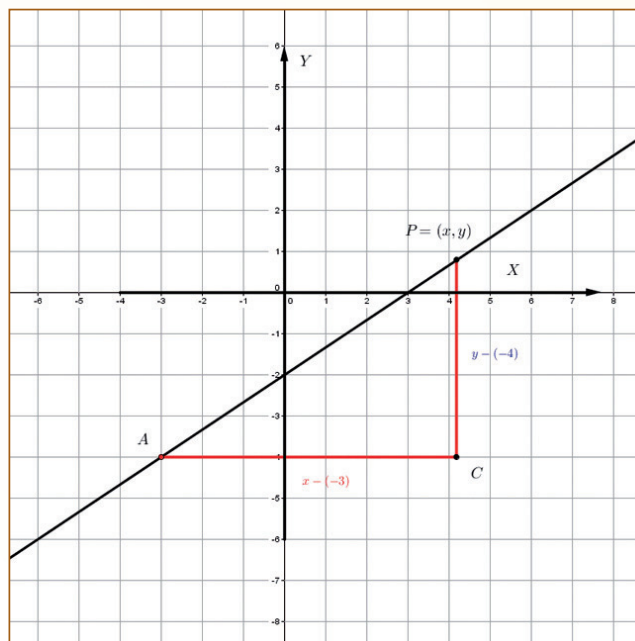


Figura 15

Posteriormente se igualan las pendientes en cualquiera de sus representaciones, por ejemplo,

$$\frac{y - (-4)}{x - (-3)} = \frac{2 - (-4)}{6 - (-3)}$$

Abscisa del punto  $A$  Abscisa del punto  $B$   
 Ordenada del punto  $A$  Ordenada del punto  $B$

En la **ecuación dos puntos**, se pueden identificar explícitamente las coordenadas de los dos puntos por donde se sabe pasa la **recta**, lo cual determina el nombre que se le da a esta forma algebraica de representarla. Haciendo la simplificación en el término de la derecha de la igualdad, se tiene que:

$$\frac{y - (-4)}{x - (-3)} = \frac{2}{3}$$

la cual se puede transformar en

$$y - (-4) = \frac{2}{3}(x - (-3))$$

Pendiente de la recta Coordenadas del punto  $A$

En la expresión anterior, es posible identificar explícitamente un punto conocido de la **recta** y el valor de su pendiente, esto a su vez nos permite determinar la ecuación de la **recta** cuando se conoce un punto y la pendiente de una **recta**.

Si una **recta** pasa por el punto  $A = (x_p, y_p)$  y tiene pendiente  $m$ , entonces la ecuación de la **recta** puede determinarse de la siguiente manera:

$$y - y_p = m(x - x_p)$$

A esta forma de representar algebraicamente una **recta** se le llama **punto pendiente**.



Actividad Individual



2. Expresa la ecuación de los lados y las medianas del triángulo  $ABC$ , de la Actividad 1, en la forma **punto pendiente**.

Lados

---

---

---

Medianas

---

---

---



Actividad Grupal



Si se continúa transformando la ecuación punto pendiente anterior, esto es

$$y - (4) = \frac{2}{3}(x - (-3))$$

Se tiene que

$$y + 4 = \frac{2}{3}(x + 3)$$

$$y + 4 = \frac{2}{3}x + \frac{6}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2 - 4$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$

Pendiente

Valor de la ordenada

En esta expresión se pudo identificar la pendiente, y el valor de la ordenada del punto en el que la recta corta al eje y; esto es si el valor de  $x=0$ , entonces se tiene que:

$$y = \frac{2}{3}(0) - 2$$

$$y = -2$$

Es decir la recta corta al eje y en el punto  $(0, -2)$ .

De la ecuación:

$$y + 4 = \frac{2}{3}(x + 3)$$

Se tiene que:

$$3(y + 4) = 2(x + 3)$$

$$3y + 12 = 2x + 6$$

$$3y - 2x = 6 - 12$$

$$-2x + 3y = -6$$

$$\frac{-2x}{-6} + \frac{3y}{-6} = \frac{-6}{-6}$$

$$\frac{-2}{-6}x + \frac{\left(\frac{3}{-6}\right)y}{\frac{-6}{-6}} = \frac{-6}{-6}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$



Actividad Individual



2. Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las coordenadas del punto C donde la recta intercepta al eje x?
- ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto C?
- ¿Cuáles son las coordenadas del punto D donde la recta intercepta al eje y?
- ¿Cuál es el valor de la ordenada del punto D?
- ¿Coinciden los puntos que obtuviste con los que se observan en la figura ()?





### Actividad Grupal



Cómo pudiste darte cuenta, al responder las cinco preguntas previas, el denominador de  $x$  en ecuación representa el valor de la abscisa del punto donde la recta intercepta al eje  $x$ , en este caso en  $x=3$ ; mientras que el denominador de  $y$  en la ecuación representa el valor de la ordenada del punto donde la recta intercepta al eje  $y$ , en este caso  $y=-2$ .

A la forma de la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

se le llama forma **simétrica de la recta**, donde  $a$  representa la **abscisa** del punto donde la **recta** intercepta al eje  $x$  y  $b$  representa la **ordenada** del punto donde la recta intercepta al eje  $y$ .

3. Expresa la ecuación de los lados y las medianas del triángulo ABC, de la **Actividad 1**, en la forma simétrica.

Lados

---



---



---

Medianas

---



---



---



1. Retomando la ecuación punto pendiente de la recta que pasa por los puntos  $A=(-3,-4)$  y  $B=(6,2)$ , se tiene que

$$y + 4 = \frac{2}{3}(x + 3)$$

La cual se puede transformar en:

$$3(y + 4) = 2(x + 3)$$

$$3y + 12 = 2x + 6$$

$$-2x + 3y + 12 - 6 = 0$$

$$-2x + 3y + 6 = 0$$

A esta forma de expresar la ecuación de la recta se le llama **ecuación general de la recta**.

2. Expresa la ecuación de los lados y las medianas del triángulo ABC, de la Actividad 1, en la forma **general**.

Lados

---



---



---

Medianas

---



---



---



## Actividad de Cierre



En la **secuencias 1** de este **BLOQUE** estuviste trabajando con la condición que deben cumplir los puntos que están en una recta en el plano, de ese trabajo se llegó a la definición de la recta en el **plano cartesiano** como:

***El lugar geométrico de los puntos en el plano tales que al tomar dos cualesquiera de ellos, la pendiente del segmento que se define es una constante.***

En esta secuencia iniciamos con un problema en el que se solicita encontrar la ecuación de las **rectas** que contienen los lados de un **triángulo**; posteriormente se solicita determinar la ecuación de las medianas de ese mismo **triángulo** y después se propone encontrar la ecuación de la **recta** que pasa por dos puntos. En todos los casos se puede observar que una **recta** tiene muchas formas (una infinidad) en las que se puede representar algebraicamente. En esta secuencia nos centramos en varias de esas formas de representación. Como veremos más adelante, en algunos casos la forma de la ecuación depende de la información que se muestra de manera explícita o bien de los elementos que se conocen de ella y que permiten encontrar su ecuación.

Las diferentes formas de la ecuación de la recta que se vieron en esta secuencia son las siguientes:

Ecuación **dos puntos**:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación **punto pendiente**:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación **pendiente ordenada en el origen**  $y = mx + b$ Ecuación **simétrica**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Ecuación **general**

$$Ax + By + z = 0$$

<sup>4</sup> Excepto en los casos en que no está definida la pendiente, en cuyo caso la condición de la recta es que la abscisa es constante, es decir la ecuación de ese tipo de rectas es de la forma  $x=k$ , donde  $k$  es un número real.

# Secuencia Didáctica 3.-



## Actividad de Inicio

### Paralelismo y Perpendicularidad

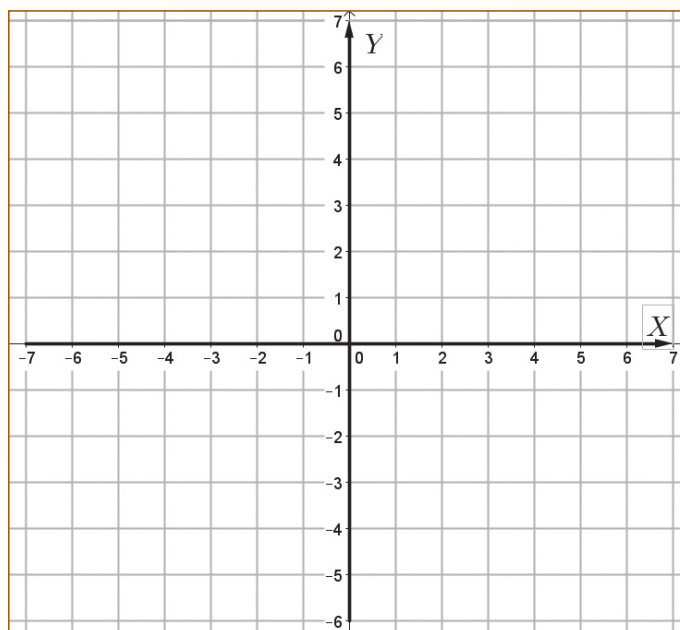


Actividad: 1  
Actividad Individual

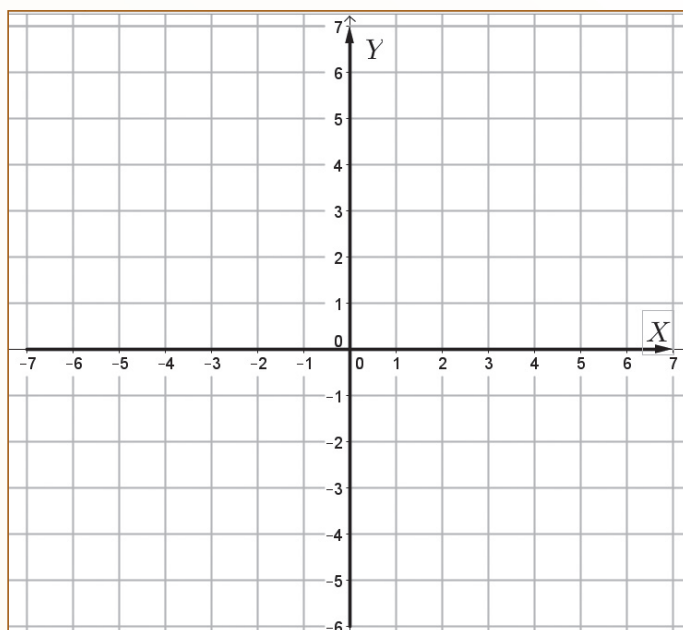


Representa gráficamente las siguientes parejas de **rectas**, se recomienda hacerlo en **GeoGebra**, si no se tiene disponible hacerlo en el **plano cartesiano** correspondiente.

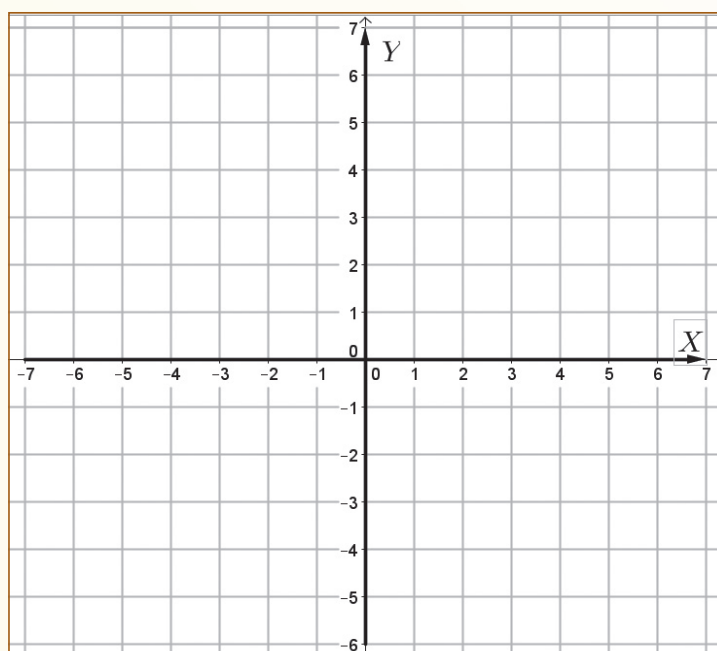
a)  $2x + 3y - 6 = 0$   
 $-4x - 6y + 24 = 0$



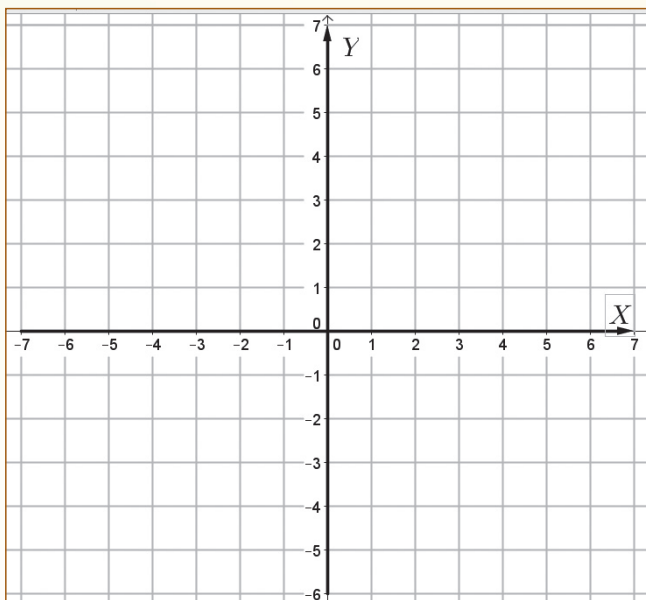
b)  $x - 2y + 4 = 0$   
 $y = 3x - 3$



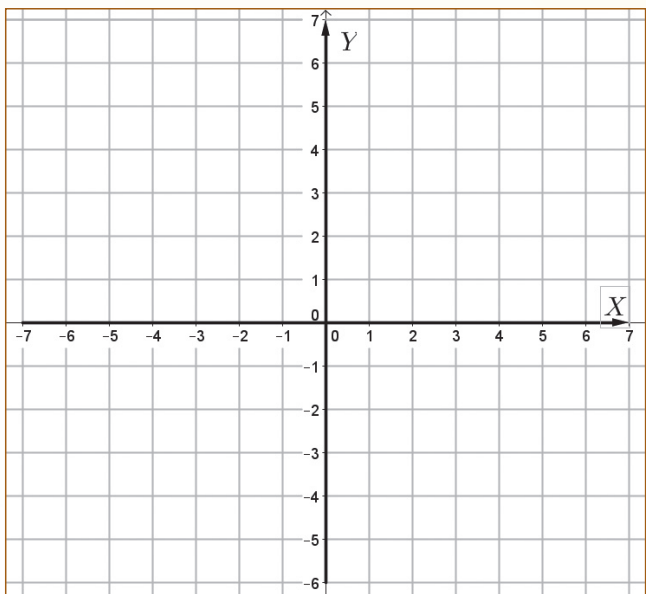
c)  $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$   
 $4x - 10y + 8 = 0$



d)  $y = \frac{2}{5}x - 2$   
 $6x + 8y - 2 = 0$

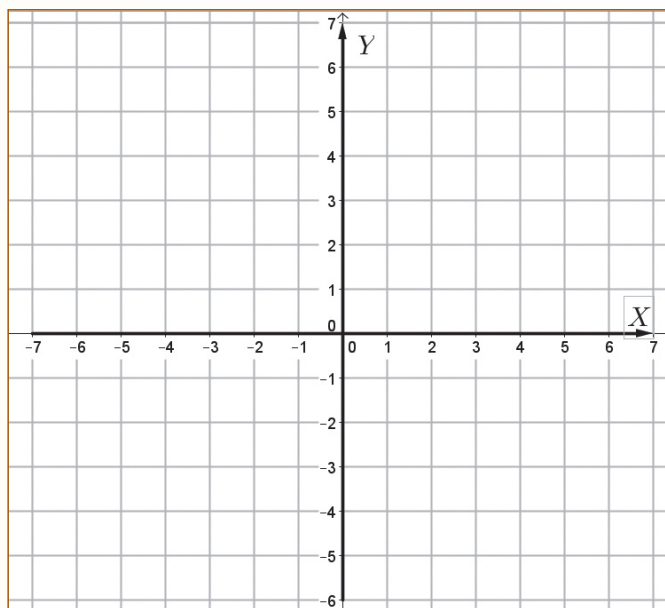


e)  $y = \frac{5}{3}x + 5$   
 $-6x + 10y - 30 = 0$



$$f) \ y = \frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$



## Desarrollo



1. Escribe el nombre del tipo de **ángulo** que se forma entre las parejas de **rectas** de los incisos:

- a) \_\_\_\_\_
- b) \_\_\_\_\_
- c) \_\_\_\_\_
- d) \_\_\_\_\_
- e) \_\_\_\_\_
- f) \_\_\_\_\_



2. Con el uso de GeoGebra determina el valor de los ángulos (exacto o aproximado) que se forman entre cada pareja de rectas.

a) \_\_\_\_\_

b) \_\_\_\_\_

c) \_\_\_\_\_

d) \_\_\_\_\_

e) \_\_\_\_\_

f) \_\_\_\_\_

3. Completa lo que hace falta en la siguiente tabla:

Recta	Ecuación	Pendiente (expresarla como fracción en su forma más simplificada)
$L_1$	$2x+3y-6=0$	
$L_2$	$-4x-6y+24=0$	
$L_3$	$x-2y+4=0$	
$L_4$	$y=3x-3$	
$L_5$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$	
$L_6$	$4x-10y+8=0$	
$L_7$	$y = \frac{2}{5}x - 2$	
$L_8$	$6x+8y-24=0$	
$L_9$	$y = -\frac{5}{3}x + 5$	
$L_{10}$	$-6x+10y-30=0$	
$L_{11}$	$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$	
$L_{12}$	$y = \frac{1}{2}x - 3$	

4. ¿Cómo son entre sí las pendientes de rectas paralelas?

5. ¿Cómo son entre sí las pendientes de rectas perpendiculares?



Actividad Individual



6. Propón tres parejas de rectas que consideras son paralelas, y utiliza GeoGebra para verificar si cumplen con tal condición.

7. Propón tres parejas de rectas que consideras son perpendiculares, y utiliza GeoGebra para verificar si cumplen con tal condición.



## Actividad de Cierre



En esta actividad se han propuesto situaciones en las que se promueve la identificación de la relación que hay entre la **pendiente** de **ecuaciones paralelas** y entre la **pendiente de rectas perpendiculares**.

Como pudiste observar al llenar la **tabla**, la relación que hay entre pendientes de **rectas paralelas** es que son iguales, mientras que las pendientes de **rectas perpendiculares** cumplen con que una es el recíproco (inverso multiplicativo) negativa de la otra, esto es:

Si la recta  $L_1$  tiene pendiente  $m_1$  y la recta  $L_2$  tiene pendiente  $m_2$ , entonces,

$$m_1 = m_2 \text{ si } L_1 \text{ y } L_2 \text{ son paralelas}$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \text{ si } L_1 \text{ y } L_2 \text{ son perpendiculares}$$



Actividad de Equipo

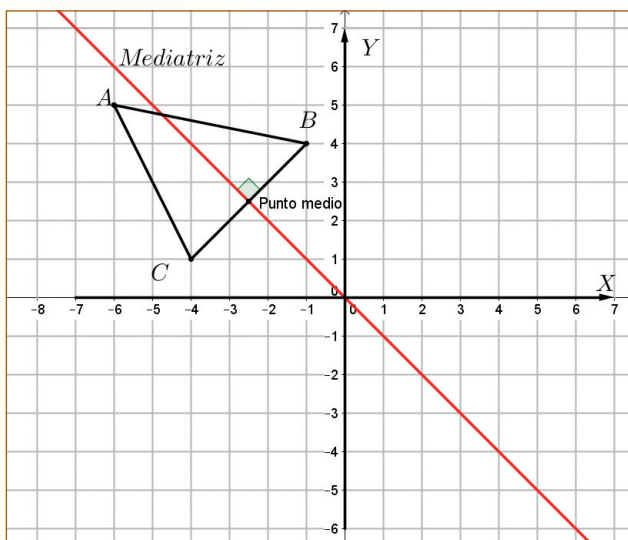


1. Para cada una de las siguientes rectas, escribe la ecuación de una recta paralela y una recta perpendicular:

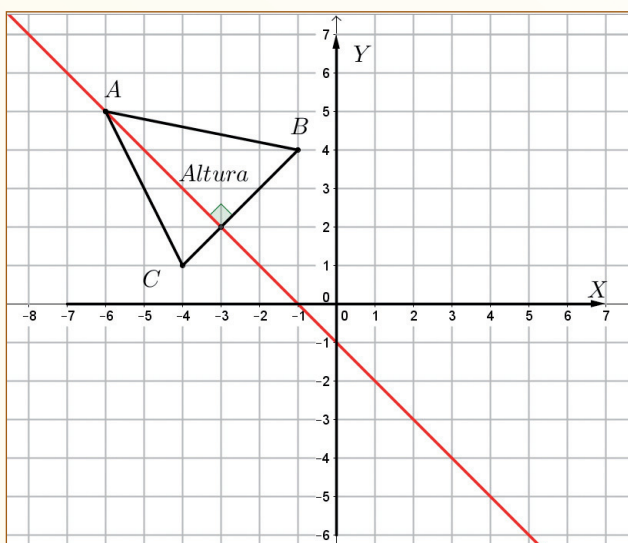
	Paralela	Perpendicular
a) $4x - 3y + 6 = 0$	_____	_____
b) $-5x - 7y + 2 = 0$	_____	_____
c) $x - 8y - 3 = 0$	_____	_____

En los cursos de *Geometría* cuando se estudia el *triángulo*, se estudian algunas rectas notables de dicha figura geométrica como la *mediana*, la *mediatriz* y la *altura*. En la *Secuencia 2* de este *BLOQUE* ya tuviste la oportunidad de encontrar la ecuación de las medianas del *triángulo* cuyos vértices son los puntos  $A=(-2,-1)$ ,  $B=(1,5)$  y  $C=(3,2)$ .

Recuerda que la *mediatriz* de un segmento es una *recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio de éste*.



Además, en *Geometría Analítica* la *altura* de un *triángulo* es una *recta que pasa por uno de los vértices perpendicular al lado opuesto a éste*.



2. Encuentra la ecuación de la mediatriz del lado:

a) **AB**

b) **AC**

c) **BC**

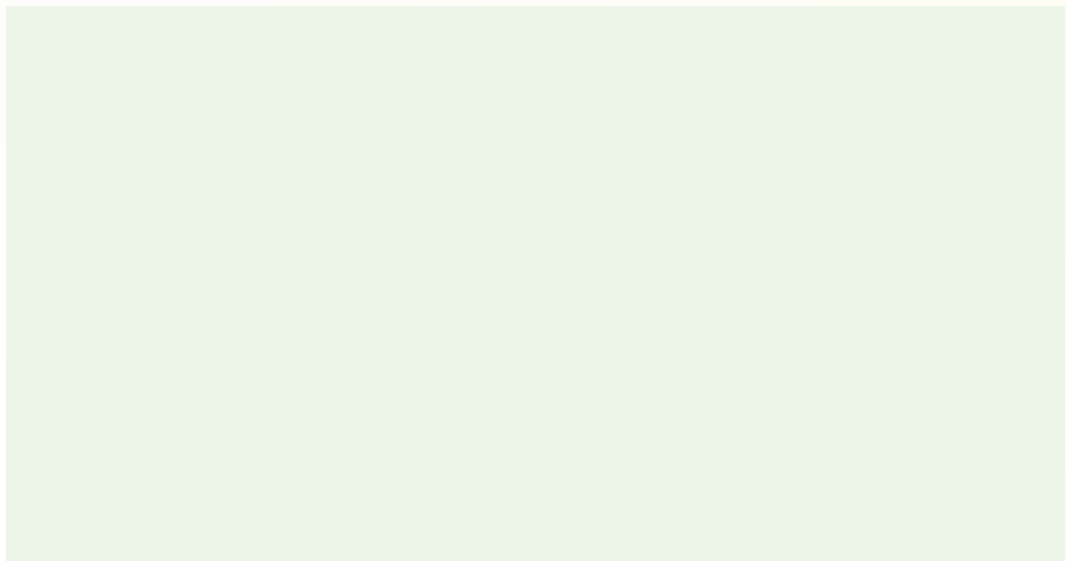
3. Encuentra la ecuación de la **altura** que pasa por el vértice:

a) **A**

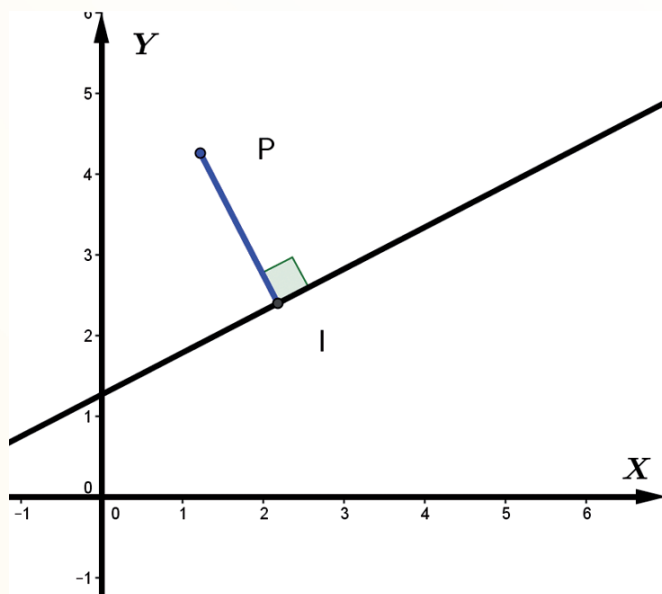
b) **B**

c) **C**

4. ¿Cómo se determina la **distancia** que hay entre tu mesabanco y la pared que tienes enfrente en el salón de clase?



En *Geometría* la *distancia* que hay entre un punto  $P$  y una *recta*  $L$  se determina por la *longitud del segmento*, *perpendicular a la recta*, que se forma entre el punto  $P$  y un punto  $I$  sobre la *recta*  $L$ , tal como se muestra en la siguiente figura.



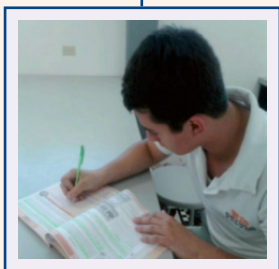
5. ¿Cuál es valor de la *distancia* que hay entre el vértice  $A$  y la base formada por el *segmento*  $BC$ ?

6. ¿Cuál es valor de la *distancia* que hay entre el vértice  $B$  y la base formada por el *segmento*  $AC$ ?





1. Encuentra el valor del **perímetro** y el **área** del **cuadrilátero ABCD**, donde **A** =  $(-1, -4)$ , **B** =  $(5, -2)$ , **C** =  $(3, 4)$  y **D** =  $(-3, -6)$ .
2. Determina la ecuación general de las **rectas** que contienen los lados del **cuadrilátero ABCD**.
3. Encuentra la ecuación de las **mediatrices** de los **segmentos** que forman las caras del **cuadrilátero ABCD**.
4. ¿Dónde corta la **recta**  $2x - 3y + 12 = 0$  a los ejes **x** y **y**?



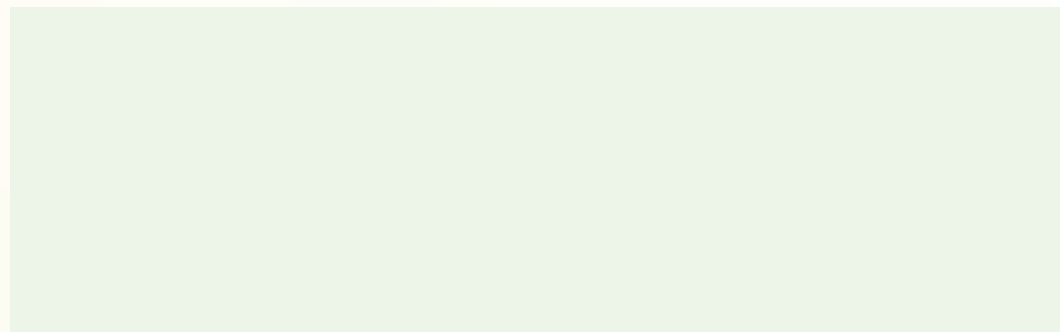
5. Determina el valor de la pendiente de las siguientes rectas:

a)  $2x - 3y + 12 = 0$

b)  $-2x - 5y + 10 = 0$

c)  $-4x + 4y - 12 = 0$

6. Graficar en un plano cartesiano las rectas del problema 6.

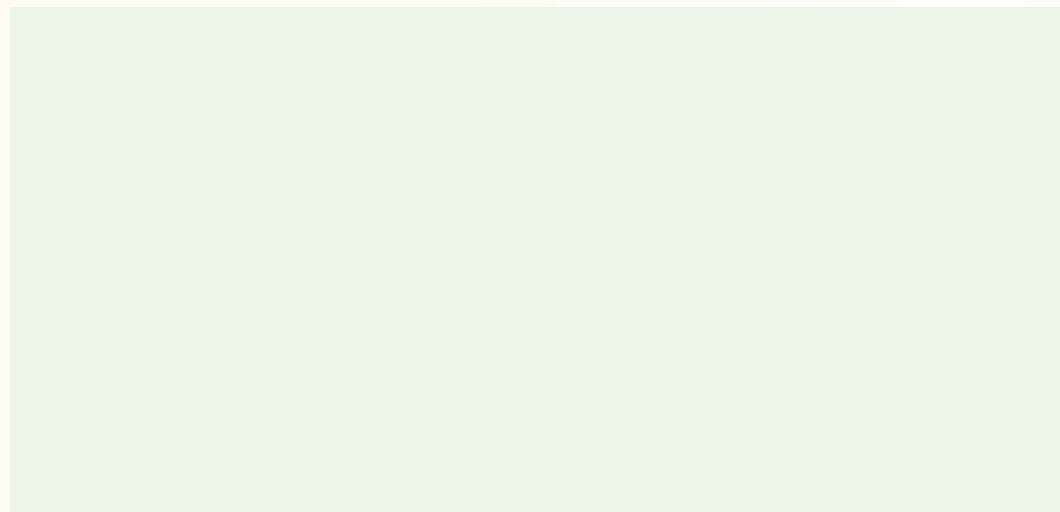


7. Para cada una de las siguientes rectas, encuentra la ecuación de una recta paralela y la ecuación de una recta perpendicular.

a)  $6x - 3y + 14 = 0$

b)  $-2x - 3y - 9 = 0$

8. Calcula el valor de la distancia de cada uno de los vértices, del cuadrilátero ABCD del problema 1, al lado opuesto.





Los problemas y preguntas planteados en esta sección son de carácter individual, para hacerse preferentemente en casa y tienen el propósito fundamental de proporcionarte elementos de reflexión para que identifiques lo que has aprendido, lo que aún te ocasiona dificultades y lo que es necesario reforzar.

Para una mejor estimación de cómo han evolucionado tus aprendizajes, contrasta tus respuestas con los propósitos de aprendizaje presentados en la introducción al presente **BLOQUE**. De esta manera te podrás dar cuenta de lo que has aprendido, de lo que aún te cuesta dificultad hacer, de los errores que cometes y de los temas en los que necesitas estudiar con mayor detenimiento o pedir asesoría, ya sea a tu profesor o a tus compañeros de clase.

En caso de considerarlo necesario, el profesor te podrá solicitar los resultados de autoevaluación.

1. ¿Qué elementos necesitas conocer para determinar la pendiente de una recta?

---

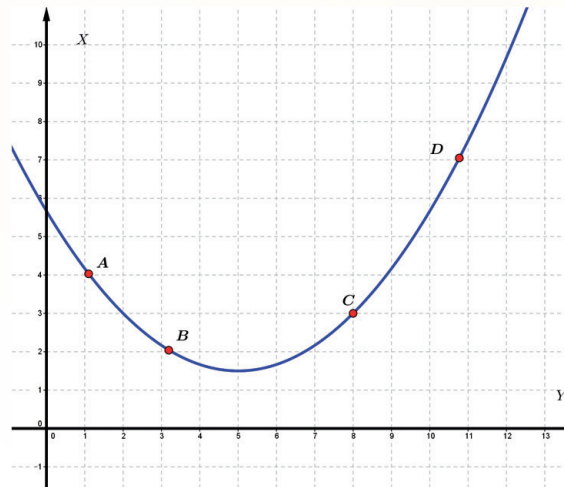
---

2. Describe con tus palabras lo que entiendes por pendiente de una recta.

---

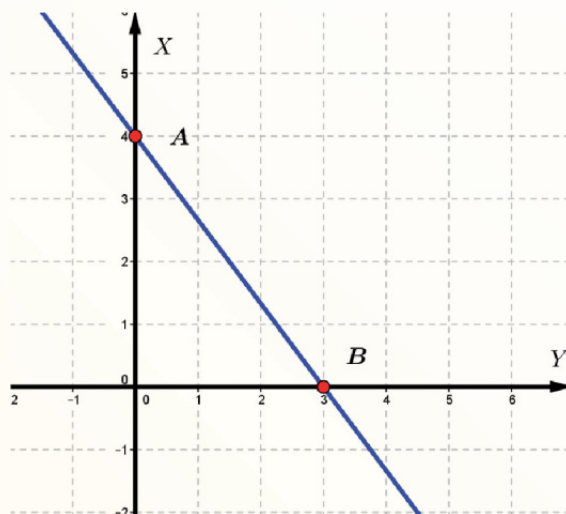
---

3. Argumentar, por qué la línea que se muestra en la siguiente figura no es una recta.



4. ¿Cuál es la relación que existe entre las pendientes de dos rectas que son paralelas?

5. Con la información que se presenta en la siguiente figura:



a) Determina el valor de la pendiente de una recta perpendicular a la recta que pasa por A y B.

b) ¿Qué conocimientos de los que aprendiste en este curso pusiste en juego para responder el inciso a)?

5. Encuentra la ecuación general de la mediatriz del segmento AB del problema 4, y describe el procedimiento que utilizaste para responder el problema.

### Reflexiones generales sobre el **BLOQUE 2**:

1. ¿Qué aspectos o nociones de los aprendidos en los cursos previos (Matemáticas 1 y Matemáticas 2) consideras te fueron de mayor utilidad al trabajar en este **BLOQUE**?
2. ¿Qué aspectos o nociones de los aprendidos en el **BLOQUE 1** de este curso consideras te fueron de mayor utilidad al trabajar en este **BLOQUE**?
3. ¿Qué aspectos del trabajo en equipo consideras que te fueron de mayor utilidad en tu proceso de aprendizaje?
4. ¿Le recomendarías a tu profesor que siguiera promoviendo el trabajo en equipo? ¿Por qué?
5. ¿Qué conceptos o ideas de las que se trabajaron en este **BLOQUE** te resultaron más difíciles de aprender?
6. ¿Utilizaste algún software para resolver los problemas planteados a lo largo de este **BLOQUE**? ¿Ya conocías alguno antes de iniciar en este curso, o aprendiste a usarlo a lo largo del **BLOQUE**?
7. Si la respuesta es afirmativa a una de las dos preguntas que se hacen en el punto anterior (6), ¿cuál o cuáles son los software que utilizaste?
8. ¿Asististe a asesorías para superar las dificultades que tuviste en este **BLOQUE**?
9. ¿Con quién prefieres asesorarte, con tu profesor o con tus compañeros de grupo?



# BLOQUE 3

Resuelve problemas de...

*La Circunferencia*

## INTRODUCCIÓN:

**E**n este **BLOQUE** estudiaremos a la *circunferencia* como lugar **geométrico**, es decir como un conjunto de puntos que satisfacen una determinada condición. Además estableceremos en qué casos podremos construir una *circunferencia*, por ejemplo cuántos puntos son necesarios para determinarla y con qué requerimientos.

Otros aspectos que aprenderemos son algunos de los principales elementos relacionados con las *circunferencias*, así como diferentes formas en que podemos representarlas, es decir mediante una **gráfica**, mediante una **expresión algebraica** y cómo pasar de una a otra.

Estos temas serán tratados a lo largo de tres **secuencias didácticas**, en las cuales, al igual que en todas las **secuencias** que conforman este texto, se promueven las **competencias** relacionadas con la comunicación de las ideas **matemáticas**, la resolución de problemas y el uso de **tecnología**.

Es importante, para el desarrollo de dichas **competencias** que emprendas el estudio de todas las secuencias con disciplina y entusiasmo. Recuerda que todas las etapas propuestas (trabajo individual, por equipo y en grupo) son igual de importantes y cada una cumple una función en tu aprendizaje. No olvides el papel que juegan en tu formación las secciones de **problemas** y **autoevaluación**.



# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

### La Circunferencia



#### Depósitos de Agua

César está realizando un proyecto para el organismo operador de agua potable del ayuntamiento de Agua Prieta. Previendo el crecimiento poblacional se está proyectando la construcción de cuatro depósitos de agua, para apoyar la distribución de agua en la ciudad, incluyendo nuevas colonias.



Para ello se cuenta con un terreno cuadrado que mide 50 m por cada lado. Si ha proyectado los cuatro depósitos iguales, todos con forma de cilindro de base circular y con una altura de 4 m, y se construirán lo más grande posibles.

- ¿Cuánto mide el diámetro de la base de cada depósito?
- ¿Cuánto mide el radio de la base de cada depósito?
- Se tiene la opción de hacer los cuatro depósitos de agua o hacer uno, de la misma forma, pero que sea el más grande que quepa en el terreno, ¿qué opción les garantiza almacenar más agua?

Si consideramos que se ha optado por la construcción de los cuatro depósitos.

- Un albañil debe dibujar el contorno de la base de uno de los depósitos, ¿cómo sugieres que lo haga?



- e) ¿Qué tienen en común todos los puntos del contorno de la base del depósito dibujado por el albañil?
- f) Dibuja el terreno y el contorno de la base de los depósitos de agua en un plano cartesiano, ¿cuáles son las coordenadas del centro de la base de cada depósito de agua?



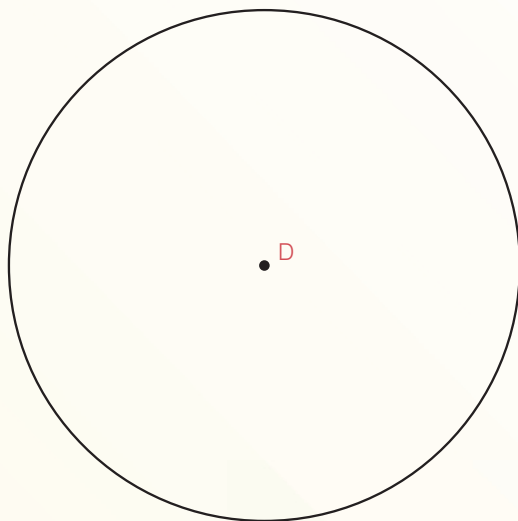
### Actividad: 2

Actividad Individual

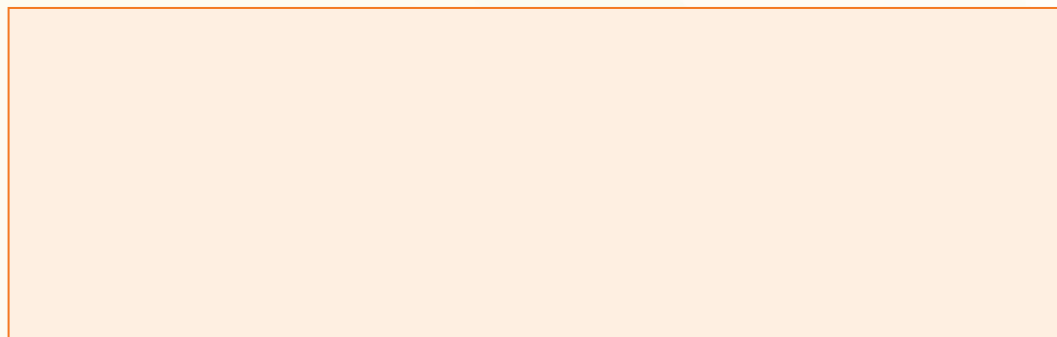


¿Reconoces a una circunferencia?

1. La siguiente figura, ¿es una circunferencia? Argumenta tu respuesta



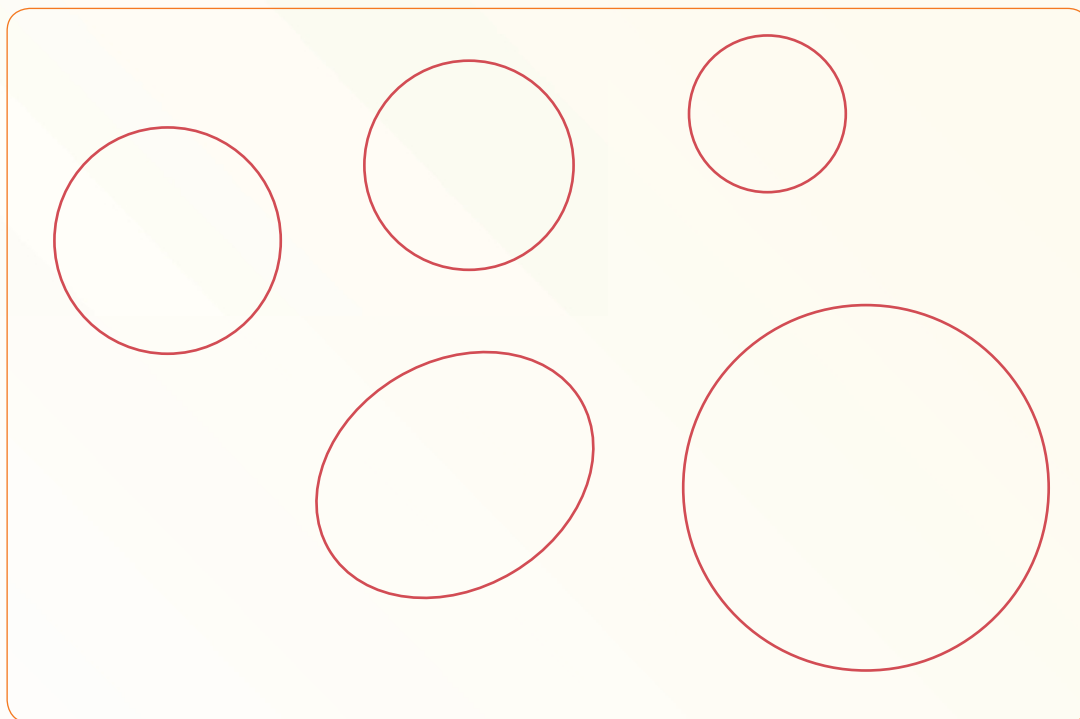
2. Escribe un procedimiento a partir del cual, puedas determinar si una figura es una circunferencia o no.



3. Utiliza el procedimiento que describiste en el inciso anterior para verificar cuáles de los casos siguientes son circunferencias. Si lo consideras necesario, usa el applet Circ1 para verificar tus respuestas.

---

---



4. Investiga cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia, y explícala aquí brevemente.

---

---

---

---

5. Explica por qué el instrumento conocido como compás, traza circunferencias.

---

---

---

---



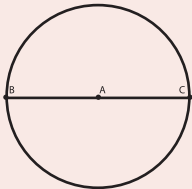
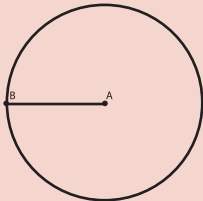
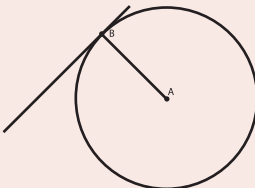
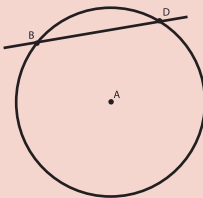
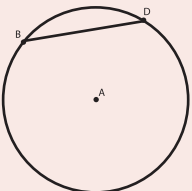
## Desarrollo

### Actividad: 3

Actividad Individual



Existen muchos elementos asociados a la circunferencia, aquí analizaremos algunos de ellos. Utiliza el applet circ2 para completar la tabla siguiente

Elemento	Figura	Describe el elemento con tus palabras
Diámetro		
Radio		
Tangente		
Secante		
Cuerda		



## Actividad: 4

Actividad Individual



a) Si el diámetro de una circunferencia mide 17 unidades, ¿cuál es la medida del perímetro?

---

---

---

b) Si el radio de una circunferencia mide 2.5 unidades, ¿cuál es la medida de su área?

---

---

---

c) Si el radio de una circunferencia es  $a$  unidades, expresa el perímetro y el área de la circunferencia en términos de  $a$ .

---

---

---

c) ¿Qué relación existe entre el radio  $r$  de una circunferencia y su diámetro  $d$ ?

---

---

---



# Actividad: 5

Actividad Individual



La geometría analítica permite estudiar el concepto de circunferencia desde otro ángulo, ya que podemos representar el centro de la circunferencia como una pareja ordenada y la medida del radio como distancia entre dos puntos. En esta actividad analizaremos las condiciones necesarias para que un punto pertenezca a una circunferencia.

1. Sea  $C$  el punto  $(2,2)$ . En el plano cartesiano siguiente, grafica 8 puntos que estén a 2 unidades de distancia del punto  $C$ .

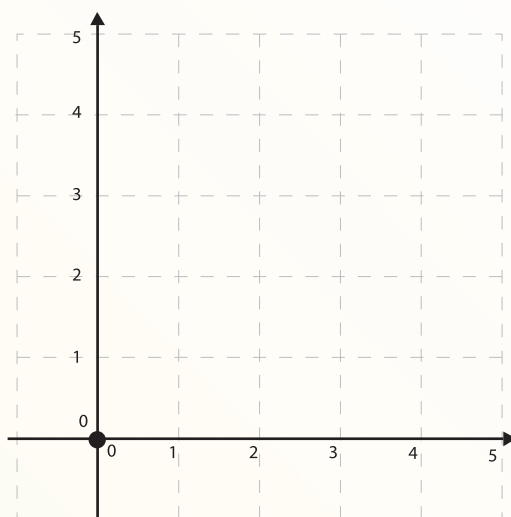


Figura 1

2. Todos los puntos cuya distancia al punto  $C$  es igual a 2 forman una curva, traza esta curva, a mano alzada, en la **Figura 1**.

3. Grafica en la **Figura 1** los puntos  $P(1,4)$ ,  $Q(\frac{11}{3}, 1)$  y  $R(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$

a) ¿Pertenece a la curva que trazaste? Justifica tu respuesta.

---



---



---

b) ¿Cómo podrías saber si los puntos pertenecen a la curva o no? Justifica tu respuesta.

---



---



---

4. Sea  $P$  un punto de coordenadas  $(x,y)$ . Si queremos saber si el punto  $P$  pertenece a la curva de la Figura 1 tendríamos que verificar que cumple con la condición que define la curva, es decir, que su distancia al punto  $(2,2)$  es igual a  $2$ , como se ilustra en la **Figura 2**.

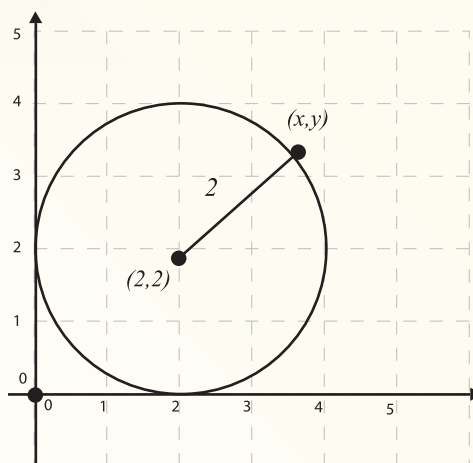


Figura 2

Utilizando la fórmula de la distancia entre dos puntos que estudiaste en el **BLOQUE 1**, se tendría que cumplir la siguiente igualdad  $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 2$  o su equivalente  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

5. Considerando la expresión anterior, ¿qué igualdad tendrán que cumplir los puntos  $(x,y)$  para que estén en la circunferencia de radio  $3$  y centro en  $(-3,1)$ ?



## Actividad de Cierre



### Actividad Grupal



En general, si tenemos una circunferencia de radio  $r$  con centro en el punto de coordenadas  $(h,k)$ , para que el punto  $P$  esté sobre la circunferencia, debe satisfacer la ecuación (ver **Figura 3**)

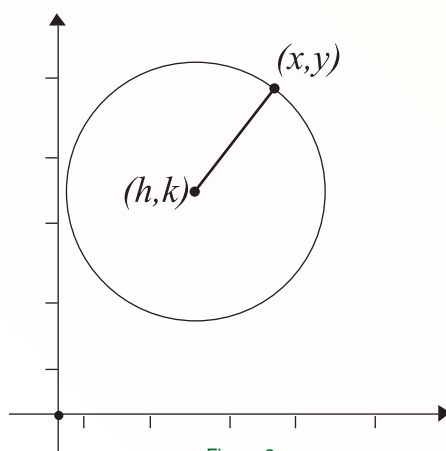


Figura 3

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

o su equivalente

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (1)$$



A la ecuación (1) se le conoce como la ecuación ordinaria de la **circunferencia** de radio  $r$  y centro en  $(h,k)$ .

En particular, cuando la **circunferencia** tiene su centro en el origen  $(0,0)$  y radio  $r$ , la ecuación (1) se transforma en

$$(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$

que se reduce a

$$x^2+y^2=r^2 \quad (2)$$

A esta última ecuación se le conoce como la ecuación canónica de la **circunferencia**.

En esta **secuencia didáctica** estuviste estudiando a la **circunferencia** como el lugar geométrico de todos los puntos que están a la misma distancia de otro punto llamado centro. Es decir, para que un punto pertenezca a una **circunferencia** se debe de cumplir que la distancia de ese punto al centro de la **circunferencia** sea igual a la longitud del radio.



1. Enlista cinco objetos de tu entorno que tengan forma circular.
2. ¿Cuál es la ecuación ordinaria de la **circunferencia** que tiene centro en  $(-4,-2)$  y radio  $4$ ?
3. Se tiene una **circunferencia** con centro en el origen y el extremo de una de sus cuerdas es el punto  $(-6,10)$ . Determina el diámetro de la **circunferencia**.
4. Sea  $P$  un punto de coordenadas  $(9, 4)$ , ¿pertenece  $P$  a la **circunferencia**  $(x-6)^2+(y-2)^2=13$ ?
5. Si los extremos de un diámetro de una **circunferencia** son los puntos  $A(-2, 2)$  y  $B(1, -3)$ . ¿Cuál es la ecuación de esa **circunferencia**?

# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Ecuación general de la circunferencia

Así como en el **BLOQUE 2** estudiaste distintas maneras de representar la ecuación de una recta, existen también diferentes maneras de expresar la ecuación de una circunferencia. La **Secuencia 1** de este bloque se dedicó a la ecuación ordinaria de una circunferencia. En la presente secuencia se discute la ecuación general y la relación que existe entre una ecuación y otra.



1. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que tiene centro en el punto  $(-3, 2)$  y radio  $3$ ?

2. Desarrolla los binomios al cuadrado e iguala a cero la ecuación que encontraste en la pregunta anterior.

*Se dice que dos ecuaciones son equivalentes si representan a la misma curva.*

3. ¿Las ecuaciones que encontraste en los dos incisos anteriores, son equivalentes? Justifica tu respuesta

---

---

---

---

---

---



## Desarrollo



De la ecuación ordinaria a la general

1. Utilizando el razonamiento de tu respuesta anterior verifica ahora, si la ecuación 1 es equivalente a la ecuación 2.

Ecuación 1:  $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$

Ecuación 2:  $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

Utiliza el siguiente recuadro para contestar

2. Existe una ecuación de la circunferencia que es equivalente a la ordinaria y en ocasiones es conveniente representarla de esta otra manera.

Transformaremos entonces la forma ordinaria, en otra que sea equivalente a ésta:

Si tenemos la ecuación de una circunferencia en su forma ordinaria:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Elevando al cuadrado los binomios e igualando a cero, tenemos:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2hk - 2ky + h^2 - r^2 = 0$$

que puede escribirse de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

donde  $D = -2h$ ,  $E = -2k$  y  $F = h^2 + k^2 - r^2$

A la ecuación (1) se le conoce como la ecuación general de la circunferencia.

3. Convierte la ecuación  $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 5^2$  a su forma general.



De la ecuación general a la ordinaria

1. La siguiente ecuación  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$  se puede identificar como la ecuación de una circunferencia, puesto que proviene del desarrollo de la ecuación ordinaria, pero no se puede saber de manera directa cuál es el centro y cuál es el radio. Sin embargo si la misma ecuación está escrita de la siguiente forma:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

Por simple inspección se puede identificar que el centro es  $(3, -1)$  y el radio  $\sqrt{13}$ .  
En cada una de las ecuaciones siguientes, identifica el centro y el radio de la circunferencia:

a.  $(x-4)^2 + (y+8)^2 = 26$

b.  $x^2 + (y+9)^2 = 20$

c.  $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 8$

2. ¿Cuál es el centro y el radio de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$ ?

Para dar respuesta a este cuestionamiento, conviene transformar la ecuación anterior de la forma general a la ordinaria, para lo cual se tiene que hacer el procedimiento contrario, es decir como aprendiste en Matemáticas 1, completar el trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 - 10x + \underline{\hspace{1cm}} + y^2 - 4y + \underline{\hspace{1cm}} + 13 = 0$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = -13 + 25 + 4$$

### Factorizando

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$$

Entonces la ecuación de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$  es equivalente a  $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$ . Por lo tanto:

1. Su centro tiene coordenadas (      ,      )

2. Y el valor de su radio es  $r = \underline{\hspace{1cm}}$





## Actividad de Cierre

En esta **secuencia didáctica**, estudiaste las dos formas principales de la ecuación de la circunferencia y cómo se transforma una en otra:

### Formula Ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Donde  $(x - h)$  es el centro de la circunferencia y  $r$  es el radio

### Formula General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Las dos formas de la ecuación de la circunferencia son igualmente importantes, pero el uso como herramienta para resolver problemas, de una u otra depende de los datos con los que se cuenta.

1. Determina la ecuación general de la circunferencia  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$
2. ¿Cuál es el perímetro de la siguiente circunferencia  $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$
3. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $A(-3, 3)$  y  $B(1, 4)$  y su centro está sobre la recta  $3x - 2y - 23 = 0$ ?
4. Dadas las dos circunferencias siguientes  $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 20 = 0$  y  $x^2 + y^2 + 10x - 4y - 7 = 0$ . Determina si son concéntricas.

# Secuencia Didáctica 3.-



## Actividad de Inicio

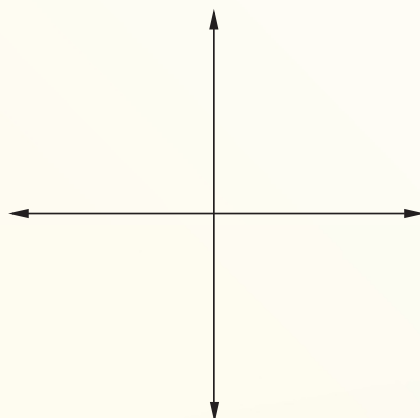
*Determinación de una circunferencia.  
Circunferencia dados uno, dos y tres puntos*



Desde que Euclides escribió Los Elementos (aproximadamente 300 A. C.), se sabía que “con cualquier centro y cualquier distancia se puede trazar un círculo” (Tercer Postulado). Este es un resultado que has verificado desde la escuela primaria cada vez que trazaste una circunferencia con el compás.

Esto significa que los dos datos mencionados por Euclides en su obra, determinan una circunferencia; pero si los datos fueran otros, ¿también determinarían una circunferencia?, veamos:

1. En el plano cartesiano siguiente, ubica un punto A con las coordenadas que desees



¿Cuántas circunferencias contiene al punto A? Dibújala (s)





2. Comenta en equipo si tus compañeros llegaron a soluciones similares en la pregunta anterior.

3. ¿Qué es lo que tienen en común esas circunferencias? Argumenten su respuesta.

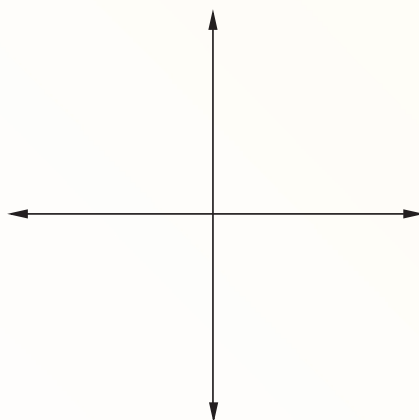
4. Para verificar las respuestas anteriores, abran el applet Circ3, activen las casillas de control C1 hasta C10. ¿Sus respuestas coinciden con lo que se observa en pantalla?



## Desarrollo



En el siguiente plano cartesiano ubica tres puntos A, B y C no colineales



1. Dibuja en el plano a la circunferencia o circunferencias que contienen al mismo tiempo a dos de los puntos (A con B, A con C y B con C).



Actividades de Equipo



2. Comenta en equipo si tus compañeros llegaron a soluciones similares de la pregunta anterior.

3. ¿Qué es lo que tienen en común las circunferencias que pasan por A y B? Argumenten su respuesta.

---

---

---

---

4. ¿Qué es lo que tienen en común las circunferencias que pasan por A y C? Argumenten su respuesta.

---

---

---

---

5. ¿Qué es lo que tienen en común las circunferencias que pasan por B y C? Argumenten su respuesta.

---

---

---

---

6. En el applet Circ4, activa las casillas de control C1 a C10, después de la C11 a la C20 y por último las casillas C21 a la C30. ¿Lo que observas en pantalla coincide con lo que habías contestado en las preguntas anteriores?

---

---

---

---

7. ¿Qué puedes decir acerca de los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos (A y B, A y C o B y C)?

---

---

---

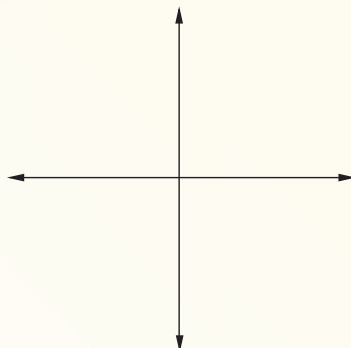
---

### Actividad: 3

Actividad Individual



1. En el siguiente plano cartesiano, ubica tres puntos A, B y C



Dibuja en el plano cartesiano a la circunferencia o circunferencias que contengan al mismo tiempo a los puntos A, B y C

2. Comenta en equipo la respuesta a la pregunta anterior. ¿Coinciden sus respuestas?



### Actividad de Cierre

En esta **secuencia didáctica** estudiaste algunas condiciones, bajo las cuales una circunferencia queda determinada.

1. Contesta Falso o Verdadero para cada uno de los siguientes enunciados

- Por los puntos  $(5, 3)$  y  $(-2, 1)$  pasa una sola circunferencia.
- Una circunferencia puede tener radio negativo.
- Cinco puntos definen de manera única a una circunferencia.
- Dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo radio

2. Completa la siguiente tabla

Condición	Número de circunferencias que cumplan la condición
Con centro en $(h, k)$	
Que pase por dos puntos A y B	
Que pase por tres puntos A, B y C	
Con diámetro AB	
Con radio $r$	

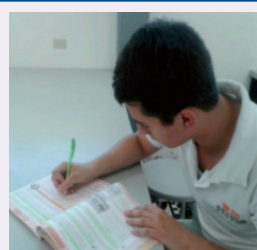


1. Dada la ecuación de la circunferencia  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 16$ , determina si dicha circunferencia está completamente contenida en el primer cuadrante.

2. Dadas las rectas  $x = 5$  y  $y = 2$ , encuentre la ecuación de una circunferencia de radio 3 que es tangente a ambas rectas.

**Se dice que un punto es exterior a una circunferencia si está fuera de ella e interior si está dentro.**

3. Dada la circunferencia  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$ , establece si los puntos  $A(-2, -5)$  y  $B(-4, 1)$  son interiores o exteriores. Justifica tu respuesta
4. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre el eje de las abscisas y que pasa por los dos puntos  $A(1, 3)$  y  $B(4, 6)$ ?

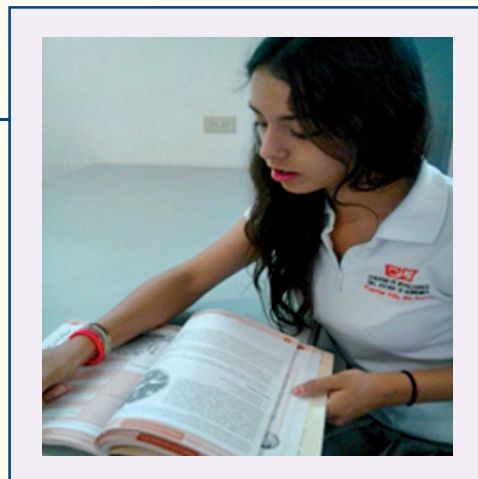


5. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen y es tangente a la recta  $4x + 3y - 25 = 0$ ?
6. Una circunferencia tiene su centro en el origen y  $r = 3$ . La ecuación de una recta secante a ésta es  $2x - y + 3 = 0$ . Encuentra los puntos de intersección de la recta con la circunferencia.
7. Explica por qué ninguna recta que pase por el punto  $P(1, -4)$  puede ser tangente a la circunferencia  $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$
8. Dadas las dos circunferencias siguientes  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$  y  $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 9$  determine si se cortan entre sí.

9. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $P(3, 1)$  y  $Q(-3, 5)$  y cuyo centro está sobre el eje de las abscisas.
10. Grafica tres puntos colineales en el plano cartesiano. ¿Cuántas circunferencias existen que pasan por estos tres puntos? Justifica tu respuesta.



El propósito principal de esta sección es que hagas algunas reflexiones sobre lo que has aprendido y sobre aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.



En la introducción al **BLOQUE** se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

En caso de considerarlo necesario, el profesor te podrá solicitar los resultados de autoevaluación.

### Problema 1

1. A partir de cada ecuación, encuentra las coordenadas del centro, el radio y su gráfica

a)  $x^2 + y^2 - 13.69 = 0$

b)  $x^2 + y^2 + 10x - 16y + 34.75 = 0$

c)  $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20 = 0$

d)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 34 = 0$



2. ¿En todos los casos te fue posible encontrar los elementos asociados a la circunferencia? Si en algún inciso no te fue posible, argumenta por qué.

---

---

---

### Problema 2.

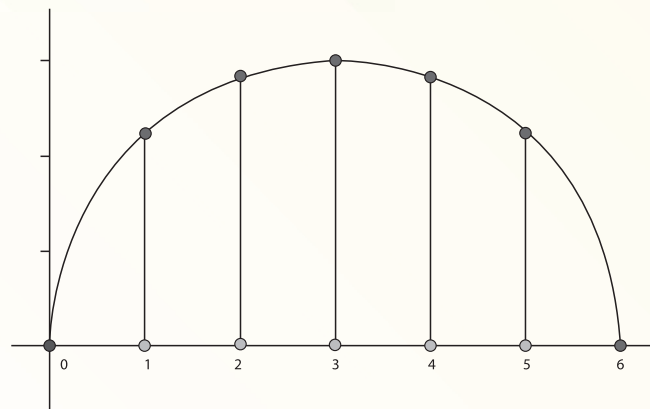
En la actividad de inicio de este **BLOQUE** estuviste trabajando con el diseño de Depósitos de agua para la ciudad de Agua Prieta, retoma esa situación para contestar las siguientes preguntas:

- a. Dibuja el terreno y el contorno de la base de los depósitos de agua en un plano cartesiano, ¿cuáles son las coordenadas del centro de la base de cada depósito de agua?
- b. ¿Qué condición debe cumplir un punto para estar en el contorno de la base de uno de los depósitos?
- c. Determina la ecuación de la curva que contiene los puntos del contorno de uno de los depósitos.
- d. Encuentra las ecuaciones de las otras tres curvas que determinan el contorno de la base de los otros tres depósitos.

- e. Si los encargados del sistema operador de agua quieren optimizar el espacio y desean construir además de los cuatro anteriores otro depósito de agua con la misma forma y tamaño, y con su centro en el centro del terreno, ¿cuál es la ecuación del contorno de la base del depósito si éste debe ser el más grande que se pueda construir?

### Problema 3.

Se ha construido un arco semicircular, como muestra la figura



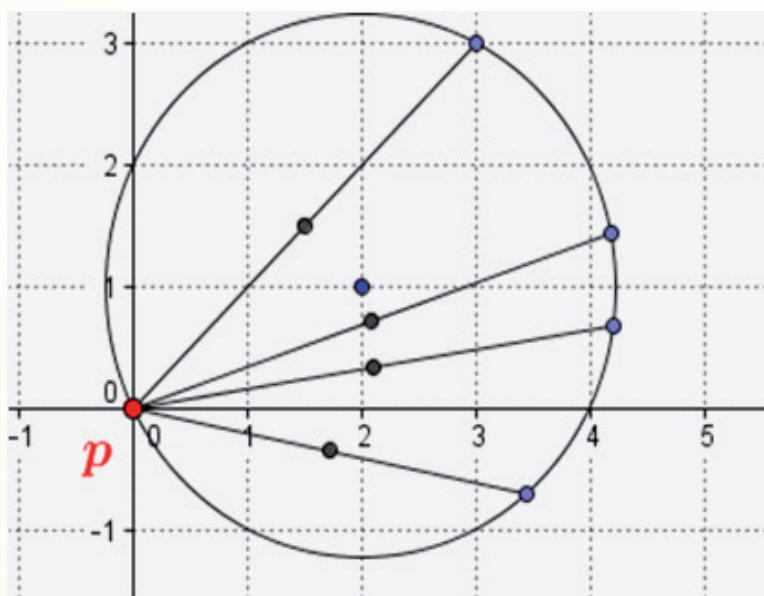
1. Si la base del arco mide 6 metros y se han colocado barrotes a cada metro, ¿Cuánto mide cada uno de los barrotes?

2. Explica aquí el procedimiento que empleaste para determina la altura de los barrotes.

Área reservada para la explicación del procedimiento.

## Problema 4

Si tenemos la siguiente construcción



En donde se ha fijado un punto P y se han trazado varias cuerdas y a cada cuerda se le ha trazado el punto medio.

1. ¿Cuál es el lugar geométrico que forman todos los puntos medios de las cuerdas trazadas bajo esa condición?

2. ¿Qué características tiene ese lugar geométrico?

3. ¿Cuál será la longitud de la cuerda más grande que se pueda trazar de la circunferencia de la figura?

### Reflexiones Generales sobre el BLOQUE 3

1. Si tuvieras que explicar a tus compañeros de equipo las ideas que te han quedado sobre los conceptos siguientes:

- a) Circunferencia
- b) Elementos de una circunferencia (radio, diámetro, cuerda, tangente, secante)
- c) Ecuación de una circunferencia
- d) Condiciones que determinan una circunferencia

¿Te sientes preparado para hacerlo?

¿Con cuáles de los conceptos tendrías mayor dificultad al explicarlo?

---

---

---

2. Al resolver problemas en equipo, ¿te han resultado útiles las ideas propuestas por tus compañeros?

---

---

---

3. Al resolver problemas en equipo, ¿has propuesto ideas a tus compañeros para resolverlos?

---

---

---

4. Haz una lista con las nociones que te han resultado más difíciles de entender y con los problemas que no has podido resolver.

---

---

---

---

5. ¿A quién piensas pedir asesoría para superar tus dificultades, en caso de que tengas alguna con este Bloque?

---

---

6. ¿Puedes usar algún software matemático para ayudarte con las gráficas que aparecieron en este bloque? ¿Cuál? ¿Dónde aprendiste a usarlo?

---

---

---

# BLOQUE 4

## La Elipse

### INTRODUCCIÓN:

La **elipse**, una curva que pertenece a la familia de las llamadas **secciones cónicas**, ha sido estudiada desde la antigüedad. **Por ejemplo**, **Apolonio de Pérgamo**, quien vivió entre el 262 y 160, aproximadamente, antes de la era cristiana, escribió una obra cuyo título en castellano es **Las Cónicas**, en el que presenta un tratamiento riguroso de la **elipse** y otras curvas.

En este **BLOQUE** se te propone una guía, a través de **Actividades**, para que estudies elementos y propiedades elementales de la **elipse**. Se te estarán proponiendo **Actividades** y planteando preguntas, orientadas hacia el objetivo mencionado, para que, en conjunto con tus compañeros, se inicien en el estudio de esta importante **curva**. Es muy importante que trabajes en todas las **Actividades** y que trates de ir estructurando los conocimientos que irás generando o investigando, pues el estudio de esta **curva**, será fundamental para la comprensión de muchas **situaciones geométricas** y **matemáticas** en general. Estas recomendaciones adquieren más sentido si tomas en cuenta que probablemente ésta es la primera vez en tu formación que estudias esta **curva**.



# Secuencia Didáctica 1.-



## Actividad de Inicio

### La elipse a nuestro alrededor



Analiza y comenta con tus compañeros la forma de la trayectoria de los planetas...

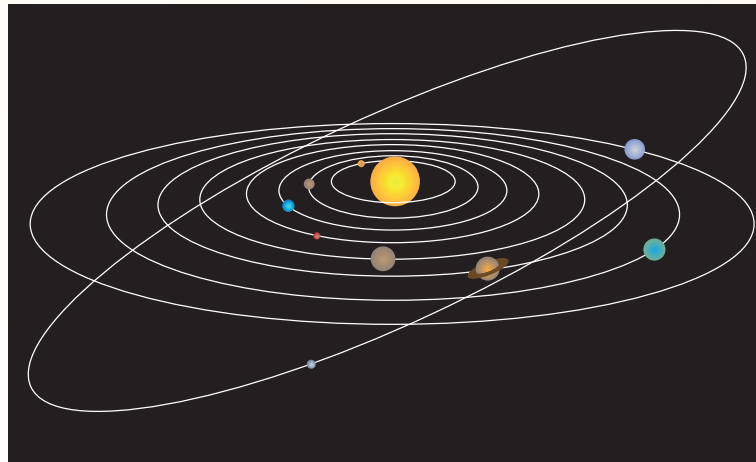


Figura 1

... o la sombra de una esfera al iluminarla, bajo un determinado ángulo, con una linterna cercana...

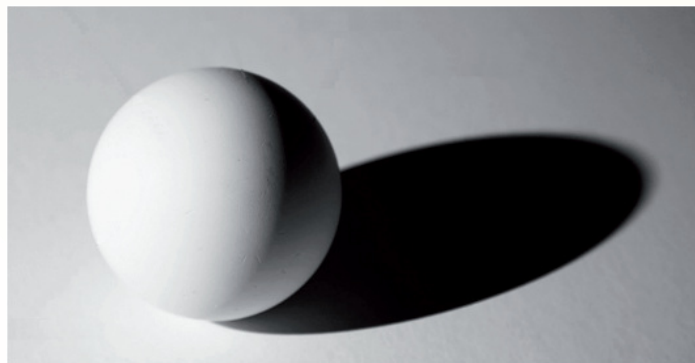


Figura 2

... o sobre un tipo muy especial de mesa de billar...

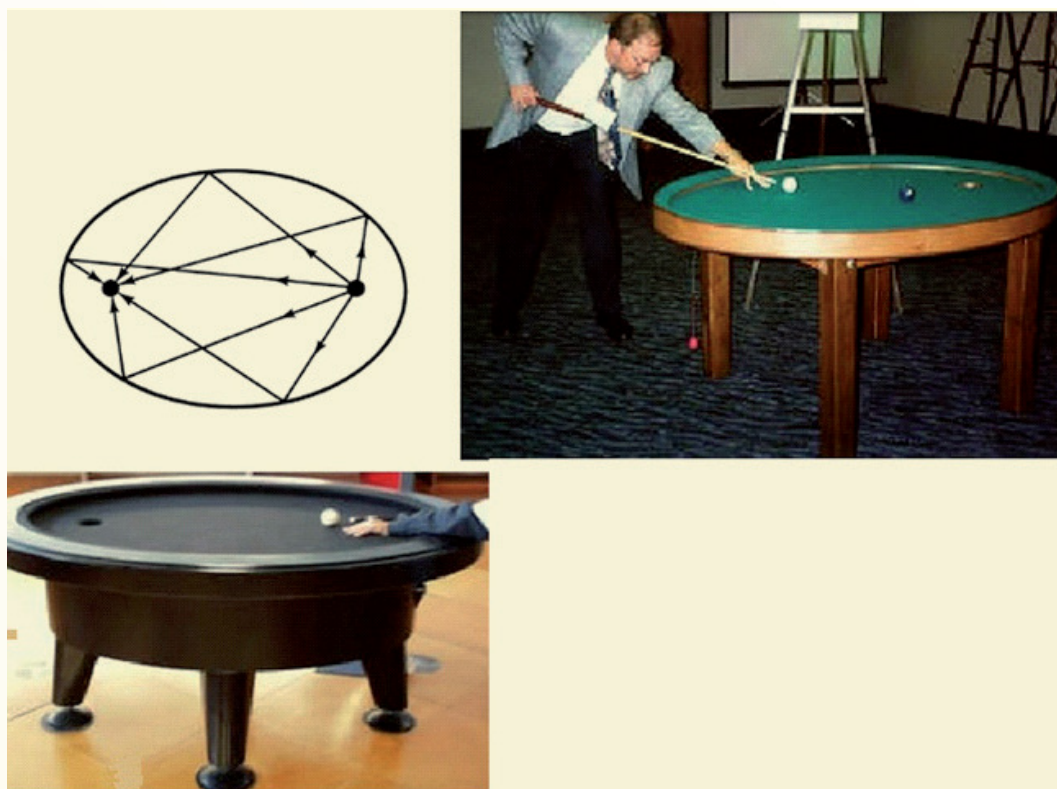


Figura 3

... o sobre un tratamiento médico moderno (litotricia, del griego lithos, piedra y del latín terere, triturar) para la eliminación de cálculos renales...

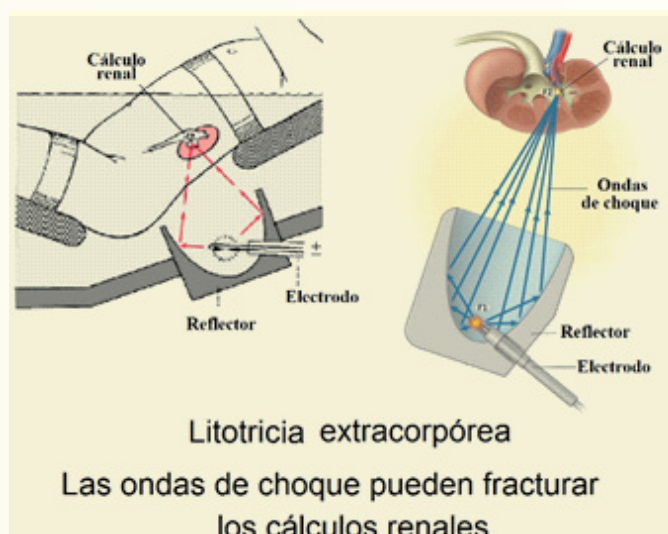


Figura 4



...o la curva que se obtiene al intersecar un cono circular recto con un plano en un determinado ángulo...

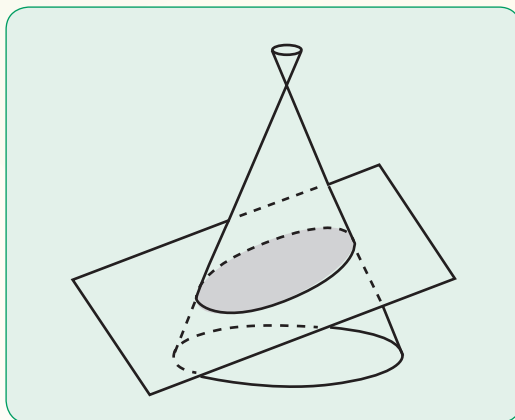


Figura 5

... o de la curva que *Hypatia de Alejandría* traza en una secuencia de la *película Ágora* (<http://vimeo.com/35929373>)...



Figura 6

... e identifica el lugar geométrico involucrado y algunas de sus propiedades y elementos.

---

---

---

¿Puedes identificar alguna curva común en los cinco casos presentados?

---

---

---

Existe una razón por la que la forma de la sombra que aparece en la **Figura 2** y la forma del corte que aparece en la **Figura 5** son iguales. ¿Puedes tu decir cuál es esta razón? Discutelo con tus compañeros y con tu profesor.

---

---

---

¿Hay alguna similitud entre ellas y la curva que se muestra en la **Figura 7**?

---

---

---

---

---

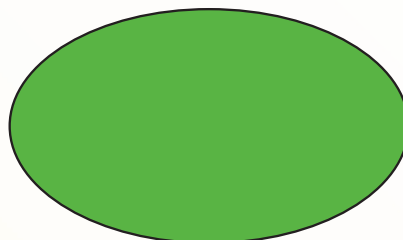


Figura 7



Ahora analiza con tus compañeros la forma de algunas figuras, como una pelota de futbol americano...



Figura 8

... o un huevo...



Figura 9

... o la plaza de San Pedro, en el Vaticano...

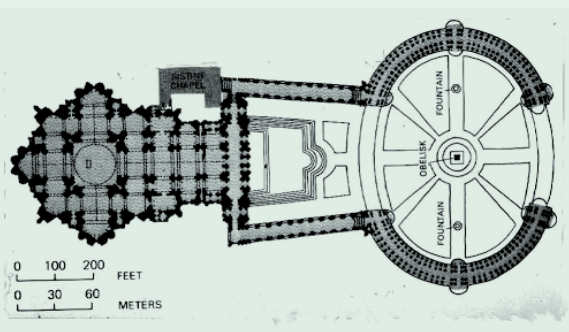


Figura 10

... y analiza y discute con tus compañeros de grupo acerca de las similitudes y diferencias entre las propiedades geométricas de estas curvas y las de aquellas presentadas en la *Actividad 1*.

¿Qué similitudes encuentras?

---

---

¿Qué diferencias?

---

---



## Actividad de Cierre



La curva común que aparece en las **Figuras de 1 a 5** es una curva muy importante por sus propiedades geométricas y por sus aplicaciones. Esta curva se llama **ELIPSE**.

Observa con detenimiento la curva que se traza en la **Figura**

**6**. Si se te pide a ti y a un grupo de amigos tuyos que tracen en el patio de tu escuela una curva como la mostrada ¿qué material solicitarías?

---

---

¿Qué consideraciones tendrías que hacer antes de iniciar el trazo?

---

---

¿Cómo procederías?

---

---

La curva que obtendrás se llama **elipse**.

Si se te pide que hagas el trazo de esa curva en el pizarrón de tu salón, ¿qué material necesitarías?

---

---

¿Cómo procederías?

---

---

Nuevamente, la curva que obtendrás se llama **elipse**.

A continuación se te plantea la pregunta central de esta fase del bloque; es muy importante que intentes contestarla primero tú sólo. Después compara tu respuesta con la de tus compañeros y consulten con el profesor.

A partir del procedimiento seguido para construir una elipse (ya sea el seguido por Hypathia en la **Figura 6**, o el que seguirían tú y tus compañeros para trazar una elipse en el patio o en el pizarrón) ¿cómo se define una elipse? Es decir, ¿qué propiedades tienen todos y cada uno de los puntos que están sobre una elipse?

Escribe aquí tu respuesta:

Una **elipse** es: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

O bien, si prefieres, describe la propiedad que tienen los puntos de una **elipse**:

Los puntos sobre una **elipse** tiene la propiedad de que \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

# Secuencia Didáctica 2.-

## Actividad de Inicio

### La elipse como objeto geométrico



En esta *Actividad* reforzarás, apoyado en un recurso tecnológico, el concepto del lugar geométrico llamado **elipse** que empezaste a estudiar en las *Actividades* anteriores de este **BLOQUE**.

Abre el applet **Elipse1**; encontrarás una imagen similar a la que se muestra en la **Figura 11**.

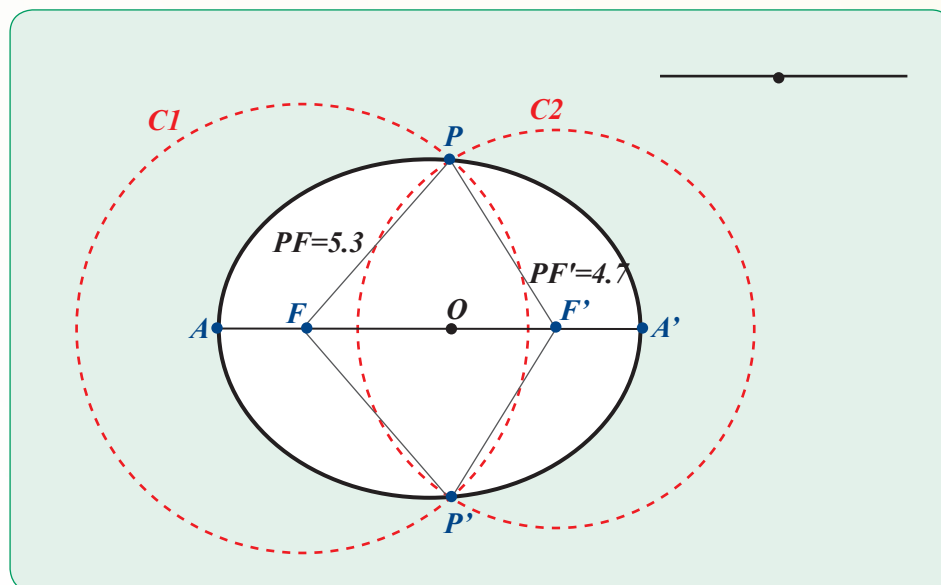


Figura 11

Este applet se ha construido de la siguiente manera.

Primero se ha escogido el segmento  $AA'$ , de 10 unidades de longitud, y se ha marcado su punto medio,  $O$ . Luego se ha escogido un punto,  $F$ , y se ha construido su simétrico,  $F'$ , con respecto a  $O$ . Desliza el punto  $F$  y observa lo que ocurre con la figura.

En la parte superior derecha aparece un **deslizador**,  $r$ , cuyo valor varía entre 0 y 10 (que es la longitud del segmento  $AA'$ ). El círculo  $C1$  tiene centro en  $F$  y radio  $r$  y el círculo  $C2$  tiene centro en  $F'$  y radio  $10 - r$ . Desliza el valor de  $r$  y observa cómo cambia la figura. Los puntos  $P$  y  $P'$  se obtienen intersectando los círculos  $C1$  y  $C2$ . Finalmente, la curva  $E$  se ha obtenido trazando el lugar geométrico de  $P$  al deslizar  $r$ .

Observa la relación que existe entre las longitudes de los segmentos  $PF$  y  $PF'$ .

Ahora, desliza el valor de  $r$  y contesta las siguientes preguntas:

¿Cuál es el valor de  $|PF| + |PF'|$ ? \_\_\_\_\_

¿Depende esta suma del valor de  $r$ ? \_\_\_\_\_

¿Porqué? \_\_\_\_\_

La curva  $E$  que se genera ¿tiene alguna similitud con las imágenes presentadas anteriormente?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

A partir de las observaciones que has realizado en esta *Actividad*, contesta una vez más:

Los puntos sobre una elipse tienen la propiedad de que \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



Ahora que has generado ideas acerca de lo que es una **elipse**, es importante que desarrolles criterios para decidir cuándo una **curva** no es una **elipse**.

Para empezar, debe estar claro que **una elipse es una curva cerrada**; así, curvas como las que se muestran en la **Figura 12** no son **elipses**.

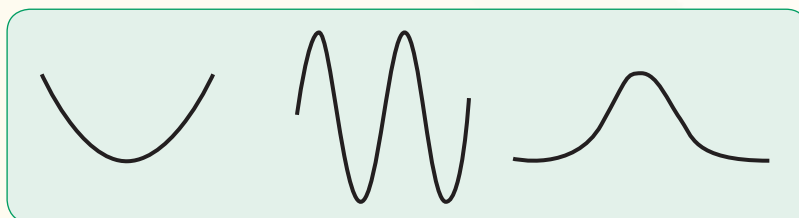


Figura 12



Pero, obviamente, **no toda curva cerrada es una *elipse***.

Analiza y discute con tus compañeros de equipo cómo se puede decidir si una curva cerrada es o no una **elipse**. **Escribe enseguida las conclusiones a las que hayan llegado.**

Utilizando los argumentos que han elaborado, digan cuál, o cuáles, de las curvas que se muestran en la **Figura 13** son **elipses** y cuáles no. **Justifiquen sus repuestas.**

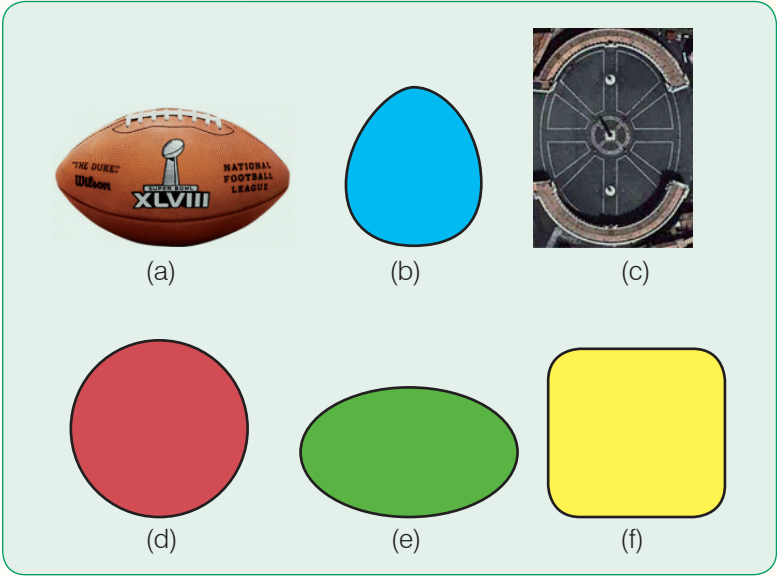


Figura 13

Figura	¿Es elipse?		Justificación
	Si	No	
(a)			
(b)			
(c)			
(d)			
(e)			
(f)			





## Desarrollo

### Actividad: 3

Actividad Individual



Existen muchos métodos para trazar **elipses**; algunos de ellos fueron inventados incluso antes de la era cristiana. En esta *Actividad* trabajarás sobre un método basado en lo que podríamos llamar “**papiroflexia**”.

1. En una hoja en blanco, de preferencia transparente:

- Con un compás, traza una circunferencia de radio igual a **9 cm.** y denota el centro de la misma con la letra **A**.
- Traza otro punto **B** en el interior de la circunferencia.
- Traza un punto **P** cualquiera sobre la circunferencia y los segmentos **AP** (radio) y **BP**.
- Dobra el papel de tal modo que el doblez coincida con la mediatriz del segmento **BP** (ver recta punteada en la **Figura 14**).
- Llama **Q** al punto de intersección del doblez con el segmento **AP**.

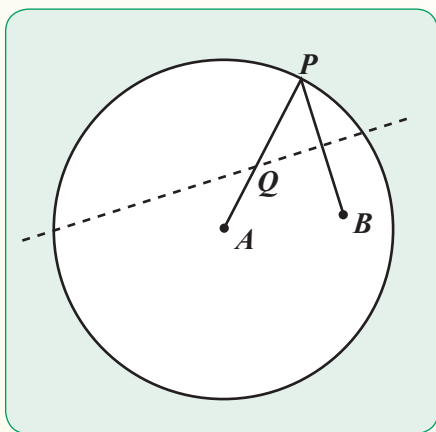


Figura 14

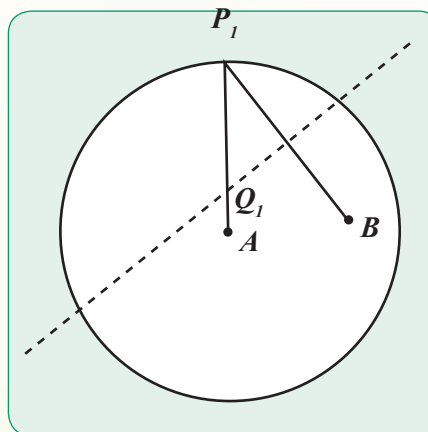


Figura 15

- Toma otro punto sobre la circunferencia y llámalo **P<sub>1</sub>**. Repite los pasos desde a) hasta e), para localizar un nuevo punto **Q<sub>1</sub>** (**Figura 15**).
- Traza los puntos suficientes (arriba y abajo de **AB**) **Q**, **Q<sub>1</sub>**, **Q<sub>2</sub>**, etc., hasta que los puntos te sugieran alguna curva.
- ¿De qué curva se trata y qué nombres les asignarías a los puntos **A** y **B**? Explica.

---



---

2. Si se toma un punto  $Q$  cualquiera de los que se ha trazado mediante el doblado de papel (ver **Figura 16**), entonces:

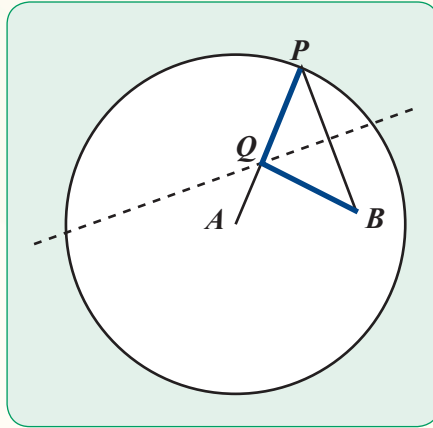


Figura 16

- a) Para este punto  $Q$  se tiene que  $QB = QP$ . Explica a qué se debe esta igualdad.
- 
- 
- b) Cuando el punto  $P$  recorre la circunferencia, ¿ $AQ + QB$  varía o es constante? Justifica tu respuesta.
- 
- 
- c) Explica de nuevo qué tipo de curva describe el punto  $Q$ , cuando  $P$  se mueve sobre la circunferencia y a qué consideras que se debe.
- 
-



## Actividad de Cierre



Con base en ideas intuitivas y en lo que hasta este punto se ha estudiado, intenta identificar los elementos de una **elipse** que se indican en la **Figura 17**. Si no estás seguro de alguno(s) de los nombres, investigalo por tu cuenta. Es importante que te familiarices con estos elementos y con sus definiciones para que puedas proceder con las *Actividades* de la **Secuencias** siguientes.

### LA ELIPSE

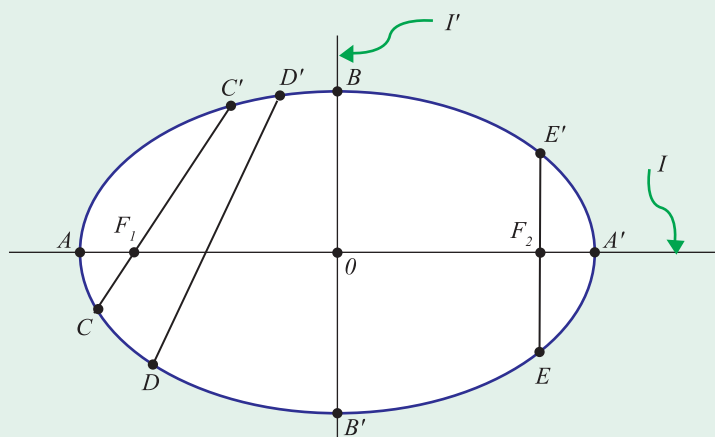


Figura 17

	Nombre:
$O$	
$F_1$	
$F_2$	
$A$	
$A'$	
$B$	
$B'$	
$AA'$	
$BB'$	
$CC'$	
$DD'$	
$EE'$	
$I$	
$I'$	

# Secuencia Didáctica 3.



## Actividad de Inicio

### El concepto analítico de elipse



En esta etapa vas a analizar algunas situaciones y a contestar algunas preguntas que te permitirán obtener una importante y útil relación entre los parámetros de una **elipse**.

Primero es conveniente que te familiarices con la notación que se describe a continuación.

- En una **elipse** se acostumbra denotar la distancia del centro de la elipse a uno de sus vértices con  $a$ ; es decir,  $|OA| = a$ . Ver **Figura 18**.

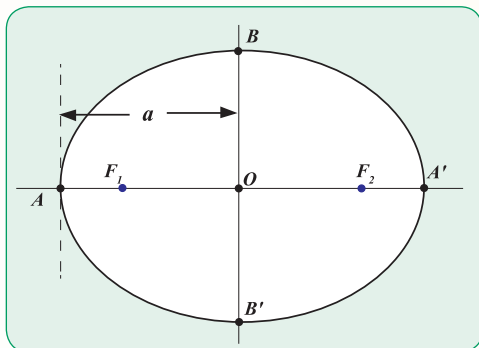


Figura 18

Contesta las siguientes preguntas:

Si  $|OA| = a$ , ¿cuál es el valor de  $|OA'|$ ?

¿Cuál es la longitud del semieje mayor de una **elipse**?

¿Cuál es la longitud del eje mayor de una **elipse**?

- De igual manera se acostumbra denotar a la distancia entre el centro y el punto  $B$  con  $b$ ; es decir, en la **Figura 19** se tiene que  $|OB| = b$ .

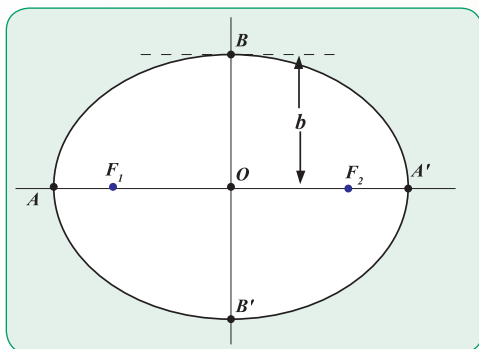


Figura 19

Contesta las siguientes preguntas:

Si  $|OB| = b$ , ¿cuál es el valor de  $|OB'|$ ?

¿Por qué?

¿Cuál es la longitud del semieje menor de una **elipse**?

¿Cuál es la longitud del eje menor de una **elipse**?

- Finalmente, la distancia entre el origen  $O$  y uno de los focos se denota tradicionalmente con la letra  $c$ ; es decir,  $|OF_1| = c$ . Ver **Figura 20**.

Los números  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los parámetros de la **elipse**. Pero, de hecho, no son independientes; existe una relación muy importante entre ellos que puedes descubrir teniendo presente la propiedad que tienen los puntos de una **elipse**. Recuerda que esta propiedad es:

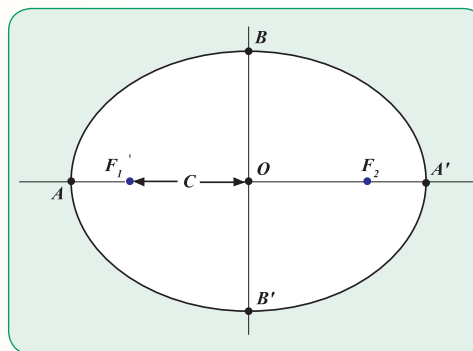
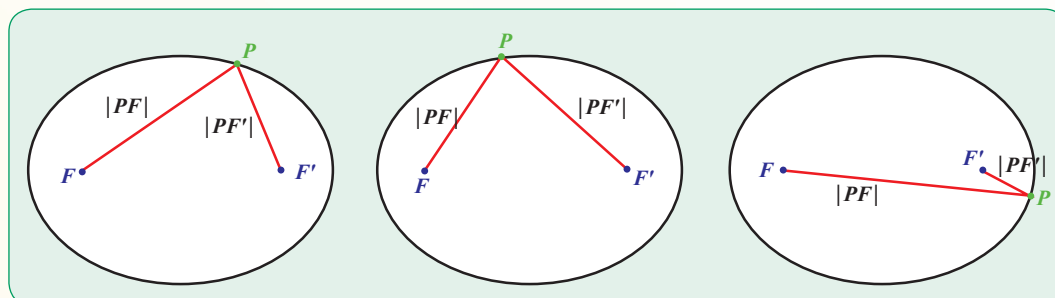


Figura 20

**La suma de las distancias de cada punto de la elipse a los focos es constante.**

Figura 21 En una elipse se satisface  $|PF| + |PF'| = \text{constante}$ 

Tomando en cuenta que esta propiedad se cumple independientemente de la posición del punto  $P$  sobre la **elipse** contesta la siguiente pregunta:

¿Cómo expresarías esta constante en términos de  $a$ ? (Sugerencia: Coloca  $P$  en uno de los vértices de la **elipse**) \_\_\_\_\_

Tu respuesta a la pregunta anterior nos permite concluir que cuando el punto  $P$  coincide con uno de los extremos del semieje menor, digamos con  $B$ , entonces se tiene el siguiente esquema:

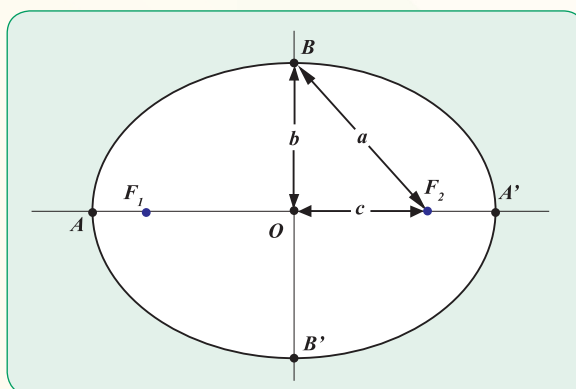


Figura 22

¿Estás de acuerdo con la afirmación anterior? \_\_\_\_\_

¿Por qué sí? o ¿por qué no? \_\_\_\_\_

De la **Figura 22** se obtiene la relación entre los parámetros de la **elipse**.

Contesta lo siguiente:

La relación que existe entre los valores  **$a$** ,  **$b$**  y  **$c$**  es \_\_\_\_\_

Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Es posible trazar una **elipse** para la que  **$a = 5$**  y  **$b = 3$** ? \_\_\_\_\_

b) ¿Es posible trazar una **elipse** para la que  **$b = 5$**  y  **$c = 12$** . \_\_\_\_\_

c) ¿Puedes construir una **elipse** para la que  **$a = 17$**  y  **$b = 9$**  y  **$c = 15$** ? \_\_\_\_\_

¿Por qué? \_\_\_\_\_

d) ¿Y qué tal una elipse para la que  **$a = 5$**  y  **$b = 5$** ? \_\_\_\_\_

¿Qué dicen tus compañeros de este caso? ¿Y tu profesor?

Tal vez no sea necesario decirlo, pero debes observar, y recordar, que, de los tres parámetros,  **$a$** ,  **$b$**  y  **$c$** , siempre ocurre que  $a$  es el mayor.



## Desarrollo



Las **Actividades** anteriormente desarrolladas te han preparado para obtener la ecuación de una **elipse** y para resolver problemas relacionados con **elipses**.

Ahora necesitarás trabajar en un sistema de coordenadas sobre el que debes elegir dos puntos, que serán los focos de elipse. Por conveniencia, en esta etapa toma los focos sobre el eje  **$x$**  y colócalos de manera simétrica con respecto al origen, como se muestra en la **Figura 23**.

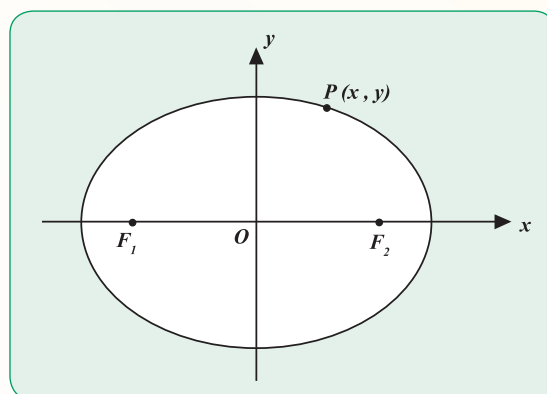


Figura 23



Como se estableció anteriormente, la distancia del centro a cada foco es  $c$ . Con base en esta información, ¿Cuáles son las coordenadas de los focos?  $F_1(\_,\_) , F_2(\_,\_) .$

Si  $P(x,y)$  denota un punto arbitrario sobre la elipse (ver **Figura 20**), entonces, por definición se tiene que:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \quad (1)$$

Ahora contesta las preguntas siguientes:

¿Cómo se calcula (es decir, cuál es la fórmula para calcular) la distancia de  $P$  a  $F_1$ ?

$|PF_1| =$  \_\_\_\_\_

¿Cómo se calcula la distancia de  $P$  a  $F_2$ ?

$|PF_2| =$  \_\_\_\_\_

¿Qué ecuación obtienes si sustituyes las dos distancias en la fórmula (1)?

---



Para llevar a cabo esta *Actividad* debes **a)** usar adecuadamente la fórmula para elevar un binomio al cuadrado, **b)** estar atento al proceso de agrupar términos semejantes y **c)** usar la relación entre los parámetros de la elipse que obtuviste en la *Actividad 1* de esta secuencia.

Mediante **operaciones algebraicas**, transforma la expresión que obtuviste en la última respuesta en la forma siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Antes de continuar, es conveniente hacer algunos comentarios:

- 1) La ecuación (2) se llama **forma canónica** de la ecuación de la **elipse**.
- 2) ...bueno, de hecho, el nombre es un poquito más largo: se llama "*forma canónica de la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal horizontal*".
- 3) Algunas veces a la **forma canónica** se le llama **forma estándar**.
- 4) Observa la relación en la que aparecen las variables  $x$  y  $y$  y los parámetros  $a$  y  $b$ , respectivamente, en la fórmula (2). En particular, observa que en la primera fracción



en el lado izquierdo de (2) (es decir, en  $x^2/a^2$ ) aparecen el parámetro  $a$  (longitud del semieje mayor) y la variable  $x$  (que “se mueve” en la dirección horizontal). Será conveniente que consideres este dato como una indicación de la posición de la **elipse** cuya ecuación es (2), en el sentido de que su eje mayor es horizontal, en este caso.

- 5) En la secuencia didáctica siguiente estudiarás otra forma de representar la **elipse** y analizarás la manera de convertir una forma en la otra. De igual manera estudiarás la ecuación de la **elipse** con un poco más de generalidad.

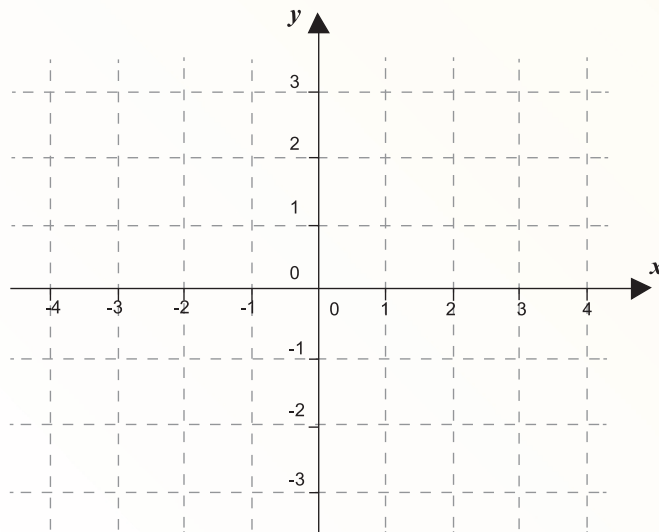


Si una **elipse** tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Contesta las siguientes preguntas

- Las coordenadas del centro son: \_\_\_\_\_
- El valor de  $a^2$  es: \_\_\_\_\_
- El valor de  $b^2$  es: \_\_\_\_\_
- El valor de  $a$  es: \_\_\_\_\_
- El valor de  $b$  es: \_\_\_\_\_
- El valor de  $c^2$  es: \_\_\_\_\_
- El valor de  $c$  es: \_\_\_\_\_
- Las coordenadas de los focos son  $F_1$ ( \_\_\_\_, \_\_\_\_) y  $F_2$ ( \_\_\_\_, \_\_\_\_)
- Las coordenadas de los vértices son  $A_1$ ( \_\_\_\_, \_\_\_\_) y  $A_2$ ( \_\_\_\_, \_\_\_\_)
- En el plano cartesiano siguiente traza un bosquejo de la gráfica de la **elipse**.





## Actividad de Cierre



En la *Actividad 3* obtuviste que la ecuación de una elipse con focos en  $(-c, 0)$  y  $(c, 0)$  es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En esta ecuación hay dos parámetros que deben ser determinados:  $a$  y  $b$ . Entonces, para determinar la ecuación de una **elipse** como la anterior debes tener dos datos consistentes.

Considera el siguiente caso.

i) Una **elipse** con centro en el origen y **eje focal horizontal** pasa por los puntos  $P(-2, 3)$  y  $Q(4, 0)$ .

ii) Sustituye las coordenadas del punto  $P$  en la ecuación (2) de la **elipse**; es decir, sustituye  $x$  por  $-2$  y  $y$  por  $3$ . Obtendrás entonces una ecuación en la que las incógnitas son los parámetros  $a$  y  $b$ .

¿Qué ecuación es ésta? \_\_\_\_\_

iii) Sustituye ahora en la ecuación (2) las coordenadas de  $Q$ .

¿Qué ecuación obtienes? \_\_\_\_\_

Las ecuaciones que obtuviste en los pasos ii) y iii) forman un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas,  $a$  y  $b$ , aparecen ambas elevadas al cuadrado.

iv) Para facilitarte la solución de este sistema de ecuaciones se te recomienda hacer al cambio de variables siguiente:  $u = \frac{1}{a^2}$ ,  $v = \frac{1}{b^2}$

Reescribe tu sistema de ecuaciones en términos de  $u$  y de  $v$  y obtendrás un sistema de ecuaciones lineales.

v) Ahora resuelve el sistema de dos ecuaciones que obtuviste.

Escribe los valores de  $u$  y de  $v$ :  $u =$  \_\_\_\_\_,  $v =$  \_\_\_\_\_.

vi) Ahora escribe los valores de  $a^2$  y de  $b^2$ :  $a^2 =$  \_\_\_\_\_,  $b^2 =$  \_\_\_\_\_.

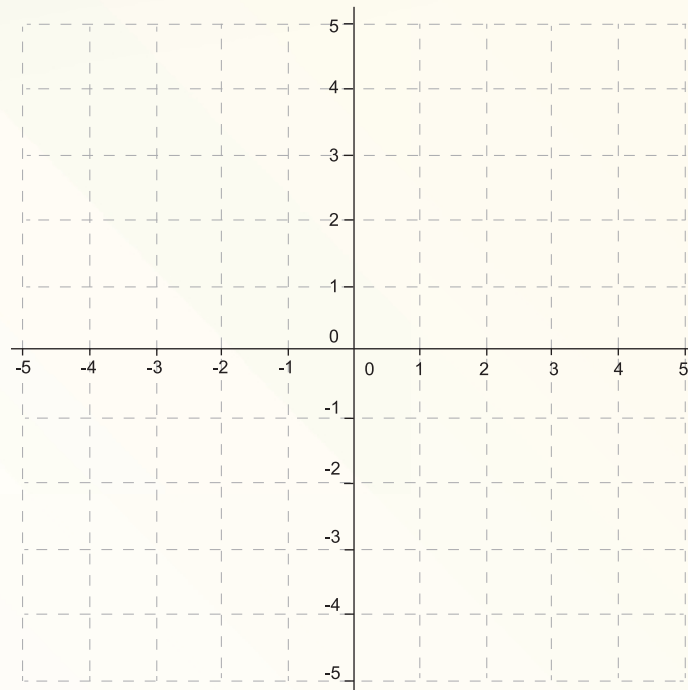
vii) Escribe la ecuación buscada de la elipse:

\_\_\_\_\_

viii) Los focos son ( \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ ) y ( \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )

Los vértices son ( \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ ) y ( \_\_\_\_\_ , \_\_\_\_\_ )

ix) Dibuja la gráfica de la **elipse** en el sistema de coordenadas siguiente.



Encuentra la ecuación de la **elipse** que tiene las propiedades indicadas. En todos los casos se trata de una **elipse** con centro en  $(0, 0)$  y con **eje focal** sobre el **eje x**.

- Un foco en  $(2, 0)$  y un vértice en  $(3, 0)$ ;
- Uno de los vértices dista **8** de un foco y **18** del otro.
- Pasa por el punto  $(2, 1)$  y su eje menor mide **4**.



Para cada una de las siguientes ecuaciones encuentra las coordenadas de los focos, las coordenadas de los vértices, las longitudes de los semiejes, y dibuja la gráfica.

b)

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

a)

;

### Actividad: 8

Actividad Individual



Encuentra la ecuación de cada una de las **elipses** cuyas gráficas se muestran en la **Figura 24**.

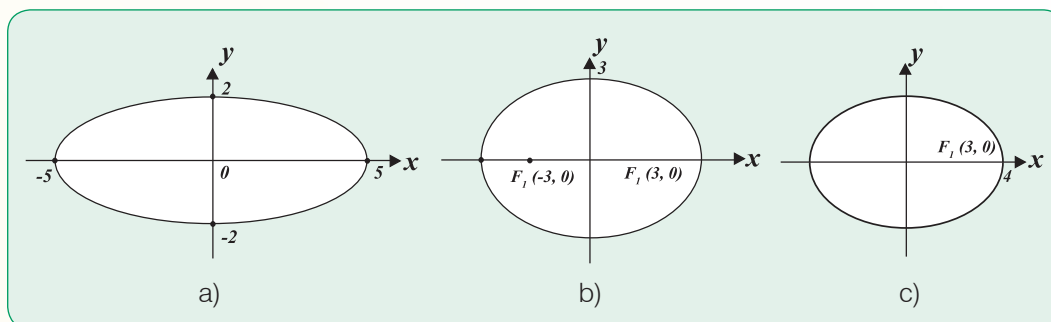


Figura 24

### Actividad: 9

Actividad Individual



En la **Actividad 3** de la **Secuencia 2** investigaste los nombres de los elementos geométricos de una elipse, que se muestran en la **Figura 17**. En particular encontraste que la cuerda **EE'** se llama **lado recto**.

De hecho la **elipse** tiene dos lados rectos; son las cuerdas focales perpendiculares al eje mayor de la **elipse**. En esta **Actividad** se te pide que encuentres la longitud del lado recto, que se denota con **LR**.

- De la ecuación (2), despeja la variable **y**; escribe tu respuesta: \_\_\_\_\_
- Ahora, en la expresión que encontraste, sustituye el valor  $x = c$ , y de tu respuesta concluye que la longitud del lado corto de la elipse es

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

- Usando la fórmula anterior, calcula la longitud del lado recto de cada una de las elipses de la **Figura 21**.

# Secuencia Didáctica 4.



## Actividad de Inicio

### La ecuación de la elipse - Forma canónica



En la **Secuencia 3** obtuviste la ecuación de la **elipse** que tiene centro en el origen y cuyo eje focal está sobre el **eje  $x$** ; ésta es la ecuación (2) que obtuviste en la **Actividad 2** de la **Secuencia 3**. Y todas las **Actividades** que has realizado hasta ahora han tenido que ver con **elipses** de ese tipo. Pero la posición de una **elipse** con respecto al sistema de coordenadas elegido

también puede ser vertical (**Figura 25(a)**), o incluso inclinada (**Figura 25(b)**) o tener su centro en un punto distinto del origen (**Figura 25(c)**).

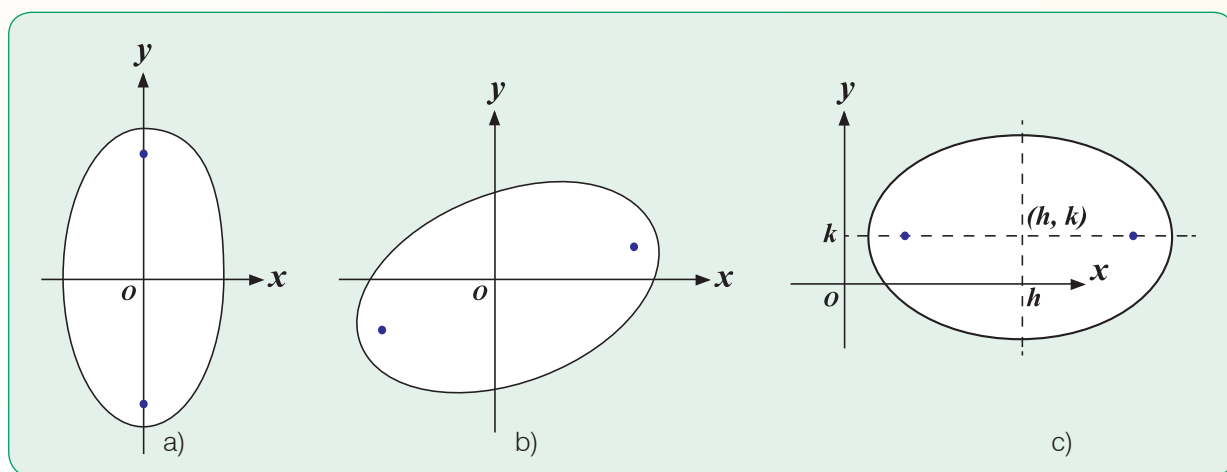


Figura 25

El caso representado en la **Figura 25(b)** no será tratado en este Módulo. Este caso de la **elipse** se estudia en cursos avanzados de **geometría analítica**. Sin embargo, observa que en todos los casos, el sentido geométrico de los parámetros  **$a$** ,  **$b$**  y  **$c$**  es el mismo, y la relación entre ellos ( $a^2 = b^2 + c^2$ ) se mantiene.

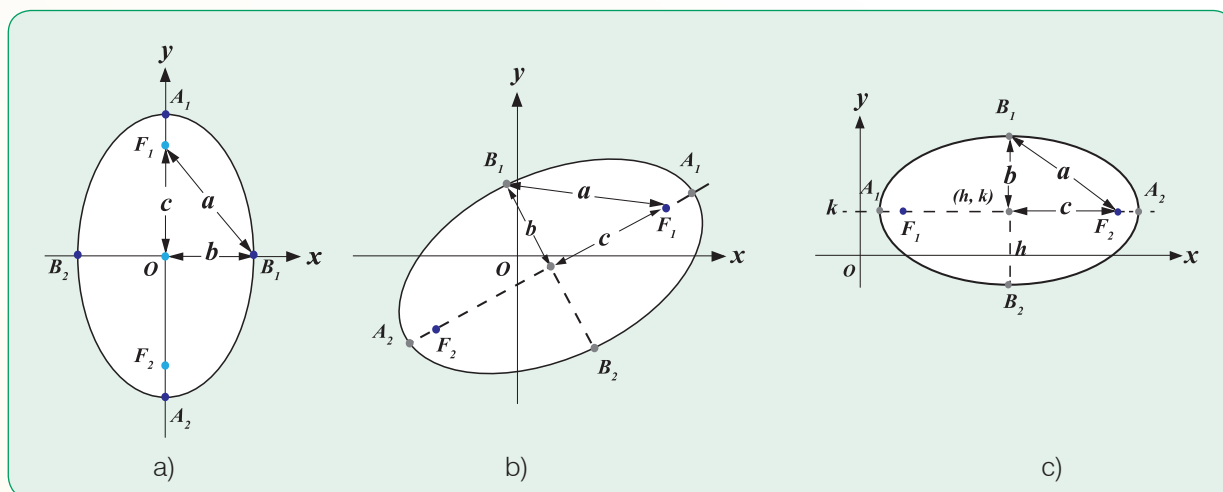


Figura 26



## Desarrollo



Puedes obtener la ecuación de la **elipse** en los casos (a) y (c) mostrados en la **Figura 25** siguiendo exactamente el mismo procedimiento que usaste en el *Actividad 2* de la **Secuencia 3**.

Considera, por ejemplo, de la **elipse** mostrada en la **Figura 27**...

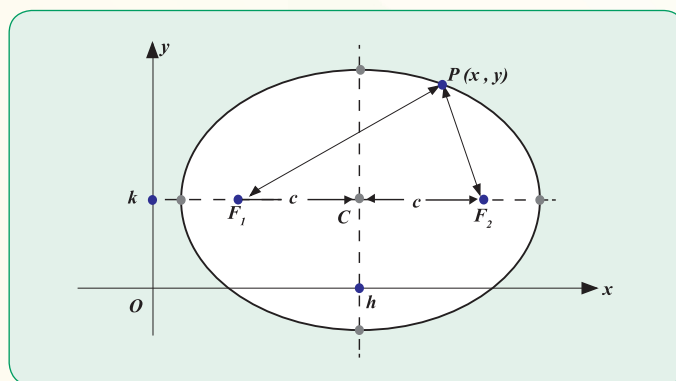


Figura 27

... en la que se muestra un punto genérico,  $P(x, y)$ , y contesta las siguientes preguntas:



- ¿Cuáles son las coordenadas del centro?  $C =$  \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son las coordenadas de  $F_1$ ?  $F_1 =$  \_\_\_\_\_
- ¿Cuáles son las coordenadas de  $F_2$ ?  $F_2 =$  \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la distancia de  $P$  a  $F_1$ ?  $|PF_1| =$  \_\_\_\_\_
- ¿Cuál es la distancia de  $P$  a  $F_2$ ?  $|PF_2| =$  \_\_\_\_\_

Ahora sustituye la información que has obtenido en la definición de **elipse**,

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

y realiza las operaciones algebraicas y las sustituciones que sean necesarias para que concluyas que la ecuación de la elipse con centro en el punto  $C(h, k)$  y eje focal paralelo al **eje x** es:

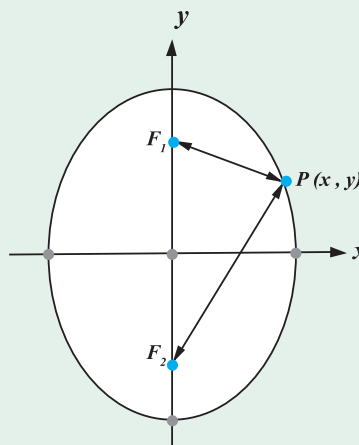
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

La ecuación (3) se llama **forma canónica de la ecuación de una elipse horizontal**.



Siguiendo exactamente el mismo procedimiento que en la **Actividad 2** de la **Secuencia 4**, deduce que la **forma canónica** de la ecuación de una **elipse** con centro en el origen con eje focal sobre el **eje y** es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$







## Actividad de Cierre

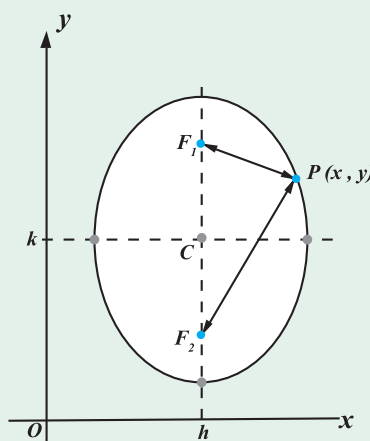
### Actividad: 4

Actividad Individual



Finalmente, siguiendo los mismos pasos que en la *Actividad 2* de esta **Secuencia didáctica**, deduce que la **forma canónica** de la ecuación de una **elipse** con centro en el punto  $C(h, k)$  y con eje focal paralelo al *eje de las y* es:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$



### Actividad: 5

Actividad de Equipo



La **forma canónica** de la ecuación de la **elipse** tiene la ventaja de que, “con sólo mirar” la ecuación, puedes hacerte una idea de cómo es la gráfica de la **elipse**; es decir, puedes ver

- Si su centro  $C$  está en el origen de coordenadas o en un punto distinto.
- Si la elipse es vertical u horizontal.
- El tamaño de los ejes.

Para reforzar esta observación, se te presenta la tabla siguiente que resume, en forma gráfica y simbólica, las ideas analíticas de lo que has estudiado hasta este punto.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Tabla 1 La ecuación de la elipse en forma canónica



Contesta lo siguiente:

- i. Una **elipse** tiene centro en el punto  $C(2, 4)$  uno de sus focos es el punto  $F_1(4, 4)$  y uno de sus vértices es  $V_1(5, 4)$ .
  - a) Escribe la forma canónica de la ecuación.
  - b) Traza la gráfica de la elipse.
  
- ii. Los focos de una **elipse** son los puntos  $F_1(3, -2)$  y  $F_2(3, 4)$  y el eje mayor de la elipse mide 8 unidades.
  - a) Escribe la forma canónica de la ecuación.
  - b) Traza la gráfica de la elipse.

# Secuencia Didáctica 5.-



## Actividad de Inicio

### La ecuación de la elipse - Forma general

En muchas ocasiones, por consideraciones analíticas, es conveniente representar la ecuación de la **elipse** en una forma llamada **forma general**. La **forma general** se obtiene de la respectiva forma canónica mediante manipulaciones algebraicas, como explorarás en la siguiente actividad.



Considera el caso de la una **elipse vertical** con centro fuera del origen. La ecuación canónica es

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

Realiza las operaciones que se te indican a continuación:

- Expresa la suma de las dos fracciones en el lado izquierdo como una sola fracción y escribe lo que obtienes:
- Multiplica ambos lados de la ecuación que obtuviste en el paso a) por el denominador de la fracción en el lado izquierdo; escribe lo que obtuviste:
- En el lado izquierdo de la ecuación que obtuviste en b) desarrolla los dos binomios, multiplícalos por el correspondiente coeficiente y agrupa los términos semejantes; debes obtener una ecuación de la forma  $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ . **Esta se llama forma general de la ecuación de la elipse.** Contesta lo siguiente:
- ¿Cómo expresas cada uno de los coeficientes en la forma general en términos de  $a$ ,  $b$ ,  $h$  y  $k$ ?

$$A = \underline{\hspace{2cm}}, \quad B = \underline{\hspace{2cm}}, \quad D = \underline{\hspace{2cm}}, \quad E = \underline{\hspace{2cm}}, \quad F = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Antes de terminar esta *Actividad* es conveniente que observes la siguiente propiedad de la **ecuación general de la elipse** (ojo: no estamos hablando aquí de la elipse como curva, sino de la ecuación que la representa):

En la **ecuación general de la elipse**,  $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$  los coeficientes  $A$  y  $B$  tienen las siguientes características:

- a) ninguno de ellos es cero, ( $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ );
- b) ambos son del mismo signo ( $A \times B > 0$ ), y
- c) son distintos uno del otro ( $A \neq B$ ).

También es importante aclarar que no toda ecuación que satisfaga estas propiedades representa una **elipse**; **por ejemplo**, en la ecuación  $4x^2 + 9y^2 = -1$ , los coeficientes  $A = 4$  y  $B = 9$  satisfacen las tres condiciones descritas, pero la ecuación no representa una **elipse**.  
¿Puedes decir por qué?



## Desarrollo



Contesta lo siguiente:

- i. Una **elipse** tiene centro en el origen, uno de sus focos es el punto  $F_1(4, 0)$  y uno de sus vértices es  $V_1(5, 0)$ 
  - a) Escribe la forma canónica de la ecuación.
  - b) Escribe la forma general.
  - c) Traza la gráfica de la elipse.
- ii. Los focos de una elipse son los puntos  $F_1(1, -1)$  y  $F_2(1, 3)$  y el eje menor de la **elipse** mide 2 unidades.
  - a) Escribe la forma canónica de la ecuación.
  - b) Escribe la forma general.
  - c) Traza la gráfica de la elipse.

### Actividad: 3

Actividad Individual



Cuando la ecuación de una **elipse** está dada en **forma general**, los elementos de la **elipse** están un poco ocultos en la ecuación. Para poder determinarlos es necesario, mediante un proceso algebraico, convertir la **forma general** dada a la forma **canónica** para, así, poder leer los elementos geométricos de la **elipse**.

Lee con detenimiento el ejemplo siguiente.

Considera una **elipse** cuya ecuación general es  $9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y + 36 = 0$ . Si te piden que encuentres el centro, los focos, los vértices y que traces la gráfica, debes proceder de la manera siguiente.

- Se resta **36** en ambos lados de la ecuación:  $9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y = -36$ ;
- En el lado izquierdo se reacomodan los términos:  $9x^2 + 36x + 4y^2 + 24y = -36$ ;
- Se realizan factorizaciones de modo tal que los coeficientes de  $x^2$  y de  $y^2$  sean **1** (uno):  $9(x^2 + 4x) + 4(y^2 + 6y) = -36$ ;
- En las expresiones entre paréntesis se completan trinomios cuadrados perfectos:  $9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 + 6y + 9) = -36 + 36 + 36$ ;
- Se simplifica:  $9(x + 2)^2 + 4(y + 3)^2 = 36$ ;
- Se dividen ambos lados de la ecuación entre 36 (el número que queda a la derecha), para conseguir que el lado derecho sea 1 (con en las formas canónicas):

$$\frac{9(x+2)^2}{36} + \frac{4(y+3)^2}{36} = 1$$

- Finalmente, se simplifican los coeficientes en el lado derecho:

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

Ya está. Ahora sólo debes observar que la ecuación que se obtuvo coincide con la del tercero de los casos mostrados en la **Tabla 1** de la **Secuencia** anterior. Por tanto, se trata de una elipse vertical con centro en el punto  $C = (h, k) = (-2, -3)$ . De la ecuación se ve que  $a^2 = 9$  y que  $b^2 = 4$ ; así que  $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$ .

De modo que  $a = 3$ ,  $b = 2$  y  $c = \sqrt{5}$ . Como la elipse es vertical, entonces los vértices son los puntos:

$$V_1 = (h, k + a) = (-2, 0) \text{ y } V_2 = (h, k - a) = (-2, -6).$$

Los focos son:

$$F_1 = (h, k + c) = (-2, -3 + \sqrt{5}) = (-2, -0.8) \text{ y}$$

$$F_2 = (h, k - c) = (-2, -3 - \sqrt{5}) = (-2, -5.2).$$

La gráfica se muestra en la **Figura 28**.

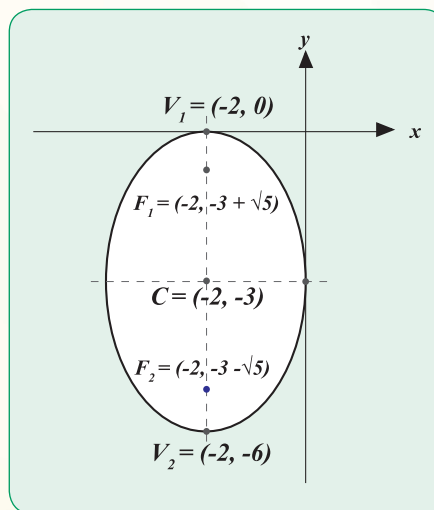


Figura 28



## Actividad de Cierre



Para cada una de las **elipses** siguientes, representadas algebraicamente en forma general, haz lo siguiente:

- Escribela en forma canónica.
- Encuentra los valores de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
- Encuentra las coordenadas del centro.
- Encuentra las coordenadas de los focos.
- Encuentra las coordenadas de los vértices.
- Traza la gráfica.

- $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$
- $9x^2 + 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$
- $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$
- $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$
- $16x^2 + 4y^2 + 48x - 32y + 36 = 0$
- $4x^2 + 25y^2 + 20x - 150y + 150 = 0$
- $x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$
- $x^2 + 9y^2 - 10x + 16 = 0$



# Secuencia Didáctica 6.-



## Actividad de Inicio

### Propiedades geométricas de la elipse



Como puedes intuir, las magnitudes de los parámetros de una **elipse** determinan qué tan “alargada” es una **elipse**. En esta *Actividad* trabajarás sobre la construcción del concepto de **excentricidad**.

Observa, para empezar, que la palabra misma, **excentricidad**, insinúa algo así como la separación con respecto a un centro. En una **elipse**, sabemos que la separación de cada foco con respecto al centro es un número que se denota con  $c$ .

Para apoyarte en la construcción del concepto de **excentricidad**, abre el applet *Elipse2*; encontrarás una imagen como la que se muestra en la **Figura 29**.

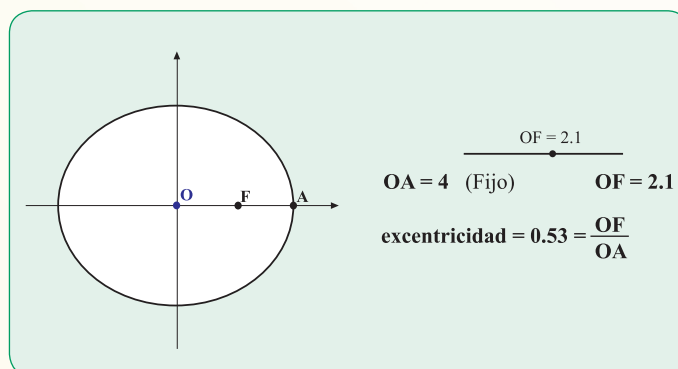


Figura 29

El semieje mayor de la **elipse** que aparece en el applet tiene longitud 4. El foco  $F(c, 0)$  se puede mover con el deslizador. El valor de la **excentricidad** que aparece debajo del deslizador se obtiene dividiendo el valor de  $c$  ( $= |OC|$ ) entre el valor de  $a$  ( $= |OA|$ )

Apoyándote en el applet *Elipse2* escribe la manera en la que se define la **excentricidad**, en términos de los parámetros  $a$  y  $c$ :

**Excentricidad** = \_\_\_\_\_



Comenta con tus compañeros tu respuesta y analiza la que ellos han propuesto.  
Con base en las exploraciones geométricas que has hecho con el applet *Elipse2*, contesta las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el menor valor posible para la excentricidad?
- ¿Qué forma adquiere la elipse cuya excentricidad tiene este valor mínimo posible?
- ¿Cuál es el máximo valor posible para la excentricidad?
- ¿Qué forma adquiere la elipse cuya excentricidad tiene este valor máximo posible?



## Desarrollo



El concepto de **excentricidad** que has desarrollado en la *Actividad* anterior puede también describirse como una medida de la deformación de una circunferencia.

Para analizar el sentido de esta afirmación, realiza la siguiente actividad.

- En el plano cartesiano siguiente se ha graficado una circunferencia de radio 4, centrada en el origen y se han trazado algunos segmentos verticales que unen al eje de las abscisas con la circunferencia.

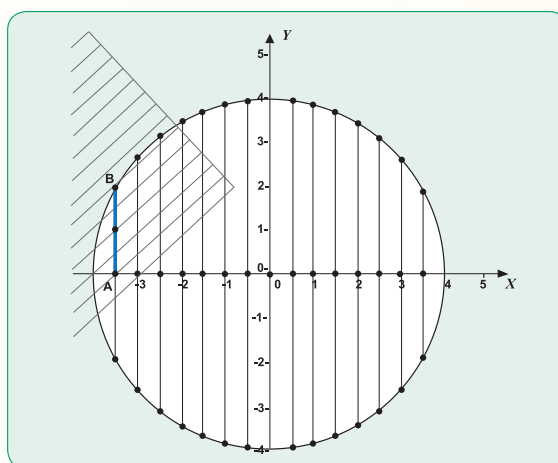


Figura 30

- Utiliza una hoja de tu cuaderno para trazar el punto medio de cada segmento vertical (como se ilustra en la **Figura 30** con el segmento **AB**). Explica por qué el punto trazado de esta manera, es el punto medio del segmento **AB**.

- b) Traza a mano alzada, la curva sugerida por los puntos medios trazados. ¿Qué curva será ésta?, ¿cómo podrías confirmar tu respuesta?
- 
- 

- c) Como la ecuación de la circunferencia es  $x^2 + y^2 = 16$ , entonces  $y = \sqrt{16 - x^2}$  y cuando  $x = 2$ , la ordenada del punto  $D$  es  $y = \sqrt{16 - 2^2} = \sqrt{12}$  (ver Figura 31)

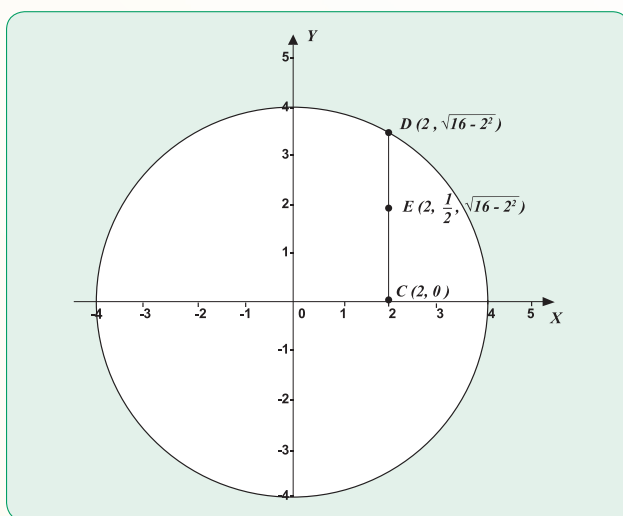


Figura 31

- d) Entonces la ordenada del punto medio de  $DC$ , denotado como  $E$  en la Figura 31, será  $y = \frac{1}{2}\sqrt{16 - 2^2}$ . ¿Por qué?

- e) Y en general, si  $x$  es un número entre  $-4$  y  $4$ , tendremos:

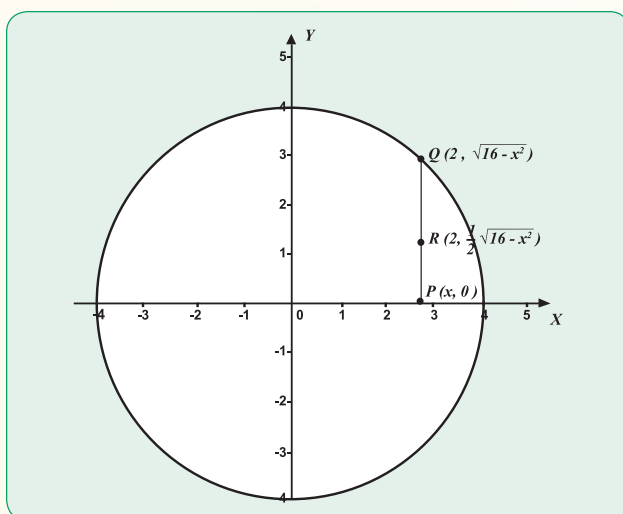


Figura 32

- f) Entonces, cuando el punto  $P$  se mueve sobre el eje  $X$ , el punto  $R$  tendrá las coordenadas:  $(x, \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2})$ , esto es, su ordenada será siempre  $y = \frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ . Eleva al cuadrado esta última ecuación y simplifícala.

---



---

- g) Compara la ecuación simplificada que obtuviste en el inciso anterior, con la ecuación de la circunferencia:  $x^2 + y^2 = 16$ . ¿En qué se parecen?, ¿en qué difieren?

---



---

- h) Abre el applet llamado Elipse3; ahí encontrarás una construcción como la que muestra la **Figura 33**. El número  $k = 0.5$  que observarás en el “deslizador” representa el valor del cociente  $\frac{PR}{PQ}$ , que en este caso toma el valor  $0.5$  porque  $R$  es el punto medio de cada segmento  $PQ$ .

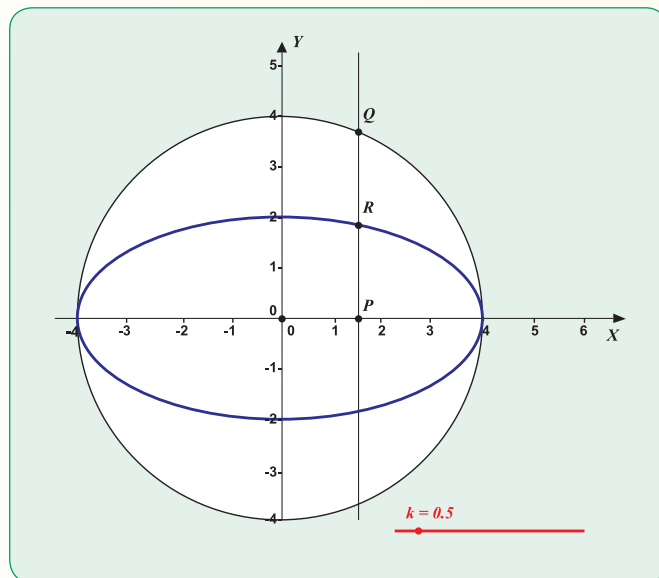


Figura 33

- i) “Arrastra” el punto del deslizador hasta que  $k = 1$ . ¿Qué curva en color azul tienes ahora en pantalla?, ¿cuál será la ecuación de esta curva?

---



---

- j) “Arrastra” el punto del deslizador hasta que  $k = 2$ . ¿Qué curva en color azul tienes ahora en pantalla?, ¿cuál será la ecuación de esta curva?

---



---



Calcula la **excentricidad** de cada una de las ocho elipses que se dan en la **Actividad 4** de la **Secuencia didáctica 4**.

¿Cuál de ellas es la más alargada? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la más “redondeada”? \_\_\_\_\_

(Observa que, si ya trabajaste aquella **Actividad**, para contestar lo que se te pide en esta no tienes que hacer prácticamente nada.)



Posiblemente uno de los hechos más conocidos relacionados con la **elipse** es el que tiene que ver con el descubrimiento que hizo **Johannes Kepler (1571 - 1630)**, apoyándose en observaciones realizadas por **Tycho Brahe (1546 - 1601)**, sobre el movimiento de los planetas

alrededor del Sol. **Kepler** descubrió, entre otras cosas, que las órbitas de los planetas son elípticas y que el sol ocupa uno de sus focos. Esta es la idea detrás de la imagen mostrada en la **Figura 1** de la **Secuencia 1**.

Para realizar este fantástico descubrimiento no uso coordenadas (faltaban casi cien años para que **Descartes** inventara el sistema de coordenadas); se basó en ingeniosos cálculos trigonométricos hechos sobre mediciones muy precisas (realizadas por **Tycho Brahe** y por él mismo) de las posiciones relativas del Sol, Marte y la Tierra. No coordenadas, no telescopios, no calculadoras... nada! Pura **trigonometría**! Este descubrimiento de **Kepler** es todavía más meritorio si tomas en cuenta que las órbitas de los planetas son casi circunferencias, como puedes deducir viendo la excentricidad de cada uno de los planetas en la **tabla 2**.

Planeta	Excentricidad
Mercurio	0.2056
Venus	0.0068
Tierra	0.0167
Marte	0.0934
Júpiter	0.0484
Saturno	0.0542
Urano	0.0472
Neptuno	0.0086
Plutón	0.2488

Tabla 2 Excentricidad de los planetas



En la **Secuencia didáctica 1** se te presentaron algunas situaciones en las que aparece una **elipse**. En particular, en la **Figura 3** se presenta una mesa de billar elíptica y en la **Figura 4** se presenta, diagramáticamente, el procedimiento médico conocido como litotricia. En estos

dos casos está involucrada una notable propiedad geométrica de la **elipse**, que podemos describir como **propiedad reflectiva de la elipse**. Esta propiedad se puede enunciar como sigue:

*Cuando un rayo sale de uno de los focos y choca con la elipse, el rayo es reflejado de tal manera que pasa por el otro foco.*

Lo que hace que esta propiedad sea extraordinaria es no sólo el hecho de que matemáticamente es muy interesante sino que tiene varias aplicaciones útiles en física, en particular en óptica y en acústica.

La propiedad reflectiva de la elipse es consecuencia de la siguiente ley:

*Cuando un rayo choca con una curva (o con una superficie) en un punto  $P$ , el rayo es reflejado de tal manera que el ángulo que el rayo incidente forma con la recta perpendicular a la curva (o a la superficie) en el punto  $P$  es igual al ángulo que forma el rayo reflejado con la recta perpendicular; es decir, en la **Figura 34**:*

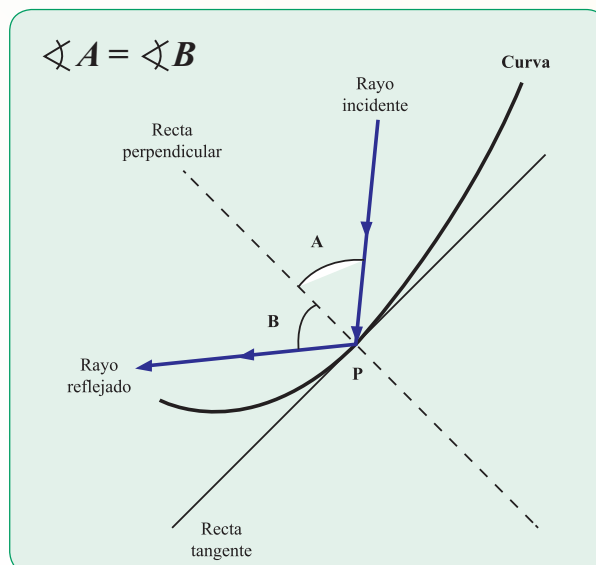


Figura 34 Ley de reflexión

En el **BLOQUE 5** estudiarás con más detalle esta ley.

Esta propiedad es la base para construir una mesa de billar muy especial: si construyes una mesa de billar en forma perfectamente elíptica (como la que se muestra en la **Figura 3**, *Actividad 1*, **Secuencia 1**) y colocas el tiro en uno de los focos, puedes apostar que, si golpeas con suficiente fuerza, sin importar la dirección en que dispires, el tiro golpeará a una bola colocada en el otro foco.

El procedimiento médico para pulverizar cálculos renales llamado litotricia, mostrado esquemáticamente en la **Figura 4** de la **Secuencia 1**, también se basa en la propiedad reflectiva de la elipse.

El litostropos (aparato con que se practica la litotricia) consiste esencialmente de un elipsoide (que, en este caso, es una superficie que se obtiene al girar una elipse alrededor del eje focal). En uno de los focos se coloca el punto en el que está localizado el cálculo renal y en el otro se coloca un generador de ondas de choque, que al ser emitidas en cualquier dirección, chocan con la pared del elipsoide y son reflejadas directamente hacia el cálculo renal, pulverizándolo y haciendo así más fácil su expulsión por las vías urinarias.





1. Encuentra la ecuación de la elipse que satisface las condiciones señaladas en cada caso.

- Focos en  $(\pm 4, 0)$  y vértices en  $(\pm 6, 0)$ ;
- eje menor  $6$  y focos en  $(\pm 4, 0)$ ;
- vértices en  $(0, \pm 5)$  y excentricidad  $2/3$ ;
- excentricidad  $1/2$ , eje mayor  $12$ , centro en el origen y focos sobre el **eje y**;
- vértices en  $(\pm 5, 0)$  y pasa por  $(1, 1)$

2. Encuentra la ecuación de la elipse que tiene sus ejes paralelos a los ejes de coordenadas y que satisface las propiedades que se señalan en cada caso.

- Centro en  $(4, 3)$ , excentricidad  $1/2$  y eje mayor de longitud  $12$  y paralelo al eje  $x$ ;
- Focos en  $(6, -2)$  y  $(2, -2)$ , y su eje mayor es el doble de su eje menor;
- Centro en  $(2, 3)$  y pasa por  $(2, 2)$  y  $(4, 3)$ ;
- Vértices en  $(-1, -2)$  y  $(-1, -10)$ , y un foco en  $(-1, -3)$ ;
- Intersecta al **eje x** en  $1$  y  $7$  y al **eje y** en  $3$  y  $5$

3. Para las siguientes elipses, encuentra el centro, la excentricidad, los focos y dibuja la gráfica correspondiente

- $x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 41 = 0$
- $4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0$
- $4x^2 + 25y^2 - 8x - 100y + 4 = 0$
- $2x^2 + 5y^2 - 16x + 20y + 42 = 0$
- $25x^2 + 4y^2 + 50x - 8y - 171 = 0$
- $2x^2 + 3y^2 + 12x - 12y - 6 = 0$
- $9x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$
- $9x^2 + 16y^2 - 12x + 16y - 64 = 0$



4. Halla la ecuación de la elipse con centro en  $(3, 1)$ , uno de los vértices en  $(3, -2)$  y excentricidad  $e = 1/3$ .
5. Las distancias mínima y máxima de la Tierra al Sol son *147 y 152 millones de kilómetros*, aproximadamente. Se sabe que la órbita terrestre es elíptica y que el Sol ocupa uno de los focos de la elipse.
  - a) ¿Cuál es la distancia entre los focos?
  - b) ¿Cuál es la longitud de los ejes?
6. Para construir un patio elíptico, se clavan dos estacas a *16 m* de distancia y se fijan los extremos de una cuerda de *36 m* en ellas. Manteniendo la cuerda tensa se traza una elipse. ¿Cuáles son las longitudes de los ejes?
7. Un arco en forma de media elipse mide *8 metros de ancho* y *3 metros de altura en el centro*. Encuentra las alturas del arco a intervalos de *2 metros*.

1. ¿Cómo podrías describir, con tus propias palabras, lo que es una elipse?
2. ¿Cómo podrías describir, con tus propias palabras, las propiedades debe tener una ecuación para que represente una elipse?
3. ¿Cuáles cuestiones relacionadas con la elipse (su forma, su ecuación en una o en otra forma, sus elementos, sus propiedades, etcétera) pudiste captar de manera casi inmediata? ¿Cuáles te representaron alguna dificultad?
4. Como has podido ver al estudiar este bloque, el álgebra está muy involucrada en los procesos de la geometría analítica. ¿Cuál procedimiento algebraico, en caso de que haya habido alguno, de los que tuviste que utilizar en este bloque te representó alguna dificultad? ¿Productos notables? ¿Factorizaciones? ¿Leyes de exponentes? ¿Operaciones con fracciones? ¿Aritmética?... ¿Cuál? ¿Qué actividad te propondrías a ti mismo para eliminar esa dificultad?
5. El proceso de asociar una curva a una ecuación y viceversa, es fundamental en geometría analítica. ¿Significó este proceso alguna dificultad para ti en este bloque? En caso afirmativo, ¿por qué fue así? ¿Tendrá que ver con la forma en la que está elaborado este bloque? ¿Qué sugerirías para atenuar esa dificultad?
6. ¿Qué sugerirías para mejorar este bloque?
7. Cuando este período escolar haya terminado para ti y estés ya de vacaciones, o llevando Matemáticas 4, o 5 o 6, ¿estarías dispuesto a volver a leer este bloque y a volver a trabajar en sus actividades (sobre todo en aquellas en la hubieras podido tener alguna dificultad) por cuenta propia?
8. ¿Crees que el estudio de estas cuestiones matemáticas son importantes en tu formación actual y futura? ¿Por qué sí? ¿Por qué no?

# BLOQUE 5

Utiliza...

La Parábola

## INTRODUCCIÓN:

En este **BLOQUE** se aborda el estudio de otra de las curvas importantes de la familia de las cónicas, la que lleva el nombre de parábola, su nombre genérico (cónicas) y particular (parábola) se derivan de la misma acción, ya que es la curva que delimita a la porción de superficie plana que resulta de hacer un corte a un cono en dirección paralela a la generatriz, así como se explicó en el **BLOQUE 4** para el caso de la elipse.

Se procuró afanosamente que el estudio de esta curva no se hiciera a partir inmediatamente de una definición formal como lugar geométrico e inmediatamente abordar los aspectos analíticos, prácticamente olvidando lo geométrico, sino que se procuró partir de una situación contextual afín a las características climatológicas de nuestro medio, situación de la cual se derivan las características geométricas de la curva en cuestión, que proporciona los elementos para construir una definición formal, después de lo cual cobra sentido hablar de la expresión analítica (ecuación) de dicha curva.

El apartado de ejercicios termina cerrando con la problemática que le dio origen (concentradores solares), haciendo una aplicación, pero desde el punto de vista analítico, de la ubicación correcta de los conductos en los cuales se concentra el calor.



# Secuencia Didáctica 1.-

## Adquiriendo una noción del concepto de parábola

Sonora se ubica en una de las regiones del mundo de mayor incidencia de luz solar, sobre todo en sus partes desérticas y semidesérticas, siendo ésta una de las mayores fuentes de lo que hoy se hace llamar “energía limpia”, a diferencia de otras fuentes que inevitablemente emiten grandes cantidades de contaminantes de la atmósfera y el medio ambiente en general, destacando entre ellas el consumo de hidrocarburos y la quema de materiales naturales como lo que acostumbramos llamar “leña”, que por otro lado, la explotación desordenada de la misma, provoca deforestación que contribuye a empeorar las condiciones ambientales.

La energía limpia emitida por el sol, comúnmente llamada “energía solar”, puede utilizarse de una gran variedad de maneras, destacando entre ellas el uso para calentadores solares caseros, refrigeración, celdas fotovoltaicas que conectadas entre sí suman cantidades de energía eléctrica utilizable como sustituto de las fuentes ordinarias de energía eléctrica, pero sin contaminar.

En esta ocasión nos queremos referir en forma especial a los llamados “concentradores solares”, que consisten de canaletas curvas (generalmente metálicas o de materiales combinados) de superficie altamente reflexiva que tienen la propiedad de concentrar los rayos solares de determinada dirección en una región lineal, de tal manera que si por ahí se coloca un tubo de material oscuro que sea altamente absorbente del calor, al circular por él un fluido como podría ser agua, se calienta intensamente generando grandes cantidades de energía térmica transformable, mediante dispositivos adecuados, en otras formas de energía, como podría ser la eléctrica.

En la **Fig. 1** puedes apreciar fotografías que muestran ejemplos de este tipo de concentradores.



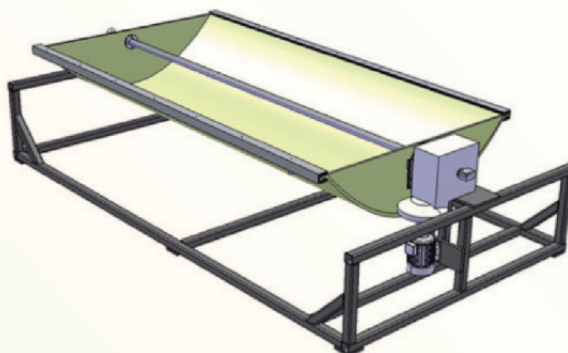
Figura. 1

La **Fig. 2** muestra varios de estos dispositivos en serie.



**Figura. 2**

La **Fig. 3** muestra un dibujo de un pequeño dispositivo de este tipo para fines ilustrativos.



**Figura. 3**



**Figura. 4**

Una tarea fundamental que nos proponemos en esta secuencia es descubrir la curvatura adecuada que debe tomar una lámina metálica brillante, por ejemplo, que posea esta propiedad de concentrar la luz solar a lo largo de un tubo. Una de las tapas (ver **Fig. 4**) de la canaleta concentradora de la **Fig. 3** está definida por un segmento de recta y una curva, la cual se repite, sin cambiar forma, hasta el extremo opuesto que es similar al primero, lo cual nos indica que lo que debemos encontrar es una curva especial que tenga la propiedad de que todos los rayos paralelos en determinada dirección se concentren en un punto.

Antes de analizar las propiedades de reflexión de la luz en determinadas superficies curvas, recordaremos dichas propiedades sobre espejos planos, eso lo analizaremos en la primera actividad de esta secuencia, que se inicia a continuación.



## Actividad de Inicio

### Propiedades de los espejos planos



Desde pequeño conoces lo que es un espejo plano, como el que usan las mujeres entre sus artículos de belleza en sus bolsos o el que está en nuestras casas ante el cual nos peinamos, reflejando una imagen muy parecida a la de nuestros cuerpos, pero en otra orientación, a diferencia de los que has conocido en museos o en ferias donde hemos visto espejos curvos que deforman nuestra imagen.

La **Fig. 5** nos ilustra la manera en que un rayo de luz incide sobre un espejo plano y cómo se refleja.

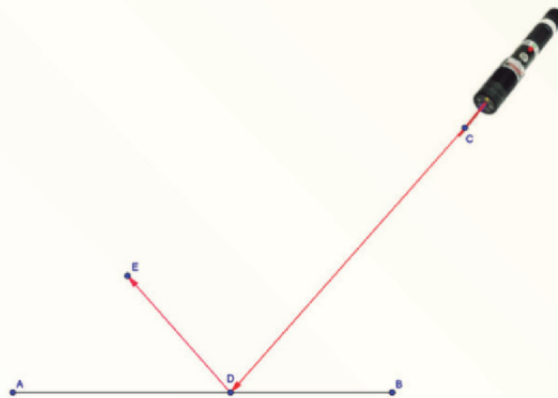


Figura. 5

Esto lo puedes experimentar al dirigir un rayo láser portátil sobre un espejo y observar el rayo reflejado, cuidando que ninguno de los dos rayos llegue directamente a tu ojo, ya que lo dañaría; ambos rayos se observan mejor si el espejo está inmerso en polvo o humo.

Después de experimentar moviendo el emisor portátil de láser en distintas inclinaciones con respecto al espejo, el cual es representado en la **Fig. 5** por el segmento **AB**, el rayo emitido por **CD** y el reflejado por **DE**, contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Qué características observas en cuanto la dirección del rayo emitido (**CD**) y la del rayo reflejado (**DE**) con respecto al espejo (**AB**)?
2. ¿Habías estudiado esta propiedad en alguna materia cursada en la escuela primaria o secundaria?, si es así, ¿en cuál materia?



3. Si colocas un pequeño objeto en la posición del punto E, ¿en qué posición se observaría su imagen reflejada?
4. Si le llamas E' a la posición de la imagen reflejada del objeto colocado en el punto E (Fig. 6), ¿cómo es el segmento de línea que une E con E'? Con el fin de tener más elementos para responder, analiza los datos proporcionados en el applet llamado "Reflejo de un punto"

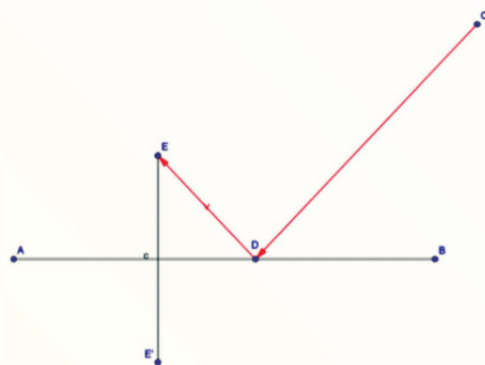


Figura. 6



## Desarrollo

### Actividad: 2

Actividad de Equipo



Al responder las preguntas de la actividad de inicio, se espera que hayas observado que:

1. El ángulo que forma el rayo emitido (CD) con el espejo es igual al ángulo que forma el rayo reflejado (DE) con el mismo espejo. (Ver Fig. 7)

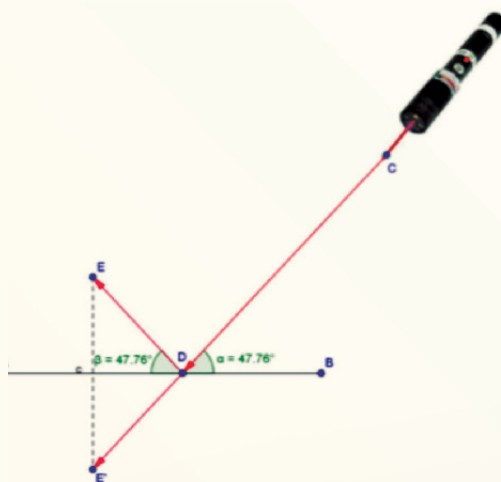
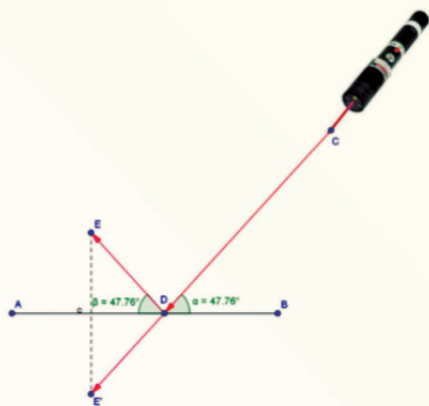


Figura. 7



2. El reflejo del punto  $E$  es el punto  $E'$ , la línea que los une cae perpendicular sobre el espejo y ambos puntos equidistan del mismo (Ver de nuevo **Fig. 6** y observa el applet "Reflejo de un punto").

La **Fig. 8** se obtiene de la **Fig. 7** al trazar el reflejo  $E'$  de  $E$ , el segmento  $EE'$  cuyas propiedades ya estudiamos y el segmento  $DE'$  cuyas propiedades queremos estudiar, para ello responde las preguntas que siguen a la **Fig. 8**:




**Figura. 8**

1. ¿De qué tipo es el triángulo  $DEE'$ ?
2. ¿Cómo es el ángulo  $ADE'$  comparado con el ángulo  $EDA$ ?
3. ¿Cómo son entre sí los segmentos  $DE$  y  $DE'$ ?
4. ¿Están alineados los segmentos  $CD$  y  $DE'$ ?, ¿por qué?



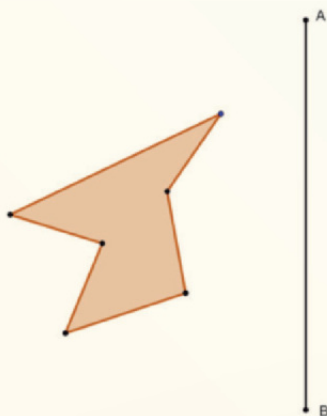
## Actividad de Cierre



 Las características que hemos observado acerca de cómo se refleja un objeto o un rayo de luz en un espejo plano son de interés también en matemáticas, para fines de ilustración de esas características restringidos a dibujos en una superficie plana, hemos representado al espejo como un segmento de recta (segmento  $AB$  en las figuras 5-8), estas características las estudiaste al cursar segundo grado de secundaria, en el tema de Transformaciones Geométricas y su nombre correcto es “Reflexión con respecto a una recta”, aunque erróneamente en algunos libros y programas de computadora lo llaman “Simetría axial”.

En lenguaje matemático, algunas de estas características las podemos expresar de la siguiente manera:

- El segmento que une a un punto  $P$  con su imagen reflejada con respecto a un eje  $l$  es perpendicular al eje y ambos puntos equidistan del eje.
- La longitud del segmento  $A'B'$  que resulta de reflejar al segmento  $AB$  con respecto al eje  $l$  es igual a la longitud del segmento  $AB$  (Ver applet “Reflexión de un segmento”).
- Las magnitudes de los ángulos se conservan al ser reflejados, pero se invierte el sentido de giro.
- Por consecuencia, la imagen  $M'$  obtenida de una reflexión con respecto al eje  $l$  de un objeto  $M$  es congruente al mencionado objeto  $M$ .
- Para sintetizar todas estas propiedades realiza el siguiente ejercicio:
- En el siguiente dibujo, traza la reflexión de la figura que aparece al lado izquierdo del segmento  $AB$ , tomando como eje de reflexión al propio segmento  $AB$ .



# Secuencia Didáctica 2.-



## Actividad de Inicio

### Ecuación de la Parábola



Recuerda que, algo de lo dicho al final de la introducción de esta secuencia, es que **se debe descubrir una curva que tenga la propiedad de que todos los rayos de luz paralelos a su eje de simetría se reflejen concurriendo en un punto** (Ver **Fig. 9**)

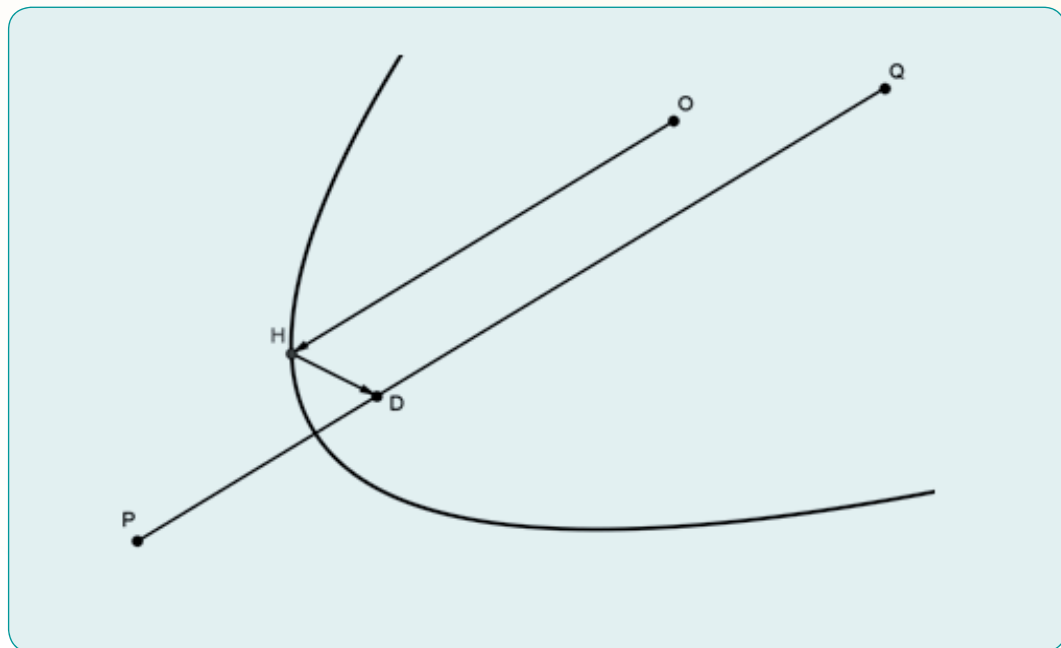


Figura. 9

Para ello se te pide considerar que en cada punto de la curva (como en esta ocasión lo es el punto H), está colocado un pequeño espejo plano tangente a la curva en dicho punto, ello con el fin de poder aplicar, para cada punto, las propiedades de reflexión de un espejo plano (Ver **Fig. 10**)

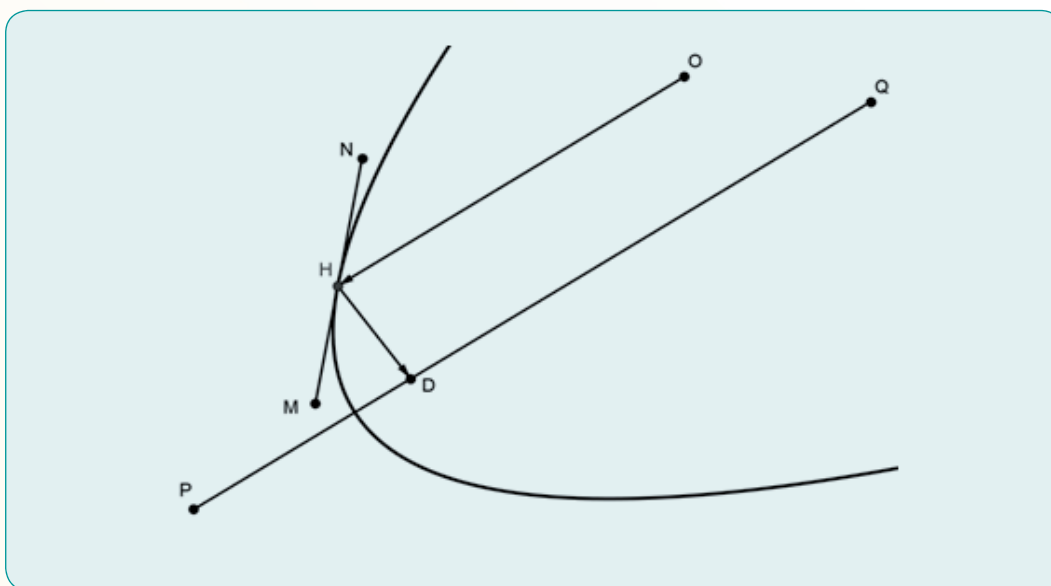


Figura. 10

Así, la situación en cada punto es similar a lo que estudiaste en la *Actividad 1* al analizar las propiedades de la reflexión de puntos, líneas y figuras con respecto a un eje (espejo), lo cual te permite responder a las siguientes preguntas:

Aplicando las propiedades de la reflexión en espejos planos y de la reflexión como transformación geométrica que estudiaste en el cierre de la *Actividad 1*, responde las siguientes preguntas:

Teniendo en cuenta que en la **Fig. 11**,  $D'$  representa al reflejo del punto  $D$  con respecto al segmento  $MN$  (que representa al espejo), sin olvidar que es en  $D$  donde se concentran todos los rayos paralelos al eje  $PQ$ , al reflejarse en el correspondiente punto de la curva, contesta las preguntas escritas después de la **Fig. 11**.

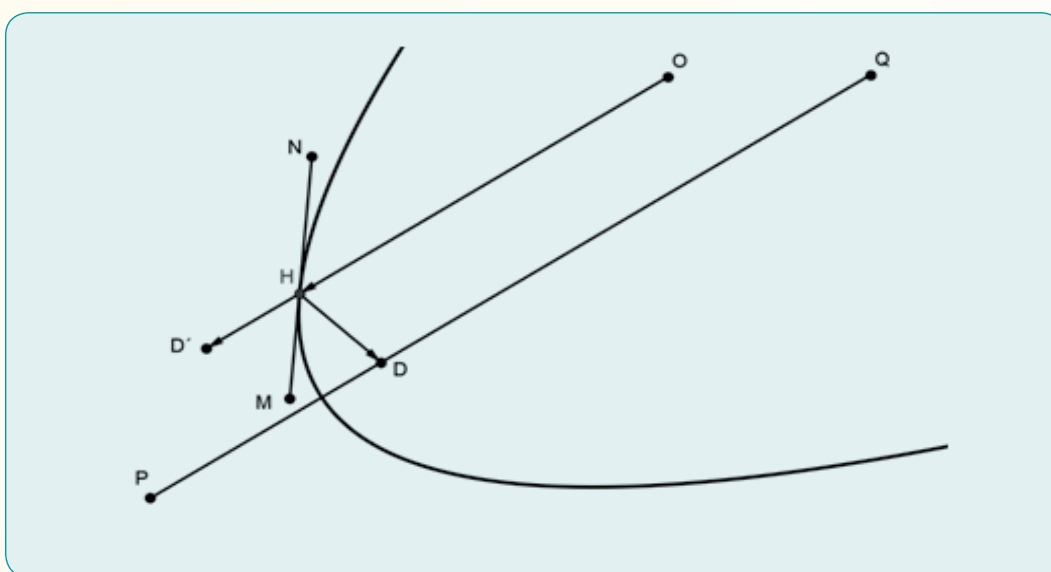


Figura. 11

- 1.- ¿Cómo es la longitud de  $HD'$  comparada con  $HD$ ?
- 2.- ¿Está  $HD'$  alineado con  $OH$ ?



## Desarrollo



Conforme el punto  $H$  se desliza a lo largo de la curva, deseamos saber qué trayecto sigue el punto  $D'$ , la huella de dicho punto al moverse la podemos apreciar en la **Fig. 12**, a la vez que puedes interactuar con el applet llamado "Bosquejo de la directriz".

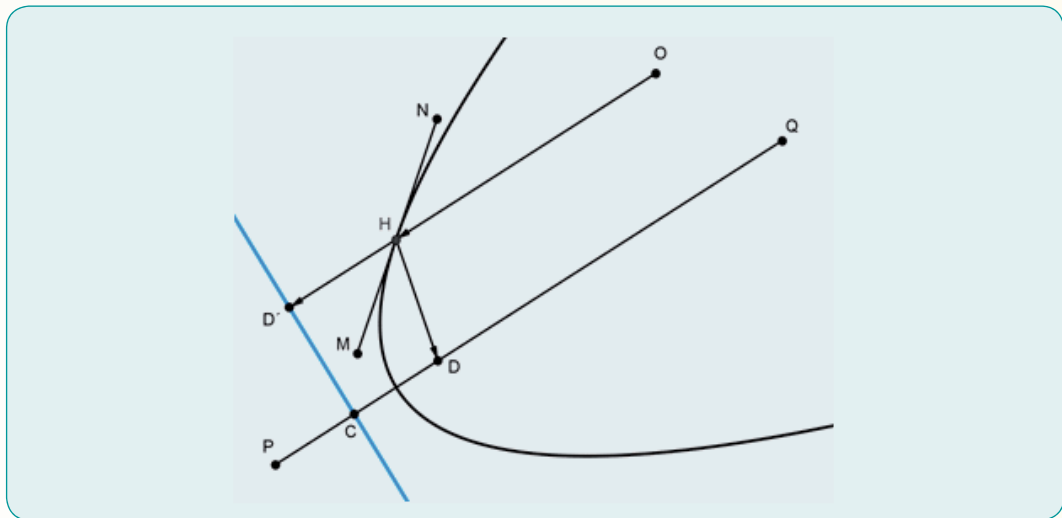


Figura. 12

Al observar, contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué trayecto sigue, al parecer, la huella del punto  $D'$  conforme se desliza el punto  $H$  sobre la curva?
- ¿Qué relación observas entre la Huella del punto  $D'$  y el eje  $PQ$ ?
- ¿Cuándo se produce el punto  $C$  sobre la línea obtenida por la huella del punto  $D'$ ?

El software GeoGebra, con el cual fue realizado el trazo de la **Fig. 12**, también nos permite construir el lugar geométrico correspondiente al movimiento del punto  $D'$  en dependencia del movimiento de  $H$ , el lugar geométrico obtenido se presenta en la **Fig. 13**, la cual contiene información adicional.





Lo que observamos en la **Fig. 13** es lo siguiente:

- ## Dos conceptos de distancia.

*Distancia entre un punto  $P$  y una recta  $m$ : Se define como la longitud del segmento que une al punto  $P$  con la recta  $m$  en dirección perpendicular a ella, comúnmente se denota como  $d(P, m)$*

Matemáticas 3

**La condición que un punto  $H$  ha de satisfacer para pertenecer a la curva que genera al concentrador solar es la siguiente: “La distancia del punto  $H$  de la curva al punto fijo de concentración de rayos  $D$ , debe ser igual a la distancia del punto  $H$  a la directriz”.**

Así:

A esta curva se le conoce en matemáticas como **Parábola**, perteneciente a la familia de las cónicas, así como se explicó para el caso de la elipse en el bloque anterior; al punto fijo de concentración de rayos  $D$  se le conoce como “**foco de la parábola**”.

Como un ejercicio de resumen, explica por qué la curva llamada parábola, cumple con los requisitos establecidos en el recuadro anterior.



## Actividad de Cierre



Si se tiene una línea recta  $l$  tomada como directriz y un punto fijo  $F$  tomado como foco, está implícitamente definida una única parábola, cuya definición formal se da a continuación:

**“La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz”.**

Dada la directriz y el foco, se te pide explicar el procedimiento para localizar un punto de la parábola correspondiente, para ello, se te proporciona información gráfica y verbal, observa la **Fig. 14**.

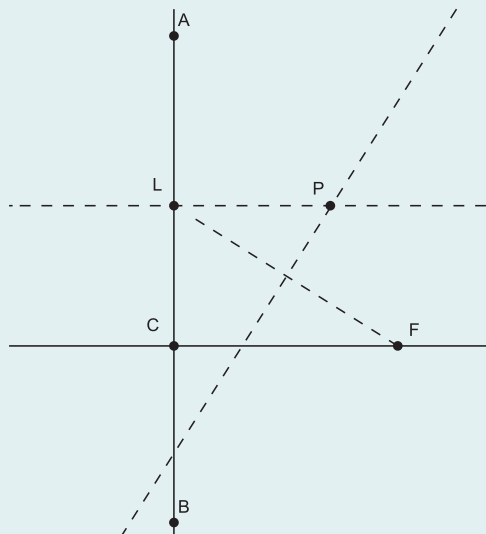


Figura. 14

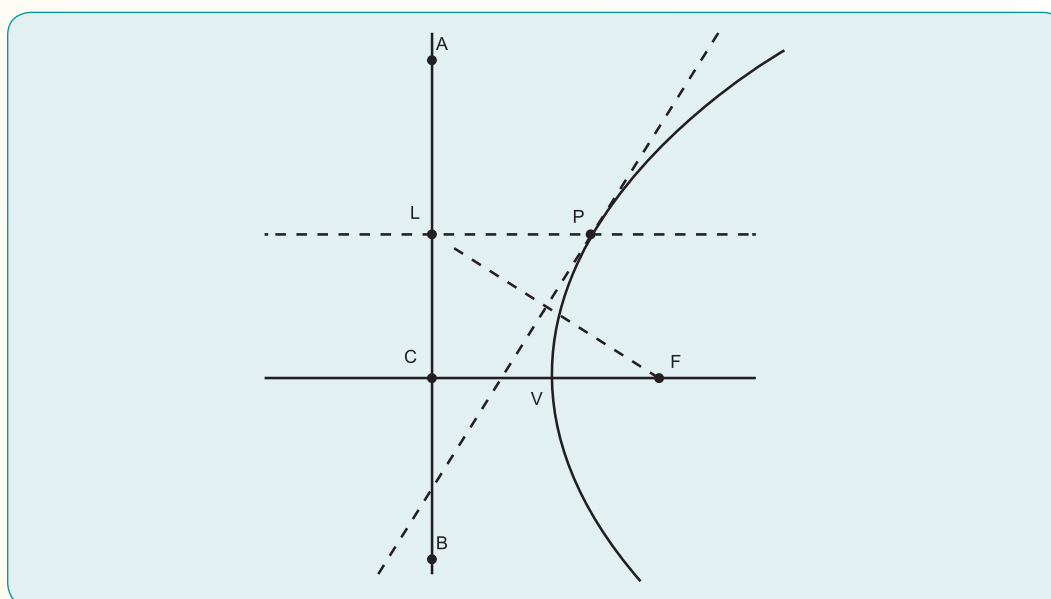


En la **Fig. 14**,  $AB$  es un segmento de recta contenido en la directriz,  $F$  el foco,  $L$  un punto cualquiera de la directriz por el cual se trazó una recta punteada perpendicular a la directriz, se trazó el segmento auxiliar  $LF$  y la mediatriz a este segmento. El punto  $P$  es la intersección de esta mediatriz y la perpendicular a la directriz, trazada por  $L$ .

Usando lo que aprendiste en el curso de **Matemáticas II**, explica si el punto  $P$  pertenece a la parábola definida por  $AB$  y  $F$ .

Explica también si el punto medio de  $CF$  pertenece a la parábola.

En la **Fig. 15** podrás observar un tramo de la parábola correspondiente.



**Figura. 15**

En esta imagen está además marcado el punto medio de  $CF$ , lo hemos etiquetado como  $V$  y se llama vértice de la parábola; al observar la imagen, surge la siguiente pregunta para analizarse en equipos:

¿Es la mediatriz de  $LF$  tangente a la parábola en  $P$ ? Argumenta tu respuesta.

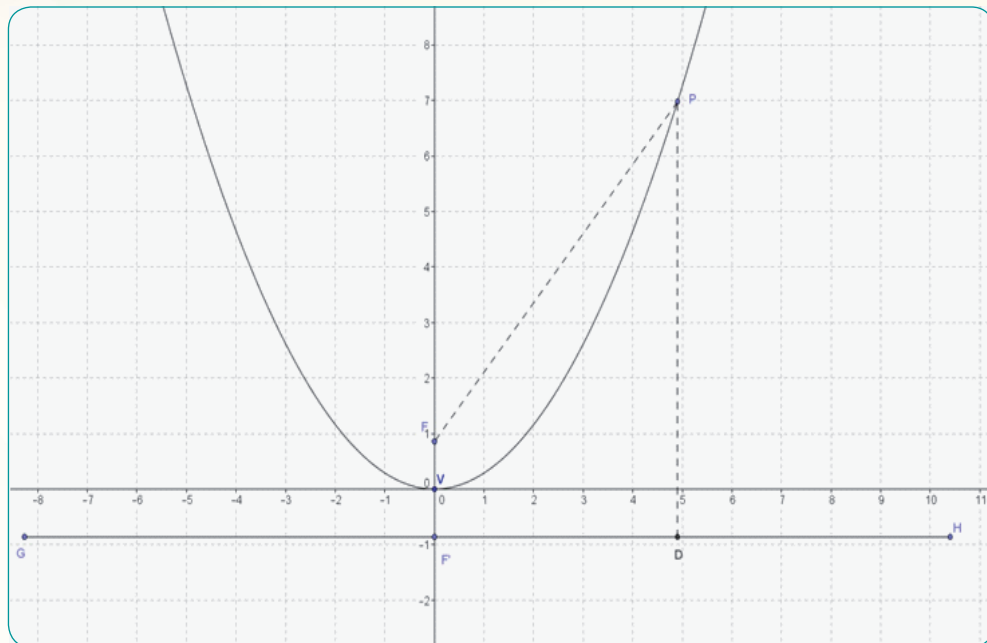
## Ecuación de la parábola.

Para expresar en una ecuación (decimos analíticamente) la condición para que un punto  $P(x,y)$  pertenezca a la parábola, es necesario definir un parámetro muy importante, que se denotará por  $p$  y representa la distancia del foco al vértice, así como del vértice a la directriz.

### Primer caso:

Parábola con centro en el origen con eje coincidiendo con el eje  $y$  y abriéndose hacia arriba.

Gráficamente, la situación la puedes observar en la **Fig. 16**.



**Figura. 16**

Las coordenadas del punto **P** son **P (x, y)**, por lo que la distancia del punto **P** a la directriz **GH** es **y + p**, recordando que **p** es la distancia del foco al vértice y de éste a la directriz, las coordenadas del foco son, **F(0,p)** y del vértice **V(0,0)**, por lo que  $d(P,F) = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + p)^2}$ .

La condición para que el punto **P** pertenezca a la parábola es que  $d(P,GH) = d(P,F)$ , o sea:

$$y + p = \sqrt{(x - 0)^2 + (y + p)^2}$$

*Esta expresión puedes considerarla ya como la ecuación de la parábola buscada, aunque si deseas encontrar una expresión más simple, debes hacer las transformaciones algebraicas adecuadas, iniciando por elevar al cuadrado ambos miembros para eliminar el radical y hacer los desarrollos y simplificaciones adecuadas.*

Al realizar los pasos indicados en el párrafo anterior, comprueba individualmente y posteriormente en equipos, que la expresión se simplifica a:

$$x^2 = 4py$$



## Problemas: Sección 1

1.- Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen que se abre hacia arriba cuyas coordenadas de su foco son  $F(0,2)$ .

2.- Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen, el eje y coincidiendo con su eje, se abre hacia arriba y con el parámetro  $p=3$

3.- Encuentra las coordenadas del foco de la parábola cuya ecuación es  $y = \frac{1}{6}x^2$

4.- Encontrar las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es  $y = x^2$

5.- Indica la curva que corresponde a la ecuación  $x^2 = -4py$

6.- Obtén la ecuación de la parábola con centro en el origen, con eje coincidiendo con el eje  $x$  y se abre a la derecha, usando el parámetro  $p$  para determinar las coordenadas de su foco.

7.- Explica verbalmente lo que representan cada una de las siguientes cuatro ecuaciones.

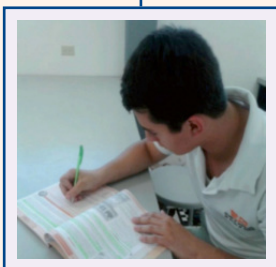
$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = -4py$$

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = -4px$$

8.- En cada uno de los cuatro casos anteriores, encuentra la longitud de la cuerda de la parábola que pasa por el foco y es perpendicular al eje. Se espera que en los cuatro casos obtengas el mismo valor, a esta cuerda especial de la parábola se le conoce como Lado Recto.



## Parábolas con vértice fuera del origen

Considera los casos en que el vértice está fuera del origen, pero su eje se mantiene paralelo a alguno de los ejes coordenados, iniciando con el caso en que su eje es paralelo al  $y$  y se abre hacia arriba, para ello observa la **Fig. 17**.

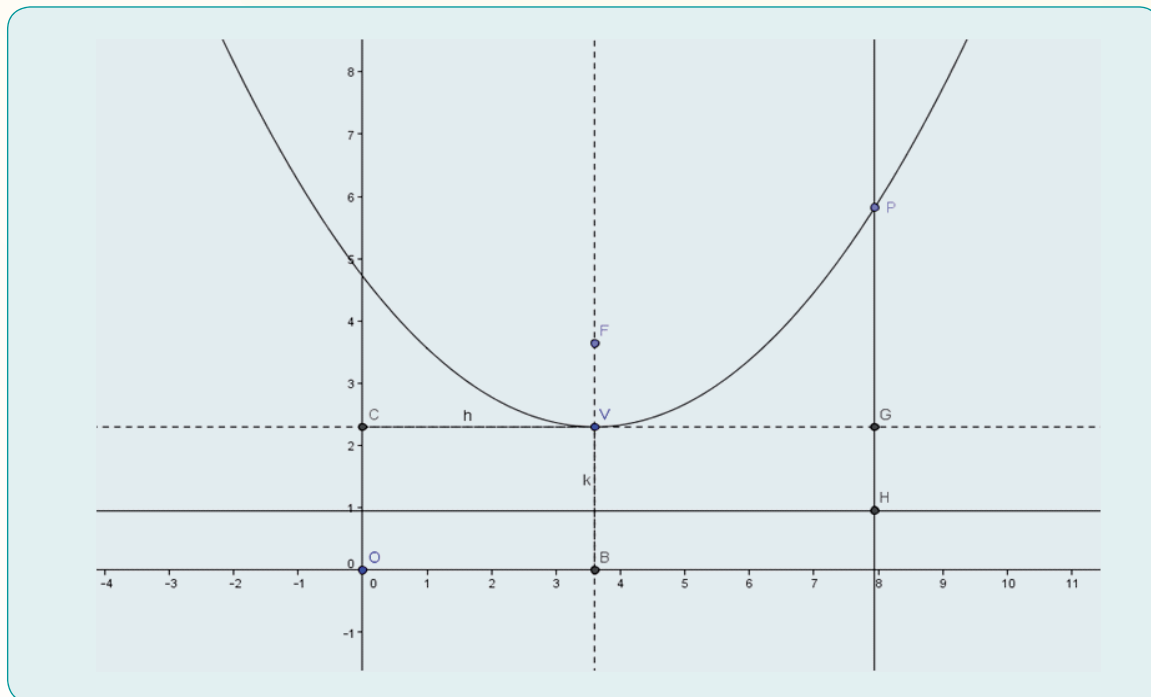


Figura. 17

En este caso, el vértice tiene coordenadas  $V(h, k)$ , el foco  $F(h, k + p)$ , el punto  $P$  que está sobre la parábola, tiene coordenadas  $P(x, y)$ , la distancia de  $P$  a la directriz es  $PH = y - k + p$ , por definición, la condición para que el punto  $P$  pertenezca a la parábola es que  $PH = PF$ , o sea:

$$y - k + p = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2}$$

De nuevo, esta puede considerarse como la ecuación buscada, pero si deseas obtener una expresión más simple, haz el desarrollo algebraico y simplifica, empezando por elevar al cuadrado a ambos miembros de la ecuación, así:

$$\begin{aligned} (y - k + p)^2 &= (x - h)^2 + (y - k - p)^2 \\ (y - k)^2 + 2(y - k)p + p^2 &= (x - h)^2 + (y - k)^2 - 2(y - k)p + p^2 \end{aligned}$$

Eliminando términos iguales en ambos miembros se obtiene:

$$2(y - k)p = (x - h)^2 - 2(y - k)p$$

De donde al simplificar obtenemos:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$



Si observas, es muy similar al correspondiente caso con vértice en el origen ( $x^2 = 4py$ ), sustituyendo  $x$  por  $x - h$  (donde  $h$  es la abscisa del vértice) e  $y$  por  $y - k$  (donde  $k$  es la ordenada del vértice), a manera de resumen y basados en esta última observación, se te pide que expreses la ecuación de la parábola en cada uno de los siguientes casos:

Parábola con vértice en  $V(h, k)$ , eje paralelo al eje  $y$  y se abre hacia arriba

Parábola con vértice en  $V(h, k)$ , eje paralelo al eje  $y$  y se abre hacia abajo

Parábola con vértice en  $V(h, k)$ , eje paralelo al eje  $x$  y se abre hacia la derecha

Parábola con vértice en  $V(h, k)$ , eje paralelo al eje  $x$  y se abre hacia la izquierda

Encontrar las coordenadas del vértice, del foco y la longitud del Lado Recto en cada una de las parábolas cuyas ecuaciones se proporcionan:

a.  $(x - 2)^2 = 6(y - 3)$

b.  $(x + 3)^2 = 8(y - 2)$

c.  $(x - 1)^2 = -4(y - 2)$

d.  $(y + 2)^2 = 12(x - 1)$

e.  $(y - 2)^2 = -8(x + 1)$

f.  $y = x^2 - 6x + 4$

g.  $y = -x^2 - 4x - 3$

De los dos últimos, se resuelve, como ejemplo, el inciso f)

Primero se reescribe como:

$$y - 4 = x^2 - 6x$$

Completando cuadrados:

$$y - 4 + 9 = x^2 - 6x + 9$$

Simplificando y factorizando:

$$(x - 3)^2 = y + 5$$

Por lo que las coordenadas del vértice son,  $V(3, -5)$ ,  $p = \frac{1}{4}$ , las coordenadas del foco  $F(3, -\frac{19}{4})$  y  $LR = 4p = 1$

- h. Si se escoge la parábola cuya ecuación es  $V = \frac{1}{2}x^2$  para construir un concentrador solar, determina el punto que ayuda a definir la posición de la manguera en la cual se concentrará la luz proveniente del sol y producir así energía térmica.





La palabra autoevaluación significa “evaluarse por uno mismo”, es por ello que se te presentan unas preguntas y problemas para que los trabajes personalmente y puedas tú mismo decidir qué tanto has comprendido las ideas desarrolladas a lo largo del **BLOQUE**, así como valorar las habilidades y competencias, tanto genéricas como disciplinares, que consideras has adquirido.



Como referencia para tu propia valoración, toma en cuenta la introducción general al módulo, la introducción al bloque y las pequeñas introducciones a cada actividad.

Como guía para tu propia evaluación, responde las preguntas y resuelve los problemas planteados a continuación:

1.- ¿Conocías las propiedades de la reflexión de la luz en un espejo plano? De ser así, ¿cuándo las aprendiste?

2.- ¿Cualquier curva tomada como base sirve para construir una canaleta que tenga la propiedad de concentrar la luz solar en un tubo? ¿Por qué?

3.- Si tienes una recta ***l*** tomada como directriz y un punto ***F*** elegido como foco, explica cómo obtener un punto ***P*** de la parábola correspondiente.

4.- Has un bosquejo de la gráfica correspondiente a la ecuación  $y^2 = -8x$

5.- Has un bosquejo de la gráfica correspondiente a la ecuación  $(x - 2)^2 = 8(y-3)$

6.- Has un bosquejo de la gráfica correspondiente a la ecuación  $(x + 3)^2 = -8 (y + 2)$

7.- De las siguientes ecuaciones, indica en cada una si pueden corresponder a una parábola o no y explica tu criterio de decisión.

a.  $3x - 5y = 7$

b.  $x^2 + y^2 = 4$

c.  $4x^2 - y = 0$

d.  $4x^2 + 9y^2 = 36$

e.  $x + 9y^2 = 0$

f.  $16x^2 - 25y^2 - 8x + 12y - 16 = 0$

g.  $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

h.  $4x^2 - 6x + 9y - 15 = 0$

i.  $9x^2 + 4y^2 - 6x + 4y - 15 = 0$

j.  $6y^2 + 8x - 12y + 10 = 0$

## Problemas: Sección 2

Con el fin de practicar y afianzar las habilidades algorítmicas y mejorar en la adquisición de otras habilidades y competencias, se te propone la siguiente lista de ejercicios:

1.- A las parábolas correspondientes a los problemas 4, 5 y 6 respectivamente en la sección de autoevaluación, determínalas las coordenadas del vértice y del foco, la longitud del Lado Recto y la ecuación de la directriz.

2.- Encuentra las coordenadas del vértice y del foco, así como la longitud del Lado Recto y la ecuación de la directriz de las parábolas cuya ecuación se proporciona.

a.  $x^2 - 4x + 8y + 28 = 0$

b.  $x^2 = 8y$

c.  $y^2 - 8x - 6y - 7 = 0$

d.  $y = x^2$

e.  $y = \pm \sqrt{x}$

3.- En cada uno de los siguientes casos, encuentra la ecuación de la parábola que cumple con las características indicadas:

a. Vértice en el origen y foco  $F(0,4)$

b. Vértice en el origen, su eje coincide con el eje x y pasa por el punto  $P(2,4)$

c. Su foco es  $F(-2,0)$  y su directriz tiene por ecuación  $x=2$

d. Su vértice es  $V(4,5)$  y su foco  $F(4,7)$

e. Vértice  $V(5,4)$ , eje paralelo al eje x y pasa por el punto  $P(3,0)$

f. Pasa por los puntos  $A(0,2)$ ,  $B(1,-1)$  y  $C(-1,1)$

4.- Se desea construir una canaleta concentradora de luz solar a lo largo de un tubo adecuadamente colocado, encuentra la posición que ha de ocupar dicho tubo con respecto a la canaleta, si dicha canaleta, una vez tomada su curvatura adecuada, tiene un ancho total de ocho metros y una altura total de dos metros.



# GLOSARIO

## DE TÉRMINOS UTILIZADOS

### A

#### **Abscisa:**

Coordenada  $x$  de un punto en un sistema de coordenadas Cartesianas. Es la distancia horizontal de un punto al eje vertical, o  $y$ .

#### **Alfil:**

Es una pieza menor del ajedrez occidental de valor aproximado de tres peones. Se mueve en diagonal y no pueden saltar piezas intervinientes, y captura tomando el lugar ocupado por la pieza adversaria. Debido a las características de su movimiento tiene la deficiencia de la debilidad del color donde su movimiento queda limitado al color del escaque en la que se inicia la partida.

#### **Álgebra:**

Es la rama de la matemática que estudia la combinación de elementos de estructuras abstractas acorde a ciertas reglas. Originalmente esos elementos podían ser interpretados como números o cantidades, por lo que el álgebra en cierto modo originalmente fue una generalización y extensión de la aritmética.

#### **Área:**

Es una medida de extensión de una superficie, expresada en unidades de medida denominadas unidades de superficie. Para superficies planas, el concepto es más intuitivo. Cualquier superficie plana de lados rectos, por ejemplo un polígono, puede triangularse y se puede calcular su área como suma de las áreas de dichos triángulos. Ocasionalmente se usa el término "área" como sinónimo de superficie, cuando no existe confusión entre el concepto geométrico en sí mismo (superficie) y la magnitud métrica asociada al concepto geométrico (área). Sin embargo, para calcular el área de superficies curvas se requiere introducir métodos de geometría diferencial. Para poder definir el área de una superficie en general –que es un concepto métrico–, se tiene que haber definido un tensor métrico sobre la superficie en cuestión: cuando la superficie está dentro de un espacio euclídeo, la superficie hereda una estructura métrica natural inducida por la métrica euclidiana

**Cálculo:**

(del latín *calculus* = piedra)<sup>1</sup> hace referencia al resultado correspondiente a la acción de calcular o contar. Calcular, por su parte, consiste en realizar las operaciones necesarias para prever el resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

**Canónico:**

Se usa con frecuencia en matemática para indicar que algo es natural, como debe ser e independiente de elecciones arbitrarias, que es absoluto y no relativo a un observador, que es intrínseco y no depende de un sistema de referencia o de un sistema de coordenadas, que pertenece a la estructura propia de lo que estudiamos.

**Cateto:**

En geometría, es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo los que conforman el ángulo recto. El lado mayor se denomina hipotenusa –el que es opuesto al ángulo recto. La denominación de catetos e hipotenusa se aplica a los lados de los triángulos rectángulos exclusivamente.

**Circunferencia:**

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro en una cantidad constante llamada radio.

**Cuadrilátero:**

Es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros pueden tener distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales, y la suma de sus ángulos internos siempre da como resultado  $360^\circ$ .

**Cuerda:**

de una curva es un segmento recto, cuyos extremos son dos puntos de la curva. La recta que contiene a una cuerda se denomina recta secante a la curva; si un extremo tiende al otro, la recta límite se llama tangente a la curva.



**Curva:**

(o línea curva) es una línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente. Ejemplos sencillos de curvas cerradas son la elipse o la circunferencia, y de curvas abiertas la parábola, la hipérbola o la catenaria. La recta sería el caso límite de una circunferencia de radio de curvatura infinito. Todas las curvas tienen dimensión topológica igual a 1.

**D****Diámetro:**

es el segmento de recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de una circunferencia, una superficie esférica o una curva cerrada.

**Directriz:**

Es una línea recta, y la generatriz es otra línea recta que gira en torno a ella, conformará una superficie cónica, cilíndrica, etc. Si la generatriz es curva genera esferas, elipsoides, etc. Si la generatriz se desplaza sobre una o más directrices, genera una superficie reglada. La directriz puede ser una línea curva, por ejemplo, una circunferencia generatriz que rueda sobre otra circunferencia, tangencialmente. Un punto vinculado a ella describe una trayectoria curva que se denomina ruleta cícloidal.

**Distancia:**

entre dos puntos del espacio euclídeo equivale a la longitud del segmento de la recta que los une, expresado numéricamente. En espacios más complejos, como los definidos en la geometría no euclidiana, el «camino más corto» entre dos puntos es un segmento recto con curvatura llamada geodésica.

**Distancia focal o longitud focal de una lente:**

Es la distancia entre el centro óptico de la lente o plano nodal posterior y el foco (o punto focal) cuando enfocamos al infinito. La inversa de la distancia focal de una lente es la potencia.

**Ecuación canónica o segmentaria de la recta:**

Es la expresión de la recta en función de los segmentos que ésta determina sobre los ejes de coordenadas.

**Ecuación**

Es una igualdad matemática entre dos expresiones algebraicas, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. Los valores conocidos pueden ser números, coeficientes o constantes; y también variables cuya magnitud pueda ser establecida a través de las restantes ecuaciones de un sistema, o bien mediante otros procesos. Las incógnitas, representadas generalmente por letras, constituyen los valores que se pretende hallar.

**Elipse:**

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante.

**Elipse:**

es la curva simétrica cerrada que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo al eje de simetría –con ángulo mayor que el de la generatriz respecto del eje de revolución.<sup>1</sup> Una elipse que gira alrededor de su eje menor genera un esferoide achatado, mientras que una elipse que gira alrededor de su eje principal genera un esferoide alargado.

**Geometría:**

Es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras en el plano o el espacio, incluyendo: puntos, rectas, planos, polítopos (que incluyen paralelas, perpendiculares, curvas, superficies, polígonos, poliedros, etc.).

### **Geometría analítica:**

Estudia las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas.

### **Geometría euclidiana,euclídea o parabólica:**

Es el estudio de las propiedades geométricas de los espacios euclídeos. Es aquella que estudia las propiedades geométricas del plano afín euclídeo real y del espacio afín euclídeotridimensional real mediante el método sintético, introduciendo los cinco postulados de Euclides.

### **Gráfica:**

Es un tipo de representación de datos, generalmente numéricos, mediante recursos gráficos (líneas, vectores, superficies o símbolos), para que se manifieste visualmente la relación matemática o correlación estadística que guardan entre sí. También es el nombre de un conjunto de puntos que se plasman en coordenadas cartesianas y sirven para analizar el comportamiento de un proceso o un conjunto de elementos o signos que permiten la interpretación de un fenómeno. La representación gráfica permite establecer valores que no se han obtenido experimentalmente sino mediante la interpolación (lectura entre puntos) y la extrapolación (valores fuera del intervalo experimental).

H

### **Hipotenusa:**

Es el lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo, y el lado opuesto al ángulo recto. La medida de la hipotenusa puede ser hallada mediante el teorema de Pitágoras, si se conoce la longitud de los otros dos lados, denominados catetos.

I

### **Intersección:**

Es el corte de dos curvas, dos superficies o dos sólidos, que es respectivamente, un punto, una recta o una superficie. Dos rectas pueden intersectarse (cortarse) o no, es decir tener una o ninguna intersección. Una recta y un círculo pueden no intersectarse o tener una (tangente) o dos (secante) intersecciones.

***Largo o longitud dimensional de un objeto:***

Es la medida de su eje tridimensional y. Esta es la manera tradicional en que se nombraba a la parte más larga de un objeto (en cuanto a su base horizontal y no su alto vertical). En coordenadas cartesianas bidimensionales, donde sólo existen los ejes xy no se denomina «largo». Los valores x indican el ancho (eje horizontal), y los y el alto (eje vertical).

***Literal:***

es una fórmula atómica o su negación. La definición del concepto se halla sobre todo en la teoría de la demostración perteneciente al campo de la lógica clásica, como en la forma normal conjuntiva y en el método de resolución.

lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas.

***Mediana:***

Representa el valor de la variable de posición central en un conjunto de datos ordenados.

***Mediatriz de un segmento:***

Es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio. Equivalentemente se puede definir como el lugar geométrico — la recta — cuyos puntos son equidistantes a los extremos del segmento. También se le llama simetral.

***Método:***

Es el procedimiento utilizado para llegar a un fin. Su significado original señala el camino que conduce a un lugar.

**N**

**Notación algebraica:**

Es una forma de representar la secuencia de movimientos de una partida de ajedrez. Desde 1997 es el único sistema de notación oficial en ajedrez, reemplazando al sistema de notación descriptiva. Variantes de ajedrez, como el ajedrez aleatorio de Fischer, utilizan únicamente esta notación.

**P**

**Parábola:**

Es la sección cónica resultante de cortar un cono recto con un plano cuyo ángulo de inclinación respecto al eje de revolución del cono sea igual al presentado por su generatriz. El plano resultará por lo tanto paralelo a dicha recta. Se define también como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de una recta llamada directriz, y un punto exterior a ella llamado foco. En geometría proyectiva, la parábola se define como la curva envolvente de las rectas que unen pares de puntos homólogos en una proyectividad semejante o semejanza.

**Pendiente:**

A la inclinación de un elemento ideal, natural o constructivo respecto de la horizontal. También puede referirse a la pendiente de la ecuación de una recta como caso particular de la tangente a una curva, en cuyo caso representa la derivada de la función en el punto considerado, y es un parámetro relevante, por ejemplo, en el trazado altimétrico de carreteras, vías férreas o canales.

**Perímetro:**

Es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica. El perímetro es la distancia alrededor de una figura de dos dimensiones, o la medición de la distancia en torno a algo; la longitud de la frontera. La palabra viene del griego *peri* (alrededor) y *metro* (medida). El término puede ser utilizado tanto para la distancia o longitud, como para la longitud del contorno de una forma. El perímetro de un círculo se llama su circunferencia. La mitad del perímetro es el semiperímetro.

Calculando el perímetro tiene considerables aplicaciones prácticas. El perímetro se puede utilizar para calcular la longitud de la valla requerido para rodear un patio o jardín. El perímetro de una rueda (la circunferencia) describe hasta dónde va a rodar en una revolución. Del mismo modo, la cantidad de la herida cadena alrededor de un carrete está relacionada con el perímetro de la bobina.

---

## R

### **Radio de una circunferencia:**

Es cualquier segmento que une el centro a cualquier punto de dicha circunferencia.

### **Rectángulo:**

Es un paralelogramo cuyos cuatro lados forman ángulos rectos entre sí. Los lados opuestos tienen la misma longitud. El perímetro de un rectángulo es igual a la suma de todos sus lados.

---

## S

### **Secante, (abreviado como sec):**

Es la razón trigonométrica inversa del coseno, o también su inverso multiplicativo.

### **Segmento:**

En geometría, es un fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos, llamados puntos extremos o finales. Así, dado dos puntos A y B, se le llama segmento AB a la intersección de la semirrecta de origen A que contiene al punto B con la semirrecta de origen B que contiene al punto A.

Los puntos A y B son extremos del segmento y los puntos sobre la recta a la que pertenece el segmento (la «recta sostén»), serán interiores o exteriores al segmento según pertenezcan o no a este.



### **Sistema coordenado rectangular:**

Consiste en dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en un punto 0 al que se le llama Origen del Sistema, dichas rectas se llaman Ejes Coordinados. El eje horizontal se denomina Eje de las Abcisas y el eje vertical Eje de las Ordenadas. Los ejes pertenecen a un plano que se divide en cuatro regiones llamados Cuadrantes numeradas con Numeros Romanos.

T

### **Tangente:**

Proviene del griego «tangens»=que toca. La tangente a una curva en uno de sus puntos, es una recta que toca a la curva en el punto dado, el punto de tangencia (se puede decir que «forman un ángulo nulo» en la vecindad de dicho punto).

Esta noción se puede generalizar, desde la recta tangente a un círculo o una curva, a «figuras tangentes» en dos dimensiones (es decir, figuras geométricas con un único punto de contacto, por ejemplo la circunferencia inscrita), hasta los espacios tangentes, en donde se clasifica el concepto de «tangencia» en más dimensiones.

### **Teorema:**

Es una fórmula bien formada que puede ser demostrada dentro de un sistema formal, partiendo de axiomas u otros teoremas. Demostrar teoremas es un asunto central en la lógica matemática. Los teoremas también pueden ser expresados en lenguaje natural formalizado. Un teorema generalmente posee un número de premisas que deben ser enumeradas o aclaradas de antemano.

Luego existe una conclusión, una afirmación lógica o matemática, la cual es verdadera bajo las condiciones dadas. El contenido informativo del teorema es la relación que existe entre las hipótesis y la tesis o conclusión.

### **Trayectoria:**

Es el lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento. La trayectoria depende del sistema de referencia en el que se describa el movimiento; es decir el punto de vista del observador.

### **Triángulo:**

En geometría, es la reunión de tres segmentos que determinan tres puntos del plano y no colineales. Cada punto dado pertenece a dos segmentos exactamente.<sup>1</sup> Los puntos comunes a cada par de segmentos se denominan vértices del triángulo<sup>2</sup> y los segmentos de recta determinados son los lados del triángulo. Dos lados contiguos forman uno de los ángulos interiores del triángulo. Un triángulo es una figura estrictamente convexa.

Un triángulo tiene 3 ángulos interiores, 3 ángulos exteriores, 3 lados y 3 vértices entre otros elementos. Si está contenido en una superficie plana se denomina triángulo, o trígono, un nombre menos común para este tipo de polígonos.

Si está contenido en una superficie esférica se denomina triángulo esférico. Representado, en cartografía, sobre la superficie terrestre, se llama triángulo geodésico.

---

V

### **Valor absoluto o módulo de:**

Un número real es su valor numérico sin tener en cuenta su signo, sea este positivo (+) o negativo (-). Así, por ejemplo, 3 es el valor absoluto de 3 y de -3. El valor absoluto está relacionado con las nociones de magnitud, distancia y norma en diferentes contextos matemáticos y físicos. El concepto de valor absoluto de un número real puede generalizarse a muchos otros objetos matemáticos, como son los cuaterniones, anillos ordenados, cuerpos o espacios vectoriales.

### **Variable:**

Es un símbolo que puede ser remplazado o que toma un valor numérico en una ecuación o expresión matemática en general. El vértice es el punto donde se encuentran dos o más semirrectas que conforman un ángulo.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

## BÁSICA

- Méndez, A. (2010). **Matemáticas 3**. México: Santillana
- Salazar V, P. (2010). **Matemáticas 3**. México: Nueva Imagen.
- Pimienta, J.H., Acosta, V., Ramos, O., Villegas, G. (2010). **Matemáticas III**. Naucalpan de Juárez, Estado de México: Pearson Educación

## COMPLEMENTARIA:

- Mata Holguín Patricia (2010). **Matemáticas 3**. México: ST Editorial.
- Fuenlabrada, S. (2007) **Geometría Analítica**, México: Mc Graw Hill.
- Cuellar, J,A. (2010). **Matemáticas III**, México: Mc Graw Hill.

## ELECTRÓNICA:

- [http://descarates.cnice.mecd.es/geometría/intro\\_geom\\_analitica\\_jasg/index.htm](http://descarates.cnice.mecd.es/geometría/intro_geom_analitica_jasg/index.htm)
- <http://www.geocites.com/geometriaanalitica/>
- <http://www.geoan.com/>
- <http://www.elosiodelosdantos.com/sergiman/geometan.html>
- <http://geometriaparatodos.blogspot.com/2009/blog-post.html>
- <http://azul.bnct.ipn.mx/libros/polilibros/poli11/capitulo3/3.4.htm>
- <http://dcb.fic.umam.mx/coordinacionesacademicas/matematicas/capsulasantecedentes/circunferencia.html>
- <http://disfrutalasmatematicas.com/geometria/parabola.html>
- <http://www.escolar.com/avanzado/geometria009.html>
- <http://www.vitutor/geo/coni/gactividades.html>
- <http://www.telefonica.net/web2/lasmatematicasdemario/diferencia/curvas/enelplano/conicas/elipse.html>

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de  
Bachilleres del Estado de Sonora

Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur.  
Hermosillo, Sonora, México

La edición consta de 11, 295 ejemplares.  
Impresos en México/Printed in Mexico.



COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA