COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Matemáticas 4

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos

Ramiro Ávila Godoy
Agustín Grijalva Monteverde
Martha Cristina Villalva Gutiérrez
José María Bravo Tapia
Silvia Elena Ibarra Olmos
Guadalupe Villaseñor Gándara

Cuarto Semestre

Reforma Integral de la Educación Media Superior

Matemáticas 4

Bufete de Asesoría en Educación Matemática de la Universidad de Sonora:

- Ramiro Ávila Godoy
- Agustín Grijalva Monteverde
- Martha Cristina Villalva Gutiérrez
- José María Bravo Tapia
- Silvia Elena Ibarra Olmos
- Guadalupe Villaseñor Gándara

Matemáticas 4

Aprendiendo a ser, hacer y vivir juntos

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Director General
Profr. Julio Alfonso Martínez Romo

Director Académico
Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

Director de Administración y Finanzas
C.P. Jesús Urbano Limón Tapia

Director de Planeación
Ing. Raúl Leonel Durazo Amaya

Desarrollo Editorial: Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.
Coordinación Editorial: LDG. Luis Ricardo Sánchez Landín
Edición: LDG. Yolanda Yajaira Carrasco Mendoza

Coordinación General:
Dr. Manuel Valenzuela Valenzuela

Supervisión Académica:
Vanesa Guadalupe Angulo Benítez

Coordinación Técnica:
Rubisela Morales Gispert

Revisores Disciplinares:
Margarita León Vega
Raúl Amavizca Carlton
Miguel Ángel Barceló Lara
Adán Durazo Armenta
Joaquín Miranda Gil

Contenido: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

MATEMÁTICAS 4

Módulo de Aprendizaje

Dirección Académica
Departamento de Innovación y Desarrollo
de la Práctica Docente
Blvd. Agustín de Vildósa, Sector Sur
Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280

Autores:
Bufete de Asesoría en Educación
Matemática de la Universidad de Sonora:
Ramiro Ávila Godoy
Agustín Grijalva Monteverde
Martha Cristina Villalva Gutiérrez
José María Bravo Tapia
Silvia Elena Ibarra Olmos
Guadalupe Villaseñor Gándara

ISBN: 978-607-730-038-0

Primera Edición: 2015
Se terminó la impresión de esta obra en Diciembre del 2014.
En los talleres de ***Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.***
Lambda No. 216 • Fraccionamiento Industrial Delta • C.P. 37545
León, Guanajuato, México.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 3681

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México
La edición consta de 11,075 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico

Contenido

BLOQUE 5: VARIACIONES ESPECIALES Y FUNCIONES INVERSAS

BLOQUE 6: LAS FUNCIONES COMO MODELO DE LA VARIACIÓN

Joven estudiante del COBACH:

Emprender este nuevo reto educativo que se encuentra ante ti, es una oportunidad virtuosa para tu formación como ser humano comprometido con su entorno, para construir tu proyecto de vida con bases académicas sólidas y una visión que amplíe tus horizontes.

Como joven adolescente y miembro activo de esta sociedad que se transforma, vives la búsqueda de trascender y ser reconocido por tus logros, y para ello el Colegio de Bachilleres será tu mejor aliado, ofreciéndote no sólo la atención cercana de nuestros docentes y personal administrativo, sino también, la infraestructura necesaria para desarrollar tus talentos y habilidades.

Tu decisión de ser parte de una institución de educación media superior que forma campeones en las diversas ramas de conocimiento, el arte, la cultura y el deporte, es un gran mérito y te felicito por pertenecer a esta preparatoria líder en el Estado de Sonora.

Te invito a que te apliques con entusiasmo y verdadero compromiso en esta etapa fundamental en tu formación, en donde se requiere del esfuerzo de todos: tu familia, tus maestros y el tuyo propio, para construir el Sonora Educado que no merecemos y que podemos juntos hacer posible.

El Colegio de Bachilleres tiene especial interés en ofrecerle los medios necesarios para formarte como un estudiante íntegro y competente. Nos interesa proveerte de herramientas útiles, ya que la educación no sólo es acumular conocimiento, sino también implica prepararte para la interacción humana y social.

La práctica de los valores humanos, el uso de las nuevas tecnologías y tu inserción en la multidisciplinariedad, serán ambiente propicio para construir en ti, un estudiante competitivo, con múltiples habilidades y destrezas personales, preparado para enfrentar los desafíos de la gran transformación que vive nuestro Estado.

Te exhorto a aprovechar al máximo esta gran oportunidad que tienes de sumarte a los jóvenes mexicanos que se preparan para asumir otras responsabilidades futuras, orientadas a tu preparación profesional y que, con entusiasmo y empeño, culmines este ciclo visualizándote triunfador y exitoso.

Cordialmente:

Mtro. Julio Alfonso Martínez Romero

Director General

Presentación

El modelo educativo del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora está basado en un enfoque por competencias, asumiendo que el aprendizaje de los estudiantes debe centrarse en la formación integral de los mismos, trascendiendo a las visiones educativas que se limitan al aspecto de la producción de conocimientos.

En un enfoque por competencias se plantea que lo más importante es el desarrollo de los estudiantes para que puedan resolver problemas en diferentes contextos de la vida cotidiana, científica y social, para lo cual, además de los conocimientos deberán desarrollar las habilidades y actitudes necesarias para enfrentar situaciones diversas.

En el presente **módulo de aprendizaje** las competencias a desarrollar se centran en el análisis de los fenómenos de variación, que son particularmente importantes porque el mundo en que vivimos tiene como una característica primordial el hecho de que prácticamente todo está sujeto a cambios o variaciones, lo cual podemos observarlo cotidianamente en todas nuestras actividades.

Así, cada día somos testigos de que la posición del sol cambia, la temperatura ambiente, nuestro estado de ánimo, la energía con la que desarrollamos las actividades cotidianas, el estado de los alimentos, nos movemos de un lugar a otro cambiando nuestra posición, la iluminación del ambiente, todo es cambiante o variable.

Esta característica de que todas las cosas cambian obliga a analizar cómo se producen dichos cambios y a predecir los posibles estados futuros de las cosas con el propósito de tomar decisiones para su uso o para saber lo que nosotros deberemos hacer cundo los cambios se hayan realizado. Para el estudio de los cambios o variaciones de los fenómenos se necesita el concurso de diferentes visiones, a veces provenientes de la física, la química, la economía, la sociología u otras disciplinas, en dependencia del tipo de fenómenos que se esté analizando.

Pero algo que frecuentemente tienen en común los análisis de la variación de los fenómenos cotidianos que nos rodean, es que la **matemática** ofrece herramientas para el estudio de aspectos importantes de dichos cambios, tanto de naturaleza cualitativa como cuantitativa.

Por esa razón, en este módulo estudiaremos la variación desde el punto de vista matemático, aportando elementos para el análisis de fenómenos diversos de la vida cotidiana, de tus cursos de otras asignaturas y de los problemas surgidos también en el interior de la propia matemática. Las actividades que se presentan en el módulo tienen el propósito de ayudarte desarrollar tus competencias para usar las **matemáticas** al enfrentarte a las situaciones provenientes de los fenómenos variacionales.

Siguiendo la idea de los módulos anteriores de **matemáticas**, los diferentes **BLOQUES** que se tratan aquí se organizan en **secuencias didácticas** que incluyen actividades llamadas de inicio, otras de desarrollo y otras de cierre.

Presentación

Es importante que se transite por las tres en cada secuencia pues cada una de ellas tiene un propósito bien definido. Las situaciones problemáticas se plantean en las actividades de inicio, incluyendo en ellas las competencias que previamente has desarrollado pero dando curso a las que deberás fortalecer o crear ahora. En las actividades de desarrollo se espera que emerjan los conocimientos nuevos del tema a tratar, así como las habilidades y actitudes necesarias para emplearlas en la resolución de las situaciones planteadas, cerrando por última con actividades en las cuales se hace una recapitulación de lo aprendido y se revisan los conocimientos que se espera hayas construido.

En cada una de las actividades es importante que sigas los lineamientos que te señala tu profesor y hagas las tareas correspondientes en concordancia con lo planteado respecto a si se trata de una actividad para hacerla individualmente, en equipo o en discusión de todo el grupo.

Además de las **secuencias didácticas**, al final de cada **BLOQUE** se sugieren que realices otras actividades, las cuales también contribuyen a tu formación. Por una parte se plantean problemas en diferentes contextos, en los cuales se requiere de tus habilidades y conocimientos para resolverlos y, por otra, se plantean problemas de autoevaluación, en los cuales te puedas apoyar para obtener claridad de lo que has aprendido pero también de lo que aún necesitas fortalecer y, consecuentemente, tomar medidas que te ayuden a superar las deficiencias.

Por último, a continuación se presentan, a grandes rasgos los tipos de variación que se estudiarán en el presente módulo.

Variación lineal, tomando como base los fenómenos de variación directamente proporcional.

Variación polinomial, tomando como base la variación directamente proporcional entre una variable y la potencia de otra.

Variación exponencial y logarítmica, ligadas a fenómenos de crecimientos y decrecimientos muy rápidos o muy lentos.

Variación periódica, centrada en los fenómenos cuyo comportamiento se repite con determinada frecuencia.

Variaciones especiales e inversas, para fenómenos que quizá puedan ser como los anteriores, pero que se presentan de forma combinada, así como para fortalecer tus conocimientos.

Cada una de estos tipos de variación se estudian en un **BLOQUE** y, al final se incluye un **BLOQUE** adicional en el cual podrás profundizar tus conocimientos de los objetos matemáticos que surgieron a lo largo del módulo.

Estructura Metodológica de los Textos

Actividades de Inicio

Desarrollo

Práctica del conocimiento adquirido mediante acciones a ejecutar o proyectos a llevar a cabo.

Actividad de Cierre

Actividad Individual

Actividad de Equipo

Actividad Grupal

Sitios Web recomendados o confiables que puedes consultar por tu cuenta vía internet para que puedas ampliar tus conocimientos.

En la página Web del Congreso del Estado de Sonora aparece, entre otras la Ley de Ingresos del Estado. En ella, en el Artículo 212 G-7 encontramos una tabla que indica la manera en cómo se realiza el cálculo de la depreciación de un automóvil.

Ley de Ingresos del Estado de Sonora
Artículo 212 G-7

Modelo del vehículo	Factor de depreciación
2012	0.850
2011	0.725
2010	0.600
2009	0.500
2008	0.400
2007	0.300
2006	0.225
2005	0.150
2004 y anteriores	0.075

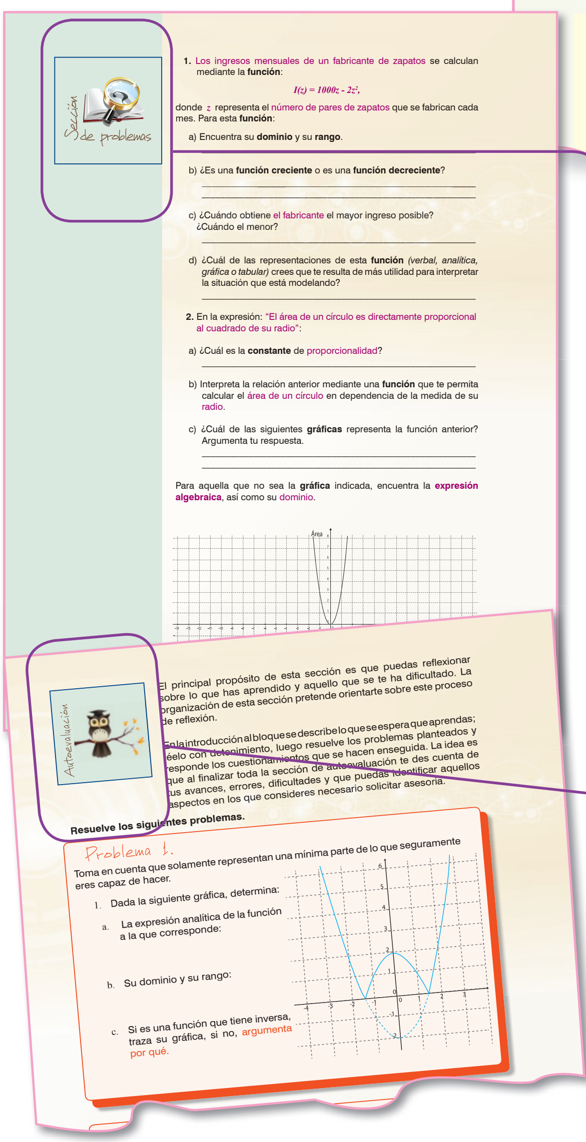
Tabla 6.5

a) Asigna tres valores hipotéticos a los precios de factura de tres diferentes tipos y modelos de automóvil, para que calcules en cada caso cuál es el valor de esos vehículos en 2013.

b) Si un automóvil es modelo 2005 y su valor en 2013 es de $ 485,000.00, ¿cuál fue su valor original?

...tenemos un vehículo modelo 2006, con valor actual de $ 514,500.00, ...cio de factura?

185



1. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos se calculan mediante la **función**:

$$I(z) = 1000z - 2z^2,$$

donde z representa el número de pares de zapatos que se fabrican cada mes. Para esta **función**:

a) Encuentra su **dominio** y su **rango**.

b) ¿Es una **función creciente** o es una **función decreciente**?

c) ¿Cuándo obtiene el fabricante el mayor ingreso posible? ¿Cuándo el menor?

d) ¿Cuál de las representaciones de esta **función** *(verbal, analítica, gráfica o tabular)* crees que te resulta de más utilidad para interpretar la situación que está modelando?

2. En la expresión: "El área de un círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio":

a) ¿Cuál es la **constante** de proporcionalidad?

b) Interpreta la relación anterior mediante una **función** que te permita calcular el área de un círculo en dependencia de la medida de su radio.

c) ¿Cuál de las siguientes **gráficas** representa la función anterior? Argumenta tu respuesta.

Para aquella que no sea la **gráfica** indicada, encuentra la **expresión algebraica**, así como su dominio.

El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

Resuelve los siguientes problemas.

Problema 1.

Toma en cuenta que solamente representan una mínima parte de lo que seguramente eres capaz de hacer.

1. Dada la siguiente gráfica, determina:

a. La expresión analítica de la función a la que corresponde:

b. Su dominio y su rango:

c. Si es una función que tiene inversa, traza su gráfica, si no, argumenta por qué.

Sirve para ejercitar lo aprendido en el bloque y, en ciertos casos, para usar creativamente lo que has aprendido, en problemas novedosos.

Serie de problemas y preguntas para la reflexión individual, es necesario que la respondas individualmente, con honestidad y plantear tus dudas y dificultades a tu profesor o profesora y compañeros de clase.

COMPETENCIAS

Genéricas

COMPETENCIAS A DESARROLLAR

BLOQUE 1
BLOQUE 2
BLOQUE 3
BLOQUE 4
BLOQUE 5
BLOQUE 6

1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3. Elige y practica estilos de vida saludables.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la intercultu-ralidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

GENÉRICAS

COMPETENCIAS

Disciplinares

COMPETENCIAS A DESARROLLAR	BLOQUE					
1.- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos, y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.	B1	B2	B3	B4	B5	B6
2.- Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.	B1	B2	B3	B4		
3.- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	B1	B2	B3	B4		B6
4.- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de la tecnología de la información y la comunicación.			B3	B4	B5	B6
5.- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	B1	B2	B3	B4	B5	B6
6.- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y de las propiedades físicas de los obetos que los rodean.	B1		B3			
7.- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.			B3			
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	B1	B2	B3	B4	B5	B6

DISCIPLINARES

MAPA DE LA ASIGNATURA

MATEMÁTICAS 4

- **BLOQUE 1** — Variaciones y funciones lineales
  - Secuencia Didáctica 1.- Los procesos de cambio
  - Secuencia Didáctica 2.- La variación directamente proporcional
  - Secuencia Didáctica 2.- La variación lineal
- **BLOQUE 2** — Variciación no lineal y variación inversamente proporcional
  - Secuencia Didáctica 1.- La variación cuadrática
  - Secuencia Didáctica 2.- La variación cúbica
  - Secuencia Didáctica 3.- La variación inversamente proporcional
- **BLOQUE 3** — Variación exponencial y logarítmica
  - Secuencia Didáctica 1.- Crecimientos y decaimientos sorprendentes
  - Secuencia Didáctica 2.- Los logarítmos y la variación logarítmica
- **BLOQUE 4** — Variación periódica
  - Secuencia Didáctica 1.- La variación de la posición de un objeto que se mueve en una trayectoria circular con respecto al ángulo que describe
  - Secuencia Didáctica 2.- La variación de la posición con respecto al tiempo, de una partícula que describe un movimiento circular uniforme *(MCU)*
  - Secuencia Didáctica 3.- Las funciones periódicas
- **BLOQUE 5** — Variaciones especiales y funciones inversas
  - Secuencia Didáctica 1.- Sucesos que presentan dierentes tipos de variaciones
  - Secuencia Didáctica 2.- Un acercamiento a las funciones inversas
- **BLOQUE 6** — Las funciones como modelo de la variación
  - Secuencia Didáctica 1.- La percepción de la variación y el establecimiento de las relaciones de dependencia
  - Secuencia Didáctica 2.- Las funciones como modelos de variación
  - Secuencia Didáctica 3.- La gráfica de las funciones como transformación de la recta que es representación gráfica de la función identidad
  - Secuencia Didáctica 4.- Las funciones que resultan al realizar operaciones entre funciones y las funciones inversas

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

BLOQUE 1

Variacionaes y funciones Lineales

INTRODUCCIÓN:

En este **BLOQUE** *tendrás oportunidad de hacer reflexiones sobre los procesos de variación y su relación con las matemáticas.* Cotidianamente se encuentran fenómenos que siempre tienen la característica de ser variables: la temperatura ambiente se modifica a lo largo del día, la humedad aumenta o disminuye, la posición del sol y de la luna, nuestro estado de ánimo, nuestro cansancio conforme desarrollamos actividades y el día avanza, la programación de radiodifusoras y de televisoras, etc.

El énfasis de este **BLOQUE** estará centrado en la llamada *variación lineal*, la cual has estudiado, en parte, en el **BLOQUE 6** *del Módulo de Matemáticas 1*. *La variación lineal* está íntimamente ligada a *los procesos de proporcionalidad directa* y aquí tendrás oportunidad de rescatar algunas nociones ya estudiadas previamente así como a profundizar en el estudio de *las variaciones lineales* y sus modelos matemáticos, *las funciones lineales.*

La profundización del estudio sobre la proporcionalidad te permitirá decidir cuáles modelos son los más apropiados para representar los fenómenos discutidos en el bloque y deberás interpretar información proporcionada de forma verbal, en lenguaje gráfico, en expresiones algebraicas y en tablas numéricas.

Con base en los razonamientos que harás para interpretar y resolver las situaciones y problemas de estudio, tendrás que argumentar sobre la validez de los procedimientos usados y podrás comunicar tus resultados a tus compañeros y a tu profesor, empleando también los lenguajes natural, gráfico, numérico y algebraico.

En algunos casos te enfrentarás a situaciones en las que es necesario hacer cuantificaciones pero también otros momentos en los cuales lo más importante será que hagas análisis cualitativos para comprender, caracterizar y resolver problemas, movilizando tus conocimientos para resolver problemas en contextos diferentes a aquéllos en los cuáles se estudiaron aquí por primera ocasión.

La información que deberás analizar tiene estrecha relación con tus actividades cotidianas tanto escolares como extraescolares, con la inclusión de situaciones extraídas de tus cursos de física, de química u otros, así como de las actividades en las que normalmente te involucras en tu casa o en la calle.

Es muy importante que te integres a las actividades indicadas en el texto y por tus profesores, lo cual te permitirá desarrollar competencias para el trabajo colaborativo, para organizar tu pensamiento cuando plantees dudas o expliques a tus compañeros tus propuestas para la resolución de problemas.

Tiempo asignado: 10 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

Los procesos de cambio

Actividad: 1
Actividad Individual

Percibiendo el cambio.

a) Observa las siguientes fotografías

Ramssés, 5 años

Ramssés, 21 años

Las aguas del río San Miguel, cruzando la zona del Vado del Río, en Hermosillo, Sonora. 1984

Misma zona anterior, pero en el año 2014.

b) Describe todos los cambios que notes entre cada pareja de fotografías.

c) Las siguientes fotografías muestran dos aspectos en la ciudad de Pompeya, después de que ésta fue destruida por la erupción del volcán Vesubio, en el año de 79 d. de C. En la primera de ellas tenemos una toma desde lo que era la plaza principal de la ciudad. En la segunda se muestra un fresco que adorna una de las paredes de alguna de las casas.

Ruinas del foro, en la ciudad de Pompeya, Italia.

Fresco que adornaba una de las casas de Pompeya

¿Qué aspectos de la sociedad pompeyana habrán cambiado desde esa época hasta nuestros días?

____

____

____

____

____

d) En la imagen que sigue se muestra una fotografía grupal de los alumnos de tercer año de primaria de la Escuela No. 9, ubicada en el poblado de Villa Unión, Sinaloa. La fotografía data de 1932.

¿Qué *cambios* crees que hayan ocurrido en las escuelas mexicanas de 1932 hasta nuestros días?

____

____

¿Qué utilidad tiene pensar en esos *cambios*? ______________________________________

____

e) Cuando en un fenómeno *se modifica una de las variables involucradas,* es posible que se modifiquen muchas otras que están ligadas a ella. Por ejemplo cuando una persona que se encontraba en buen estado de salud se enferma, por una infección u otra causa, es perceptible que se modifica su temperatura corporal. Pero también se modifican otros aspectos que pueden ser perceptibles o no. Se modifican entre otros su apetito, el color de su piel, su energía para realizar actividades, su capacidad de atención al mundo que lo rodea y posiblemente su sistema inmunológico. ¿Puedes señalar otros aspectos que se modifican en una persona cuando se enferma?

Tomando las debidas precauciones para no provocar un accidente, somete al fuego una hoja de papel, un pedazo de madera y una pieza metálica sin pintar y *señala tres variables* que se modifican como producto de su contacto con el fuego.

____

____

____

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad de Equipo

Analizando el cambio

Compartan entre ***los integrantes de su equipo*** las respuestas a los cuestionamientos de la ***Actividad 1.*** Intenten dar una respuesta colectiva a las preguntas siguientes:

¿Por qué o para qué es importante estudiar ***los procesos de cambio***?

¿Cómo consideran que la matemática puede intervenir o apoyar dicho estudio? ***Proporcionen ejemplos.***

Actividad de Cierre

Actividad: 3
Actividad Individual

Reflexionando sobre los procesos de cambio

Se espera que lo que hasta este momento has estudiado de ***los procesos de cambio,*** no sólo en este curso, sino en los cursos de ***Matemáticas 1 y 2***, te ayude a darte cuenta que:

a) Llegar a entender y controlar ***el mundo cambiante*** en que vivimos, es sumamente importante.

b) En la naturaleza y en la sociedad todo está permanentemente cambiando. Por ejemplo:

i) Los organismos en desarrollo ***sufren cambios*** durante toda su vida, desde los microscópicos como los virus hasta los más grandes como las ballenas, están cambiando permanentemente.

ii) Todo fenómeno natural, desde las vibraciones cuánticas de las partículas subatómicas hasta el propio universo, ***es una manifestación constante del cambio.***

iii) ***Los cambios sociales*** se dan en la política *(por ejemplo, las preferencias electorales)*, en la economía *(como el aumento en los precios de las mercancías, las recesiones y las devaluaciones)*, en la historia.

c) ***Algunos cambios*** en la naturaleza son simples, por ejemplo el ciclo de las estaciones o el flujo y reflujo de las mareas; y que otros son, con frecuencia, desconcertantes e imprevisibles, como los sismos y los maremotos.

d) Por lo general, ***los cambios sociales*** resultan difíciles de prever e incluso, de interpretar.

e) En general, en nuestras vidas influyen ***cambios de toda índole.***

f) Entender ***los patrones de cambio*** es indispensable para prever y predecir nuevos estados, lo que a su vez nos permite tomar mejores decisiones respecto a una diversidad de problemas tanto sociales como personales.

g) Para llegar a entender ***los patrones de cambio*** es necesario percibirlos, incluso el de aquellos eventos que a primera vista parecen no tenerlos; analizarlos y caracterizarlos, así como utilizar dichos patrones para interpretar eventos del mundo material.

h) El proceso de identificación de ***los patrones de cambio*** requiere, en principio, disponer de formas adecuadas de representar los cambios, así como de entender los tipos fundamentales de cambio.

i) Uno de los medios eficaces para llevar a cabo estas tareas es la matemática, pues nos permite construir modelos que podemos utilizar para analizar y comprender ***los procesos de cambio.***

En los **BLOQUES** que siguen estudiaremos cómo intervienen las matemáticas para percibir, analizar y caracterizar algunos ***patrones de cambio*** que son importantes para interpretar sucesos del mundo que nos rodea.

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

La variación directamente proporcional

Actividad: 1
Actividad Individual

Recuperando ideas sobre la variación directamente proporcional.

Las siguientes expresiones han aparecido en tus módulos de matemáticas y/o en tus módulos de física. Para cada una de ellas, explica cómo la interpretas:

a) ***En el movimiento rectilíneo uniforme,*** la distancia recorrida por el objeto que se está moviendo es ***directamente proporcional al tiempo transcurrido***.

____
____
____
____

b) Durante los primeros segundos de una reacción química, el ***tiempo transcurrido*** y la cantidad de producto obtenido en dicha reacción química ***son directamente proporcionales***.

____
____
____
____

c) ***La medida del diámetro de una circunferencia*** y ***la medida de su perímetro son directamente proporcionales.***

____
____
____
____

d) En diciembre de 2012, el precio de un litro de gasolina Magna en México, era de $ 10.80. Durante 2013 encontramos que el número de meses transcurridos en ese año y el correspondiente incremento acumulado en el precio del litro ***son directamente proporcionales,*** siendo 0.11 el valor de la constante de proporcionalidad.

____
____
____
____

Actividad: 2

Actividad Individual

En los apartados que siguen están representadas diferentes situaciones. A partir de la información que se proporciona, trata de describir la situación de que se trate:

a) En la Figura 1.1 aparecen ***tres gráficas*** que describen el comportamiento de ***tres casos de reacciones químicas.***

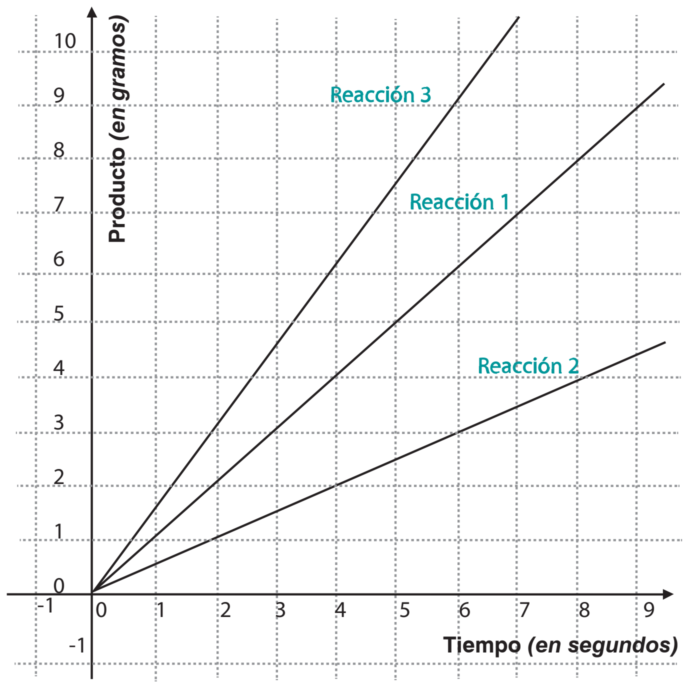


Figura 1.1

____
____
____
____

b) En la Figura 1.2 ***se muestra una gráfica*** donde se representan las ***velocidades de un objeto*** *(sobre el eje de las ordenadas)*, con relación al ***tiempo transcurrido*** *(en el eje de las abscisas)*. ***El tiempo se mide en segundos*** y ***la velocidad en metros por segundo.***

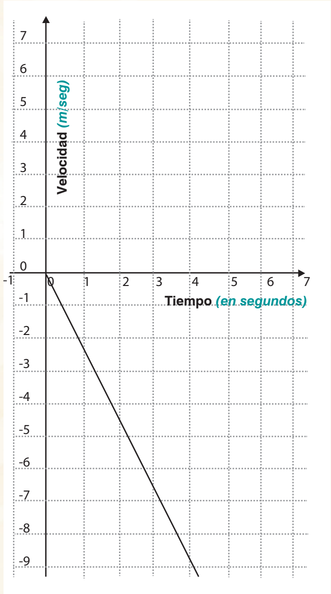


Figura 1.2

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

c) En la **Tabla 1.1** se muestran los aumentos acumulados al precio del litro de gasolina Magna en México durante el año 2012.

AUMENTOS AL PRECIO DEL LITRO DE GASOLINA MAGNA DURANTE EL AÑO 2012 EN MÉXICO	
Número de mes	Aumento acumulado en pesos
1	0.09
2	0.18
3	0.27
4	0.36
5	0.45
5	0.54
6	0.63
8	0.72
9	0.81
10	0.90
11	0.99
12	1.08

Tabla 1.1

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Desarrollo

Actividad de Equipo

Profundizando en el estudio de la variación directamente proporcional.

En las actividades de Inicio de esta secuencia se presentaron algunos casos de ***variación directamente proporcional***, que ahora retomaremos para profundizar en el estudio de algunos aspectos que pueden ayudarnos a comprender de mejor manera su comportamiento. Con el mismo propósito introduciremos también otros casos de estudio.

Actividad: 1
Actividad Individual

a) En el movimiento rectilíneo uniforme, **la distancia recorrida** por el objeto que se está moviendo ***es directamente proporcional*** al **tiempo transcurrido.**

Describe qué sucede con **la distancia recorrida** conforme el **tiempo transcurre,** esto es, al aumentar el tiempo transcurrido, ¿**la distancia recorrida** permanece igual, disminuye o aumenta? ____________________

____

____

____

b) Durante los primeros segundos de ***una reacción química***, el **tiempo transcurrido** y la cantidad de producto obtenido en dicha reacción química ***son directamente proporcionales.***

En este caso describe el comportamiento del producto obtenido conforme **el tiempo aumenta.** ____

____

____

____

c) ***Las medidas del diámetro*** de una circunferencia y de su ***perímetro*** son ***directamente proporcionales***. Describe el comportamiento del ***perímetro*** de la circunferencia conforme el ***diámetro aumenta.*** ____

____

____

____

d) ***En mes de diciembre de 2012,*** el precio de un litro de gasolina Magna en México, era de $ 10.80. ***Durante 2013*** encontramos que el número de meses transcurridos en ese año y el correspondiente incremento acumulado en el precio del litro ***son directamente proporcionales,*** siendo 0.11 el valor de la constante de proporcionalidad.

Describe el comportamiento del incremento acumulado conforme el número de meses aumenta. ____

____

____

e) ***El valor comercial*** de la maquinaria de una empresa disminuye con el uso y el paso del tiempo, de tal manera que en una compañía se estimó que el decremento en el precio de su maquinaria ***era directamente proporcional*** al número de meses transcurridos, siendo el ***valor de la constante de proporcionalidad*** igual a -$3000.00.

Determina el valor de su maquinaria al final de diciembre de 2013 si al 1 de enero era de $800,000.00. ____

____

____

Describe el comportamiento del ***valor*** de la maquinaria mientras el ***tiempo*** transcurre.

____

____

____

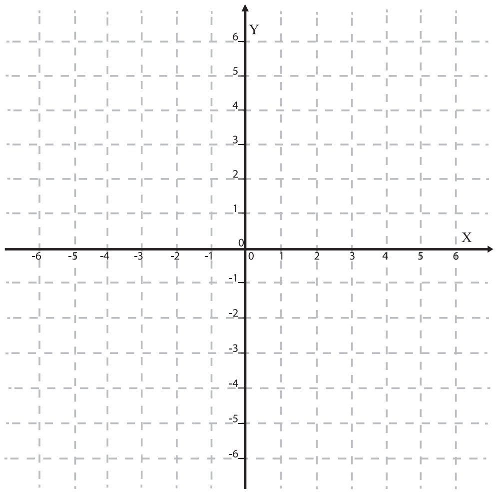
f) En un ***problema matemático*** se plantea que ***la variable*** y es ***directamente proporcional a la variable*** x, con constante de proporcionalidad igual a -7.

Escribe una expresión analítica que represente esta situación y elabora la gráfica correspondiente. ____

____

____

Gráfica:

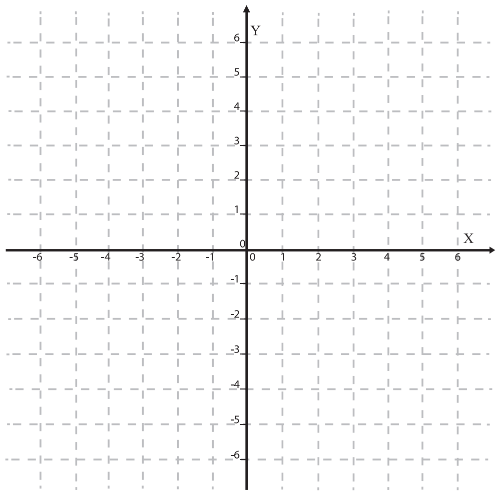


g) De acuerdo con los datos publicados por la *Comisión Nacional de Salarios Mínimos*, 36 municipios del Estado de Sonora están comprendidos en la zona geográfica A. Entre esos municipios encontramos a *Caborca, Hermosillo, Cajeme, Navojoa, Nogales, San Luis Río Colorado y Magdalena.*

Esta zona tuvo, durante el año 2013, un salario mínimo diario de $64.75. Estos datos fueron consultados en http://www.conasami.gob.mx/, el día 18 de septiembre de 2014.

Determina si el salario mínimo durante esos meses es ***directamente proporcional*** al ***tiempo transcurrido*** y elabora una gráfica que relacione ambas cantidades. ________
____
____

Gráfica:



En el caso del inciso a) se establece una relación entre la ***distancia recorrida*** y el ***tiempo transcurrido.*** En cada inciso de los anteriores indica **las variables involucradas** y determina cuál has tomado como **variable independiente** y cuál como **variable dependiente**. __________
____
____
____

Tomando en cuenta los casos mostrados en la **Actividad 1**, describe los comportamientos posibles de las **variables dependientes** cuando aumenta el valor de la **variable independiente**.

Situación presentada	Variables dependiente e independiente	Comportamiento de la variable dependiente cuando aumenta el valor de la variable independiente.
Movimiento rectilíneo uniforme.		
Reacción química.		
Relación entre la medida del diámetro de una circunferencia y su perímetro.		
Precio de la gasolina Magna en México durante 2012.		
Valor comercial de la maquinaria de una empresa.		
Problema matemático: relación entre dos variables dadas.		
Salario mínimo en el Estado de Sonora durante 2013		

Tabla 1.2 Comportamiento de las variables involucradas en diferentes situaciones

Cuando al aumentar el valor de la variable independiente aumenta también el valor de la variable dependiente, se dice que se trata de una ***variación creciente***. Si al aumentar el valor de la variable independiente el valor de la variable dependiente disminuye, se dice que se trata de una ***variación decreciente*** y si al aumentar el valor de la variable independiente el valor de la variable dependiente permanece inalterable, se dice que se trata de una ***variación constante***.

Actividad: 3
Actividad Individual

En la **Actividad 2** de Inicio se presentó la siguiente figura, señalando que corresponde a ***tres reacciones químicas*** diferentes, tomadas en los primeros segundos de las mismas.

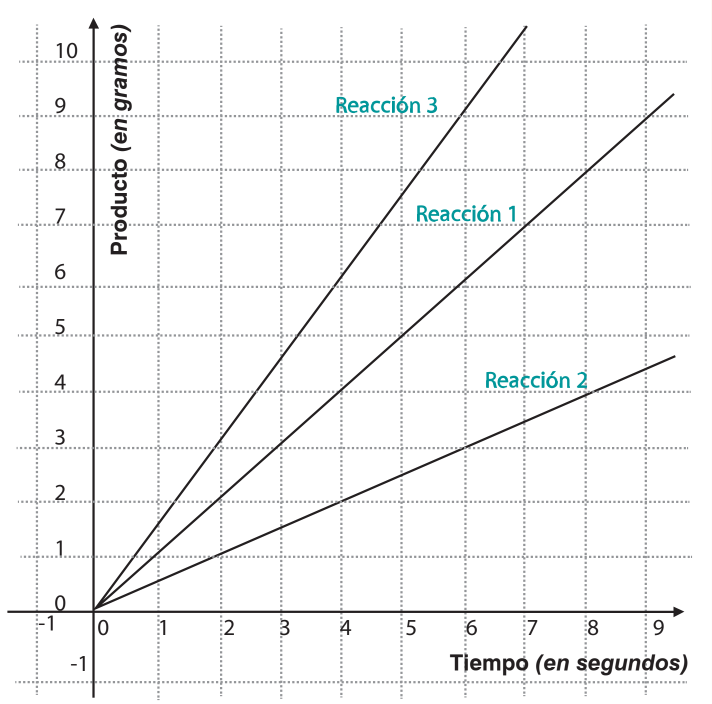


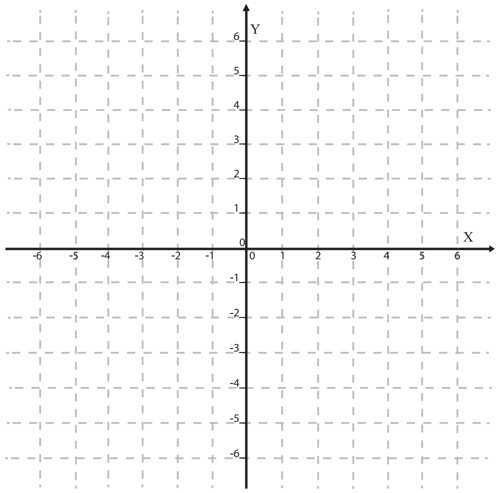
Figura 1.3

Una característica distintiva de las rectas en *un plano cartesiano* es ***su pendiente***. Tomando en cuenta lo que has estudiado en el **Módulo de Matemáticas 1**, ***la pendiente*** representa por una parte la constante de proporcionalidad del fenómeno estudiado y por otra la razón de avance, esto es, la razón de avance que representa qué tanto se modifica l*a variable dependiente* cuando *la variable independiente* se modifica en una unidad.

Por otra parte, en el **Módulo de Matemáticas 3** estudiaste que ***la pendiente*** *es una forma de conocer el valor del ángulo de inclinación de la recta.*

Teniendo en cuenta estas consideraciones ordena las reacciones químicas de la de menor a la de mayor velocidad de reacción y describe cómo se puede determinar gráficamente la rapidez de cambio de la *variable dependiente* con relación a la *variable independiente.*

Determinar gráficamente:



Si se restringe la atención a sólo **una de las reacciones químicas,** por ejemplo a ***la reacción tres***, cuya gráfica es la siguiente:

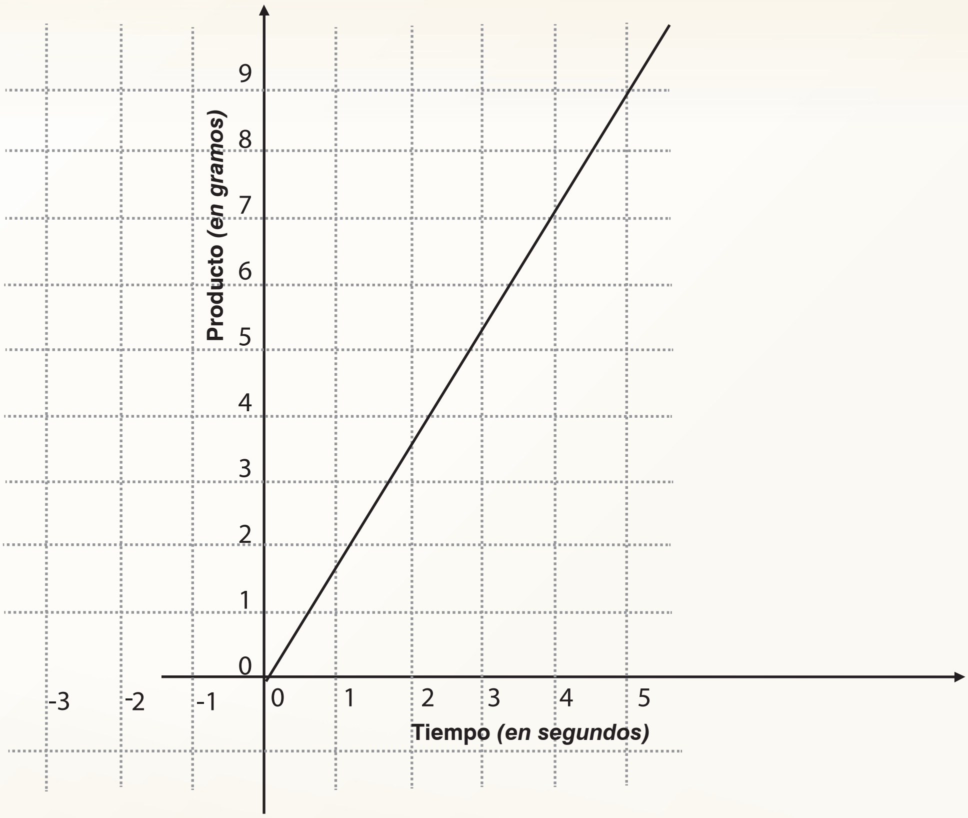


Figura 1.4

a) ***¿La velocidad de reacción*** se modifica en algún momento? Si se toma cada una de las otras ***dos reacciones*** por separado ¿qué sucede con ***la velocidad de reacción***?

Los casos como los de las reacciones químicas, en los que la velocidad de reacción es constante, se dice que se trata de ***variaciones crecientes con rapidez de crecimiento constante.***

Por otro lado también se mostró en el inciso b) de la **Actividad 2** de Inicio **la gráfica de velocidad** contra **tiempo de un objeto en movimiento**, que es la siguiente:

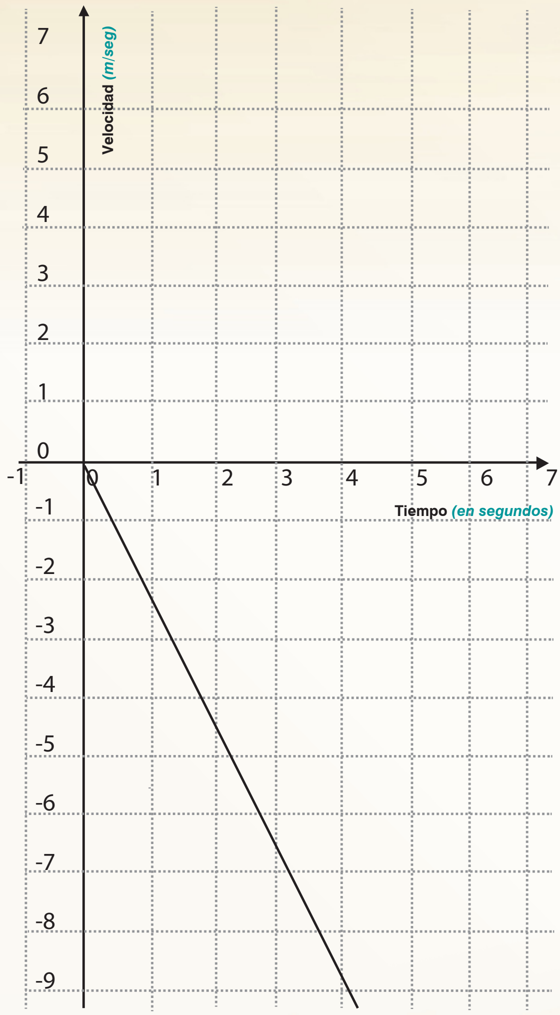


Figura 1.5

b) Describe el comportamiento general **del movimiento**, con relación al **valor de la pendiente** de la recta mostrada. ____
____
____
____
____
____

Cuando un fenómeno se representa por medio de una recta con pendiente negativa, se dice que se trata de ***una variación decreciente con rapidez de decrecimiento constante.***

Atendiendo ahora al ***caso del salario mínimo*** que se indica en el inciso g) de la **Actividad 1**, se tiene la siguiente gráfica:

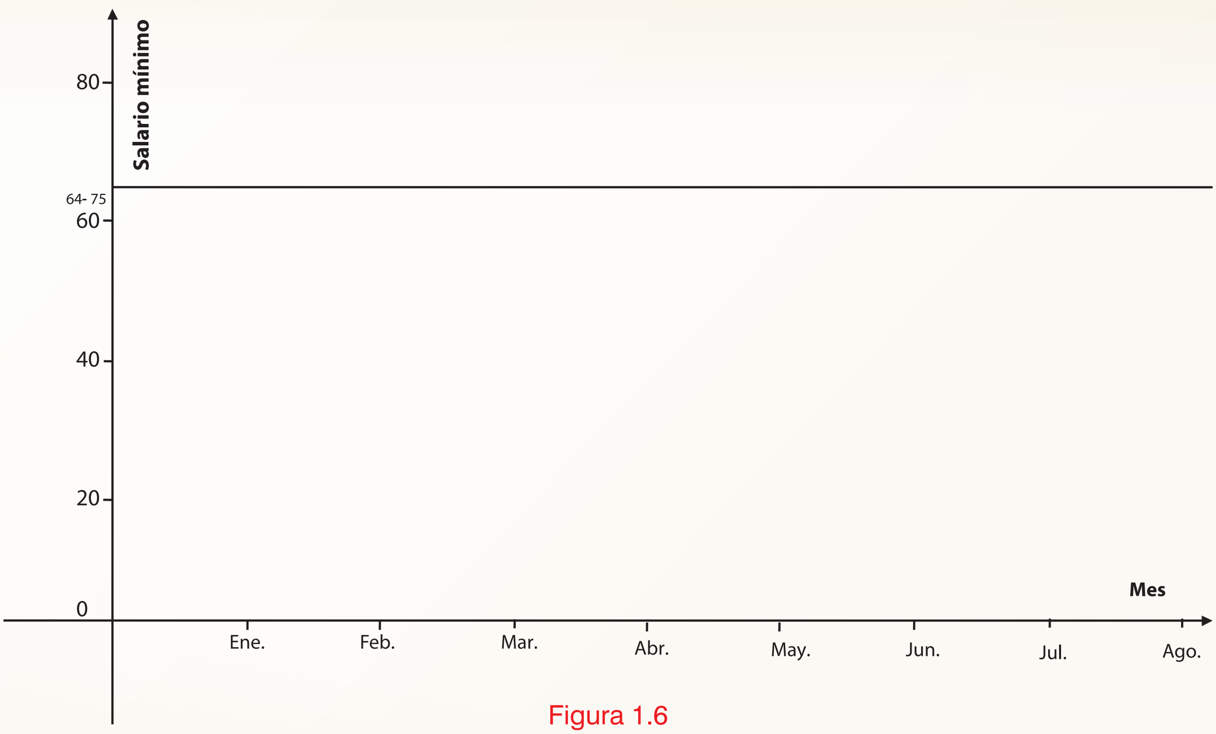


Figura 1.6

c) ¿Cuál es **el valor** de la ***pendiente de la recta***?

Cuando un fenómeno se representa por medio de una recta con pendiente igual a cero, se dice que se trata de una ***variación constante.***

Actividad de Cierre

Actividad Grupal

En las actividades que se han realizado hasta este momento se han estudiado las características generales de la ***variación proporcional***, complementando la visión que tenías ya de tus estudios anteriores, particularmente en **el Módulo de Matemáticas 1.**

Los casos analizados hasta este momento permiten establecer **relaciones entre magnitudes variables** a partir de diferentes formas de representación, empleando fundamentalmente ***cuatro formas diferentes:***

- ***El lenguaje cotidiano***
- ***Las gráficas***
- ***Las tablas numéricas***
- ***El lenguaje algebraico.***

Actividad: 1

Actividad Individual

a) **Elabora una gráfica** que represente la siguiente situación:

Durante los primeros 7 segundos, **la cantidad** ***P*** **de producto obtenido** ***en una reacción química es directamente proporcional*** **al tiempo transcurrido** ***t*****,** ***con constante de proporcionalidad igual a 2***.

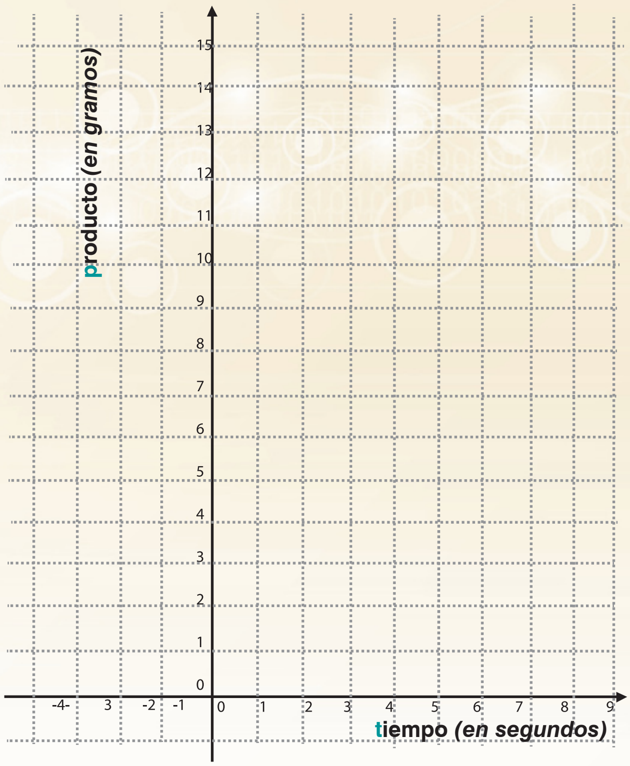
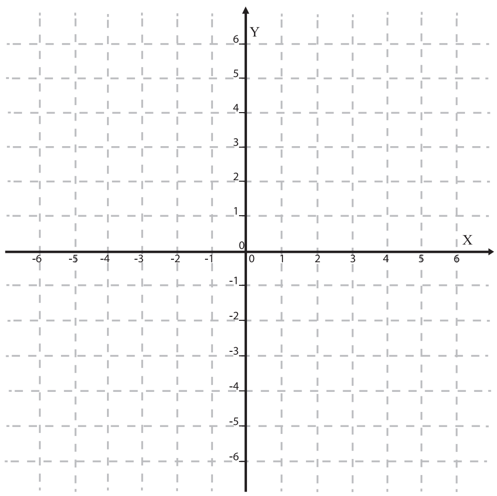


Figura 1.7

b) Describe con palabras todas las características que puedas respecto a lo que representa la expresión , $P = 2\pi r, r \geq 0$ y **elabora una gráfica** que represente la situación.

Gráfica:



c) Escribe todas las características que puedas para referirte al fenómeno que se representa en la siguiente figura y represéntalo mediante una ***expresión analítica***, señalando los posibles ***valores de la variable*** V.

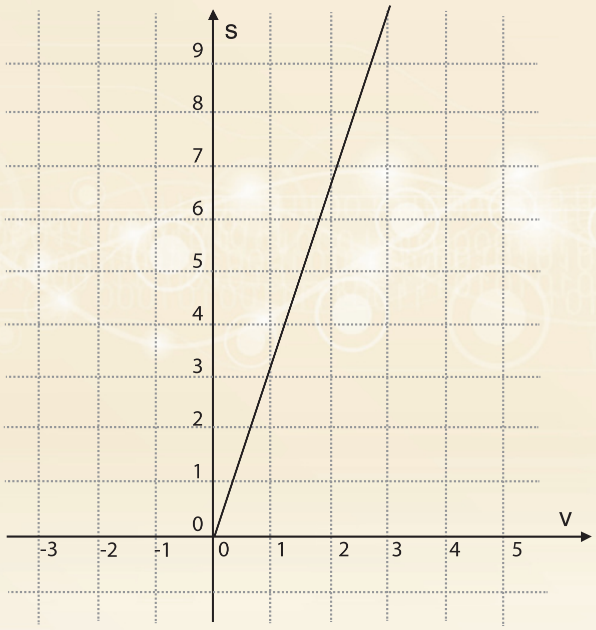


Figura 1.8

Características:

Los fenómenos anteriores, cuyas **gráficas** corresponden a rectas que pasan por el origen *(en estos tres casos **"parten del origen"**)*, se pueden representar de forma general haciendo referencia a las ***variables*** x e y por medio de la expresión $y = mx$, donde el **valor** de m ***es constante*** y representa la ***constante de proporcionalidad***, **la pendiente de la recta**, la razón de avance de y con respecto a x y también la ***rapidez de variación de*** y ***con respecto a*** x.

En el **Módulo de Matemáticas 1** se estableció que los fenómenos de v***ariación proporcional*** se pueden analizar por medio de una **función lineal** de la forma , $f(x)=mx$ donde m es una **constante** que puede ser ***positiva o negativa.***

En general en matemáticas ***las funciones*** constituyen el modelo por excelencia para representar la variación, pues permiten indicar el comportamiento de una variable con respecto al de otra de la cual dependen. Cuando se hace referencia a una ***función*** en general, sin hablar específicamente de una en particular, se utiliza la ***expresión*** $y = f(x)$ y se señalan cuáles son los posibles valores de la variable independiente x. En lugar de la expresión analítica puede usarse una **gráfica,** una **tabla numérica** o simplemente decir **"**y **es función de** x**".**

Observa las siguientes **gráficas** con detenimiento y contesta, para cada una de ellas, lo que se te solicita.

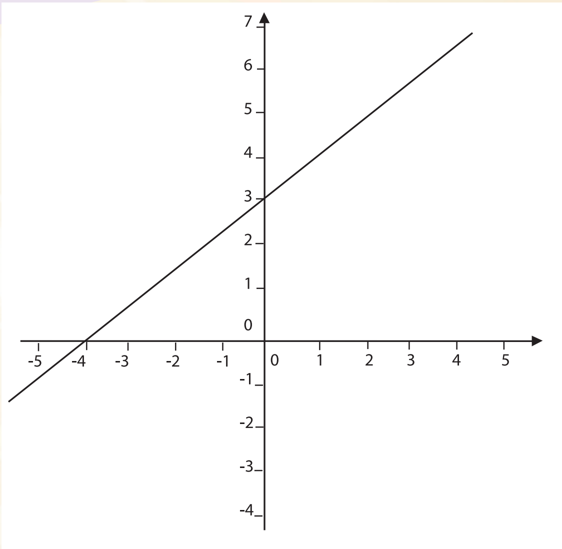


Figura 1.9

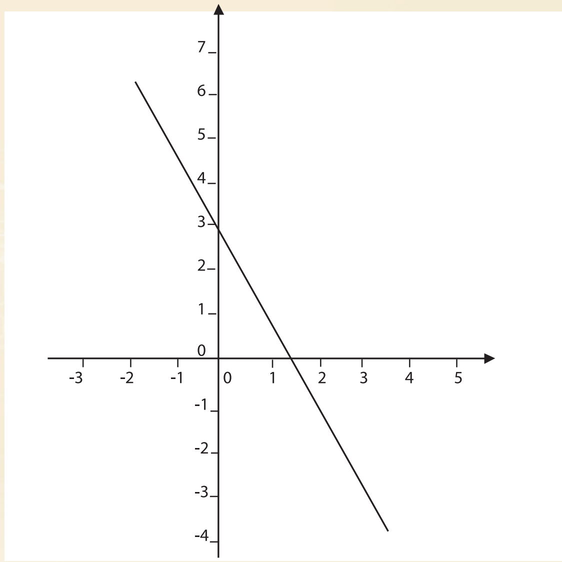


Figura 1.10

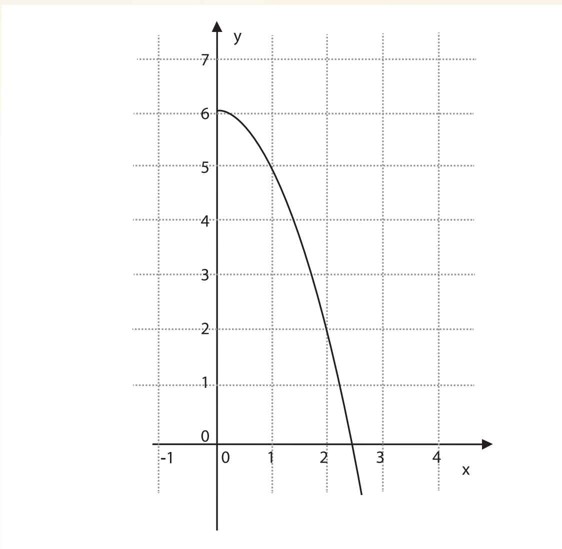


Figura 1.11

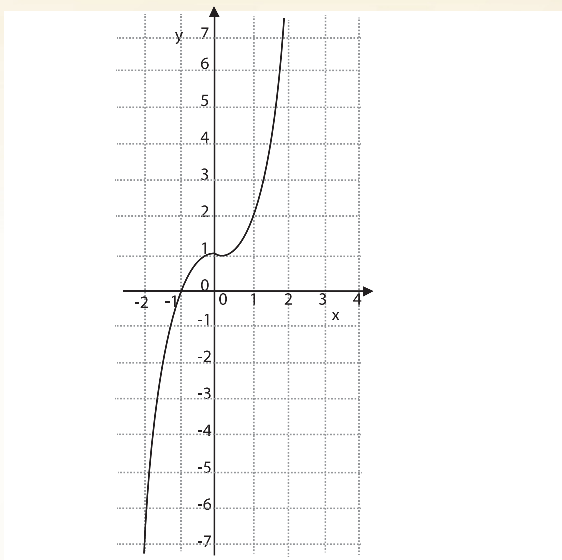


Figura 1.12

a) ¿Está representada una ***variación proporcional*** entre x e y?______________________________
____
____
____

b) Al incrementarse los ***valores de x*** ¿qué sucede con los ***valores correspondientes de*** y?_____
____
____
____
____

Este tipo de casos nos muestran que ***la variación creciente*** y ***la variación decreciente*** se presentan no sólo en ***la variación proporcional*** y puede estar presente en muchos otros fenómenos.

Siempre que una variable está en función de otra, lo cual se puede expresar en forma general con el uso de las variables x, y, diciendo que y está en ***función*** de x, lo cual se representa por medio de la expresión $y = f(x)$, en la cual se cumple que si $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$, se dice que ***la función es creciente.***

Esto significa que una ***función es creciente*** si al aumentar el valor de la ***variable independiente***, el valor de la ***variable dependiente*** también aumenta. En una **gráfica** esto puede verse por el hecho de que al visualizar la **gráfica** de izquierda a derecha, ésta va ***"subiendo".***

Por ejemplo: en el caso de **la función** $y = f(x) = x^3$, su **gráfica** es:

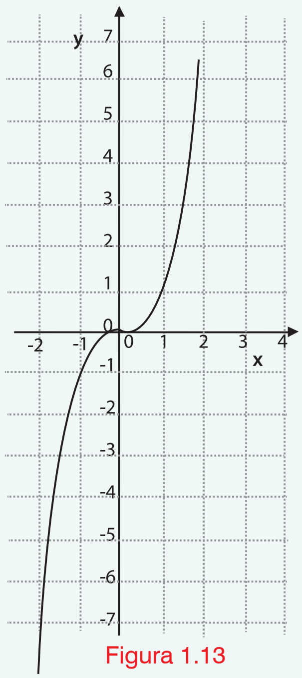


Figura 1.13

Esta característica se puede ver en una **tabla numérica** tomando valores cada vez mayores de la ***variable independiente*** y observando lo que sucede con los respectivos valores de la ***variable dependiente***. En el ejemplo de la función cúbica el comportamiento numérico se ilustra a continuación con una **tabla**.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x) = x^3$	-8	-1	0	1	8	27

Tabla 1.3

c) Ejemplifica con un caso particular ***una función decreciente***, escribiendo ***la relación funcional*** mediante ***una expresión algebraica, su gráfica y una tabla numérica.***

c) Ejemplifica con un caso particular ***una función constante***, escribiendo ***la relación funcional*** mediante ***una expresión algebraica, su gráfica y una tabla numérica.***

Secuencia Didáctica 3.-

Actividad de Inicio

La variación lineal

Actividad: 1
Actividad Individual

Recuperando ideas sobre la variación lineal

En las siguientes situaciones, expresa todo lo que puedas acerca de los ***fenómenos*** que se muestran:

a) La relación entre la temperatura ***en grados centígrados*** y la temperatura en ***grados Farenheit*** se puede representar algebraicamente de la siguiente manera:

$$°F = \frac{9}{5}°C + 32$$

b) Según los expertos en el área, las *altas concentraciones de sales* en el suelo están directamente relacionado con la disminución en el nivel de productividad de los cultivos. Más aún, los investigadores *Maas* y *Hoffman* , encontraron a partir de estudios realizados con datos reales, que por medio de la expresión *(que lleva su nombre)*, es posible mostrar la relación existente entre el nivel de salinidad del suelo y la producción de un cultivo.

Por ejemplo, para el caso de la vid, dicha expresión, consultada en Jiménez (2002), es:

$$P = 100 - 9.62\,(S - 1.5)$$

Donde P = ***Producción del cultivo*** en % (100% sería el máximo esperado).

S= ***Salinidad de suelo,*** medida en unidades conocidas como decisiemens.

c) En un experimento *se midió el comportamiento de un gas* manteniendo la presión constante. Se hizo un montaje similar al que se presenta en la Figura 1.14.

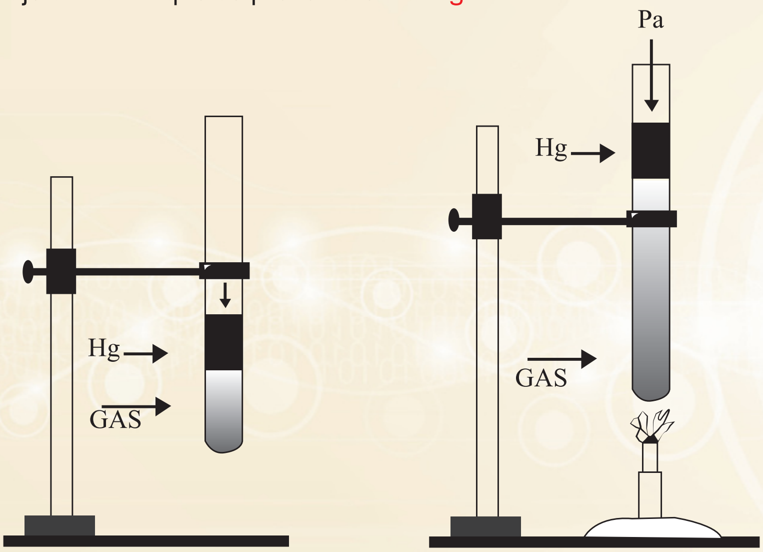


Figura 1.14

Los datos de la temperatura, medida en *grados Kelvin*, así como el correspondiente **volumen,** *medido en centímetros cúbicos,* se registraron en **la tabla** que sigue:

Temperatura *(grados Kelvin)*	-73	127	327	527
Volumen del gas *(en centímetros cúbicos)*	150	300	450	600

Tabla 1.4

d) En la Figura 1.13 se muestra la **gráfica** de la relación entre la medida de la **tibia** y la **estatura** de una persona. Esto de acuerdo con los datos obtenidos por algunos antropólogos.

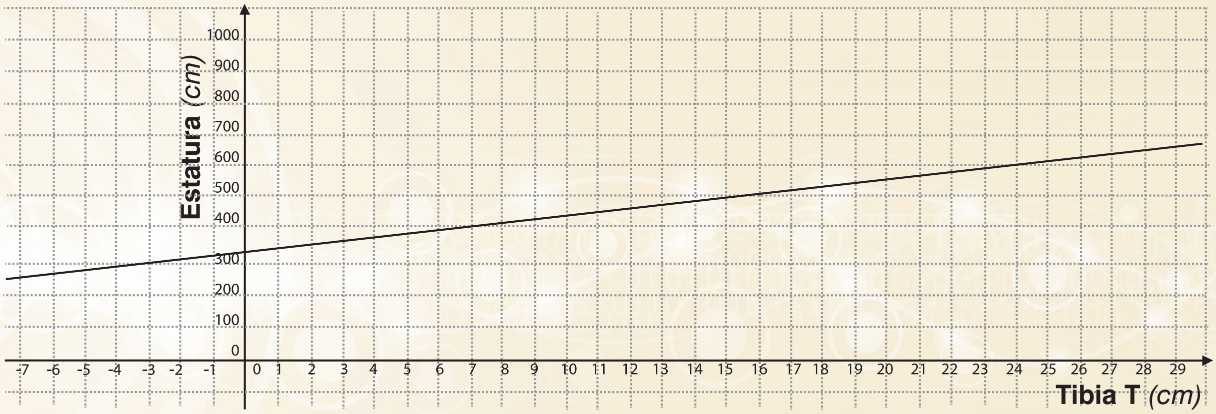


Figura 1.15

Desarrollo

Actividad de Equipo

Profundizando en el análisis de la variación lineal

Los casos analizados en la **Actividad de Inicio** son de un tipo diferente a los analizados en la secuencia anterior, pero se trata de **fenómenos** que tienen también algunos elementos esenciales que resultan análogos. Se realizarán algunas **actividades** con el propósito de clarificar de cuáles se trata.

Actividad: 1
Actividad Individual

En la siguiente **tabla** se han escrito algunos de los valores que corresponden a los obtenidos al hacer **la conversión de temperaturas** proporcionadas ***en grados Celsius a grados Farenheit,*** utilizando la expresión:

$$°F = \frac{9}{5}°C + 32$$

Temperatura (*°Celsius*) x	10	15	30	37	60	70	85
Temperatura (*°Farenheit*) y	50	59	86	98.6	140	158	185

Tabla 1.5

La gráfica que relaciona los valores correspondientes se muestran en la siguiente figura, en la cual se representan los ***grados Farenheit*** con la variable y y los ***grados Celsius*** con la variable x.

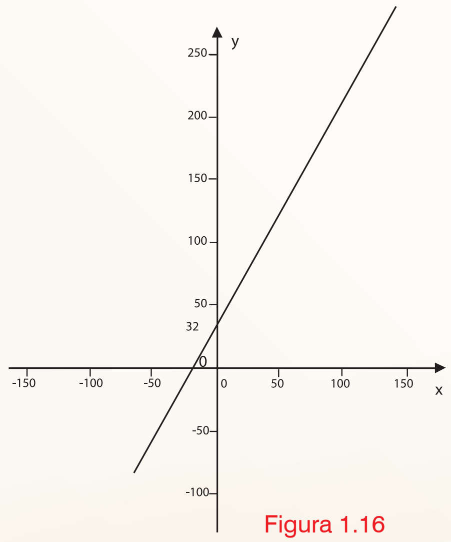


Figura 1.16

¿Qué diferencia existe entre esta **gráfica** y las mostradas u obtenidas en la **Secuencia Didáctica 2** de este BLOQUE?

Discute en equipo si existe una ***relación de proporcionalidad directa*** entre los ***valores*** de y y de x.

Ahora bien, en concordancia con lo discutido en **Matemáticas 3** respecto de la ***pendiente de una recta***, ésta se calcula mediante la expresión:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

en la cual $y_2 - y_1$ puede interpretarse como *"lo que cambió el valor de y"* cuando la variable x se modificó en la cantidad $x_2 - x_1$. Esto es, $y_2 - y_1$ es la variación de la y, lo cual representaremos por medio de la expresión Δy; $x_2 - x_1$ es la variación de la x, la cual representaremos por medio de la expresión . Con esta notación, la pendiente de una recta podemos escribirla ahora como $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Así, en la tabla 1.4 se puede ver, por ejemplo, que cuando la x cambia del valor $x_1 = 10$ al valor $x_2 = 15$, se tiene que $\Delta x = 5$, en tanto que y tuvo un cambio $\Delta y = y_2 - y_1 = 59 - 50 = 9$ y por lo tanto el valor de la pendiente es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9}{5}$.

Si en lugar de haber tomado estos valores de x y de y se hubieran tomado dos valores diferentes cualesquiera, ¿cómo sería el valor de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? ¿Por qué?

Comprueba tu respuesta tomando dos casos diferentes más.

Cuando se tiene una expresión de la forma $y = mx + b$, si $b = 0$, las variables x e y son directamente proporcionales, pero no lo serán en el caso de que $b \neq 0$. Sin embargo, independientemente del valor de b, siempre se puede decir que si $y = mx + b$, Δy es directamente proporcional a Δx, con constante de proporcionalidad igual a $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
De esta manera, la pendiente de una recta siempre puede interpretarse como:

a) La tangente del ángulo de inclinación de la recta,
b) La razón o rapidez de cambio de y con respecto a x
c) La constante de proporcionalidad entre las magnitudes variables Δy y Δx.

En el ejemplo de las temperaturas que se han analizado:

d) Describe la variación.

e) ¿Cómo es la rapidez de la variación?

Actividad: 2
Actividad Individual

En cada uno de los casos siguientes, especifica si existen ***magnitudes que sean directamente proporcionales*** y cuáles son. En caso de ser así, señala el tipo de **variación existente y la rapidez de variación** de las **variables involucradas.**

a) $P = 100 - 9.62\,(S - 1.5)$

Donde P = ***Producción del cultivo*** en % *(100% sería el máximo esperado)*, S= ***Salinidad de suelo,*** medida en unidades conocidas como decisiemens y corresponden a la información del inciso b de la **Actividad** de Inicio.

b)

Temperatura *(grados Kelvin)*	-73	127	327	527
Volumen del gas *(en centímetros cúbicos)*	150	300	450	600

Tabla 1.6

Estos datos corresponden al **inciso c)** de la **Actividad de Inicio**.

c) En la Figura 1.2 se muestra la **gráfica** de la relación entre la medida de **la tibia** y la **estatura** de una persona. Esto de acuerdo con los datos obtenidos por algunos antropólogos.

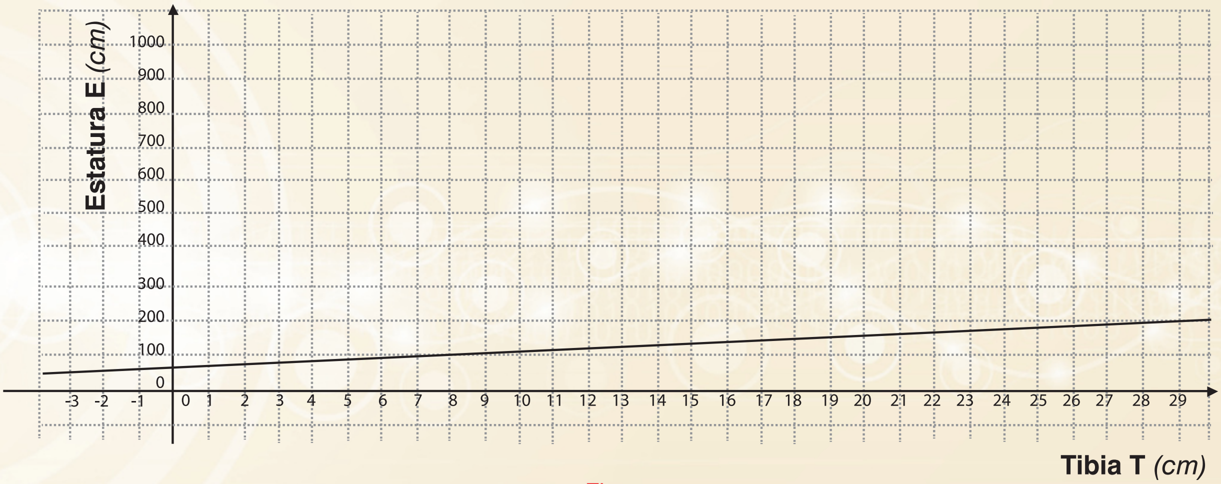


Figura 1.17

Actividad de Cierre

Actividad: 1
Actividad de Equipo

Puede afirmarse que el ***perímetro*** P de un **cuadrado** es ***directamente proporcional*** a la **longitud** l de su lado con una constante de proporcionalidad igual a 4.

a) Basándote en esa aseveración, escribe una **expresión analítica** que relacione a P con l. ¿Se corresponde con la expresión que conoces para determinar el perímetro de un **cuadrado**?

b) ¿Es posible tener un **cuadrado** en el que l=-5?

c) ¿Cuáles son los valores posibles para l en **esta expresión** y cuáles son los valores posibles para P?

d) En el caso de cada uno de **los cuatro incisos de la Actividad de Inicio** de esta secuencia, determina **los valores** posibles para **las variables independientes involucradas.**

e) Determina los **valores posibles de las variables dependientes** en cada uno de los casos anteriores.

En una relación funcional de la forma $y = f(x)$ *(sea una función lineal o no)*, es posible identificar en ella dos elementos inseparables: una regla de correspondencia que indica cómo se relacionan entre sí la variable independiente y la variable dependiente, así como el conjunto de valores posibles de la variable independiente.
Al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente se le denomina ***Dominio de la función f y se denota por Dom_f***.
Al conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente se le denomina ***Rango de la función y se denota por Ran_f***. El rango de una función se obtiene a partir de conocer el dominio de la función y la regla de correspondencia de que se trate.
Para que pueda hablarse de que efectivamente se tiene una función es necesario que la relación entre las variables cumpla con el hecho de que ***a cada valor de la variable independiente se le asocie uno y sólo un valor de la variable dependiente***. La variable dependiente, sin embargo, puede estar asociada a más de un valor de la variable independiente.

Es importante señalar que cuando se habla de regla de correspondencia no se hace necesariamente referencia a una expresión analítica. En **matemáticas** suelen utilizarse **cuatro formas para describir una regla de correspondencia:**

- El lenguaje natural
- Las gráficas
- Las expresiones analíticas o algebraicas
- Las tablas numéricas.

Que son igualmente válidas para el propósito.

Con este **lenguaje** propio de las **matemáticas**, para el ***perímetro*** de un **cuadrado**, éste se representa por medio de la función cuya ***regla de correspondencia*** es $P = 4l$, en donde $l > 0$, esto es, si se concibe al ***perímetro*** P como una función de l, en la cual $P = f(l) = 4l$, entonces $Dom_f = \{l | l > 0\}$.

Dado que este **Módulo** siempre tratará con funciones que relacionan conjuntos de números reales *(el dominio)* con otro conjunto de números reales *(el rango)*, es conveniente tener una forma de nombrar a dichos conjuntos.

Así por ejemplo, al hacer referencia a $Dom_f = \{l | l > 0\}$ en el caso del ***perímetro*** de un **cuadrado**, se observa que los valores de l sólo pueden los números positivos. Otra forma de expresar esta característica de los valores de l es escribir que $Dom_f = (0, +\infty)$ lo cual significa que l puede tomar valores que son mayores que 0 y que no existe límite máximo posible. El ***dominio*** entonces puede representarse en una recta numérica de la siguiente manera.

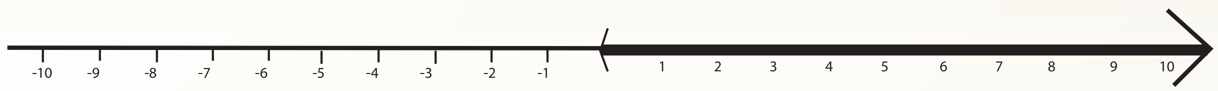


Figura 1.18

Cuando se quiere indicar que un determinado valor sí está incluido en un **conjunto numérico**, en vez de un *paréntesis* se emplea el *símbolo de corchete*. Así, el **conjunto** $[0, +\infty)$ es el conjunto de todos los ***valores que son mayores o iguales que 0***.

Escribe el ***dominio*** de cada una de las funciones de la **Actividad** de Inicio empleando esta notación.

Los conjuntos numéricos que aparecen con frecuencia para referirnos al ***dominio*** de una función cualquiera son, la mayoría de las veces, conjuntos que pueden representarse por medio de un **intervalo**, cuyos casos básicos posibles son los siguientes:

Intervalo abierto $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

Intervalo infinito abierto $(a,+\infty)=\{x|a<x\}=\{x|x>a\}$

Intervalo infinito abierto $(-\infty,a)=\{x|x<a\}=\{x|a>x\}$

Intervalo cerrado $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

Intervalo infinito cerrado $[a,+\infty)=\{x|a\leq x\}=\{x|x\geq a\}$

Intervalo infinito cerrado $(-\infty,a]=\{x|x\leq a\}=\{x|a\geq x\}$

Intervalo semi abierto por la izquierda $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

Intervalo semi abierto por la derecha $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

1). A partir de la descripción del **fenómeno** que se indica, identifica qué está **cambiando** en ese proceso y qué **magnitudes** intervienen en él.

a) *El estiramiento y compresión de un resorte.*
b) *La cocción de una papa.*
c) *Un eclipse de Luna.*
d) *El llenado de agua de una alberca.*
e) *El vaciado de agua de una alberca.*
f) *El lanzamiento de un cohete a la Luna.*
g) *La inmersión de un buzo en el océano.*
h) *Una vela a partir de que fue encendida.*

2). Propón alguna situación o fenómeno en donde consideres que la **matemática** puede ser de utilidad para medir **el cambio**. Explica tus propuestas.

3). Haz propuestas de situaciones cotidianas o de las que hayas estudiado durante tus cursos, en las cuales sea posible establecer alguna relación entre ***las variables*** que aparecen en dichas situaciones, de tal manera que entre ellas exista:

a. *Variación directamente proporcional.*
b. *Variación lineal (5 en cada caso).*

4). Para las siguientes ***variables*** establece otra (s) de las cuales dependa:

a) *Peso.*
b) *Sueldo de un individuo.*
c) *La distancia recorrida por una persona.*
d) *El número de habitantes de una ciudad.*
e) *El perímetro de un cuadrado.*
f) *El perímetro de la franja blanca de la bandera mexicana.*

5). En la página del **Banco de México**, cuya dirección electrónica es http://banxico.org.mx , aparece **información financiera** de interés. Por ejemplo, es posible encontrar el **tipo de cambio** de una gran cantidad de monedas extranjeras con respecto al peso. De esa información, se extrajo la siguiente:

Tabla de equivalencias de un peso mexicano con algunas monedas de países latinoamericanos	
Un Peso mexicano equivale a	0.64260 peso argentino
	44.8330 pesos chilenos
	0.17119 real brasileño
	0.21760 nuevo sol peruano

a) Para cada uno de los casos, construye la expresión algebraica que represente a la función que tenga como variable independiente al número de pesos mexicanos, y como variable dependiente a la cantidad que tendrás en la moneda extranjera correspondiente.

b) Haz el bosquejo de cada una de las gráficas en el mismo plano.

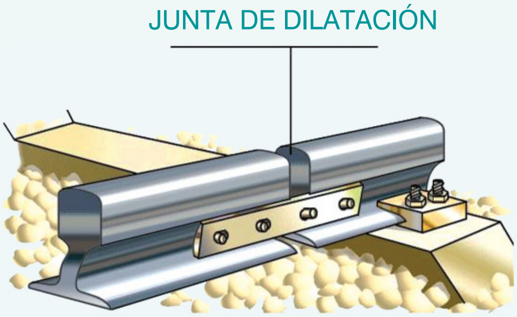
c) ¿Qué tipo de variación existe entre cada una de esas parejas de variables? ¿Cuál es su rapidez de crecimiento?

d) Si fueses empleado de una casa de cambio, ¿cuál de las representaciones de esas funciones crees que te sería más útil para desarrollar las labores propias de tu empleo?

6). ***La dilatación de los cuerpos*** es un ***fenómeno*** muy estudiado en física. Existen ***tres tipos de dilatación: lineal, superficial y volumétrica***. El siguiente fragmento ha sido tomado de tu **Módulo de Aprendizaje de Física 2**[1]:

Dilatación de los sólidos

Seguramente has notado que los rieles de una vía del ferrocarril están separados por una pequeña distancia o que, al pavimentar una calle, se deja un espacio entre un bloque de concreto y otro. Esto se debe a la necesidad de dar un margen a la dilatación del metal o concreto.



Experimentalmente se ha comprobado que al aumentar la ***temperatura de una barra***, aumenta su **longitud** y que dicho aumento (ΔL) es proporcional a su **longitud** inicial (Li) y al aumento de su ***temperatura*** (Δt)

La constante de proporcionalidad es llamada coeficiente de dilatación lineal. Cada material tiene un valor determinado. Se define al ***coeficiente de dilatación lineal*** como el alargamiento por unidad de **longitud** de un material, para una variación de ***temperatura*** de 1°C.

a) Expresa algebraicamente: ***"al aumentar la temperatura de una barra, aumenta su* longitud *y dicho aumento (ΔL) es proporcional a su longitud inicial (Li) y al aumento de su temperatura (Δt)".***

[1]Harita, A.B. Física 2. Módulo de Aprendizaje. Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora. México. 2011.

b) ¿Qué tipo de **variación** existe entre L y T?

c) En un experimento se tiene una barra de hierro de un metro de longitud que está a una ***temperatura*** de 15 °C. Se aumenta la ***temperatura*** hasta 150 °C, notándose que la ***longitud*** final de la barra es de 1.00162 mts. ¿Cuál es el ***valor de coeficiente de dilatación lineal*** del hierro?

d) Construye una función que modele la situación planteada en el inciso c). ¿Qué papel juega en este modelo el ***coeficiente de dilatación*** de hierro? ¿Quién es tu **variable dependiente** y cuál la **variable independiente**? **¿Esta función es creciente o es decreciente?**

e) Traza su **gráfica**.

7). **Al número de veces que se contrae el corazón en un minuto se le denomina frecuencia cardiaca.** Cuando una persona está por iniciar un programa de ejercitamiento físico, un dato necesario para programar el tipo de ejercicios que realizará, así como la intensidad con la cual los llevará a cabo es el de la **frecuencia cardiaca** máxima. Usualmente la **frecuencia cardiaca** se determina colocando las yemas de los dedos sobre la arteria carótida (*ubicada en el cuello)*, y contando los latidos del corazón.

Existen varias fórmulas para determinar la **frecuencia cardiaca** máxima, una de las más conocidas es la llamada ecuación de ***Fox y Haskell***, la cual, en su versión masculina, está representada en esta **tabla**.

Edad del hombre	Frecuencia cardiaca máxima
35	185
41	179
46	174

Encuentra la expresión algebraica de la función que permite conocer la **frecuencia cardiaca** máxima en dependencia de la edad. ¿Te parece un buen modelo de la situación planteada? ¿Qué tipo de función es la que se está planteando?

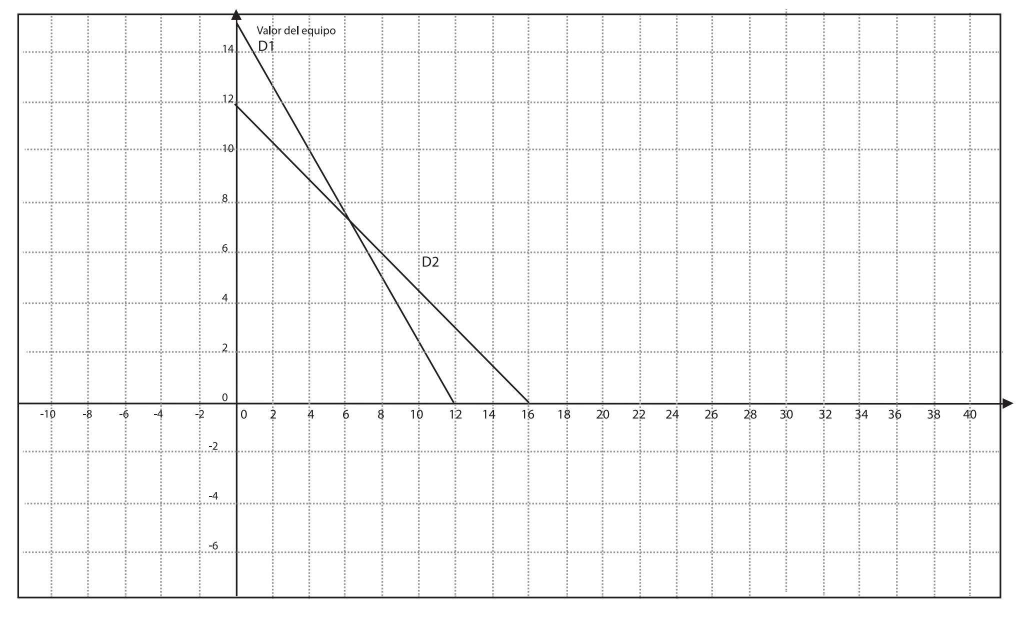
8). ***¿Es lineal la función que relaciona la temperatura en grados centígrados con la temperatura en grados Farenheit?*** Escribe la **expresión algebraica** de dicha función, y haz un bosquejo de su gráfica.

9). Es frecuente que en las empresas y compañías adquieran maquinarias, automóviles o cualquier tipo de equipo y lo declare como parte de sus activos *(conjunto de bienes y recursos que posee una empresa)*. Obviamente que el valor que se declara del equipo en el momento de la compra va disminuyendo conforme transcurre el tiempo.

La reducción gradual de ese precio se conoce con el nombre de depreciación. A menudo las empresas asignan un porcentaje anual para la **depreciación**, hasta llegar a un valor donde ya la maquinaria o equipo se considera de desecho pues ha terminado su vida útil.

Si *Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora* compra equipo de cómputo por $200,000.00 que su tiempo de vida útil será de diez años, y que tendrá un valor de desecho de cero pesos, encuentra la función que permita conocer el valor del equipo después de un cierto número de años. ¿Cuánto se está depreciando anualmente el equipo? Traza la gráfica de la función.

10). A partir de la información de las **gráficas siguientes**, ¿Cuál de los equipos mostrados se está depreciando con mayor rapidez? Argumenta tu respuesta.



El trabajo asignado en esta sección es de carácter individual, para ser realizado en casa y tiene el propósito fundamental de proporcionarte elementos de reflexión para que identifiques lo que has aprendido, lo que aún te ocasiona dificultades y lo que es necesario reforzar.

Para contrastar tu visión con las expectativas de aprendizaje, puedes consultar la ***introducción del bloque*** y ahí encontrarás lo que se espera aprendas. De esta manera te podrás dar cuenta de lo que has aprendido y tienes ya un buen dominio, lo que aún te cuesta dificultad y los errores o temas en los que piensas que aún debes estudiar con mayor detenimiento y pedir asesoría, ya sea a tu profesor o en ayuda con tus compañeros de clase.

En caso de considerarlo necesario, el profesor te podrá solicitar los resultados de autoevaluación.

Reflexiones relacionadas con el Bloque1:

1. *Si tuvieras que explicar a tus compañeros de equipo qué es una función lineal ¿Te sientes preparado para hacerlo adecuadamente? ¿Qué aspectos crees que te pueden ayudar para lograrlo?*

2. *¿Puedes comprender las ideas que te expresan tus compañeros para resolver un problema? Si no es así, ¿qué es lo que se dificulta respecto a eso?*

3. *Haz una lista de los aspectos estudiados en este bloque en los cuales tienes buen dominio.*

4. *Enlista los temas que aún te causan dificultad y prepara la forma en la cual puedes solicitar apoyo de tus compañeros y de tu profesor o profesora.*

5. *¿Puedes usar algún software matemático para ayudarte con las gráficas que aparecieron en este bloque? ¿Cuál? ¿Dónde aprendiste a usarlo?*

BLOQUE 2

Variación no lineal y variación inversamente proporcional

En el BLOQUE 1 estudiaste la ***variación directamente proporcional*** y las f***unciones lineales***, retomando algunas ideas de las características de las funciones lineales que ya habías analizado en el módulo de **Matemáticas 1**, pero profundizando en otros aspectos en los que antes no se había puesto atención.

En este BLOQUE igualmente se retoman ideas que estudiaste en el **Módulo de Matemáticas 1** respecto a las funciones cuadráticas y se hará una profundización que te permitirá conocer de mejor manera las formas básicas de la variación respecto a su crecimiento o decrecimiento y la rapidez con la cual suceden. Asimismo, deberás enfrentarte a situaciones en las que es necesario extender los conocimientos matemáticos más allá de las funciones cuadráticas y estudiar fenómenos que se representan con funciones en las que la variable independiente aparece con exponentes mayores a 2.

En los análisis que habrás de hacer de las situaciones presentadas en el BLOQUE, será fundamental que interpretes información proporcionada de forma **gráfica, algebraica o tabular** y que a su vez seas capaz de expresar tus ideas matemáticas empleando esas tres formas de representación de los objetos matemáticos analizados.

Las situaciones que se presentan en el BLOQUE se refieren a diferentes ámbitos de la vida cotidiana, escolar o científica y los contextos de los cuales provienen son diversos, incluyendo aspectos extra matemáticos de naturaleza social, de las ciencias físicas, de la economía y el comercio, pero también se estudian problemas surgidos en el seno de la matemática misma.

En todos ellos necesitarás **representar y cuantificar magnitudes variables**, caracterizar los tipos de variación a que dan lugar, estableciendo relaciones entre las variables involucradas en cada caso y argumentando las soluciones que des a cada situación, problema o requerimiento.

Se espera que, una vez más, estas actividades las desarrolles siguiendo las sugerencias e instrucciones de tu profesor, que reflexiones individualmente pero seas capaz de expresar tus ideas ante tus compañeros, escuches sus opiniones y desarrolles tus competencias para emplear los conocimientos construidos en diferentes contextos, incluyendo ámbitos diferentes a aquéllos en los cuales surgieron.

Tiempo asignado: 14 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

La Variación Cuadrática

Actividad: 1
Actividad Individual

Recuperando ideas sobre la función cuadrática

En la página WEB de ***la Organización Mundial de la Salud***, (OMS) http://www.who.int/topics/obesity/es / encontramos la siguiente información:

La obesidad y el sobrepeso se definen *como una acumulación anormal o excesiva de grasa que puede ser perjudicial para la salud.* ***Una forma simple de medir la obesidad*** *es el índice de* **masa corporal (IMC)**, *esto es el peso de una persona en kilogramos dividido por el cuadrado de la talla en metros.*

Una persona *con un* ***IMC*** *igual o superior a 30 es* ***considerada obesa*** *y con un* ***IMC*** *igual o superior a 25 es* ***considerada con sobrepeso***.

El sobrepeso y la obesidad *son factores de riesgo para numerosas enfermedades crónicas, entre las que se incluyen la diabetes, las enfermedades cardiovasculares y el cáncer. Alguna vez considerados problemas de países con ingresos altos,* ***la obesidad y el sobrepeso*** *están en aumento en los países con ingresos bajos y medios, especialmente en las áreas urbanas.*

A partir del texto anterior, al representar con las literales **IMC** al Índice de Masa Corporal, con ***P*** al peso medido en kilogramos y **E** a la estatura medida en metros, se establece que: $\mathbf{IMC} = \dfrac{\boldsymbol{P}}{\mathbf{E}^2}$

Expresión que puede transformarse en: $\boldsymbol{P} = (\mathbf{IMC})\mathbf{E}^2$,

a) ¿Qué información se puede conseguir con esa expresión? ______________________________

____

____

____

____

____

____

La Organización Mundial de la Salud (**OMS**), es todavía más precisa, pues presenta la ***clasificación*** siguiente:

Índice de Masa Corporal	Se clasifica a la persona como:
< 18.5	***Con peso insuficiente***
18.5 - 24.9	***Normal***
25-29.9	***Con sobrepeso***
≥ 30	***Obesa***

Tabla 2.1

b) En la **tabla siguiente**, aparecen algunos datos numéricos que se obtuvieron a partir de la expresión anterior.

Clasificación del estado nutricional	**Desnutrición**	**Normal**		**Sobrepeso**		**Obesidad**
IMC	Igual o menor que 18.5	18.5	24.9	25	29.9	Igual o Mayor de 30
Estatura		Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	
1.48	40.30	40.52	54.54	54.76	65.49	65.71
1.50	41.40	41.63	56.03	56.25	67.28	67.50
1.52	42.51	42.74	57.53	57.76	69.08	69.31
1.54	43.64	43.87	59.05	59.29	70.91	71.15
1.56	44.78	45.02	60.60	60.84	72.76	73.01
1.58	45.93	46.18	62.16	62.41	74.64	74.89
1.60	47.10	47.36	63.74	64	76.54	76.8
1.62	48.29	48.55	65.35	65.61	78.47	78.73
1.64	49.49	49.76	66.97	67.24	80.42	80.69
1.66	50.70	50.98	68.61	68.89	82.39	82.67
1.68	51.93	52.21	70.28	70.56	84.39	84.67
1.79	53.18	53.47	71.96	72.25	86.41	86.70
1.72	54.43	54.73	73.66	73.96	88.46	88.75
1.74	55.71	56.01	75.39	75.69	90.53	90.83
1.76	57.00	57.31	77.13	77.44	92.62	92.93
1.78	58.30	58.62	78.89	79.21	94.74	95.05
1.80	59.62	59.94	80.68	81	96.88	97.20
1.82	60.95	61.28	82.48	82.81	99.04	99.37
1.84	62.30	62.63	84.30	84.64	101.23	101.57
1.86	63.66	64.00	86.14	86.49	103.44	103.79
1.88	65.03	65.39	88.01	88.36	105.68	106.03
1.90	66.42	66.79	89.89	90.25	107.94	108.30

Tabla 2.2

Si se considera el caso en el que el **IMC** =25, la expresión $\boldsymbol{P}=(\mathbf{IMC})\mathbf{E}^2$, se transformará en $\boldsymbol{P}=25\ \mathbf{E}^2$

A partir de esta expresión, se construyó la tabla siguiente, extrayendo alguna información de la **Tabla 2.1.** Haciendo uso de tu calculadora o de una hoja de cálculo, completa los datos faltantes.

Algunos comportamientos interesantes de ***P*** y **E²**, cuando ***IMC***=25			
Estatura	**Peso**	**E^2**	$\frac{P}{E^2}$
1.48	54.76	2.1904	25
1.50	56.25	2.25	25
1.52	57.76	2.3104	25
1.54	59.29		
1.56	60.84		
1.58	62.41		
1.60	64		
1.62	65.61		
1.64	67.24		
1.66	68.89		
1.68	70.56		
1.79	72.25		
1.72	73.96		
1.74	75.69		
1.76	77.44		
1.78	79.21		
1.80	81	3.24	25
1.82	82.81		
1.84	84.64		
1.86	86.49		
1.88	88.36		
1.90	90.25	3.61	25

Tabla 2.3

c) ¿Qué se puede asegurar respecto de ***P*** y **E^2**?____

____

____

____

____

____

d) Construye **tablas semejantes**, tomando primero **IMC**=18.5 y después **IMC**=30

Algunos comportamientos interesantes de ***P*** y **E²**, cuando **IMC**=18.5			
Estatura	**Peso**	**E²**	$\frac{P}{E^2}$
1.48	40.52	2.1904	18.5
1.50	41.44	2.25	18.5
1.52	42.74	2.3104	18.5
1.54	43.64		
1.56	44.78		
1.58	45.93		
1.60	47.10		
1.62	48.29		
1.64	49.49		
1.66	50.70		
1.68	51.93		
1.79	53.18		
1.72	54.43		
1.74	55.71		
1.76	57.00		
1.78	58.30		
1.80	59.62		
1.82	60.95		
1.84	62.30		
1.86	63.66		
1.88	65.03		
1.90	66.42		

Tabla 2.4

Algunos comportamientos interesantes de ***P*** y **E²**, cuando **IMC**=30			
Estatura	**Peso**	**E²**	$\frac{P}{E^2}$
1.48	65.71		
1.50	67.50		
1.52	69.31		
1.54	71.15		
1.56	73.01		
1.58	74.89		
1.60	76.8		
1.62	78.73		
1.64	80.69		
1.66	82.67		
1.68	84.67		
1.79	86.70		
1.72	88.75		
1.74	90.83		
1.76	92.93		
1.78	95.05		
1.80	97.20		
1.82	99.37		
1.84	101.57		
1.86	103.79		
1.88	106.03		
1.90	108.30		

Tabla 2.5

d) ¿Qué pasa con la relación $\frac{P}{E^2}$. ¿Qué se puede decir de ***P*** y **E²** ? ______________________________

____

____

____

____

____

____

e) ¿Sucederá siempre esto? Explica tu respuesta. ______________________________

____

____

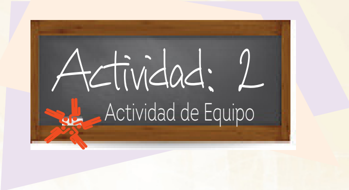
____

____

____

____

Desarrollo



Cuando analizamos **fenómenos** o situaciones en los cuales existía ***variación lineal,*** se observó que al tomar el ***cociente*** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, se obtenía una ***constante***, esto es las variaciones Δx y Δy son, en tales casos, ***directamente proporcionales***. ***El cociente*** $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ***fue interpretado de diferentes maneras:*** como ***la pendiente de la recta*** resultante, como la ***constante de proporcionalidad***, como ***la razón de avance*** de y con respecto a x y como ***la rapidez*** de cambio de la variable y con respecto a x.

Sin embargo, en **fenómenos** como el analizado anteriormente, en el que las ***variables peso y estatura*** se relacionan mediante una expresión de la forma $P=(IMC)E^2$, ***la variable P es directamente proporcional*** a E^2, pero las variables ***P*** y **E** no son ***directamente proporcionales entre sí.***

Para estudiar el comportamiento de este tipo de funciones y el sentido que tiene el ***cociente*** $\frac{\Delta P}{\Delta E}$, se analizarán con detalle algunos aspectos de los casos vistos en la actividad de Inicio.

Tómense por ejemplo los datos de la **Tabla 2.3**, en donde $IMC=25$.

a) ¿Cómo es la expresión analítica que relaciona a ***P*** con **E** en este caso particular?

____

____

____

b) En los **ejes coordenados** siguientes haz una **gráfica** de ***P*** contra **E**, tomando en cuenta los datos señalados en la **Tabla 2.3** pero considerando la expresión analítica para hacer cálculos a partir de considerar valores posibles de **E** partiendo desde una estatura igual a 0.

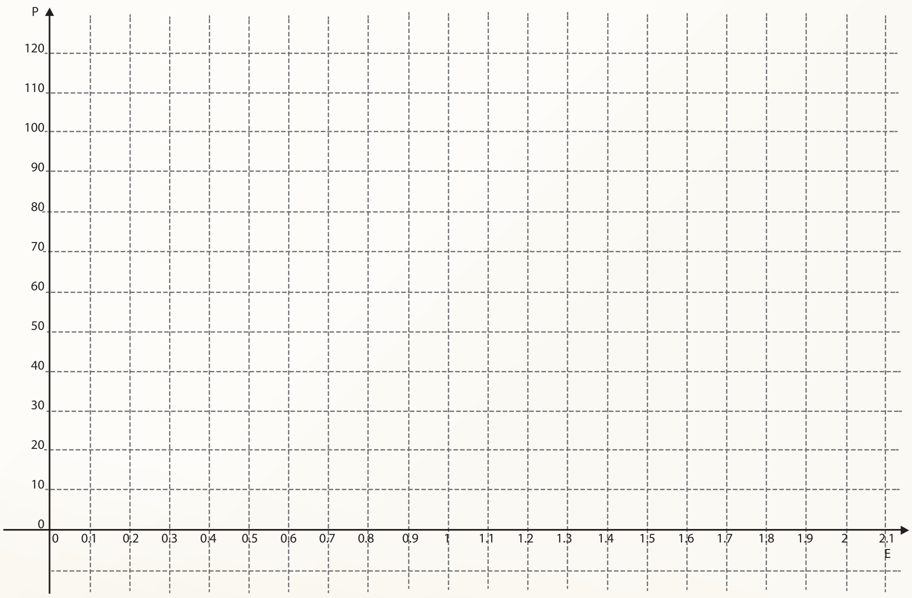


Figura 2.1

c) ¿Qué sucede con el peso conforme se toman valores mayores de la Estatura?

d) ¿En este caso tiene sentido hablar de pendiente de la recta? ¿Tiene sentido hablar de la constante de proporcionalidad?

e) ¿Es posible analizar qué tan rápido cambia el Peso conforme varían los valores de la Estatura? ¿Qué representa en este caso el cociente $\frac{\Delta P}{\Delta E}$. Argumenta tu respuesta.

f) Los cambios considerados en los valores de la estatura son uniformes, de 0.02, pero no así en los valores del peso.

Peso y **Estatura** al cuadrado		
Estatura (E)	**Peso *(P)***	**E^2**
1.48	1.48	2.1904
1.50	1.50	2.25
1.52	1.52	2.3104
1.54	1.54	2.3716
1.56	1.56	2.4336
1.58	1.58	2.4964
1.60	1.60	2.56
1.62	1.62	2.6244
1.64	1.64	2.6896

Tabla 2.6

La siguiente **tabla** contiene algunos valores de dichos cambios y otras casillas están en blanco con el fin de que tú completes la tabla con los datos faltantes.

Variación de la Estatura	Variación del Peso	Rapidez de Cambio
$\Delta_1 E=1.50\text{-}1.48=0.02$	$\Delta_1 P=56.25\text{-}54.76=1.49$	$\frac{\Delta_1 P}{\Delta_1 E}=\frac{1.49}{.2}=7.45$
$\Delta_2 E=1.52\text{-}1.50=0.02$	$\Delta_2 P=57.76\text{-}56.25=1.51$	$\frac{\Delta_2 P}{\Delta_2 E}=\frac{1.51}{.2}=7.55$
$\Delta_3 E=1.54\text{-}1.52=0.02$	$\Delta_3 P=59.29\text{-}57.76=1.53$	$\frac{\Delta_3 P}{\Delta_3 E}=\frac{1.53}{.2}=7.65$
$\Delta_4 E=1.56\text{-}1.54=0.02$	$\Delta_4 P=$	$\frac{\Delta_4 P}{\Delta_4 E}=$
$\Delta_5 E=1.58\text{-}1.56=0.02$	$\Delta_5 P=$	$\frac{\Delta_5 P}{\Delta_5 E}=$
$\Delta_6 E=1.60\text{-}1.58=0.02$	$\Delta_6 P=$	$\frac{\Delta_6 P}{\Delta_6 E}=$
$\Delta_7 E=1.62\text{-}1.60=0.02$	$\Delta_7 P=$	$\frac{\Delta_7 P}{\Delta_7 E}=$
$\Delta_8 E=1.64\text{-}1.62=0.02$	$\Delta_8 P=$	$\frac{\Delta_8 P}{\Delta_8 E}=$

Tabla 2.7

g) ¿La rapidez de cambio de ***P*** con respecto a **E** es constante cómo en el caso de la ***variación lineal***? De no ser así, ¿qué comportamiento tiene?

____

____

____

____

____

____

h) Describe lo que sucede con **el peso** de las personas a medida que **la estatura** se incrementa en tanto se deja fijo un valor del **IMC**.

____

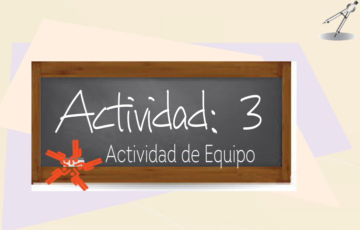
____

____

____

____

____



En el **Bloque 4** del **Módulo de Física 1** se establece que ***"Energía es la capacidad para realizar trabajo"*** y se trata de la **energía mecánica**, la cual se divide en ***energía potencial y energía cinética.***

Se señala ahí que la ***energía cinética*** es la energía que posee un cuerpo con base en su ***movimiento*** y se establece que obedece a la ley: $E_C = \frac{1}{2} mv^2$, donde E_C representa la ***energía cinética***, m la ***masa del cuerpo*** que se está considerando y v la ***velocidad*** de dicho cuerpo.

El papel de la velocidad en la generación de energía cinética es tan importante que por ello las consecuencias del impacto de un objeto que se mueve a gran ***velocidad*** pueden ser muy grandes, como es el caso de un automóvil al chocar con otro objeto o el de un objeto estelar al chocar con otro. En el caso de la tierra, por ejemplo, el impacto a gran ***velocidad*** de un objeto estelar, por pequeño que sea, con el planeta, puede tener consecuencias sumamente peligrosas para la vida misma.

a) ¿Qué puedes decir de las variables E_C y v ? **¿son proporcionales?**

____

____

____

____

b) ¿Qué magnitudes sí son **proporcionales**?

____

____

____

____

c) Completa los datos faltantes en la siguiente **tabla**, correspondientes a la ***energía cinética*** de un cuerpo cuya ***masa*** es de ***100g = 0.1 kg***. Ten cuidado en poner los datos correctamente para respetar las unidades indicadas.

Velocidad (m/seg)	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
Energía cinética (J)	.8	0.45	0.2		0		0.2		

Tabla 2.8

d) Haz una **gráfica** de E_c contra v en los siguientes ***ejes coordenados***.

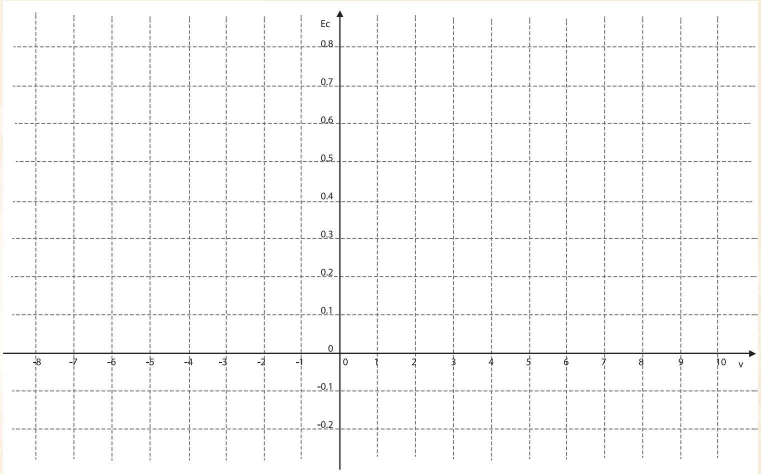


Figura 2.2

e) ¿Cuáles son los posibles valores de la variable independiente v y cuáles los de la ***energía cinética*** E_c?

____

____

f) Determina los intervalos en los cuales la ***Energía Cinética es decreciente*** y en los que es ***creciente***.

____

____

g) Los cambios de velocidad que se están considerando en la **Tabla 2.8**, son de 1 m/s y con base en ellos completa la siguiente **tabla**, poniendo los correspondientes valores de los cambios en la ***energía cinética*** y del cociente de la variación de la ***energía cinética*** entre la velocidad del cuerpo, con el propósito de determinar la rapidez de cambio.

Variación de la velocidad	Variación de la Energía cinética	Rapidez de Cambio
$\Delta_1 v = 1$	$\Delta_1 E_c = -.35$	$\frac{\Delta_1 E_c}{\Delta_1 v} = -.35$
$\Delta_2 v =$	$\Delta_2 E_c = -.25$	$\frac{\Delta_2 E_c}{\Delta_2 v} = -.25$
$\Delta_3 v =$	$\Delta_3 E_c =$	$\frac{\Delta_3 E_c}{\Delta_3 v}$
$\Delta_4 v =$	$\Delta_4 E_c =$	$\frac{\Delta_4 E_c}{\Delta_4 v}$
$\Delta_5 v =$	$\Delta_5 E_c =$	$\frac{\Delta_5 E_c}{\Delta_5 v}$
$\Delta_6 v =$	$\Delta_6 E_c =$	$\frac{\Delta_6 E_c}{\Delta_6 v}$
$\Delta_7 v =$	$\Delta_7 E_c =$	$\frac{\Delta_7 E_c}{\Delta_7 v}$
$\Delta_8 v =$	$\Delta_8 E_c =$	$\frac{\Delta_8 E_c}{\Delta_8 v}$

Tabla 2.9

h) Analiza los datos obtenidos para describir qué tan rápidas son las **variaciones** de E_c con respecto a v. Toma en cuenta que en los valores para los cuales E_c están disminuyendo (E_c **es decreciente**), los valores del cociente considerado **son negativos** y cuando E_c está aumentando (E_c **es creciente**), **son positivos**.

____

____

____

Actividad: 4
Actividad de Equipo

Don José Luis Bravo es un comerciante de mayoreo del Mercado de Abastos Francisco I. Madero de la Ciudad de Hermosillo y entre muchos otros productos vende una variedad de cebolla cuyo precio por caja *(o jaba como le dicen en el mercado)* de 18 kg. es de **$70.00**. **Don José Luis** vende ***380 cajas*** a la semana a ese precio y le encargó a su **hijo Ramiro**, que estudia la carrera de economía, que le hiciera una estimación de lo que sucedería si vendiera la caja de cebollas a un precio mayor.

Basándose en estudios de mercado, **Ramiro** le dejó a su padre la información de lo que sucedería si aumentara el precio de la caja de cebollas **en tres maneras diferentes**, que se **ilustran a continuación**.

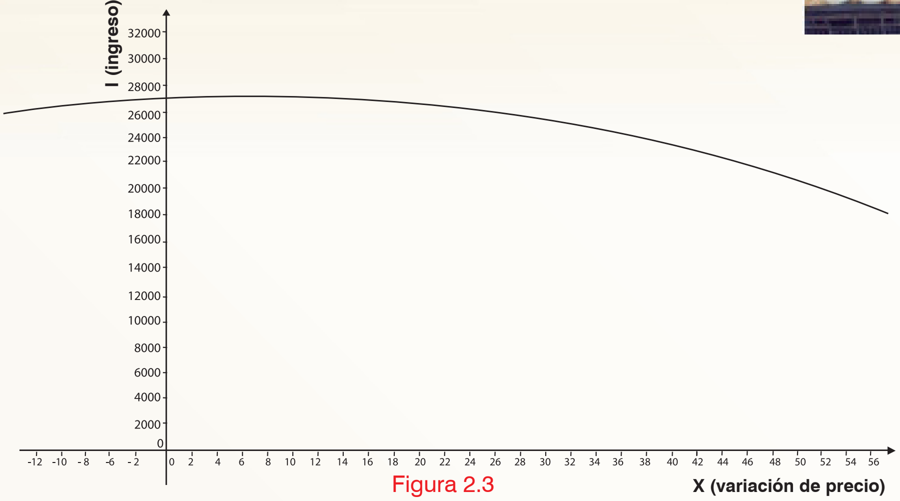


Figura 2.3

También dejó la siguiente tabla, con datos faltantes.

Precio *p* (pesos) por caja	70.00	71.00	75.00	80.00	85.00	90.00	95.00	100.00
Cajas vendidas	380	376	360	340	320	300	280	260
Ingresos (pesos)	26,600.00	26,696.00						26,000.00

Tabla 2.10

Y, por último, escribió lo siguiente: *"En todos los cálculos y procedimientos que he hecho, representé con la letra x a la variación del precio respecto a los $70.00 que cobras por cada caja de cebollas, pudiéndose hacer el cálculo con cualquier precio por medio de la* ***expresión algebraica*** $I(x)=26{,}600+100x-4x^2$. *Espero que la información te sea de utilidad. Si no comprendes algo de lo que aquí te digo, llámame por favor".*

Don José Luis empezó a analizar la información que le dejó su hijo **Ramiro** para entender lo que sucedía y primero se concentró en la **gráfica**. **Ayuda a Don José Luis** contestando las interrogantes que se fue planteando para entender la situación.

a) ¿Cuáles son los ***valores*** posibles de la ***variable independiente*** x? ¿Y del ingreso I?

b) ¿Qué significan los ***valores negativos*** de x ***y qué los positivos***?

c) **Don José Luis** observó que en algunas partes la ***gráfica*** ***"subía"*** y en otras ***"descendía"***. ¿Qué significa eso para su problema de asignar precio a las cajas de cebolla?

d) ¿Es posible determinar, con la ***gráfica***, el precio con el cual los ingresos son mayores?

Para entender mejor lo que ocurría con los ingresos, **Don José Luis** se puso a analizar la **tabla**, pero lo primero que notó es que faltaban algunos datos. Para completarla, usó la

expresión algebraica $I(x)=26,600+100x-4x^2$., que **según su hijo** servía para obtener el valor del ingreso al conocer el valor de la variación x del precio. Así como él, completa la **tabla**.

a) Considerando los valores en los cuales el ingreso va aumentando *(la **gráfica** sube)*, ¿qué sucede conforme los datos se aproximan al ingreso máximo? Esto es, ¿los cambios en el ingreso son constantes o tienen otro comportamiento?

b) Ahora observa los valores del ingreso conforme los valores del precio se alejan de aquél en el que el ingreso es el máximo, ¿qué sucede con los valores correspondientes?Determina los intervalos en los que el Ingreso está aumentando y en los que está disminuyendo.

c) Es común que en los libros, las revistas, los periódicos y otras publicaciones, se proporcione información por medio de ***gráficas***, de ***tablas numéricas*** y de ***expresiones algebraicas***. Escribe a continuación cuáles son las ventajas y desventajas de usar unas u otras. Para ello reflexiona sobre los análisis que pudiste hacer de esta situación con cada una de ellas.

d) ¿Habrá quedado satisfecho **don José Luis** con la ayuda que le prestó su **hijo Ramiro**?

Actividad de Cierre

Actividad: 5
Actividad Grupal

En las actividades anteriores, tanto las de Inicio como de Desarrollo se se encuentran **fenómenos** o situaciones en las cuales las magnitudes variables involucradas no son ***directamente proporcionales*** ni lo son sus incrementos o cambios, pero en todas ellas una de las variables es ***directamente proporcional*** al **cuadrado** de la otra.

Para referirse a las expresiones a las que dan lugar esos **fenómenos**, sin hacer mención específica del contexto al cual se hace referencia, en **matemáticas** se suele usar como es tradicional, a las variables x e y.

Así, se dice, para casos como los anteriores, que y es ***directamente proporcional*** al **cuadrado** de x. Si se denota con la letra a la ***constante de proporcionalidad***, tenemos entonces que $\frac{y}{x^2}=a$, o, lo que es equivalente, $y = ax^2$.

a) Si se tiene una **función** formada por la regla de correspondencia $y = ax^2$ y $Dom_f=R$ *(R representa al conjunto de todos los números reales)*, determina los ***intervalos de crecimiento*** y de ***decrecimiento*** de la **función** cuando:

   i. a>0
   ii. a<0

b) Si se centra la atención en el caso de la **función** $y = ax^2$ y $Dom_f=R$ cuando a>0, ¿cómo es su **gráfica**? Si deseas especifica un valor para el parámetro a y toma su **gráfica** como base para responder la pregunta formulada.

c) ¿Hacia dónde *"abre"* la **gráfica**, hacia arriba o hacia abajo?

Cuando una **gráfica** "*abre*" ***hacia arriba*** se dice que es ***cóncava hacia arriba***, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

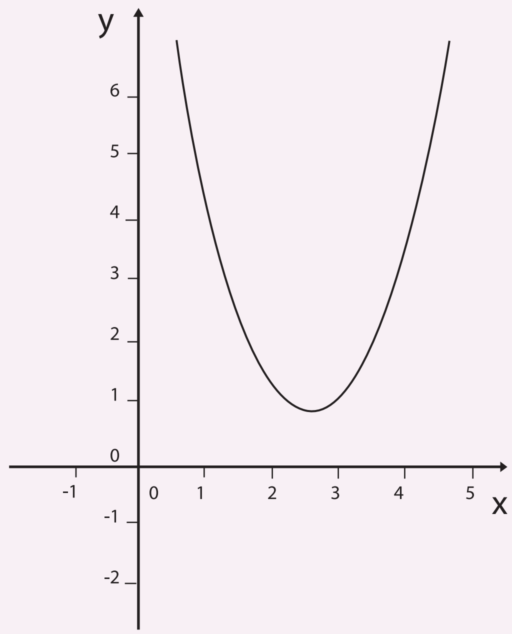


Figura 2.4

Similarmente cuando una **gráfica** *"abre"* ***hacia abajo*** se dice que es ***cóncava hacia abajo***, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

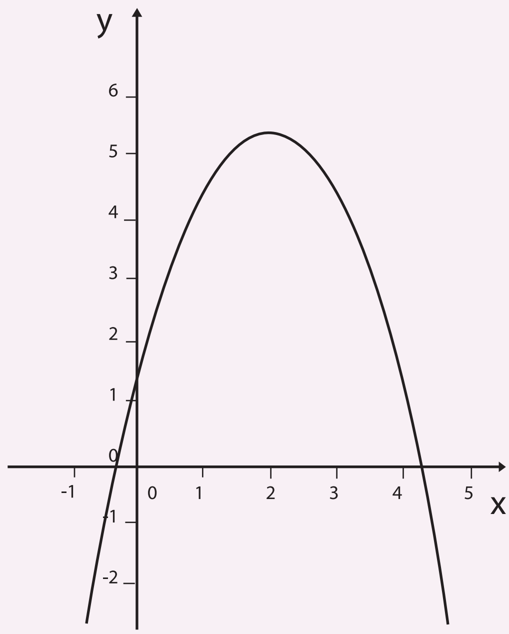


Figura 2.5

d) En las **funciones** que se han trabajado en esta ***secuencia***, todas con la característica de que y es ***directamente proporcional*** al **cuadrado** de x, las **gráficas** de dichas **funciones** han tenido ***concavidades***, unas ***hacia arriba*** y otras ***hacia abaj***o. Identifica cada una de ellas y relaciona ese hecho con las características de los **fenómenos** o situaciones analizados.

Cuando se tiene una ***función creciente***, cuya **gráfica** es ***"cóncava hacia arriba"*** como se ilustra en la siguiente figura, es posible observar que la rapidez con la cual crece es cada vez mayor.

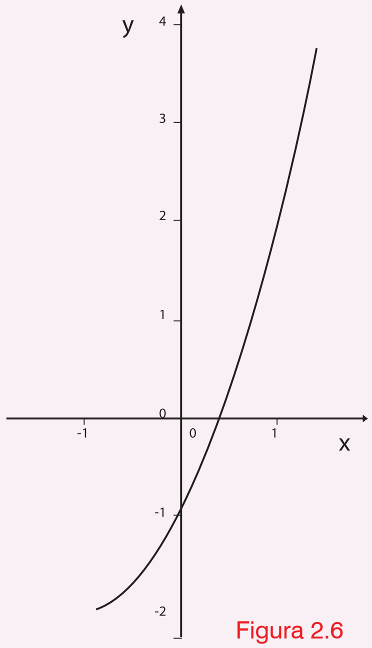


Figura 2.6

Cuando se tiene una ***función que es decreciente***, cuya **gráfica** es ***"cóncava hacia arriba"*** como se ilustra en la **gráfica** siguiente, se observa ahora que la rapidez con la cual disminuyen los valores de ***función*** es cada vez menor, esto es, la rapidez de ***decrecimiento*** disminuye cada vez más.

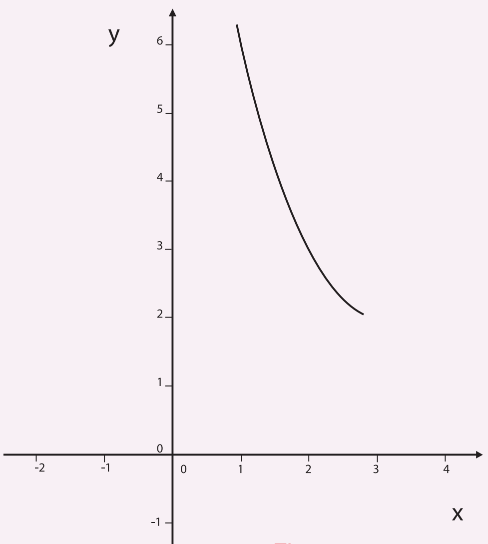


Figura 2.7

Cuando se tiene una ***función creciente***, cuya **gráfica** es ***"cóncava hacia abajo"*** como se ilustra en la siguiente figura, es posible observar que la rapidez con la cual crece es cada vez menor.

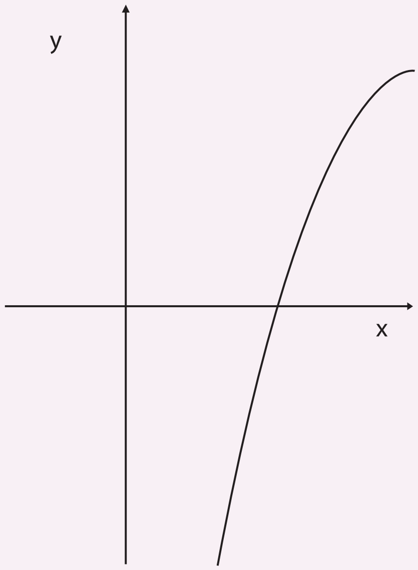


Figura 2.8

Cuando se tiene una ***función que es decreciente***, cuya **gráfica** es ***"cóncava hacia abajo"*** como se ilustra en la **gráfica** siguiente, se observa ahora que la rapidez con la cual disminuyen los valores de ***función*** es cada vez mayor, esto es, la rapidez de ***decrecimiento*** aumenta cada vez más.

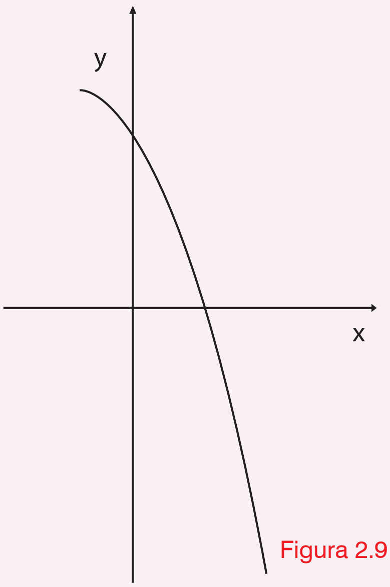


Figura 2.9

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

La Variación Cúbica

Actividad: 1
Actividad Individual

Desde la **matemática** de la escuela primaria se aprende que para calcular el ***volumen de una esfera*** es posible utilizar la relación siguiente:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

a) Con lo que se ha estudiado hasta el momento de las ***funciones***, escribe cómo se puede expresar funcionalmente la relación anterior. ¿A quién definirías como la ***variable independiente***? ¿A quién como ***variable dependiente***? No olvides escribir también Dom_V.

b) En el **Bloque 1** se estudió la rapidez de variación de las ***funciones lineales*** y en la secuencia anterior se estudiaron las ***funciones cuadráticas*** y se estableció bajo qué condiciones es posible afirmar que ***una función es creciente o decreciente***. En aquellos casos, se emplearon **tablas** para identificar comportamientos destacados. **Llena las tablas siguientes** y fíjate en qué regularidad o regularidades puede *(n)* ser usada *(s)* para caracterizar los comportamientos de r y V.

r(medido en centímetros)	V *(medido en centímetros cúbicos)*	r^3	$\frac{V}{r^3}$
1	$\frac{4}{3}\pi(1)^3$		
2	$\frac{4}{3}\pi(2)^3$		
3	$\frac{4}{3}\pi(3)^3$		
4	$\frac{4}{3}\pi(4)^3$		
5	$\frac{4}{3}\pi(5)^3$		
5	$\frac{4}{3}\pi(6)^3$		
7	$\frac{4}{3}\pi(7)^3$		

Tabla 2.11

c) ¿Qué relación se cumple entre V y r^3? ____

____

d) Continuando con el análisis, se estudiará el caso de ***la variación*** y ***la rapidez*** de cambio de la ***función Volumen***. Completa la **tabla** y enuncia algunas afirmaciones a partir de las regularidades encontradas.

Variación del radio	Variación del volumen	Rapidez de Cambio
$\Delta_1 r = 2 - 1$	$\Delta_1 V = \frac{4}{3}(8\pi) - \frac{4}{3}(\pi)$	$\frac{\Delta_1 v}{\Delta_1 r} =$
$\Delta_2 r = 3 - 2 = 1$	$\Delta_2 V =$	$\frac{\Delta_2 v}{\Delta_2 r} =$
$\Delta_3 r = 4 - 3 = 1$	$\Delta_3 V =$	$\frac{\Delta_3 v}{\Delta_3 r} =$
$\Delta_4 r = 5 - 4 = 1$	$\Delta_4 V =$	$\frac{\Delta_4 v}{\Delta_4 r} =$
$\Delta_5 r = 6 - 5 = 1$	$\Delta_5 V =$	$\frac{\Delta_5 v}{\Delta_5 r} =$
$\Delta_6 r = 7 - 6 = 1$	$\Delta_6 V =$	$\frac{\Delta_6 v}{\Delta_6 r} =$

Tabla 2.12

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad de Equipo

En la Actividad 3 de la ***secuencia*** anterior del presente BLOQUE estudiaste el comportamiento de la función $Ec = \frac{1}{2} mv^2$, que especifica la forma de calcular la ***Energía cinética*** de un cuerpo en función de su velocidad.

La aplicación de dicha ***función*** en problemas de física es muy extensa, pues toda vez que la energía es la capacidad de una fuerza para producir trabajo, ***medir la energía*** es un asunto de primera importancia en muchos ***fenómenos físicos y tecnológicos***. Pero para que dichas aplicaciones sean realmente efectivas, es necesario hacer análisis **matemáticos** como el que se hará en la siguiente situación.

Esta situación se refiere al cálculo de la intensidad o potencia de los vientos, que tiene algunos efectos que en ocasiones son benéficos pero en otras son perjudiciales.

Señala dos ejemplos en el cual una alta intensidad del viento es benéfica y otro en la cual es perjudicial.____

____

____

Figura 2.10

La manera de medir la ***potencia o intensidad del viento*** consiste precisamente en calcular su ***Energía cinética***, pero para eso se requiere conocer su **masa** y su **velocidad**. ¿Cómo es posible conocer estos datos?

En el caso de la **velocidad**, ésta se calcula empleando un aparato que se conoce con el nombre de anemómetro y que basa su funcionamiento en contar las revoluciones por minuto que el viento le produce a unas aspas o palas de un rotor. Quizás hayas visto un anemómetro en el laboratorio de física o en otro lugar.

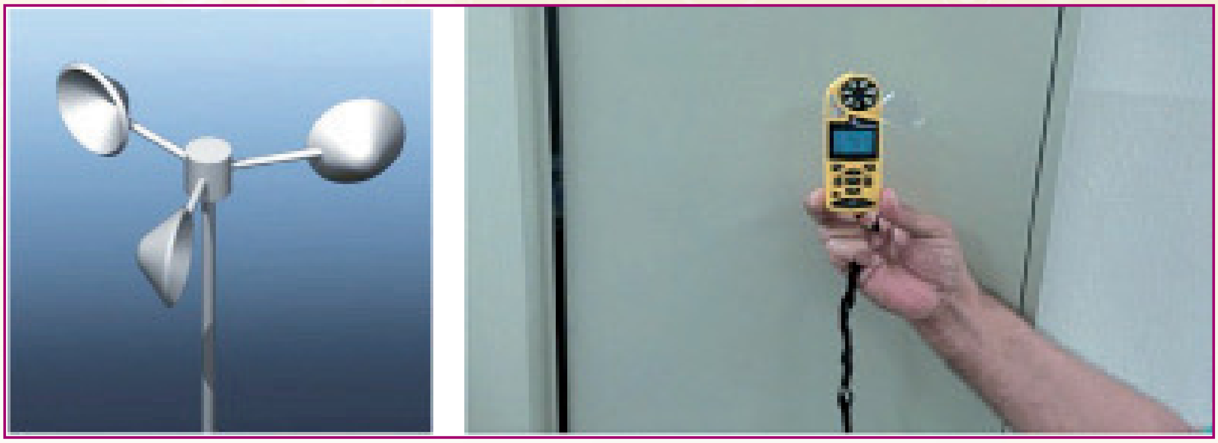


Figura 2.11 (Un anemómetro tradicional y otro digital)

Para el cálculo de la **masa** se toma en cuenta la ***densidad del aire*** *(que en condiciones ideales es de 32g/mol)* y con base en ese dato se multiplica la ***densidad*** por el volumen que ocupa en un determinado espacio. En el caso de un anemómetro, de un molino de viento o de una superficie plana como la que está anexa al molino de la Figura 2.10, es necesario multiplicar además por la velocidad del viento para determinar la cantidad de aire que está fluyendo en un determinado tiempo.

Así, la **masa** que fluye por una superficie plana es $m=pAv$, en donde p es la ***densidad*** del viento, A es el ***área*** por donde pasa el viento y v es la ***velocidad*** del mismo.

a). Tomando en cuenta que la **potencia o intensidad del viento** se mide mediante su ***Energía cinética***, emplea la relación funcional para obtener una **expresión algebraica** para el cálculo de la **intensidad del viento.** ______________________________

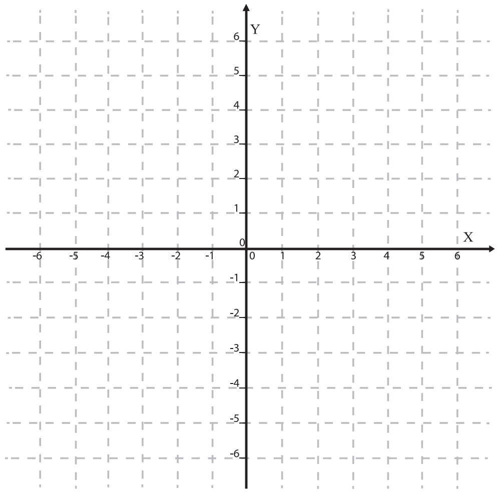
____

b). ¿Qué tipo de relación existe entre la **intensidad del viento** y la ***velocidad***? ¿Qué representa la cantidad ?______________________________

____

c) Haz una **gráfica** de **intensidad del viento** contra su ***velocidad***.

Gráfica:



c) **Observando la gráfica que hiciste contesta:** ¿La **intensidad** el viento va *aumentando o disminuyendo*? ¿La rapidez con la cual cambia la **intensidad** respecto a la **velocidad**, va *aumentando o disminuyendo*? ______________________________

____

____

Graficando la función

$$f(x) = x^3$$

La función que se estuvo estudiando, $V(x)=\frac{4}{3}\pi r^3$ es un caso particular de la **función** $h(x) = ax^3$ En esa expresión, a *representa cualquier número real*; para el caso de la **función** V, $a=\frac{4}{3}\pi$. Se dedicará un espacio para conocer la **representación gráfica de** $f(x) = x^3$. Como podrás darte cuenta, se ha tomado para simplificar el estudio el valor de $a = 1$ y se aprovechará lo que ya se conoce acerca de las **funciones lineales y cuadráticas**, esto es, se reescribirá a f como un producto de una f**unción lineal y una cuadrática cuyas gráficas ya son conocidas.**

$$f(x) = x^3 = x(x^2)$$

a) Considera la función $f(x)$ como el producto de las funciones : $f_1(x) = x$; $p_1(x) = x^2$.

Y analiza ***primero el intervalo*** [0,1]. ¿Cómo son los ***valores*** de f_1 y los de p_1, ***positivos, negativos o cero***? ¿Están ubicados ***por arriba, por debajo o en el eje*** x? ¿Cómo son los ***valores*** de f, ***mayores o menores*** que éstos? ¿Existen puntos que pertenezcan a las **tres gráficas**? ¿ f ***crece o decrece***?

____

____

b) Ahora responde las mismas preguntas, pero *para el intervalo* [-1,0].

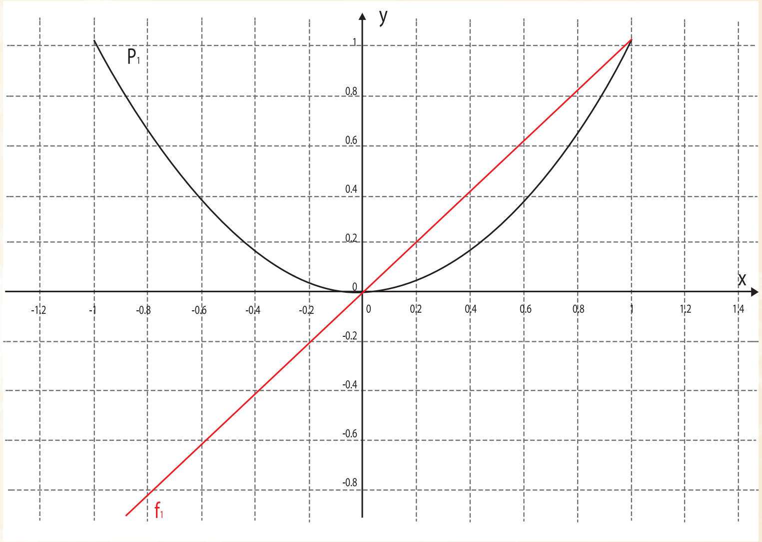


Figura 2.12

c) Amplía tu análisis *para el intervalo* $(-\infty, \infty)$

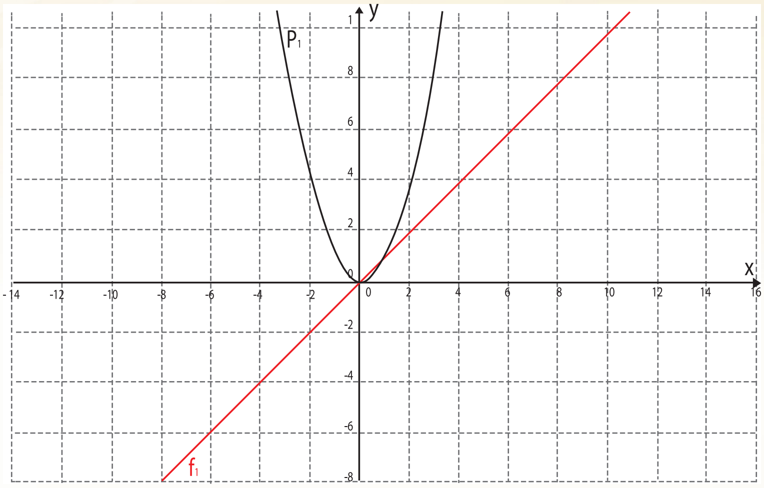
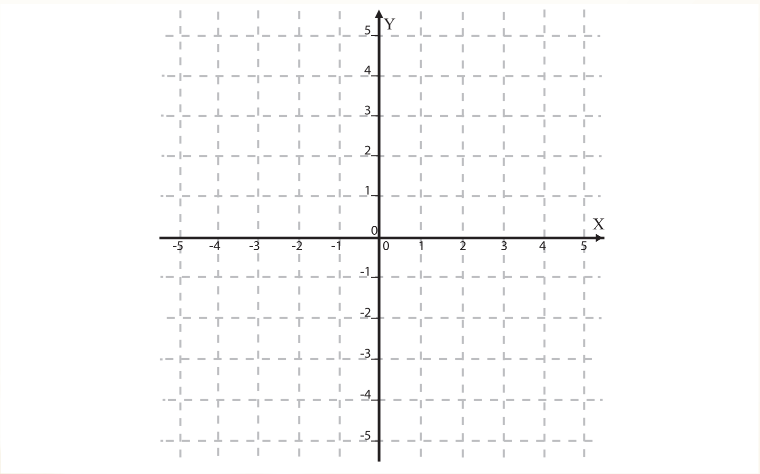


Figura 2.13

d) Integra los productos de tu análisis haciendo un bosquejo de la gráfica de ***f(x)***



Actividad de Cierre

Con las actividades que se han estudiado en este BLOQUE es claro que la proporcionalidad no sólo existe entre dos variables, digamos x, y sino que es posible que exista entre una variable y el *cuadrado de otra o entre una y el cubo de otra*, esto es, que y sea proporcional a x^2 o a x^3 ¿Es posible que exista proporcionalidad entre una variable y alguna potencia de otra variable? Por ejemplo que y sea proporcional a x^4, x^5, x^6 u otra potencia de x? ¿A qué tipo de **expresiones** darían lugar estas relaciones?

Asimismo, viste que una **función** puede reescribirse como el resultado de la operación de otras funciones. Ése es el caso de la Actividad 3 de las revisadas en esta secuencia, en la cual se construyó la **gráfica** de $f(x) = x^3$ concibiéndola como el producto de las **funciones** $f_1(x) = x$ y $p_1(x) = x2$, de las cuales conocías sus **gráficas.**

Actividad: 1
Actividad Individual

La idea que se expresó en las líneas inmediatas anteriores puede extenderse y ahora se seguirá un camino similar para construir un **bosquejo de la gráfica** del producto de las **funciones** $f_1(x) = x^2 - 4$ y $f_2(x) = x^2 + 2$.

Para hacer este procedimiento, se partirá de las **gráficas** de $f_1(x)$ y de $f_2(x)$, cuya forma de **graficarlas** será motivo de un análisis más profundo en el BLOQUE 6 de este **módulo** y aquí sólo se proporcionarán las mismas para continuar el proceso. **Las gráficas** correspondientes son las siguientes.

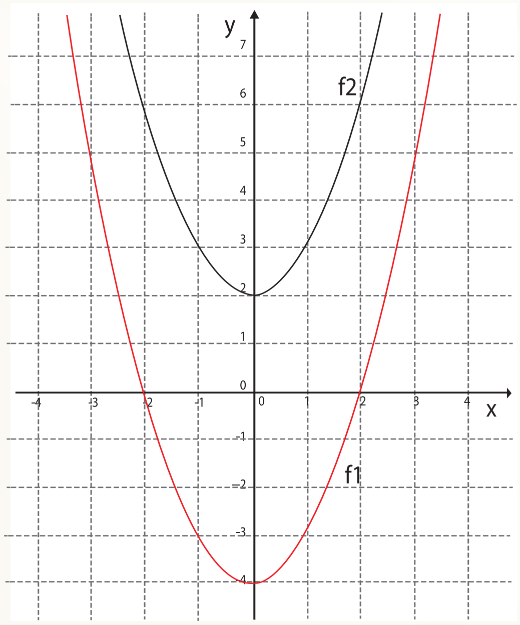


Figura 2.14

Para hacer la gráfica del producto $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2) = x^4 - 2x^2 - 8$, observa primero que la **función** $f_1(x) = x^2 - 4$ *cruza al eje de las abscisas o eje* x *en dos puntos* ¿qué significa eso y qué implicaciones tiene para el **producto de ambas funciones**?

a) *En los siguientes ejes coordenados grafica el valor del producto precisamente en esos puntos, esto es*, *los valores de la* **función** $f(x)=x^4-2x^2-8$ *cuando* $x=-2$ y $x=2$, *basándote exclusivamente en las* **gráficas** *de* $f_1(x)=x^2-4$ y *de* $f_2(x)=x^2+2$.

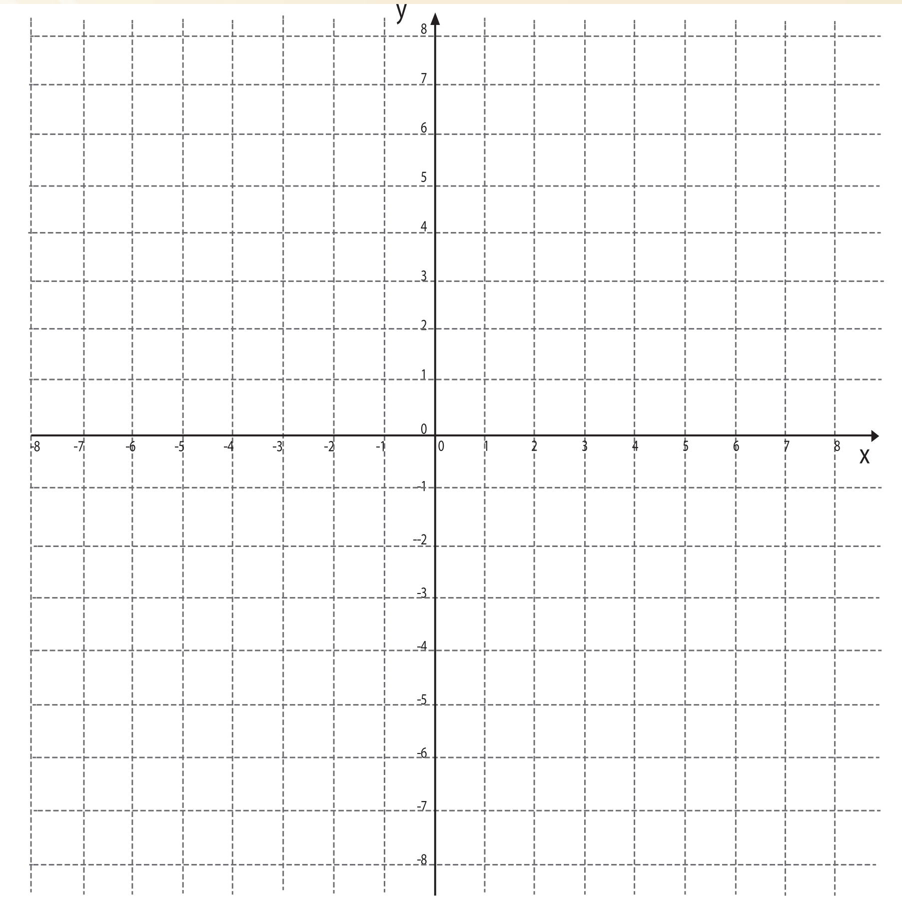


Figura 2.15

b) **Ahora se graficarán** los demás puntos tomando como base los **dos puntos graficados**, centrando la atención en los *intervalos* $(-\infty,-2)$,$(-2,2)$ y $(2,+\infty)$.

Primero procede a considerar *los valores* que toma el producto en el *intervalo* $(-\infty,-2)$, observando en la Figura 2.14 *el tipo de valores* que toman las **funciones** que se están multiplicando, esto es, *si los valores son positivos o negativos* y cómo debe ser el producto. Después de ello grafica la función $f(x)=x^4-2x^2-8$ en dicho *intervalo*.

c) Haz ahora lo mismo en el caso del *intervalo* $(-2,2)$ y para el *intervalo* $(2,+\infty)$. Con esto habrás concluido un bosquejo de la **gráfica**.

d) Si puedes, utiliza un programa graficador de computadora para obtener la **gráfica** que has construido y compara ambas. En caso de existir diferencias, discute con tus compañeros de grupo y tu profesor a qué se deben tales diferencias.

Actividad: 2
Actividad Individual

Analizando tanto las posibilidades de tener proporcionalidad entre potencias de grado superior como el producto de **funciones**, es posible obtener **funciones** cuyo grado sea más grande que 2 ó 3.

a) Discute con tus compañeros y tu profesor hasta qué grado es posible obtener una **función** con estos procedimientos.

b) Escoge libremente dos **funciones** cuyo producto sea una **función** en la cual el exponente de la *variable independiente* sea igual a 6 y haz el bosquejo de su **gráfica**.

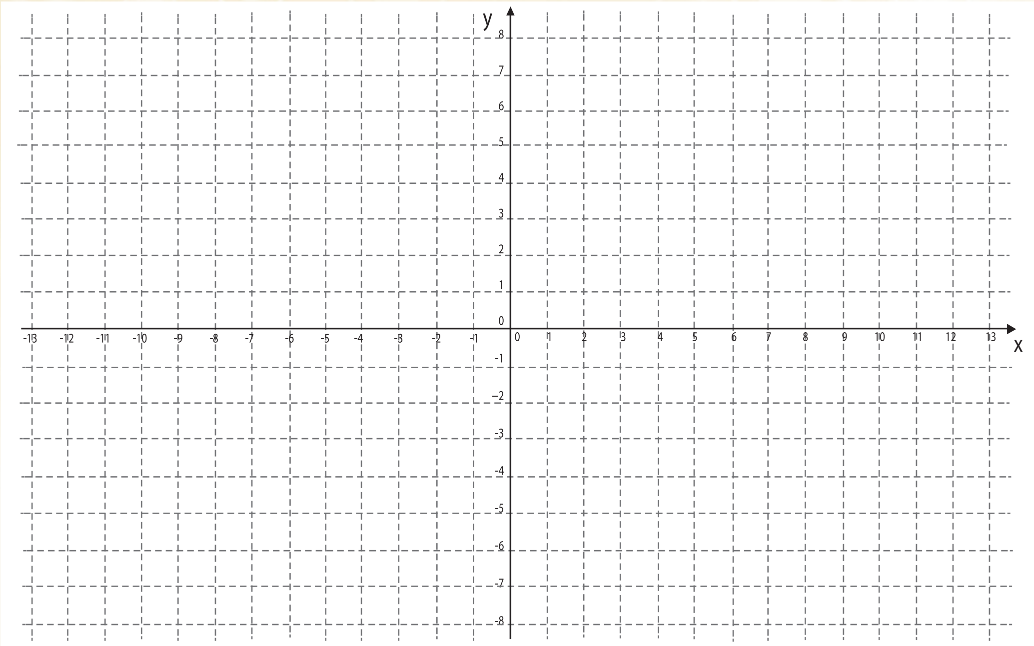


Figura 2.16

Desde el **Módulo de Aprendizaje Matemáticas 1** se estableció que la forma general de una **función lineal** es $f(x) = ax + b$ y de una **función cuadrática** es $f(x) = ax^2 + bx + c$, Similarmente, la forma general de una **función cúbica** o de **tercer grado** es $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Con lo estudiado en este BLOQUE es posible ahora establecer una forma general para este tipo de **funciones**, independientemente de la magnitud del exponente mayor. Con el propósito de no generar confusiones con el uso de las letras del abecedario para hacer referencia a los *coeficientes de las potencias de* x, se escriben usualmente así:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots a_n x^n$$

donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, *los coeficientes de la variable* indeterminada x son números reales, n es un número entero **no negativo**, y los puntos suspensivos (...) **indican cómo continúa el proceso.**

A esta **función** se le conoce como **función polinomial de grado** n.
Su dominio natural es el conjunto de todos los números reales, esto es, $Dom_p = R$

Secuencia Didáctica 3.-

Actividad de Inicio

La Variación inversamente proporcional

Actividad: 1
Actividad Individual

Existen en México organizaciones como el *Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE)*, el *Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado de Sonora (ISSSTESON),* los cuales tienen a su cargo el otorgamiento de las **prestaciones y servicios de seguridad social**, sobre todo *pensiones y servicios de salud* a los trabajadores.

Por servicios de salud se entiende a los diferentes *tipos de atención médica* que se ofrecen en los distintos *hospitales y centros médicos* con los que cuentan esos organismos: *consultas médicas, servicios de urgencias, de operaciones quirúrgicas y hospitalización, partos, servicios dentales, entre otros.*

Entre los servicios que se ofrecen, uno de primordial importancia es el denominado ***"consulta externa",*** la cual se caracteriza por *la atención que se brinda a los pacientes que no están internados en el hospital* y cuyo estado de salud, aún con problemas, les permite acudir al hospital para ser atendidos.

Evidentemente que en cada **institución** existen normas y reglas que buscan *la calidad de la atención que se brinda a los pacientes*. Por ejemplo, en http://salud.edomexico.gob.mx/html/uma/manual/MPCEXTESP.pdf se encuentra un manual que establece los procedimientos que deben seguirse cuando un paciente ingresa a ***consulta externa***.

En dicho manual aparece el siguiente artículo:

"El médico tratante deberá apegarse al cumplimiento del indicador 45 de calidad, donde se establece un indicador mínimo de 12 y máximo de 24 consultas médico-día durante su jornada de trabajo asignada, como lo establecen los indicadores de evaluación de la calidad y desempeño para la evaluación de la productividad médica".

Por otro lado, en http://www.cnts.salud.gob.mx/.../anx04_condiciones_generales_de_trabajo encontramos que una **jornada normal de trabajo de un médico general** *(los encargados de la consulta externa)*, es de ocho horas, con un lapso de 20 minutos para comer.

a). *¿Estás afiliado a algún servicio de salud pública?* ¿Has acudido alguna vez a la ***consulta externa*** de un centro de salud?, ______________________________

____

______________________________ ¿qué puedes comentar de tus experiencias en las mismas? ______________________________

____

Es común, sin embargo, encontrar salas de espera de centros médicos atestadas de pacientes incómodos por la gran cantidad de ***tiempo*** que deben esperar para ser atendidos. Se les explica que debido a las restricciones presupuestales no ha habido contratación de nuevo personal, por lo que el número de pacientes que cada uno de los ***médicos*** debe atender ha ido aumentando durante el último año.

Una regla que un centro de salud pone a sus ***médicos en la consulta externa***, es que procuren que el ***tiempo*** de atención destinado a cada ***paciente*** sea el mismo, independientemente de sus padecimientos. Se muestra en la siguiente **tabla** la evolución que se ha tenido el último año en la atención que se brinda por cada ***médico*** a sus ***pacientes***, de acuerdo a la programación del hospital.

No. de pacientes x	10	20	23	25	30
Tiempo de atención y	46 min	23 min	20 min	18.4 min	15.3 min

Tabla 2.13

b). ¿Qué ha sucedido con el número de ***pacientes*** y el ***tiempo de atención*** que se brinda a cada uno de ellos? ¿Qué implicaciones tiene esta situación en la atención de los enfermos?

c). Si se denomina x al número de ***pacientes*** y denotamos con y el ***tiempo de atención***, determina el valor, en cada caso, del producto xy. ¿Qué representa el valor de este producto en la situación descrita?

d). Utiliza el resultado que obtuviste en el inciso anterior para determinar la regla de correspondencia, en forma algebraica, del valor y de ***tiempo de atención a un paciente***, en función del valor x de número de ***pacientes***.

e). Si se respetara que el número máximo de ***pacientes*** que un ***médico*** atenderá en su jornada de trabajo durante ***la consulta externa*** fuera 24, determina el dominio de la **función** correspondiente.

f). Elabora una **gráfica** que describa la situación en cuestión.

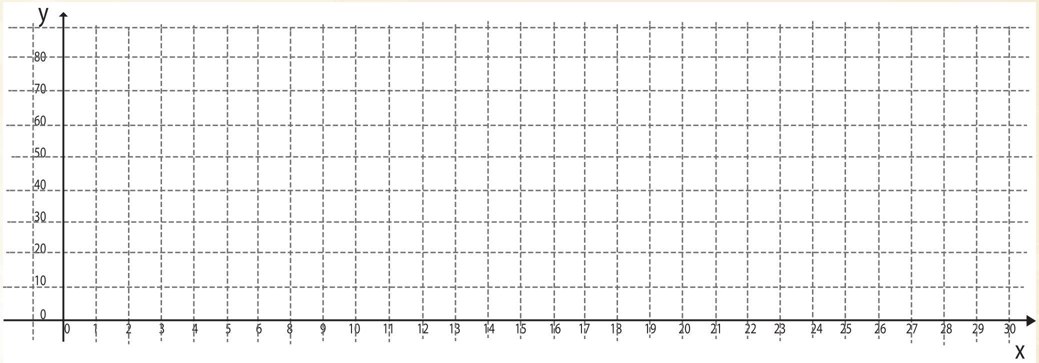


Figura 2.17

g). ¿Esta **función** es *creciente o decreciente*? ¿Cómo es su rapidez de crecimiento *(o decrecimiento)*? ____
____

Desarrollo

En la **Secuencia 2** de este **BLOQUE** estudiaste lo que sucedía con los ingresos que **Don José Luis Bravo** obtenía por la venta de cebolla *cuando aumentaba el precio* de la caja de 18 kg. Al *aumentar el precio* de la caja de cebolla la cantidad vendida *se reducía* o, lo que es lo mismo, *al bajar el precio la venta aumentaba.*

En general éste es el comportamiento en la venta de productos, aunque, como en todo **fenómeno**, del carácter que sea, los factores que intervienen para determinar su comportamiento son muchos y los modelos que se usan deben considerar el control de algunos de esos factores.

Así por ejemplo, en el comportamiento de los precios y el requerimiento para su venta, a la cual los economistas denominan con el nombre de ***demanda***, deben considerarse también otros factores.

Por ejemplo hay productos que se conocen como ***bienes complementarios*** pues siempre vienen por parejas o más productos, según el caso. Tal es el caso de los automóviles y la gasolina, los sanitarios y los equipos de drenaje, las estufas y el gas doméstico. Es claro que si en una comunidad no se utilizan las estufas modernas, *el incremento en la venta* de gas doméstico no se presentará en gran escala aunque *su precio disminuya*.

Otros productos dependen también del poder adquisitivo de los compradores y no tanto de las fluctuaciones de sus precios, aunque siempre el precio será un factor a considerar. Así hay algunos artículos o productos que son considerados como ***bienes inferiores*** *(término que es relativo)* pues al incrementarse el poder adquisitivo su consumo se reduce. *Por ejemplo* es posible que una familia se traslade de un lugar a otro en transporte público pero deje de hacerlo cuando sus condiciones le permiten tener automóvil, independientemente de los daños ecológicos que ello conlleva y que no suele hacer parte de las consideraciones empleadas por las personas.

Otros artículos se consideran ***bienes de lujo*** y su venta aumenta cuando el poder adquisitivo se incrementa, como en el caso de las joyas, los automóviles deportivos u otros *(aunque el término también es relativo)*.

Pero igualmente hay otros productos que se catalogan como ***bienes normales*** y tienen la característica de que su demanda varía fundamentalmente en función del precio. La gran mayoría de los bienes que se consumen pertenecen a esta categoría y, en términos generales, su comportamiento sigue patrones de comportamiento que pueden llamarse usuales.

a) *Escribe tres parejas de productos* que puedan catalogarse como ***bienes complementarios.***

____

____

____

b) *Escribe tres productos* que puedan catalogarse como ***bienes inferiores***, señalando con cuáles productos pueden sustituirse.

____

____

____

c) *Escribe tres productos* que puedan considerarse ***artículos de lujo***.

____

____

____

d) *Escribe tres productos* que se puedan catalogar como ***bienes normales***.

____

____

____

Un comerciante de una tienda de muebles que incluye artículos de los llamados de línea blanca vende cuatro tipos de refrigeradores de una misma marca. En la **tabla** siguiente se indican los precios y artículos vendidos de cada uno en una semana.

	Refrigerador Mod. 1	**Refrigerador Mod. 2**	**Refrigerador Mod. 3**	**Refrigerador Mod. 4**
Precio (P)	\$10,000.00	\$12,000.00	\$15,000.00	\$18,000.00
Demanda (Q)	18	15	12	10

Tabla 2.14

a) ¿Qué sucede con la demanda de refrigeradores conforme el precio de los modelos se incrementa?

b) En los siguientes ejes coordenados, elabora una **gráfica** que represente lo que sucede con la demanda conforme el precio se modifica.

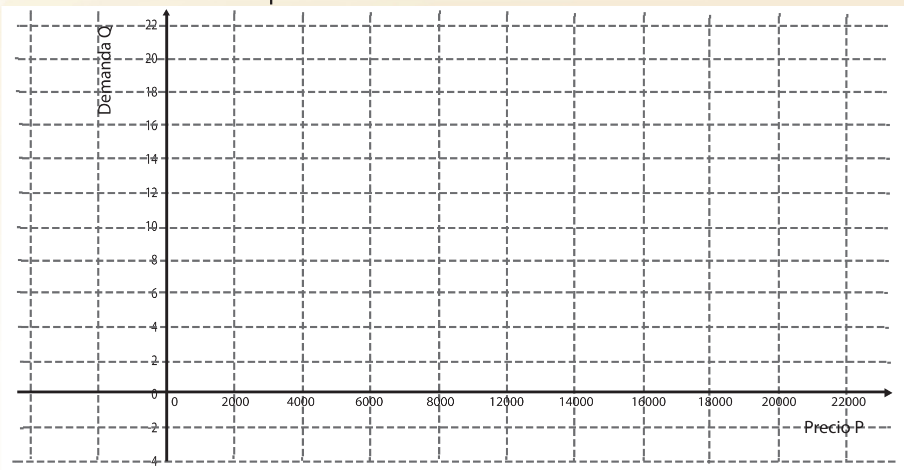


Figura 2.18

c) A la función cuyos datos se proporcionan en la **Tabla 2.14** y se graficaron en la Figura 2.18 se le conoce con el nombre de **función de demanda**. Como puedes ver **la función demanda es una función decreciente**. Observando la **gráfica** ¿qué puedes decir acerca de la rapidez con la cual van disminuyendo los valores de la **demanda**?

d) Si la **demanda de refrigeradores** se sigue comportando de la forma en que se observa en los datos y en la **gráfica** ¿cuál sería el valor de la **demanda** si el precio de un **refrigerador** fuera de **\$20,000.00**? ¿Y si fuera de **\$15,000**?

e) En general, si llamamos P al precio de un **refrigerador** y Q a la **demanda existente** en una semana, ¿Cómo es el producto PQ? Utiliza este hecho para determinar una expresión analítica de la demanda Q en función del precio P de un **refrigerador**.

Mario ayuda a su **papá** en un negocio familiar de venta de garrafones de agua purificada y diariamente acude a realizar las tareas que se le asignan. **Mario** realiza actividades que incluyen lavar los garrafones que llevan los clientes, llenar los mismos con agua purificada, colocarles el sello o tapón superior y cargarlos hacia los automóviles de los clientes.

La mayoría de los garrafones de agua que se llenan tienen una capacidad de 19 litros y **Mario** ha observado que el tiempo de llenado de cada uno es muy variable aunque abra toda la llave, pues la presión del grifo no es uniforme a lo largo del día.

En la siguiente **tabla Mario** escribió los *tiempos que tarda en llenarse un garrafón de 19 litros*, diferentes *velocidades en el flujo del agua del grifo*, aunque en cada caso era constante. El máximo valor del *caudal (o gasto)* que permite el grifo de agua fue de ***0.5 l/seg.***

*Caudal **(l/seg)***	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
*Tiempo de llenado **(seg)***	190	95	63.33	47.5	38

Tabla 2.15

a) ¿Qué sucede con el tiempo t de llenado de un garrafón conforme el caudal v del grifo aumenta? ____
____
____

b) Determina el valor del producto vt *(el producto del valor del caudal por el tiempo de llenado)* en cada caso y usa el valor obtenido para expresar analíticamente el valor de t en **función** de v y determina el dominio de la **función** que modela esta situación.
____
____

c) En los siguientes ejes coordenados grafica el tiempo de llenado t en función del caudal v de agua del grifo.

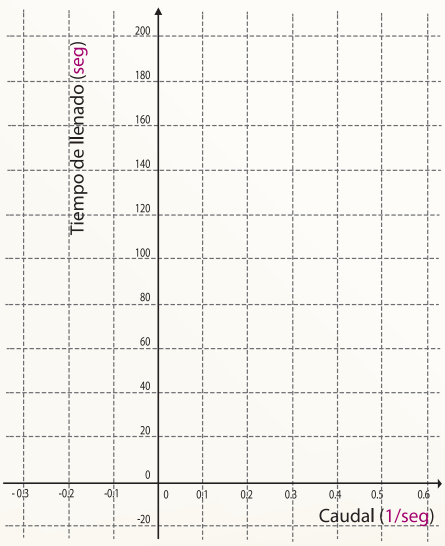


Figura 2.19

d) ¿Cómo es ahora la rapidez con la cual disminuye el tiempo de llenado?

En las situaciones presentadas en este bloque, se tiene que existe una relación entre dos magnitudes variables con la característica de que su producto es constante. En estos casos se dice que las dos variables son ***inversamente proporcionales***. Esto es, dos variables x, y son inversamente proporcionales si $x\,y = k$, con k una constante.

Cuando el valor de k es positivo se tiene que al aumentar una de las variables, la otra disminuye en la misma proporción, esto es, si una aumenta el doble, por ejemplo, la otra disminuye a la mitad, si una aumenta al triple la otra disminuye a la tercera parte y así sucesivamente.

Con el valor de k positivo, en una relación de variables inversamente proporcionales, si sólo se consideran valores positivos para x, las **gráficas** son de la forma que se ilustra a continuación.

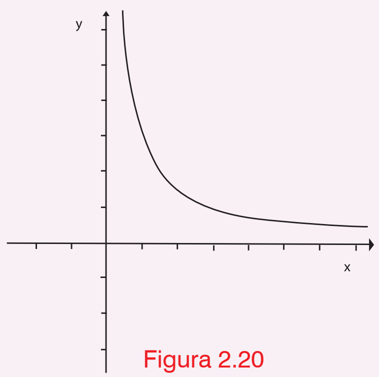


Figura 2.20

e) Haz la **gráfica** correspondiente a la relación de dos variables x, y inversamente proporcionales, con k *positivo* y considerando *valores negativos* de x.

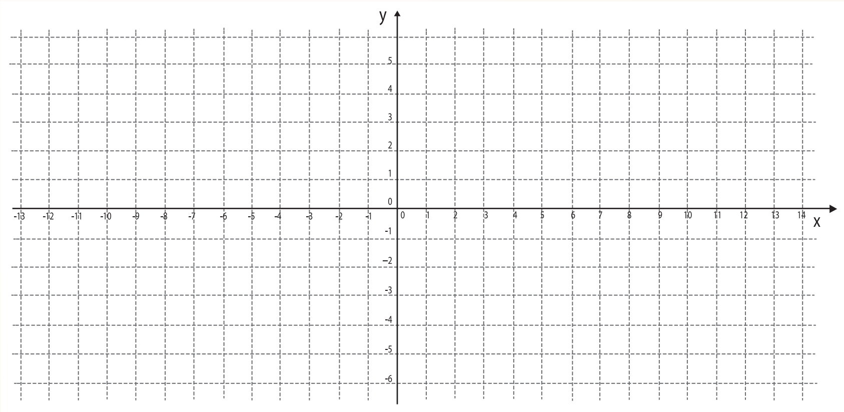
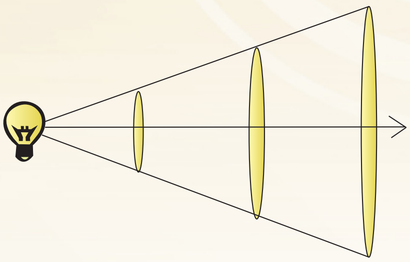


Figura 2.21

Las relaciones entre variables que son inversamente proporcionales se presentan con frecuencia en la vida cotidiana, así como en las ciencias. En los incisos siguientes se enuncian algunas de ellas con el propósito de que establezcas las relaciones funcionales a las que corresponden o viceversa, se presentan en forma funcional y se espera que tú les des una interpretación respecto al tipo de variación.

a) Cuando se estudian fluidos en las clases de física suele hablarse de la llamada **Ley de Boyle-Mariotte** *que establece que a temperatura constante la presión P de un gas ideal es inversamente proporcional al volumen V que está ocupando. Con base en este enunciado escribe la relación funcional que permita calcular la presión de un gas ideal en función de su volumen (regla de correspondencia y dominio de la función).*

b) Si se enciende una fuente luminosa, un foco por ejemplo, éste emite luz en todas direcciones. En un experimento en el laboratorio de física se colocó una hoja de papel frente a un foco a diferentes distancias pero siempre en la misma dirección y se midió la intensidad de la iluminación, que se denota por E, en tanto que la distancia entre el foco y la hoja de papel se denota con x.



Después de tomar los datos del experimento realizado y hacer un análisis de los mismos, se llegó a la conclusión de que la *intensidad de iluminación* E de una hoja de papel es **inversamente proporcional** al **cuadrado** de la distancia entre el foco y el papel. Si consideramos una constante de proporcionalidad igual a 2, escribe la expresión funcional que relaciona E con x y haz la **gráfica** correspondiente.

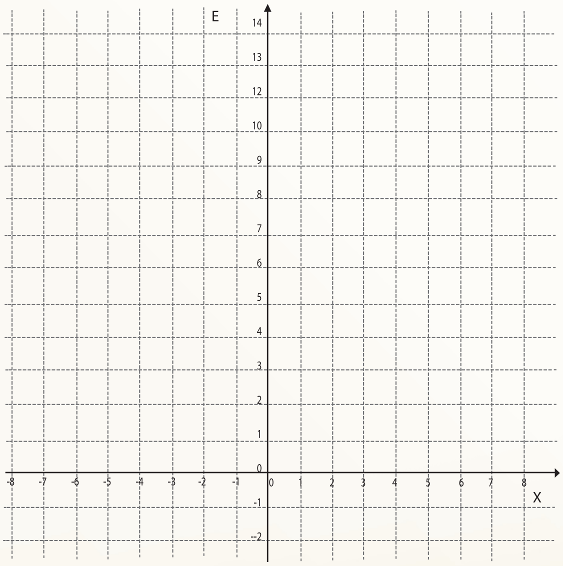


Figura 2.22

c). ¿Qué puedes decir respecto al crecimiento o decrecimiento de la intensidad de iluminación con respecto a la distancia y qué puedes decir de la rapidez con que aumenta o disminuye la intensidad de iluminación?

Actividad de Cierre

Actividad Grupal

Las funciones que se han estudiado en las actividades de Inicio y Desarrollo de este BLOQUE, relativas a las magnitudes variables que son **inversamente proporcionales** tienen reglas de correspondencia que se pueden expresar analíticamente, de forma general, mediante $y = \frac{k}{x}$, donde k **es constante**.

Desde otra perspectiva, se concibe a este tipo de **funciones** como el cociente de dos funciones, es decir, como el cociente de la **función** $y=k$, con k una **constante**, y la **función** $y=x$.

Una pregunta pertinente es si existirán otros casos en los cuales las situaciones o **fenómenos** de estudio pueden expresarse como el cociente de **dos funciones**.

En las actividades de cierre incluiremos precisamente situaciones en las que esto sucede.

Actividad: 1

Actividad de Equipo

Muchos de los medicamentos que un **médico receta** para el tratamiento de una enfermedad están formulados para aplicarlos determinadas **dosis** a los adultos y no existen **dosis** preestablecidas para aplicarlos en el tratamiento de las enfermedades de los niños.

En casos como el descrito, los **médicos** pueden aplicar diferentes reglas, como las que puedes consultar en la dirección electrónica:

http://www.eneo.unam.mx/repositorioenfermeria/enfermeriamanuales/ecologiasaludmedioambiente/ENEOUNAM-ManPracticasFarmacologiaLEO.pdf

Entre las reglas que se señalan ahí, tenemos la llamada Regla de Young que se usa para modificar la **dosis** de los adultos, que denotaremos con la letra d (d ***es constante***), con el propósito de adaptarlas a los niños.

La regla establece:

Dosis de medicamentos: *La regla de Young* es una fórmula que se usa para modificar las **dosis** de **medicamentos de adultos**, a fin de adaptarlas a **niños**. Si d representa la **dosis de un adulto**, en *miligramos*, y t es la edad del niño en años, entonces, la **dosis del niño** puede representarse, por medio de la siguiente función:

$$F(t) = \frac{td}{t + 12}$$

Se recomienda usar esta forma de calcular la **dosis** de **medicamento** para **niños** entre 2 y 12 años de edad.

a). Si la **dosis** del **medicamento** que debe tomar un **adulto** de una medicina específica es de 100 mg cada 8 horas, ¿cuál debe ser la **dosis** que se administre a un **niño** de 5 años?

____

____

____

b). Haz una **gráfica** que represente esta relación.

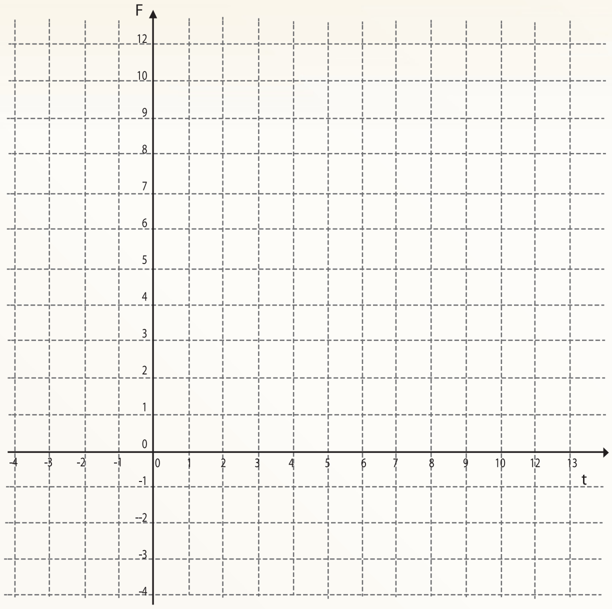


Figura 2.23

c). Con base en la **gráfica** indica si se trata de una función creciente o decreciente y señala cómo es el comportamiento de la rapidez *(mayor o menor cada vez)* con la cual sucede el aumento o disminución de la ***dosis***.

____

____

____

Actividad: 2

Actividad individual

Por desgracia es relativamente frecuente escuchar en las noticias que se presentan **derrames de petróleo en el mar**, en ocasiones por problemas en los pozos petroleros, en otras por problemas en las plataformas petroleras, en ocasiones por derrame de algún buque cisterna que transporta el hidrocarburo.

Cuando se presenta un problema de **derrame de petróleo en el mar** se emplean **diferentes técnicas** para retirarlo de la superficie marítima. Una parte se recupera y vuelve a servir pero otra no y simplemente se retira. Sin embargo, una cantidad importante no puede ser retirada y los daños ecológicos que se producen pueden ser de gran magnitud.

Una estimación ***es que el porcentaje de petróleo derramado*** que permanece en el mar se puede calcular mediante la **expresión**:

$P(x)=\dfrac{240x+1400}{14(x+1)}$, donde x representa el número de ***meses transcurridos posteriores al derrame***.

Puedes consultar más sobre la problemática de derrames de petróleo en la página electrónica:

http://www2.inecc.gob.mx/publicaciones/libros/507/cap10.html

a). Elabora una **tabla** que indique el porcentaje de petróleo que permanece en el mar durante los primeros doce meses **posteriores a un derrame**.

b). Con base en los datos de la **tabla**, en los cuales se puede observar que el porcentaje de petróleo que permanece en el mar va disminuyendo con el tiempo, indica si la rapidez con que disminuye es cada vez mayor o cada vez menor.

En los fenómenos y situaciones que has estudiado en este BLOQUE han surgido **funciones** cuya ***expresión algebraica es un cociente***. En cada caso analizado los cocientes son **funciones lineales** y es pertinente preguntarse, como se hizo en la secuencia anterior, sobre las posibilidades de extender estas **funciones** para incluir casos en los cuales las **funciones involucradas** tengan un grado mayor.

Precisamente un caso más general es considerar el cociente de **dos funciones polinomiales**, cuya ***expresión algebraica*** tiene la siguiente forma:

$$F(x)=\frac{a_0 x+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots a_n x^n}{b_0+b_1 x+b_2 x^2+b_3 x^3+\ldots b_m x^m}$$

En este caso los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ y $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ son números reales. A las funciones de este tipo, que son el cociente de **dos funciones polinomiales,** se les conoce como **funciones racionales** y su dominio natural son todos los números reales menos los valores de para los cuales el denominador es igual a 0.

1. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos se calculan mediante la **función**:

$$I(z) = 1000z - 2z^2,$$

donde z representa el número de pares de zapatos que se fabrican cada mes. Para esta **función**:

a) Encuentra su **dominio** y su **rango**.

____

b) ¿Es una **función creciente** o es una **función decreciente**?

____

____

c) ¿Cuándo obtiene el fabricante el mayor ingreso posible? ¿Cuándo el menor?

____

d) ¿Cuál de las representaciones de esta **función** *(verbal, analítica, gráfica o tabular)* crees que te resulta de más utilidad para interpretar la situación que está modelando?

____

2. En la expresión: "El área de un círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio":

a) ¿Cuál es la **constante** de proporcionalidad?

____

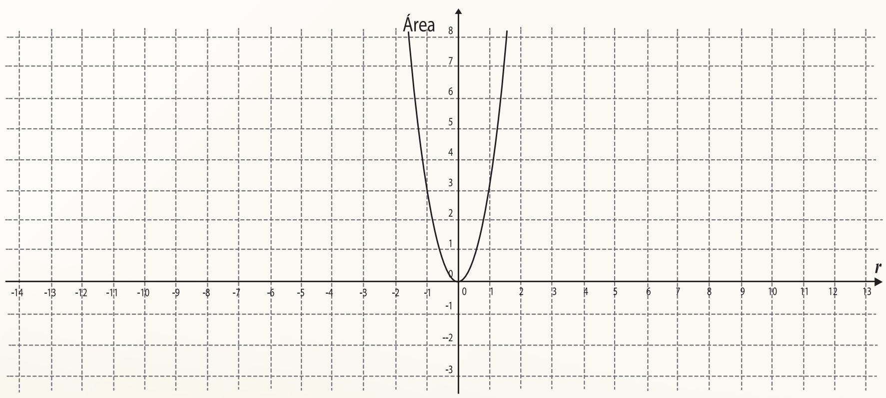
b) Interpreta la relación anterior mediante una **función** que te permita calcular el área de un círculo en dependencia de la medida de su radio.

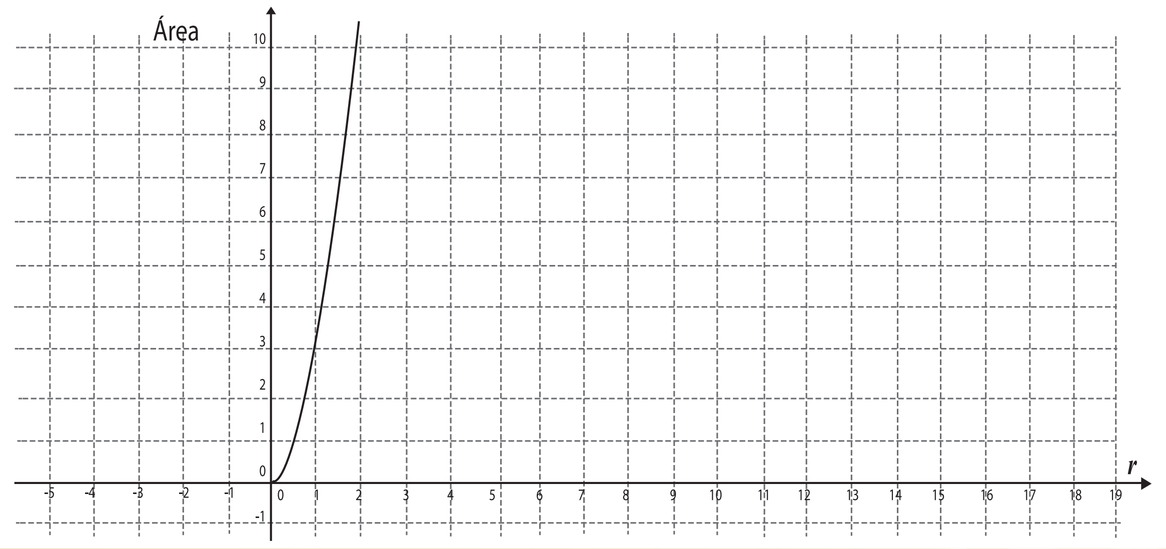
c) ¿Cuál de las siguientes **gráficas** representa la función anterior? Argumenta tu respuesta.

____

____

Para aquella que no sea la **gráfica** indicada, encuentra la **expresión algebraica**, así como su dominio.





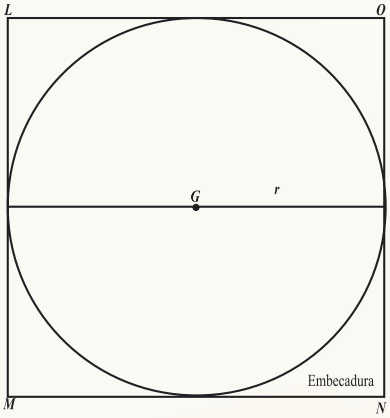
3. Investiga en tus módulos de **física, química, matemáticas** o cualquier otra materia, **fenómenos** que puedan ser modelados mediante:

   a) Una **función cuadrática**
   b) Una **función cúbica**
   c) Una **función racional**
   d Una **función polinomial**

   Comparte con tus compañeros de equipo o grupo ¿cuáles fueron los **fenómenos** más comunes? ¿A qué lo puedes atribuir?

4. En la figura siguiente, ¿Cómo podrías calcular el **área** de cada uno de los espacios que quedan si en el **cuadrado** dado eliminamos el **área** que corresponde al **círculo**? Ese espacio se encuentra referido con frecuencia en construcciones arquitectónicas, y recibe el nombre de ***embecadura***.

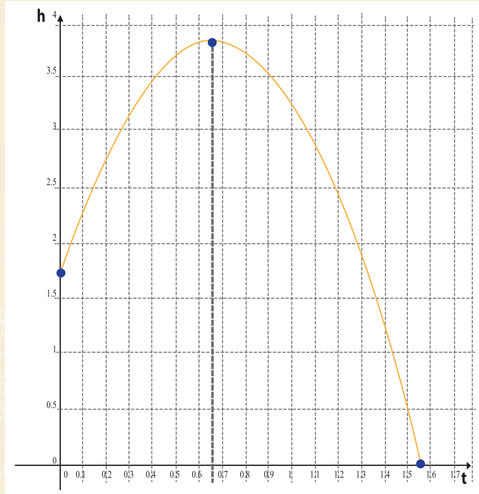
¿Qué cantidades resultan ser ***proporcionales***? ¿Qué **función** podrías construir para expresar el valor del **área** de la ***embecadura*** en dependencia del **radio del círculo**?



5. En tu Módulo de Aprendizaje **Matemáticas 1,** apareció en el BLOQUE 9 la **gráfica** siguiente.

Fue empleada para modelar **el fenómeno** del lanzamiento de un objeto hacia arriba, el cual llega a una altura diferente de aquella de la cual salió.

Encuentra la **expresión algebraica** de esta **función**, identificando en **dónde crece** y en **dónde decrece.**



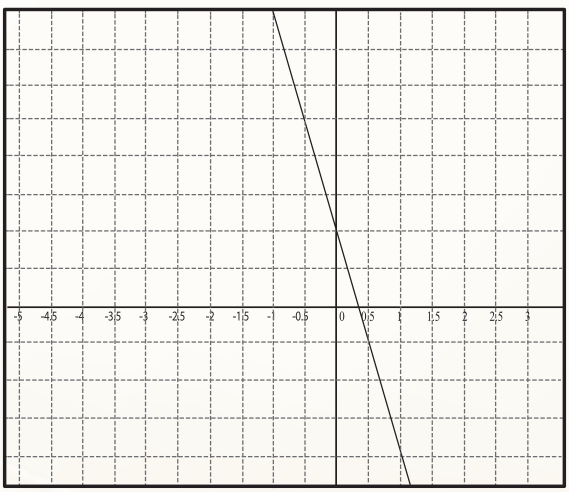
Tiro vertical hacia arriba con diferente nivel de llegada

6. Construye la **representación gráfica** de una **función cuadrática** que sea **creciente** en el intervalo [-5,0] y **decreciente** en [0,5]. ¿Cuál es el valor máximo que alcanza esta **función**?

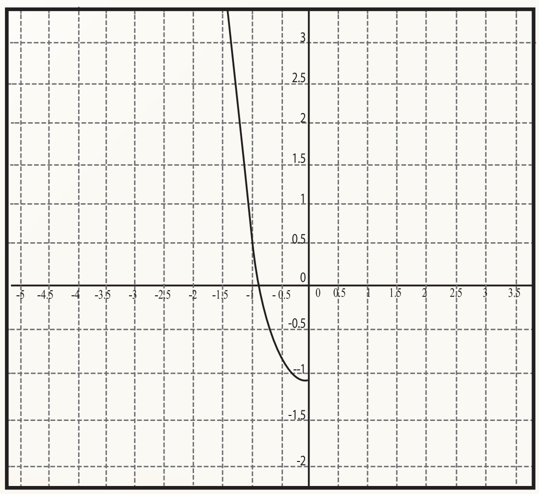
7. Construye la **representación gráfica** de una **función cuadrática** que sea **decreciente** en el intervalo [-5,0] y **creciente** en [0,5]. ¿Cuál es el mínimo valor que toma esta **función**?

8. ¿Cuál *(es)* de las siguientes **gráficas** representa a una **función** en donde sucede que:

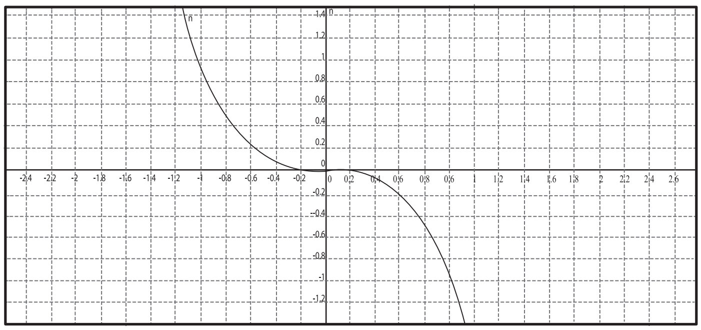
a). x, y son proporcionales
b). x, y^2 al cuadrado son proporcionales
c). x, y^3 al cubo son proporcionales
d). Δx, Δy son proporcionales
e). Crece más rápido que todas las mostradas en este problema.
f). Es **decreciente** en todo el dominio de la **función.**



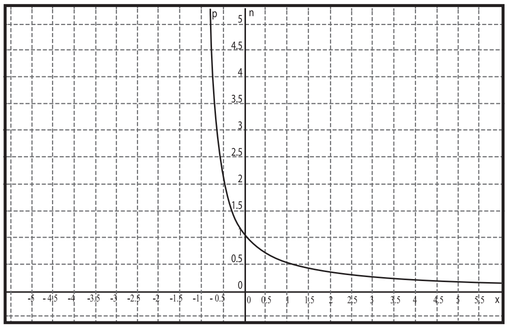
Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4

9. Realiza el siguiente experimento. Colócate en una habitación a oscuras con una lámpara común en mano. Enciende la lámpara, dirigiendo hacia una pared la luz que emana de la lámpara. Varía la **distancia** a la que te encuentras de la pared, aumentándola o disminuyéndola. Observa en todos estos casos que es lo que sucede con ***"la huella"*** de luz que la lámpara produce en la pared.

Este **fenómeno** es uno de tantos estudiados por la **física** y eso que hemos llamado ***"la huella"***, se conoce en **física** como **la intensidad de iluminación**. De acuerdo con esta ciencia, *"la intensidad de iluminación que produce una fuente luminosa en cualquier punto, es directamente proporcional a la intensidad de la fuente, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente*".

a) **Representa algebraicamente esta relación**, introduciendo las variables que consideres convenientes. *(Ver pregunta b)* de la **Actividad de Desarrollo # 4**).

b) Supóngase que se cuenta con dos fuentes luminosas, que tienen una intensidad de iluminación de 20 y 2 unidades respectivamente, las cuales se encuentran **situadas a una distancia** de 200 centímetros una de la otra. Para un punto **M**, situado entre ambas:

i) Considerando un punto **M**, situado entre ambas, haz un **diagrama** de la situación planteada.

ii) ¿Mediante qué modelo funcional podemos calcular la intensidad de iluminación para cualquier punto **M** situado entre ellas?

iii) Construye la **gráfica** de esta **función**. ¿Qué dominio tiene?

10. En los últimos tres censos de población, se encontró el número de mexicanos que viven en áreas rurales en nuestro país. La **tabla** siguiente muestra la información:

Año de realización del censo	**Millones de habitantes que viven en centros de población urbana**
1990	62.73
2000	72.98
2010	86.89

Se considera que la población urbana se refiere a poblaciones con 2500 habitantes o más. **FUENTE:** *Conagua. Subdirección General de Programación*. Elaborado a partir de datos de INEGI. *Censos Generales y Conteos de Población y Vivienda.*

a) ¿Cómo podrías usar lo que has aprendido sobre **funciones** para predecir la población urbana en México para el año 2030? ¿Por qué sería útil conocer esa predicción?

El trabajo asignado en esta **sección** es de carácter individual, para ser realizado en casa y tiene el propósito promover tus reflexiones sobre lo que has aprendido en este **BLOQUE**, lo que aún te ocasiona dificultades y lo que es necesario reforzar.

El producto de tus reflexiones será útil en la medida en que te ayude a tomar conciencia de aquello que puedes compartir con tus compañeros debido a que ya lo dominas, lo que aún te cuesta dificultad y los errores o temas en los que piensas que aún debes estudiar con mayor detenimiento y pedir asesoría, ya sea a tu profesor o en ayuda con tus compañeros de clase.

En caso de considerarlo necesario, el profesor te podrá solicitar los resultados de autoevaluación.

A partir de lo estudiado en este **BLOQUE**, di todo lo que puedas acerca de este **fenómeno**.

Reflexiones relacionadas con el Bloque 2:

1. *¿Qué te parecieron los temas que estudiaste en este Bloque?*
2. *Haz un resumen de lo que estudiaste en este bloque resaltando lo que para ti haya resultado novedoso o interesante.*
3. *¿Te ayudaron las **actividades** de este bloque a mejorar tu comunicación **matemática**? Si tu respuesta es afirmativa indique en qué aspectos sientes que mejoraste. Si es negativa, menciona a qué crees que se debe.*
4. *Puedes comprender las ideas que te expresan tus compañeros para resolver un problema? Si no es así, ¿qué es lo que se dificulta respecto a eso?*
5. *¿Haz una lista de los aspectos estudiados en este bloque en los cuales tienes buen dominio.*
6. *Enlista los temas que aún te causan dificultad. ¿A qué atribuyes la dificultad del tema y cómo piensas afrontar y superar estas dificultades?*
7. *¿Puedes usar algún software matemático para ayudarte a construir y analizar con las **gráficas** que aparecieron en este bloque? ¿Cuál? ¿Dónde aprendiste a usarlo?*

BLOQUE 3

Variaciones Exponenciales y Logarítmicas

Este BLOQUE está formado por **dos secuencias** que abordan, respectivamente, **la variación exponencial y logarítmica**. Al identificar sus características te darás cuenta que para analizarlas y ampliar su significado requieres de herramientas **matemáticas** que aún no conoces. Construir los modelos tabulares, gráficos y analíticos que las representan te permitirá precisar su comportamiento y responder a situaciones que son comunes en nuestro entorno social, económico, biológico, ecológico, y científico en general.

Mediante algunas actividades que conforman este BLOQUE estarás en capacidad de utilizar operaciones algebraicas que hasta ahora no se te habían presentado, además podrás usar y darle sentido a un objeto matemático que de ahora en adelante, estará integrado a tu acervo de operaciones aritméticas y algebraicas: ***los logaritmos***. En particular, **la segunda secuencia** inicia planteándote actividades que, a partir de lo que ya conoces, te proponen reconstruir articulaciones entre determinadas sucesiones de números de manera que tengas la oportunidad de hacer un recorrido análogo al que históricamente les dieron origen. De esta manera tú mismo construirás un significado bien fundamentado que te permita hacer uso de sus propiedades con pleno dominio de su validez.

Con estas secuencias, como en las anteriores, se espera que tengas oportunidad de que tu **pensamiento matemático** se siga desarrollando mediante los múltiples procesos que deberás llevar a cabo cuando analices las **variaciones exponenciales y logarítmicas** para resolver problemas dentro de la misma **matemática** y en otros contextos; es decir, se asume que la capacidad de identificar el cambio en una situación particular que se te presente, o distinguir qué elementos cambian y de qué manera están relacionados, requiere poner en juego múltiples habilidades, como la observación, la articulación, la abstracción, la generalización, la identificación de significados, etc.

Por otra parte, se espera que la movilización de competencias como la discursiva, en términos de explicaciones, descripciones, negociación de significados con tus compañeros y reconocimiento de errores y aciertos propios o de los demás, realmente se vea favorecida mediante las acciones propuestas. Además, al proponerte que desarrolles actividades en colaboración con tus compañeros, o que participes en una discusión grupal, se espera que tengas oportunidad de valorar y asumir una mejor actitud ante tu propio trabajo y el de tus compañeros en el nivel de respeto que esta convivencia escolar requiere para proyectarse, de la misma manera, en círculos sociales más amplios.

Tiempo asignado: 14 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

Crecimientos y decaimientos sorprendentes

Actividad: 1
Actividad Individual

¿Te gustan los conciertos? Te invitamos a que reproduzcas el que se encuentra en http://www.youtube.com/watch?v=Gjy-y-ATZTI&feature=youtu.be (dura solamente 3,57 min).

Figura 3.1

a). ¿Qué te gustó y qué te disgustó? ____
____
____

b). Describe qué es lo que consideras que el productor del video trata de mostrar y comenta con el resto de la clase tu respuesta: ____
____
____

c). Tal como has visto en las actividades anteriores de este módulo,cuando el tiempo pasa, las cosas cambian. Durante el tiempo que dura el video ¿qué es lo que notablemente cambia en la sesión del concierto? ______________________________

____

____

d). Señala en la Figura 3.2 la curva que tú consideras que representa mejor el cambio notable que se proyecta en el video, luego señala algunas características de la curva a manera de argumento que apoye tu elección.

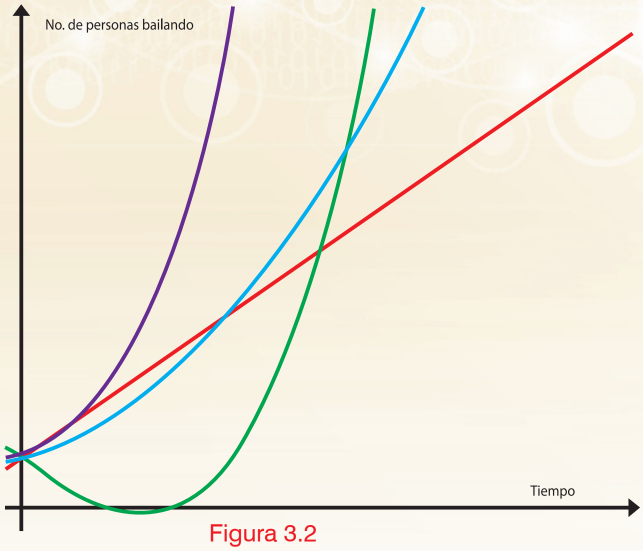


Figura 3.2

Sucede que el tipo de variación que identificaste en el video ocurre en una gran cantidad de **fenómenos** que crecen así conforme pasa el tiempo, algunos son:

- La cantidad de dinero total de una deuda o de una inversión cuando se trata de interés compuesto.
- El número de células de un feto mientras se desarrolla en el útero materno.
- El número de bacterias que se reproducen por bipartición, es decir, micro-organismos compuestos de una sola célula, que para reproducirse, se dividen en dos células iguales a la original *(¡algunas cada media hora!)*.
- El número de animales de una misma especie en lugares que carecen de *predadores (otros animales que se alimenten de ellos).*
- La población humana en algunos países durante distintas décadas.

¿Conoces otros? Menciónalos. Investiga los anteriores o busca otros. ______________

____

____

Desarrollo

Catástrofes ambientales: derrames de petróleo en el mar

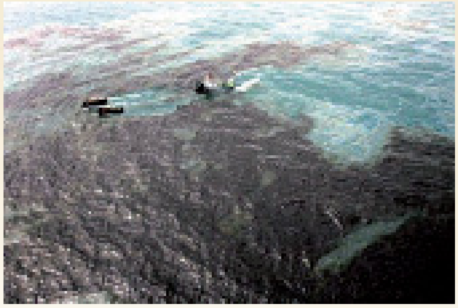
Actividad: 2
Actividad Grupal

En contraparte a la alegría que se contagia al crecer el número de espectadores que participan en el concierto de la actividad anterior, ahora se muestra una nota de prensa en línea que publicó, en la fecha señalada, la siguiente noticia:

50.000 litros de derrame de petróleo amenazan la costa de Tailandia
http://indagadores.wordpress.com/2013/07/28/50-000-litros-de-derrame-de-petroleo-amenazan-la-costa-de-tailandia/

Publicado el 28/07/2013

"Alrededor de 50.000 litros de crudo se derramaron en el mar del Sur de China el sábado a unos 20 kilómetros (12 millas) de la costa de la provincia oriental de Rayong, en el Golfo de Tailandia. Dijo el operador de PTT Global Chemical. Al mismo tiempo, hubo temores sobre el efecto de los productos químicos utilizados para dispersar el petróleo crudo".



En otro reportaje *(American Journal Experts[1])*, que está reproducido en varios sitios web, leemos:

"El petróleo tiene un impacto directo sobre el agua. La composición química del petróleo se mezcla con el agua y crea una nueva sustancia conocida como "mousse". Esta mousse se vuelve aún más pegajosa que el petróleo solo, lo cual hace que se adhiera a organismos y materiales mucho más fácilmente. El mousse parece comida para una cantidad de animales y también atrae a ciertas aves curiosas y a la vida marina. Para las personas que tratan de limpiar la marea negra, la mezcla de petróleo y agua es muy difícil de eliminar y, finalmente, conserva muy poco valor como petróleo en sí".

[1] http://www.ehowenespanol.com/efectos-derrames-petroleo-sobre_148221/

Actividad de Equipo

1. En una situación similar al reportaje anterior encontramos el siguiente comunicado:

"Los técnicos predicen que durante los próximos 7 días, una mancha de petróleo ("mousse") que tiene ahora 3 km² duplicará su superficie alcanzada cada período de 12 horas aproximadamente".[2]

a. *Haz un estudio de la manera en la que crece la superficie de la mancha completando la* ***tabla*** *siguiente, donde* t *es el tiempo expresado en períodos de 12 horas y* s *la superficie aproximada en km². Para* $t_0 = 0$, se considera la superficie inicial $s_0 = 3$

Tabla A

t (períoddo de 12 horas)	$t_0 = 0$	$t_1 = 1$	$t_2 = 2$	$t_3 = 3$	$t_4 = 4$	$t_5 = 5$	$t_6 = 6$	$t = 7$	$t_8 = 8$
S (km²)	$s_0 =$	$s_1 =$	$s_2 =$	$s_3 =$	$s_4 =$	$s_5 =$	$s_6 =$	$s_7 =$	$s_8 =$

i). En el cuarto período, ¿Cuántas veces se ha duplicado la superficie inicial?

____

____

____

ii). Si la mancha no se contiene, ¿cuál será su superficie en los periodos que se indican en la tabla **(hasta la mitad del octavo día)**? Desarrolla en el espacio siguiente las operaciones que realizas para determinar cada uno de los valores solicitados y luego escribe el resultado en la **tabla:**

t	0	…		…	13	14	15
S	3	…		…			

iii). Toma en cuenta el tipo de operaciones que estuviste realizando para responder a la tarea anterior y completa la siguiente tabla con los elementos que se te pide caracterizar en el primer renglón de la misma:

[2] Por ejemplo, en el comunicado inicial de esta Actividad sobre el derrame en Tailandia se lee: La mancha del yacimiento Montara se extendió hasta las aguas de Indonesia y ambientalistas dijeron que aumentó a casi 90,000 kilómetros cuadrados.

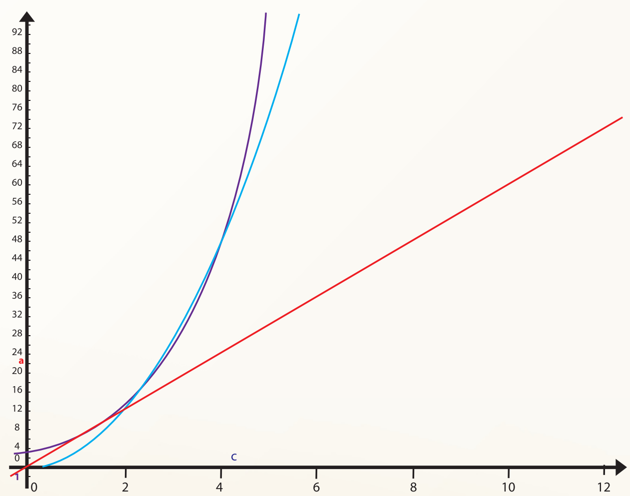
Periodo: *t*	Operación que se hace para duplicar la superficie en periodos consecutivos: Determinar el factor que *"duplica"*	Operación que indica las veces que se multiplica la superficie inicial s_0 para obtener la superficie en el periodo indicado	Número de veces que se duplicó la superficie inicial: *n*	Expresión que representa que la superficie inicial (s_0) se ha duplicado *n* veces
4				$3(2)^4$
5		3(2x 2x 2x 2x 2)		
7	$s_7 = s_6$ x 2			
13			13	
15				
t_n				

b. En la siguiente **tabla** se presentan las expresiones analíticas de **tres funciones** distintas. Completa la **tabla.** ¿Cuál de ellas representa lo que sucede con la expansión de la mancha de petróleo que estás analizando?

Actividad Individual

T	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t) = 3(2t)$								
$g(t) = 3(t^2)$								
$h(t) = 3(2^t)$								

c. En la siguiente figura se muestran las **gráficas** correspondientes a las tabulaciones anteriores: etiqueta cada una de las curvas según representen a $f(t)$, $g(t)$, o $h(t)$.



d. Escribe también en la misma figura, señalando en cada curva, el tipo de variación que distingues.

e. La expresión y la curva que representa la expansión de la mancha de petróleo por cada período de 12 horas ¿Corresponde a alguna que ya estudiaste? Describe por qué sí o por qué no: ____
____
____
____

Si te interesa el tema de lo catastrófico de un derrame de petróleo en el mar, consulta http://www.lareserva.com/home/peores_derrames_petroleo para que te enteres un poco más acerca de por qué ocurren, cómo se contienen y las consecuencias que ocasionan. Si en tu grupo tienen acceso a algún foro de discusión en línea, pueden usarlo para opinar al respecto.

Actividad de Equipo

2. Si la mancha de petróleo hubiese tenido una extensión inicial de 1.5 km y se estuviese triplicando su superficie s cada período t de 24 horas, ¿cuál sería la **expresión algebraica** que indica ese comportamiento?

a. Llena la siguiente **tabla** con los valores que obtienes para cada período de acuerdo a la regla de correspondencia que estableciste:

Tabla B

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s									

b. Toma dos valores consecutivos cualesquiera de la **tabla** y verifica que realmente la cantidad se triplica. Describe la operación que llevaste a cabo:

Cuando se establece que la cantidad obtenida se *"duplica"* en cada ocasión, equivale a expresar que *"el factor de crecimiento"* es 2. Igualmente, si se *"triplica"*, el *"factor de crecimiento"* es 3.

Actividad Individual

3. En cada uno de los siguientes casos completa las **tablas** y determina el valor inicial de la mancha de petróleo y su factor de crecimiento en cada período. Escribe la **expresión algebraica** que modela la variación según los datos obtenidos:

Tabla C

t	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S	S	2		4.5	6.75		15.1875	22.78125		

Superficie inicial de la mancha:________ Factor de crecimiento: ______ $S(t)$_____________

Tabla D

t	T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
S	S	3	4.8			19.6608				

Superficie inicial de la mancha:_______ Factor de crecimiento: _____ *S(t)*___________

Actividad de Equipo

4. Si el factor de crecimiento es 1.5 ¿qué porcentaje del valor actual le corresponde en cada ocasión a ese crecimiento? Es decir, ¿cuál es la *tasa porcentual* de crecimiento? Discute con tus compañeros qué significa incrementar un cierto porcentaje una cantidad; recurre a casos especiales, por ejemplo, si la superficie de la mancha se incrementa:

a). En un 100%, significa que la superficie actual mide _____ veces la anterior; cantidad que corresponde al factor de crecimiento.

b). En un 200%. significa que la superficie actual mide _____ veces la anterior; cantidad que corresponde al factor de crecimiento.

c). En un 50%, significa que la superficie actual mide _____ veces la anterior; cantidad que corresponde al factor de crecimiento.

d). ¿Qué porcentaje del valor *(tasa porcentual)* corresponde a un crecimiento cuyo factor es 1.8? ____

____

e). ¿Si el factor es 3, ¿en qué porcentaje se incrementó el valor anterior para obtener el actual?

____

____

f). Si el porcentaje que se incrementa para cada valor es del 75% del anterior, ¿de qué factor se está hablando? ____

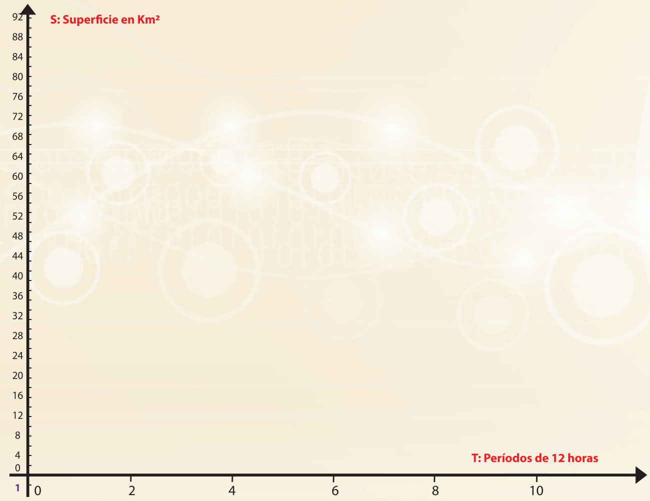
____

g). ¿Cuáles son las respectivas tasas de crecimiento en las **tablas C y D** del punto anterior? ____

____

Actividad de Equipo

5. Tomando como referencia los ejes que se muestran enseguida, grafica las curvas que corresponden a ***S(t)*** en cada una de las situaciones expresadas por las **Tablas C y D**. Toma en cuenta que los períodos en cada caso son de diferente número de horas:



Cuando se establece un *período de tiempo*, éste puede considerarse de acuerdo a las horas, días meses, etc. que mejor describa el tiempo que le lleva a un fenómeno variar cierto porcentaje de su valor actual.

Actividad de Equipo

6. En los siguientes casos determina la superficie de la mancha de petróleo cuando ha transcurrido el tiempo indicado:

a). 48 horas en:

El caso del problema 1__________ El caso del problema 2___________

b). La cuarta parte del primer período en:

El caso del problema 1__________ El caso del problema 2___________

c). 80 horas en:

El caso del problema 1__________ El caso del problema 2___________

Actividad de Equipo

7. ¿Es posible determinar la extensión de la mancha de petróleo para cualquier instante mientras mantiene el mismo patrón de crecimiento? Discute con tus compañeros tu respuesta y anota claramente los argumentos que consideras que la respaldan de mejor manera.

____

____

____

____

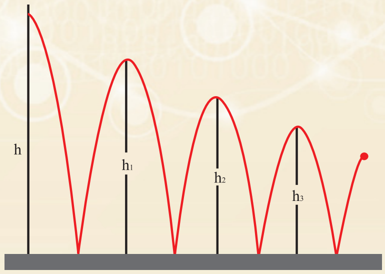
8. Escribe, mediante la notación apropiada, el dominio y rango de cada una de las **funciones** que modelan el crecimiento de la mancha de petróleo en las situaciones descritas en los puntos 1, 2 y 3.

____

____

____

Los rebotes de pelotas



Un hecho conocido es que cuando se deja caer una pelota desde cierta altura, ésta rebota varias veces antes de empezar a rodar. Por supuesto que no todas las pelotas rebotan igual, aún tratándose de pelotas utilizadas para un mismo tipo de juego o deporte, *el rebote de la pelota* — expresión utilizada para referirsea la altura máxima alcanzada en el primer rebote– es uno de los factores que determina su calidad.

Actividad Individual y de equipo

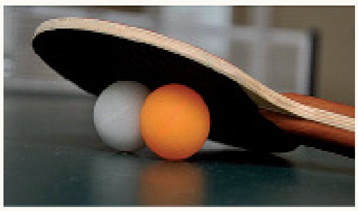
1. Por ejemplo, en tenis profesional un *rebote de pelota* cumple con la norma de calidad establecida, si al dejar caer la pelota desde una altura de 2.54 metros *(100 pulgadas)* sobre una superficie determinada, el rango de la altura máxima que alcanza en el primer rebote está entre 1.346 y 1.473 metros *(53 a 58 pulgadas)*, realizando el experimento a una temperatura de 21°C.

a). Si el *rebote de pelota* de cierta marca de pelotas de tenis alcanza el 54% de la altura desde donde se deja caer ¿consideras que cumple con la norma de calidad? Argumenta tu respuesta:

b). Si otra marca declara en el empaque que las pelotas disminuyen su rebote el 43% ¿consideras que las pelotas cumplen con la norma de calidad? Argumenta tu respuesta:

Actividad Individual

2. De manera similar, las pelotas reglamentarias para juegos de ping pong –o tenis de mesa– cumplen con la norma si el *rebote de pelota* es de 23 centímetros cuando se dejan caer desde una altura de 30 centímetros.



a). Expresa el porcentaje de la altura inicial que corresponde a la altura máxima alcanzada en el primer rebote. En consecuencia, determina el porcentaje que disminuyó.

i). Porcentaje de la altura inicial ___________

ii). Porcentaje que disminuyó____________

Una propiedad que resulta interesante sobre los rebotes de las pelotas con fines de determinar otras propiedades físicas de su movimiento, consiste en lo siguiente: **en rebotes sucesivos, la altura máxima que alcanza una pelota en cualquiera de ellos es un determinado porcentaje de la altura máxima alcanzada en el rebote anterior: este porcentaje no varía durante todo el tiempo que se mantiene rebotando**, es decir, antes de que empiece a rodar.

Actividad de Equipo

3. Utiliza la propiedad que se acaba de mencionar en el párrafo anterior para que, basándote en ella, llenes las **tablas** que indican la altura máxima alcanzada en cada rebote antes de que empiecen a rodar. En este ejemplo se considera que después de alcanzar una altura máxima de un centímetro, las pelotas prácticamente empiezan a rodar.

PELOTA A	
Número de rebote	Altura alcanzada
0	300
1	
2	
3	
4	
6	
7	24.70629
8	17.294403
9	

PELOTA B	
Número de rebote	Altura alcanzada
0	300
1	
2	
3	
4	18.75
5	9.375

PELOTA C	
Número de rebote	Altura alcanzada
0	300
1	
2	
3	64.8
4	38.88

a). Examina detenidamente las operaciones que llevaste a cabo para llenar las tres **tablas**, ¿encuentras alguna similitud con las operaciones que realizaste para llenar las tablas en la actividad de las manchas de petróleo? Explica tu respuesta: _______

____

____

Actividad de Equipo

b). Anota los datos que se solicitan:

	PELOTA A	PELOTA B	PELOTA C
Altura inicial $h_0 =$			
Porcentaje que disminuye cada altura *(tasa de decrecimiento)* =			
Factor constante para obtener cada altura =			

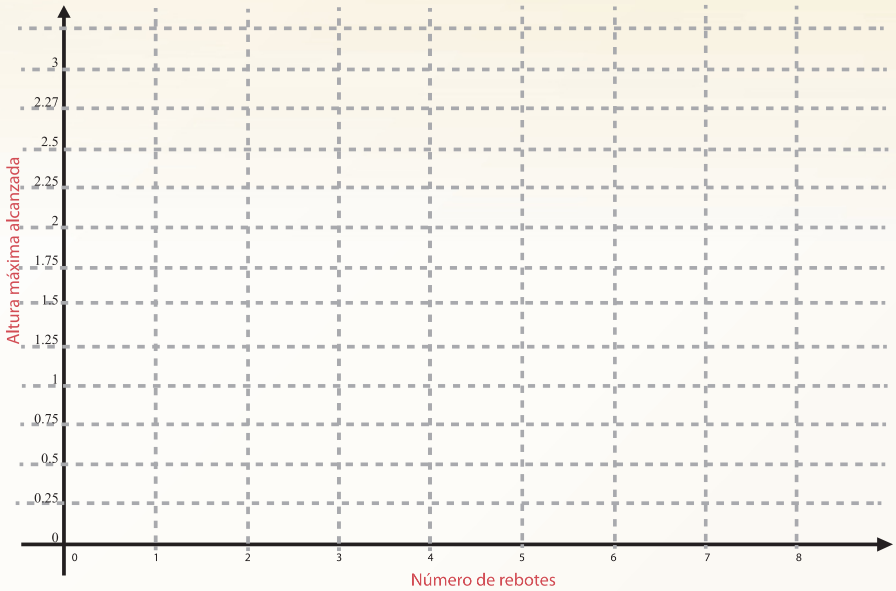
c). Escribe el procedimiento para calcular la altura máxima alcanzada en el noveno rebote de la pelota *C* y escribe esta altura redondeada a centésimos de centímetro:

h= _____ x _____; ***h***= ____________________ ***cm***

d). Escribe la expresión analítica que representa la altura máxima alcanzada por cada pelota en función del número de rebote. Se ha denotado por ***h(r)*** dicha altura y por ***r*** el *número de rebote*:

PELOTA __ 30% de reducción	PELOTA __ 50% de reducción	PELOTA __ 40% de reducción
h(r)=	***h(r)***=	***h(r)***=

e). Grafica con distinto color los puntos que representan las alturas alcanzadas por las tres pelotas en los primeros 6 rebotes. Compara los puntos que graficaste con las **gráficas** de tus compañeros y discutan si, en esta representación **gráfica**, tiene sentido o no unir los puntos de las alturas máximas alcanzadas por cada pelota mediante una curva suave. ¿Qué estarían indicando todos esos valores?



Las **funciones** que determinaste para las alturas máximas en los rebotes de pelotas están definidas para un subconjunto de los números enteros no negativos y su rango lo conforman valores que pertenecen a los números reales

Actividad Individual

f). Escribe, mediante notación apropiada, el dominio y el rango para cada una de las **tres funciones**.

Actividad de Cierre

El crecimiento de la mancha de petróleo bajo condiciones diferentes te llevó, en cada caso, a calcular su tamaño inicial, a identificar el factor de crecimiento, a deducir la tasa de crecimiento, a expresar en forma funcional la regla o ecuación mediante la cual se relaciona la superficie de la mancha S para cada período de tiempo T, y también a identificar y graficar las curvas que representan esos comportamientos.

Te diste cuenta que $S(T)$ no se expresa como las **funciones polinomiales**, es decir que no se trata de encontrar una determinada potencia de la variable t (*el cuadrado de t, el cubo de t, etc.*), sino de encontrar el valor de un número fijo *(base) cuyo exponente es la variable* t. Generalizando, tomemos como es usual, las variables x e y para indicar que la expresión analítica: $y = a\,(k)^x$ **representa una función exponencial.**

La diferencia fundamental entre esta expresión analítica y las correspondientes expresiones polinomiales se señala en el siguiente recuadro:

Expresión analítica de una función a la n-ésima potencia:

$f(x) = ax^n$

- La base es variable
- El exponente es fijo

Expresión analítica de una función exponencial:

$f(x) = a\,K^x$

- El valor inicial que permanece
- La base es fija
- El exponente es variable

Un componente de este modelo matemático que estuviste trabajando en el contexto de la extensión de la mancha de petróleo en el mar, fue la *base*. Te diste cuenta que coincide con el valor del *factor.* Esta *base se llama factor constante de cambio* porque para cualquier valor de la variable x, se comporta como tal, es decir, es el número por el cual se multiplica x veces el valor inicial para obtener el valor de y que le corresponde.

Por otro lado, en la actividad de los rebotes de pelotas, pudiste notar que esta forma de expresar una **función exponencial** no excluye los casos en los que *la base (o factor)* ***k*** es menor que 1. Cuando esto sucede, los valores sucesivos de la variable independiente, en lugar de crecer, disminuyen.

En ambos casos las tasas o porcentajes de crecimiento o decaimiento se pueden determinar como la cantidad que difiere de 1.

Resumiendo:

> En una función exponencial representada analíticamente por la expresión
>
> $$y = a(k)^x$$
>
> La base ***"(k)"*** en esta expresión corresponde al factor que determina el crecimiento o decaimiento en un **fenómeno** que varía exponencialmente.
>
> Particularmente, al denotar por ***"r"*** ***la tasa de variación*** en cada período o evento, se tiene que:
>
> $k=1+r$, el factor indica crecimiento.
> $k=1-r$, el factor indica decaimiento.

Actividad de Equipo

1. Discute con tus compañeros si tiene sentido que en la expresión $y=ak^n$, el factor k tome los valores que se enlistan enseguida. Explica claramente las conclusiones en cada caso.

b. $k= 1$

c. $k= 0$

d. $k<0$

Actividad de Equipo

5. En la **Tabla A** que llenaste para la Actividad 2 sobre la mancha de petróleo, determinaste que a los valores indicados para cada periodo de tiempo t les corresponden los valores de s que ahora se muestran en la **Tabla C**. Analiza cómo varían los valores sucesivos de cada variable para que respondas lo que se te pregunta:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
S	2	3	4.5	6.75	10.125	15.1875	22.78125	34.171875

a. ¿Qué operación llevas a cabo para obtener cada valor sucesivo de t?

b. ¿Qué operación llevas a cabo para obtener cada valor sucesivo de s?

A este tipo de sucesiones de números, tanto de valores de t como de s, en aritmética se les llama ***progresiones***. Las estudiaste en el curso de **matemáticas I**.

c. ¿Qué tipo de ***progresión*** es la que forman los valores sucesivos dados a t y cuáles son sus características?

d. ¿Qué tipo de ***progresión*** es la que forman los valores sucesivos dados a s y cuáles son sus características?

En una función exponencial representada analíticamente por la expresión

$$y = a(k)^x$$

Si los valores de la variable independiente forman ***una progresión*** aritmética, entonces los valores correspondientes de la variable dependiente forman una ***progresión geométrica.***

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

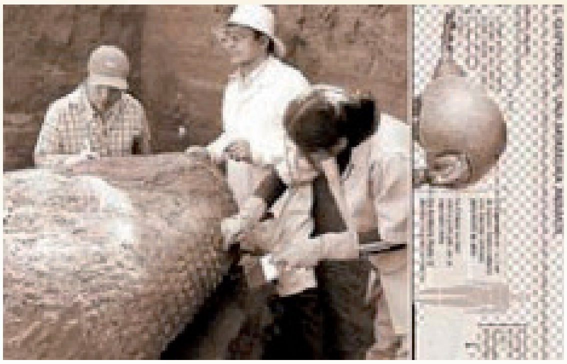
Los Logaritmos y la Variación Logarítmica

Actividad: 1
Actividad Individual

¿Cómo se mide la antigüedad de los fósiles?

En el periódico La República.pe, del país de Bolivia, se publicó la noticia siguiente:

Obreros descubren fósil de armadillo gigante en Cusco
Jueves, 19 de mayo de 2005 | 12:00 am



HISTÓRICO HALLAZGO

- *Se trata de mamífero que habitó en la ciudad imperial hace dos millones de años antes de Cristo.*
- *El Instituto Nacional de Cultura inició investigaciones y ordenó suspender obra.*

Cuando realizaban trabajos para la edificación de una vivienda, un grupo de obreros de construcción civil encontró los restos fósiles casi íntegros de un gliptodonte *(armadillo gigante)*. Se trata de una especie que habitó en el valle del Cusco hace dos millones de años antes de Cristo.

"Ha sido verdaderamente sorprendente. Estábamos sacando desmonte para construir una casa y de pronto nos dimos cuenta que golpeábamos algo duro. ¿Qué es esto?, dije y pensé que era una piedra o una roca. Seguí escarbando hasta que vimos que tenía forma de una tortuga gigante. Fue asombroso", relató Esteban Quispe, uno de los sorprendidos excavadores.

Seguramente has oído hablar del material radiactivo ***Carbono 14*** *(denotado por* ${}^{14}C$ *)*; todos los seres vivos tenemos cierta cantidad en nuestro organismo, la cual se mantiene estable por el intercambio con el medio ambiente. Cuando un ser vivo muere, el ${}^{14}C$ deja de renovarse e inicia un proceso de decaimiento radiactivo; cada vez que transcurre cierto número de años la cantidad original se reduce a la mitad, a este período de tiempo se le llama vida media del material radiactivo que se esté tratando. El ${}^{14}C$ tiene una vida media de aproximadamente 5670 años.

Actividad de Equipo

1. Actualmente existen armadillos, pero no gigantes. Si un armadillo muere hoy y encuentran restos fósiles de él dentro de 500 años, ¿qué porcentaje de la cantidad de ${}^{14}C$ se encontrará en sus restos? Para responder, toma en cuenta que:

- la cantidad inicial de este material radiactivo en el armadillo es el 100%,
- que se asigna como período la *vida media* del material radiactivo, o sea que cada periodo t es de 5670 años.
- También te puede ser de utilidad llevar a cabo las siguientes acciones y comentar con tus compañeros de equipo lo que vas determinando en cada una, aunque si ya tienes una propuesta para encontrar la respuesta, puedes llevarla a cabo y comentar luego tu estrategia y tus resultados:

a. Haz una **tabla** con los porcentajes y fracciones de las cantidades de ^{14}C que quedarían en el armadillo en los períodos indicados.

t Período de 5670 años	0	2	3	4
C Porcentaje de ^{14}C	100			
C Fracción de la cantidad de ^{14}C	1			

b. ¿Qué tipo de variación está expresada en la **tabla**?

____

____

c. ¿Cuánto se reduce en cada período la cantidad de ^{14}C?______ Por lo tanto, ¿cuál es la tasa de decaimiento radiactivo?______ ¿Cuál es el factor de reducción?______

d. Expresa analíticamente la variación de C, es decir, del porcentaje o fracción de la cantidad inicial C_o de ^{14}C, como una **función** del período t.

e. Tomando en cuenta que cada período es de 5670 años; si a la hora de analizar los huesos del armadillo, se datan con una antigüedad de 500 años, ¿qué parte del período le corresponde a ese número de años?

f. Utiliza convenientemente la expresión que determinaste en el inciso C para que des respuesta a la pregunta original: ¿Qué parte de la cantidad inicial de ^{14}C queda en ese momento?

Tarea (ind).

No siempre se estudia la antigüedad de los fósiles mediante el ^{14}C puesto que hay restos fósiles que datan de hace millones de años. Por ejemplo, para determinar la edad del fósil de armadillo gigante encontrado en Cusco, Bolivia, se utilizó otro material radiactivo cuya vida media es muchísimo mayor. Puedes investigar, por ejemplo, cuál es la vida media del Uranio 235.

Uranio Natural

99.27%	0.72%
Uranio 238	Uranio 235

a. Escribe enseguida por qué consideras que se descartó utilizar el ^{14}C para este caso:

b. Después de investigar la vida media del Uranio 235 ¿cuántos períodos de esta sustancia radiactiva corresponden a los dos millones de años a.C. que se determinaron como la antigüedad del fósil de armadillo gigante encontrado en Bolivia?

En realidad la eficacia de este método de datación mediante sustancias radiactivas se presenta cuando, al encontrar los fósiles, se desconoce cuánto tiempo ha transcurrido desde que murió ese ser vivo, ya que la cantidad de ^{14}C se puede medir directamente mediante instrumentos adecuados. En cambio, encontrar el tiempo, requiere de **cálculos matemáticos** de diferente tipo:

3. Si en la actualidad, al encontrar unos fósiles de armadillo se determina mediante medición directa que contienen la octava parte de la cantidad inicial de ^{14}C que debió tener mientras estaba vivo, simplemente se plantea la expresión analítica que ya conoces: $C=C_o\,(k)^t$; toma en cuenta que la cantidad inicial C_o se establece como el total, es decir, $C_o = 1$; que C es la parte actual y k es el factor que en cada período reduce a la mitad la cantidad de ^{14}C. Con toda esta información Responde lo siguiente:

c. ¿Cuánto tiempo hace que murió el armadillo? Describe qué requieres hacer para dar respuesta a esta situación:

d. ¿Y si se encuentra tan sólo un 5% de la cantidad inicial de ^{14}C, cuánto tiempo hace que murió ese armadillo?, ¿Sabes cómo despejar t? Discute con tus compañeros qué tipo de operación de las que conoces te serviría para dar solución a esta situación

Desarrollo

Tarea (ind).

En estas actividades vas a explorar el significado de un concepto matemático que tal vez no conoces:

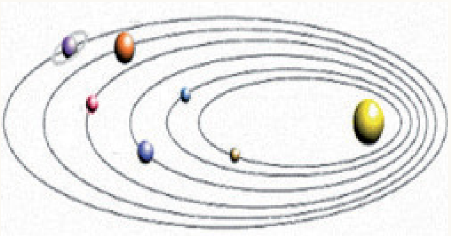
los logaritmos

Actividad de Equipo y grupal.

El conocer algunos elementos provenientes de la historia de las **matemáticas** nos ayuda a comprender el papel de éstas en la sociedad al mostrar el desarrollo de las **matemáticas** como una actividad humana. Experimentar estos acercamientos con la historia de las **matemáticas** nos permite también apreciar a esta ciencia como uno de los mayores logros culturales e intelectuales de la humanidad.

NOTA HISTÓRICA

El siglo XVI y el principio del XVII vieron una enorme expansión del conocimiento científico en todas las áreas. La circunnavegación del globo terráqueo en 1521 por *Fernando de Magallanes y Juan Sebastián Elcano* inauguró una nueva era de exploración de los mares que difícilmente dejó un rincón del mundo sin ser visitado. En 1569 *Gerhard Mercator* publicó su mapa del nuevo mundo, un acontecimiento que tendría un impacto decisivo en el arte de la navegación.



En Italia, *Galileo Galilei* sentaba los fundamentos de la mecánica y en Alemania *Johannes Kepler* formulaba sus tres leyes del movimiento planetario. Estos desarrollos involucraban cantidades de datos numéricos cada vez mayores, forzando a los científicos a dedicar mucho tiempo a tediosos cómputos numéricos.

Estos grandes descubrimientos geográficos propiciaron una gran expansión económica y comercial, permitiendo que algunos puertos de Europa se convirtieran en pequeñas capitales financieras y bancarias. Por consiguiente, había una necesidad social de facilitar las operaciones con magnitudes grandes; el escocés John Napier enfrentó este reto: **crear una herramienta para facilitar los cálculos.**

Actividad: 2
Actividad Individual

Tarea (ind).

1. Analiza los datos numéricos que aparecen concentrados en las tres siguientes tabulaciones y complétalas, agregando los datos faltantes.

Tabla A

n	*a (n)*
-5	1/32
-4	1/16
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Tabla B

n	*b (n)*
-5	1/243
-4	1/81
-3	1/27
-2	1/9
-1	1/3
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2187
8	6561
9	19683
10	59049
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	10460353203
22	31381059609
23	94143178827
24	282429536481
25	847288609443
26	2541865828329
27	7625597484987
28	22876792454961
29	68630377364883
30	205891132094649

Tabla C

n	*c (n)*
-5	1/3125
-4	1/625
-3	1/125
-2	1/25
-1	1/5
0	1
1	5
2	25
3	125
4	625
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	30517578125
16	152587890625
17	762939453125
18	3814697265625
19	19073486328125
20	95367431640625
21	476837158203125
22	2384185791015625
23	11920928955078125
24	59604644775390625
25	298023223876953125
26	1490116119384765625
27	7450580596923828125
28	37252902984619140625
29	186264514923095703125
30	931322574615478515625

Por supuesto que sería posible continuar agregando más datos a cada una de estas tabulaciones.

Al completar las **tablas** advertiste que los números en cada columna forman una secuencia o sucesión.

a. ¿Qué tipo de sucesión forman los números n de la primera columna en cada **Tabla**?

b. ¿Qué tipo de sucesión forman los números $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$ de la segunda columna en cada **Tabla**?

c. Describe qué es lo que sucede con los valores de $a(n)$, $b(n)$ y $c(n)$ para valores de n enteros negativos más pequeños que los considerados en las Tablas *(recuerda que un número negativo "k" es menor que otro número negativo "r" si en la recta numérica k se encuentra a la izquierda de r, es decir:* $k<r$ *si* $|k|>|r|$*).*

d. ¿Existe algún valor de n para el cual el valor de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ sea cero? Argumenta tu respuesta.

e. ¿Existe algún valor de n para el cual el valor de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ sea negativo? Argumenta tu respuesta.

f. Escribe una fórmula que permita generar todos los valores numéricos de las secuencias $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$.

$a(n) =$ ________ , $b(n) =$ ________ $c(n) =$ ________

Junto con tu(s) compañero(s) de equipo, analiza y discute las tareas de exploración que más delante se te indican. Trata de formular respuestas claras y concisas a lo que se te pregunta. De ser posible, trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para dar más claridad y precisión a tus respuestas.

1. **EXPLORACIÓN No. 1 Multiplicaciones**

Actividad de Equipo

a. Escoge algunos pares de números de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n$ ambos de la misma **Tabla** y **multiplícalos**, usando la calculadora. ¿Es el producto de dos cualesquiera de los términos de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n$ un término de la misma secuencia? ¿Por qué? Proporciona una justificación clara a tu respuesta. *(Es probable que tengas que extender las secuencias para verificar tus conclusiones).*

Para encontrar el resultado de la multiplicación de dos números; α,β tienes que fijarte en el exponente o potencia (n) que tienen ambos números. Utiliza la notación $E(\alpha)$ para representar el exponente del número α y $E(\beta)$ para representar el exponente del número β.

b. Suponiendo que las **Tablas A, B y C** pudieran ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados, ¿podrían ser usadas por separado como **tablas de multiplicación**? ¿Cuáles serían las instrucciones para usarlas?

c. Trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para resumir las instrucciones que formulaste en el punto anterior.

Actividad de Equipo

3. EXPLORACIÓN No. 2 Divisiones

a. Trabajando con tu*(s)* compañeros de equipo, toma dos términos cualesquiera de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, ambos de la misma sucesión, y divídelos usando la calculadora. El resultado de la división, ¿es también un término de la sucesión correspondiente $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta. *(Es probable que tengas que extender las secuencias para verificar tus conclusiones)*.

b. Al igual que en la Exploración No. 1, supongamos que las **Tablas A, B y C** pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas por separado como **tablas de división**? ¿Cuáles serían las instrucciones para usarlas?

c. Trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para resumir las instrucciones que formulaste en el punto anterior.

Actividad de Equipo

4. EXPLORACIÓN No. 3 Potenciación

a. Trabajando con tu(s) compañeros de equipo, toma un término cuales quiera de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ y elévalo a un exponente, usando la calculadora. **El resultado de la potenciación,** ¿es también un término de la sucesión que seleccionaste? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta. Recuerda que es probable que tengas que extender las **tablas** para verificar tu resultado.

b. Al igual que en las **Exploraciones No. 1 y 2**, supongamos que las **Tablas A, B y C** pueden ser extendidas y publicadas como folletos, conteniendo una gran cantidad de valores consignados. ¿Podrían ser usadas por separado como **tablas de potencias**?

¿Bajo qué condiciones? ¿Cuáles serían las instrucciones para usarlas?

c. Trata de usar el lenguaje simbólico del álgebra para resumir las instrucciones que formulaste en el punto anterior.

Actividad Grupal

SUMARIO

4. En las tres Exploraciones anteriores has investigado cómo **multiplicar, dividir** y elevar a un **exponente** los términos de una misma sucesión del tipo $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$.

5. Suponiendo que no tuvieras acceso a una calculadora o computadora, sino solamente a **Tablas** de valores numéricos de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ como las que has estado usando en estas Exploraciones, describe cómo tendrías que usar estas **Tablas** para realizar los cálculos referidos:

   a. **Multiplicación:**

   b. **División:**

   c. **Potenciación:**

Cada una de las operaciones aritméticas que has explorado se reduce a una anterior en la jerarquía de las operaciones, disminuyendo en gran medida la dificultad de los cálculos numéricos.

6. ¿Cuáles son las ventajas y limitaciones de estas **Tablas**?

____

____

____

Tarea (ind).

NOTA HISTÓRICA

Las reglas que descubriste en las *Actividades* anteriores sobre la relación existente entre los términos de una progresión geométrica y los exponentes correspondientes de la razón común, para las operaciones de **multiplicación, división y potenciación**, ya eran conocidas en esa época. Esta relación entre una progresión geométrica y una aritmética es la idea clave detrás de la invención y desarrollo de los **logaritmos**. Como has observado, para que estas **tablas** sean útiles para simplificar la tarea de realizar las operaciones aritméticas con números grandes, se deben de llenar los amplios huecos entre las entradas de nuestras **tablas**; ésta también fue una de las ideas de Napier, *"hacer continua la serie geométrica"*.

A DESCRIPTION OF THE ADMIRABLE TABLE OF LOGARITHMES: WITH A Declaration of the most Plentifull, Easie, and Speedy use thereof ...

LONDON

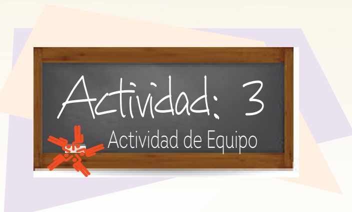
Tras años de luchar con este problema, Napier se decidió por utilizar como razón común *("proporción", en sus propias palabras)* el número $1 - 10^{-7}$, o 0.9999999 para construir su **tabla**; concluirla le llevó veinte años.

Una vez completada esta monumental tarea a Napier le faltaba bautizar su creación, y decidió adoptar la palabra griega ***logaritmo***, compuesta por los vocablos *logos (razón o cociente)* y *arithmos (número)*, es decir, **número de razones**. Este trabajo lo publicó en 1614

Esta idea original de Napier fue perfeccionada por Briggs, quien se decidió tomar como base *(razón común)* el número 10, dando lugar a los llamados ***logaritmos*** decimales. Tanto Napier como Briggs inventaron los ***logaritmos*** antes que el uso de la actual **notación exponencial** se hubiera consolidado en el álgebra de la época.

"Al reducir el trabajo, la invención de los logaritmos duplicó la vida de los astrónomos"
Pierre Simon Laplace.

Verificando consistencia y precisión de las reglas



1. **EXPLORACIÓN No. 1 Multiplicaciones**

Escoge algunos pares de números de $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$ de tal modo que el primero de estos números sea de una de las **Tablas** y el segundo de una **Tabla** diferente y **multiplícalos**, usando la calculadora. ¿Es el producto de dos cualesquiera de los términos de estas secuencias un término de alguna de las tres secuencias? ¿Este producto se puede calcular usando las **Tablas** por medio de las reglas que formulaste anteriormente? ¿Por qué? Proporciona una justificación clara a tu respuesta. *(Es probable que tengas que extender las secuencias para verificar tus conclusiones).*

2. **EXPLORACIÓN No. 2 Divisiones**

Trabajando con tu(s) compañeros de equipo, toma dos términos cualesquiera de distintas sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$, y **divídelos**, usando la calculadora. El resultado de la **división**, ¿es también un término de alguna de las sucesiones $a(n)$, $b(n)$ o $c(n)$? ¿Este cociente se puede calcular usando las **Tablas** por medio de las reglas que formulaste anteriormente? ¿Por qué? Argumenta claramente tu respuesta.

Simbolización adecuada de las reglas

Tarea (ind).

3. Considera los datos numéricos que aparecen concentrados en las **tres siguientes tabulaciones**. Completa los datos que faltan en las celdas de color.

Tabla A

n	$a(n) = 2^n$
0	1
1	2
2	4
3	8
	10
4	16
5	32
6	64
	100=10²
7	128
8	256
9	512
	1000=10³
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
	10000=10⁴
14	16384
15	32768
16	65536
	100000=10⁵
17	137072
18	262144
19	524288
	1000000=10⁶
20	1048576
21	2097152
22	4194394
23	8388608
	10000000=10⁷
24	16777216
25	33554432
26	67108864
	100000000=10⁸
27	134217728
28	268435456
29	536870912
30	1073741824

Tabla B

n	$a(n) = 3^n$
0	1
1	3
2	9
	10
3	27
4	81
	100
5	243
6	729
	1000
7	2187
8	6561
	10000
9	19683
10	59049
	100000
11	177147
12	531441
	1000000
13	1594323
14	4782969
	10000000
15	14348907
16	43046721
	100000000
17	129140163
18	387420489
19	1162261467
20	3486784401

Tabla C

n	$c(n) = 5^n$
0	1
1	5
	10
2	25
	100
3	125
4	625
	1000
5	3125
	10000
6	15625
7	78125
	100000
8	390625
	1000000
9	1953125
10	9765625
	10000000
11	48828125
	100000000
12	244140625
13	1220703125
14	6103515625
15	30517578125

a. Al completar los datos faltantes en estas **Tablas**, obtuviste los siguientes resultados importantes:

Actividad de Equipo

Tabla A	Tabla B	Tabla C
E(10) = E(100) = E(1000) = E(10000) = E(100000) = etcétera.	E(10) = E(100) = E(1000) = E(10000) = E(100000) = etcétera.	E(10) = E(100) = E(1000) = E(10000) = E(100000) = etcétera.

b. Trata de completar lo siguiente:

E(1000000) =

E(100000000) =

Actividad de Equipo

- *¿No crees que esto es algo confuso?*
- *¿Podrías proponer algo para evitar la confusión?*

c. ¿Qué condiciones es necesario precisar para una correcta formulación de las reglas?

Actividad Grupal

NOTA HISTÓRICA

Rara vez en la historia de la ciencia una idea **matemática** abstracta fue recibida con tanto entusiasmo por toda la comunidad científica que la invención de los **logaritmos** por lo que el uso de éstos se difundió rápidamente.

Hay que enfatizar la ambigüedad que en esa época tenía el **concepto de logaritmo**, al no precisar una base en específico. Todos los números que se generaran bajo la idea de hacer continua la serie geométrica eran considerados **logaritmos**, y por lo tanto un mismo número podía tener muchos **logaritmos**, dependiendo de la serie geométrica que se tomara como referencia. En este sentido, **los logaritmos** eran percibidos como algo circunstancial, no necesariamente relacionado con cada número en particular. Más que nada, en esta etapa **los logaritmos** eran considerados como un simple truco, como una herramienta facilitadora de operaciones aritméticas que resultaban engorrosas mediante el procedimiento habitual que hoy denominamos *"de lápiz y papel"*.

No solamente la definición de **logaritmo** de Napier es diferente en muchos aspectos de la definición moderna introducida por Leonhard Euler en 1728, sino que también la noción de base es inaplicable a su sistema. Euler introdujo el concepto de **logaritmo** diciendo que, si a $a>1$, el **logaritmo** de x en base a es el exponente z tal que $a^z=x$, siendo esta la primera vez que se presentaba el **logaritmo** interpretado como un exponente.

$\log_a x=z$ quiere decir que $a^z=x$.

"El milagroso poder de los cálculos modernos se debe a tres inventos: la notación arábiga, las fracciones decimales y los logaritmos."
Fioran Cajori.
A History of Mathematics (1893).

El concepto de logaritmo

Actividad Individual

Al desarrollar todas las *Actividades* previas, en las que usaste las sucesiones $a(n) = 2^n$, $b(n) = 3^n$ y $c(n) = 5^n$, te diste cuenta que la notación coloquial previa resulta confusa, por ello, al precisar los **logaritmos** como lo hizo Euler, se obtiene la claridad que se muestra en los siguientes resultados importantes:

Notación exponencial	Notación coloquial previa	Notación moderna
$2 = 2^1$ $3 = 3^1$ $5 = 5^1$	E (2) = 1 E (3) = 1 E (5) = 1	$\log_2 2 = 1$ $\log_3 3 = 1$ $\log_5 5 = 1$
$4 = 2^2$ $9 = 3^2$ $25 = 5^2$	E(4)=2 E(9)=2 E(25)=2	$\log_2 4 = 2$ $\log_3 9 = 2$ $\log_5 25 = 2$
$8 = 2^3$ $27 = 3^3$ $125 = 5^3$	E(8)=3 E(27)=3 E(125)=3	$\log_2 8 = 3$ $\log_3 27 = 3$ $\log_5 125 = 3$

4. Completa los dos renglones vacíos de la **Tabla de arriba** con algunos ejemplos a fin de que empieces a usar la notación moderna para los **logaritmos**.

   a. Completa las siguientes igualdades y verifica mediante la notación exponencial tus respuestas.

$$\log_2 \frac{1}{2} = \qquad \log_3 \frac{1}{9} = \qquad \log_5 \frac{1}{125} =$$

$$\log_2 \frac{1}{128} = \qquad \log_3 \frac{1}{243} = \qquad \log_5 \frac{1}{78125} =$$

b. Completa las siguientes igualdades y explica tus respuestas.

$\log_2 1 =$ $\qquad$ $\log_3 1 =$ $\qquad$ $\log_5 1 =$

$\log_2 -2 =$ $\qquad$ $\log_3 -1 =$ $\qquad$ $\log_5 -10 =$

Actividad de Equipo

5. Usando la notación moderna, expresa **las propiedades básicas de los logaritmos** que ya has advertido a lo largo de las *Actividades* previas. Enuncia estas propiedades de manera general.

a. El **logaritmo** de un **producto**.

$\log_a(a \cdot \beta) =$

b. El **logaritmo** de un **cociente**.

$\log_a \dfrac{a}{\beta} =$

c. El **logaritmo** de una **potencia**.

$\log_a a^m =$

Actividad: 4

Actividad Individual

Fórmula para el cambio de base

Resuelve como tarea los siguientes puntos:

Tarea (ind).

1. Considera la siguiente **tabla** de **logaritmos** de diferentes bases, tomadas con cinco decimales.

x	$\log_2 x$	$\log_3 x$	$\log_5 x$	$\log_{10} x$ Se denota $\log x$
1	0	0	0	0
2	**1**	0.63093	0.43068	0.30103
3	1.58496	**1**	0.68261	0.47712
4	2	1.26186	0.86135	0.60206
5	2.32193	1.46497	**1**	0.69897
6	2.58496	1.63093	1.11328	0.77815
7	2.80735	1.77124	1.20906	0.84509
8	3	1.89279	1.29203	0.90309
9	3.16993	2	1.36521	0.95424
10	3.32193	2.09590	1.43068	**1**

a. Usa esta **tabla** para realizar los siguientes cálculos en todos los renglones *(cuando sea posible).*

$\frac{\log_3 x}{\log_2 x} =$ $\frac{\log_2 x}{\log_3 x} =$ $\frac{\log_2 x}{\log_5 x} =$

$\frac{\log_5 x}{\log_2 x} =$ $\frac{\log_5 x}{\log_3 x} =$ $\frac{\log_3 x}{\log_5 x} =$

$\frac{\log_5 x}{\log_2 x} =$ $\frac{\log_5 x}{\log_3 x} =$ $\frac{\log_3 x}{\log_5 x} =$

b. Los valores que obtuviste al realizar estos cálculos, ¿se corresponden con alguno de los valores contenidos en la **Tabla** de **logaritmos**?

c. Sin realizar ningún cálculo y usando solamente la **Tabla** de **Logaritmos**, ¿podrías decir cuál es el resultado de las siguientes operaciones?

$\frac{\log_2 x}{\log x} =$ $\frac{\log_3 x}{\log x} =$ $\frac{\log_5 x}{\log x} =$

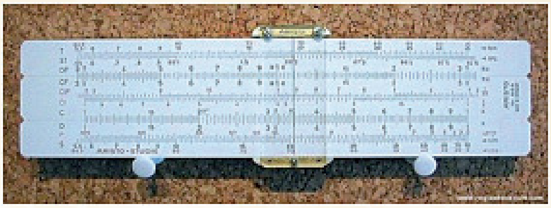
d. En general, ¿qué se puede afirmar en relación con los siguientes cocientes de **logaritmos?**

$\frac{\log_a x}{\log_b x} =$ ______________ Por lo tanto; se tiene que: $\log_a x =$ __________ $\log_b x$

$\frac{\log_b x}{\log_a x} =$ ______________ Por lo tanto; se tiene que: $\log_b x =$ __________ $\log_a x$

Tarea (ind).

NOTA HISTÓRICA



Algunos innovadores comprendieron que podía construirse un instrumento mecánico para efectuar los cálculos con los **logaritmos**. La idea de utilizar dos escalas logarítmicas que pudieran ser movidas una a lo largo de la otra se originó con William Oughtred *(1574-1660)*, el cual fue el inventor de la **"Regla de cálculo"**.

La **"Regla de cálculo"**, en sus múltiples variantes, sería la fiel compañera de todo científico e ingeniero por los siguientes 350 años. A principios de la década de 1970, las primeras calculadoras electrónicas de mano aparecieron en el mercado, y en los siguientes diez años la **"Regla de cálculo"** se volvió obsoleta.

Actividad: 5
Actividad de Equipo

1. Con frecuencia se usan los **logaritmos** cuando hay que despejar exponentes desconocidos, como en los ejemplos siguientes:

Recuerda que por las propiedades de la igualdad
Si se tiene $a = b$ entonces: $a + c = b + c$
$(a)\ (c) = (b)\ (c)$
$a^p = b^p$
$\log a = \log b$

Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando **logaritmos** y las propiedades de éstos.

a). $3^x = 1534$

b). $56 = (4)\ 1.3^t$

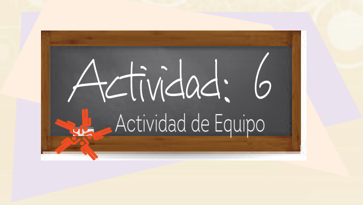
2. Regresando a la pregunta de ¿Cuál es la antigüedad del fósil de armadillo que contiene el 5% de su ^{14}C original?

- Para obtener la respuesta, se tiene que despejar t de la ecuación; ______________
- Aplica **logaritmos** y utiliza sus propiedades para que logres despejar t.
- ¿Cuál es entonces la antigüedad del fósil en años?

3. Deducir una expresión analítica para calcular la antigüedad t *(períodos de 5670 años)* de un fósil en función de la cantidad de ^{14}C remanente (C).

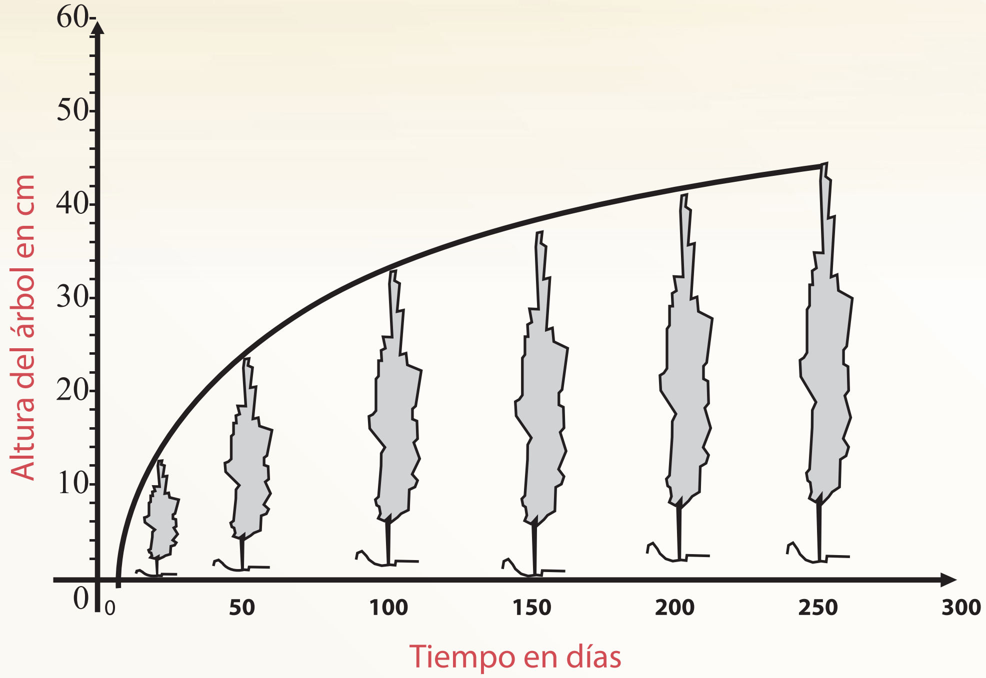
   - Recuerda que para calcular la cantidad de ^{14}C remanente se tiene la expresión $C = C_0(0.5)^t$

Pero si los **logaritmos** han perdido su papel como pieza fundamental en los **cómputos matemáticos,** la variación logarítmica permanece en el centro de casi todas las ramas de las **matemáticas**, puras o aplicadas. Aparece en un gran número de aplicaciones, desde la física y la química hasta la biología, la psicología, el arte y la música.



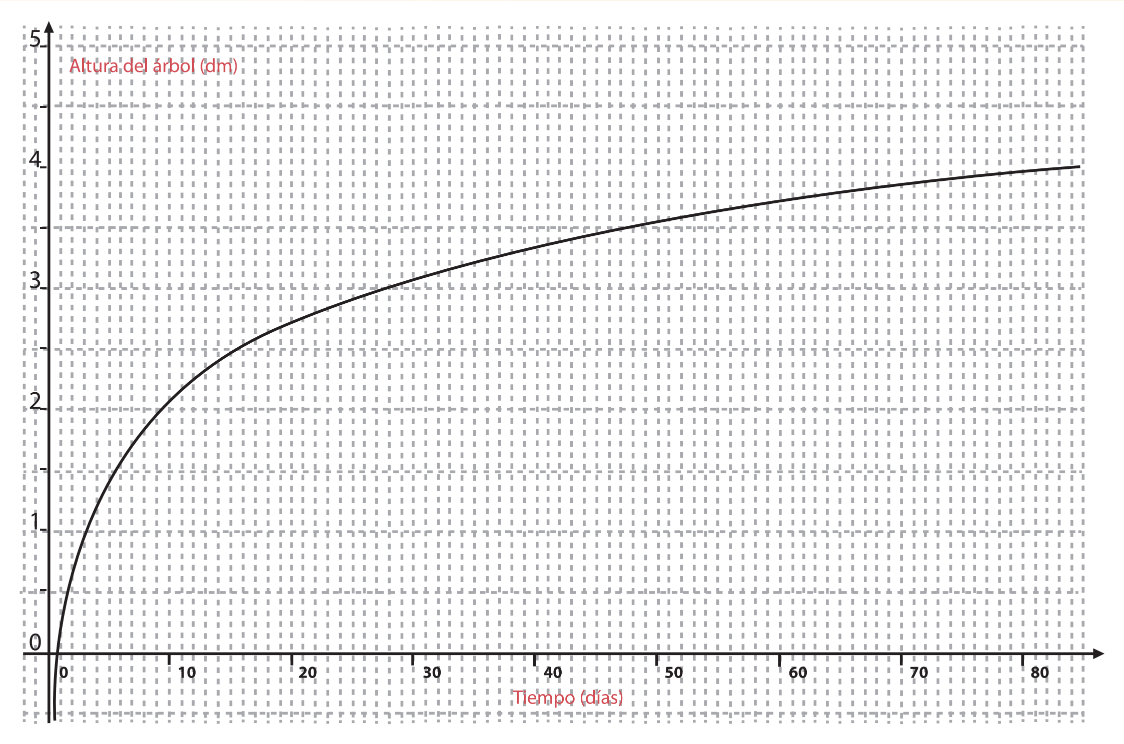
Variación Logarítmica

Ley de crecimiento de un árbol



Se determinó **la ley de crecimiento de un árbol** con base en varias mediciones de su altura realizadas en un período de 250 días, para diferentes tipos de árboles. De esta manera se logró obtener una representación gráfica de la variación de la altura del árbol y el tiempo transcurrido.

1. Considera a t como el tiempo transcurrido en días y A la altura del árbol en dm. La gráfica siguiente muestra el crecimiento de cierto tipo de pino.



a. Describe las características de esta **gráfica**.

b. Utilizando la **gráfica** anterior, completa la siguiente **tabla**.

Tiempo, t (días)	Altura del árbol, A (dm)
1	
3	
9	
27	
81	

c. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores del tiempo, t?

d. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores de la altura, A?

e. ¿De qué forma crees que está aumentando la altura del pino? Argumenta tu respuesta.

____

____

f. ¿Puedes representar por medio de una fórmula la relación entre la altura de éste árbol y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

____

____

g. Expresa la fórmula obtenida en una equivalente utilizando **logaritmo** base 10.

____

____

h. ¿Cómo puedes comprobar que ambas fórmulas son equivalentes?

____

____

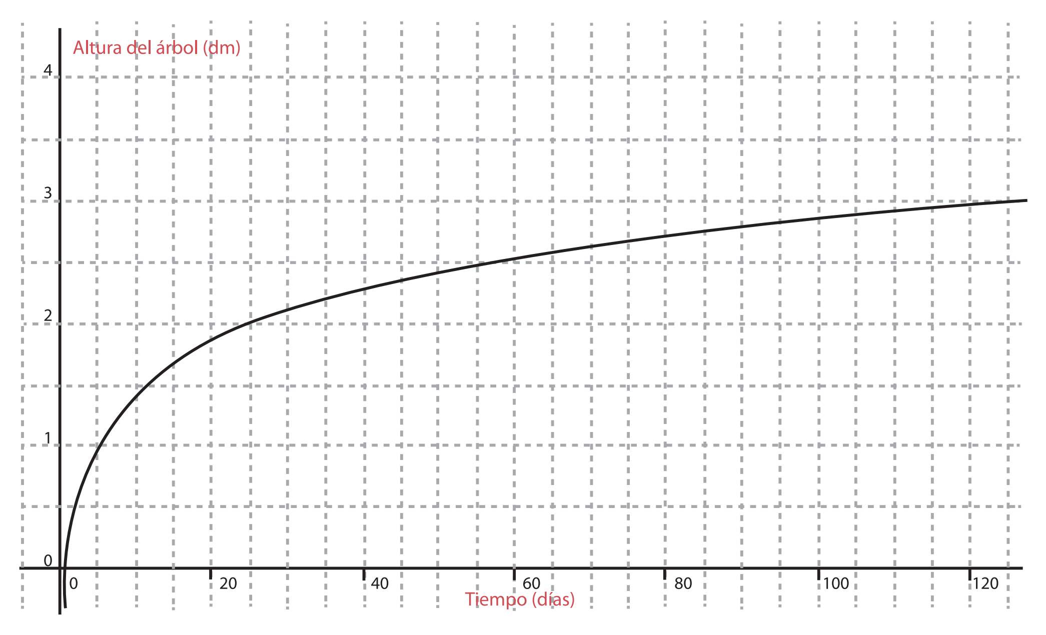
i. Con la fórmula que encontraste completa la siguiente **tabla**.

Tiempo, t (días)	Altura del árbol, A (dm)
1	
2	
4	
8	
16	

j. ¿Qué tipo de sucesiones numéricas forman los valores de t y de A?

Tarea (ind).

2. La siguiente **gráfica** muestra el crecimiento de un mezquite.



a. Utilizando la **gráfica** de la Figura anterior, completa la siguiente **tabla**.

Tiempo, t (días)	Altura del árbol, A (dm)

b. ¿De qué forma crees que está aumentado la altura del mezquite? Argumenta tu respuesta.

____

____

c. ¿Puedes representar mediante una fórmula la relación entre la altura del mezquite y el tiempo transcurrido? ¿Cuál es la fórmula?

____

____

d. Expresa la fórmula obtenida en una equivalente utilizando **logaritmo** base 10.

____

____

e. Con la fórmula que encontraste completa la siguiente **tabla**.

Tiempo, t (días)	Altura del árbol, A (dm)
1	
2	
4	
8	
16	

f. ¿Qué tipo de sucesiones numéricas forman los valores de t y de A?

7. ¿Podrías hacer alguna conjetura acerca de cómo se comportan los cambios en y en las funciones logarítmicas, y explica bajo qué circunstancias eso ocurre?

Actividad de Cierre

En la secuencia anterior conociste algunos elementos de la historia de las **matemáticas**. Advertiste que los **logaritmos** surgieron por una necesidad social; de facilitar los cálculos con números grandes, y cómo éstos fueron perfeccionándose hasta su consolidación en la estructura **matemática**.

Definición de logaritmo:

Si $a>1$, el logaritmo de x en base a es el exponente z tal que $a^z = x$

$\log_a x = z$ quiere decir que $a^z = x$.

En las Exploraciones que realizaste con las **Tablas A, B y C** descubriste la relación entre una sucesión geométrica y una sucesión aritmética y cómo esta relación fue la idea clave para la invención de los **logaritmos**. Surgiendo también a partir de estas exploraciones las propiedades de los **logaritmos**.

Propiedades de los logaritmos:

a) El **logaritmo** de un **producto** es igual a la **suma** de los **logaritmos**.

$$\log_a(a \cdot \beta) = \log_a a + \log_a \beta$$

b) El **logaritmo** de un **cociente** es igual a la **resta** de los **logaritmos**.

$$\log_a = \frac{a}{\beta} \quad \log_a a - \log_a \beta$$

c) El **logaritmo** de una **potenciación** es igual al **producto** de la potencia por el **logaritmo**.

$$\log_a a^m = m \cdot \log_a a$$

Cada una de las operaciones aritméticas se reduce a una anterior en la jerarquía de las operaciones, disminuyendo en gran medida la dificultad de los cálculos numéricos.

Otra importante propiedad es que los **logaritmos** de diferentes bases son proporcionales, esto es, se obtienen unos de otros mediante la **multiplicación** por una constante.

Cambio de base:

$\frac{\log_a x}{\log_b x} = \log_a b$ por lo tanto; se tiene que: $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$

1. Completa las siguientes igualdades:

a. $\log_2 x =$ ____________________ $\log_5 x$

b. $\log_6 x =$ ____________________ $\log x$

c. $\log x =$ ____________________ $\log_3 x$

Los **logaritmos** no están definidos cuando x es negativo o cero;

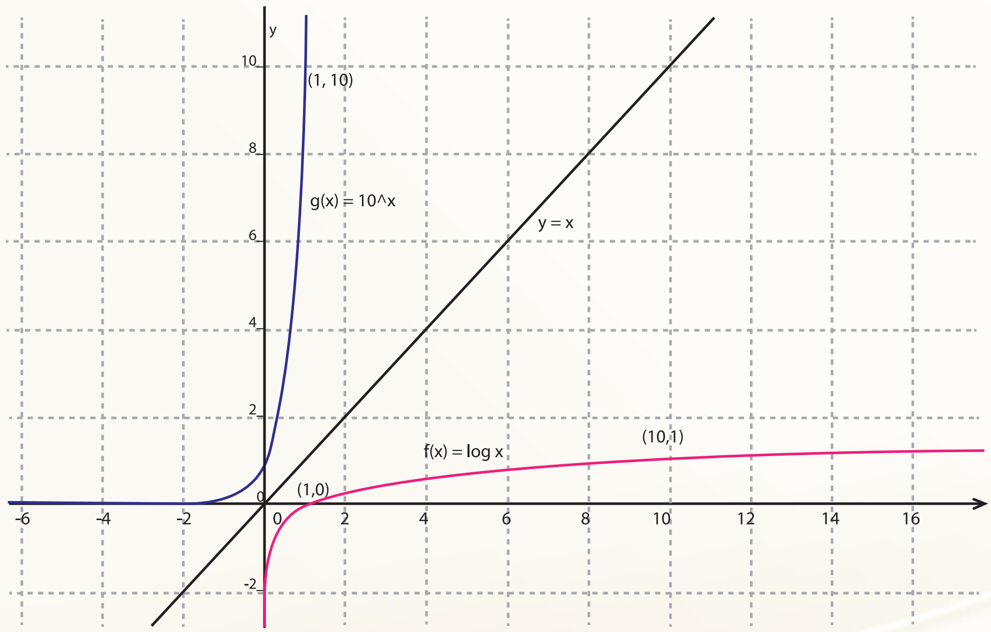
$$\log_a x = z \text{ si } a > 1 \therefore a^z > 0$$

En la *Actividad* que trata sobre la ley del crecimiento de un árbol estuviste haciendo exploraciones para reconocer cuándo una **tabla** de valores numéricos proviene de una variación logarítmica.

Reconocimiento de datos de una variación logarítmica. Los valores de t y A en una **tabla** pueden provenir de una función logarítmica $A = \log_a t$ si los cambios en los valores de A son constantes *(forman una sucesión aritmética)* cuando las razones de los valores de t son constantes *(forman una sucesión geométrica)*.

En la siguiente figura se observan las **gráficas** de $f(x) = \log x$ y de $g(x) = 10^x$ así como la línea $y = x$.

- Una de las grandes diferencias entre $g(x)$ y $f(x)$, es que la función exponencial crece extremadamente rápido, mientras que la función logarítmica crece extremadamente lento.
- El dominio de $f(x) = \log x$ es el de los valores positivos de x; el contradominio es todos los valores de y *(el conjunto de los números reales)*. En contraste, $g(x) = 10^x$ tiene como dominio todos los valores de x y como contradominio todos los valores positivos de y.
- La **gráfica** de $f(x) = \log x$ tiene una asíntota vertical en $x=0$, mientras que $g(x) = 10^x$ tiene una asíntota horizontal en $y=0$.
- Ambas **gráficas** son reflexiones entre sí en la recta $y=x$, siempre que las escalas de los ejes x y y sean iguales.



1. *Resuelve las siguientes ecuaciones:*
   a. $3^x=15$
   b. $16=(4)1.3^t$
   c. $21=0.8^t$
   d. $2(5)^x=12(1.5)^x$

2. *Completa las siguientes igualdades:*
   a. $\log_2 \boldsymbol{x}$ = ____________________ $\log_5 \boldsymbol{x}$
   b. $\log_6 \boldsymbol{x}$ = ____________________ $\log \boldsymbol{x}$
   c. $\log \boldsymbol{x}$ = ____________________ $\log_3 \boldsymbol{x}$

3. *Un cultivo de bacterias nocivas para el ser humano cuenta inicialmente con una cantidad de 2500 bacterias. Si esta cantidad se duplica cada minuto, llena los espacios en blanco de la tabla que representa esta situación para los tiempos indicados:*

t En minutos	0	2	2.25	5	5.25	5.45	10	15
C Cantidad de bacterias								

a). *Si el cultivo se tiene bajo observación durante 1 hora ¿Qué cantidad de bacterias habrá en ese momento si todas se mantienen activas?*

____

____

b). *¿Cuánto tiempo se requiere para que se acumule un millón de bacterias?*

____

____

c). *Si el tamaño de un cultivo bacteriano se duplica cada 6 horas ¿Cuánto tiempo tarda en triplicarse?*

____

____

4. *¿Cuál es el valor de una maquinaria cuyo valor inicial fue de $400,000.00 si cada año se deprecia el 13% de su valor en el año anterior, y ya han transcurrido 5 años?*

a. *Si esa tasa de depreciación se aplicara cada año al valor inicial de $400,000 ¿el valor después de 5 años, sería mayor o menor?*

____

____

5. *¿Cuál es el tiempo de duplicación del precio de cierto artículo que aumenta el 8% anual?*

____

____

6. *Supongamos que un coche que hoy cuesta $10 mil se deprecia de tal forma que cada año que pasa, el valor es el 95% de su valor anterior:*

a. *¿Cuál será el valor del auto luego de dos años?*

____

____

b. *¿Luego de 3 años?*

____

____

c. *¿Cuál será el valor del auto luego de 14 meses?*

____

____

7. Examina el siguiente caso: En una receta se prescribe un medicamento de cierto laboratorio para tomarlo cada 8 horas durante 5 días. Durante todo ese tiempo la droga debe permanecer en el organismo con una concentración mínima de 3 mg, ya que en cualquier concentración menor su efecto se interrumpe. La dosis se determina en el laboratorio una vez que se comprueba que conforme pasa el tiempo después de haberlo ingerido, el elemento activo del medicamento, que es de 30 mg en una toma, va perdiendo la cuarta parte de su concentración cada hora.

a. ¿Cuál es la concentración en el organismo cuando han pasado las primeras 8 horas? ¿Es correcta la prescripción médica?

____

____

b. Si el paciente solamente logra encontrar el mismo medicamento en el botiquín de su casa, pero en una presentación de 50 miligramos, ¿Cuál es la concentración en el organismo cuando han pasado las primeras 8 horas?

____

____

i. Estima o calcula la frecuencia con la que deberá tomarlo para que la dosis sea la adecuada.

____

____

8. Una pintura que se supone que es obra de Diego Velázquez (1599-1660) contiene el 99.5% de su Carbono-14 original *(vida media 5730 años)*. A partir de esta información diga si la pintura es una falsificación. Justifica tu respuesta.

____

____

9. En la naturaleza se dan situaciones en que se tienen que utilizar medidas de órdenes muy diferentes. Por ejemplo, al considerar el peso de los seres vivos: Un hombre puede pesar 90 kg. = 90000 gr.

   Un rotífero (el animal pluricelular más pequeño) pesa 0.00000000603 gr.
   Una ballena (el más grande de todos los animales) pesa 120Ton.= 120 000 000gr.

   Así pues, si se tiene que hacer referencia a diferentes animales por sus pesos o hacer una **gráfica** con los mismos, es un gran inconveniente que haya tan enormes diferencias entre unos y otros valores numéricos. Para evitar tal inconveniente, se le asigna a cada animal el ***orden de magnitud*** correspondiente a su peso.

   En la siguiente **tabla** se muestra para algunos casos, de acuerdo con el peso del animal, el ***orden de magnitud*** que le corresponde.

Peso, p [gr]	**Orden de Magnitud M**
0.01	-2
0.1	-1
1	0
10	1
100	2

a. ¿Qué tipo de sucesión numérica forman los valores del peso, p y los valores del orden de magnitud, M?

____

____

b. ¿Podrías deducir una fórmula para calcular el orden de magnitud M para cualquier peso p ? ¿Cuál es la fórmula?

____

____

c. Completa la siguiente **Tabla.**

Animal	**Peso, p [gr]**	**Orden de Magnitud, M**
Rotífero	0.00000000603	
Globio (pez más pequeño)	0.001995	
Escarabajo gigante (insecto más grande)	100	
Hombre	90 000	
Cocodrilo	1 778 280	
Ballena	120 000 000	

a. El hecho de que el orden de magnitud del peso de una ballena sea 8 y el de una langosta sea 4, ¿significa que la ballena pesa el doble que la langosta? Argumenta tu respuesta.

____

____

b. ¿Cuál es la diferencia en el peso de un animal de orden 3 y otro de orden 2?

____

____

Ahora ya se puede hacer una escala con los pesos de todos los animales que no sea complicada. El orden de magnitud del peso de cada animal será un número entre -8 y 8, esto es lo que se llama una **escala logarítmica**. En un rango pequeño, en este caso de -8 a 8, se consigue expresar realidades muy diferentes.

Como ya sabes, esta sección tiene como propósito ofrecerte un espacio para reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. Como es usual, la organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

Problema 1.

1. En una determinada situación se proporcionan los siguientes datos: Se tiene una cantidad inicial $C_o=10$ que varía a través del tiempo en forma exponencial con una ***tasa*** del 18%.

   a. ¿Es posible bosquejar una **gráfica** que represente en general esa variación? Si concluyes que es posible, traza ese bosquejo. Si piensas lo contrario, argumenta.

   ____

   ____

   b. Si los datos que se proporcionan para el **fenómeno** de variación exponencial referido en el enunciado original consisten en: la cantidad inicial $C_o=10$ y un **factor de variación** $k-0.02$, ¿concuerdan con los datos que se proporcionaron inicialmente?

   ____

   ____

   c. ¿Se puede tener otro valor de k que también modele satisfactoriamente un **fenómeno** de variación exponencial con las características dadas en el enunciado original? Cualquiera que sea tu respuesta, argumenta. Si es afirmativa calcula además el valor de k.

   ____

   ____

Si en el enunciado original se especifica que la tasa del 18% es de *decaimiento exponencial*, ¿cambian en algo tus respuestas al problema? Explica por qué sí o por qué no.

Reflexiones relacionadas con el Bloque 1:

a. ¿Cómo te resultó dar solución al problema?

Muy difícil Difícil Fácil Muy fácil

b. ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a dar respuesta a cada inciso de la situación planteada?

c. ¿Te sirvió el inciso *d* para reconsiderar tus respuestas a los incisos anteriores? Explica por qué:

d. ¿Diste respuesta satisfactoria a todos los incisos? Si no es así, trata de identificar que es lo que está dificultando una respuesta adecuada: ¿No te percataste que no se proporcionó información suficiente sobre el tipo de variación? O bien, sí te percataste pero ¿no consideraste los dos posibles tipos de variación para dar entonces respuesta a ambos casos?
Expresa tus dificultades y describe lo que te sirvió para superarlas:

Problema 2.

¿Cuál es el tiempo de duplicación de una población que crece el 1.2% anual?

a. ¿Cómo te resultó dar solución al problema?

Muy difícil Difícil Fácil Muy fácil

b. ¿Crees que en su solución intervinieron conceptos y métodos utilizados en ambas secuencias? Enlista los conceptos, propiedades, tipos de variación, procedimientos, etc. de los revisados en este bloque que te hayan servido para dar solución a este problema

Reflexiones generales sobre el **BLOQUE 3**:

1. ¿Lograste comunicar tus ideas o puntos de vista al trabajar en equipo o en grupo?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

2. ¿Tomaste en cuenta la participación de tus compañeros para modificar tus respuestas, tus acercamientos a los problemas…etc.?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

3. ¿Lograste interpretar las ideas de tus compañeros al realizar alguna tarea o actividad de clase?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

4. ¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

5. ¿Expresaste alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades a tus compañeros o al profesor?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

6. ¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

7. ¿Te entusiasmó ayudar a tus compañeros o que ellos te ayudaran a resolver dudas?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

8. En este bloque me pareció interesante:

-
-
-

9. En este bloque me pareció difícil

-
-

10. Mis conclusiones generales sobre el estudio de este tipo de variación y el apoyo que proporcionó el material de este bloque:

BLOQUE 4

La Variación Periódica

En los **BLOQUES** anteriores se trataron algunos fenómenos de variación en los que la **matemática** juega un papel de primera importancia para analizarlos. En este nuevo **BLOQUE** vas a estudiar un tipo especial de variación denominada ***Variación Periódica*** que se refiere a todos aquellos procesos de cambio que se repiten con regularidad, esto es, que cada cierto tiempo vuelven a suceder.

Ejemplos de este tipo de cambios son el día y la noche, las estaciones del año, que son cambios que has observado durante toda tu vida. Asimismo la aparición de algunas publicaciones escritas se hace con regularidad y la más común es la de los diarios o "periódicos", pero también existen publicaciones semanales, mensuales, bimestrales o de alguna periodicidad diferente.

En el presente **BLOQUE** estudiarás algunas situaciones en las que la **Matemática** tiene relevancia para comprender y caracterizar los fenómenos de carácter periódico, involucrados.

Al estudiar este tipo de variación tendrás oportunidad de utilizar muchos de los conceptos y métodos de la **Matemática** que has estudiado previamente, como es el caso de las funciones trigonométricas ***Seno*** y ***Coseno*** de un ángulo que estudiaste en tu curso de **Matemáticas 2** y como consecuencia de utilizarlas de nuevo, seguramente mejorarás tu comprensión de lo que significan y ampliarás tu visión de la forma en que pueden usarse en la resolución de problemas, que equivale a decir que mejorarás tu competencia para utilizar las **Matemáticas** en esa importante actividad de resolución de problemas.

Además, las diversas dinámicas que están propuestas para realizar las actividades del **BLOQUE** seguro que te ayudarán a seguir mejorando en tu manera de desenvolverte en la escuela y en la vida.

Tiempo asignado: 16 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

La variación de la posición de un objeto que se mueve en una trayectoria circular con respecto al ángulo que describe.

Actividad: 1
Actividad Individual

Para iniciar el estudio de la ***variación periódica*** se ha elegido un fenómeno que de seguro te resultará muy familiar, se trata del movimiento de un objeto que gira, es decir, que se mueve en una trayectoria circular, hecho por el cual resulta ser un movimiento periódico pues el objeto que se está moviendo, cada vez que da una vuelta completa vuelve a empezar el recorrido. Un ejemplo de este movimiento, es el de la rueda de la fortuna cuando está girando, ya que el movimiento que describe es circular y resulta fácil observar que cada una de las canastillas al estarse moviendo, describe un movimiento circular, es decir, la trayectoria en la que se mueve es una circunferencia.

Es oportuno precisar aquí que:

> Se llama ***movimiento periódico*** al movimiento de una partícula o un cuerpo cuyo *estado* se repite exactamente a intervalos regulares de tiempo.

Figura 4.1

Algunos ejemplos de movimientos periódicos son:

a). El movimiento de una partícula o cuerpo que gira en una trayectoria circular con velocidad angular constante como sucede con las manecillas de un reloj y con la rueda de la fortuna en las Ferias.

b). El movimiento del péndulo de un reloj.

c). El movimiento de una partícula que recorre una trayectoria recta de ida y vuelta y repite este movimiento varias veces y siempre lo hace en intervalos de tiempo iguales *(a este movimiento se le denomina oscilatorio)*

La primera cuestión sobre la que se pretende que reflexiones en esta secuencia es:

¿Cómo puede describirse la posición de las canastillas cuando están en reposo?

En la Figura 4.2 se observa una rueda de la fortuna que tiene ocho canastillas, cada una en una posición diferente.

A continuación se formulan varias preguntas relacionadas con la forma en que puede precisarse la posición en que se encuentra cada una de ellas. Reflexiónalas y responde, primero de manera individual, luego comenta con tus compañeros de equipo, tus respuestas.

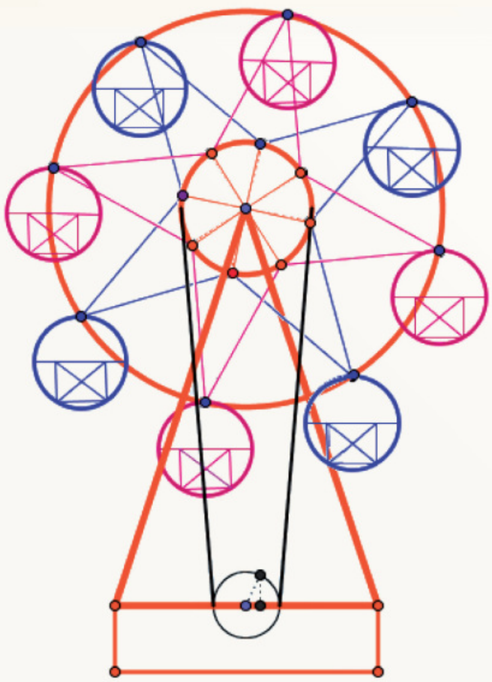


Figura 4.2

a) ¿Cómo puede determinarse de manera precisa en qué posición está cada canastilla?

____

____

b) ¿Puede determinarse de manera precisa la posición de la canastilla diciendo la distancia a que se encuentra del centro de la trayectoria?

____

____

c) ¿Podría determinarse la posición de la canastilla indicando el ángulo que forma el radio trazado del centro de la trayectoria a la canastilla con respecto a un eje de referencia horizontal?

____

____

d) ¿Puede determinarse la posición utilizando las coordenadas cartesianas del punto donde se encuentra la canastilla?

____

____

Desarrollo

La determinación de la posición de una canastilla con respecto al ángulo que describe cuando la rueda de la fortuna está girando, utilizando coordenadas cartesianas.

Cuando la rueda de la fortuna empieza a girar, la posición de cada una de las canastillas cambia al transcurrir el tiempo ya que el ángulo que va describiendo va cambiando. Así que es conveniente que primero reflexiones sobre cómo pueden determinarse las coordenadas cartesianas de la posición de una canastilla cuando lo que se conoce es el ángulo que ha descrito. Considera primero cómo determinar el valor de la ordenada *(el valor de y)* de la posición. Para ello realiza lo que se te pide a continuación.

En la Figura 4.3 se ha dibujado una circunferencia con centro en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, que representa la trayectoria de una canastilla de la rueda de la fortuna que se mueve describiendo un movimiento circular y en ella se han señalado diferentes posiciones en las que puede estar la canastilla al irse moviendo.

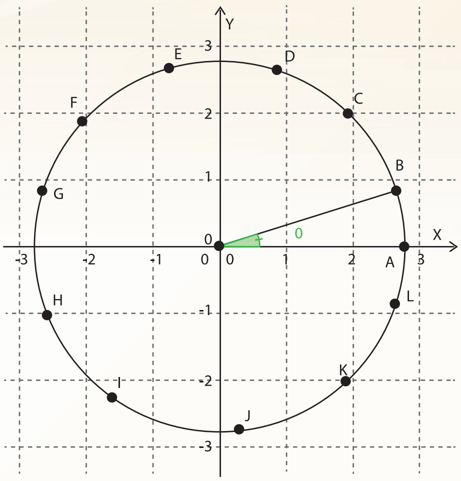


Figura 4.3

1. Observa la figura y contesta las siguientes preguntas, primero de manera individual para luego comentar en el equipo tus respuestas.

a). ¿Qué sucede con el valor de la ordenada (el valor de y) de la posición a medida que el ángulo aumenta de 0 a $\frac{\pi}{2}$ *radianes*? *(Esta unidad angular la estudiaste en tu curso de **Matemáticas 2,** en el **Bloque 4** dedicado a la **Trigonometría**)*

____

____

b) ¿Cuál es el valor de la ordenada cuando el ángulo es de 0 ?

____

____

c) Y cuando el ángulo vale $\frac{\pi}{2}$ *radianes*, ¿Cuál es el valor de la ordenada?

____

____

d) Cuando el ángulo tiene valores mayores que $\frac{\pi}{2}$ *radianes* pero menores que π *radianes* ¿Cómo es el valor de la ordenada?

____

____

e) ¿Cuál es el valor de y cuando el ángulo es de π *radianes*?

____

____

2. Si el radio de la trayectoria fuera $r = 1\ m$, determina el valor de la ordenada de la posición para los siguientes valores del ángulo:

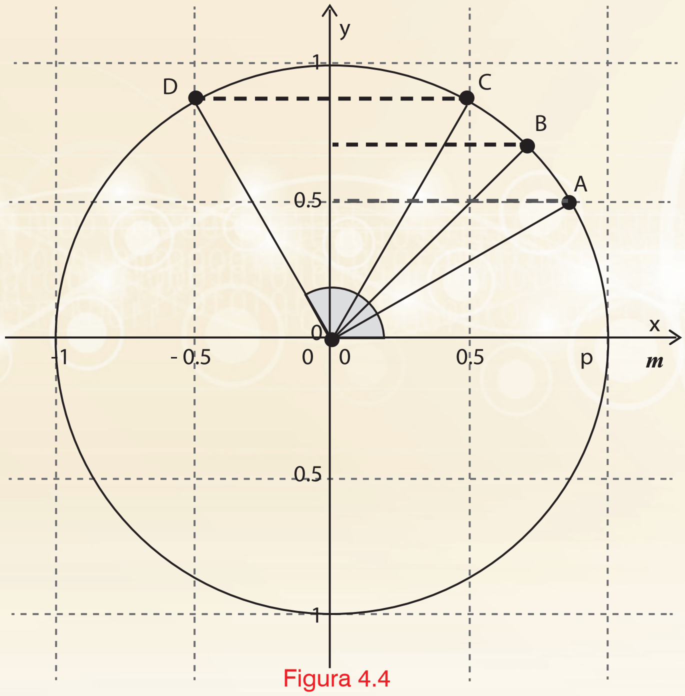


Figura 4.4

a) $\frac{\pi}{6}$ *radianes* b) $\frac{\pi}{4}$ *radianes* c) $\frac{\pi}{3}$ *radianes*

d) $\frac{2\pi}{3}$ *radianes* e) $\frac{3\pi}{4}$ *radianes* f) $\frac{5\pi}{6}$ *radianes*

3. Utilizando una calculadora determina el valor de la ordenada de la posición del objeto que está girando para los siguientes valores del ángulo θ.

a) 0.32 *radianes* b) 1.2 *radianes* c) 2 *radianes* d) 3 *radianes*

4. Observa nuevamente la Figura 4.3 y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucede con el valor de la ordenada de la posición a medida que el ángulo aumenta de π radianes a $\frac{3\pi}{2}$ *radianes*?

b) Y cuando el ángulo varía de $\frac{3\pi}{2}$ *radianes* a 2π *radianes* ¿Cómo varía el valor de la ordenada de la posición?

5. Determina el valor de la y de la posición para los siguientes valores del ángulo descrito:

a) $\frac{7\pi}{6}$ *radianes* b) $\frac{5\pi}{4}$ *radianes* c) $\frac{4\pi}{3}$ *radianes*

6. ¿Para qué valores del ángulo, entre $\frac{3\pi}{2}$ *radianes* y 2π *radianes* la y tiene los valores que determinaste para los ángulos indicados en el punto 5?

7. ¿Qué significa que la canastilla haya descrito un ángulo $\theta = 3\pi$ *radianes*?

8. Determina las coordenadas de la posición cuando el ángulo $\theta = \frac{11}{3}\pi$ *radianes*.

9. Describe la variación del valor de la ordenada y, de la posición de una partícula que se mueve en una trayectoria circular a medida que el ángulo cambia entre 0 a 4π y representa **gráfica**mente dicha variación. Utiliza un sistema de coordenadas representando en el eje X, los valores del ángulo θ, y en el eje Y los valores de la ordenada y de la posición.

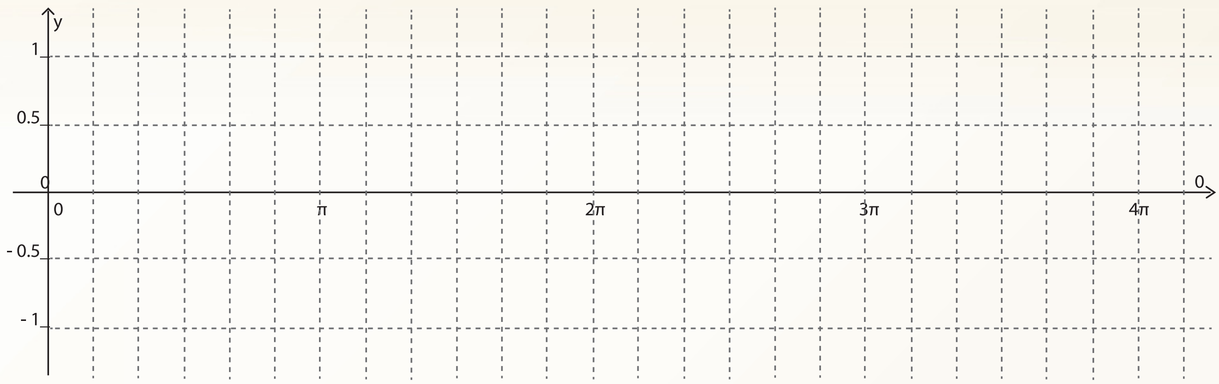
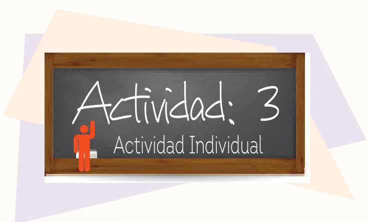


Figura 4.5



En la Actividad 2 estudiaste cómo determinar el valor de la ordenada de la posición de una partícula que se mueve en una trayectoria circular de radio $r = 1\ m$, en función del ángulo descrito *(medido en radianes)* y se espera que para determinar dicho valor hayas utilizado la función ***Seno*** del ángulo, que también estudiaste en el Bloque 4 de tu curso de **Matemáticas 2**. Si así fue, debe haberte quedado claro que

$$y = \text{Sen}\ \theta$$

donde θ representa el valor del ángulo descrito.

En esta nueva actividad se pretende que determines el valor de la abscisa *(de la x)* de la posición de la canastilla que está girando, suponiendo, como se hizo al calcular el valor de la ordenada, que el radio de la trayectoria fuera $r = 1m$ y reflexiones sobre cómo varía su valor. Para hacerlo, responde las mismas preguntas de la actividad anterior, sólo que donde dice ***ordenada*** debes cambiar por ***abscisa*** y donde dice y debes cambiar por x

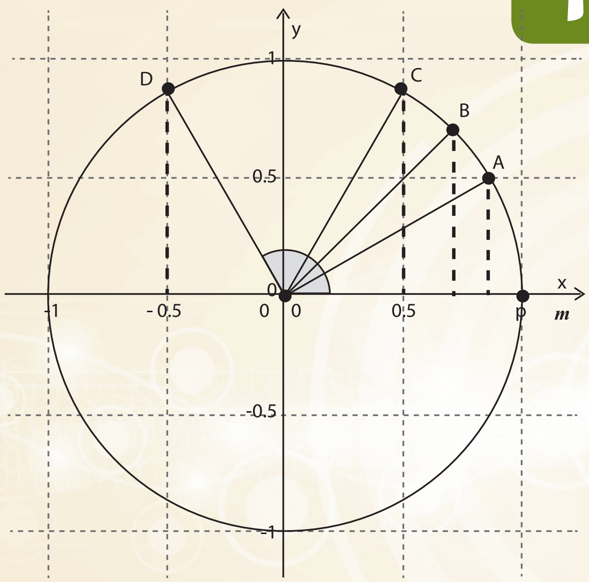


Figura 4.6

Al calcular las coordenadas de la posición de la canastilla en las actividades 2 y 3, se supuso que el radio de la trayectoria medía un metro; ¿Cómo pueden calcularse las coordenadas de la posición cuando el longitud del radio de la trayectoria es diferente de un metro? Para responder esta pregunta realiza lo indicado en cada uno de los siguientes incisos:

1. En la Figura 4.6 se han dibujado varias trayectorias circulares concéntricas de diferente radio, observa el dibujo de dichas trayectorias y determina cómo puede calcularse el valor de las coordenadas de la posición en función del ángulo descrito, en el caso de que el radio mida:

a) 2 m b) 3m c) 5 m d) 12.5 m

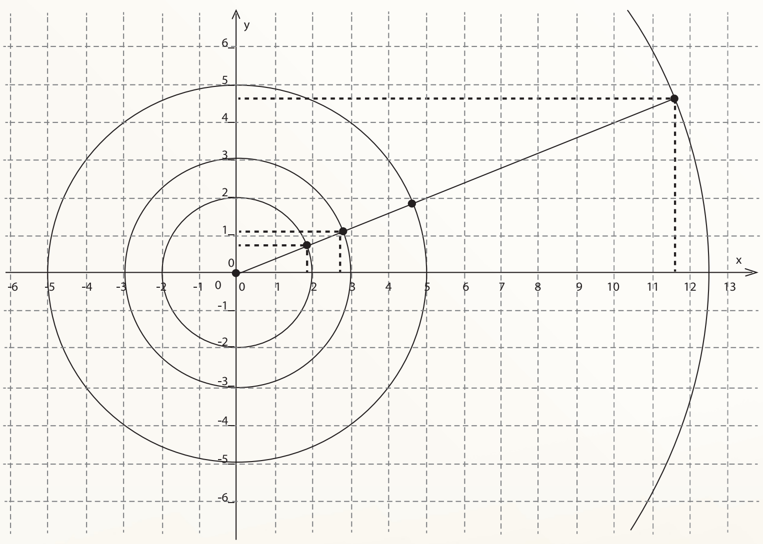


Figura 4.7

2. Escribe las expresiones analíticas que indican cómo determinar las coordenadas *(los valores de x y y)* de la posición de una partícula que gira en una trayectoria circular de radio r, en función del ángulo descrito.

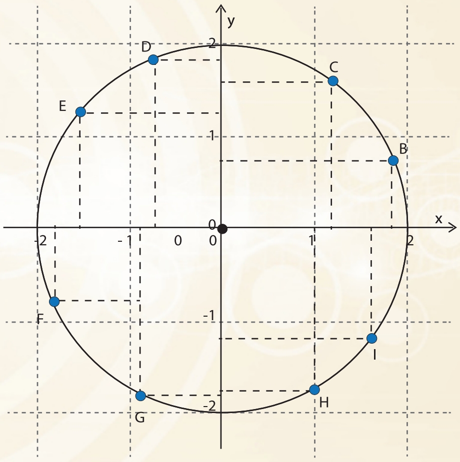


Figura 4.8

3. Describe la variación de la ordenada de la posición de una partícula que se mueve en una trayectoria circular de radio $r=2m$ y traza la **gráfica** que representa cómo varía el valor de la ordenada con respecto al ángulo descrito.

4. Ahora describe la variación de la abscisa de la posición de la partícula de la que se habla en el punto anterior y también traza la **gráfica** que representa dicha variación.

Figura 4.9

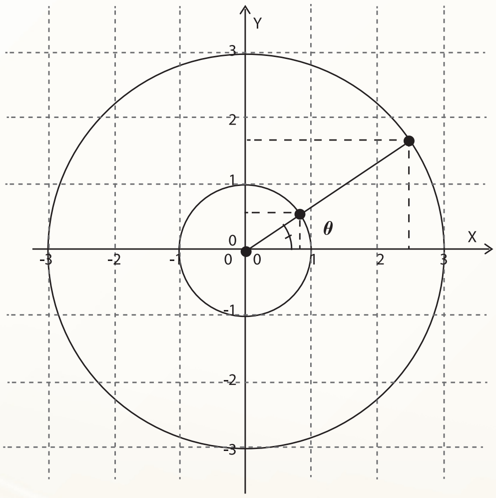


Figura 4.10

5. Si tomas como referencia las coordenadas de la posición correspondientes a un valor determinado del ángulo θ cuando el radio $r=1m$, ¿Cómo resultan ser las coordenadas correspondientes al mismo valor del ángulo θ, cuando el radio se triplica? Sugerencia: Observar la Figura 4.10 te será útil.

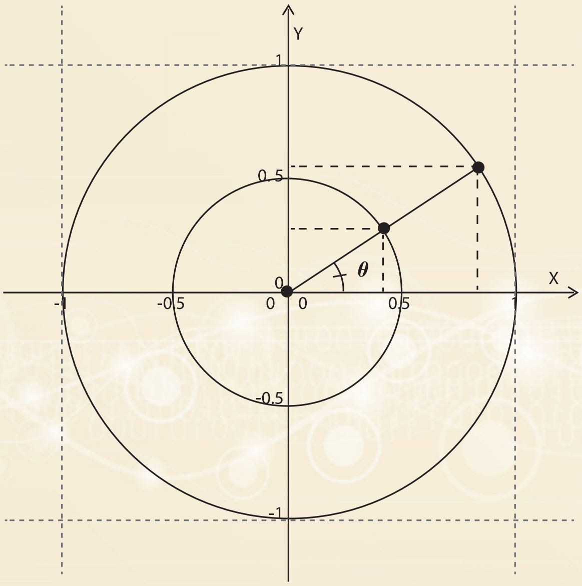


Figura 4.11

6. Y si el radio se reduce a la mitad, ¿qué pasa con las coordenadas de la posición? Sugerencia: Observar la Figura 4.11 te será útil.

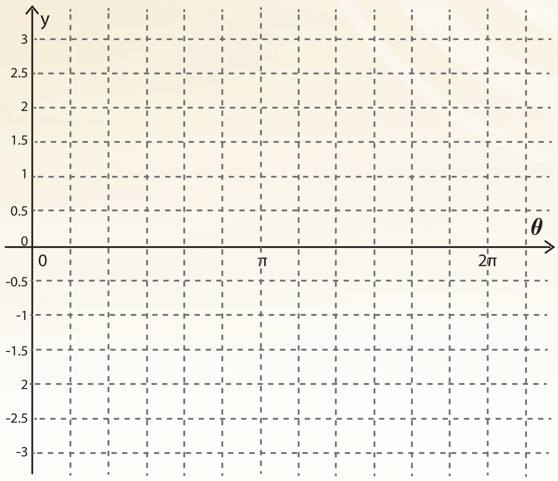


Figura 4.12

7. En un mismo sistema de coordenadas traza las tres **gráficas** que representan la variación de la ordenada para cada uno de los tres radios

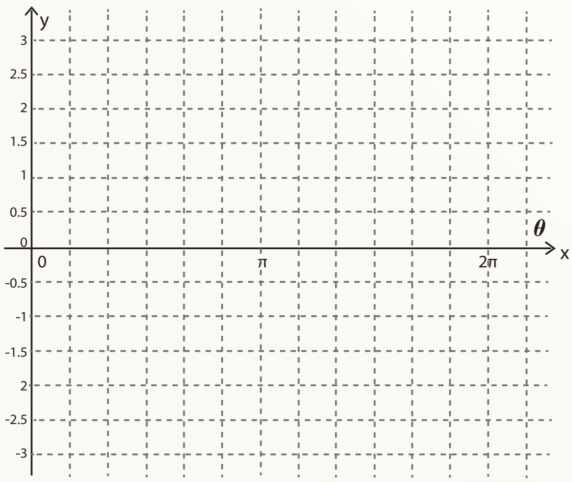


Figura 4.13

8. Dibuja otro sistema de coordenadas y en él traza las tres **gráficas** que representan la variación de la abscisa

Actividad de Cierre

Actividad: 5
Actividad Individual

A través de las actividades de esta secuencia, se espera te haya quedado claro que:

a) Las coordenadas de la posición de un objeto que está girando en una trayectoria circular pueden determinarse cuando se conoce el valor del ángulo θ descrito por el objeto con respecto a un eje de referencia y la longitud del radio r de la trayectoria.

b) El valor de la abscisa de la posición *(el valor de la x)* con respecto al ángulo θ, se calcula utilizando la expresión analítica

$$x = r\ Cos\ \theta$$

c) El valor de la ordenada de la posición (el valor de la y) con respecto al ángulo θ, se calcula utilizando la expresión analítica

$$y = r\ Sen\ \theta$$

d) La variación de las coordenadas x y y de la posición con respecto al ángulo descrito es periódica y se representa gráficamente de la siguiente manera

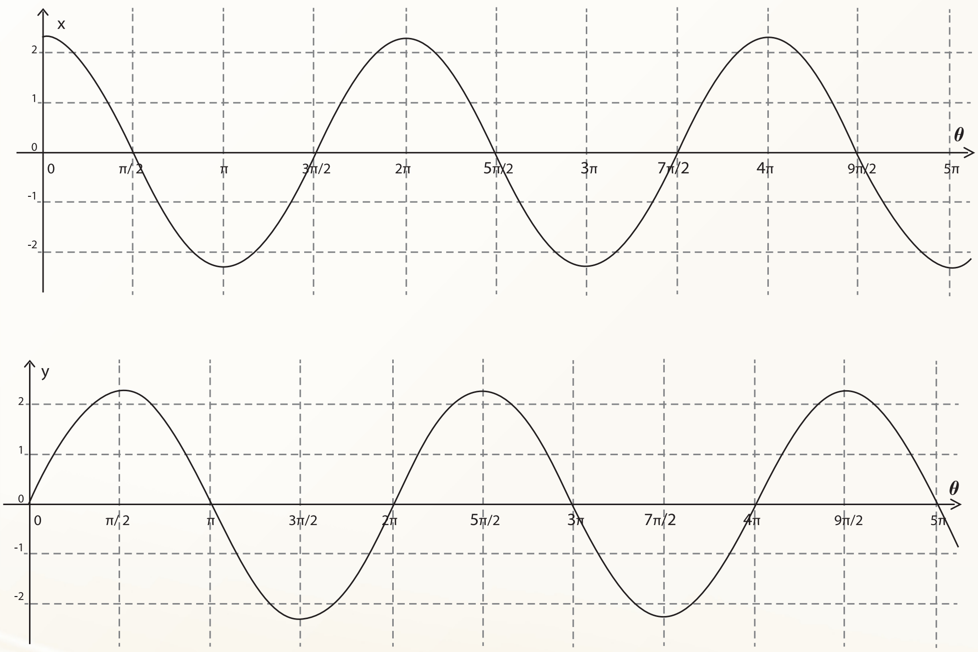


Figura 4.14

e) Las expresiones analíticas obtenidas también permiten darse cuenta de que si el ángulo descrito es constante, el valor de las coordenadas varían en función del radio y esta variación es directamente proporcional.

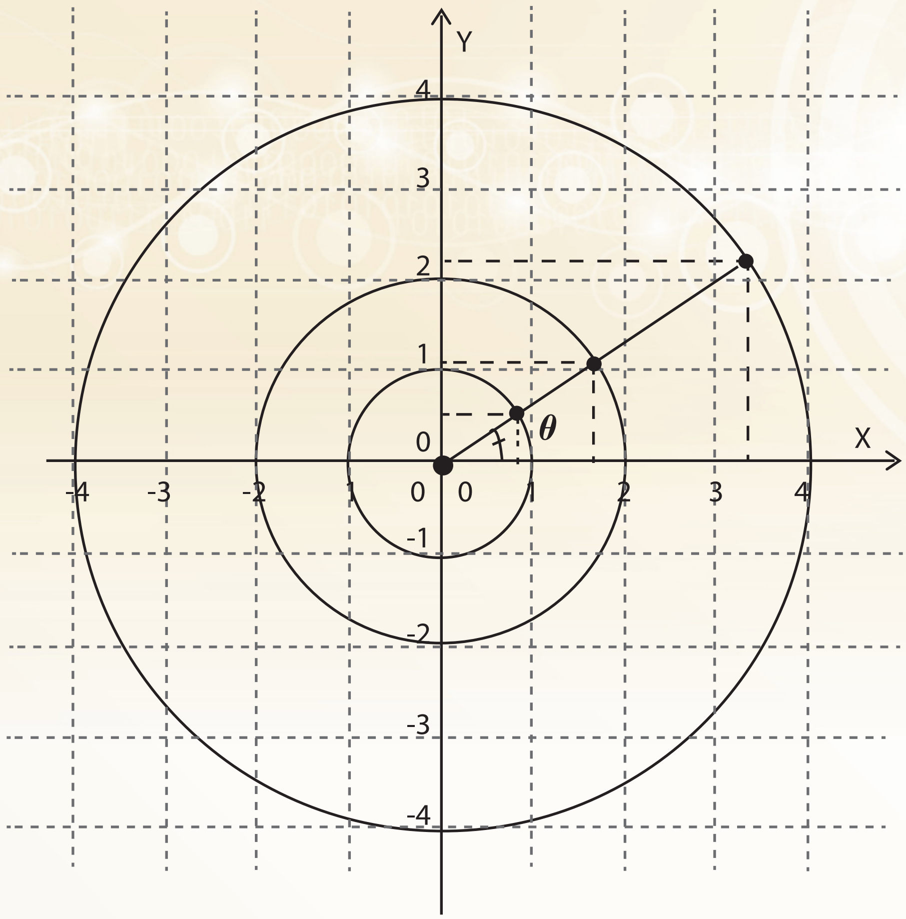


Figura 4.15

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

La variación de la posición con respecto al tiempo, de una partícula que describe un movimiento circular uniforme (MCU)

Actividad: 1
Actividad Individual

En la secuencia anterior aprendiste a calcular las coordenadas cartesianas de la posición de un objeto que está girando, con respecto al ángulo descrito al girar. En esta nueva secuencia se pretende que aprendas cómo pueden calcularse las coordenadas de la posición, pero ahora con respecto al tiempo durante el cual el objeto se está moviendo. Para lograr este objetivo empieza reflexionando sobre dos cuestiones que se te plantean a continuación y al hacerlo, al igual que en la secuencia anterior, primero responde tú las preguntas y luego comenta con tus compañeros de equipo tus respuestas.

1. ¿Cómo puede calcularse el valor del ángulo descrito por la partícula en función del tiempo?

2. Cuando hayas aprendido a calcular el valor del ángulo descrito en función del tiempo, ¿Cómo podrás determinar las coordenadas de la posición de la partícula que está girando, en función del tiempo?

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad Individual

La posición y la velocidad angular en el Movimiento Circular Uniforme

Recuerda que el problema que se quiere resolver es:

¿Cómo puede determinarse la posición de un objeto que está girando en una trayectoria circular en función del tiempo?

Para empezar a buscar la solución a este problema toma en cuenta lo siguiente:

1. *Cuando una partícula se está moviendo, para saber cuál será su posición después de cierto tiempo se necesita saber tres cosas:*

    a) *Cuál es el punto de partida*

    b) *Cuál es la trayectoria*

    c) *Cuál es la velocidad*

2. Un objeto puede empezar a moverse prácticamente desde cualquier posición y hacerlo en cualquier trayectoria y su velocidad puede ser siempre la misma o no y ser muy grande o muy pequeña; es decir, hay una infinidad de maneras de moverse.

En el problema que quieres resolver, de las tres cosas que se necesita saber, la que ya conoces es la trayectoria del movimiento, pues se trata de una partícula que se mueve en una trayectoria circular; las otras dos necesitan precisarse ya que podría empezar a moverse estando en cualquier punto de la trayectoria y hacerlo con una velocidad que puede ser variable o constante.

Con el propósito de que avances en la comprensión y resolución del problema que se te ha planteado, considera un caso particular de este tipo de movimiento, considera el caso en el que la partícula empieza a moverse desde la posición que está sobre el eje X a una distancia de un metro del centro de la trayectoria y lo hace con velocidad angular constante describiendo un ángulo de un radián cada segundo. Con base en esta información, reflexiona y contesta las siguientes preguntas y cuando las hayas contestado, comenta en tu equipo, tus respuestas.

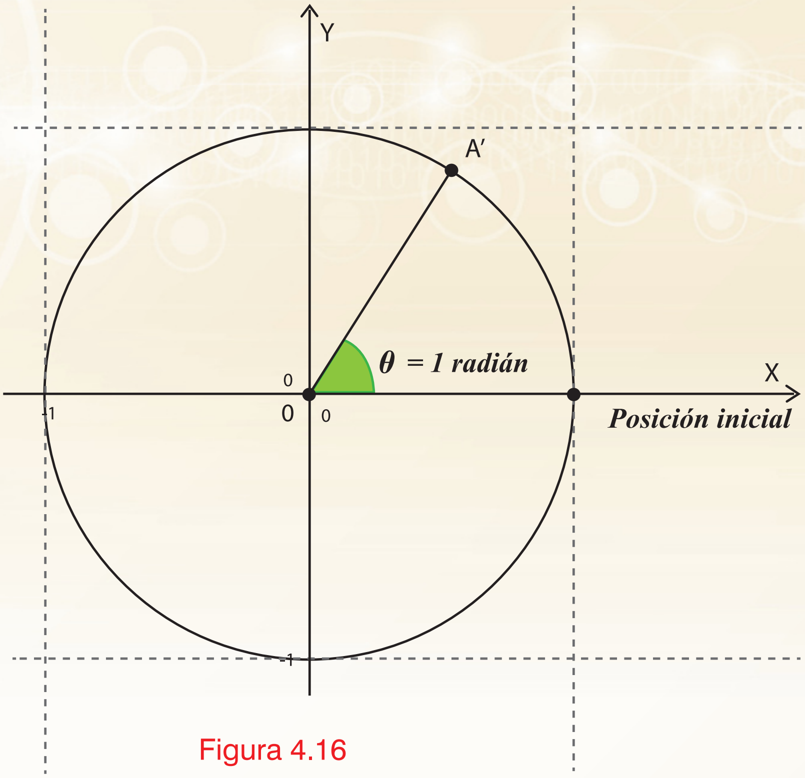


Figura 4.16

a) ¿Cuáles son las coordenadas de la posición inicial de la partícula que se va a mover?

b) ¿Qué significa que la partícula gire con velocidad angular constante?

c) ¿Qué significa velocidad angular?

d) ¿Qué significa que la velocidad angular sea $v = 1$ *radián/seg*?

Compara tu respuesta a la pregunta del inciso **b)** con la que aparece a continuación:

Se dice que la velocidad angular de un objeto que gira es constante, si al girar describe ángulos iguales en tiempos iguales.

a) De acuerdo con esto, si una partícula se mueve con velocidad angular constante y describe un ángulo de π radianes en 30 segundos, ¿qué ángulo describirá en 60 segundos?

b) Y en 10 segundos ¿Qué ángulo describirá?

c) ¿En cuánto tiempo dará una vuelta completa?

d) ¿Qué ángulo describirá cada segundo?

Al valor del ángulo que describe en una unidad de tiempo el objeto que está girando, se le llama velocidad angular del objeto.

Para representar esta velocidad utiliza la letra v y para representar el tiempo utiliza la letra t, ambas de nuestro alfabeto, mientras que ángulo descrito represéntalo con la letra θ (theta), del alfabeto griego.

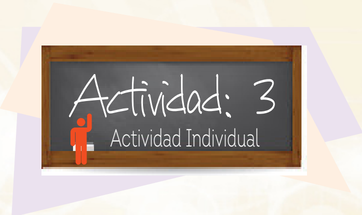
La unidad que más utilizarás para medir el ángulo descrito será el radián que ya utilizaste en la secuencia anterior.

i) De acuerdo con lo aquí dicho, ¿Cuál es el valor de la velocidad angular v (en radianes/seg) de la partícula, sabiendo que describió un ángulo de π radianes en 30 segundos?

j) Y en radianes por minuto ¿Cuál es el valor de v?

k) En general ¿Cómo se calcula el valor de v, cuando se conoce el valor del ángulo θ descrito en un tiempo t ?

l) Y si conoces el valor de v ¿Cómo puedes calcular el ángulo descrito en un tiempo t por el objeto que está girando?



La representación analítica y la representación gráfica de la variación de θ con respecto a t cuando v permanece constante

a) En el último inciso de la actividad anterior se te preguntó cómo puede calcularse el valor del ángulo descrito en un tiempo t por el objeto que está girando con **MCU**. Se espera que hayas contestado la pregunta diciendo que el cálculo se puede hacer multiplicando v por t y tal vez hayas escrito la siguiente expresión analítica.

$$\theta = vt$$

b) Con base en esta expresión analítica, determina ¿Cómo es la variación de θ con respecto a t, cuando v permanece constante?

c) Traza la **gráfica** que representa la forma en que varía θ con respecto a t cuando v permanece constante.

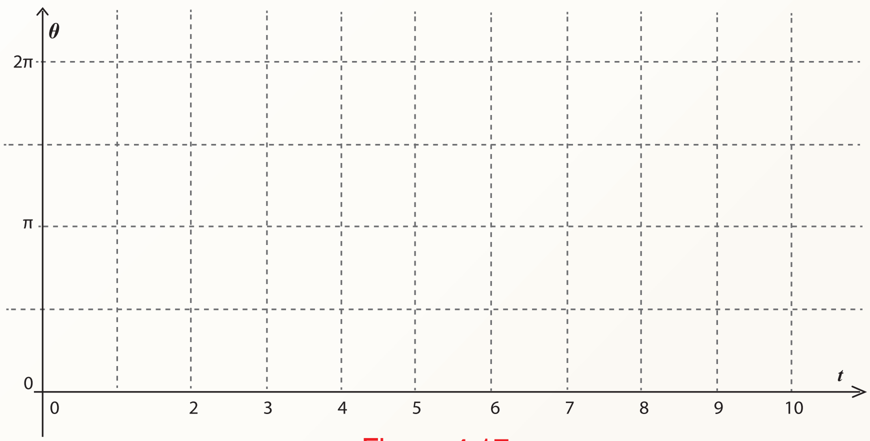


Figura 4.17

d) ¿Cómo están representados en la **gráfica** los valores de t y de θ?

e) Y el valor de v ¿Cómo está representado en la **gráfica**?

Actividad: 4

Actividad Individual

La determinación de las coordenadas cartesianas de la posición de una partícula que se mueve en una trayectoria circular con velocidad angular constante, en función del tiempo t.

En la Secuencia Didáctica 1 quedó establecido que las coordenadas de la posición, en función del ángulo θ, de una partícula que se mueve en una trayectoria circular, se calcula utilizando las expresiones analíticas: $x = r \, Cos \, \theta$, para determinar el valor de la abscisa y $y = r \, Sen \, \theta$ para determinar el valor de la ordenada.

Por otra parte, en la Actividad 3 de esta secuencia, quedó establecido que el ángulo θ que describe una partícula que se mueve en una trayectoria circular con velocidad angular constante v, en un tiempo t se calcula utilizando la expresión analítica $\theta = vt$.

1. Con base en estas dos cuestiones ya aprendidas, escribe las expresiones analíticas con las que puedes calcular las coordenadas x y y de la posición en función del tiempo cuando la velocidad angular v es constante.

2. Ahora considera las condiciones establecidas al iniciar la Actividad 2 en las que se propone un caso particular de este tipo de movimiento, aquél en el que la velocidad angular vale 1 y el radio también vale 1, esto es $v = 1 \; rad/seg$ y $r = 1 \; m$. Considerando estos datos, escribe las expresiones analíticas que permiten calcular las coordenadas de la posición en función del tiempo, en este caso.

3. Utiliza las expresiones analíticas que has escrito para determinar las coordenadas de la posición en los siguientes instantes:

a) $t = 1\text{seg}$ **b)** $t = 2\text{seg}$ **c)** $t = \frac{\pi}{2}$ seg **d)** $t = \frac{\pi}{6}$ seg

4. Determina al menos dos instantes t en los que la partícula esté en posiciones cuya ordenada sea $y = -\frac{1}{6}$.

5. ¿En cuánto tiempo la partícula dará una vuelta completa?

6. ¿Cada cuánto tiempo la partícula pasará por el mismo punto de la trayectoria?

7. Traza la **gráfica** que representa la variación de la ordenada de la posición si la partícula dura girando 20 seg.

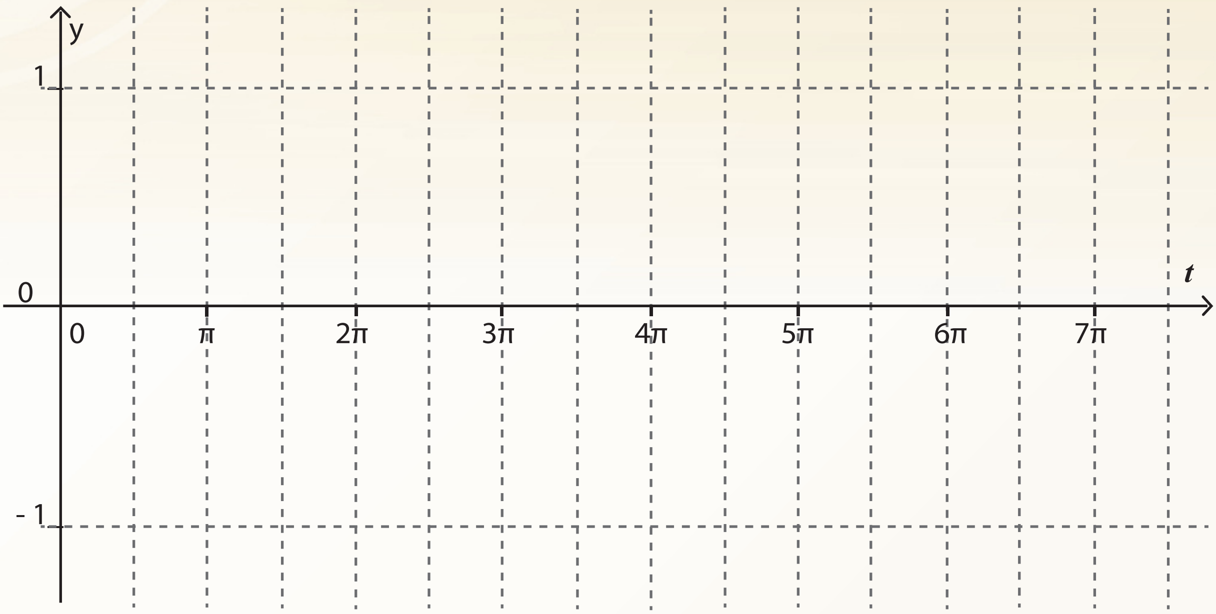


Figura 4.18

8. De acuerdo con la **gráfica** que has trazado determina en cuántos instantes diferentes la ordenada de la posición fue cero.

Actividad de Cierre

Actividad: 5
Actividad Individual

Al realizar las actividades de esta secuencia se espera hayas aprendido:

a) A qué se llama velocidad angular de una partícula que se mueve en una trayectoria circular.

b) Qué significa que la velocidad angular de una partícula sea constante.

c) Que el ángulo descrito por una partícula que se mueve en una trayectoria circular con velocidad constante es una función del tiempo y puede calcularse utilizando la expresión analítica $\theta = vt$.

d) Que el valor del ángulo θ es directamente proporcional tanto a la velocidad angular como al tiempo de giro.

e) Que las expresiones analíticas

$$x = r\,Cos\,(vt) \qquad \text{y} \qquad y = r\,Sen\,(vt)$$

permiten calcular las coordenadas de la posición de una partícula que se mueve en una trayectoria circular con velocidad angular constante, con respecto al tiempo; pero a la vez modelan la variación de dichas coordenadas.

f) Que la variación de dichas coordenadas con respecto al tiempo es periódica y con respecto al radio de la trayectoria es directamente proporcional.

Secuencia Didáctica 3.-

Actividad de Inicio

Las funciones periódicas

Actividad: 1
Actividad Individual

Las expresiones analíticas

$x = r\, Cos\, (vt)$ y $y = r\, Sen\, (vt)$

se han utilizado para representar la variación entre dos magnitudes y esta variación resultó ser periódica.

a) La expresión $x = r\, Cos\, (vt)$ representa como varía ¿qué magnitud con respecto a cuál?

____

____

____

____

b) Y en el caso de la expresión $y = r\, Sen\, (vt)$ está representada la variación ¿De qué cantidad con respecto a qué otra cantidad?

____

____

____

____

c) La expresión analítica $y = r\, Sen\, (vt)$, cuando r y v son constantes y su valor es 1 se convierte en la expresión $y = Sent$ donde t representa los valores del tiempo medido en segundos, pero también los valores del ángulo θ descrito, medido en radianes ¿Por qué coinciden el valor de t y el valor de θ ?

____

____

____

____

d) Además ***Sent*** corresponde al valor de ***y***, la ordenada de la posición en el instante ***t*** ¿Por qué?

____

____

____

____

e) Para cada uno de los valores de ***t***, que aparecen en la primera columna de la **Tabla 4.1**, calcula el valor de ***y*** y anótalo en la segunda columna de la **Tabla**, en el renglón correspondiente; luego súmale 2π a cada uno de los valores de ***t*** que aparecen en la primera columna y anótalos en la tercera columna; finalmente calcula el valor del ***Sen (t + 2π)*** y anota el resultado en la cuarta columna.

____

____

t seg	$Sent$	$t+2\pi$ seg	$Sen(t+2\pi)$
$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}+2\pi$	
$\frac{\pi}{2}$			
2			
$\frac{4\pi}{5}$			
π			
$\frac{4\pi}{3}$			
6			
2π			

Tabla 4.1

¿Cómo resultaron ser los valores del ***Sen (t + 2π)*** con respecto a los valores del ***Sent*** ?

____

¿A qué crees que se deba?

____

____

Desarrollo

Actividad: 2

Actividad Individual

1. Las expresiones analíticas

$$y = Sen t \qquad \text{y} \qquad x = Cos t$$

representan funciones que se utilizan para modelar matemáticamente procesos de **variación periódica**, razón por la cual estas funciones se denominan ***funciones periódicas.***

En Matemáticas se dice que una expresión de la forma

$$y = f(x)$$

es la representación analítica de una *función periódica*, si existe un número p tal que, para todo valor de x se cumple que

$$f(x + p) = f(x)$$

Nota: Al número p se le llama ***período***.

a) De los resultados obtenidos en la Actividad 1, que anotaste en la **Tabla 4.1** ¿Cuánto vale el período de la función $y = Sen t$?

____

____

b) Y en el caso de la función $x = Cos t$ ¿Cuánto vale su período?

____

____

c) ¿Qué representa el valor del período de estas dos funciones, en el movimiento de la partícula que está girando? (El período, cuando se refiere al movimiento de una partícula, se representa con la letra T)

____

____

2. La función $y = Sent$, que modela la variación de la ordenada de la posición de una partícula que está girando en una trayectoria circular con velocidad angular constante, se obtuvo de la expresión analítica

$$y = r\,Sen\,(vt)$$

donde r representa el valor del radio de la trayectoria en la que está girando la partícula y v representa la velocidad angular de la misma.

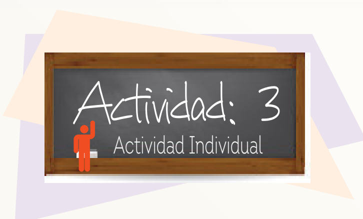
Sabiendo esto, determina el valor de r y de v si la función que modela la variación de su ordenada es:

a) $y = Sen(2t)$ b) $y = Sen(3t)$ c) $y = Sen(10t)$ d) $y = Sen(\frac{1}{2}t)$

b) Determina el valor del período en cada uno de los cuatro casos

3. Describe el movimiento de una partícula que está girando cuando su abscisa varía según lo indican las siguientes funciones:

a) $x = Cos(3t)$ b) $x = 3Cos(2t)$ c) $x = \frac{1}{4}\,Cos(\frac{3}{2}t)$



1. Determina, el valor de r, de v y de T, de una partícula que está girando, observando, en cada caso, la **gráfica** que representa la variación de su ordenada con respecto al tiempo.

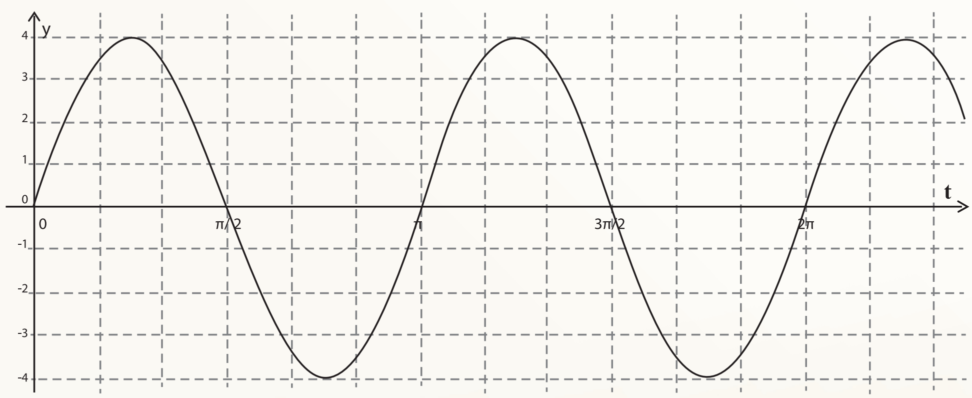


Figura 4.19a

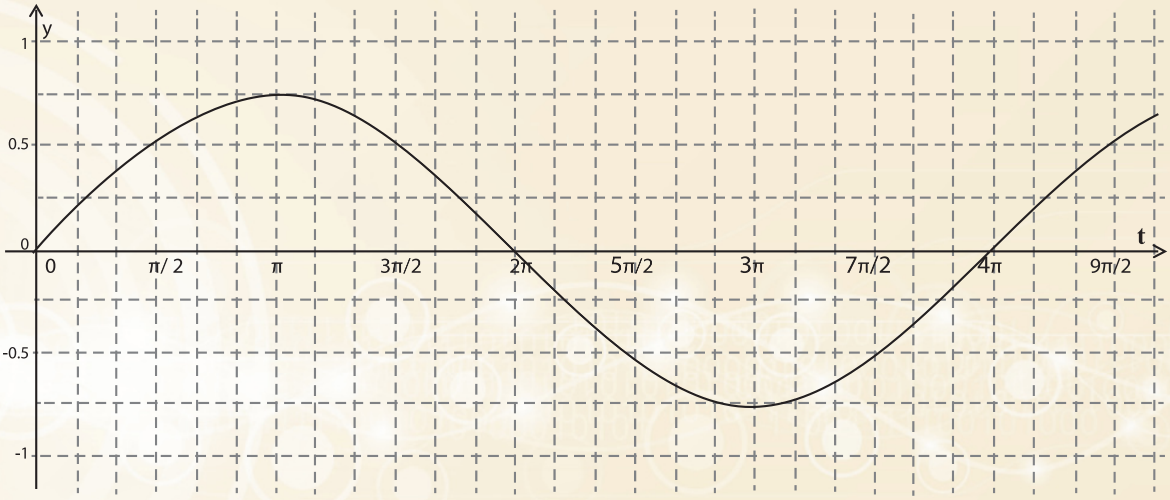


Figura 4.19b

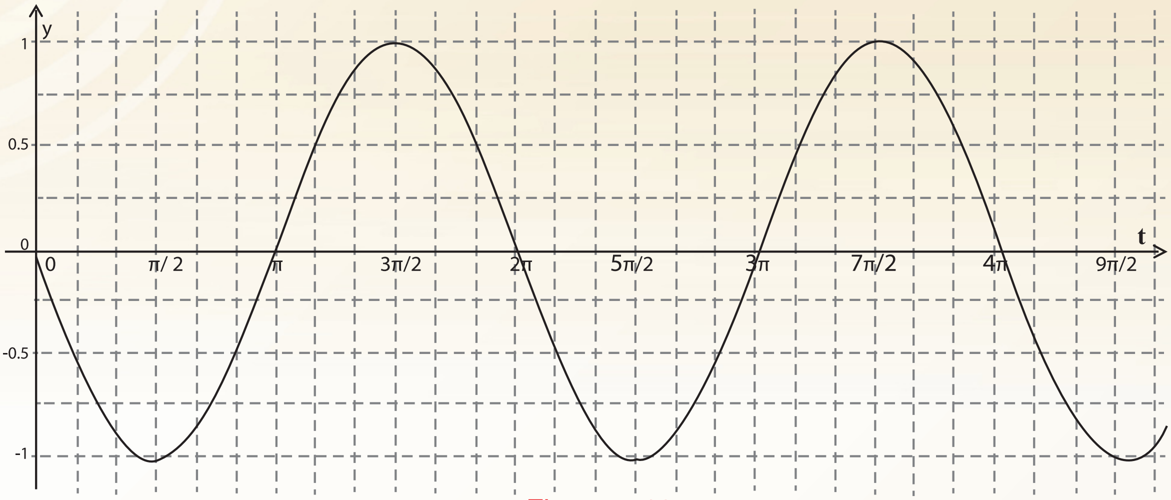


Figura 4.19c

2. Sabiendo que el período T del movimiento de una partícula que está girando indica el tiempo que tarda en dar una vuelta completa y que la vuelta completa corresponde a un ángulo $\theta = 2\pi$ radianes, determina:

a) ¿Cuál es la expresión analítica con la que puedes calcular la velocidad angular v de una partícula que está girando, cuando dicha velocidad es constante, si conoces el valor de su período?

b) La expresión $y = r\,Sen(vt)$, te permite calcular el valor de la ordenada de la posición cuando conoces r y v. ¿Cuál es la expresión analítica que te permite calcular y cuando lo que conoces r y T ?

Actividad de Cierre

Actividad: 4
Actividad Individual

La realización de las actividades de esta secuencia se espera que te haya permitido entender:

a) Cuándo una función es periódica

b) Lo que representan los valores de r y v que aparecen en la expresión analítica $y = r \text{ Sen } (vt)$

c) Cómo están relacionados estos valores con las características del movimiento.

d) Qué indica el valor del período T de un movimiento circular y cómo puede calcularse cuando se conoce la velocidad angular.

e) Qué característica del movimiento cambia al cambiar el valor del período.

Problema 1

Sabiendo que la expresión analítica $y = \frac{12}{5}\ Sen\ (4t)$ representa la variación de la ordenada de la posición de una partícula que describe un Movimiento Circular Uniforme con respecto al tiempo donde el tiempo está medido en segundos y la ordenada en metros

1. Determina lo que representan el $\frac{12}{5}$ y el 4.

2. **Calcula:**
   a) El valor de la ordenada cuando $t = \frac{1}{5}\ seg$

   b) El instante o los instantes en los que la ordenada vale 0.

   c) El instante o los instantes en los que la ordenada tiene el máximo valor y cuál es ese valor.

   d) Para qué valores del ángulo descrito, la ordenada vale $\frac{6}{5}\ m$

   e) Si la partícula se mueve durante 10 segundos ¿En Cuántas ocasiones la ordenada de la posición valió -1? ¿Cuántas vueltas completas dio?

   f) Representa **gráficamente** la variación de la ordenada de la posición en los 10 segundos que duró moviéndose la partícula.

Problema 2

La **gráfica** de la figura representa la variación de la abscisa de la posición con respecto al tiempo durante el cual una partícula está girando con velocidad angular constante. En ella el tiempo está medido en segundos y la abscisa en cm. Con esta información:

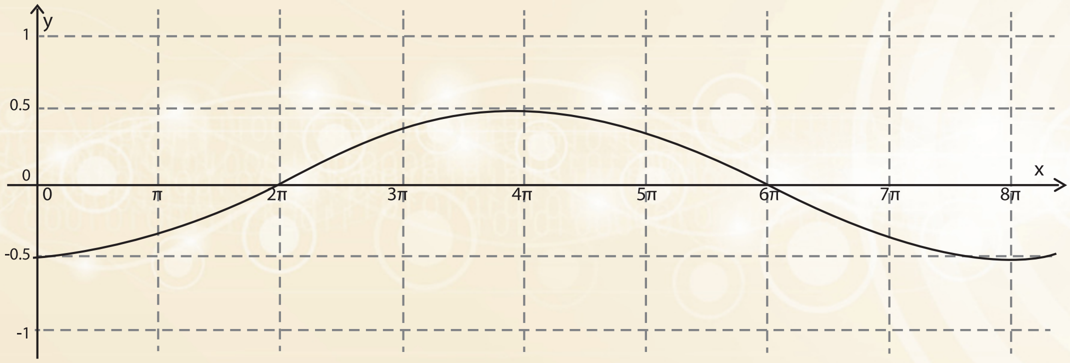


Figura 4.20

1. Determina:

   a) Las coordenadas de la posición inicial de la partícula.

   b) El valor del radio de la trayectoria.

   c) El valor de la velocidad angular

   d) El valor del período

   e) Los instantes en los que la abscisa valió cero

   f) Los intervalos de tiempo en los que la abscisa fue positiva y creciente

   g) El tiempo que tarda en describir un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ *radianes*

Problema 3

Un disco cuyo perímetro mide 20 π cm, está girando durante 3 minutos, tiempo en el cual da 540 vueltas. Con esta información determina:

a) La longitud del radio del disco

b) El número de vueltas que dio en un segundo (al número de vueltas que da un objeto que gira, por unidad de tiempo, se le llama frecuencia del movimiento)

c) El período (tiempo que tarda en dar una vuelta)

d) La velocidad angular del disco

e) Las expresiones analíticas que modelan la variación de las coordenadas de la posición de un punto trazado en la periferia del disco, en función del tiempo.

Al igual que en los BLOQUES anteriores de este módulo de aprendizaje y de los anteriores módulos, éstos terminan con la sección denominada Autoevaluación, así que debes tener muy claro cuál es su propósito y en qué consiste. Se espera que también tengas una opinión de qué tan útil te ha resultado realizar las actividades propuestas en ellas, ojalá esta opinión sea favorable en el sentido de que consideres que tener la oportunidad de reflexionar sobre lo que has aprendido y sobre las cuestiones que todavía no tienes claras y las dificultades que has tenido, te resulte útil a la hora de tomar decisiones sobre qué hacer para mejorar.

Una buena manera de iniciar la Actividad de Autoevaluación es revisar la introducción al BLOQUE para tener presente lo que se espera sepas hacer al terminar de estudiarlo, es decir, al terminar de realizar las actividades de las diferentes secuencias. Después de hacerte consciente de lo que se espera de ti, cerciórate en qué medida lo has logrado, resolviendo los siguientes problemas y, si en alguno o algunos de ellos, no sabes cómo proceder o no sabes si lo que hiciste es correcto o no, toma nota para que consultes con el profesor, con otros compañeros o con quien tú decidas para que te ayuden a aclarar tus dudas.

Problema 1.

a. Cuándo se dice que la forma en que varía una cierta cantidad es periódica.

____

b. Cita al menos tres ejemplos de fenómenos en los que la variación sea periódica en donde al menos uno de esos fenómenos no se hayan mencionado en el bloque.

____

____

____

Problema 2.

a) ¿Cuándo se dice que un movimiento es periódico?

____

____

b) Cita, al menos tres movimientos que sean periódicos

____

____

c) ¿Cuándo un movimiento circular es periódico con respecto al tiempo?

____

____

d) ¿Cómo puede determinarse la posición de una partícula que describe un movimiento circular?

____

____

Problema 3

¿Cuáles son las expresiones analíticas que se usan para calcular las coordenadas de la posición de una partícula cuando está girando?

___

___

___

Problema 4

¿Qué representan las expresiones analíticas $x = Cos\ (t)$ y $y = Sen\ (t)$ y para que se usan?

Problema 5

Describe la variación con respecto al ángulo de las coordenadas x y y de la posición de una partícula que está girando en una trayectoria circular.

Problema 6

¿Cuál es el valor del radio de la trayectoria, de la velocidad angular y del periódo del movimiento cuyas coordenadas se calculan con las expresiones analíticas que aparecen en el problema 4?

BLOQUE 5

Variaciones Especiales y Funciones Inversas

Como se indica en el título, en este BLOQUE tendrás oportunidad de revisar variaciones cuyos modelos funcionales tienen características especiales; ya sea porque no es posible encontrar una expresión analítica con una única regla de correspondencia, o bien porque requieren de una notación especial para evitar explicitar las diferentes definiciones de dichas reglas de correspondencia. Así también, revisarás otras más, que al caracterizarse como una relación inversa de alguna otra función, se requiere modificar su dominio o señalar las restricciones de la regla de correspondencia que permita definirlas como funciones.

Tener capacidad de distinguirlas y expresarlas ***tabular, gráfica y analíticamente***, para relacionar las características principales de estas variaciones en estos tres tipos de representación, te permitirá tener más claridad y dominio para interpretar fenómenos que se presentan en situaciones cotidianas, como los casos de lectura de recibos de agua, luz o impuestos. Este tipo de recibos generalmente obedecen a reglamentos establecidos por la normatividad de la institución a cargo de dichos cobros, los cuales establecen tarifas diferenciadas buscando favorecer el cuidado de la energía —como en el caso de la luz o el agua—, o el ingreso de los menos favorecidos en pagos de impuestos por salarios, por citar algunos.

Mediante las actividades que conforman las secuencias, formularás nuevas expresiones para describir estos comportamientos variacionales especiales. Te darás cuenta de la importancia que tiene precisar el dominio en la definición de una función y lograrás asociar gráficas "raras" con expresiones que combinan las ya conocidas con nuevas definiciones; tal es el caso para las funciones definidas "por partes", "valor absoluto", "mayor entero menor que" o bien la función "menor entero mayor que"; de igual manera lograrás dar significado a las "funciones inversas". Se espera que mantengas siempre asociadas las distintas representaciones de estas funciones con el tipo de variación que representan.

Por otra parte, seguirás trabajando estas actividades en forma individual, en equipo o grupal. Como ya sabes, esta organización se presta a que reflexiones sobre lo que haces; a que comuniques mediante explicaciones, descripciones y argumentaciones; a que discutas ordenadamente dando oportunidad a tus compañeros de expresarse, escuchando y apreciando sus puntos de vista, discerniendo sobre el valor de las distintas opiniones para incorporar a tu manera de pensar aquellas que así lo ameriten.

*Con todo esto, se espera que logres el progreso en la formación **matemática** que requieres para que sigas avanzando en tu trayectoria académica sin tropiezos, y para que en tu vida cotidiana, estos conocimientos, habilidades y valores adquiridos, te proporcionen mayor seguridad y disposición para enfrentarte a situaciones diversas con la asertividad que ameriten.*

Tiempo asignado: 10 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

Sucesos que presentan diferentes tipos de variaciones

Actividad: 1
Actividad Grupal

El lanzamiento del cohete

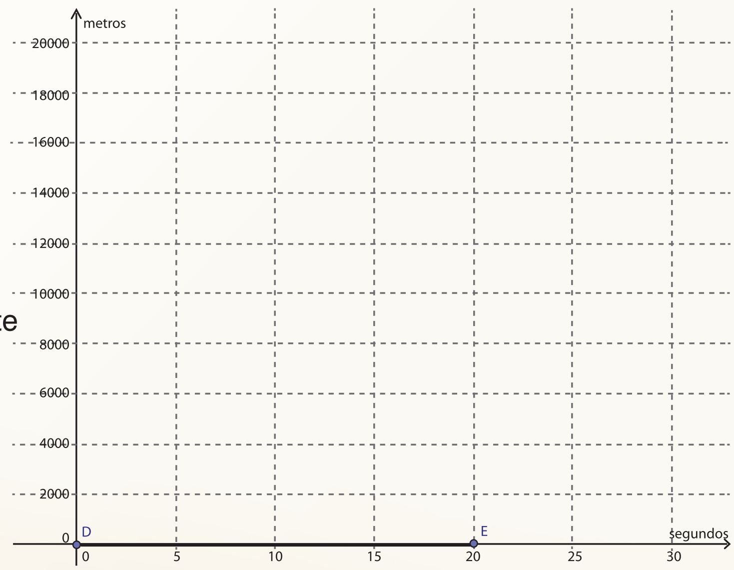
1. En un proyecto de un centro de investigación espacial, un cohete de pruebas es lanzado verticalmente, de manera que la altura en metros alcanzada durante los primeros 20 segundos, al estar impulsado por combustible, se calcula mediante la expresión $h=t^3$. Al llegar a los 20 segundos, se agota el combustible.

Figura 5.1

- Explica oralmente, es decir, sin valerte de cálculos o graficación lo que enseguida se pregunta:
- ¿Cuándo gana más altura el cohete, en los primeros 5 segundos después de su lanzamiento, o en los últimos 5 segundos antes de agotar el combustible?
- Cuando se agota el combustible, ¿empieza a caer inmediatamente o sigue subiendo?
- Después de agotado el combustible, ¿es correcto calcular altura del cohete mediante la misma regla de correspondencia dada inicialmente? Explica.

Actividad Individual y de equipo

- Haz un bosquejo de la gráfica que consideras representa mejor las alturas del cohete durante los primeros 25 segundos. Contrasten ante el grupo su bosquejo.



2. El grupo experimentador del centro de investigación espacial quiere registrar:

- La altura del cohete después de que se agota el combustible. ¿Les sirve la misma relación de correspondencia determinada para los primeros 20 segundos o requieren de otra expresión analítica para determinar esa altura?

  Argumenta tu respuesta con claridad y compártela con el grupo. Investiguen qué es lo que pasa con el cohete cuando se le agota el combustible.

- Cuando se estudió el tiro vertical de un objeto, hiciste uso de la siguiente expresión cuadrática:

$$h = h_0 + v_0\, t - 4.9t^2$$

  Tal expresión involucra las variables h y t como la altura dependiendo del tiempo. ¿Consideran que es una expresión útil para describir lo que está pasando con la altura del cohete al menos durante 5 segundos más después que agota el combustible, y de ser así, ¿qué datos se requieren para poder determinarla?

- ¿Qué altura alcanza el cohete a los 15 segundos?

- ¿Qué altura alcanza el cohete a los 25 segundos?

- ¿Qué describe la **gráfica** de la Figura 5.1? Detalla con claridad lo que observas.

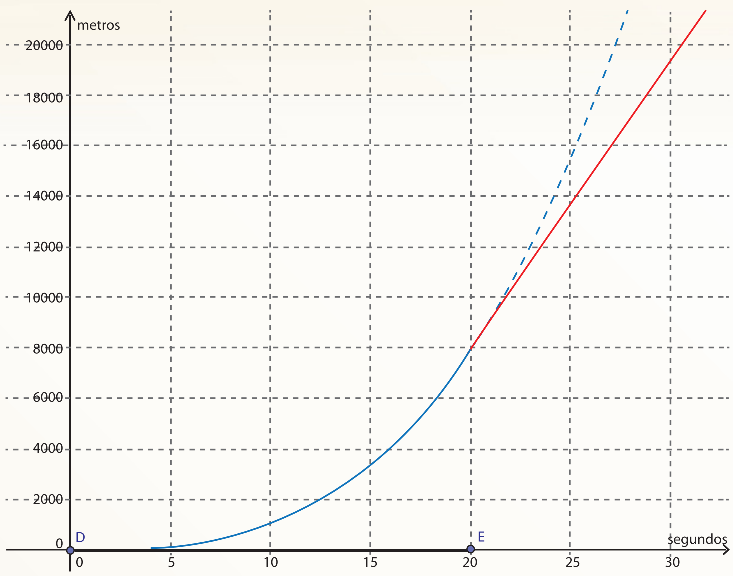


Figura 5.2

Para representar analíticamente la altura del cohete durante los primeros 25 segundos como una única función $h(t)$, se requieren dos reglas de correspondencia para la misma según el intervalo de tiempo en el que se encuentre.

$$h(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ h_0 + v_0\, t - 4.9t^2 & \text{si } 20 < t < 25 \end{cases}$$

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad Grupal

¿Cuánto debemos pagar por el agua potable en Hermosillo Sonora?

En la página http://www.congresoson.gob.mx/InfoPublica/Juridico/2014/Hermosillo.pdf se encuentra la información legal correspondiente a las tarifas que se cobran para el uso doméstico de este vital líquido. Estos cobros están contemplados en el Artículo 36 de la Ley de Ingresos y Presupuesto de Ingresos del Ayuntamiento del Municipio de Hermosillo para el ejercicio fiscal 2014, mismo que se reproduce a continuación:

Artículo 36.- *Los usuarios pagarán mensualmente por el consumo de agua potable en predios e inmuebles, conforme a las tarifas que se presentan a continuación:*

Tarifa para uso doméstico: *Este tipo de tarifa se aplicará a los usuarios cuya toma se encuentre instalada en inmuebles o predios no utilizados para fines productivos, de negocios, comerciales o de servicios y que el agua vertida de dicha toma se destine estrictamente a usos domésticos (no incluye el servicio de drenaje), conforme a la siguiente* ***tabla:***

Tabla 5.1 **Rango de consumo de agua y tarifa correspondiente**

Rango de consumo (en metros cúbicos)	Tarifa (en pesos por cada metro cúbico)
0 a 10	$63.69 (consumo mínimo obligatorio)
11 a 15	$5.94
16 a 20	$8.27
21 a 25	$8.27
26 a 30	$8.27
31 a 35	$8.44
36 a 40	$13.89
41 a 45	$13.89
46 a 50	$13.89
51 a 55	$47.95
56 a 60	$47.95
61 a 65	$47.95
66 a 70	$48.83
71 a 75	$48.83
76 en adelante	$52.66

1. La relación *tarifa-metros cúbicos* y sus representaciones

Discute con los integrantes de tu equipo las respuestas solicitadas en los incisos que siguen; cuando hayan llegado a algún acuerdo, escribe la respuesta de tu equipo en el espacio indicado para tal fin para comentarla ante el grupo cuando el instructor lo solicite. A partir de ese momento, la discusión será grupal.

Actividad de Equipo y de grupo

a. De acuerdo con la información de la **Tabla 5.1**, ¿se puede afirmar la existencia de una relación funcional entre las cantidades ahí involucradas? ¿Por qué? En tal caso, cuál variable depende de cuál?

____

____

Actividad Individual y de equipo

b. En los datos proporcionados en la tabla y lo enunciado verbalmente,

- ¿Consideras que está definida la tarifa para un consumo de 45.5 m^3 ? Explica:

____

____

- ¿Consideras que está definida la tarifa para un consumo de 50.5 m^3 ? Explica:

____

____

c. Utiliza la notación de unión de intervalos para que respondas lo siguiente.

La tarifa de agua es de \$13.89 para un volumen de:______________________

La tarifa de agua es de \$47.95 para un volumen de:______________________

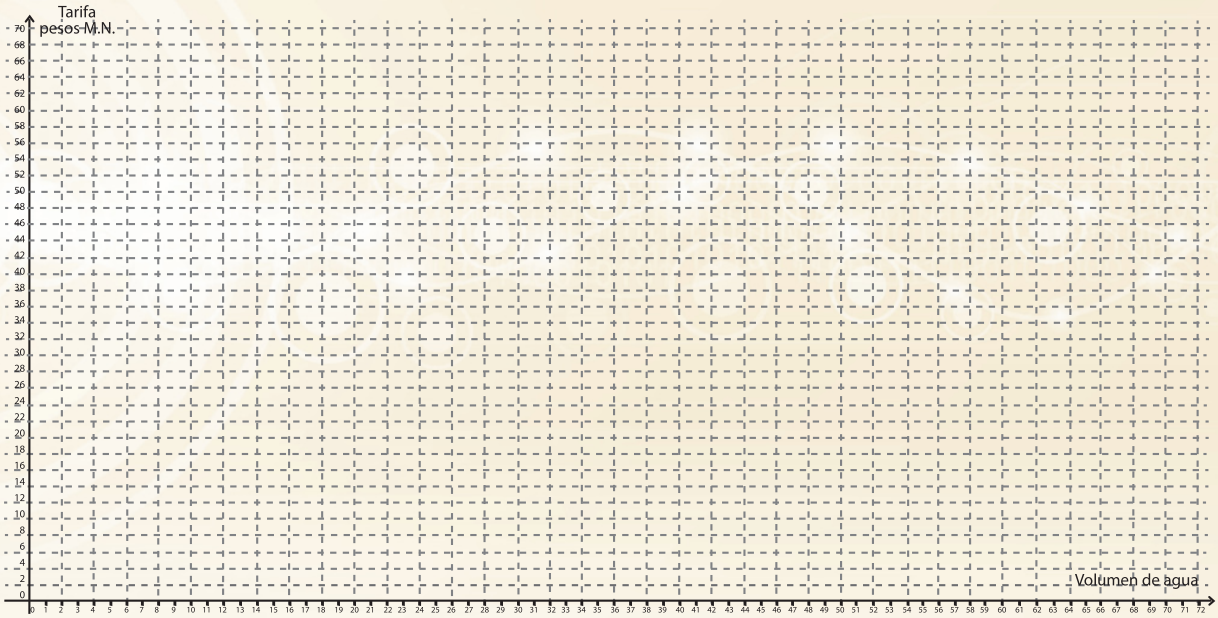
d. Determina los intervalos para los que no está definida la tarifa de agua.

____

____

Actividad de Equipo

e. Elaboren la representación **gráfica** para la relación existente entre las cantidades que aparecen en la **Tabla 5.1**.



f. Expliquen verbalmente el comportamiento de esta relación funcional, comenten en el grupo la descripción de esta variación:

____

____

____

g. Si se denota como $T(m)$ la relación funcional de la tarifa por metro cúbico, respecto al intervalo que le corresponde de acuerdo a lo expresado en el artículo 36, expresen dicha función analíticamente mediante la regla de correspondencia adecuada, tomando en cuenta el intervalo al que pertenece m.

$$T(m) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m \leq & \\ \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m \leq & \\ \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m \leq & ; \quad \leq m \leq \quad ; \quad \leq m \leq \\ \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m \leq & \\ \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m \leq & ; \quad \leq m \leq \quad ; \quad \leq m \leq \\ \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m \leq & ; \quad \leq m \leq \quad ; \quad \leq m \leq \\ \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m \leq & ; \quad \leq m \leq \quad ; \\ \_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \leq m & \end{cases}$$

h. Como consecuencia de lo expresado matemáticamente, ¿cuál es el dominio de esta función? Exprésenlo mediante unión de intervalos.

i. ¿El rango puede ser identificado como un número real cualquiera? ______ ¿Qué conjunto mínimo de números consideras que puede ser el contradominio de la función Tarifa, es decir, el conjunto mínimo de números de donde se puede determinar el rango de esta función?

j. ¿Te parece que alguna de estas representaciones sobre la tarifa de agua aclara cuánto va a pagar un usuario si al consultar su medidor nota que consumió en el mes 32 m^3 de agua? Discútelo con tus compañeros y anota los principales argumentos que apoyan tu respuesta.

Actividad Grupal

2. El costo por consumo: La relación metros cúbicos $\longrightarrow$ costo y sus representaciones.

Para dar respuesta a la pregunta anterior se analizará la relación existente entre los metros cúbicos de consumo y lo que cuesta dicho consumo[1]. Para ello, se tomará en cuenta la siguiente información, que al igual que la **Tabla 5.1**, está contenida en el Artículo 36 de la Ley de Ingresos y Presupuesto de Ingresos del Ayuntamiento del Municipio de Hermosillo para el ejercicio fiscal 2014:

[1] **Nota:** Toma en cuenta que solamente se analizará el *costo por consumo de metros cúbicos de agua*, el cual difiere del *cobro* que aparece en el recibo a pagar, pues en éste se incluye también el 35% por drenaje y el 16% de IVA.

Para determinar el importe mensual por consumo de agua al usuario doméstico, se continuará con el mismo procedimiento que se ha aplicado en años anteriores, y que consiste en considerar un cobro mínimo de $43.96 para los primeros 10 metros cúbicos. Para los consumos mayores de 10 metros cúbicos se le sumará a este cobro mínimo, ***el producto de los siguientes 5 metros cúbicos de consumo por la tarifa correspondiente,*** *así se repetirá esta operación con los siguientes rangos, hasta llegar al rango donde se ubica el consumo mensual del usuario en metros cúbicos, sumando a los importes calculados anteriormente, el producto de los metros cúbicos pendientes de cobro por la tarifa correspondiente a este último rango de consumo que aplica para un usuario en particular.*

Actividad de Equipo y de grupo

Discute con los integrantes de tu equipo las respuestas solicitadas en los incisos que siguen; cuando hayan llegado a algún acuerdo, escribe la respuesta de tu equipo en el espacio indicado para tal fin, para luego comentarla ante el grupo cuando el instructor las solicite. A partir de ese momento, la discusión será grupal.

Actividad de Equipo

a. De acuerdo con la información anterior, calcula lo que se pagaría si el número de metros cúbicos de agua consumidos fuesen los que se marcan en la **tabla** que sigue.

Escribe tu cálculo de manera desarrollada. Tomen en cuenta que los medidores marcan hasta centésimos de m³. La **tabla de tarifas 5.1** sigue siendo la referencia de costo de cada metro cúbico.

Metros cúbicos consumidos	**Costo en pesos**	
	Operaciones	**Costo total**
0		
5		
11		
17		
28		
35.4		
38		
43		

Comenten y discutan sus procedimientos en el grupo.

b. ¿Existe una relación funcional entre las cantidades ahí involucradas? ¿Por qué? Si es así, ¿Cuál es la variable dependiente y cual la independiente?

c. Si se denota como $C(m)$ la función Costo, intenten expresarla analíticamente mediante la regla de correspondencia adecuada, tomando en cuenta el intervalo al que pertenece m.

$$C\,(m) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad \le m \le \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad < m \le \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad < m \le \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad < m \le \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad < m \le \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad < m \le \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad < m \le \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \; si \quad < m \le \end{cases}$$

d. ¿Por qué del segundo intervalo en adelante, en todos se descarta el valor igual a m por la izquierda?, es decir, ¿por qué son del tipo (___,____]?

e. En la expresión analítica encontrada de acuerdo a cada intervalo de m ¿qué tipo de gráfica le corresponde a cada uno de ellos?

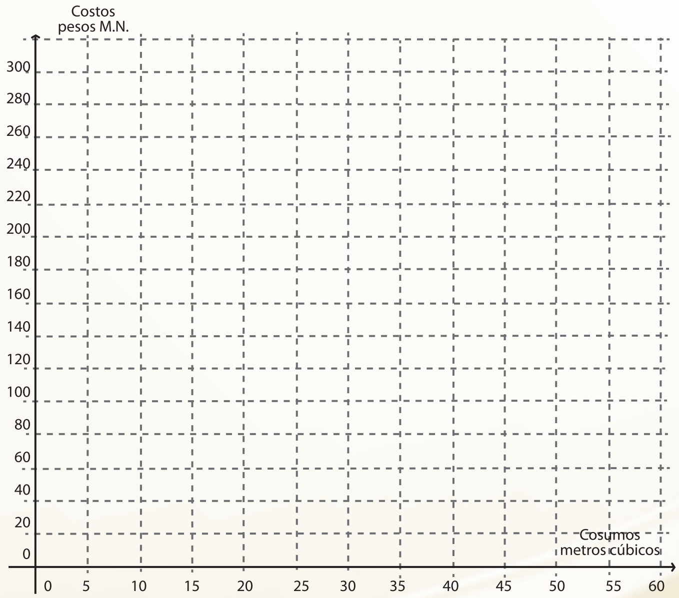
f. Encuentren ahora la representación **gráfica** para la función $C(m)$. Para ello pueden utilizar el plano que se proporciona a continuación. Luego describan verbalmente el tipo de variación que advierten.

g. ¿Cuáles son el dominio y el rango de la función Costo? Considera que para fines prácticos el consumo doméstico mensual no excede los 80 m^3.

____

____

____



Actividad de Cierre

Actividad: 3
Actividad Grupal

Así como las funciones tarifa y costo por consumo de agua potable analizadas aquí; las de la energía eléctrica, las del costo por envíos postales, las de los impuestos como el ISR en la compra-venta de predios, y otras más, requieren definirse por intervalos. En los casos mencionados el tipo de variación es el mismo, pero se determina mediante distintas reglas de correspondencia en su dominio que son de la misma naturaleza, es decir, lineales.

En el caso del lanzamiento del cohete, el tipo de variación cambia en el dominio de la función, esto requiere de utilizar expresiones que son de naturaleza distinta, es decir, se requirió una expresión cúbica y una cuadrática para describir su altura respecto al tiempo.

Las funciones que requieren determinarse por distintas reglas de correspondencia, según el intervalo que las define, se conocen como ***funciones por partes***.

Existen también funciones cuyos comportamientos siguen un patrón por intervalos regulares, como las que se muestran en las siguientes gráficas. Analiza el comportamiento de ellas y menciona alguna característica que las distinga en la determinación de sus intervalos, en comparación a las estudiadas para las tarifas de agua. El punto remarcado al principio o al final de cada escalón significa que ese extremo del segmento contiene al punto.

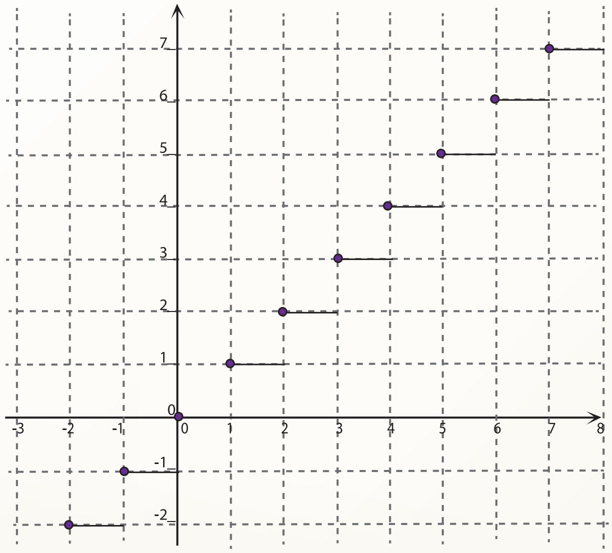


Figura 5.3

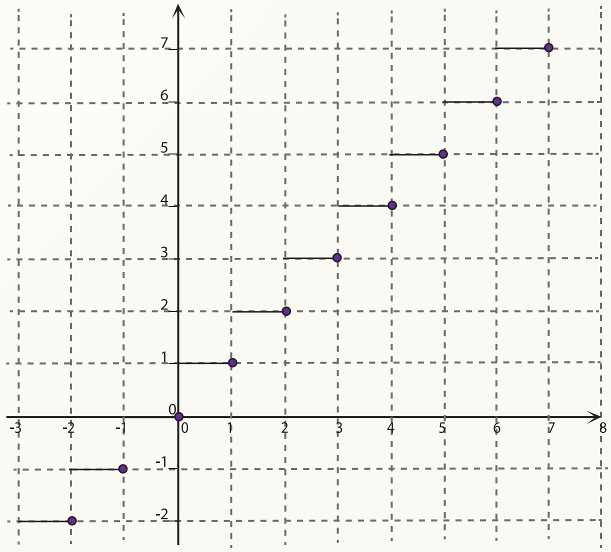


Figura 5.4

Actividad de Equipo

a. Estas funciones se definen verbalmente como "***el menor entero mayor que*** x" o bien como "***el mayor entero menor que*** x". En las **gráficas** presentadas en las Figuras 5.3 y 5.4 ¿cuál es cuál?

b. Discute si una representación analítica de estas funciones conviene expresarla como en los casos de la tarifa y el costo del agua, es decir, enunciando la regla de correspondencia para cada intervalo. Anota tus conclusiones enseguida:

____

____

Frecuentemente a la función "***mayor entero menor que***" se le denota analíticamente mediante la expresión $y = [x]$.

Actividad Individual

c. Esta expresión es útil para referirse a la parte entera de un número decimal positivo. Escribe en la tabla que se muestra a continuación los valores para $y = [x]$.

$[0.85]$	$[3.893]$	$[4.27]$	$[5]$	$\left[\frac{11}{2}\right]$	$\left[\frac{20}{3}\right]$	$\left[\frac{43}{6}\right]$

d. ¿Crees que resulta igualmente práctica esta función para referirse a la parte entera de los decimales negativos? Argumenta tu respuesta.

____

____

____

De manera análoga, la función "***menor entero mayor que*** x" suele denotarse analíticamente mediante la expresión $y =]x[$

e. ¿Qué tipo de números podrían representar su parte entera mediante esta expresión?

____

____

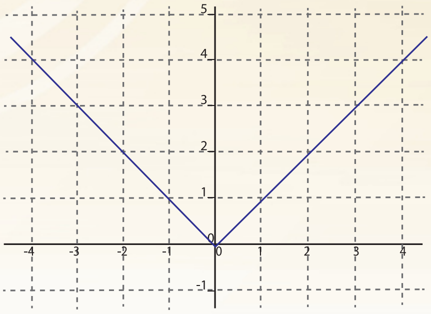
____

Otra función especial

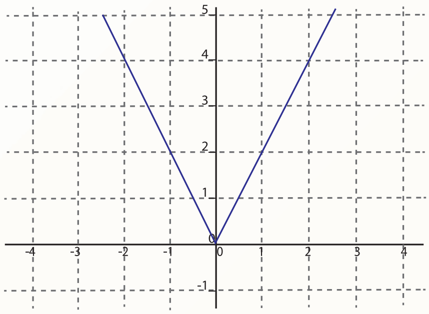
1. Así como se ha convenido la expresión analítica $y = [x]$ para la función *"mayor entero menor que"*, existe una expresión especial para funciones cuyas **gráficas** corresponden a la representación de una función por partes, que como las revisadas antes, se pueden expresar mediante distintos tipos de reglas de correspondencia, pero que cumplen cierta característica.

Por ejemplo:

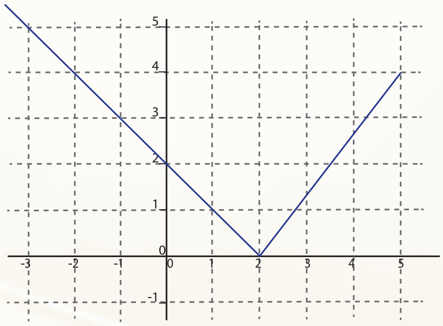
a. ¿Cuáles reglas de correspondencia determinan la representación analítica $f(x) = y$ que corresponde a cada una de las funciones cuyas representaciones gráficas se muestran en la Figura 5.5? Después de cada expresión, escribe qué diferencia tienen las reglas de correspondencia determinadas para cada intervalo del dominio de la función.



$$y = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \textit{si} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \textit{si} \end{cases}$$



$$y = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \textit{si} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \textit{si} \end{cases}$$



$$y = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \textit{si} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \ \textit{si} \end{cases}$$

Figura 5.5

Este tipo de funciones también tienen una expresión analítica que no requiere distinguir sus intervalos; se denota como la función *"valor absoluto"* y su definición es la siguiente:

La ***Función Valor Absoluto*** se denota por

$$y = |f(x)|$$

Esta expresión indica que: $y = \begin{cases} -f(x), \text{ si } f(x)<0 \\ f(x), \text{ si } f(x)\geq 0 \end{cases}$

Actividad Individual

b. ¿Qué significa esta definición? Explica:

____

____

c. Expresa analíticamente, mediante la notación de valor absoluto, cada una de las tres funciones representadas en el inciso (*a*) de este punto 3.

____

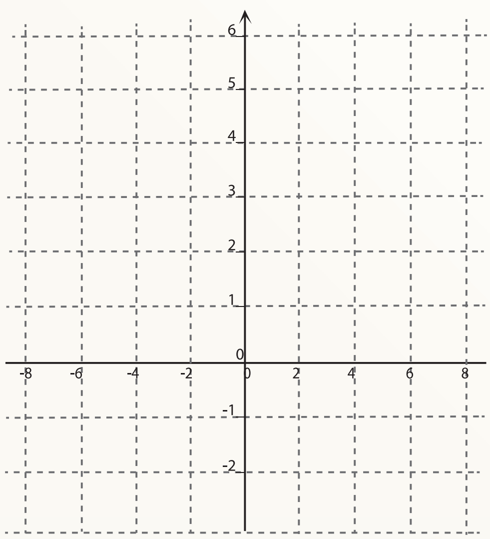
____

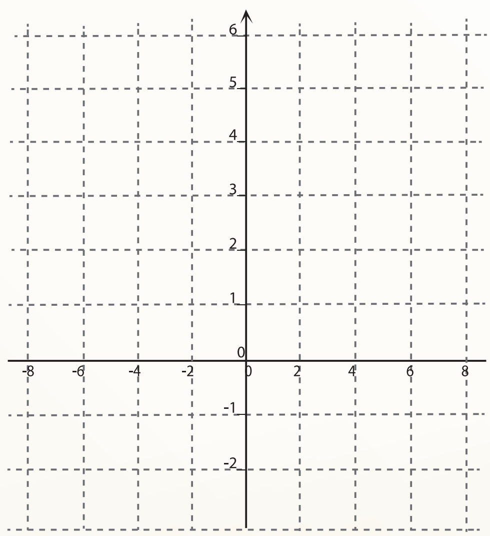
d. Propón dos funciones valor absoluto:

- Una expresión polinomial de segundo grado.

- Una expresión racional.

e. Bosqueja ambas **gráficas** y luego contrasta tus bosquejos con las **gráficas** que te proporcione un graficador de funciones.





Actividad Grupal

Comparte con tus compañeros los resultados de tus propuestas.

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

Un acercamiento a las funciones inversas

Actividad: 1
Actividad Individual

Luis obtuvo un premio de $300,000 pesos en un sorteo de la *Lotería Nacional* y quiere invertir su dinero en el banco en una cuenta a plazo fijo que paga un interés del 5% anual. Planea dejarlo por 5 años hasta que termine sus estudios, para ayudarse a financiar su propio negocio. **Luis** pidió a su asesor de cuenta que le proporcionara información de cómo iba a aumentar su saldo en la cuenta durante estos 5 años. En la siguiente **tabla** se muestra esta información.

t [años]	$S = f(t)$ [pesos]
0	300,000
1	315,000
2	330,750
3	347,287.50
4	364,651.88
5	382,884.48

1. De la **tabla** anterior se tiene que:

t representa los años transcurridos a partir del depósito inicial.
$f(t)$ es el saldo en la cuenta (pesos) después de t años a partir del depósito inicial.

a. ¿Cuál será el saldo en la cuenta dos años después del depósito inicial?

Por lo que; $f(2)=$___________

b. ¿Cuál será el saldo en la cuenta cuatro años después del depósito inicial?

Por lo que; $f(4)=$___________

c. ¿Cuánto tiempo tiene que dejar **Luis** su dinero invertido en el banco para que el saldo en la cuenta sea de $315,000 pesos? ________________________________

____

d. ¿Cuánto tiempo tiene que dejar **Luis** su dinero invertido en el banco para que el saldo en la cuenta sea de $364,651.88 pesos? ______________________________

____

e. ¿Cómo obtuviste la información para contestar las dos preguntas anteriores? ___________

____

____

Desarrollo

Actividad de Equipo y de grupo

En esta parte vas a continuar analizando la información sobre la inversión de Luis, particularmente la que se refiere a los incisos **c** y **d,** donde se te preguntó por el tiempo que tenía que transcurrir para tener un determinado saldo en la cuenta. Para contestar dichas preguntas utilizaste la información de la **tabla** del inicio pero en forma diferente.

Al leer las tablas al revés *(de la columna de la derecha a la columna de la izquierda)*, o sea a partir de un saldo dado obtener el tiempo que debe de transcurrir para tener dicho saldo en la cuenta, se obtiene una nueva función que se llama función inversa **de** f y se representa por f^{-1}.

2. Entonces, la expresión $f^{-1}(t) = g(S)$ representa la cantidad de años t que tienen que transcurrir a partir del depósito inicial para tener un determinado saldo en la cuenta.

   a. Para calcular los valores de $g(S)$, completa la siguiente **tabla**.

S [pesos]	$t = g\ (S)$ [años]
300,000	
315,000	
330,750	
347,287.50	
364,651.88	
382,884.48	

Las funciones $f(t)$ y $f^{-1}(t) = g(S)$, tienen la misma información pero la expresan en forma distinta. Por ejemplo; el hecho de que después de tres años el saldo en la cuenta será de \$347,287.50 pesos, se puede escribir con $f(t)$ o con $g(S)$

$f(3)= 347{,}287.50$ $\qquad$ $g= (347{,}287.50)=3$

   b. Determina lo que se solicita para ambas funciones

Para $f(t)$:

Valor de la variable independiente:_________

Valor de la variable dependiente:__________

Para $f^{-1}(t)$:

Valor de la variable independiente:_________

Valor de la variable dependiente:___________

c. ¿Qué sucede con estos valores de las variables?

d. Escribe lo que se te pide:

Para $f(t)$: ____________________ Para $f^{-1}(t)$: ______________________

Dominio: ____________________ Dominio: ______________________

Rango: ____________________ Rango: ______________________

¿Qué sucedió con respecto al dominio y al rango en ambas funciones?

Actividad de Equipo

¿Qué funciones tienen inversas?

3. Primero, vas a explorar un caso cuando una función no tiene inversa.

El lanzamiento de una moneda al aire.

Una moneda al ser lanzada verticalmente, se elevó hasta una altura de 2.38 m y después bajó hasta el piso.

La función $f(t)$ determina la altura a, en metros, t seg después del lanzamiento.

a. Completa:

La función inversa de $a = f(t)$ determina:

Por lo que la función inversa valuada en 2 representa:

En la siguiente gráfica se observa la altura alcanzada por la moneda desde el lanzamiento hasta que choca con el piso.

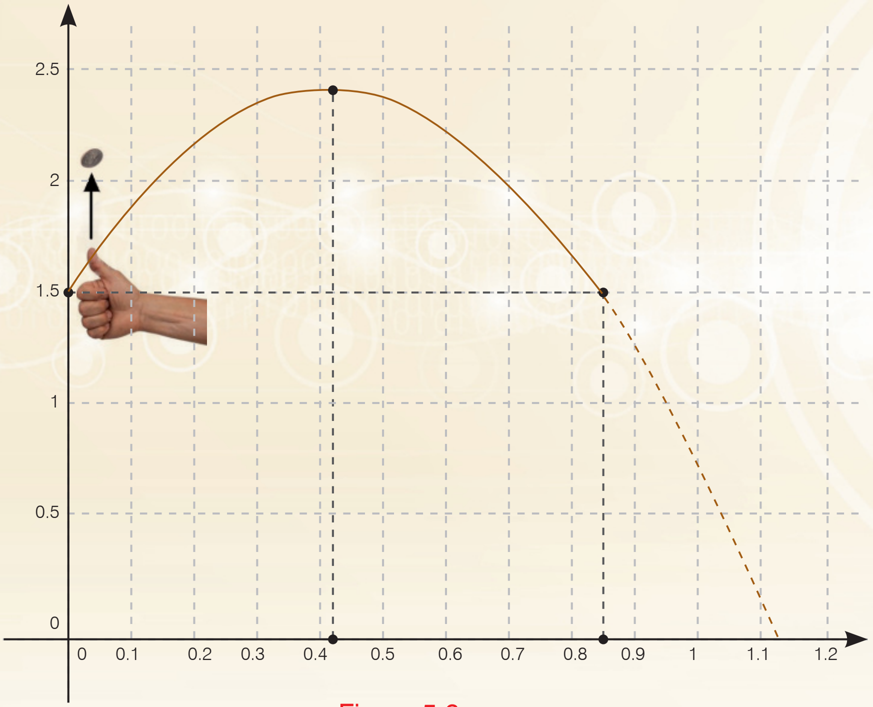


Figura 5.6

b. Utiliza la gráfica anterior para identificar el valor que le corresponde al tiempo cuando la altura es de 2m.

Recuerda; para que exista una función a cada valor de la variable independiente le debe corresponder un único valor de la variable dependiente.

c. Selecciona la respuesta correcta.

Por lo tanto, en esta situación, la función $a = f(t)$

____Sí tiene inversa. ____No tiene inversa.

La razón por la que la función altura ($a = f(t)$) no tiene inversa es que la altura primero aumenta en un intervalo de tiempo y después disminuye. La razón por la que la función saldo ($S=f(t)$) sí tiene una inversa, es que éste crece siempre. A cada tiempo t, le corresponde un determinado saldo único, S.

Las gráficas en la Figura 5.7 sugieren cuándo puede existir una función inversa.

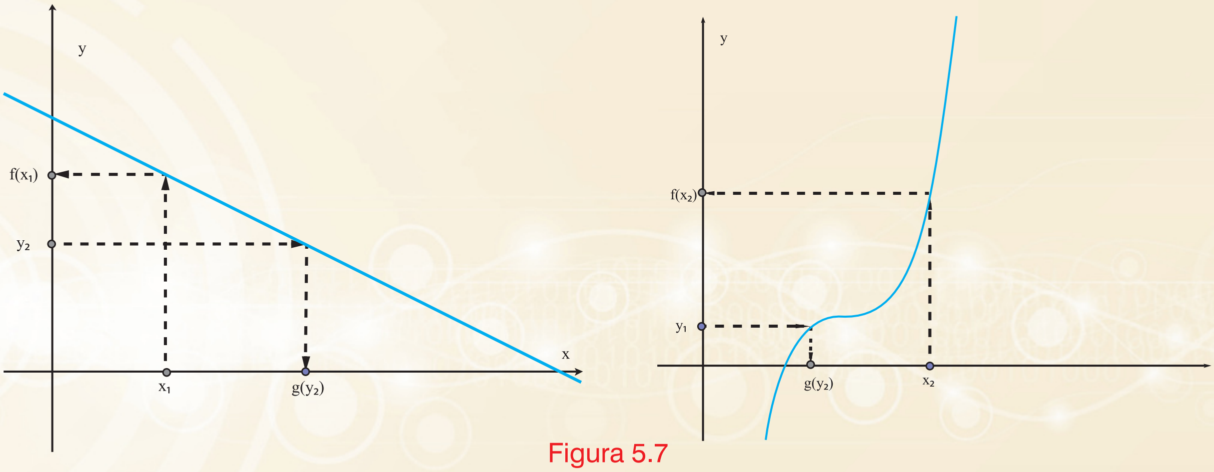


Figura 5.7

La función original f, nos lleva de un valor de x a uno de y.

La función inversa f^{-1}, parte de un valor de y para llegar a uno de x.

La pregunta importante que nos debemos de hacer es: **¿Corresponde a cada valor de y un único valor de x?,** si la respuesta es sí, existe una función inversa; si la respuesta es no, no la hay.

Actividad Individual y de equipo

La función inversa a partir de expresiones analíticas

4. Cuando una función está definida por una expresión analítica, es posible determinar la expresión analítica para la función inversa.

En el BLOQUE 1 trabajaste con una expresión analítica para convertir una temperatura expresada en $°C$ a su equivalente en $°F$.

$$°F=f\,(°C)=1.8°C+32$$

a. La función $°F=f\,(°C)$ ¿Tiene inversa? Argumenta tu respuesta.

____

____

b. Escribe la variable independiente y la variable dependiente de la función inversa.

_____ $= g$ (_____)

c. ¿Qué información te va a proporcionar la función inversa?

____

____

A partir de la expresión de $°F = f(°C) = 1.8°C + 32$

d. Deduce la expresión analítica de la función inversa. Despejando $°C$ se

Actividad de Equipo y de grupo

Gráficas de funciones inversas

Sea la función $y = f(x) = x^3$

a. ¿Tiene inversa? Argumenta tu respuesta.

b. Deduce la expresión analítica de la función inversa.

$$x = g(y) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Dado que el dominio de la función inversa está en el *eje Y*, para poder graficar en los mismos ejes la función original y su inversa, se hace un intercambio nombrando x a la y y y la x en la función inversa.

c. En la expresión que obtuviste anteriormente, intercambia los nombres de x por y y expresa la función inversa con x como variable independiente:

$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

d. Completa las siguientes **tablas**, intercambiando el nombre de las variables en la función inversa:

x	$y = x^3$
-2	
-1	
0	
1	
2	

x	$y = \_\_\_\_\_\_$
-8	
-1	
0	
1	
8	

a. Compara los valores numéricos de ambas **tablas**. ¿Qué sucede?

b. En la Figura 5.8 determina qué **gráfica** corresponde a cada una de las funciones y describe con precisión las características geométricas que observas entre ellas y la **gráfica** que representa la función identidad $y=x$.

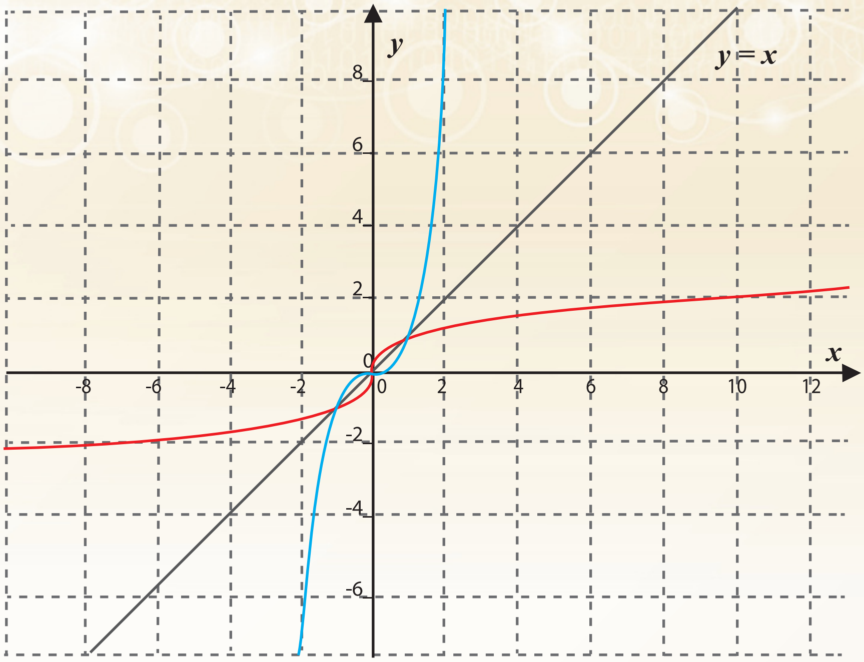


Figura 5.8

g. En el BLOQUE 3, en la parte del cierre de la *secuencia de los logaritmos*, se encuentra una figura con características similares a esta Figura 5.8. ¿Qué puedes concluir de esas dos funciones que aparecen en dicha figura?

6. A continuación vas a explorar otro caso. Sea la función $f(x) = x^2$

a. ¿Esta función tiene inversa? Argumenta tu respuesta.

Ahora considera la función $A = f(l)$ donde A representa el área de un cuadrado y l la longitud de su lado.

a. Escribe la *expresión analítica* para calcular A.

$$A = f(l) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

b. ¿Cuál es el dominio de esta función?

c. La función $A = f(l)$ ¿Tiene inversa? Argumenta tu respuesta.

d. Escribe la *expresión analítica* de la función inversa.

$$l = g(A) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

e. ¿Qué información te va a proporcionar esta función inversa?

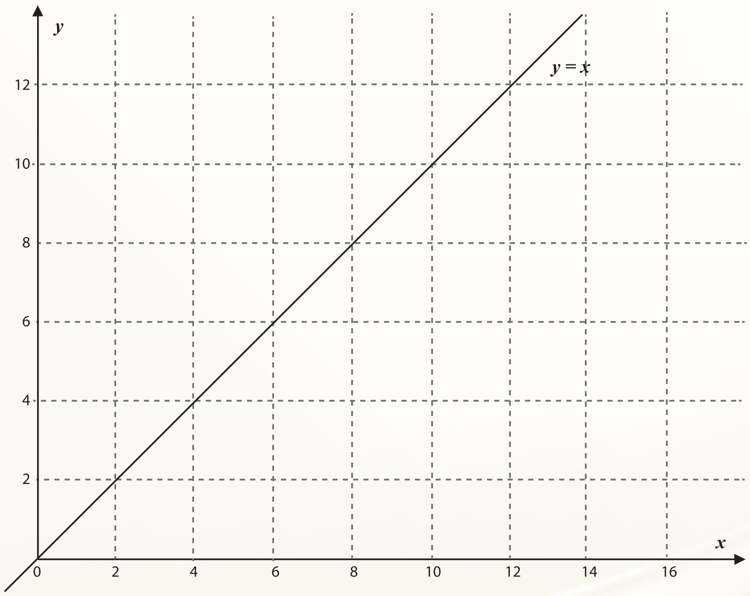
f. Completa las siguientes **tablas**.

l	$A = l^2$
0	
1	
2	
3	

A	$l = \sqrt{A}$
0	
1	
4	
9	

Tarea (ind).

h. Traza en la cuadrícula la gráfica de las funciones; $f(l) = l^2$ y $g(A) = \sqrt{l}$, para ello denota por x y y las variables, y como antes, nombra x a la variable independiente en ambas funciones.



Actividad de Cierre

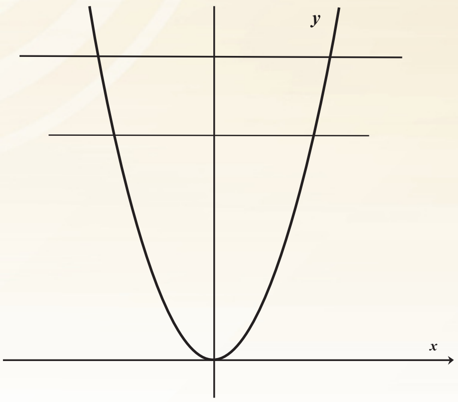
Actividad Grupal

Cuando una función tiene inversa se dice que es ***invertible***.

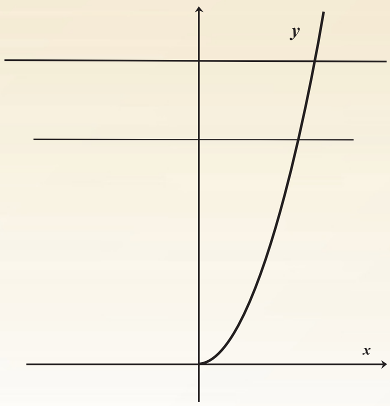
Una función va a ser invertible siempre que tenga un solo comportamiento; que siempre sea creciente o que siempre sea decreciente. Esto se puede enunciar geométricamente como sigue:

Una función es invertible si y sólo si al trazar sobre su gráfica cualquier línea horizontal éstas se intersecan en un solo punto.

Por ejemplo: la función $f(x) = x^2$ no tiene inversa porque cualquier línea horizontal que se trace *interseca* dos veces la parábola. Pero si se restringe su dominio para $x \geq 0$, entonces esta función es invertible:



No es invertible



Sí es invertible

Figura 5.9

Si la función f es invertible, se tiene que:

En la Función original	**En la función inversa**
$y=f(x)$	$f^{-1}(x)$ es una función $x=g(y)$
La variable independiente es x	La variable independiente es y

Como las variables se invierten en la función inversa, entonces, el dominio de la función original corresponde al rango de la función inversa y el rango de la función original corresponde al dominio de la función inversa,

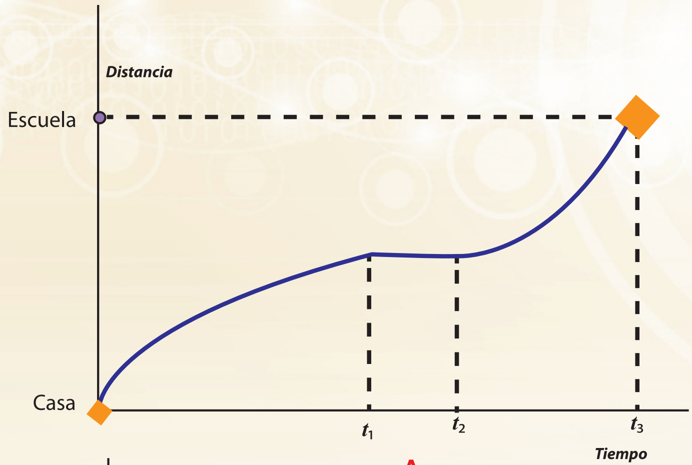
Para deducir la expresión analítica de la función inversa a partir de la expresión de la función original; se tiene que despejar x de la expresión de $y=f(x)$ para obtener la expresión de $x=g(y)$.

Geométricamente, siempre que los ejes x y y tengan la misma escala:

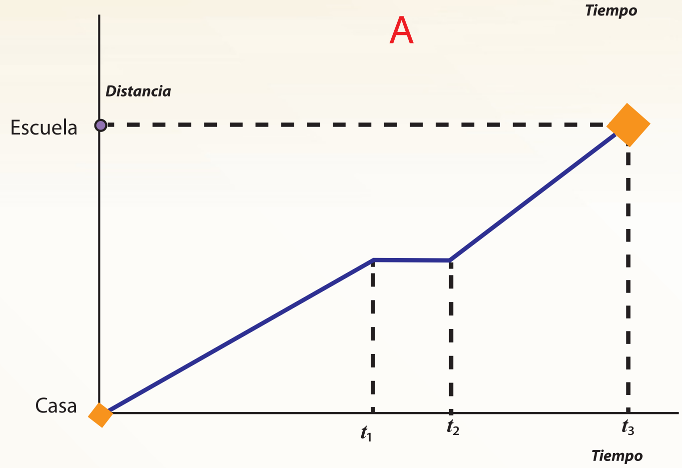
La gráfica de f^{1}es el reflejo de f tomando la recta $y=x$ como eje de reflexión.

1. Selecciona la **gráfica (A, B o C)** que representa la situación que se describe a continuación:

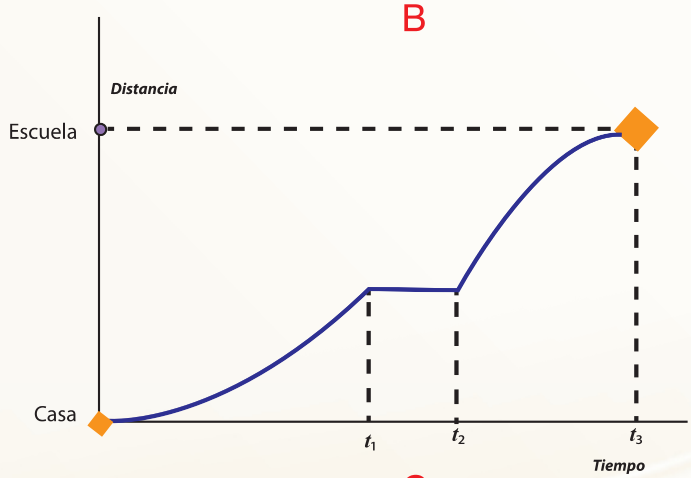
Salí de mi casa rumbo a la escuela caminando cada vez más rápido, de pronto me detuve pues saludé a un amigo y me quedé platicando con él un ratito. Luego pensé que era tarde y reanudé mi marcha muy de prisa, de hecho empecé corriendo, pero me cansé y me fui deteniendo poco a poco hasta que llegué a la escuela.



A

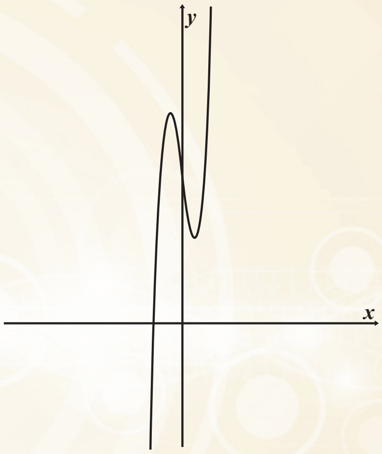


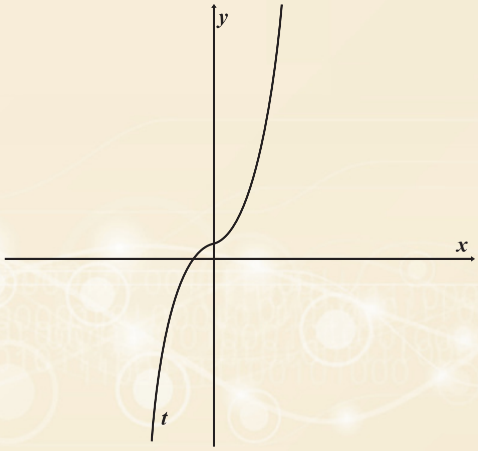
B



C

2. Analiza las siguientes **gráficas** de funciones y determina si son invertibles.



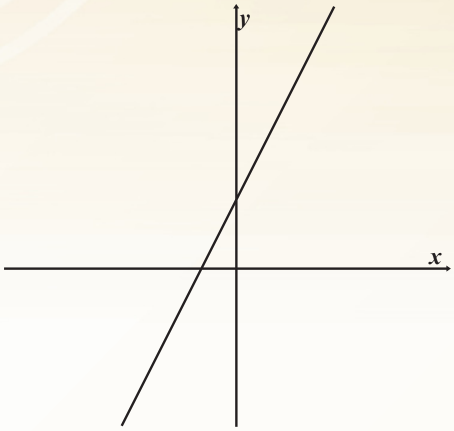


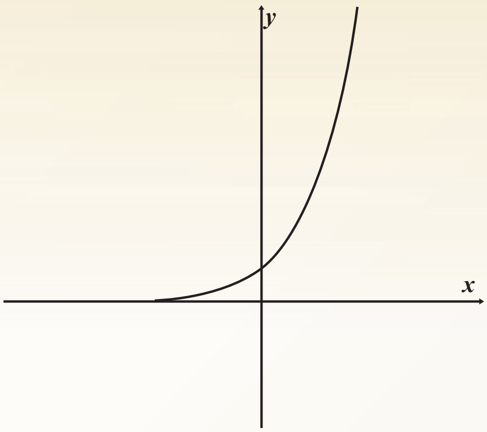
a) ______________________________________

____

b) ______________________________________

____



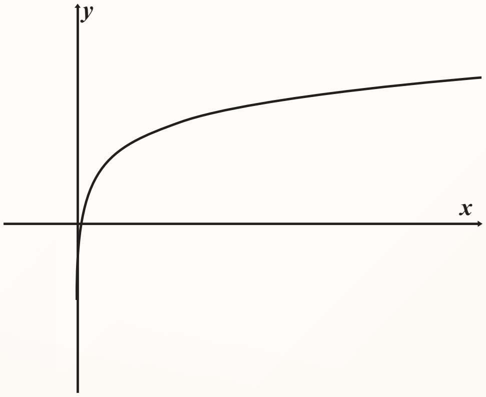


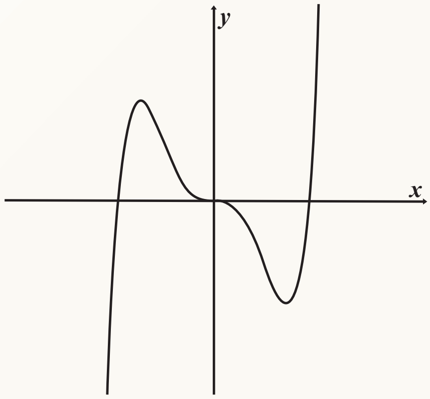
c) ______________________________________

____

d) ______________________________________

____





e) ______________________________________

____

f) ______________________________________

____

3. ¿Cuál es la *expresión analítica*, la **gráfica**, el dominio y el rango de la *función valor absoluto* que corresponde a cada una de las siguientes funciones?:

a) $g(x) = -(x+1)^2$ *b)* $h(x) = \frac{2}{3}x - 3$ c) $j(x) = \frac{1}{4}(x-1)^3 - 5$

d) $l(x) = \frac{1}{x-2} - 1$ *e)* $i(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ *f)* $m(x) = 4(\cos x) + 1$

4. ¿Cuál es la *expresión analítica*, la **gráfica**, el dominio y el rango de la *"función mayor entero menor que"* que corresponde a cada una de las siguientes funciones?:

g) $g(x) = -(x+1)^2$ *h)* $h(x) = x - 3$ *i)* $j(x) = (x-1)^3$

5. En el BLOQUE 3 analizaste una situación relacionada con una tragedia ecológica como es el derrame de petróleo en el mar. Advertiste que la superficie de la mancha de petróleo (m^2) depende del tiempo transcurrido (días) después del derrame, calculando ésta con la expresión $S = f(t) = 1.5\ (3)^t$

a. ¿Esta función es invertible? Argumenta tu respuesta.

____

____

b. Deduce la expresión de la función inversa.

c. ¿Qué información proporciona la función inversa?

____

____

6. El Costo C de producir q cantidad de artículos se obtiene con la función $C = f(q) = 1200 + 4q$

a. Deduce la expresión de la función inversa.

____

____

b. ¿Qué información proporciona la función inversa?

____

____

7. Analiza, en la **tabla** del Inicio de la última **secuencia** de este BLOQUE, el tipo de sucesiones numéricas que forman los valores de t y S respectivamente.

a. Deduce una expresión para calcular el saldo S para cualquier valor de t *(años transcurridos de la inversión).*

b. La función obtenida, ¿es invertible? Argumenta tu respuesta.

c. Deduce la expresión de la función inversa.

d. ¿Qué información proporciona la función inversa?

8. Dada la siguiente afirmación: "Si f es una función creciente, entonces f^{1} es una función creciente".

a. Explica si esta afirmación es cierta o falsa.

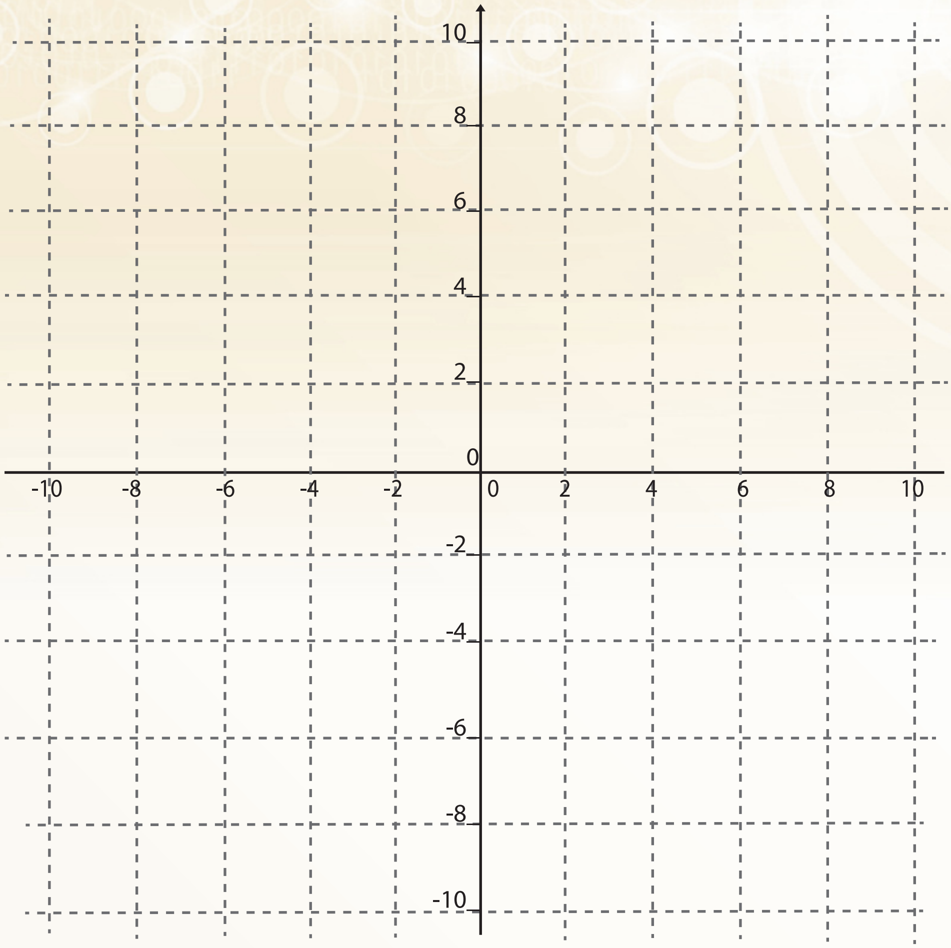
b. Si la afirmación es cierta, contesta lo siguiente:

- Si el crecimiento en la función original va siendo cada vez más rápido, ¿cómo es el crecimiento en su función inversa?

- Si el crecimiento en la función original va siendo cada vez más lento, ¿cómo es el crecimiento en su función inversa?

- Si el crecimiento en la función original es constante y muy rápido, ¿cómo va a comportarse el crecimiento de su función inversa?

9. Representa gráficamente una situación de variación que tenga inversa; la **gráfica** es libre, es decir, no asociada a alguna expresión analítica previa. Traza la **gráfica** de su inversa y describe la variación de ambas.



10. **Proyecto**: Investiga las diferentes tarifas por consumo de luz de la Comisión Federal de Electricidad. Analiza los datos del recibo de luz más reciente de tu domicilio. Haz una **tabla** o relación numérica del precio por kilowatt según la cantidad de consumo. Representa esta “función tarifa” gráficamente y mediante su expresión analítica por intervalos. Enseguida representa en ambas formas la función que modela el costo por consumo. ¿Qué otros factores inciden para que la cantidad por pagar que aparece en el recibo sea mayor?

El principal propósito de esta sección es que puedas reflexionar sobre lo que has aprendido y aquello que se te ha dificultado. La organización de esta sección pretende orientarte sobre este proceso de reflexión.

En la introducción al bloque se describe lo que se espera que aprendas; léelo con detenimiento, luego resuelve los problemas planteados y responde los cuestionamientos que se hacen enseguida. La idea es que al finalizar toda la sección de autoevaluación te des cuenta de tus avances, errores, dificultades y que puedas identificar aquellos aspectos en los que consideres necesario solicitar asesoría.

Resuelve los siguientes problemas.

Problema 1.

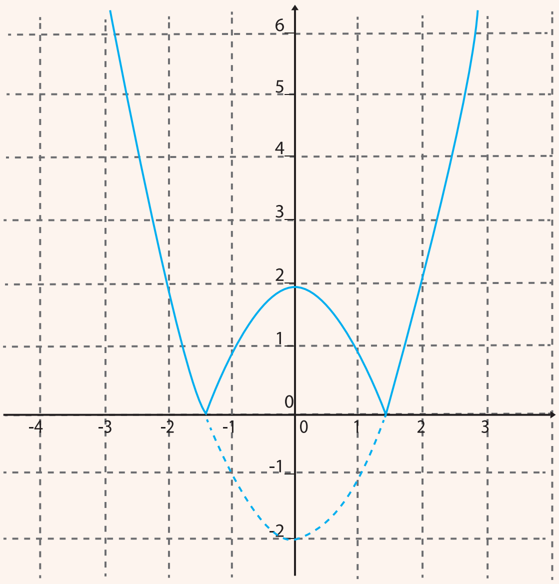
Toma en cuenta que solamente representan una mínima parte de lo que seguramente eres capaz de hacer.

1. Dada la siguiente gráfica, determina:

   a. La expresión analítica de la función a la que corresponde:

   b. Su dominio y su rango:

   c. Si es una función que tiene inversa, traza su gráfica, si no, argumenta por qué.



Problema 2.

2. Para esa misma **gráfica**, considera que la parte que corresponde al primer cuadrante está representando a la función que modela la distancia, conforme pasa el tiempo, a la que se encuentra un móvil del punto A situado en el origen.

   a. Describe una situación en la que algo en movimiento de lugar a esta representación **gráfica**.

Reflexiones relacionadas con el Problema1:

a).- Enlista los incisos según te hayan parecido de mayor a menor dificultad.

_______________ _______________ _______________

b).- ¿Qué conceptos y procedimientos matemáticos discutidos en este bloque te ayudaron a dar respuesta a cada inciso de la situación planteada?

c).- ¿Diste respuesta satisfactoria a todos los incisos? Si no es así, trata de identificar qué es lo que está dificultando una respuesta adecuada. Expresa esas dificultades y describe lo que te sirvió para superarlas:

Reflexiones relacionadas con el Problema2:

a).- ¿Te quedó claro lo que se te pide en el problema?

b).- ¿Crees que en tu solución intervinieron solamente conceptos y métodos utilizados en este bloque?

c).- Enlista los conceptos, propiedades, tipos de variación, procedimientos, etc. de los revisados en hasta este bloque que te hayan servido para dar solución al problema.

Reflexiones generales sobre el BLOQUE 5:

1. ¿Lograste comunicar tus ideas o puntos de vista al trabajar en equipo o en grupo?

Nunca | Muy pocas veces | Frecuentemente | Siempre

2. ¿Tomaste en cuenta la participación de tus compañeros para modificar tus respuestas, tus acercamientos a los problemas…etc.?

Nunca | Muy pocas veces | Frecuentemente | Siempre

3. ¿Lograste interpretar las ideas de tus compañeros al realizar alguna tarea o actividad de clase?

Nunca | Muy pocas veces | Frecuentemente | Siempre

4. ¿Participaste activamente en las discusiones de equipo o grupales?

Nunca | Muy pocas veces | Frecuentemente | Siempre

5. ¿Expresaste alguna forma de resolver los problemas formulados en las actividades a tus compañeros o al profesor?

Nunca | Muy pocas veces | Frecuentemente | Siempre

6. ¿Usaste algún recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.) para apoyar tus actividades de tarea o de clase?

Nunca | Muy pocas veces | Frecuentemente | Siempre

7. ¿Te entusiasmó ayudar a tus compañeros o que ellos te ayudaran a resolver dudas?

Nunca | Muy pocas veces | Frecuentemente | Siempre

8. En este bloque me pareció interesante:
   -
   -
   -

9. En este bloque me pareció difícil
   -
   -

10. Mis conclusiones generales sobre el estudio de este tipo de variación y el apoyo que proporcionó el material de este bloque:

BLOQUE 6

Las funciones como modelo de variación

A través de las actividades que realizaste en los primeros cinco BLOQUES del presente módulo de aprendizaje, dedicado al estudio de la variación, se espera que hayas logrado darte cuenta, entre otras cosas, de que:

a) En el universo y en la sociedad, prácticamente, todo está siempre cambiando
b) Comprender los procesos de cambio es muy importante
c) Las **Matemáticas** son una herramienta muy eficaz para representar, analizar, interpretar y entender muchos de estos procesos
d) Existen siete tipos básicos de variación
e) El análisis de la forma en que varía una magnitud siempre se hace con respecto a otra o a otras

Se espera, también, que hayas logrado mejorar tu competencia para:
a) Percibir el cambio
b) Identificar las magnitudes que están cambiando
c) Establecer las relaciones entre dichas magnitudes
d) Utilizar las diferentes formas de representar matemáticamente dichas relaciones para analizar y entender la forma en que varía una con respecto a otra o a otras
e) Reconocer los patrones de cambio

Al realizar las actividades de este último BLOQUE, se pretende que logres mejorar tu comprensión de las funciones *(en sus diversas representaciones:* ***gráfica****, tabular, analítica y verbal)* concebidas como ***modelos de variación***, lo cual deberá traducirse en un mayor nivel de desarrollo de tu competencia para analizar e interpretar los procesos de cambio que representan, lo mismo que de tu competencia para resolver problemas relacionados con tales procesos.

Las preguntas y las tareas que se formulan y se proponen en las actividades que conforman las diversas **secuencias del bloque**, al igual que en los bloques anteriores, deberás abordarlas, primeramente de manera individual, luego, cuando el profesor lo determine, las comentarán y analizarán en equipo y, finalmente, si el profesor considera necesario, compartirán con todo el grupo los resultados obtenidos, las estrategias y procedimientos utilizados para obtenerlos; a la vez que podrán plantear sus dudas y sus dificultades, buscando con ello, mejorar su comprensión sobre las situaciones y problemas planteados y su competencia para resolverlos.

Tiempo asignado: 16 horas

Secuencia Didáctica 1.-

Actividad de Inicio

La percepción de la variación y el establecimiento de las relaciones de dependencia

Actividad: 1
Actividad Individual

1. En la Figura 6.1 se observa un recipiente cónico que se está llenando con algún líquido.

a) Indica las magnitudes que percibes que cambian o pueden cambiar a medida que transcurre el tiempo.

b) ¿Qué magnitudes medirías para determinar la cantidad de agua que le cabe al cono?

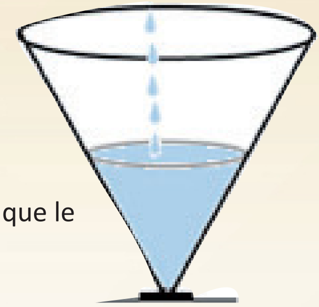


Figura 6.1

c) Si el flujo del líquido con que se está llenando el recipiente es constante, ¿Cómo es la variación de la rapidez con que sube el nivel del agua a medida que transcurre el tiempo?

2. Imagina un automóvil desplazándose por una carretera y a partir de ello, determina:

Figura 6.2

a) ¿Qué magnitudes cambian o pueden cambiar a medida que transcurre el tiempo?

b) ¿De qué depende la distancia que recorre?

c) Si la velocidad con que se mueve el automóvil es constante ¿Cómo varía la distancia recorrida con respecto al tiempo?

d) Si la distancia que se quiere recorrer está determinada de antemano, ¿De qué depende el tiempo que tardará el automóvil en recorrerla?

e) ¿Cómo están relacionados el tiempo y la velocidad *(cuando ésta es constante)* al recorrer una distancia determinada?

3. Determina, en cada uno de los siguientes casos, de qué depende:

   a) El volumen de un cubo

   b) El área de un círculo

   c) El peso de una esfera metálica

   d) La presión de un gas contenido en un recipiente de paredes rígidas

4. Analiza lo que, en cada caso, se te pregunta y luego contesta.

   a) De dos automóviles que se mueven durante el mismo tiempo, ¿Cuál recorre mayor distancia?

   b) De dos automóviles que se mueven con la misma velocidad, ¿Cuál recorre mayor distancia?

   c) De dos conos que tienen el mismo volumen, ¿Cuál tiene mayor altura?

   d) De dos esferas metálicas que tienen el mismo radio, ¿Cuál pesa más?

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad Individual

La representación **gráfica** de las funciones y el análisis de la variación.

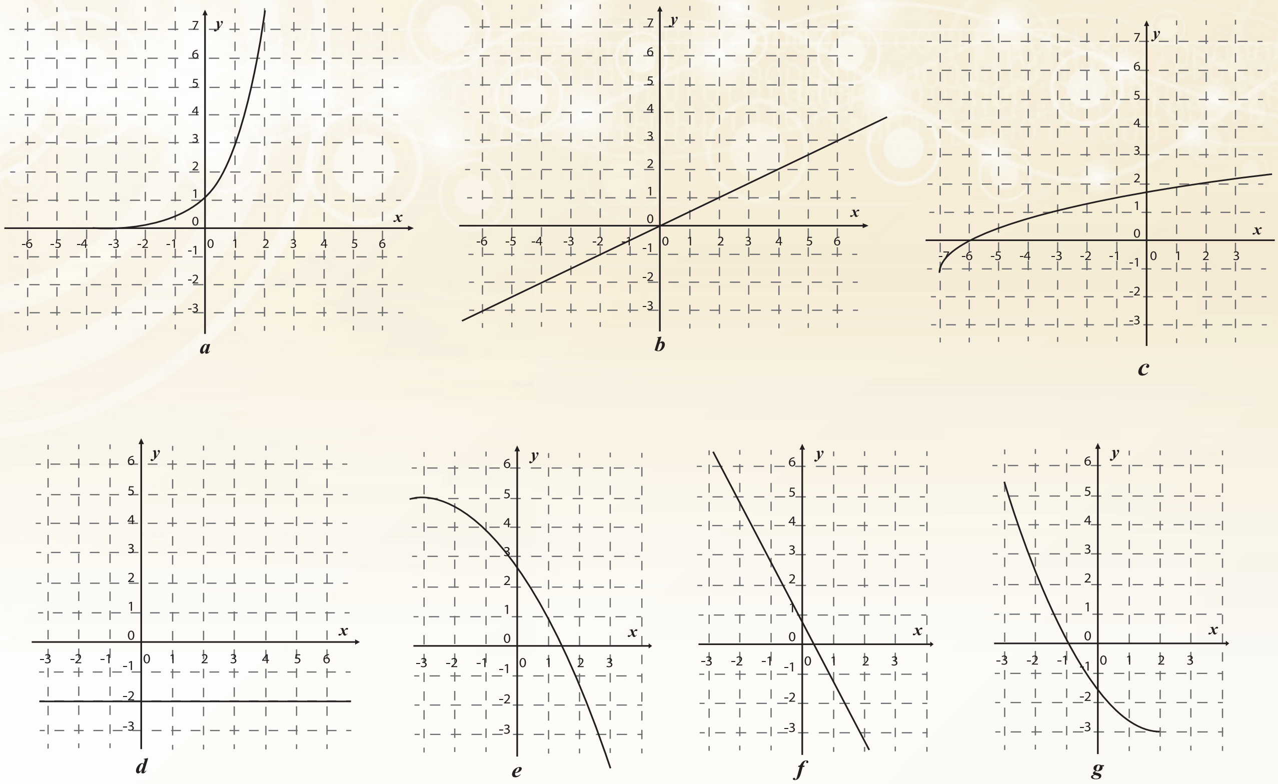


Figura 6.3

1. Cada una de las **gráficas** que aparecen en la Figura 6.3, representan la forma en que varía una cantidad y con respecto a una cantidad x. Obsérvalas y determina:

   a) ¿En qué casos la variación de y es creciente?

   b) ¿En qué casos la variación de y es decreciente?

   c) ¿Cómo es la variación de la rapidez con que varía y en cada uno de los casos en los que la variación de y resultó ser creciente?

d) Y en los casos en los que la variación de y con respecto a x resultó decreciente, ¿Cómo fue la variación de la rapidez en cada caso?

e) ¿Qué sucedió con el valor de y al variar el valor de x, en el caso representado en el inciso **d)**?

2. En cada uno de los siguientes casos representa **gráficamente** la variación que se indica: *(Equipo)*

a) Una vela de 12 cm de longitud se enciende y permanece ardiendo durante siete horas al cabo de las cuales su longitud es de sólo 5 cm. Si al principio se consume lentamente y poco a poco lo hace más rápidamente, (*La variación de la longitud de la vela con respecto al tiempo).*

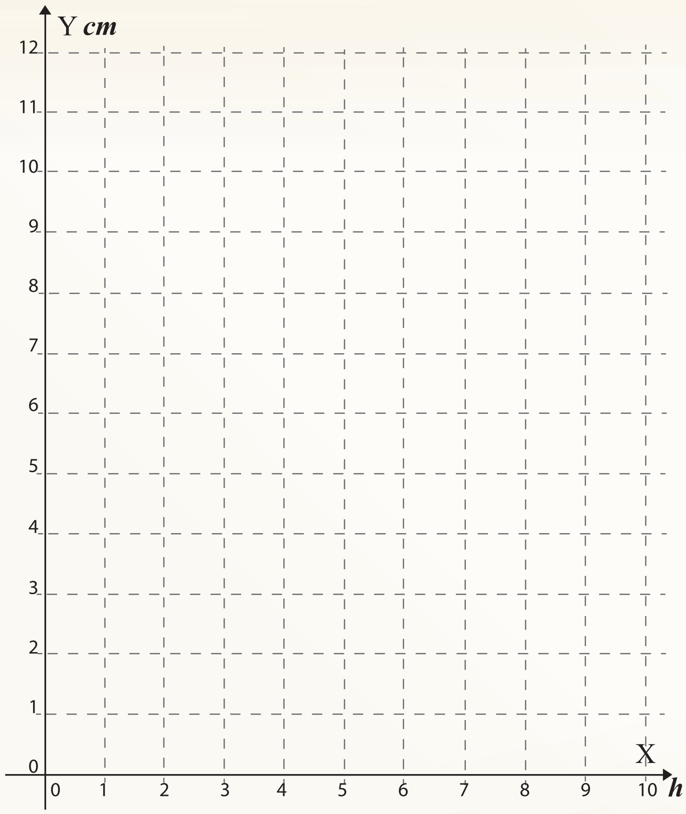


Figura 6.4

b) Un automóvil viaja por una carretera recta con una velocidad de 50 km/h. En un cierto momento empieza a acelerar y lo hace de manera uniforme de tal forma que una hora después, tiene una velocidad de 60 km/h. Sabiendo esto, representa **gráficamente** la variación:

i) De la velocidad del automóvil con respecto al tiempo *(durante esa hora).*

ii) De la distancia recorrida por el automóvil con respecto al tiempo (durante esa hora).

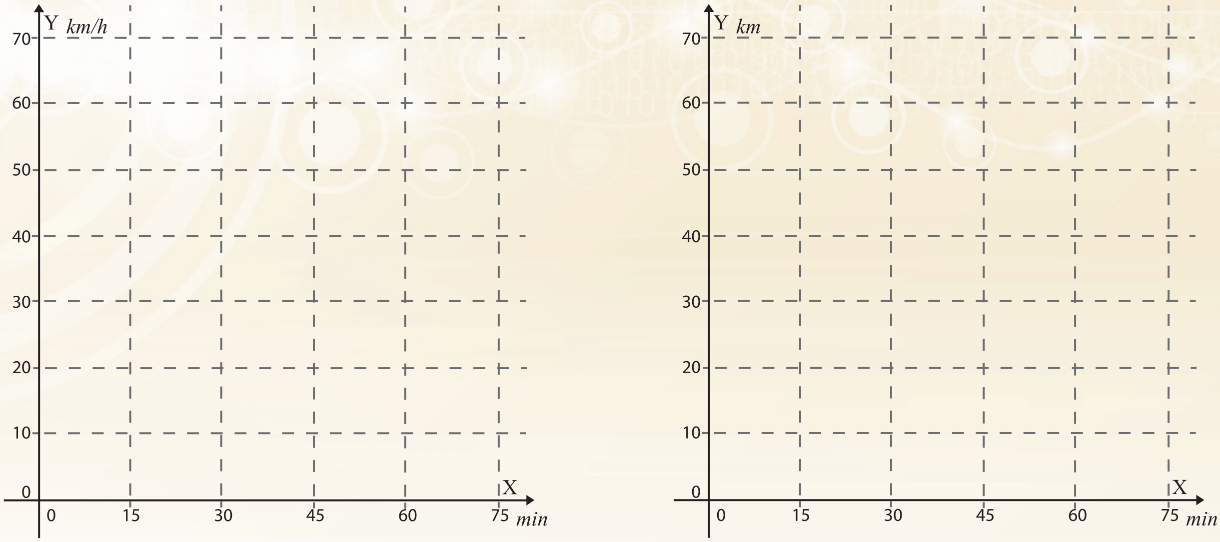


Figura 6.5

c) Dos automóviles se mueven por una carretera recta, ambos lo hacen con velocidad constante; aunque el automóvil 1 lo hace más lentamente que el automóvil 2. Ambos automóviles iniciaron su recorrido al mismo tiempo, ambos se movieron durante tres horas y el automóvil 2 alcanzó y rebasó al automóvil 1 dos horas después de iniciado el recorrido (La variación de la distancia recorrida por cada uno de los automóviles en las tres horas. Las dos **gráficas** trázalas en un mismo sistema de coordenadas).

Figura 6.6

Actividad: 3
Actividad Individual

La representación analítica de la variación

Desde que estudiabas en la Escuela Secundaria has utilizado algunas expresiones analíticas *(fórmulas)* para calcular ciertas cantidades. En este módulo, este tipo de expresiones las has empezado a utilizar para representar la variación de una cierta cantidad con respecto a otra, es decir, las has utilizado como la *representación analítica* de lo que en **Matemáticas** se denomina una *función*.

1. A continuación se presentan algunas expresiones analíticas y sobre ellas se te formulan algunas preguntas. Contéstalas y luego comenta con tus compañeros de equipo, tus respuestas.

i) $A=bh$ ii) $A=\pi r^2$ iii) $h = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ iv) $V= \frac{4}{3} \pi r^3$

a) La expresión analítica del inciso i) seguramente la reconociste como la fórmula que has utilizado desde la escuela primaria para calcular el área de cualquier rectángulo.

- Considera sólo los rectángulos cuya base mide 5 cm y escribe la expresión analítica que permite calcular el valor de su área en función de la altura.

- ¿Qué tipo de función has obtenido?

- ¿Qué sucede con el área del rectángulo a medida que aumenta la altura?

- ¿Cómo es la rapidez con que crece el área con respecto a la altura y cuál es su valor?

- Representa **gráficamente** la variación del área con respecto a la altura

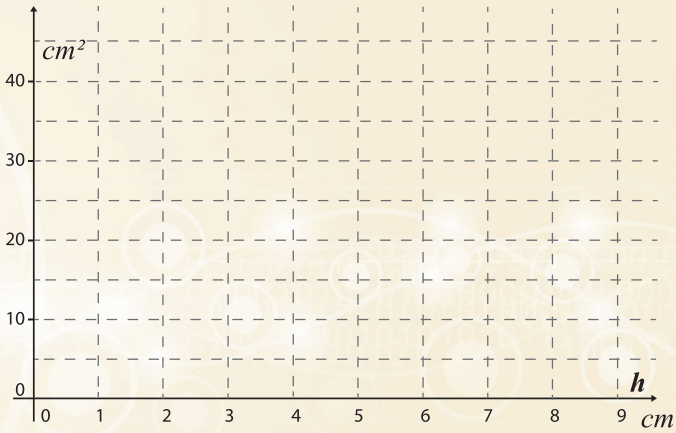


Figura 6.7

b) ¿Qué se calcula con cada una de las expresiones analíticas restantes?

c) Describe la variación de A con respecto a r en el caso de la función del inciso **ii)** y represéntala **gráficamente**.

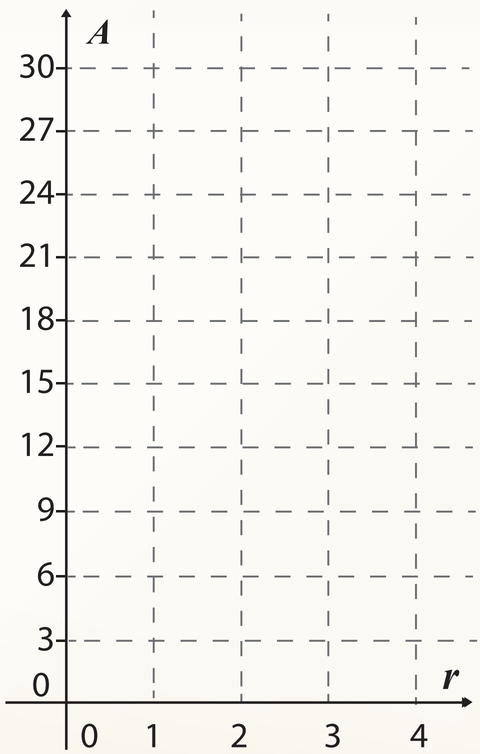


Figura 6.8

d) En el caso de la expresión analítica del inciso **iii)** determina qué se calcula con ella, luego considerando $V_o=40$ y $g=10$, escribe la función que resulta y describe la variación que representa. Finalmente representa **gráficamente** dicha variación.

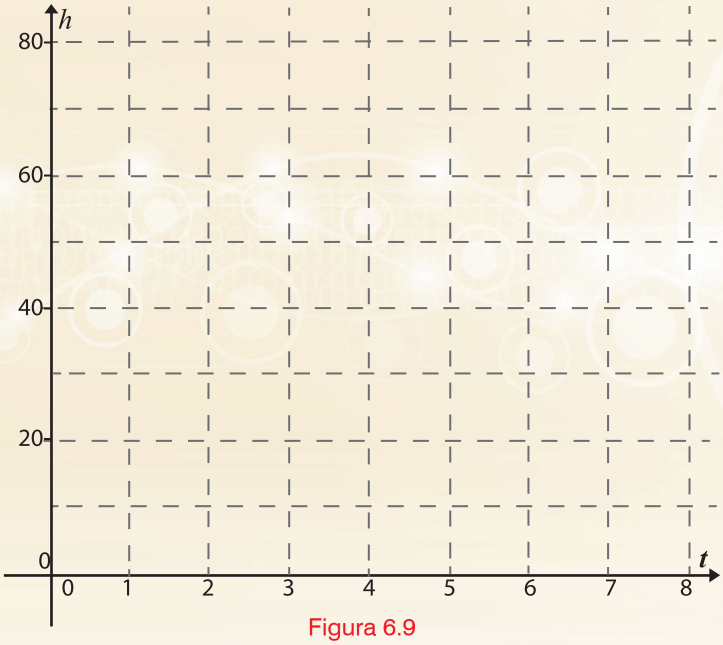


Figura 6.9

e) Procede de la misma manera con la expresión analítica del inciso **iv)**

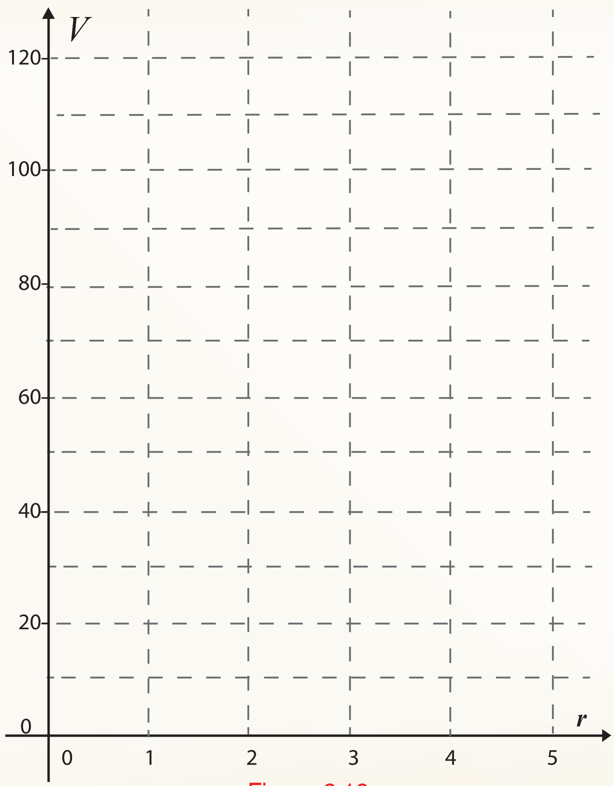


Figura 6.10

Actividad de Cierre

El propósito fundamental de esta primera secuencia de actividades fue que consolidaras lo aprendido sobre el uso de las **Matemáticas** para analizar, interpretar y resolver problemas relacionados con los procesos de cambio.

Para ello, se te plantearon diversas situaciones en las que la información te fue proporcionada por medio de alguna función representada analítica o **gráficamente** y se te pedía:

- Que identificarás las variables intervinientes.
- Que establecierás relaciones de dependencia entre ellas.
- Que analizarás y caracterizarás la variación representada.

Como consecuencia de la realización de las actividades de esta secuencia se espera que hayas reafirmado que:

a) Las funciones lineales que se representan analíticamente por expresiones de la forma $y=ax+b$ son ***modelos de variación proporcional.***

b) Que cuando el parámetro a es positivo, la variación es creciente y cuando es negativo la variación es decreciente.

c) Que la rapidez de esta variación es constante y que el valor de a representa el valor de la rapidez de la variación.

d) Que la representación **gráfica** de este tipo de variación es una línea recta y que en ella la rapidez de la variación está representada por la pendiente de dicha recta.

e) Las funciones que se representan analíticamente por expresiones de la forma $y=ax^2$ son ***modelos de variación*** proporcional entre una variable y el cuadrado de otra.

f) Que este tipo de funciones se representan **gráficamente** por una *parábola*.

Secuencia Didáctica 2.-

Actividad de Inicio

Las funciones como modelos de varicación

Actividad: 1
Actividad de Equipo

El análisis de la variación representada analíticamente

El estudio de las *funciones* en **Matemáticas** no requiere hacer explícito el significado de las variables involucradas, incluso no es necesario que las variables representen magnitudes concretas para que la expresión represente una relación funcional.

Ambas cantidades se denominan ***variables***; una es la ***variable independiente***, en este caso la x y la otra, o sea la y, es la ***variable dependiente o función***. Simbólicamente, esto se representa $y=f(x)$ *(que se lee "y es igual a f de x")*, donde la f representa la regla ***(instrucción)*** de las operaciones que hay que efectuar con la x para obtener el valor que le corresponde a y.

1. En las siguientes expresiones analíticas y es una función de la variable x que, como ha quedado establecido, significa que el valor de y depende del valor de x, y dicho valor puede obtenerse efectuando las operaciones indicadas, en cada caso.

A) $y = x$ *B)* $y = x^2$ *C)* $y = x^3$ *D)* $y = \frac{1}{x}$ *E)* $y = \sqrt{x}$

Determinen para cada una de ellas, lo que se pide en los siguientes incisos:

- El valor de y para cada uno de los siguientes valores de x:0,1,2.
- El valor o los valores de x para los cuales $y = 2$.
- Los valores de x para los cuales existe valor para y.
- El intervalo de valores de x para los cuales y es creciente.
- El valor o los valores de x para los cuales no existe valor para y.
- El intervalo de valores de x para los cuales y es decreciente.
- El incremento del valor de y cuando el valor de x cambia de $x=0$ a $x=2$.

- La razón promedio de cambio de y con respecto a x en el caso anterior.

1. Para cada una de las funciones consideradas en el punto 1, describe la variación de y cuando x varía de -10 a 10.

2. Describe también la variación de la rapidez con que varía y.

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad de Equipo

Ya ha quedado establecido que la representación analítica de una función es, esencialmente, una instrucción que indica lo que es necesario hacer al valor de la variable independiente para obtener el valor de la variable dependiente.

Por ejemplo, en la expresión $y = 2x^3 - 3x + 1$, dice que dado el valor de la variable independiente x debe elevarse al cubo y el resultado multiplicarse por dos, luego, al resultado restarle el triple del valor de x y, finalmente, sumarle una unidad para obtener el valor de y.

a) En las funciones de la Actividad 1 determina cuál es la instrucción de lo que debe hacerse al valor de x para obtener el valor de y.

Como habrás observado en la función del inciso A) no se requiere realizar operación alguna pues la instrucción establece que.

El valor de la variable y es igual al de la variable x.

Por esta razón a esta función se le denomina ***función identidad.***

b) Determina qué tipo de función es cada una de las funciones de la Actividad 1 y cuántas operaciones es necesario hacer a la variable independiente para obtener el valor de la variable dependiente.

Estas funciones se denominan ***funciones simples*** por tratarse, precisamente, de la función más simple de cada tipo. Por ejemplo, la función $y = x^2$ es la ***función cuadrática simple*** y $y = \frac{1}{x}$ es la ***función racional simple***.

Actividad: 3
Actividad de Equipo

La representación gráfica de las funciones simples como una transformación de la gráfica de la función identidad

1. La representación analítica de la ***función lineal simple***, $y = x$, indica que los valores de x y de y son siempre iguales por esta razón la representación **gráfica** de esta función, es el conjunto de los puntos del plano cuya ordenada es igual a su abscisa, es decir, es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano cartesiano.

a) Traza dicha **gráfica:**

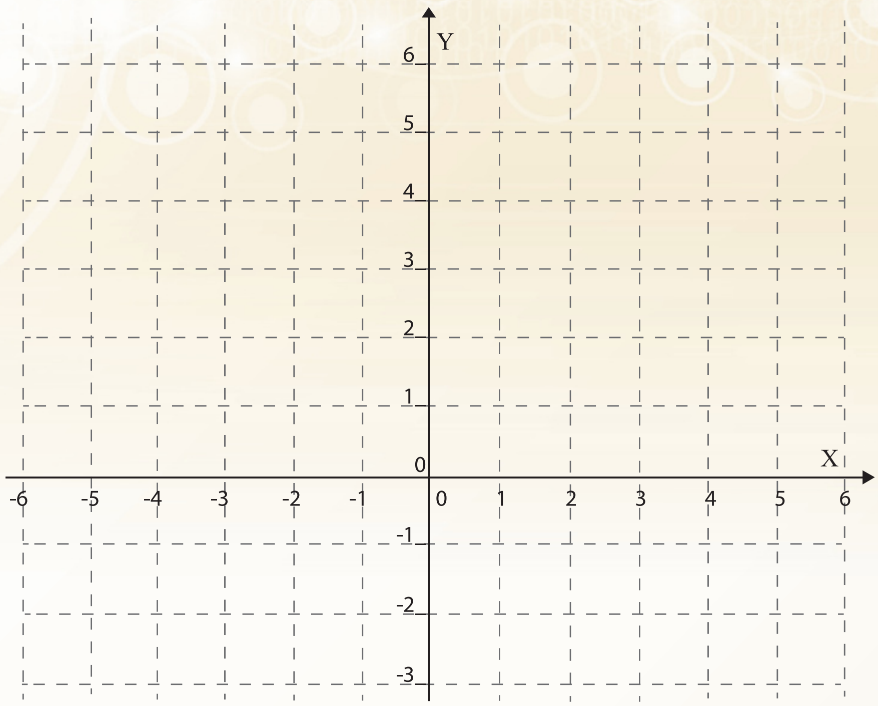


Figura 6.11

2. Considera ahora la función cuadrática simple cuya representación analítica es $y = x^2$, que indica que para obtener el valor de la y debe elevarse al cuadrado el valor de la x, lo cual puede interpretarse **gráficamente** como una instrucción para mover los puntos de la recta de manera que ahora su distancia al eje X sea el cuadrado de su distancia al eje Y. De acuerdo con esta interpretación determina:

   a) ¿Qué cambio sufrirán los puntos cuya abscisa sea mayor que **1**?

   b) Y los puntos cuya abscisa sea mayor que **0**, pero menor que **1**, ¿Qué cambio sufrirán?

c) ¿Qué puntos no sufrirán cambio alguno?

____

____

____

d) ¿Qué sucederá con los puntos cuya abscisa es negativa?

____

____

____

e) Al efectuar todos estos cambios ¿En qué se transformará la recta que es **gráfica** de la función identidad? Bosqueja la **gráfica** que resulta:

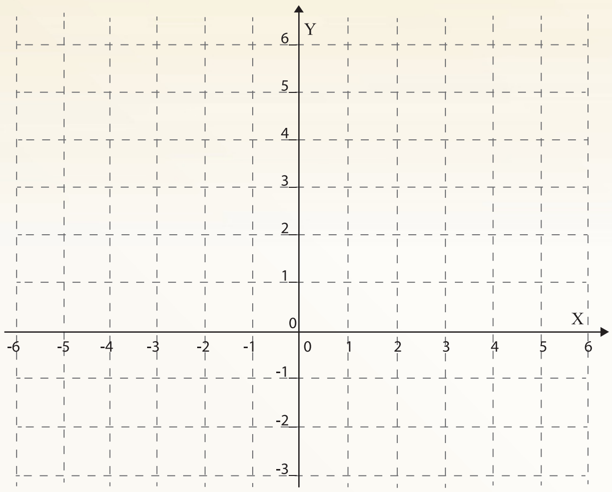


Figura 6.12

3. Bosqueja la **gráfica** de la función cúbica simple procediendo de la misma manera como lo hiciste con la función cuadrática simple, es decir, concibiendo la nueva **gráfica** como el resultado de transformar la recta, que es **gráfica** de la función identidad, en una curva cuyos puntos tengan una ordenada que sea cubo del valor de su abscisa. (Sugerencia: puedes guiarte respondiendo las preguntas que se formularon para que bosquejaras la **gráfica** de la función cuadrática simple).

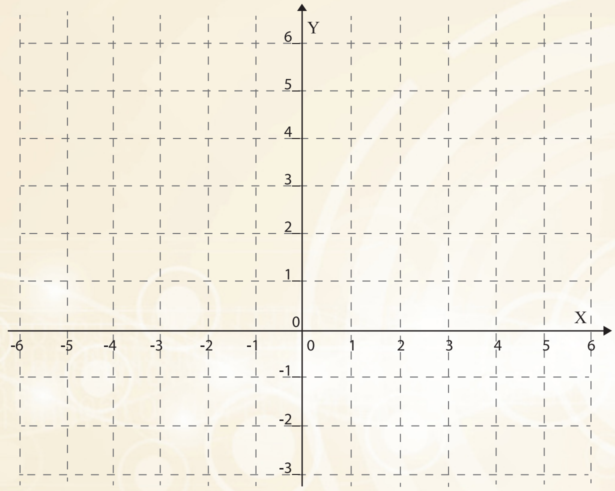


Figura 6.13

4. Procediendo de igual manera que en los casos anteriores, bosqueja las **gráficas** de las funciones $y = \dfrac{1}{x}$ $y = \sqrt{x}$

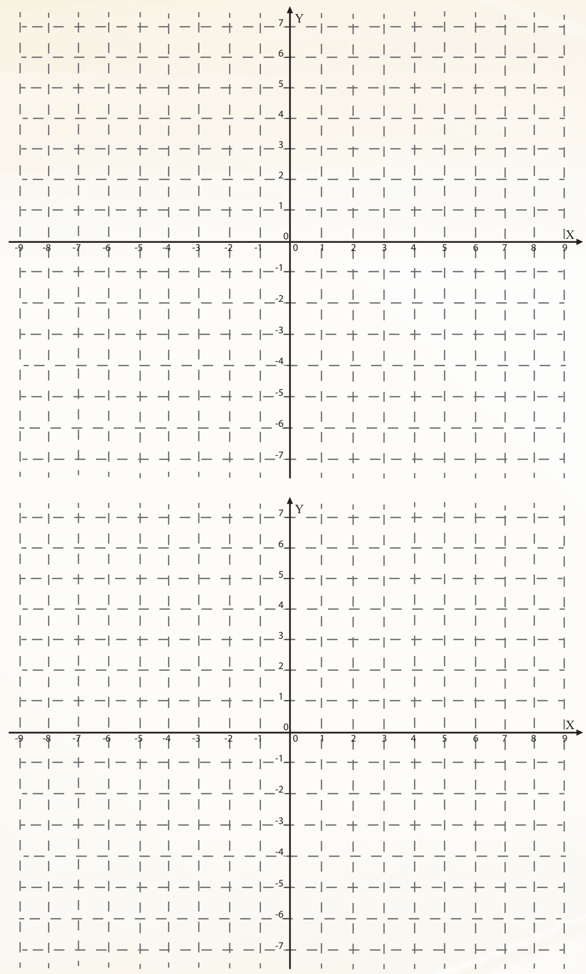


Figura 6.14

Las funciones lineales y sus **gráficas**

En el BLOQUE 1 analizaste y resolviste una serie de problemas sobre procesos de cambio que se modelaron con ***funciones lineales*** y aprendiste que la representación analítica de tales funciones es de la forma:

$$y = ax + b$$

Y que sus **gráficas** son siempre líneas rectas.

1. En esta nueva actividad se pretende que grafiques cualquier función lineal utilizando la misma estrategia que utilizaste para bosquejar las **gráficas** de las funciones simples propuestas en la Actividad 3, es decir, analizando los cambios que sufre la recta, que es **gráfica** de la función identidad, al efectuar las operaciones indicadas.

   a. Dado que la función identidad $y = x$ es una función lineal, debe ser de la forma $y = ax + b$ ¿Cuál es el valor de a y cuál el de b que le corresponden?

   b. Cuando $b = 0$, ¿Cómo resulta ser la forma de la función lineal y qué representa?

   c. ¿Cómo es la **gráfica** de una función de la forma $y = ax$ comparada con la **gráfica** de $y = x$ en cada uno de los siguientes casos:

   i) $a > 1$ ii) $0 < a < 1$ iii) $a < 0$

   d. Utiliza un mismo sistema de coordenadas para graficar, primero la función identidad $y=x$; luego dos funciones con valores de a mayores que **1**, después dos funciones más con valores de a, tales que $0<a<1$ y finalmente otras dos funciones donde $a<0$.

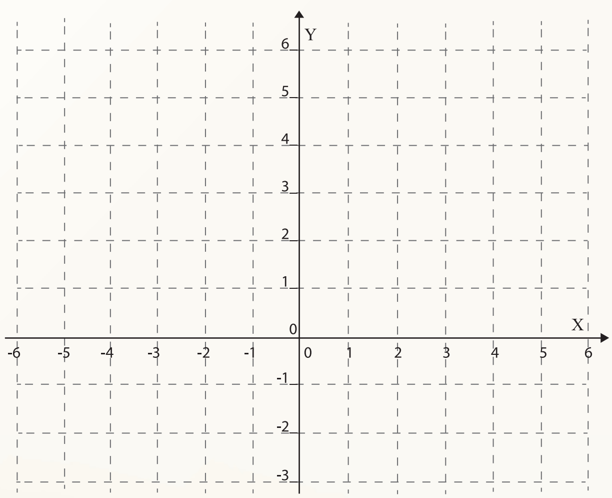


Figura 6.15

e. ¿Qué tienen en común todas las **gráficas** que has trazado en el inciso **d)** y en qué difieren?

f. ¿Qué característica de la variación está representada por a?

2. Considera ahora la familia de funciones de la forma $y=ax+b$, donde b es una constante diferente de cero.

a) Cuando $a=1$, ¿Cómo resulta ser la forma de la función lineal y qué representa?

b) ¿Cómo es la **gráfica** de una función de la forma $y=x+b$ comparada con la **gráfica** de $y=x$ en cada uno de los siguientes casos:

i) Cuando $b>0$

ii) Cuando $b<0$

c) Utiliza un mismo sistema de coordenadas para graficar, primero la función identidad $y=x$; luego tres funciones con valores de b mayores que **0**, después tres funciones más con valores de b, tales que $b<0$.

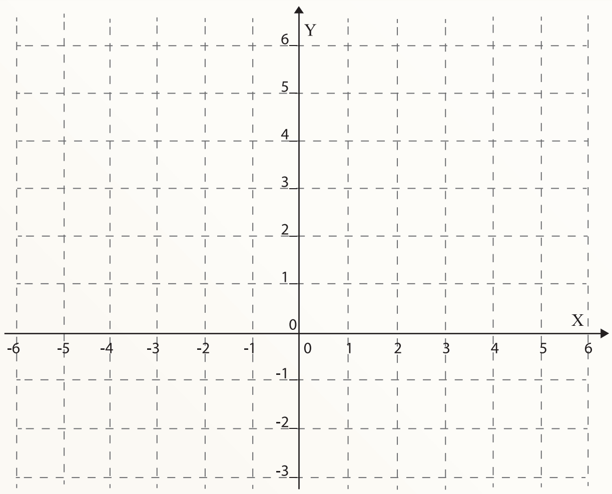


Figura 6.16

d) ¿Qué tienen en común todas las **gráficas** que has trazado en el inciso **c)** y en qué difieren?

Actividad: 5
Actividad Individual

Las funciones lineales de la forma $y=ax+b$

2. Considera la función lineal $y=2x+1$, es decir, la función en la que $a=2$ y $b=1$ y traza su **gráfica** partiendo de la **gráfica** de la función identidad. Para hacerlo, utiliza lo aprendido en las actividades 3 y 4.

a) Traza primero, la **gráfica** de la función identidad, donde sabes que el valor de y es igual al valor de x.

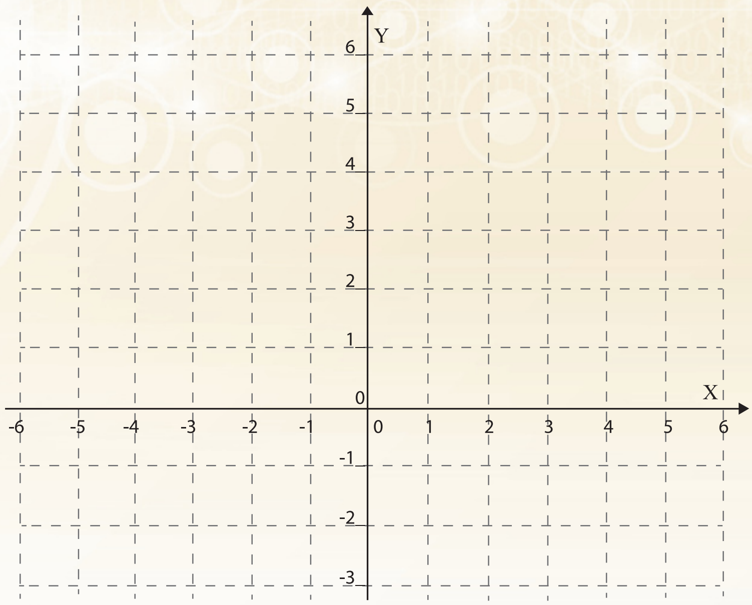


Figura 6.17

b) La instrucción dada en la función $y=2x+1$ dice que primero multipliques el valor de x por **2**. Determina el efecto que esta operación le produce a la **gráfica** de la función identidad y trázala, es decir, traza la **gráfica** de $y=2x$ *(hazlo en el mismo sistema de coordenadas en el que trazaste la* ***gráfica*** *de la función identidad)*

c) Luego, a las y de esta **gráfica** súmales **1** y traza la nueva **gráfica** que corresponde a la función $y=2x+1$. Trázala también en el mismo sistema de coordenadas donde trazaste las dos primeras:

3. Siguiendo la misma estrategia que utilizaste para graficar $y = 2x + 1$, grafica las siguientes funciones lineales

a) $y = 3x - 2$ *b)* $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ *c)* $y = 4 - x$

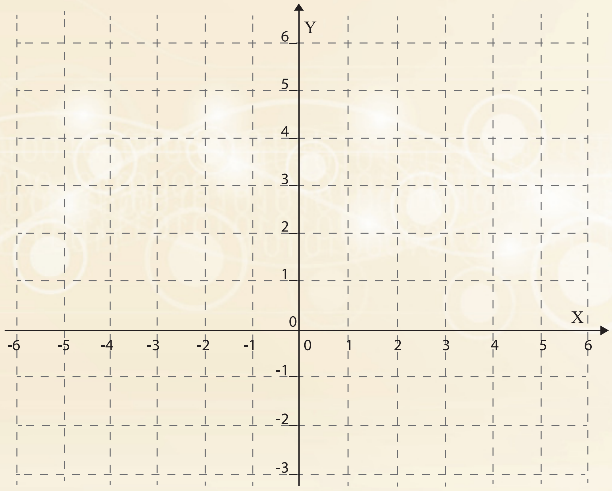


Figura 6.18

Actividad de Cierre

En esta segunda secuencia se espera que hayas aprendido que:

a) *La representación analítica de una función es, esencialmente, una instrucción que indica lo que es necesario hacer al valor de la variable independiente para obtener el valor de la variable dependiente.*
b) Que en el caso de las funciones lineales, la representación analítica es de la forma $y=ax+b$, donde a y b son constantes
c) Que la función lineal que se obtiene cuando $a=1$ y $b=0$ se denomina ***función identidad*** porque su expresión analítica es $y=x$
d) Que la **gráfica** de la función identidad es la bisectriz del primer y tercer cuadrante
e) Que la representación **gráfica** de una función lineal puede obtenerse como una transformación de la **gráfica** de la función identidad.
f) Que el valor del parámetro a modifica la inclinación de la recta que es **gráfica** de la función identidad y que el parámetro b mueve dicha recta vertical u horizontalmente sin cambiar su inclinación
g) Que la representación **gráfica** de las funciones que no son lineales también puede obtenerse como transformaciones de la **gráfica** de la función identidad.

Secuencia Didáctica 3.-

Actividad de Inicio

La gráfica de las funciones como transformación de la recta que es representación gráfica de la función identidad

Actividad: 1
Actividad de Equipo

Las funciones cuadráticas y sus **gráficas**

En la *Actividad 3* de la **secuencia anterior** transformaste la **gráfica** de la función identidad para obtener la **gráfica** de la función cuadrática $y=x^2$ que resultó ser una *parábola* cóncava hacia arriba, con el vértice en el origen de coordenadas. En esta nueva actividad analiza qué cambio sufrirá la **gráfica** de $y=x^2$, si x^2 se multiplica por **2**, esto es, obtén la **gráfica** de la función $y=2x^2$ a partir de la **gráfica** de $y=x^2$

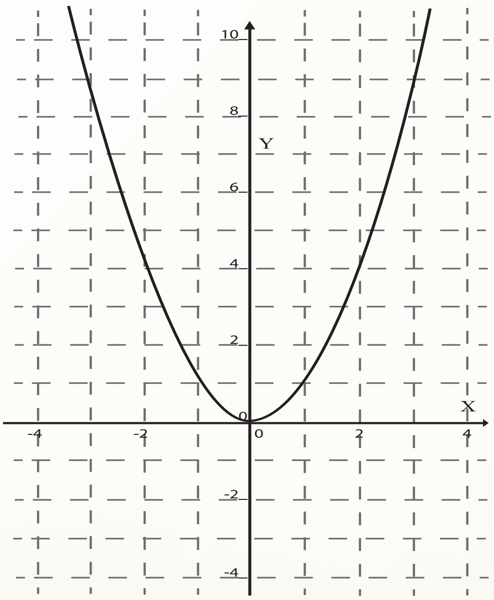


Figura 6.19

a) ¿Qué cambio sufrió la **gráfica**?

____

____

____

b) ¿Cuál es la diferencia entre la variación representada por $y=x^2$ y la representada por $y=2x^2$?

____

____

____

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad de Equipo

La expresión analítica $y=ax^2$, en la que a es una constante, representa una familia de *parábolas*.

a) Analiza y determina qué cambio sufre la *parábola* $y=x^2$ al multiplicar x^2 por a, en los siguientes casos:

i) $a>1$ ii) $0<a<1$ iii) $a<0$

b) En el sistema de coordenadas, donde ya está trazada la **gráfica** de $y=x^2$, traza las **gráficas** de:

i) $y=3x^2$ ii) $y=\frac{1}{2}x^2$ iii) $y=-x^2$

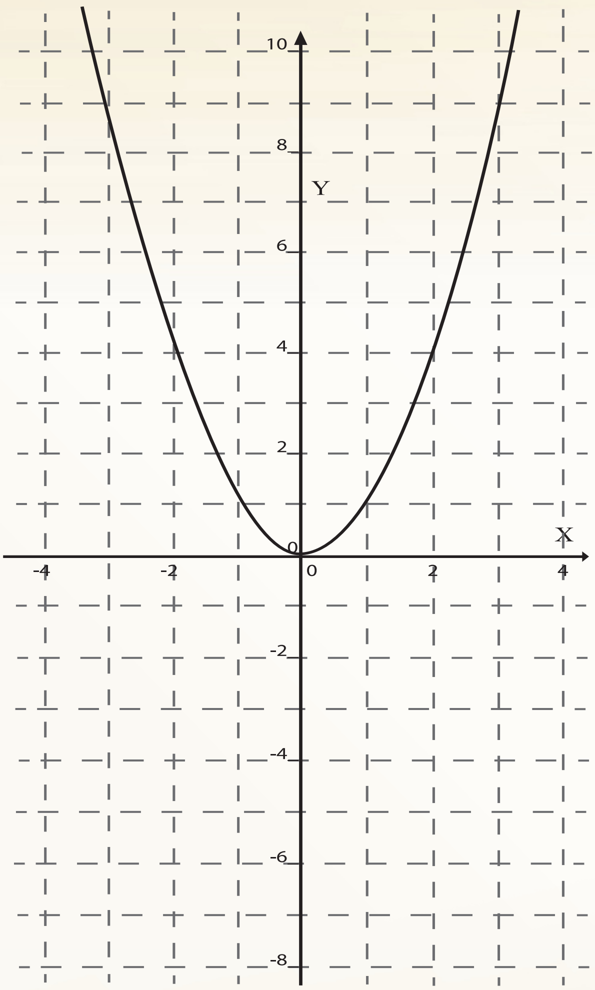


Figura 6.20

Actividad: 3
Actividad de Equipo

1. La expresión analítica $y = x^2 + b$, en la que b es una constante, representa también una familia de *parábolas*.

a) Analiza y determina qué cambio sufre la *parábola* $y = x^2$ al sumarle a x^2 el valor de b, en los siguientes casos:

i) $b>0$ ii) $b<0$

b) En el sistema de coordenadas, donde ya está trazada la **gráfica** de $y = x^2$, traza las **gráficas** de:

i) $y = x^2 + 1$ ii) $y = x^2 + 3$ iii) $y = x^2 - 2$ iv) $y = x^2 - 4$

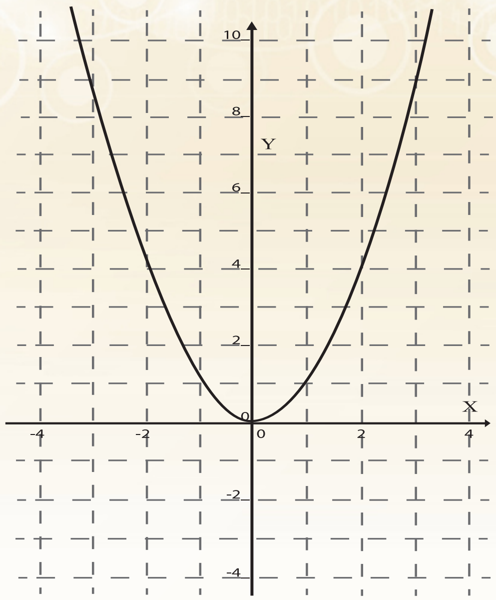


Figura 6.21

2. Analiza la variación representada por las siguientes funciones y traza la **gráfica** correspondiente:

a) $y = 2x^2 + 1$

b) $y = 3x^2 - 2$

c) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{3}$

d) $y = 3 - 2x2$

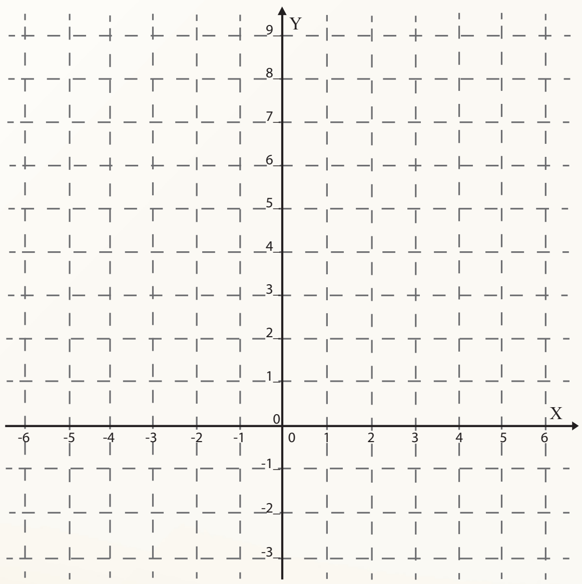


Figura 6.22

3. La expresión analítica $y = (x - c)^2$ en la que c es una constante, representa también una familia de *parábolas*.

 a) Considera el caso en el que $c = 1$ para analizar el cambio que le produce a la **gráfica** de $y = x^2$ el restarle a la variable x el valor de la constante c antes de elevarla al cuadrado; es decir, analiza y grafica la función $y = (x - 1)^2$

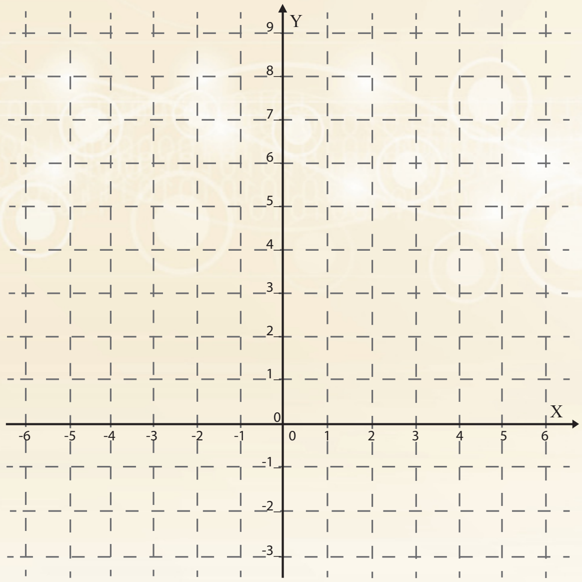


Figura 6.23

 b) Considera ahora el caso en el que $c = -1$, escribe la expresión analítica que resulta, analiza el cambio que le produce a la **gráfica** de la función $y = x^2$ y grafícala.

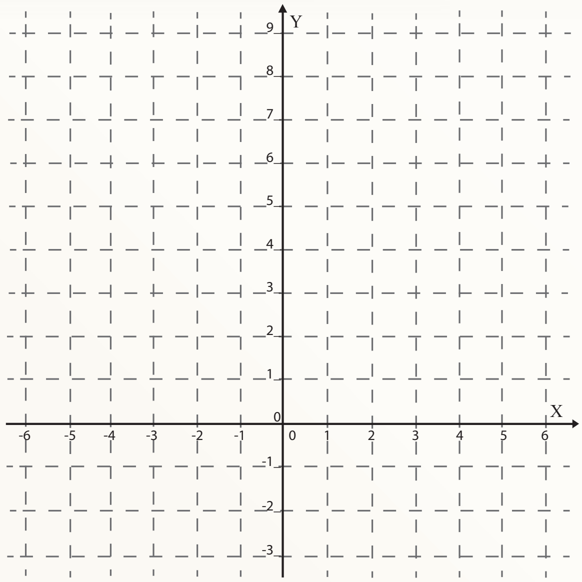


Figura 6.24

 c) Determina el cambio que el valor de c ocasiona a la *parábola*, que es **gráfica** de $y = x^2$, en los siguientes casos:

 i) $c > 0$

 ii) $c < 0$

4. La forma más general de la expresión analítica de una función cuadrática es:

$$\boxed{y = a\,(x - c)^2 + b}$$

a) Dado que ya has analizado los cambios que cada parámetro origina en la **gráfica** de $y=x^2$, grafica las siguientes funciones:

i) $y = 2\,(x - 1)^2 + 3$ ii) $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 - 1$ iii) $y = 4 - (x - 2)^2$

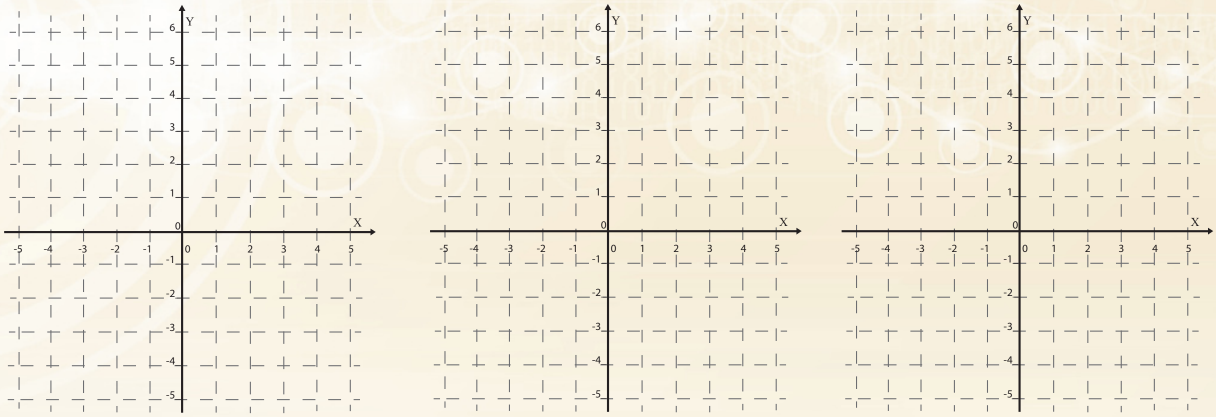


Figura 6.25

La **gráfica** de las funciones como transformación de la recta $y=x$

1. En la Actividad 3 de la **Secuencia 2** transformaste la recta $y=x$ en la curva que es **gráfica** de la función $y = x^3$. Aplica a dicha curva las transformaciones que originan los parámetros a, b y c para bosquejar la **gráfica** de las siguientes funciones cúbicas

a) $y = 2\,(x - 3)^3 + 1$ b) $y = \frac{1}{2}\,(x + 2)^3 - 3$ c) $y = 2 - (x - 1)^2$

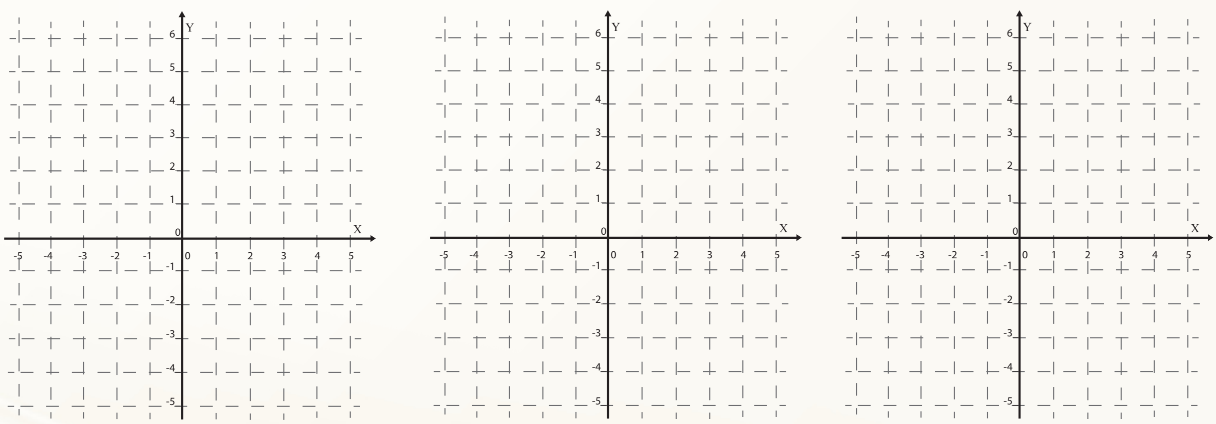
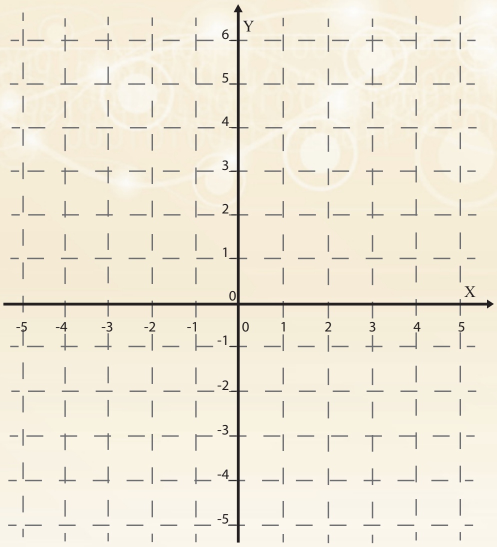


Figura 6.26

1. En la Actividad 3 de la **Secuencia 2** también transformaste la recta $y = x$ en las **gráficas** de las funciones $y = \frac{1}{x}$ y $y = \sqrt{x}$. Aplica las transformaciones que originan los parámetros a, b y c para bosquejar la **gráfica** de las siguientes funciones y a partir de ellas describir su comportamiento:

a) $y = \frac{2}{x} + 1$



b) $y = 3 - \frac{2}{x+1}$

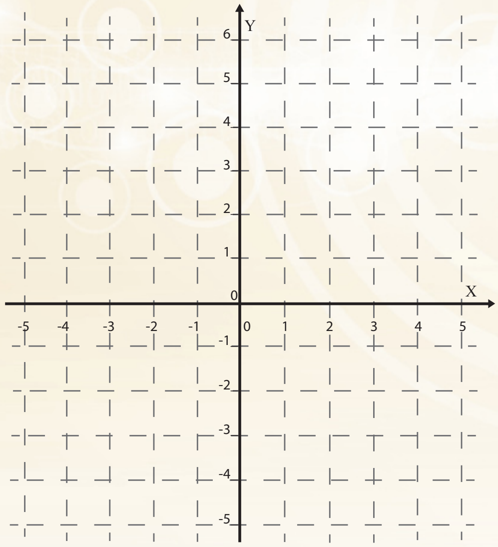
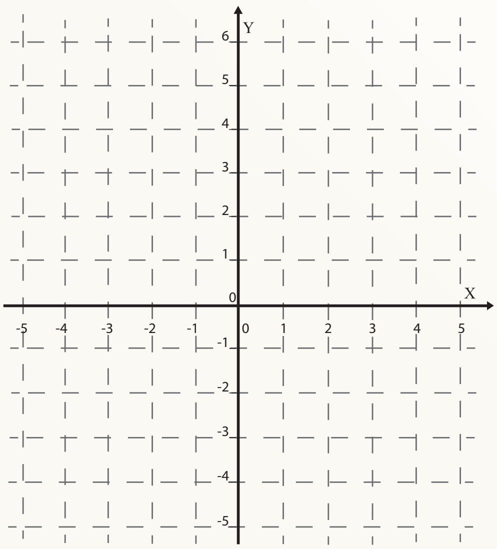


Figura 6.27

c) $y = 3\sqrt{x - 2 + 1}$



d) $y = 3\sqrt{4 - x - 2}$

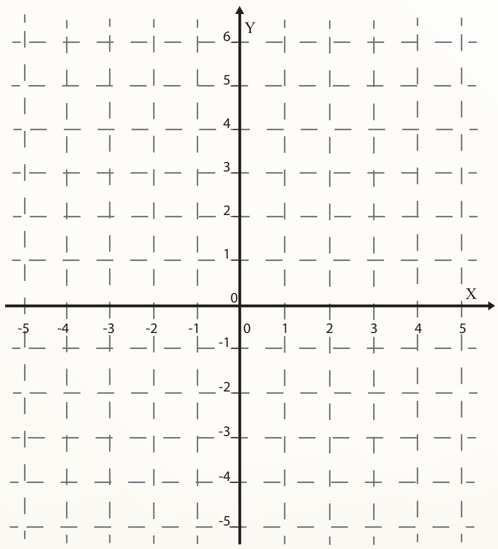


Figura 6.28

3. Lo que hasta este momento has hecho para obtener las **gráficas** de las funciones lineales, cuadráticas, cúbicas, racionales y raíz cuadrada; es válido para cualquier otro tipo de función. Considera el caso de una función cualesquiera $y = f(x)$ de la que sabes que su **gráfica** es la que aparece en la figura:

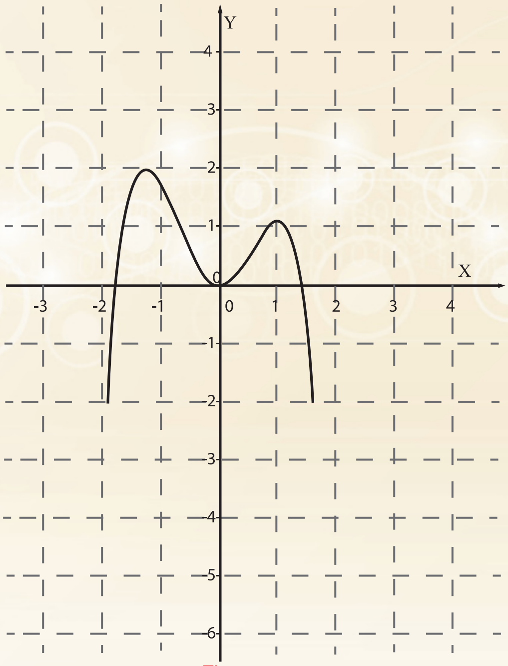


Figura 6.29

a) Sabiendo eso, grafica cada una de las siguientes funciones, observando lo que indica la instrucción que debes hacer al valor de $f(x)$ para obtener el valor de y.

Ejemplo: En la función del inciso i) la instrucción indica que el valor de $f(x)$ debes multiplicarlo por 2 para obtener el valor de y

i) $y=2f(x)$ ii) $y=f(x)-2$ iii) $y=2f(x-2)$

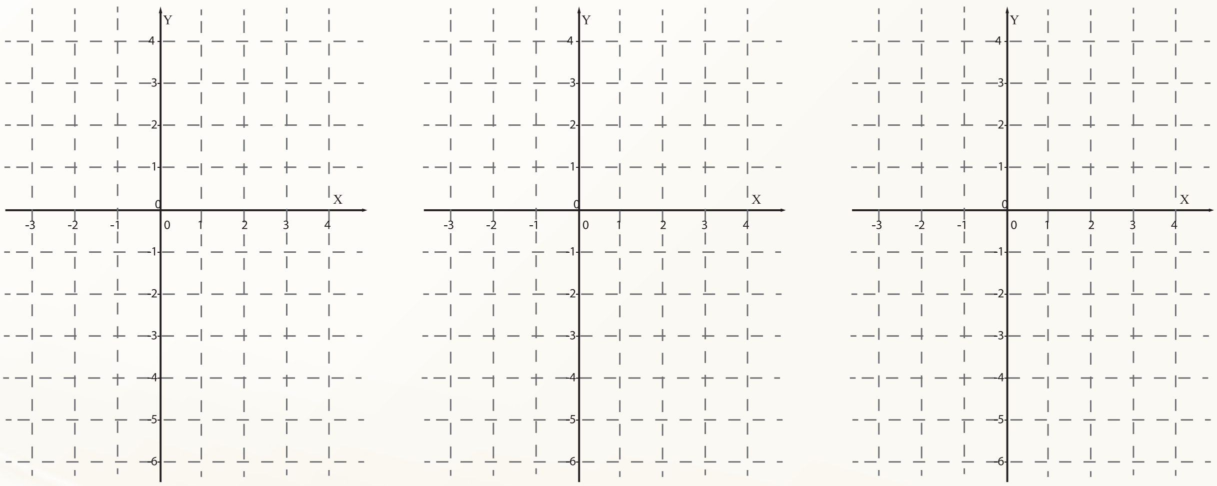


Figura 6.30

iv) $y=2-f(x)$ v) $y=\frac{1}{2}\left[f(x-2)\right]-2$ vi) $y=\left|f(x)\right|$

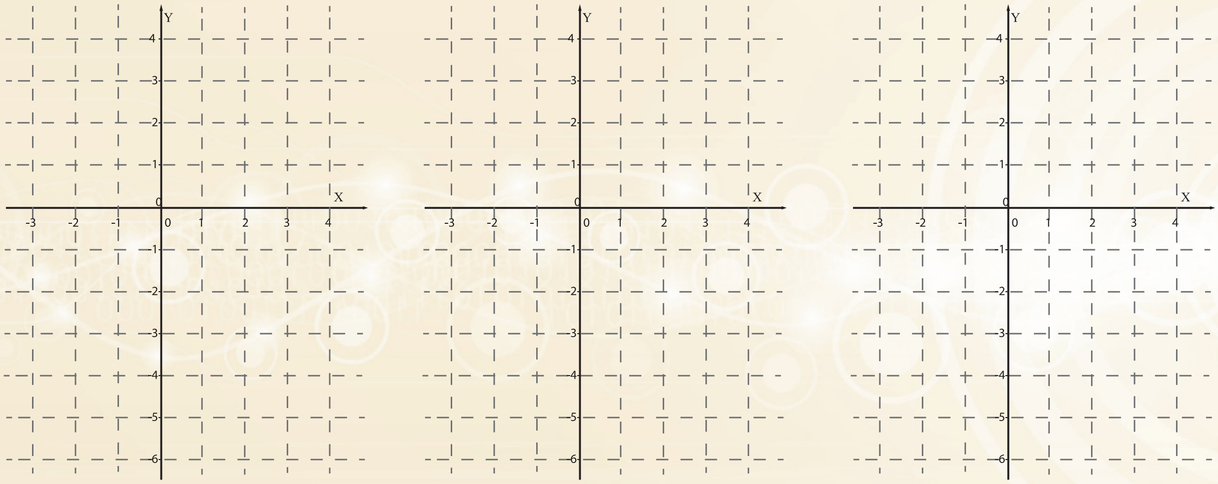
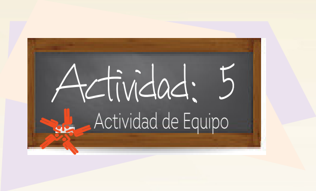


Figura 6.31



4. Bosqueja la **gráfica** de las siguientes funciones simples transformando la recta $y=x$

$y=x^4$ $y=\sqrt[3]{x}$

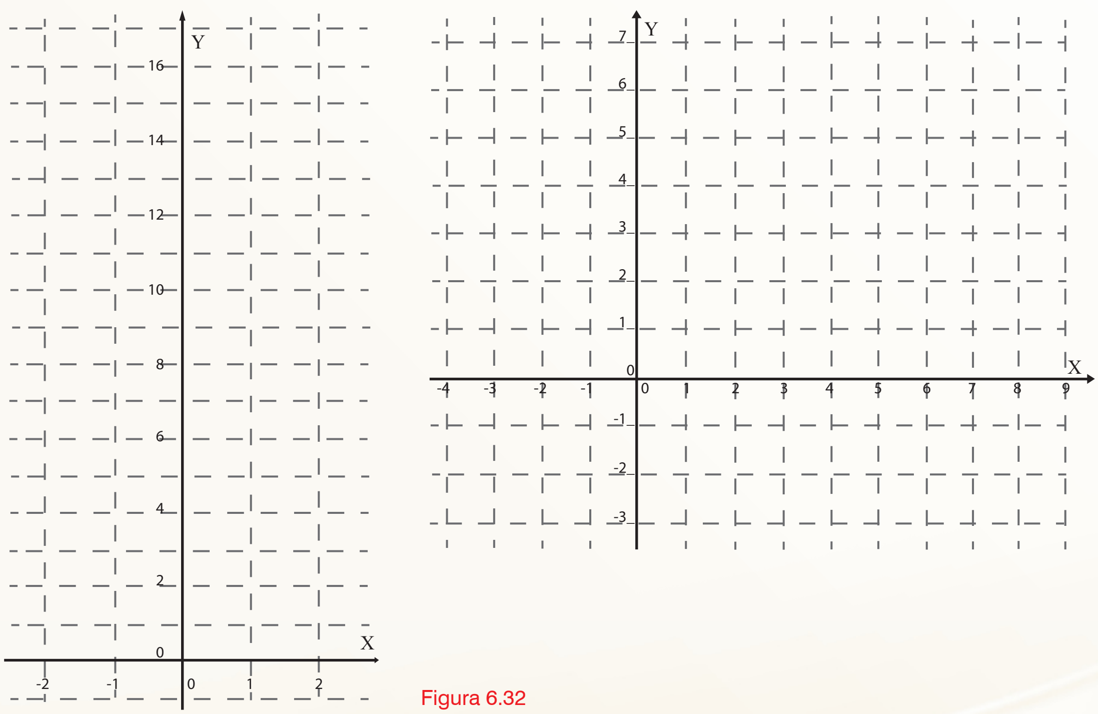
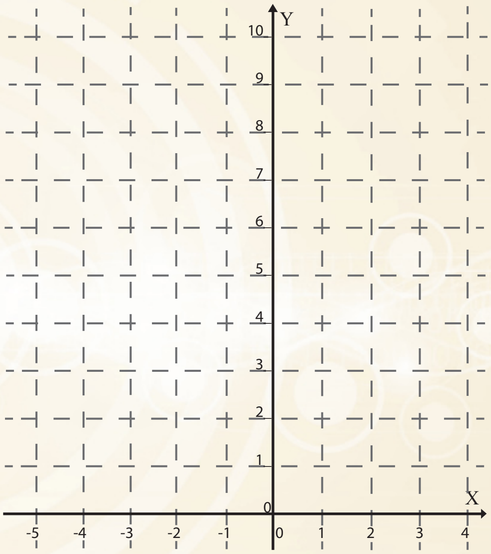


Figura 6.32

c) $y=2^x$



d) $y=\log_2 x$

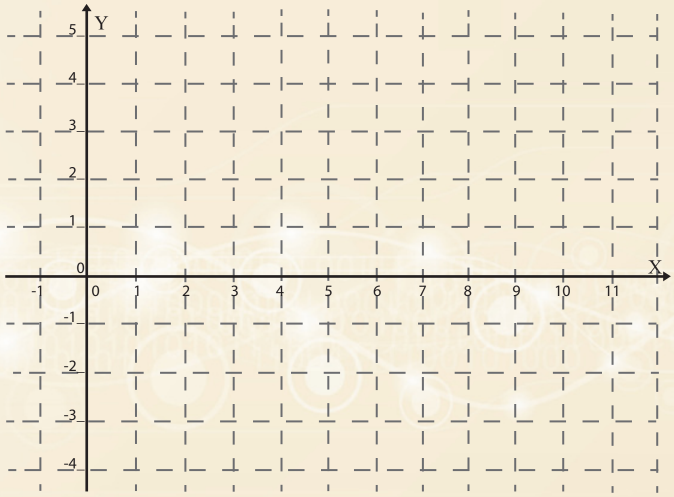
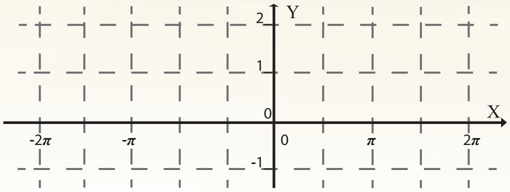


Figura 6.33

e) $y = Senx$



f) $y = Cosx$

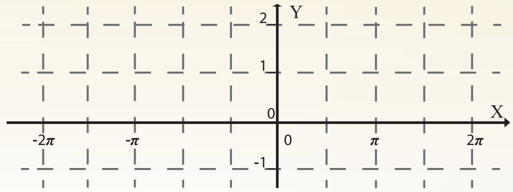
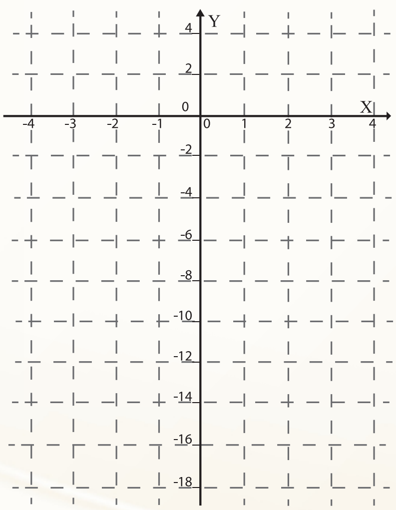


Figura 6.34

5. Con base en las **gráficas** de las funciones simples, grafica las siguientes funciones y describe su comportamiento:

a) $y=2-(x-1)^4$



b) $y = 2\sqrt[3]{x} + 3$

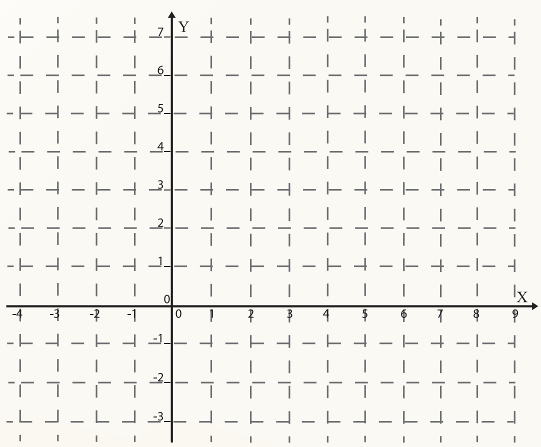
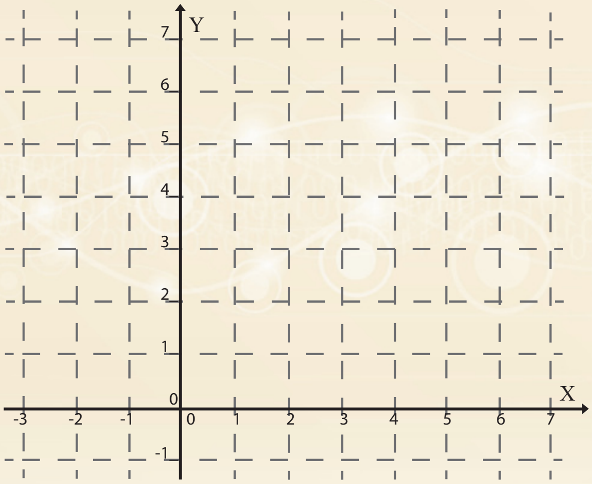


Figura 6.35

c) $y=2^{-x}-1$



d) $y=3\ \log_2\ (x-1)$

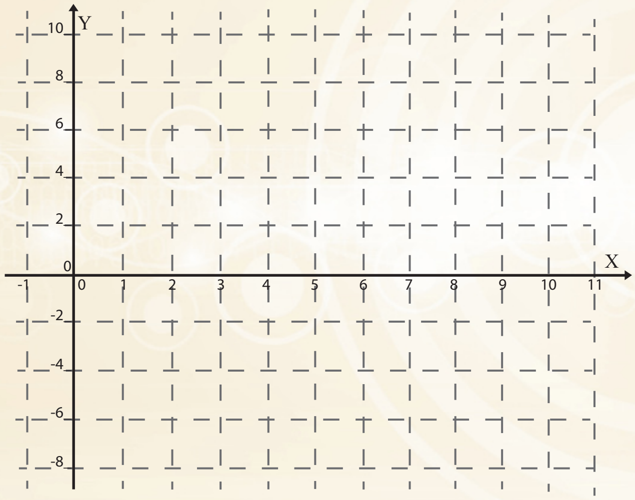
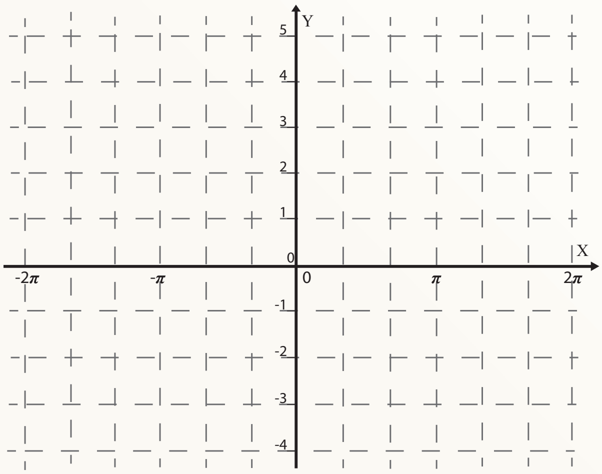


Figura 6.36

e) $y = 3 - 2\ Sen(x)$



f) $y = 3\ Cos\ (x + \pi)\ -1$

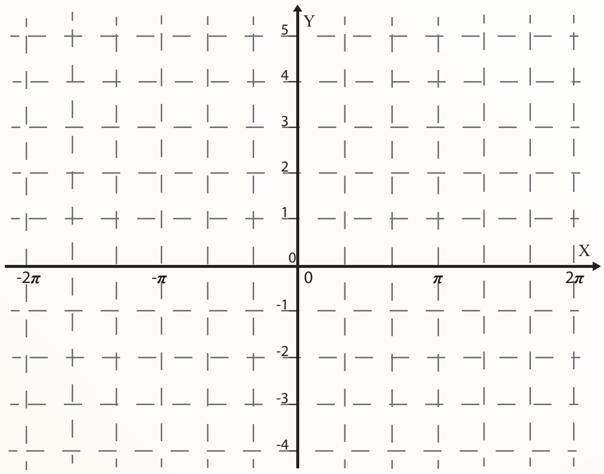


Figura 6.37

Actividad de Cierre

Al realizar las actividades de esta secuencia se espera que hayas aprendido que:

1. La representación analítica de una función es un conjunto de instrucciones de las operaciones que es necesario efectuar a la variable independiente para obtener el valor de la variable dependiente.

2. La **gráfica** de una función puede obtenerse interpretando las operaciones señaladas en la representación analítica como transformaciones de la recta $y=x$.

3. En la función $y=x^2$, la recta $y=x$ se transforma en una *parábola* con vértice en el origen de coordenadas, con el eje Y como eje de simetría y cóncava hacia arriba.

4. Según la operación que se realice sobre la variable independiente, que no sea multiplicar por una constante o sumarle una constante, la recta $y=x$ se transforma en una curva.

5. Las funciones cuya representación analítica es de la forma $y=ax+b$, donde a y b son constantes, se denominan ***funciones lineales*** y su representación **gráfica** es una recta, donde a es su pendiente y b es su ordenada en el origen.

6. Dada una función cualesquiera $y=f(x)$, al multiplicarla por una constante a, la curva que es **gráfica** de $y=f(x)$, se dilata si $a>1$, se contrae si $0<a<1$ y si $a<0$ se refleja en el eje X.

7. Las funciones de la forma $y=f(x)+b$ donde b es una constante, traslada la **gráfica** de la función $f(x)$ verticalmente, hacia arriba, si $b>0$ y hacia abajo si $b<0$.

8. Las funciones de la forma $y=f(x-c)$ donde c es una constante, desplaza la **gráfica** de la función $f(x)$ horizontalmente, hacia la derecha, si $c>0$ y hacia la izquierda si $c<0$.

BLOQUE 6

Secuencia Didáctica 4.-

Actividad de Inicio

Las funciones que resultan al realizar operaciones entre funciones y las funciones inversas

Actividad: 1
Actividad de Equipo

La **Secuencia Didáctica 3** se dedicó al estudio del comportamiento de las funciones de la forma $y=af(x-c)+b$ donde a, b y c son parámetros *(constantes)* que transforman a la función $y=f(x)$. El estudio consistió en analizar y determinar los cambios que dichos parámetros le ocasionan a la **gráfica** de la función; sin embargo cuando a o b son también funciones, entonces se obtienen nuevas funciones correspondientes a las formas $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$, $y=f(x)g(x)$, $y=f(x)/g(x)$; cuyo comportamiento puede analizarse en forma similar a la utilizada en los casos de referencia.

1. Utilizando la técnica de graficación que has aprendido, analiza los cambios que sufre la función $f(x)$ al sumarle la función $g(x)$. Considera el caso cuando $f(x)=x^2$ y $g(x)=x$; esto significa que vas a graficar la función $y=x^2+x$. Para hacerlo, guíate por los siguientes pasos:

   a) Primero traza en un mismo sistema de coordenadas las **gráficas** de las funciones que quieres sumar, en este caso, $f(x)=x^2$ y $g(x)=x$ (En esta ocasión las **gráficas** ya aparecen trazadas en el sistema de coordenadas de la Figura 6.38).

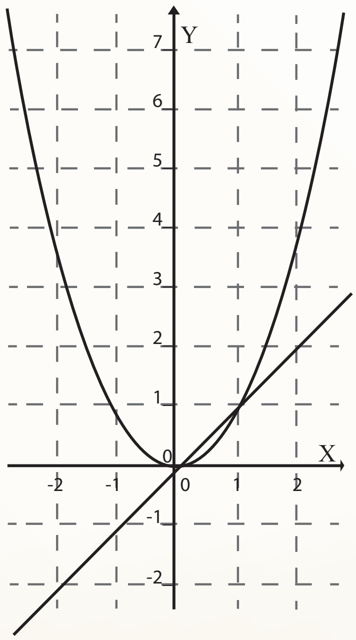


Figura 6.38

b) La instrucción dice que, para cada valor de x, se sume los valores de las ordenadas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. ¿Cómo interpretas esta instrucción en las **gráficas**?, es decir ¿Qué significa sumar **gráficamente** las ordenadas de dos funciones?

c) Ahora ¿Puedes ya trazar la **gráfica** de la función $y=x^2+x$? Hazlo.

d) Describe la variación representada por esta función.

2. *Ahora grafica la función* $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. *(Para hacerlo, te será útil realizar las siguientes reflexiones y acciones)*

a) Primero ponle nombre a la función que está en el numerador, llámale $f(x)$ y llama $g(x)$ a la función que está en el denominador. Escríbelas.

b) Luego grafícalas en el sistema de coordenadas que aparece en la Figura 6.39

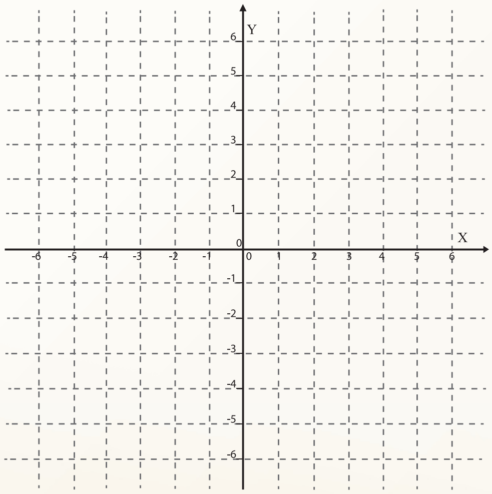


Figura 6.39

c) ¿Qué operación está indicada que hagas con dichas funciones?

d) En la **gráfica** de $f(x)=x-1$ localiza el punto donde la ordenada vale **0** y determina el valor de la división en ese punto.

e) Luego determina, observando las **gráficas**, en qué intervalo o intervalos del eje X, las ordenadas de las dos funciones tienen el mismo signo.

f) En los intervalos que has señalado, es decir, en los intervalos en los que ambas ordenadas tienen el mismo signo, ¿Qué signo tiene la ordenada de la función cociente?

g) Y en los intervalos donde las ordenadas tienen signos diferentes ¿Qué signo tiene?

h) ¿Qué sucede con la ordenada de la función cociente cuando la ordenada del denominador se va acercando a **0**?

i) Y cuando la ordenada del denominador vale **0** ¿Qué sucede con la ordenada de la función cociente?

j) ¿Qué sucede con la ordenada de la función cociente a medida que los valores de $x>0$ se hacen cada vez más grandes?

k) Y cuando los valores de x son negativos y su valor absoluto se hace cada vez más grande ¿Qué sucede con la ordenada de la función cociente?

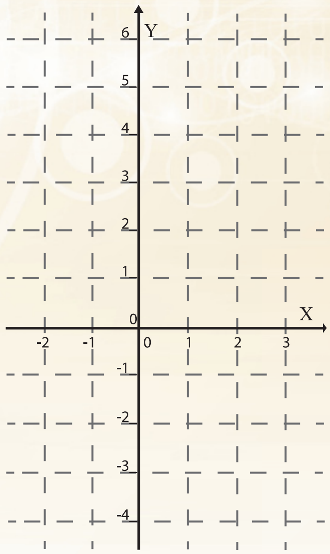
l) Las reflexiones que hiciste al responder los cuestionamientos planteados en los incisos **a)** a **j)** se espera te permitan bosquejar la **gráfica** de la función cociente. Hazlo y utiliza la **gráfica** para describir la variación representada con dicha función.

Desarrollo

Actividad: 2
Actividad de Equipo

1. Siguiendo una estrategia similar a la utilizada en la Actividad 1, grafica las siguientes cuatro funciones y utiliza las **gráficas** para describir la variación representada en cada una de ellas:

a) $y = x^3 - x^2$



b) $y = x\,(x - 1)$

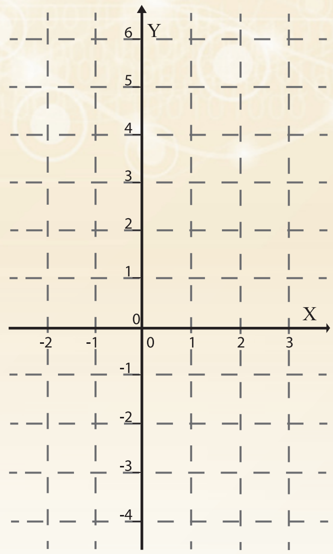
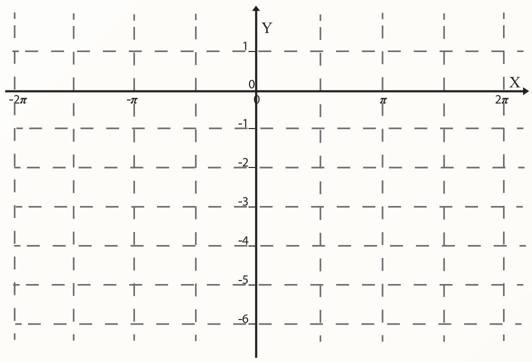


Figura 6.40

c) $y = x\,\mathrm{Sen}\,x$



d) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

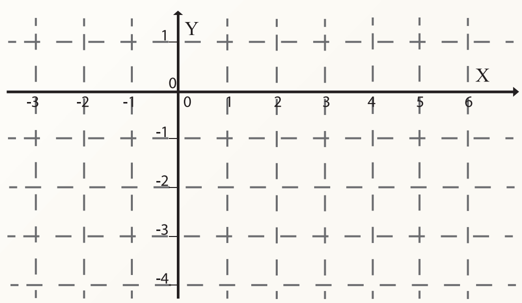


Figura 6.41

Actividad: 3
Actividad de Equipo

La **gráfica** de una ***función compuesta***

1. Las actividades que hasta este momento has realizado en las secuencias de este bloque se espera te hayan permitido darte cuenta de lo útil que resulta recurrir a su **gráfica** para comprender el comportamiento de una función; y que ésta puede bosquejarse a partir de la **gráfica** de la ***función identidad*** $y=x$, interpretando las transformaciones que producen en la **gráfica**, las operaciones que sobre ella se van efectuando.

a) Suponte que al tratar de resolver un cierto problema obtienes como modelo matemático del mismo, la función $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ y tratando de entender su comportamiento decides graficarla transformando la recta $y=x$ basándote en las operaciones indicadas en el modelo. Inténtalo siguiendo los siguientes pasos:

i) Empiezas dándote cuenta que la primera operación que hay que efectuar sobre la x, es elevarla al cuadrado ¿En qué se transforma la recta con esta operación?

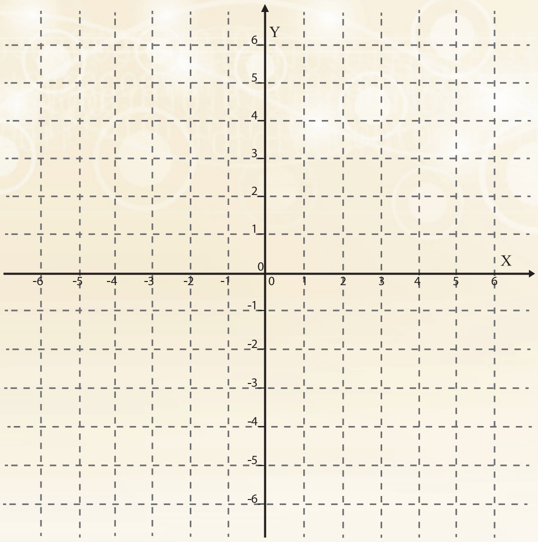


Figura 6.42

ii) Después te cercioras que x^2 está multiplicada por **-1** ¿Qué le pasa a la *parábola* obtenida al elevar al cuadrado, cuando se multiplica por **-1**?

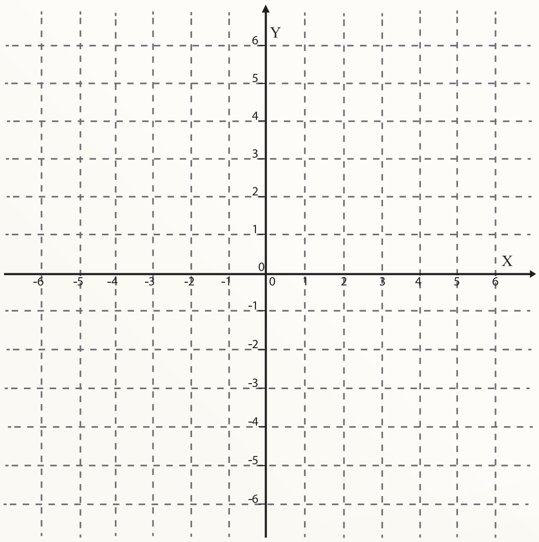


Figura 6.43

iii) La siguiente operación que se efectúa es sumarle **1** a $-x^2$ ¿Cuál es el efecto que produce el sumarle **1** a la *parábola* $-x^2$?

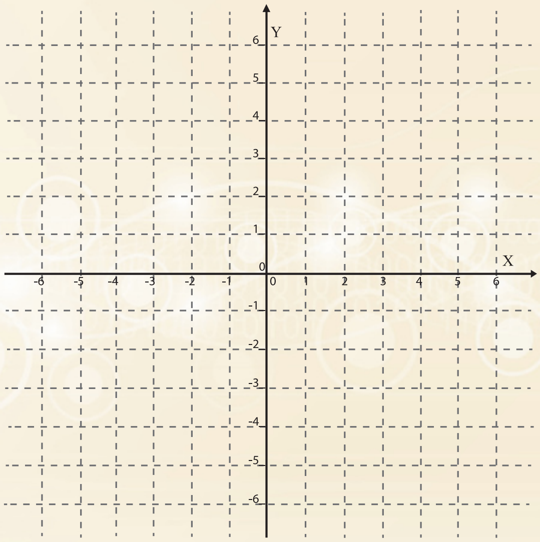


Figura 6.44

iv) Hasta este momento la recta se ha transformado en la *parábola* $y = 1 - x^2$; pero falta una última operación, elevar a la $\frac{1}{2}$, que equivale a extraer raíz cuadrada. Sólo que la función ***"raíz cuadrada"*** no se aplica a la recta $y = x$, sino a la *parábola* $y = 1 - x^2$ Ahora la pregunta es ¿Qué transformación sufre la *parábola* al sacarle raíz cuadrada? (Al efectuar esta operación no olvides que sólo tienen raíz cuadrada el cero y los números positivos).

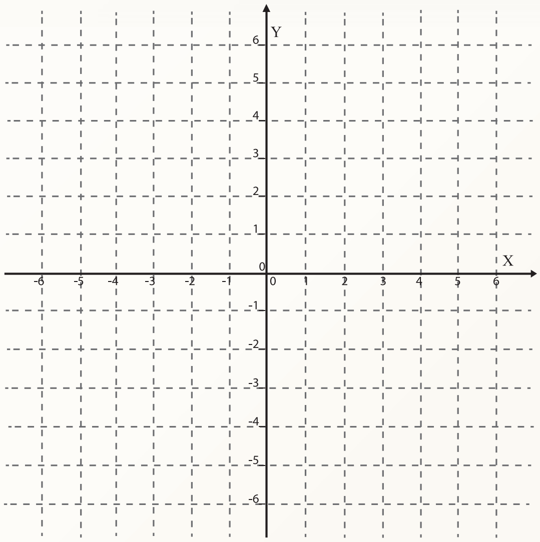


Figura 6.45

b) Si el proceso de transformación lo has ido realizando, entonces ya has bosquejado la **gráfica** de la función objeto de estudio y, por tanto, ya puedes describir la variación de y con respecto a x; si así fue, describe dicha variación diciendo:

i. Los valores de x para los cuales existe valor para y

ii. El intervalo de valores de x para los cuales y es creciente

iii. El valor o los valores de x para los cuales no existe valor para y

iv. El intervalo de valores de x para los cuales y es decreciente

v. El máximo valor que puede tener y y el valor de x al que le corresponde

2. Considera la función $y=(2x-1)^2$. Se trata de una función cuadrática puesto que la instrucción dice que eleves al cuadrado los valores de $2x-1$; sin embargo en esta función, igual que en el caso anterior, no es la recta $y=x$ la que debes elevar al cuadrado, sino la ordenada de la función $y=2x-1$, es decir, que se trata de la función ***"elevar al cuadrado"*** de otra función; esto es, se trata de una función de otra función. A estas funciones se les denomina ***funciones compuestas***.

Se denomina *función compuesta* a la función que resulta de aplicar una función a otra función. En Matemáticas esto se representa $y=f(g(x))$ que indica que la instrucción representada con f debe aplicarse a la función $g(x)$. En este último ejemplo que se utilizó $g(x)=2x-1$; mientras que $y=f(g(x))=(g(x))^2=(2x-1)^2$

a) Para graficar esta función transforma la recta $y=x$, en la recta $y=2x-1$, luego esta recta elévala al cuadrado:

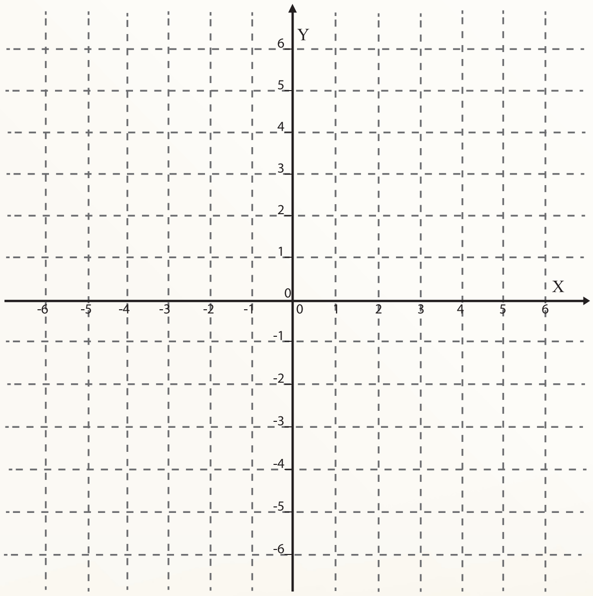


Figura 6.46

3. Grafica las siguientes ***funciones compuestas***

a) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

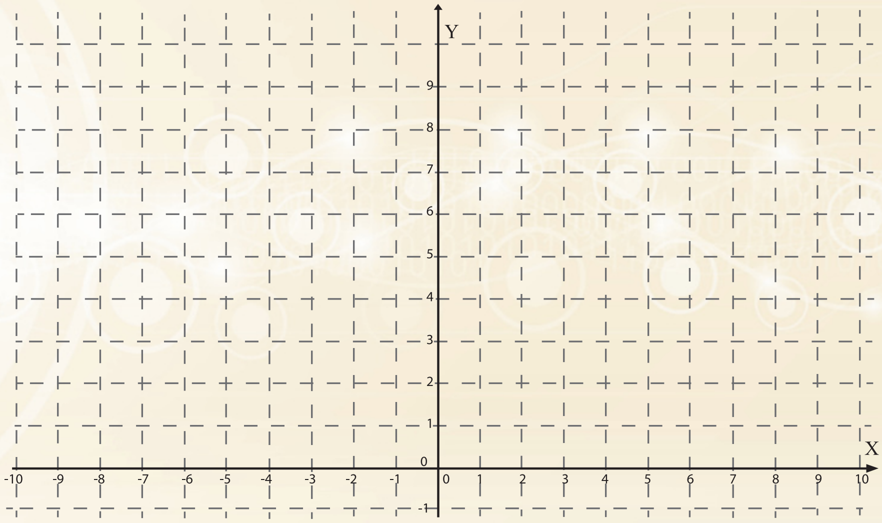


Figura 6.47

b) $y = Sen^2\, x$

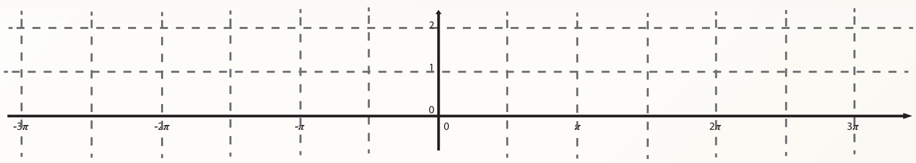


Figura 6.48

c) $y = Cos\sqrt{x}$

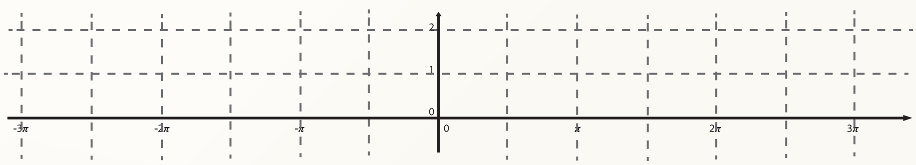


Figura 6.49

Actividad: 4
Actividad de Equipo

Las *funciones inversas* y sus gráficas

1. La inversa de la función $y=x^3$

a) La instrucción dada en esta función establece que para obtener el valor de y es necesario elevar al cubo el valor de x. Con esta instrucción calcula los valores de y para los valores de x que aparecen en la columna de la izquierda de la siguiente **tabla** y anótalos.

Valores de x	Valores de y
0	
1	
2	
3	
4	
5	
a	

b) En la siguiente **tabla** aparecen en la columna de los valores de y los que en la primera **tabla** fueron los valores de x y en la columna de los valores de x aparecen los que seguramente anotaste como valores de y en la primera **tabla**:

Valores de x	Valores de y
0	0
1	1
8	2
27	3
64	4
125	5
a^3	a

1. ¿Qué operación debe efectuarse con los números de la columna de la izquierda para obtener los valores que aparecen en la columna de la derecha?

Estas dos funciones, $y=x^3$ y $y=\sqrt[3]{x}$ se denominan ***funciones inversas***, ya que cuando un número x lo elevas al cubo, obtienes el número x^3 y si a este nuevo número le sacas raíz cúbica, obtienes el número x.

Siempre que dos funciones tienen la propiedad de que una "deshace", lo que hace la otra, se denominan *funciones inversas.*

En **Matemáticas** esto se dice de manera formal, de la siguiente forma:

Se llama función inversa o reciproca de f a otra función f^{-1} que cumple que:
Si $f(a)=b$, entonces $f^{-1}(b)=a$.

2. Encuentra la ***función inversa*** de cada una de las siguientes funciones:

i) $y=2x$ ii) $y=3x-4$ iii) $y=\dfrac{x+4}{5}$ iv) $y=2^x$

c) En un mismo sistema de coordenadas traza primero, la **gráfica** de la función identidad y luego las **gráficas** de $y=2x$ y de su inversa. Luego haz lo mismo con las otras tres parejas de ***funciones inversas*** utilizando los otros sistemas de coordenadas que aparecen ya dibujados.

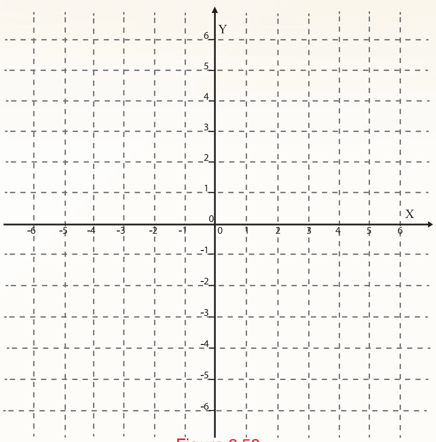


Figura 6.50

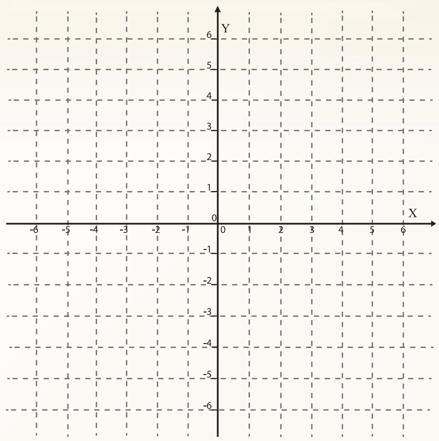


Figura 6.51

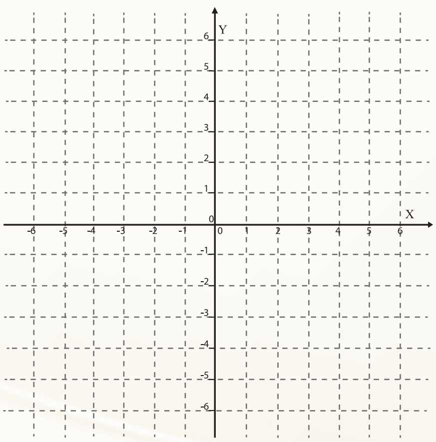


Figura 6.52

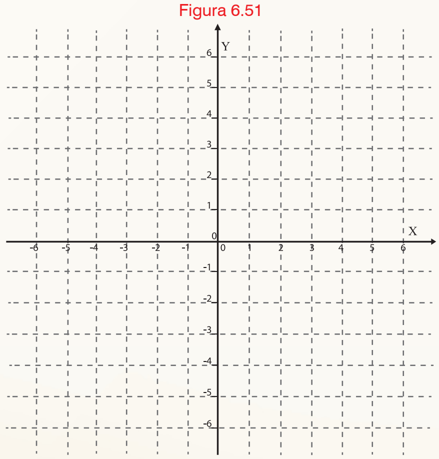


Figura 6.53

a) ¿Qué puedes decir de las **gráficas** de las ***funciones inversas***?

b) En la Figura 6.54 aparece la **gráfica** de una función $y=f(x)$. Bosqueja la **gráfica** de la ***función inversa***:

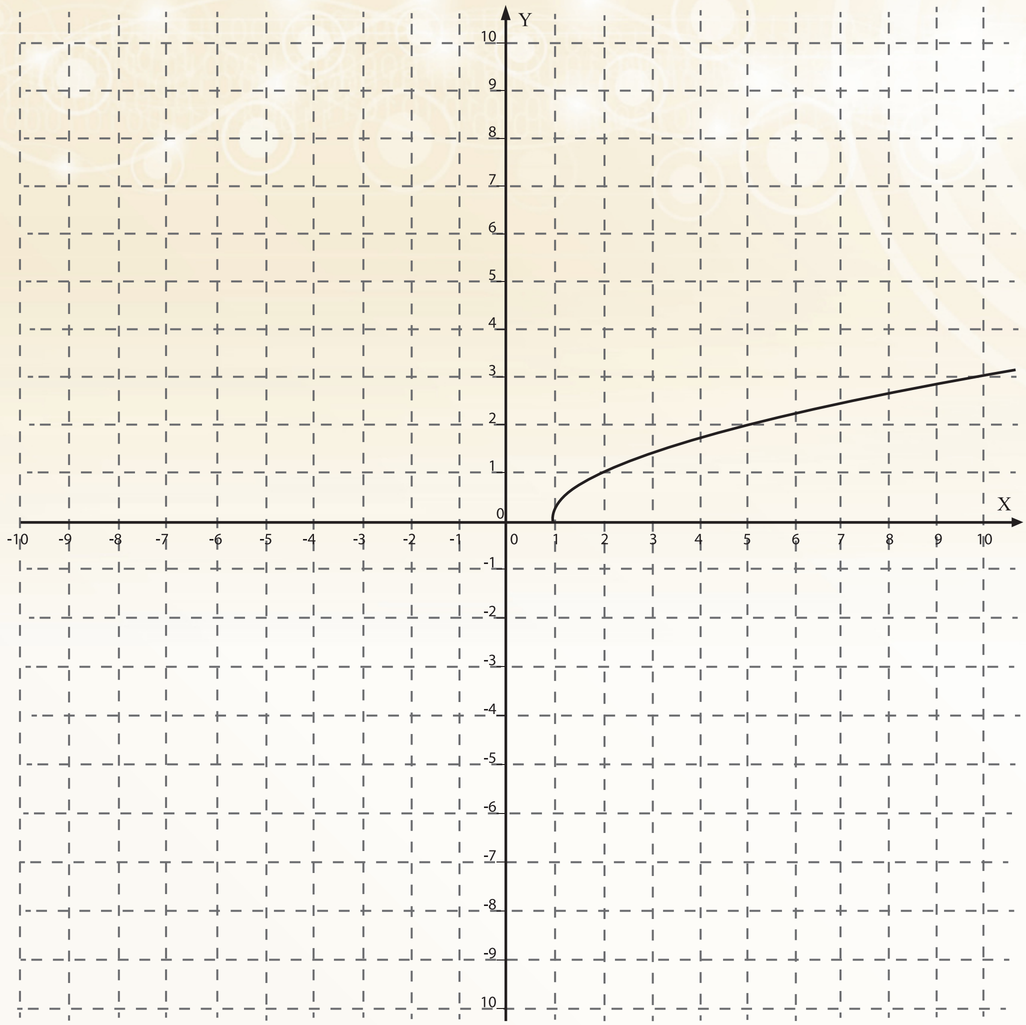


Figura 6.54

Actividad de Cierre

Actividad: 5
Actividad Grupal

Al realizar las actividades de esta secuencia se espera que hayas aprendido que:

a) El bosquejo de la **gráfica** de funciones de la forma $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$, $y=f(x)g(x)$ o $y=f(x)/g(x)$ puede hacerse por un procedimiento similar al utilizado al bosquejar la **gráfica** de funciones de la forma $y=af(x-c)+b$ sólo que en esta nueva situación a y b no son constantes; sino funciones.

b) La estrategia sigue siendo partir de la **gráfica** de la función $y=f(x)$ y analizar la transformación que sufre ésta al sumarle o restarle la **gráfica** de la función $y=g(x)$; o al multiplicarla por o dividirla entre, tal función. Esto es equivalente a realizar operaciones entre las **gráficas** de dos funciones.

c) Que el bosquejo de la **gráfica** de las funciones de la forma $y=f(g(x))$, llamadas funciones compuestas, puede realizarse considerando la transformación que sufre la **gráfica** de la función $g(x)$ al aplicarle lo establecido en la expresión analítica de la función f.

d) Dos funciones se denominan inversas cuando tienen la propiedad de que una "deshace", lo que hace la otra y que esta propiedad también puede observarse a través de sus **gráficas** que resultan ser simétricas con respecto a la recta $y=x$.

Sección de problemas

En cada uno de los problemas de esta sección, explica lo que hiciste para obtener las respuestas o, en el caso de haber podido obtener alguna o algunas, anota las razones por las que consideras que no pudiste obtenerla.

1. Para cada una de las siguientes funciones:

A) $y = 3x - 4$ B) $y = f\,\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4$ C) $y = \sqrt{\frac{4 - x^2}{2 - x}}$

Determina:

a) El valor de y para cada uno de los siguientes valores de x: $0, 2, 3$

b) Los valores de x para los cuales no existe valor para y.

c) El valor o los valores de x para los cuales $y=0$.

d) El incremento del valor de y cuando el valor de x cambia de $x=0$ a $x=2$.

e) La rapidez promedio con que cambia y con respecto a x en el caso anterior.

2. Bosqueja la **gráfica** de cada una de las siguientes funciones y describe su comportamiento:

a) $y = 3x - \frac{x}{2}$ b) $y = 3x - \frac{x}{2} + 1$ c) $y = -\sqrt{x - 2}$ d) $y = 2 - Sen(x - \frac{\pi}{2})$

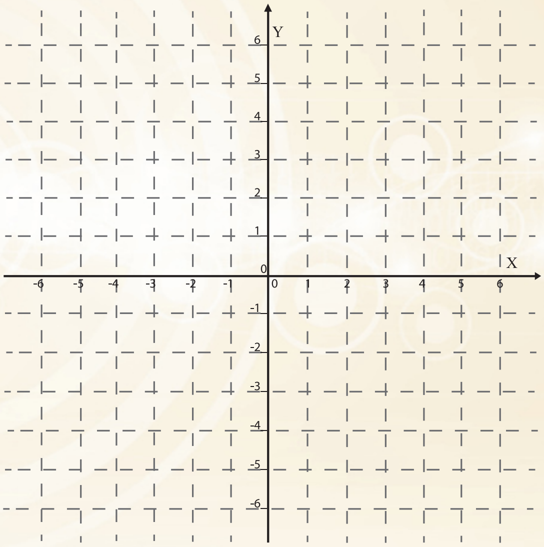


Figura 6.55

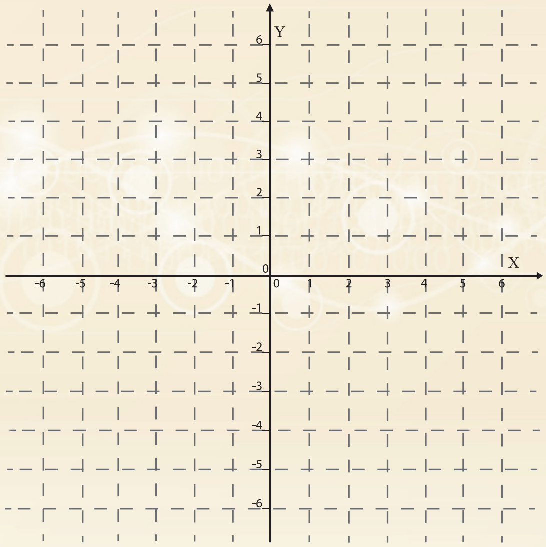


Figura 6.56

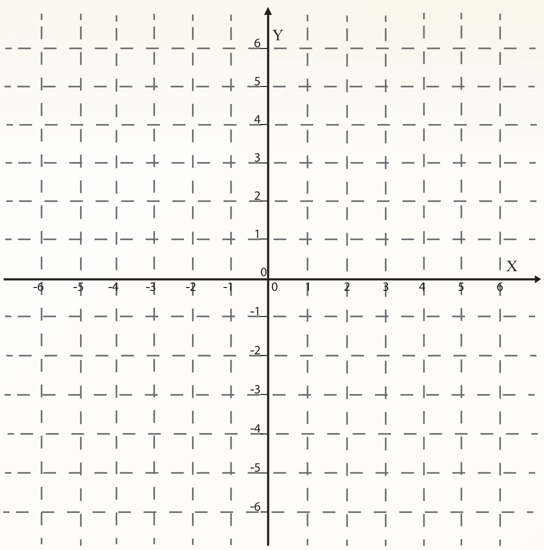


Figura 6.57

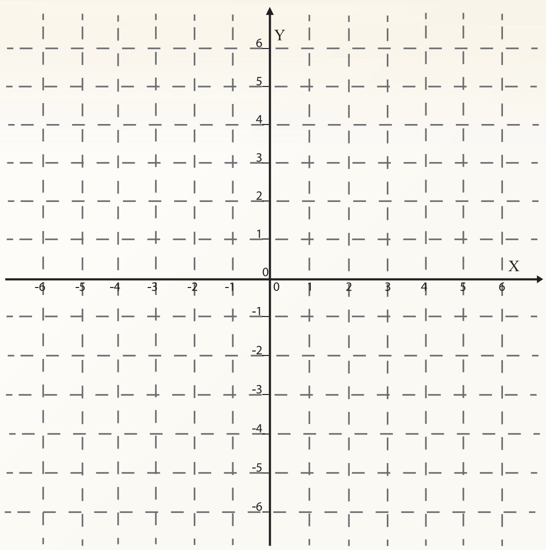


Figura 6.58

3. Si la **gráfica** de Figura 6.59 corresponde a la función $y=f(x)$, bosqueja la **gráfica** de las siguientes funciones:

a) $y=\frac{1}{2}f(x)$

b) $y=f(x)+2$

c) $y=3f(x-2)$

d) $y=-1-f(-x)$

e) $y=\frac{1}{2}[f(x+1)]-2$

f) $y=|f(x)|$

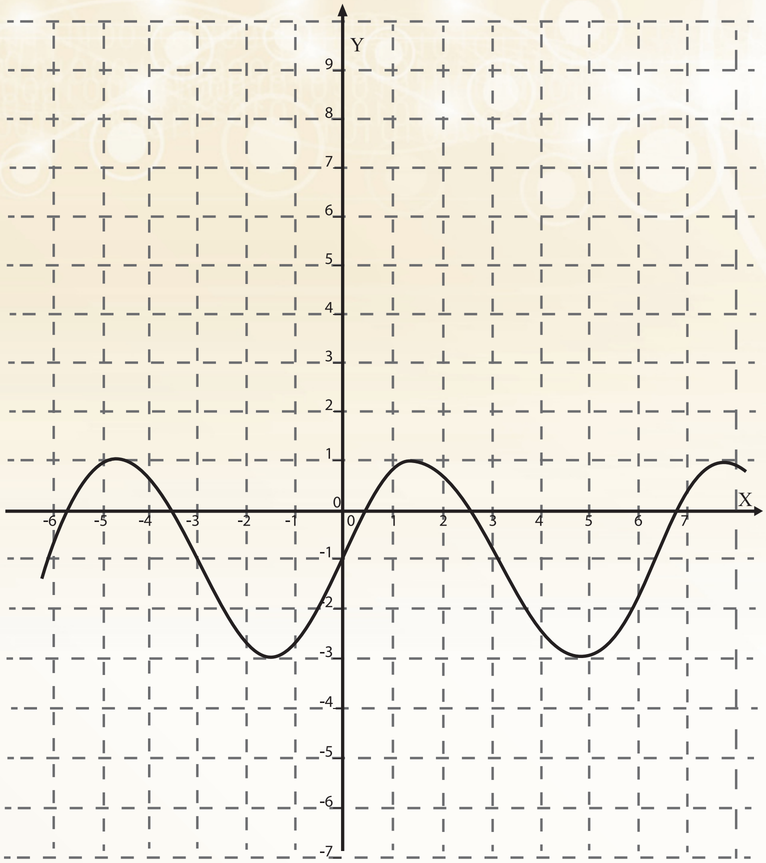


Figura 6.59

4. A continuación aparecen las **gráficas** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Con base en ellas, contesta cada una de las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es el valor de cada una de las funciones cuando $x=0$?

   b) ¿Para qué valores de x, $y=0$ en cada función?

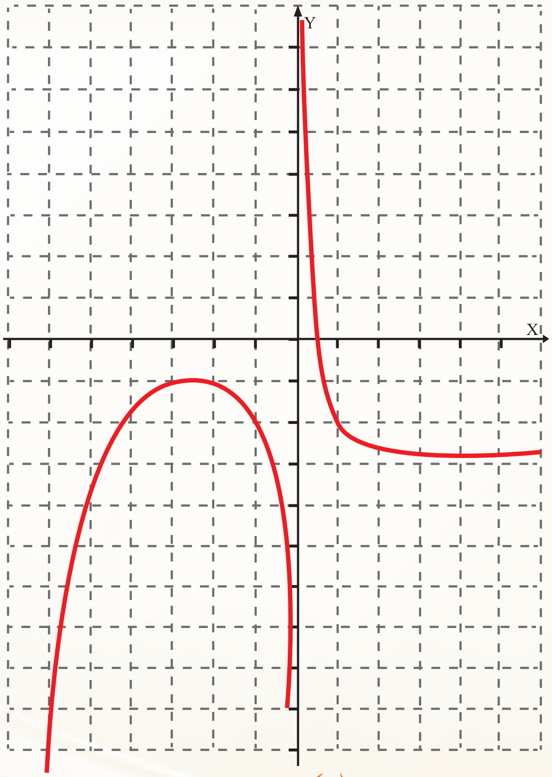
   c) ¿Para qué valores de x la función es positiva, en cada caso?

   d) ¿Cuál es el máximo y el mínimo valor de cada función para los intervalos [-3,3], [-3,0] y [0,3]?

   e) ¿Qué sucede con los valores de $g(x)$ cuando los valores de x se aproximan a cero? ¿y con los de $f(x)$?

   f) ¿En qué caso los valores de $g(x)$ se van acercando a - 3?

   g) ¿Cómo son los valores de $g(x)$ cuando $x>0$? ¿Y cuando $x<0$?



$y = g(x)$

$y = f(x)$

5. Bosqueja las **gráficas** de cada una de las siguientes funciones y describe su comportamiento:

a) $y=x+Senx$

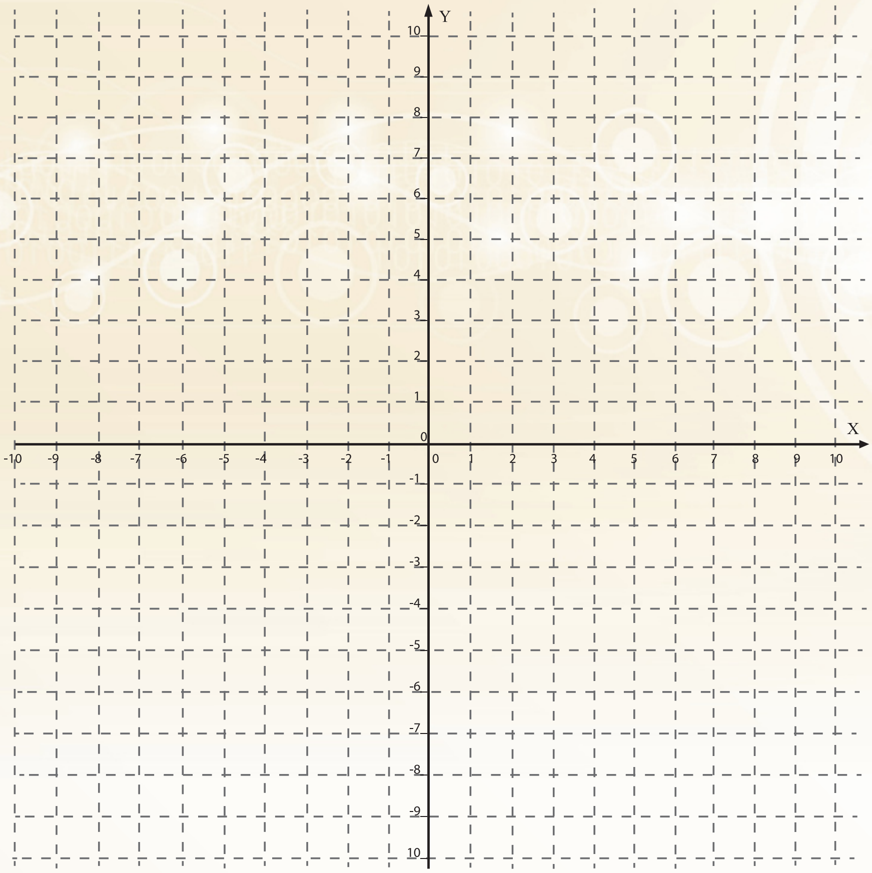


Figura 6.60

b) $y = \log_2 x - \sqrt{x}$

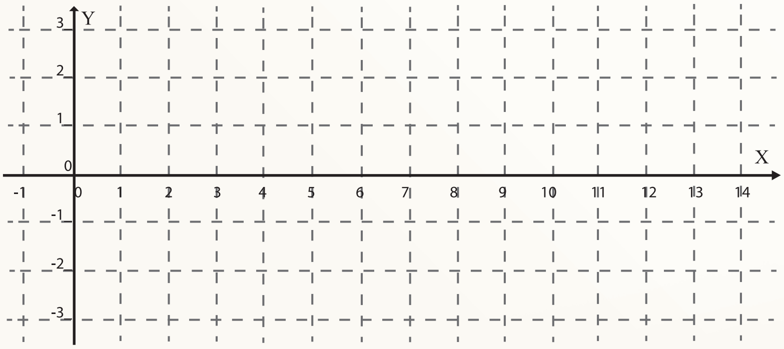


Figura 6.61

c) $y = \frac{Senx}{Cosx}$

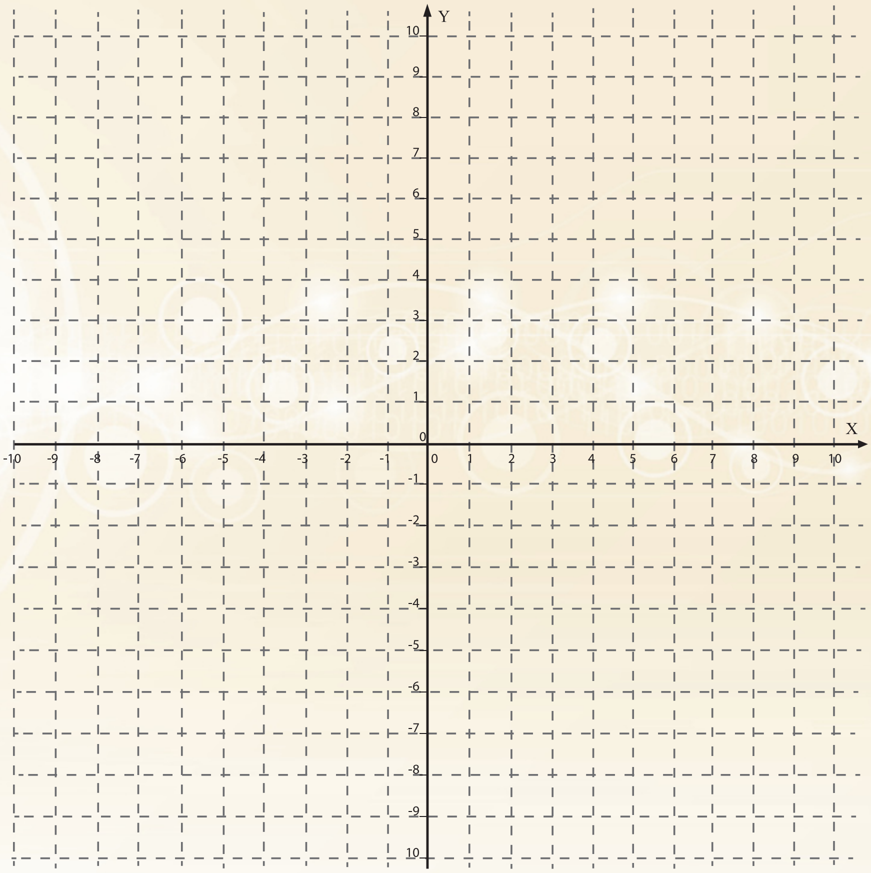


Figura 6.62

6. Obtén la ***función inversa*** de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{3}\ (2x - 1)$ b) $y = \frac{1}{x + 3}$ c) $y = log_2\ (2x - 1)$

En la introducción al presente bloque, se declararon dos propósitos generales de su estudio diciendo textualmente: ***"Al realizar las actividades de este último bloque, se pretende que…"***

a) Logres mejorar tu comprensión de las funciones *(en sus diversas representaciones:* **gráfica**, *tabular, analítica y verbal)* concebidas como ***modelos de variación***.

b) Alcances un mayor nivel de desarrollo de tu competencia para analizar e interpretar los procesos de cambio que representan, lo mismo que de tu competencia para resolver problemas relacionados con tales procesos.

Estando consciente de lo que se espera de ti, es bueno que te autoevalúes y determines en qué medida has logrado lo esperado. Para ello, trata de resolver los problemas que se te presentan a continuación y, si en alguno o algunos de ellos, no sabes cómo proceder o no sabes si lo que hiciste es correcto o no, toma nota para que consultes con el profesor, con otros compañeros o con quien tú decidas para que te ayuden a aclarar tus dudas.

Problema 1.

Señala al menos tres situaciones en las que haya cosas que percibes que cambian y que consideres importante entender. Además de señalarlas, explica por qué consideras importante entenderlas.

Problema 2.

Piensa en un ganadero que tiene un terreno de 100 hectáreas de superficie y quiere cercar una parte para destinarlo a la crianza de ganado vacuno. En tu opinión, ¿de qué depende la cantidad de terreno que debe cercar?

____

____

Suponte que por diversas razones él quiere que el terreno que va a cercar sea rectangular, pero quiere que la cantidad de cerco que va a necesitar sea lo menos posible, ¿Qué puedes hacer tú para ayudarle a decidir? Explica con detalle lo que harías y por qué. ____

____

____

Problema 3.

La expresión analítica $y = 2\sqrt{4 - x^2}$ muestra explícitamente que los valores de y dependen de los valores de x. Bosqueja la **gráfica** que te permita describir cómo varía el valor de y al cambiar el valor de x. Cuando la hayas bosquejado describe la variación y luego explica qué hiciste para bosquejarla.

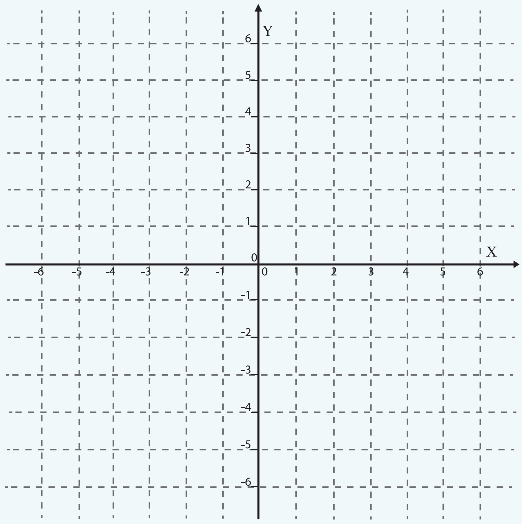


Figura 6.63

Problema 4.

Bosqueja la **gráfica** de cada una de las siguientes funciones y explica lo que hiciste para bosquejarla:

a) $y = 3x - 4$ *b)* $y = 4 - 2(x + 1)$ *c)* $y = \sqrt{4 - x}$ *d)* $y = 2\sqrt{4 - x^2}$

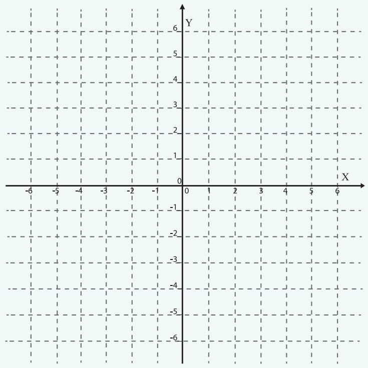


Figura 6.64

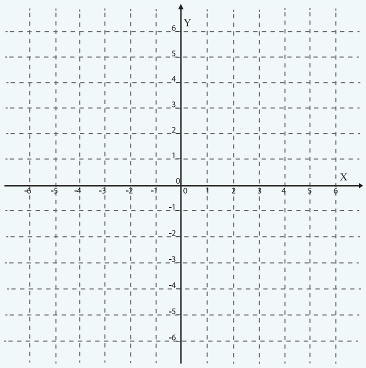


Figura 6.65

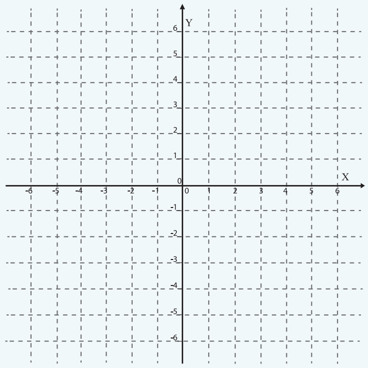


Figura 6.66

Problema 5.

Para cada una de las siguientes funciones, determina:

El valor de y cuando x vale $-2,-1,0,3$

El valor o los valores de x para que $y=0$

Los valores de x para los cuales y no tiene valor

Los valores de x para los cuales $y>0$

Los valores de x para los cuales $y<0$

Los valores de x para los cuales la función es creciente

Los valores de x para los cuales la función es decreciente
La **gráfica** de la función.

Explica en cada caso, qué hiciste para obtener la respuesta o qué fue lo que te impidió obtenerla:

i. $y = 2\sqrt{x^2 - 4}$

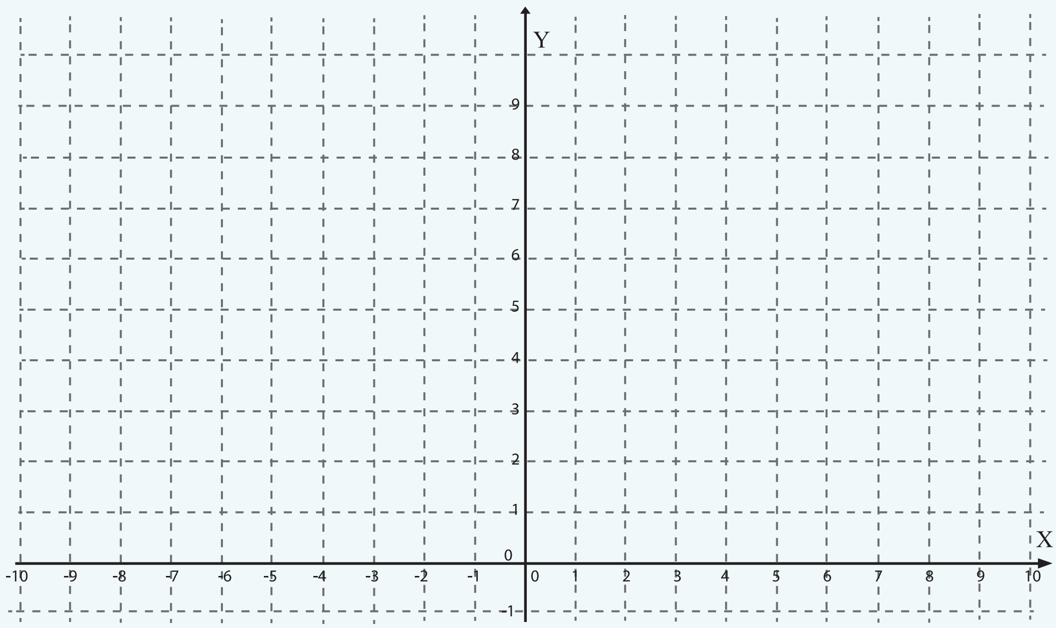


Figura 6.67

ii. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

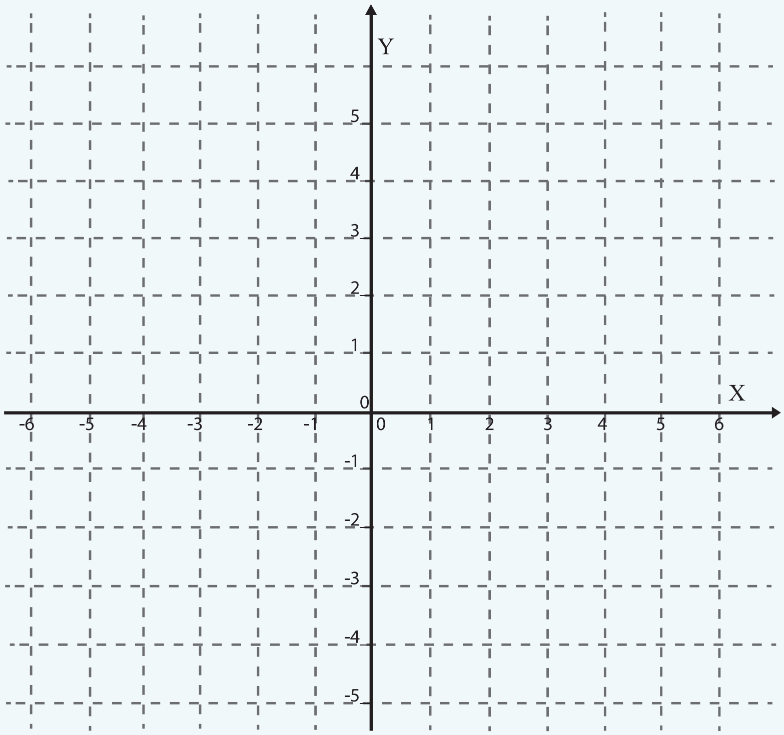


Figura 6.68

iii. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

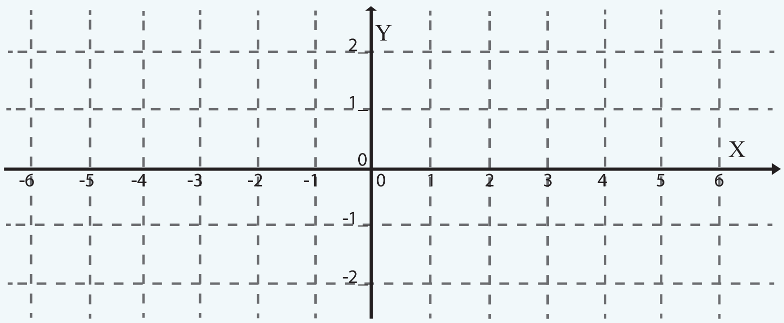


Figura 6.69

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P. (2001). *Mathematical competence for all: options, implications and obstacles*. Educational Studies in Mathematics, 47, 125-143.

Ávila, R,, Ibarra, S, y Grijalva, A. (2010) *El contexto y el significado de los objetos matemáticos*. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 13 (4-4).

Ávila, R. (1996). *Detección de algunos obstáculos que dificultan la asimilación y manejo de los conceptos presentes en el análisis y comprensión de los problemas sobre variación*. ***Publicaciones Centroamericanas***, 10(1), 121–126.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. C. (2008). *Content knowledge for teaching: What makes it special?* Journal of teacher education, 59(5), 389-407.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. Epsilon, No. 42, 353 – 369.

Díaz, Leonora, *"Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación"*, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 8 (2), 2005, pp. 145-168.

Duval, R. (1998). *Registros de Representación Semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201.

Goffree, F. (2000). *Principios y paradigmas de una educación matemática realista. Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 9, 151-167. Barcelona: Graó.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). *Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course*. Journal of Mathematics Behavior V, 25, 57-72.

Henning, H. y Keune, G (2007). *Levels of modeling competence.* En W. Blum; P. L. Galbraith; H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education*. The 14th ICMI Study (pp. 225–232). New York: Springer.

Grijalva, A., Soto, J., Bravo, J., Urrea, M., Rodríguez, M., Ávila, R., y Ibarra, S. (2012). *Reflexiones sobre la práctica docente, diseño y desarrollo de la actividad docente parte I y parte II.* Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora, Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora y Colegio de Educación Profesional Técnica del Estado de Sonora.

Kaiser, G. (2007). *Modelling and modelling competencies in school*. En Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S. (Eds.), *Mathematical Modelling*. The 12th ICTMA Study. Education, Engineering and Economics (pp. 110-119). Chichester: Horwood.

Molina, G., Romo, A y Rosas, A. (2011). *Una formación para el profesor de matemáticas en el Programa de Matemática Educativa del IPN*. En G. Buendía (Ed.) Reflexión e investigación en matemática educativa (pp.31-42). Mexico: Lectorum.

Villaseñor, G. (2011). *Diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la funciones exponenciales y logarítmicas de base e mediante la variación de representaciones*. Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora, México.

Zubieta, G. (1996). *Sobre número y variación: antecedentes del cálculo*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur.
Hermosillo, Sonora, México

La edición consta de 11, 075 ejemplares.
Impresos en México/Printed in Mexico.

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA