

5 SEMESTRE

REFORMA INTEGRAL DE LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

Cálculo Diferencial e Integral 1

FORMACIÓN PROPEDÉUTICA

RAMIRO ÁVILA GODOY
AGUSTÍN GRIJALVA MONTEVERDE
JOSÉ MARÍA BRAVO TAPIA
JOSÉ DE JESÚS AYALA



COLEGIO DE BACHILLERES
DEL ESTADO DE SONORA



QUERIDOS JÓVENES:

Siempre he pensado que la juventud constituye una de las etapas más importantes en el desarrollo del ser humano; es la edad donde forjamos el carácter y visualizamos los más claros anhelos para nuestra vida adulta. Por eso, desde que soñé con dirigir los destinos de nuestro estado, me propuse hacer acciones concretas y contundentes para contribuir al pleno desarrollo de nuestros jóvenes sonorenses.

Hoy, al encontrarme en el ejercicio de mis facultades como Gobernadora Constitucional del Estado de Sonora, he retomado los compromisos que contraje con ustedes, sus padres y –en general con las y los sonorenses– cuando les solicité su confianza para gobernar este bello y gran estado. Particularmente lucharé de manera incansable para que Sonora cuente con "Escuelas formadoras de jóvenes innovadores, cultos y con vocación para el deporte". Este esfuerzo lo haré principalmente de la mano de sus padres y sus maestros, pero también con la participación de importantes actores que contribuirán a su formación; estoy segura que juntos habremos de lograr que ustedes, quienes constituyen la razón de todo lo que acometamos, alcancen sus más acariciados sueños al realizarse exitosamente en su vida académica, profesional, laboral, social y personal.

Este módulo de apendizaje que pone en sus manos el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, constituye sólo una muestra del arduo trabajo que realizan nuestros profesores para fortalecer su estudio; aunado a lo anterior, esta Administración 2015-2021 habrá de caracterizarse por apoyar con gran ahínco el compromiso pactado con ustedes. Por tanto, mis sueños habrán de traducirse en acciones puntuales que vigoricen su desarrollo humano, científico, físico y emocional, además de incidir en el manejo exitoso del idioma inglés y de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

Reciban mi afecto y felicitación; han escogido el mejor sendero para que Sonora sea más próspero: la educación.

LIC. CLAUDIA ARTEMIZA PAVLOVICH ARELLANO
GOBERNADORA CONSTITUCIONAL DEL ESTADO DE SONORA

ESTADO DE SONORA



Cálculo Diferencial e Integral 1

Ramiro Ávila Godoy
Agustín Grijalva Monteverde
José María Bravo Tapia
José de Jesús Ayala

COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Director General
Mtro. Víctor Mario Gamiño Casillas

Director Académico
Mtro. Martín Antonio Yépiz Robles

Director de Administración y Finanzas
Ing. David Suilo Orozco

Director de Planeación
Mtro. Víctor Manuel Flores Valenzuela

Director de Vinculación e Imagen Institucional
Lic. José Luis Argüelles Molina

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 1

Bufete de Asesoría en Educación Matemática de la Universidad de Sonora

Autores:
Ramiro Ávila Godoy
Agustín Grijalva Monteverde
José María Bravo Tapia
José de Jesús Ayala

Coordinación general:
Laura Isabel Quiroz Colossio

Supervisión académica:
Vanesa Guadalupe Angulo Benítez

Coordinación técnica:
Rubisela Morales Gispert

Revisión disciplinar:
María Elena Conde Hernández
Hermenegildo Rivera Martínez
Adán Durazo Armenta
Martha Cecilia Palafox Duarte

Desarrollo editorial: Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.
Coordinación editorial: LDG. Luis Ricardo Sánchez Landín
Edición: LDG. Yolanda Yajaira Carrasco Mendoza

Diseño de portada:
Yolanda Yajaira Carrasco Mendoza

Fotografía de portada:
Laura Cecilia Hernández Garza

Contenido: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Módulo de Aprendizaje:
Copyright ©, 2015 por el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
Todos los derechos reservados.
Primera edición 2015.
Reimpresión 2016. Impreso en México.

Dirección Académica
Departamento de Innovación y Desarrollo de la Práctica Docente.
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur.
Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280.

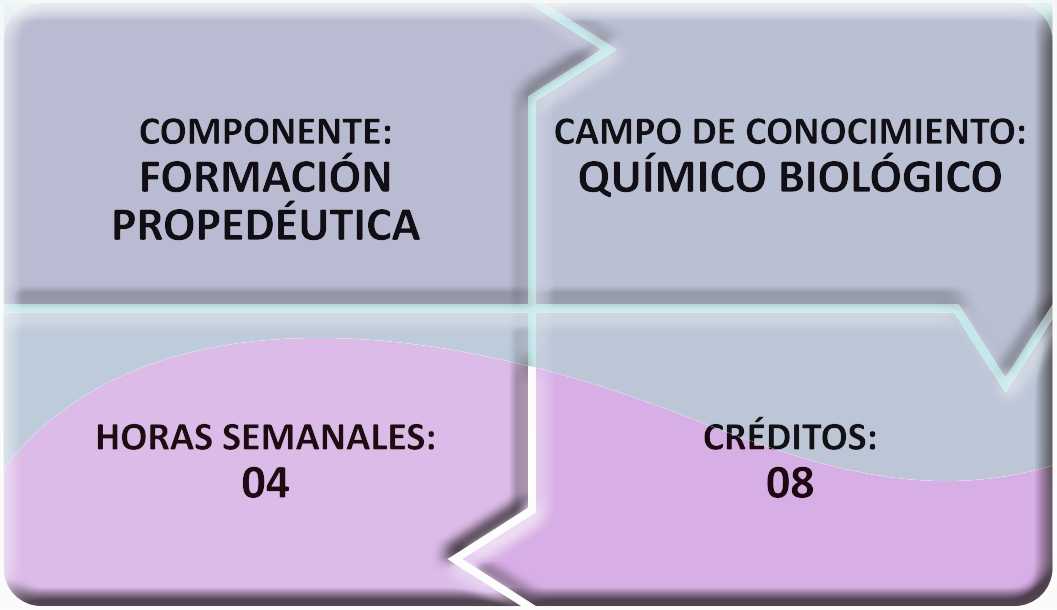
ISBN: 978-607-730-041-0

Se terminó la impresión de esta obra en julio de 2016.
En los talleres de ***Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.***
Lambda No. 216 • Fraccionamiento Industrial Delta • C.P. 37545
León, Guanajuato, México.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 3681

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México.
La edición consta de 4,514 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico

Ubicación Curricular



DATOS DEL ALUMNO

Nombre: _____

Plantel: _____

Grupo: _____ Turno: _____ Teléfono: _____

E-mail: _____

Domicilio: _____

_____

Presentación

Como se ha venido diciendo a lo largo de tus estudios en el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, se aplica un modelo educativo basado en competencias, con el propósito de que a lo largo de tus estudios tanto de matemáticas como de otras disciplinas y asignaturas, te prepares para enfrentar y resolver problemáticas para las cuales es necesario aplicar no sólo los conocimientos construidos, sino también la aplicación de estrategias y desarrollo de habilidades y actitudes positivas.

En ese sentido se te capacita para que estés en condiciones de resolver problemas que se plantean en contextos que pueden ser distintos a aquéllos en los cuales te involucraste en la vida escolar y que, en un planteamiento holístico, busca conjuntar los conocimientos, habilidades y actitudes requeridas en las diversas asignaturas que cursas o has cursado, usando, en este caso, a las matemáticas como una herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana, de ciencia y de la sociedad.

Particularmente en este Módulo de Aprendizaje la atención se centra en la cuantificación de la variación. La variación fue el tema central del curso Matemáticas 4 y ahí discutiste sobre la importancia de estudiar los fenómenos cambiantes, de caracterizar las formas básicas de la variación, de representarlas por medio de funciones representadas gráfica, numérica y algebraicamente.

Un aspecto que se destacó en Matemáticas 4 es el referente a la rapidez de la variación, de la cual se hizo un análisis cualitativo. En esta ocasión la atención se focaliza en el estudio cuantitativo de la rapidez de la variación, resolviendo el problema de determinar que tan rápido cambia una variable dependiente cuando se modifica en una unidad la variable independiente.

Resolviendo este problema de la determinación de la rapidez de cambio, dos grandes científicos de la antigüedad crearon nuevos métodos matemáticos que dieron origen al cálculo diferencial e integral que, desde su nacimiento en la segunda mitad del Siglo XVII, se ha constituido en la rama de las matemáticas de mayor aplicación en la ciencia.

Por una parte la cuantificación de la rapidez de cambio permitió la creación de modelos físicos y matemáticos para estudiar el movimiento, el comportamiento de la energía, del trabajo mecánico, la presión, temperatura y volumen de los gases, por citar unos ejemplos de la física y, por otra, el estudio de múltiples fenómenos en biología, economía, sociología y cualquier otra rama del conocimiento y de la actividad humana.

Asimismo, los métodos del cálculo diferencial e integral permiten resolver algunos problemas de interés en todos los campos científicos y humanos: los llamados problemas de optimización. Los problemas de optimización nos llevan a determinar cuál es el mínimo costo de una construcción, la máxima resistencia del soporte de un edificio, la distancia más corta para construir una vía férrea o tender un cableado eléctrico, los momentos de mayor peligrosidad de un microorganismo, la forma más económica de producir latas para almacenar líquidos, etc.

De forma análoga a los módulos de aprendizaje anteriores, aquí se presentan los materiales de discusión organizados en bloques, los cuales se organizan a su vez en secuencias didácticas

Presentación

formadas por una o más actividades. Es importante que sigas las instrucciones de tu profesor respecto a las dinámicas de trabajo que se usarán para abordar cada una de ellas.

Las secuencias didácticas de cada bloque se organizan en actividades de inicio, en las cuales se presentan problemáticas que quizá sean nuevas pero que se pueden abordar con base en las competencias previamente generadas. En las actividades de desarrollo se presentan nuevas situaciones, de cuya resolución deberá emerger nuevo conocimiento y requerirán el uso de nuevas habilidades. Finalmente, en las actividades de cierre se procura que, con la conducción de tu profesor, se establezcan de manera clara y precisa los nuevos objetos matemáticos generados y las potencialidades de su uso en la resolución de diferentes problemáticas.

Al final de cada bloque se presentan dos tipos de actividades adicionales. Por una parte se presentan una serie de problemas en las cuales debes usar las competencias desarrolladas para su resolución y, por otra, un conjunto de cuestionamientos en la sección denominada como Autoevaluación, la cual dará oportunidad de que tú mismo tengas una valoración adecuada de lo aprendido, pero también de tus dificultades. Consecuentemente, permitirá que elabores una estrategia para mejorar tu desempeño.

Por último, en las líneas siguientes se enuncian las principales características de cada uno de los tres bloques que conforman este módulo de aprendizaje.

EN EL BLOQUE 1 se estudian fundamentalmente los problemas de la rapidez instantánea de cambio, esto es, la rapidez con la cual cambia una variable al modificarse otra de la cual depende, tomando como modelo el cálculo de velocidades instantáneas de objetos en movimiento. Con ello aparece por primera vez un concepto fundamental del cálculo: LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

EN EL BLOQUE 2 se abordan los problemas de optimización. Aquí la atención se centra en el desarrollo de competencias para la modelación matemática el diseño y la aplicación de estrategias de solución en diversos campos y el uso de representaciones variacionales, tanto gráficas como numéricas y algebraicas, en las que el uso de la derivada de una función es fundamental.

EN EL BLOQUE 3 se formalizan algunas de las ideas matemáticas surgidas en los dos bloques anteriores, pero principalmente se fortalecen los métodos para derivar funciones, cubriendo los casos de los principales casos de variación que se estudiaron en Matemáticas 4.

Glosario Icónico



EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Representa la **Evaluación Diagnóstica**, la que te permitirá estar consciente de tus conocimientos acerca del tema a abordar.



ACTIVIDAD INTEGRADORA

En esta sección realizarás la **Actividad Integradora**, la cual será tu proyecto durante todo el semestre, pondrás en práctica tus conocimientos y fortalecerás tu aprendizaje.



Con este gráfico identificarás las **Actividades de Aprendizaje** dentro del texto, con las cuales optimizarás los conocimientos aprendidos. Debajo del ícono sabrás la secuencia y bloque al que pertenece y arriba se indica si dicha actividad es individual, en equipo o grupal.

Íconos para indicar si una actividad es:


Individual


En Equipo


Grupal



EVALUACIÓN DE ACTIVIDADES

En este apartado encontrarás la **Evaluación de Actividades**, donde tu profesor calificará tu desempeño.



AUTOEVALUACIÓN

Ícono de **Autoevaluación** en este espacio tendrás que evaluarte a ti mismo honestamente y te darás cuenta de los conocimientos que has adquirido así como de tus fallas.



COEVALUACIÓN

Ícono de **Coevaluación**, donde deberás evaluar a tu compañero y él te evaluará a ti.



EVALUACIÓN DE LA ACT. INT.

Con este ícono reconocerás la **Evaluación de la Actividad Integradora**, donde se valorará tu desempeño.



PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

El **Portafolio de Evidencias** lo encontrarás al finalizar cada bloque, aquí se especifican cuáles actividades debes incluir y entregar a tu profesor para que te evalúe.



REACTIVOS DE CIERRE

En este espacio encontrarás los **Reactivos de Cierre**, con los cuales reforzarás los conocimientos que adquiriste durante el bloque y desarrollarás tus habilidades.



GLOSARIO

Con esta ilustración localizaremos el **Glosario**, ya sea dentro del texto o al final del libro. Será tu ayuda para conocer nuevos conceptos y comprender mejor las lecturas.



FUENTES DE INFORMACIÓN

Útil para tener referencias sobre el contenido de tus libros, además que podrás utilizar las **Fuentes** para tener más herramientas que perfeccionen tu desempeño académico.



NOTA ENFÁTICA

En **Nota Enfática** podrás encontrar contenido importante que complementará tu aprendizaje.

ÍNDICE

Presentación del libro 5

Glosario Icónico 7

Competencias Genéricas 9

Competencias Disciplinares Básicas 10

Mapa de Contenido 11

Bloque I LA RAPIDEZ INSTANTÁNEA DE CAMBIO Y LOS PROCESOS INFINITOS... 12



Secuencia didáctica 1: La rapidez instantánea de cambio 14

Secuencia didáctica 2: Cuantificando la rapidez instantánea de cambio..... 21

Secuencia didáctica 3: La rapidez instantánea de cambio y la pendiente de la recta tangente 31

Bloque II PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN 58

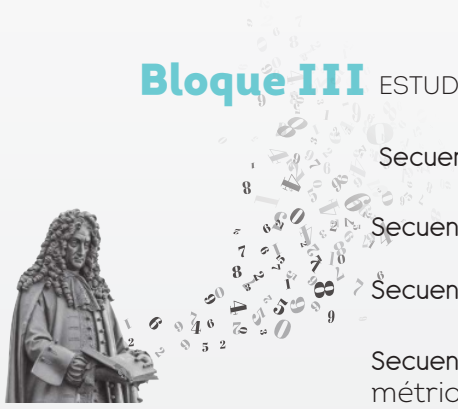


Secuencia didáctica 1: Optimización en la construcción de canales hidráulicos 60

Secuencia didáctica 2: Optimización en construcciones que permiten reducir costos 73

Secuencia didáctica 3: Obtención de valores mínimos 91

Bloque III ESTUDIANDO LA FUNCIÓN DERIVADA 118



Secuencia didáctica 1: Las reglas elementales de derivación 120

Secuencia didáctica 2: La derivada de las funciones exponenciales 135

Secuencia didáctica 3: La derivada de las funciones logarítmicas .. 150

Secuencia didáctica 4: La derivada de las funciones trigonométricas Seno y Coseno..... 162

Competencias Genéricas

1	Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2	Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3	Elige y practica estilos de vida saludables.
4	Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5	Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6	Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7	Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8	Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9	Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10	Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11	Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Competencias Disciplinares Básicas

COMPETENCIAS DISCIPLINARES EXTENDIDAS DEL CAMPO DE LMATEMÁTICAS		BLOQUES DE APRENDIZAJE		
		I	II	III
1	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebráicos geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales		✓	✓
2	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.	✓	✓	✓
3	Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	✓	✓	✓
4	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	✓	✓	✓
5	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	✓	✓	✓
6	Cuantifica representa y contrasta experimental o matemática-mente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.		✓	✓
7	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.		✓	✓
8	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	✓	✓	✓

Cálculo Diferencial e Integral I



Bloque I

B-I

Secuencia Didáctica 1

- La rapidez instantánea de cambio

Secuencia Didáctica 2

- Cuantificando la rapidez instantánea de cambio

Secuencia Didáctica 3

- La rapidez instantánea de cambio y la pendiente de la recta tangente

Bloque II

B-II

Secuencia Didáctica 1

- Optimización en la construcción de canales hidráulicos

Secuencia Didáctica 2

- Optimización en construcciones que permiten reducir costos

Secuencia Didáctica 3

- Obtención de valores mínimos

Bloque III

B-III

Secuencia Didáctica 1

- Las reglas elementales de derivación

Secuencia Didáctica 2

- La derivada de las funciones exponenciales

Secuencia Didáctica 3

- La derivada de las funciones logarítmicas

Secuencia Didáctica 4

- La derivada de las funciones trigonométricas Seno y Coseno

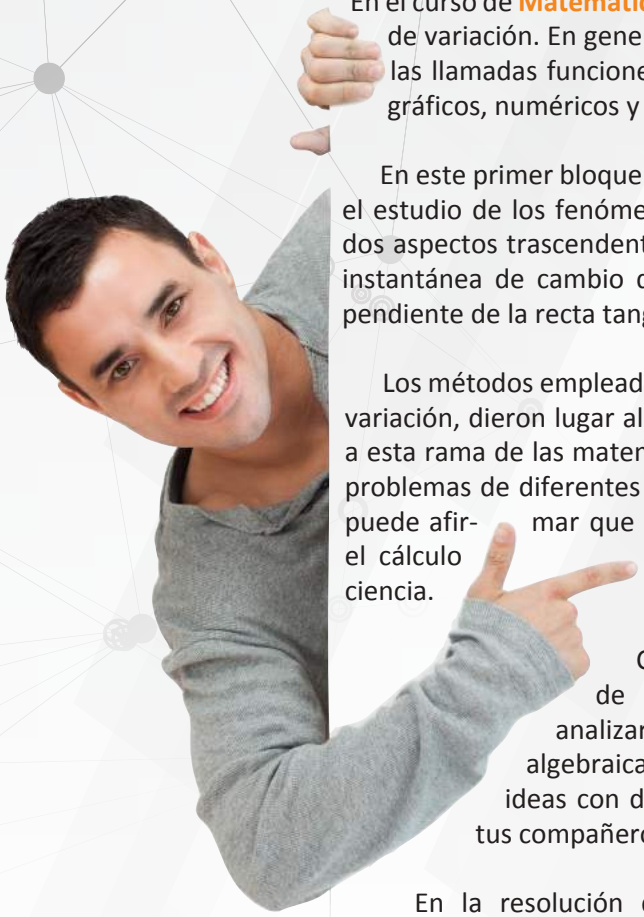
Bloque 1

12 Horas

La **rapidez instantánea** de **cambio** y los **procesos infinitos.**



Introducción B-I



En el curso de **Matemáticas 4** se analizaron los procesos de cambio y los tipos básicos de variación. En general los procesos de cambio fueron modelados por medio de las llamadas funciones y se hicieron caracterizaciones importantes en términos gráficos, numéricos y algebraicos o analíticos.

En este primer bloque del curso de **Cálculo Diferencial e Integral I** se profundizará el estudio de los fenómenos de variación. Particularmente se pondrá el énfasis en dos aspectos trascendentes en la comprensión de los procesos de cambio: la razón instantánea de cambio de una variable con respecto a otra y la obtención de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.

Los métodos empleados para resolver estos dos aspectos o problemas ligados a la variación, dieron lugar al surgimiento del cálculo diferencial e integral, convirtiendo a esta rama de las matemáticas en una herramienta poderosa para la resolución de problemas de diferentes ciencias, incluyendo a la matemática misma. De hecho, se puede afirmar que desde su surgimiento, en la segunda mitad del Siglo XVII, el cálculo es la herramienta matemática de mayor aplicación en la ciencia.

Con el estudio de las actividades de este bloque y la resolución de los problemas propuestos, tendrás la oportunidad de analizar situaciones usando las representaciones verbales, gráficas, algebraicas y numéricas, interpretando información y expresando tus ideas con dichas representaciones, para establecer comunicación con tus compañeros de clase y con tu profesor.

En la resolución de problemas deberás desarrollar tus habilidades para interpretar información, para hacer conjeturas matemáticas, para aplicar algoritmos y para argumentar porqué propones algún tipo específico de solución.

En este Módulo el estudio se centra en la cuantificación de los procesos de variación, pero también tendrás la oportunidad de hacer razonamientos cualitativos de interpretación de datos o situaciones proporcionados de forma verbal, numérica, gráfica o algebraica.

Las situaciones de estudio se relacionan con aspectos de la vida cotidiana fuera de la escuela, con tus cursos de física, de química y de otras materias, así como con la matemática misma. La resolución de los problemas te permitirá fortalecer tus conocimientos, de tal manera que los puedas aplicar en contextos diferentes a aquéllos en los cuales surgieron.

Es muy importante que sigas las indicaciones del módulo y de tu maestro, que desarrolles las actividades a veces individualmente pero en otras ocasiones que lo hagas en equipo o en discusiones grupales, pues ello no sólo te ayuda a elevar tus niveles de comprensión, sino que te permitirá aprender a escuchar los planteamientos y argumentos de otros a la vez que desarrollar tus propias habilidades para expresarte en términos matemáticos.



Inicio

ACTIVIDAD 1 La rapidez de crecimiento

SD1-B1

Observa las siguientes gráficas, que en cada caso representan la variación de una variable ***y*** cuando cambia la variable ***x***, y determina lo que se solicita.

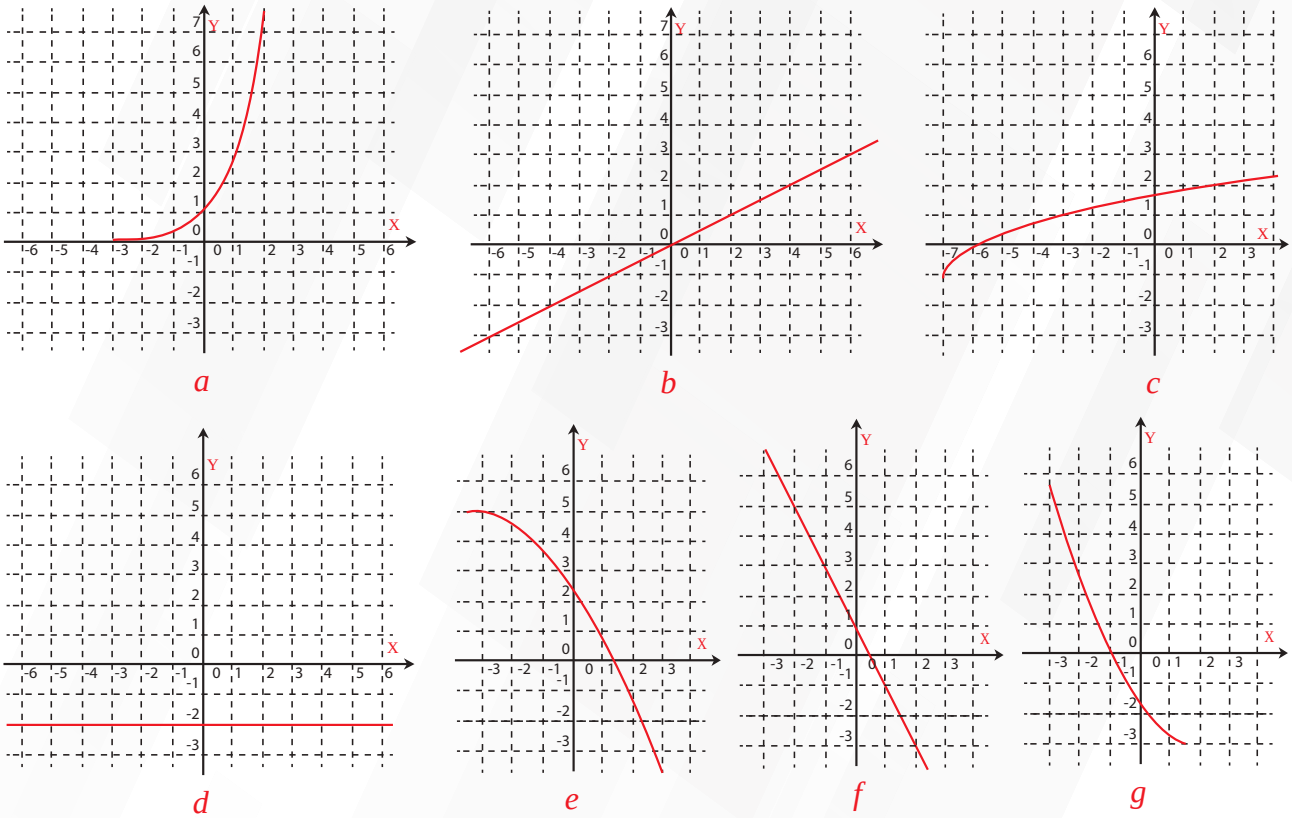


FIGURA 1.1

1) ¿En qué casos la variación de ***y*** es creciente?

2) ¿En qué casos la variación de ***y*** es decreciente?

3) ¿Cómo es la variación de la rapidez con que cambia y en cada uno de los casos en los que la variación de dicha variable y resultó ser creciente?

4) Y en los casos en los que la variación de y con respecto a x resultó decreciente, ¿Cómo fue la variación de la rapidez en cada caso?

5) ¿Qué sucedió con el valor de y al variar x, en el caso representado en el inciso d)?

6) Si centramos nuestra atención en el inciso b) ¿qué tan rápido cambia el valor de y cuando el valor de x se va modificando? ¿Y en el caso del inciso d)?

7) En el caso de las funciones no lineales (incisos a,c,e y g) ¿Puedes determinar qué tan rápido cambia el valor de y al cambiar x?

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 Las funciones lineales

SD1-B1

Un taxista cobra usando un taxímetro, de acuerdo a la siguiente tarifa: $20.00 de inicio por el uso del servicio y $2.00 por minuto de recorrido. El taxímetro avanza continuamente, de tal manera que en 30 seg. registra un cobro de $1.00, en 15 seg. registra $0.50 y así sucesivamente.

a) Elabora una gráfica de costo de servicio del taxi contra tiempo.

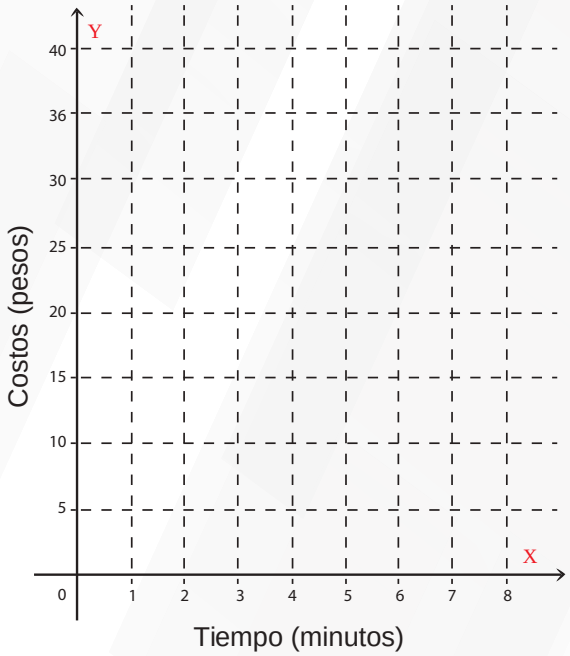


FIGURA 1.2

b) De acuerdo con lo estudiado en Matemáticas 4 y el problema anterior, ¿qué puedes decir de la razón de cambio del costo con relación al tiempo? ¿Cómo está representada dicha razón de cambio en la gráfica?

c) ¿La razón de cambio es diferente en algún intervalo de tiempo?

d) Si consideramos un tiempo específico, al que denominaremos genéricamente con t ¿es posible conocer qué tanto cambiará el costo del uso del taxi cuando el valor de t se incrementa en un valor determinado Δt?

Cierre

ACTIVIDAD 3 La rapidez instantánea de cambio constante

SD1-B1

En el curso de Matemáticas 4, dedicado al estudio de la variación, se autorizaron las funciones para para representarla matemáticamente; de tal manera que cada tipo de variación quedó asociado con un tipo específico de función; surgiendo así las funciones lineales, las polinómicas, las racionales, las exponenciales, las periódicas, entre otras. En el caso de las funciones lineales, utilizadas para representar y estudiar procesos donde la rapidez con que varía una cierta cantidad con respecto a otra, es constante, es decir, procesos donde la variación es directamente proporcional, además de poder hacer un estudio cualitativo de la rapidez de la variación, fue posible cuantificar dicha rapidez.

En las funciones lineales, ya se trate de una función constante, una función creciente o una decreciente, es posible conocer la ***rapidez instantánea de cambio en un punto determinado***, pues, de acuerdo a lo estudiado en los cursos de Matemáticas 1 y Matemáticas 4, la rapidez instantánea de cambio es constante y su valor se corresponde con el valor de la pendiente de la recta de que se trate. El caso de las funciones lineales incluye al de las funciones constantes, cuya expresión analítica es $y = c$, con c constante, y, en este caso, el valor de la rapidez instantánea de cambio, es 0. En el caso de una función lineal creciente o decreciente, cuya expresión analítica es $y=ax + b$, con $a\neq0$, la rapidez instantánea de cambio es a, el valor de la pendiente de la recta.

El término rapidez instantánea de cambio se usa para referirnos al valor en el cual aumenta o disminuye la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente de referencia, aunque esta última no necesariamente sea el tiempo.

Por ejemplo, el perímetro de una circunferencia se determina mediante la expresión $p=2\pi r$, que es una variación lineal. En este caso se dice que la rapidez instantánea de cambio del perímetro p con relación al valor del radio r de la circunferencia, es 2π.

1. Determina el valor de la rapidez instantánea de cambio de y con respecto a x si $y=2x + 3$.

2. Determina el valor de la rapidez instantánea de cambio de y con respecto a x si $y = -3x + 2$.

3. Determina el valor de la rapidez instantánea de cambio de y con respecto a x si $y = 7$.

4. Señala tres fenómenos de variación lineal en los que una variable depende del tiempo y tres en los que dependan de una variable diferente del tiempo. En cada caso, indica el valor de la rapidez instantánea de cambio.

ACTIVIDAD 4 La rapidez instantánea de cambio variable

SD1-B1

De acuerdo a lo estudiado en el bloque 2 del curso de Física 1, en el movimiento uniformemente acelerado se puede determinar la posición final de un objeto por medio de la expresión $x_f = xi + vit + \frac{1}{2}at^2$, donde x_f es la posición final de un objeto en movimiento, x_i es su posición inicial, v_i es su velocidad inicial, a es su aceleración y t es el tiempo en el cual deseamos determinar la posición final x_f .

Así, por ejemplo, si tenemos un cuerpo que se mueve en línea recta partiendo desde un punto que reconocemos como el origen, una velocidad inicial de $0\ m/seg$ y una aceleración de $6\ m/seg^2$, tenemos que la posición del objeto, en cada instante de tiempo t se puede determinar mediante la expresión $x_f = 0 + 0t + \frac{1}{2}6t^2 = 3t^2$.

La gráfica de x_f contra t es entonces una parábola de la siguiente forma.

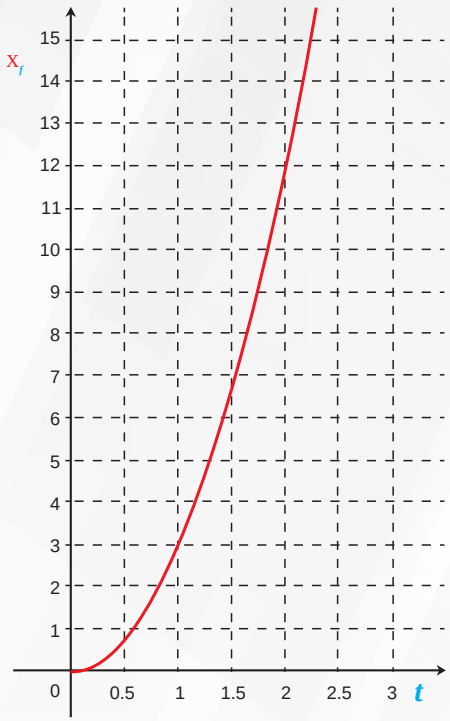


FIGURA 1.3

a) A partir de la gráfica ¿puedes decir si se trata de una función creciente o decreciente? ¿Qué puedes decir de la rapidez de la variación: es creciente o decreciente?

b) Tomando en cuenta que la posición inicial x_i es cero, la posición final x_f se corresponde con la distancia recorrida, completa la Tabla 1.1

Intervalo de tiempo	Δt	$\Delta x = x_f - x_i = x_f$	Rapidez media de la variación $\frac{\Delta x}{\Delta t}$
De $t = 0$ a $t = 1$	1		
De $t = 1$ a $t = 2$	1		
De $t = 2$ a $t = 3$	1		
De $t = 3$ a $t = 4$	1		
De $t = 4$ a $t = 5$	1		
De $t = 5$ a $t = 6$	1		
De $t = 6$ a $t = 7$	1		

TABLA 1.1

c) ¿La rapidez media de la variación es creciente o es decreciente? ¿Se corresponde con tu respuesta al inciso a?

Cuando tenemos una función que no es lineal, de acuerdo a lo analizado desde el curso de Matemáticas 4, tenemos una función que puede ser creciente o decreciente pero cuya rapidez instantánea de cambio es a su vez creciente o decreciente. Podemos identificar, por ejemplo en la gráfica de la función de que se trate, si la rapidez instantánea de cambio es creciente o decreciente pero con lo que hemos estudiado hasta el momento no es posible determinar el valor de la rapidez instantánea de cambio en un punto determinado y sólo podemos establecer el valor de la rapidez promedio de cambio en un intervalo determinado.

Secuencia Didáctica 2

- Cuantificando la rapidez instantánea de cambio



Hasta aquí se ha podido extraer información cualitativa asociada a diversos tipos de situaciones variacionales y particularmente de la rapidez de cambio. En el caso de la variación lineal se determinó la constancia de dicha rapidez y a partir de la relación funcional $y = b + mx$ se obtuvo que $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$, cuyo valor se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta correspondiente. Ahora el objetivo es extender este procedimiento para cuantificar la magnitud de la razón instantánea de cambio al caso continuo de la variación no lineal.

ACTIVIDAD 1 Movimiento uniformemente acelerado

SD2-B1

1. Considera la situación en la cual un objeto es lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de $20\ m/s$ desde el suelo. Si tienes acceso a internet, abre el applet Tiro parabólico para simular este lanzamiento, disponible en www.appletscobach.mat.uson.mx. Tomado en cuenta la ecuación $x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2$ y consideramos, para efectos prácticos, que la aceleración debido a la gravedad es de $9.8\ m/s$, la ecuación que expresa la altura del objeto en términos del tiempo, es $x_f = 20t - 4.9t^2$. Para seguir la notación usual de los cursos de física, esta ecuación se puede escribir como $s = 20t - 4.9t^2$, en la que se ha usado la letra s en lugar de x_f.

   a) Con la información anterior describe cualitativamente el comportamiento de la velocidad del objeto durante el movimiento, considerando la posición s y lo que sucederá con la velocidad conforme transcurre el tiempo.

b) Haz una gráfica de posición contra tiempo que describa este comportamiento

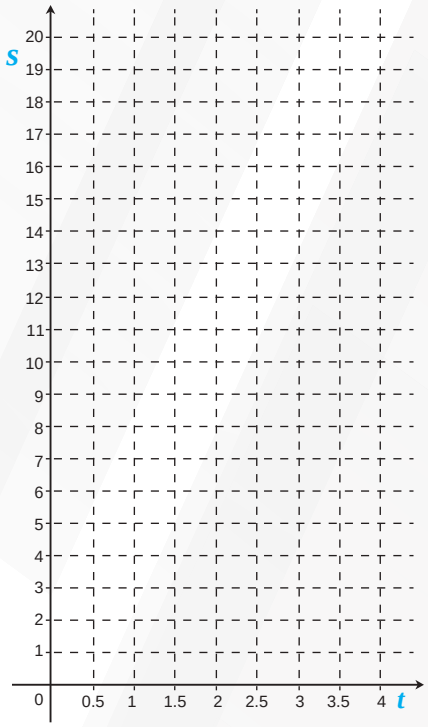


FIGURA 1.4

c) Puesto que sabemos que la velocidad cambia en el tiempo$t$ ¿cómo piensas que podríamos medir la velocidad exacta en $t = 1\ seg$?

En el caso del movimiento uniforme (a velocidad constante) se puede medir la velocidad usando el cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ lo que supone la información de las posiciones en dos instantes correspondientes.

d) En la situación que se está analizando ¿Tiene sentido usar este cociente para medir la velocidad en el instante pretendido?

e) Mientras que el objeto asciende la velocidad decae continuamente. Esto significa que poco antes del primer segundo la velocidad es mayor y poco después la velocidad es menor. Si consideramos que $v(t)$ es la velocidad del objeto en cualquier tiempo, completa la tabla 1.2 y contesta lo que se te pide.

Intervalo de tiempo	Δt	$\Delta x = x_f - x_i = x_f$	Rapidez media de la variación $\frac{\Delta x}{\Delta t}$
De $t = 0.1$ a $t = 1$	0.9		
De $t = 0.3$ a $t = 1$	0.7		
De $t = 0.5$ a $t = 1$	0.5		
De $t = 0.8$ a $t = 1$	0.2		
De $t = 0.9$ a $t = 1$	0.1		
De $t = 1$ a $t = 1.3$	0.3		
De $t = 1$ a $t = 1.2$	0.2		
De $t = 1$ a $t = 1.1$	0.1		

TABLA 1.2

f) ¿Cómo percibes la velocidad en lapsos cercanos a $t = 1\ seg$?

2. La idea intuitiva de que la velocidad pretendida tenga cierta proximidad con la que adquiere en tiempos cercanos a un instante determinado, supone una relativa constancia que permite abordar el problema a través de estimaciones utilizando el mismo cociente para el caso uniforme. Para dar un punto de vista diferente considera las siguientes figuras.

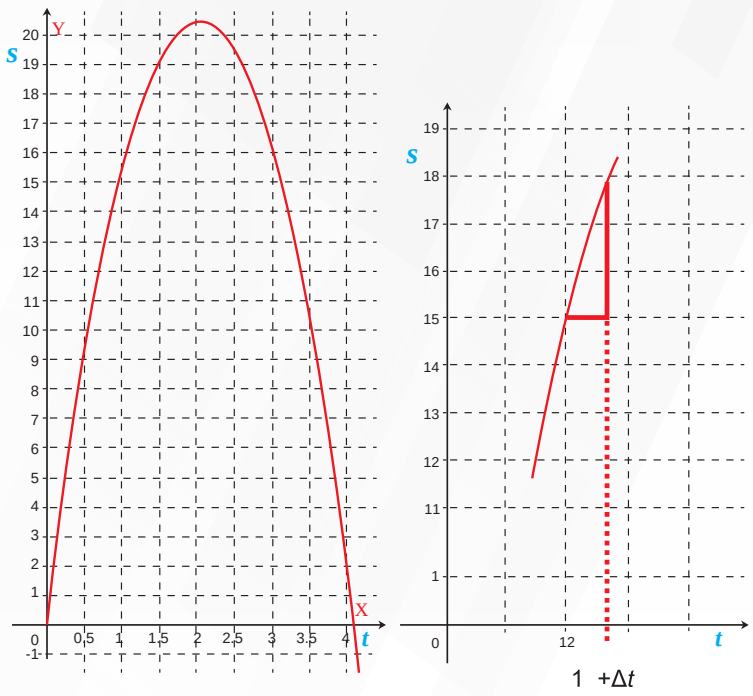


FIGURA 1.5

A la izquierda se presenta la gráfica de la posición, la cual es una parábola, y a la derecha una porción ampliada de la misma pero en el intervalo de tiempo $1 \leq t \leq 1 + \Delta t$ en donde además se ha dibujado un triángulo cuyo cateto horizontal y vertical son los cambios de tiempo y posición respetivamente. Si asumimos que la hipotenusa representa un movimiento uniforme alternativo de otro objeto

a) ¿Cuál es su velocidad de acuerdo a la figura?

b) ¿Cómo percibirías la hipotenusa y el arco parabólico en el caso de que Δt fuese pequeño?

c) ¿Cómo relacionarías en ese caso ambos movimientos?

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 Velocidad promedio

SD2-B1

Si bien la velocidad cambia a lo largo del intervalo dado, tiene sentido estimarla utilizando tiempos pequeños alrededor del primer segundo. Si consideramos el intervalo $1 \leq t \leq 1.5$ calculamos

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \frac{(20(1.5) - 4.9\,(1.5)^2) - (20(1) - 4.9\,(1)^2)}{1.5 - 1} = \frac{3.85}{.5} = 7.7$$

De modo que podemos decir que $v\,(1) \approx 7.7\ m/s$. Pero el problema radica en analizar qué tanto más pequeño debemos elegir dicho intervalo para capturar con exactitud el valor de la velocidad que queremos encontrar. Para continuar avanzando diremos que el cociente anterior es llamado velocidad promedio y podemos reescribirlo como

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s\,(1 + .5) - s\,(1)}{.5}$$

Si además consideramos a Δt como la variable con la que hay que trabajar, la velocidad promedio en el intervalo $1 \leq t \leq 1 + \Delta t$ seria:

$$velocidad\ promedios = \frac{s\,(1 + \Delta t) - s\,(1)}{\Delta t}$$

a) Con esta información completa la siguiente tabla.

$1 \leq t \leq 1 + \Delta t$	Δt	Velocidad promedio
$1 \leq t \leq 1.5$		
$1 \leq t \leq 1.3$		
$1 \leq t \leq 1.1$		
$1 \leq t \leq 1.01$		
$1 \leq t \leq 1.001$		
$1 \leq t \leq 1.0001$		
$1 \leq t \leq 1.00001$		
$1 \leq t \leq 1.000001$		

TABLA 1.3

b) ¿Observas alguna tendencia mientras el lapso es cada vez más pequeño?

c) La tabla anterior considera intervalos de tiempo posterior al primer segundo, es decir, positivos. De forma análoga podemos utilizar tiempos anteriores tomando el signo negativo de los mismos. Ahora discute la misma pregunta anterior con la siguiente tabla.

$1+\Delta t \leq t \leq 1$	Δt	**Velocidad promedio**
$.95 \leq t \leq 1$		
$.97 \leq t \leq 1$		
$.99 \leq t \leq 1$		
$.999 \leq t \leq 1$		
$.9999 \leq t \leq 1$		
$.99999 \leq t \leq 1$		
$.999999 \leq t \leq 1$		

TABLA 1.4

Después de los razonamientos anteriores es posible dar como conclusión que la velocidad instantánea buscada es $v\,(1) = 10.2$ *m/seg*. En realidad el procedimiento numérico utilizado permite percibir la idea de que el comportamiento tendencial de las velocidades promedio en intervalos cada vez más pequeños nos lleva a la velocidad instantánea del movimiento no uniforme.

d) Revisemos otro caso particular. Cuando el objeto deja de ascender la velocidad se anula y como vemos en la gráfica de la posición, eso sucede en t = *2.040 seg*. Verifica lo anterior mediante el comportamiento tendencial de las velocidades promedio llenando las siguientes tablas.

$2+\Delta t \leq t \leq 2$	Δt	*Velocidad promedio* $= \frac{s\,(2+\Delta t) - s\,(2)}{\Delta t}$
$1.95 \leq t \leq 2$		
$1.97 \leq t \leq 2$		
$1.99 \leq t \leq 2$		
$1.999 \leq t \leq 2$		
$1.9999 \leq t \leq 2$		
$1.99999 \leq t \leq 2$		
$1.999999 \leq t \leq 2$		
$1.9999999 \leq t \leq 2$		

TABLA 1.5

$2 \leq t \leq 2 + \Delta t$	Δt	*Velocidad promedio* $= \frac{s\,(2+\Delta t) - s\,(2)}{\Delta t}$
$2 \leq t \leq 2.5$		
$2 \leq t \leq 2.3$		
$2 \leq t \leq 2.1$		
$2 \leq t \leq 2.01$		
$2 \leq t \leq 2.001$		
$2 \leq t \leq 2.0001$		
$2 \leq t \leq 200001$		
$2 \leq t \leq 2.000001$		

TABLA 1.6

ACTIVIDAD 3 Expresión analítica de la velocidad promedio

SD2-B1

1. Para avanzar en el objetivo de cuantificar la velocidad instantánea nos apoyaremos ahora en el método algebraico. Empecemos por representar la velocidad promedio para cualquier tiempo t_0

$$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

Puesto que $s = 20t - 4.9\,t^2$ tenemos que

$$s(t_0+\Delta t) = 20(t_0+\Delta t) - 4.9(t_0+\Delta t)^2$$
$$s(t_0) = 20t_0 - 4.9\,t_0^2$$
$$s(t_0+\Delta t) - s(t_0) = 20 - 9.8\,t_0 - 4.9(\Delta t)^2$$

Luego

$$\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = \frac{20\,\Delta t - 9.8\,t_0\Delta t - 4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 20 - 9.8\,t_0 - 4.9\,(\Delta t)^2$$

Por tanto ahora contamos con una expresión algebraica para determinar la velocidad promedio en términos de t_0 *y de* Δt .

$$velocidad\ promedio = 20 - 9.8\,t_0 - 4.9\,(\Delta t)^2$$

Así es posible analizar la situación desde un enfoque nuevo. En efecto si hacemos que Δt se haga pequeño el término $4.9\,(\Delta t)^2$ también lo será por lo que podemos concluir que dicha expresión tenderá al valor $20 - 9.8\,t_0$. Por lo tanto podemos establecer que la velocidad instantánea en este caso es

$$v(t_0)20 - 9.8\,t_0$$

Por ejemplo:

$$v(1) = 20 - 9.8(1) = 10.2\ m/seg \quad v(2) = 20 - 9.8(2) = 0.4\ m/seg$$

a) Describe el comportamiento de la velocidad a partir de la ecuación anterior.

b) Calcula la velocidad del objeto en t= .5, 1.5, 2.5, 3, y 4 *seg*..

c) Dibuja la gráfica de la velocidad respecto al tiempo y relacione dicha gráfica con la de la posición.

Cierre

ACTIVIDAD 4 La velocidad instantánea como límite de la velocidad promedio

SD2-B1

Si admitimos que al tomar intervalos de tiempo cada vez más pequeños la velocidad promedio se aproxima arbitrariamente a un valor bien definido diremos que este valor es el límite del proceso descrito. Para representar dicho proceso escribimos de la siguiente forma:

$$\lim_{\Delta t \to 0} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

Donde el símbolo "$\lim_{\Delta t \to 0}$" se lee como "el limite cuando delta *t* tiende a cero" que aplicado a la expresión anterior significa tomar incrementos de tiempo cada vez más pequeños hasta capturar el valor tendencial de la velocidad promedio. Este límite es lo que se conoce como velocidad instantánea.

Si un objeto se mueve en línea recta de tal forma que su posición en cualquier tiempo *t* está dada por $s = s(t)$ la velocidad instantánea en cualquier tiempo t_0 esta dada por

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

a) Usa la expresión anterior para representar la velocidad de un móvil en $t = 0$, $t = .5$, $t = 1.5$ y $t = 3$ seg

b) Decir que $\Delta t \to 0$ expresa solo el proceso de hacer pequeño el incremento de tiempo. ¿Por qué piensas que Δt no puede ser nulo?

ACTIVIDAD 5 La razón instántanea de cambio en otros contextos

SD2-B1



Para los llamados registros de un drenaje, de un sistema de cableado eléctrico subterráneo, de fibra óptica en una red de cómputo y otros más, frecuentemente se hacen estructuras metálicas de forma cuadrada, que son la base para las tapas de concreto con las cuales se sellan. Al fabricarse los cuadros metálicos se les da una determinada dimensión, pero el metal se dilata o se contrae con los cambios de temperatura, lo cual puede ocasionar problemas.

Estas situaciones y otras de carácter matemático, conducen a considerar útil estudiar la rapidez instantánea de cambio del área de un cuadrado al variar la longitud de su lado.

1. Para hacer este análisis se seguirá el mismo procedimiento que se ha usado en los casos anteriores, pero de una manera más resumida.

   a) Expresa analíticamente el área $A\ (l)$ de un cuadrado como una función de la longitud l de su lado.

   b) Si la longitud del lado del cuadrado se modifica en una cantidad Δl (que puede ser positiva o negativa, ¿cuál es el nuevo valor del área del cuadrado?

   c) Obtén una expresión para medir la variación $A\ (l + \Delta l) - A\ (l)$ del área del cuadrado.

d) Obtén ahora una expresión para determinar el cambio promedio del área al variar la longitud ¿cómo se hace esto?

Hasta este momento se espera que el resultado obtenido pueda escribirse como

$$\frac{\Delta A}{\Delta l} = 2l + \Delta l \text{ , con la condiciónde que } \Delta l \neq 0$$

Dado que $\Delta l \neq 0$, la razón promedio de cambio será mayor o menor que $2l$, y, por otra parte se puede observar que si Δl se hace cada vez más pequeño, $2l + \Delta l$ se parecerá cada vez más a $2l$.

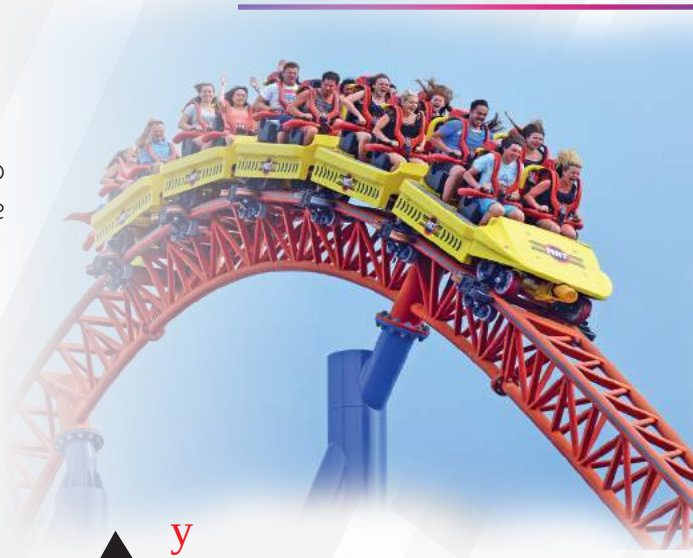
e) Con estas consideraciones, obtén la rapidez instantánea de cambio del área con respecto a l, mediante el cálculo de:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta l} = \lim_{\Delta t \to 0} 2l + \Delta l$$

1. El volumen $\boldsymbol{V}$ de un cubo depende de su arista.

   a) Escribe el volumen en dependencia de la arista.

   b) Obtén una expresión para determinar la rapidez instantánea de cambio del volumen del cubo con relación a la arista.

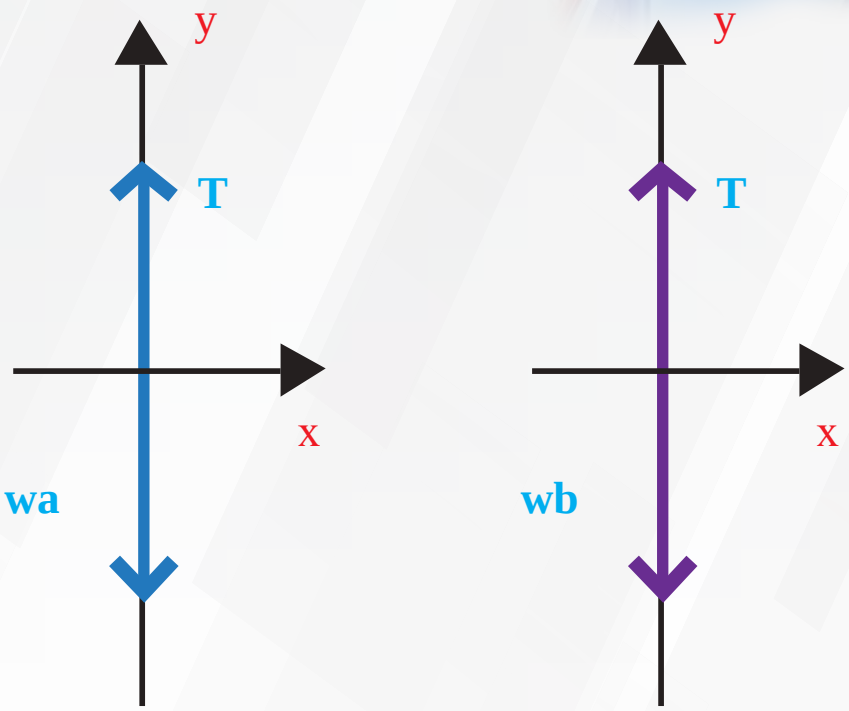


Secuencia Didáctica 3

• La rapidez instantánea de cambio y la pendiente de la recta tangente

Inicio

Trabajo individual



ACTIVIDAD 1

Razón instantánea de cambio y la pendiente de la recta tangente a la curva de posición de un objeto.

SD3-B1

1. Cuando un objeto se mueve con velocidad constante la gráfica de posición es una línea recta y su velocidad equivale a la medida de su inclinación o pendiente de la recta. Por tanto en el caso de que la velocidad sea positiva la posición es creciente y la recta correspondiente tendrá la pendiente positiva y cuanto mayor sea la velocidad (crecimiento más rápido de la posición) más inclinada será la recta.

a) Observa las siguientes figuras, las cuales representan posición contra tiempo y ordénelas de acuerdo a sus velocidades, considerando las de menor a mayor velocidad.

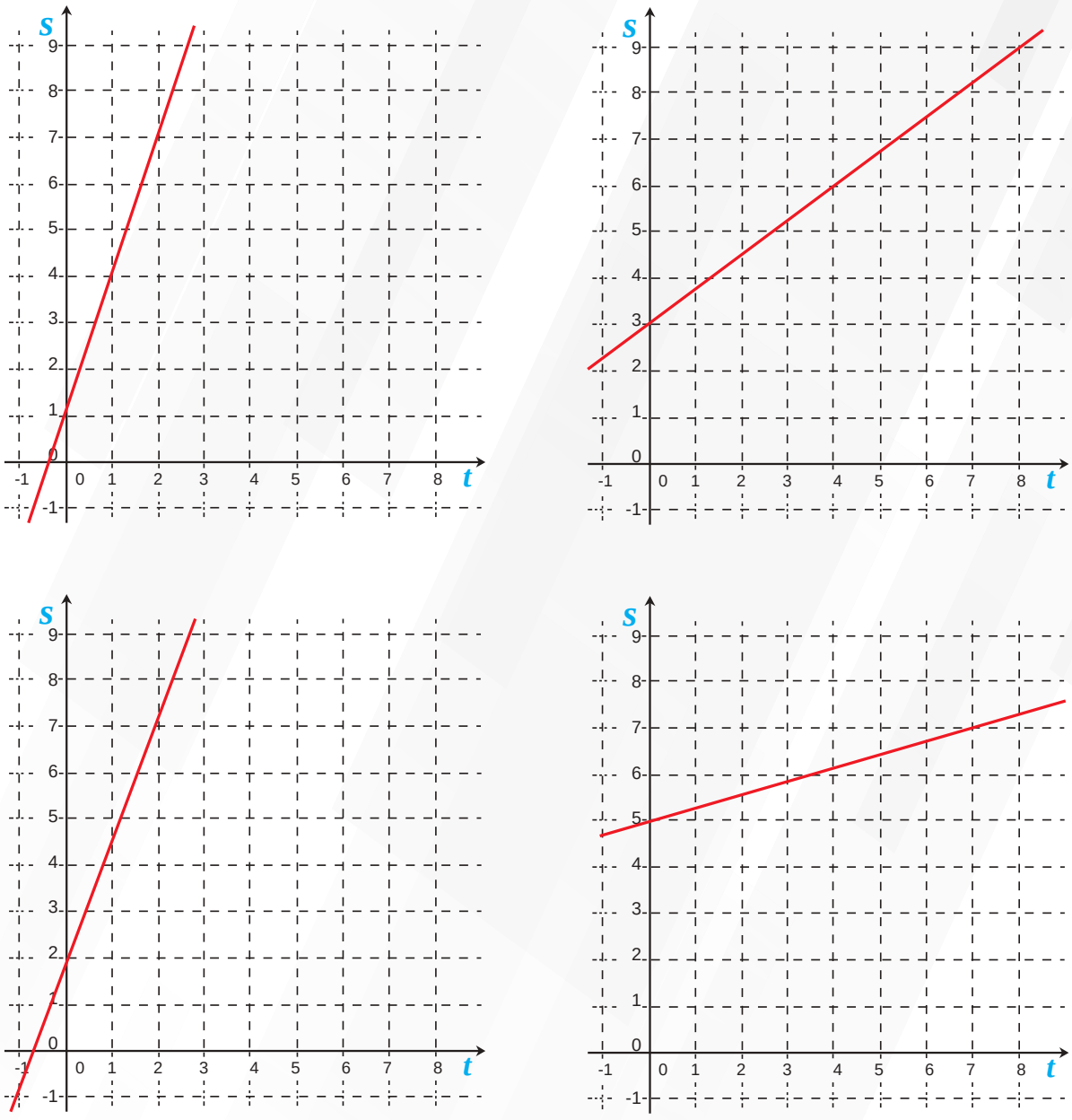


FIGURA 1.6

Análogamente en el caso de que la velocidad sea negativa pero constante, la posición decrece y la recta correspondiente tendrá la pendiente negativa y cuanto mayor sea su velocidad en valor absoluto, el valor de la pendiente será menor y la recta estará más cercana al eje de las ordenadas.

c) Observa las siguientes figuras y ordene las situaciones representadas, poniéndolas de menor a mayor velocidad.

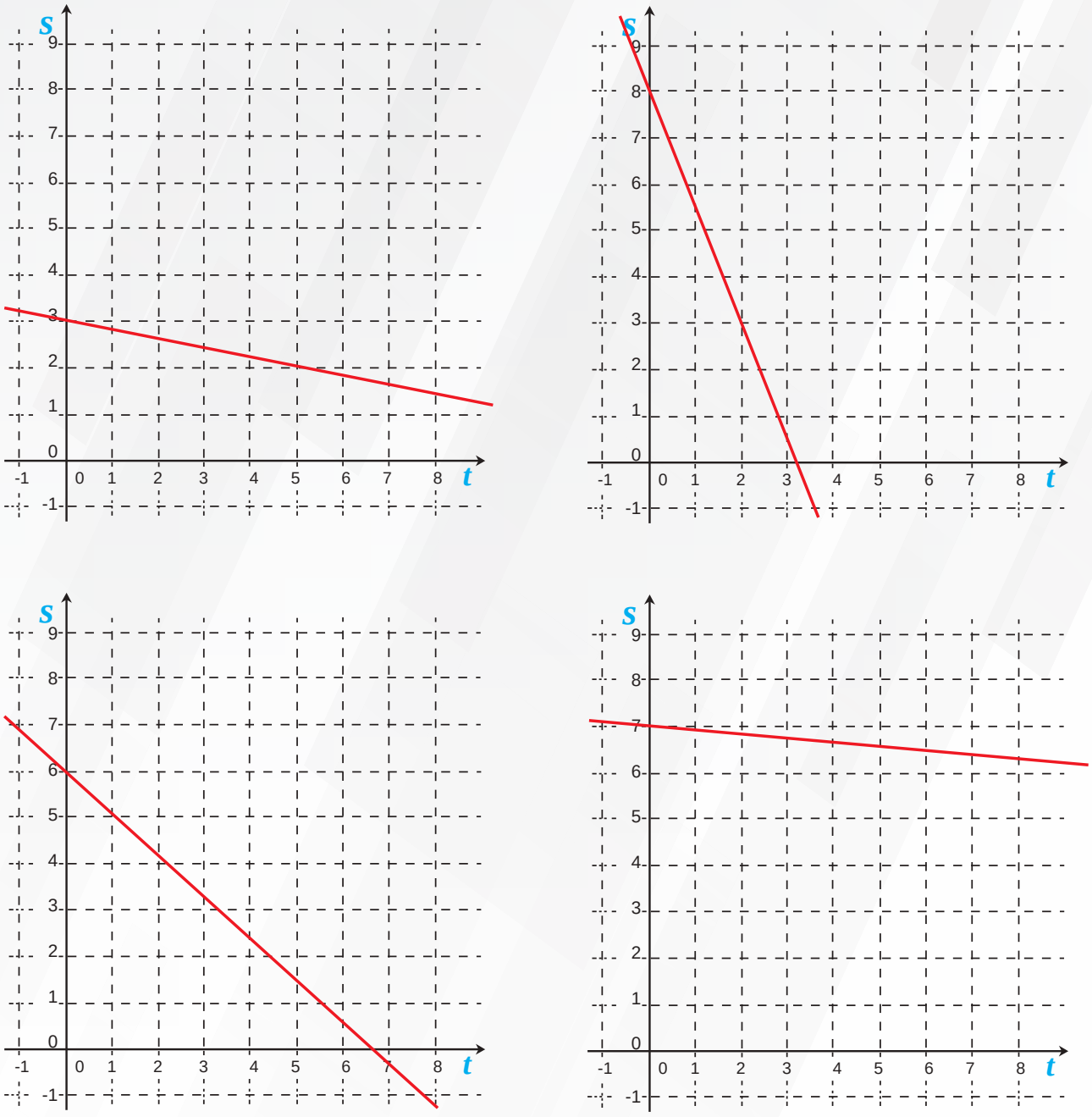


FIGURA 1.7

En el caso en el que la velocidad cambie continuamente, la gráfica de posición deberá inclinarse en correspondencia a esta variación de velocidad, pero ahora no se trata de una línea recta. Las siguientes figuras muestran la gráfica de posición de un objeto con velocidad variable. Identifica aquella en la cual:

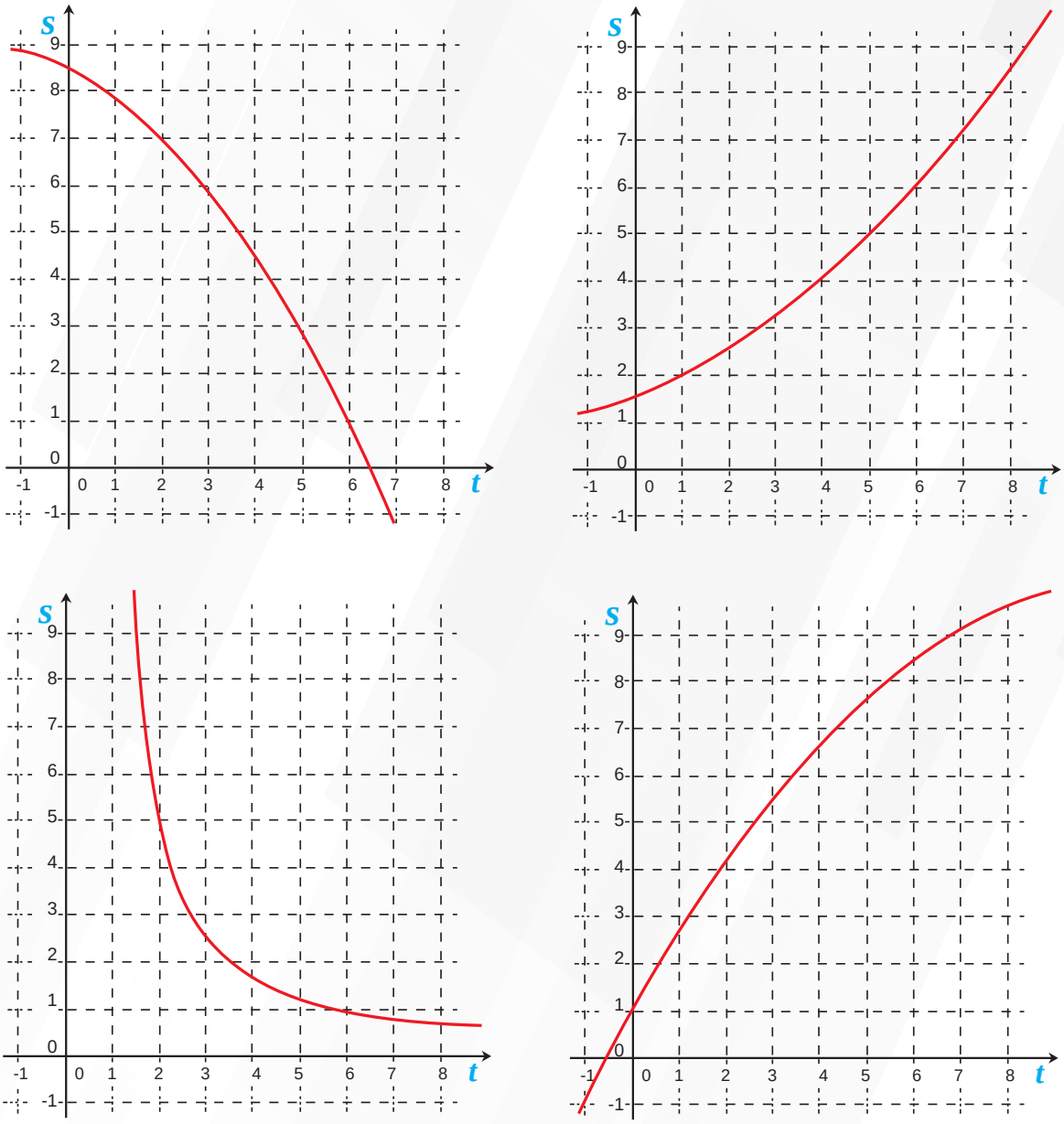


FIGURA 1.8

d) La velocidad es positiva y decreciente ¿qué pasa con la curva cuando la velocidad decrece?

e) La velocidad es positiva y creciente ¿qué pasa con la curva cuando la velocidad crece?

f) La velocidad es negativa y decreciente ¿qué pasa con la curva cuando la velocidad decrece?

g) La velocidad es negativa y creciente ¿qué pasa con la curva cuando la velocidad crece?

Desarrollo

ACTIVIDAD 2

SD3-B1

La velocidad instantánea como medida de inclinación de la curva de posición en un punto

1. Considera un movimiento en el cual el objeto se mueve con velocidad positiva y creciente. Una gráfica de posición para este caso se muestra a continuación

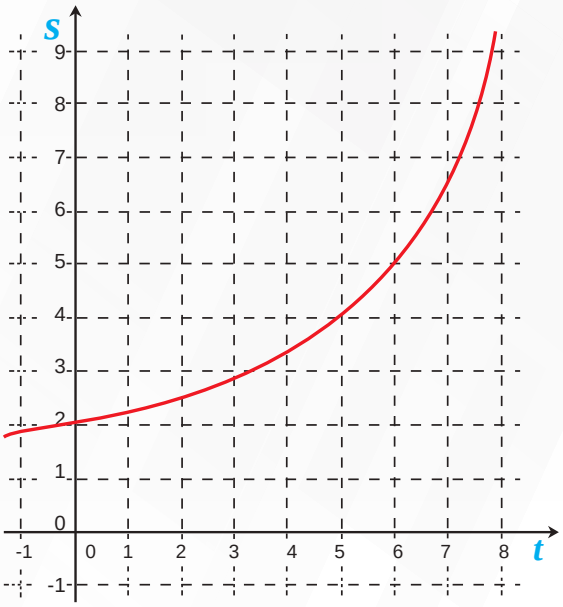


FIGURA 1.9

Considera ahora el movimiento simultáneo de otro objeto con velocidad constante, que pasa por el punto $P(t_0, s(t_0))$ y su velocidad coincide con la velocidad instantánea del movimiento original en t_0

a) Dibuja en el mismo sistema de coordenadas de la gráfica anterior la gráfica de posición del movimiento uniforme (a velocidad constante).

b) ¿Cómo se interpreta la pendiente de la recta con relación a la situación presentada en la gráfica del movimiento con velocidad variable, en el punto $P(t_0, s(t_0))$?

El problema de determinar la pendiente de una curva de posición en puntos individuales precisamente equivale a determinar la velocidad instantánea en esos puntos. Para tener una idea precisa de esta equivalencia en la figura siguiente se muestran los puntos P y Q en los instantes t_0 y $t_0 + \Delta t$. Observa que la recta que une a dichos puntos, que llamaremos recta secante, tiene pendiente igual a la velocidad promedio $\frac{\Delta A}{\Delta l}$.

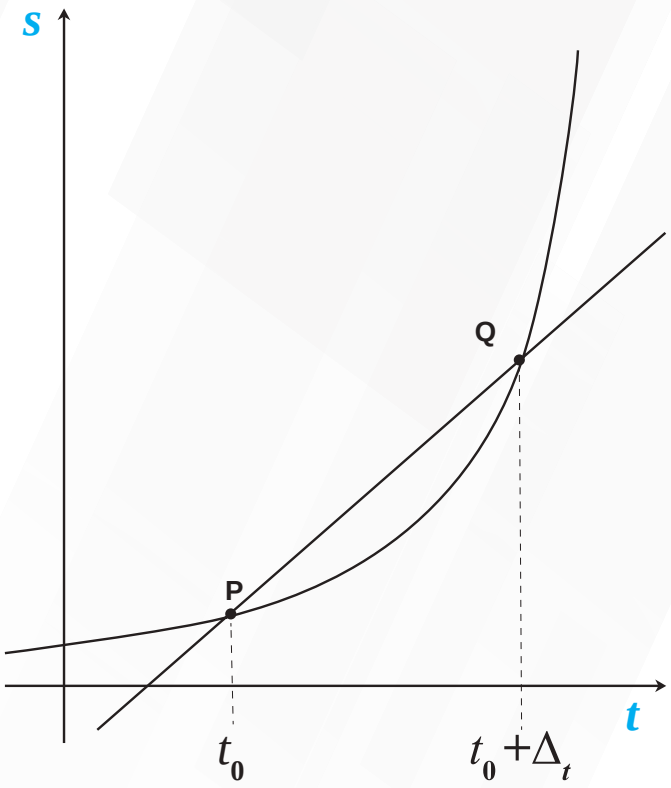


FIGURA 1.10

En la figura 1.11 se puede observar que al hacer Δt cada vez más pequeño el punto Q se mueve hacia el punto P lo que hace que la recta secante gire en el sentido del reloj tendiendo a una posición límite definida por la recta que pasa exactamente por el punto P con pendiente igual al valor límite de las velocidades promedio o velocidad instantánea. A esta última se le llama la recta tangente a la curva de posición en el punto P.

Por lo anterior se puede decir que la velocidad instantánea se interpreta como la medida de inclinación de la curva de posición en un punto determinado y que a su vez equivale geométricamente a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto, es decir:

$$vt\,(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

$=$*pendiente de la recta tangente a la curva posición en el punto* $(t_0, s(t_0))$

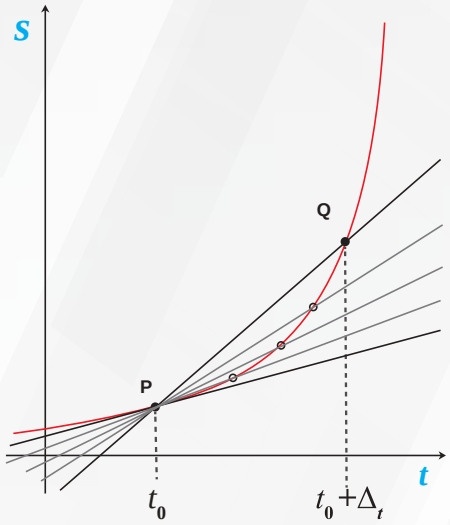


FIGURA 1.11

c) Usa la siguiente figura para determinar la velocidad instantánea del objeto cuya curva de posición se especifica.

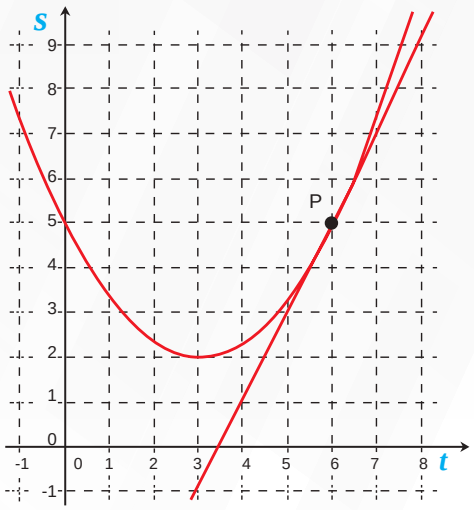


FIGURA 1.12

Las situaciones que se han propuesto hasta este momento han puesto el énfasis en dos aspectos en los cuales, al tener una función, que en forma general se escribe como $y = f(x)$, ha aparecido la expresión $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, la cual puede interpretarse de las siguientes dos maneras: como la razón instantánea de cambio de y con respecto a x o como una función que permite calcular las pendientes de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$. En los problemas siguientes se profundizará en esta segunda interpretación.

1. Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$, en el punto $x = 1$.

   a) De acuerdo a tus conocimientos de geometría analítica, ¿qué datos se necesitan para determinar la ecuación de una recta? Escribe la fórmula para la ecuación de una recta, conocidos un punto y su pendiente.

   b) ¿Cuáles de esos datos son conocidos o se pueden obtener?

   c) Para la determinación de la pendiente de la recta tangente, observe la siguiente gráfica y haga lo que se solicita.

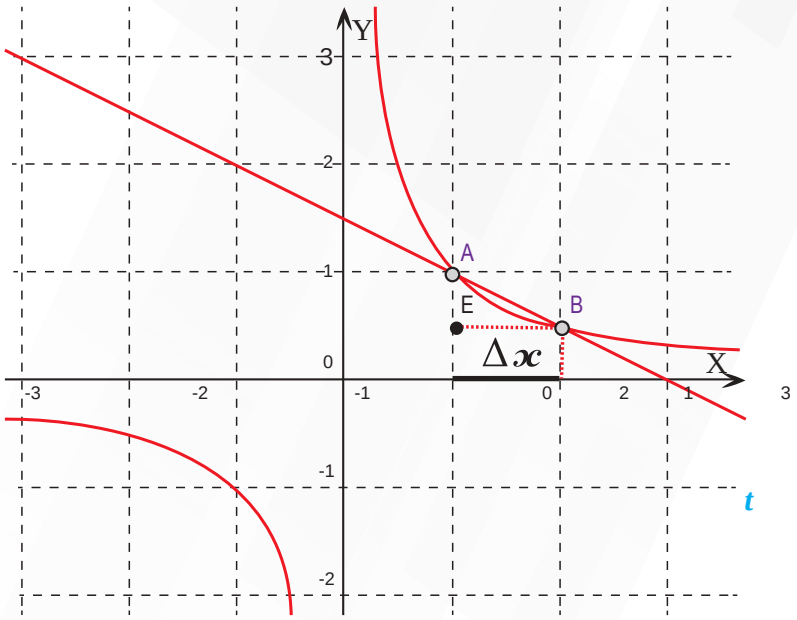


FIGURA 1.13

d) Obtenga las coordenadas de los puntos donde $y=1$ y $x= 1 + \Delta x$.

e) Obtén el valor de $\Delta y= f(1 + \Delta x) - f(1)$

f) Obtén el valor de valor de la pendiente de la recta secante que se muestra en la figura 1.13

g) Observa ahora la Figura1.14, ¿qué sucede con las rectas secantes conforme el valor de Δx se hace cada vez más pequeño?

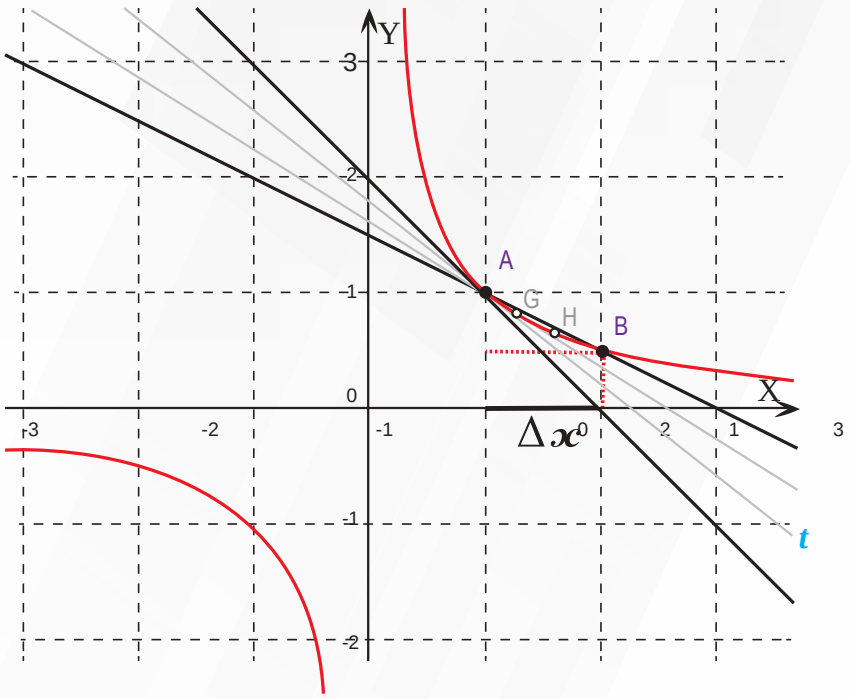


FIGURA 1.14

h) Obtén el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ en $x = 1$.

i) Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ en $x = 1$.

2. Siguiendo un procedimiento similar al usado en el caso anterior, obtén ahora una expresión general para las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$. Consulta el Applet Tangentes, disponible en www.appletscobach.mat.uson.mx.

3. Obtén una expresión general para obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en un punto $(x, f(x))$ cualquiera.

a) Considerando que el valor de la variable x se modifica en una cantidad Δx, grafica una recta secante, en la siguiente figura, que pase por los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ y .

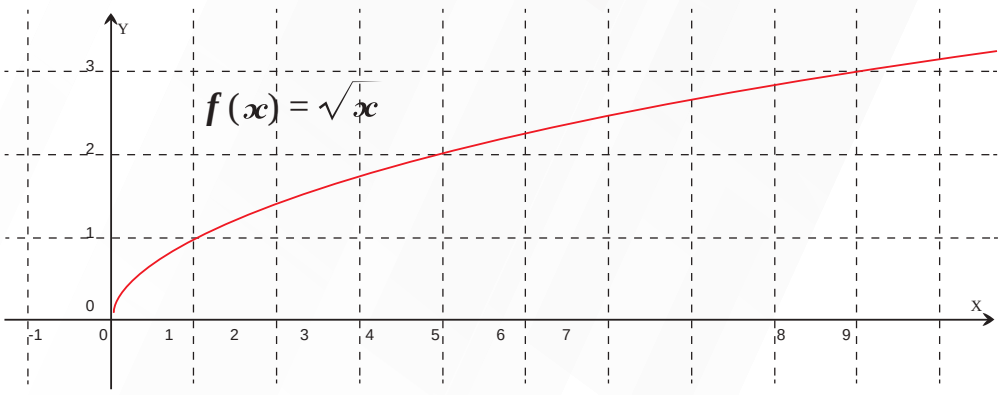


FIGURA 1.15

b) ¿Cuál es el valor de la pendiente de esta recta secante?

Para resolver el inciso b se debe obtener el valor del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, con la consideración de que $\Delta x \neq 0$. Con las manipulaciones realizadas este cociente debe ser $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$. Sin embargo, manipular esta expresión puede ser difícil por la existencia de la raíz cuadrada.

c) Una forma de salvar la situación que se utiliza con frecuencia es multiplicar "arriba y abajo" por el conjugado del numerador, a saber, $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Procede de esta manera y simplifique la expresión obtenida.

d) Para concluir obtén el valor de $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Cierre

ACTIVIDAD 1

SD3-B1



Con lo abordado en las actividades de este bloque, se han analizado dos aspectos de la mayor trascendencia en el estudio de diversos fenómenos de la matemática, la física, la química, la economía y otras ramas del saber humano: la rapidez instantánea de cambio y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función.

El estudio de estas dos situaciones condujo en la segunda mitad del Siglo XVII a la invención del cálculo diferencial e integral. La invención del cálculo se debe a la obra de dos de los más grandes sabios y científicos de la historia de la humanidad: Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz.

Trabajando de manera independiente ambos científicos construyeron formas de resolver estos problemas.

Dado que el procedimiento que se sigue para determinar el valor de la rapidez instantánea de cambio es el mismo que se sigue para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función, se hace necesario designar a ese procedimiento y a ese objeto matemático con un nombre, que permita identificarlo.

Si tenemos una función, que de forma general denotamos como $y = f(x)$, entonces es posible obtener otra función que permite, por una parte, determinar la rapidez instantánea de cambio de y con respecto a x y, por otra parte, las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función.

A esta nueva función se le denomina ***función derivada*** o simplemente ***derivada*** de $y = f(x)$ y se le puede denotar de diversas maneras, siendo las más usuales $y = f'(x)$, y' o $\frac{dy}{dx}$

De acuerdo a lo estudiado hasta este momento, se tiene que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En las actividades que se desarrollan en este módulo, frecuentemente aparecerá la necesidad de hacer cálculos que involucran la determinación de límites como los que han aparecido hasta el momento. Por esa razón es necesario que adquieras habilidad para ello y, aunque el límite siempre lo calcularemos para obtener la derivada de una función, que será la oportunidad para ejercitarte en ello, se enuncian a continuación algunas de sus propiedades, las cuales te serán de utilidad y deberás aplicarlas siempre que sea necesario.

1. Si $f(x)$ es una función constante, esto es si $f(x)=c$, con c una constante, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$$

2. Si $f(x)$ y $g(x)$, son dos funciones cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

3. Si $f(x)$ y $g(x)$, son dos funciones cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

4. Si $f(x)$ y $g(x)$, son dos funciones cualesquiera, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Siempre que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

ACTIVIDAD 2

SD3-B1

Siguiendo este procedimiento es posible determinar la función derivada de muchas funciones. En el caso de las funciones lineales, cuya gráfica es una línea recta, es suficiente con determinar su pendiente.

1. Determina la derivada de la función lineal en cada uno de los siguientes casos.

a) $f(x) = -9$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = 6 - 3x$

d) $f(x) = 12 + \frac{x}{2}$

e) $f(x) = \frac{-x + 1}{7}$

f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = x^3$

h) $f(x) = \sqrt{x}$

i) Ahora, a partir de observar las siguientes gráficas, determina la derivada en cada caso.

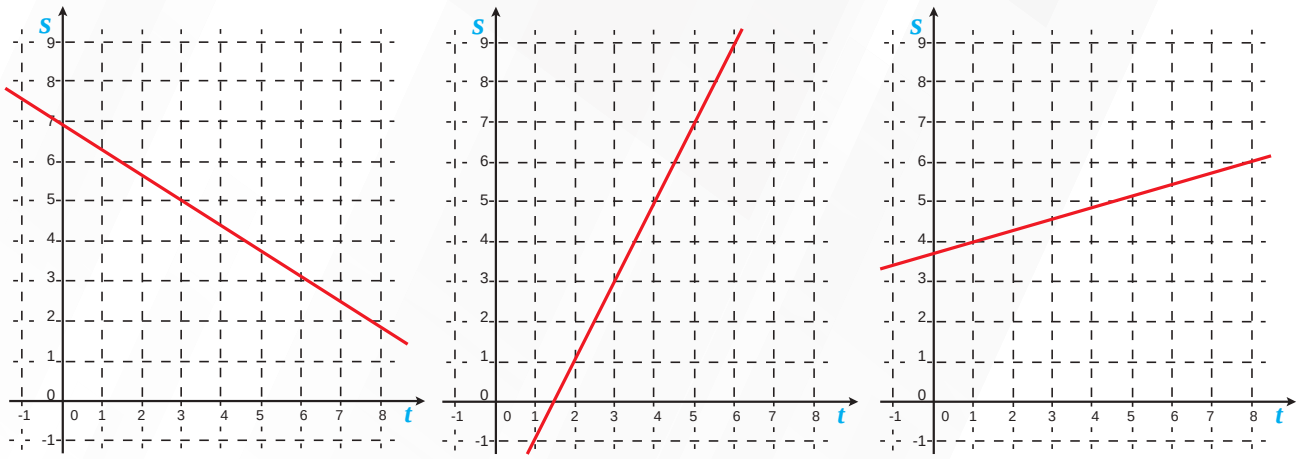


FIGURA 1.16

Observando estos ejercicios y, por otra parte, que en las actividades previas se obtuvieron las derivadas de otras funciones, las cuales, salvo los nombres de las variables, son las siguientes:

- Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$
- Si $f(x) = x^2$, entonces $f'(x) = 2x$
- Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$
- Si $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ entonces $f(x) = -\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
- Si $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2. ¿Qué regularidad se observa en este caso?

Si se continúa este proceso para otras potencias, los resultados serán similares, por lo cual es posible establecer como regla general que **la derivada de la función potencia** $f(x)\ x^n$ **es la función potencia** $f'(x) = nx^{n-1}$

3. Determina la función derivada en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = x^9$

c) $f(x) = \frac{1}{x^{-6}}$

d) $f(x) = (x^5)^4$

e) $f(x) = (x^5)^2$

f) $f(x) = x^7x^3$

d) Determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$ para los valores $x = 1, 2$ y 3. Dibuja la gráfica y las rectas tangentes en un mismo sistema de coordenadas.

e) Comenta lo que sucede en $x = 0$ en el caso anterior.

4. Determina la función derivada en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$

d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{4}}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Para evitar las complicaciones que supone el empleo algebraico descrito para el cálculo de las derivadas existen afortunadamente otras reglas de derivación que, una vez dominadas, hacen relativamente simple la obtención de $f\,'(x)$, aún cuando la función a derivar tenga un aspecto algebraico

ACTIVIDAD 3 Propiedades básicas de la derivada.

SD3-B1

complicado. En esta actividad se mencionarán dos propiedades básicas sin recurrir a los detalles técnicos y postergaremos las otras reglas para el bloque final.

Considere la función $y = f(x) + c$. Geométricamente se interpreta como una traslación vertical de la gráfica de $f(x)$ de acuerdo al valor de c. Luego, ambas curvas tienen exactamente la misma forma, es decir, la pendiente no cambia en cada uno de sus puntos. Así que

$$(f(x) + c)' = f'(x)$$

puesto que la derivada de una función constante es cero reescribimos lo anterior como sigue

$$(f(x) + c)' = f'(x) + (c)'$$

nota que hubiera sido indistinto si en lugar de suma fuera resta. Esto sugiere la primera propiedad fundamental que generaliza la fórmula anterior reemplazando c por una función no constante $g(x)$ y se enuncia como sigue:

Derivada de la suma

Si existen las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ entonces

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

Ejemplo. Para la función $h(x) = x^2 + x^3$ la derivada correspondiente es

$$h'(x) = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2$$

Finalmente al considerar el producto por una constante $cf(x)$, geométricamente significa que la pendiente al definirse en términos de la razón de incrementos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, su valor se afectará en un factor c a través del numerador. En particular si $f(x) = mx + b$ tenemos

$$cf(x) = c(mx + b) = cmx + cb$$

Luego, la pendiente o derivada de ésta última función lineal es cm. Dado que también $f'(x) = m$ llegamos a que:

$$(cf(x))' = cm = cf'(x)$$

Así se llega a una segunda propiedad importante.

Derivada del producto por una constante

Si existe $f'(x)$ entonces $[c\,f(x)]' = cf'(x)$

(Trabajo individual)

1. Determina la derivada de las siguientes funciones

   a) $f(x) = 8x^5 + 7x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x + 4$

   b) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x}$

   c) $f(x) = \frac{19}{x^2} + \frac{1}{x} - 20$

2. Utiliza la derivada para averiguar los puntos en la gráfica de $f(x) = 12x - 3x^3$ donde las tangentes son horizontales



SERIE DE PROBLEMAS

1. Un cuerpo se deja caer libremente desde una altura de *150 m*. Su posición, mientras cae, se puede determinar mediante la expresión $s(t) = 150 - 4.9\,t^2$. Usando el procedimiento de cálculo de límites, encuentra una expresión para el cálculo de su velocidad en cualquier instante de tiempo *t*.

2. Usando el procedimiento de cálculo de límites, encuentra una expresión para calcular las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función $y = x^2 + x$.

En los problemas siguientes, salvo que se especifique lo contrario, se deben usar las reglas de derivación que se estudiaron en el bloque, sin necesidad de recurrir al procedimiento de los dos problemas anteriores.

3. El movimiento de un globo en ascenso es tal que la altura *h* en km está expresada en términos del tiempo por medio de la función $h\,(t) = .75 + \frac{\sqrt[3]{t}}{10}$. Determina la velocidad en $t = 8$ *seg*.

4. Se deja caer una piedra en un medio líquido de tal forma que su profundidad *p*, después de tocar la superficie, está dada por la ecuación $p\,(t) = 4t^2 + 2t - 1$. Determina la velocidad de la piedra en $t = 8$ *seg*.

5. Dos cuerpos se mueven en línea recta de tal forma que sus posiciones están dadas por las ecuaciones $s = 3t^2 - 5t + 1$ y $s = t^2 - 2t$. Determina el tiempo en el cual ambos objetos tendrán la misma velocidad.

6. La altura desde el suelo a la que llega un cohete de juguete lanzado hacia arriba está dada por $h\,(t) = -9.8\,t^2 + 32t + 100$.

   a) ¿En qué tiempo el cohete se detiene antes de su caída?

   b) ¿Cuál es la altura en ese tiempo?

7. Al girar una rueda en rotación el ángulo Θ en términos del tiempo esta determinado por medio de la expresión $\Theta\,(t) = 3 - 4.5\ + 5t^2$. Determina la velocidad angular cuando han trascurrido *2 seg*.

8. Un líquido se enfría desde una temperatura inicial de *80 °C* en un ambiente a temperatura constante de *20 °C*. La siguiente tabla proporciona valores de la temperatura *T* respecto al tiempo *t* medido en minutos.

t	T
0	80
3	63.4
6	50.2
9	39.6
12	32.1
15	27 .3
18	23.9

a) Indica el significado de $T'(9)$ especificando sus unidades.

b) Estima $T'(9)$ a través del cociente $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ indicando las unidades

c) ¿Cuál esperas que sea el valor al que $T'(t)$ se aproxima en un tiempo largo?

9. Un globo esférico se infla de modo que por cada segundo el radio aumenta un centímetro. Dado que el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3} + \pi r^3$ determina la razón de cambio promedio si:

   a) El radio cambia de $r = 3$ a $r = 3.1$

   b) El radio cambia de $r = 3$ a $r = 3.01$

   c) El radio cambia de $r = 3$ a $r = 3.001$

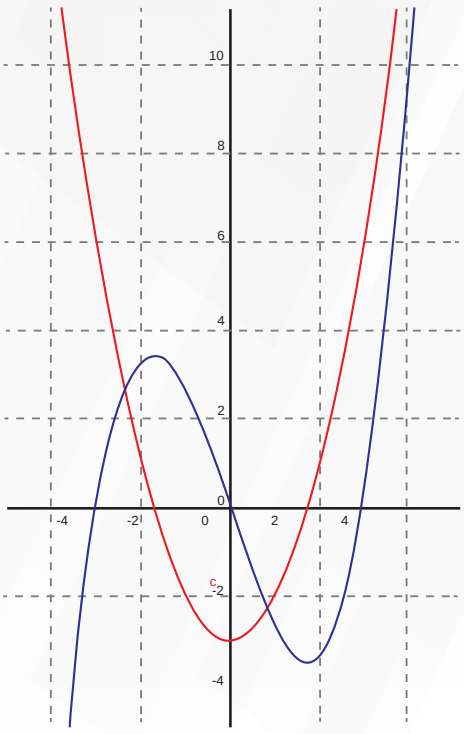
   d) ¿Cuál es la razón instantánea de cambio en $r = 3$ *seg?*

10. El lado de un cubo aumenta a razón de 1 *cm/ seg*. ¿Con qué razón cambia, respecto al tiempo, el área de su superficie en $r = 4$ *seg*?

11. A partir de la gráfica siguiente determina si la derivada es positiva, negativa o cero en los puntos señalados



12. Identifica en la siguiente pareja de gráficas, cuál representa a $y = f(x)$ y cuál a $y = f'(x)$. Argumenta tu elección.



13. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en los puntos señalados.

a) $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 1$ *en* $x = 1$

b) $f(x) = x^{2/3}$, *en* $x = 8$

c) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}$, *en* $x = 4$

14. Determina los puntos donde las rectas tangentes a las gráficas de las funciones indicadas son horizontales.

a) $f(x) = 7 + 3x - 9x^2$

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^3}{2} + 6x$

c) $f(x) = 6x^2 - 4x^3$





AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Qué entiendes por los siguientes términos: razón promedio de cambio, razón instantánea de cambio?

2. ¿Qué entiendes por pendiente de una recta secante a la gráfica de una función y qué por pendiente de la recta tangente en un punto a dicha gráfica?

3. ¿Qué relación existe entre los términos del punto 1 y el punto 2?

4. ¿Qué es la derivada de una función?

5. ¿Pudiste resolver los problemas de la serie de problemas del bloque? ¿Cuáles no? ¿Identificas las dificultades que tuviste al resolver algún problema?

6. Cuando tuviste alguna duda, ¿Pudiste explicarle a tus compañeros las dificultades que se te presentaron? Señale un caso.

7. Si un compañero te pide ayuda para resolver un problema o para entender mejor alguna parte del cuerpo del bloque ¿tienes facilidad para explicar tus ideas?

8. ¿Puedes usar algún tipo de software para hacer tratamientos numéricos o las gráficas que aparecen en el bloque? ¿Cuál y dónde aprendiste a usarlo?

MIS ANOTACIONES:

Bloque 2

18 Horas

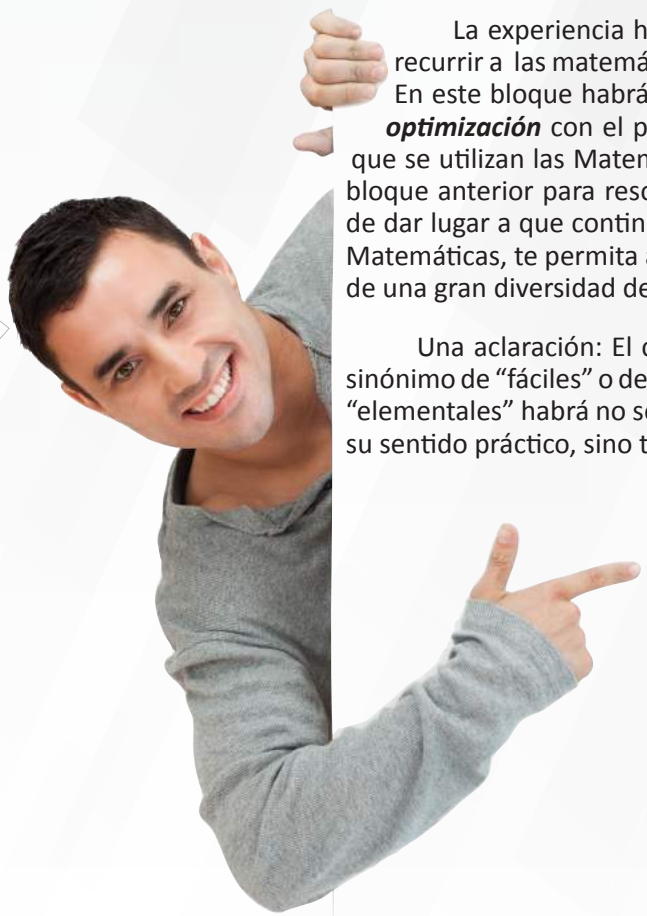
Problema de optimización



Introducción B-II

Es muy común encontrarse en la vida con situaciones en las cuales se hace necesario tomar la mejor decisión posible, o como es frecuente decirlo, la decisión óptima. En particular, tales problemas abundan en las distintas ramas de la economía, la ingeniería y la técnica.

Así, por ejemplo, en la industria es frecuente enfrentar la exigencia de producir la mayor cantidad posible de dispositivos con las mínimas pérdidas de material, o de fabricar piezas que sean lo más resistente posible y al mismo tiempo lo más ligero, de reducir los costos de producción economizando no solamente materia prima sino también combustibles, energía eléctrica, tiempo y otros factores. Estos problemas, que se reducen a obtener un efecto máximo (máxima producción, máxima resistencia, etc.) o uno mínimo (mínimas pérdidas, mínimo peso, mínimos costos, etc.) se conoce con el nombre de ***problemas de optimización*** (también se les llama "problemas sobre máximos y mínimos" o "problemas sobre extremos").



La experiencia ha demostrado que, al enfrentar situaciones de este tipo, el recurrir a las matemáticas resulta útil y en la mayoría de los casos, imprescindible. En este bloque habrás de analizar y resolver algunos ***problemas elementales de optimización*** con el propósito de que conozcas y te familiarices con la forma en que se utilizan las Matemáticas en general y especialmente las que estudiaste en el bloque anterior para resolver este tipo particular de problemas y que esto, además de dar lugar a que continúes avanzando en tu aprendizaje de esta nueva rama de las Matemáticas, te permita apreciarla cada vez más por su gran utilidad en la resolución de una gran diversidad de problemas.

Una aclaración: El calificativo de "elementales" puesto a los problemas, no es sinónimo de "fáciles" o de "poco importantes". Como podrás ver, entre tales problemas "elementales" habrá no solamente problemas importantes desde el punto de vista de su sentido práctico, sino también problemas de un cierto grado de complejidad.



Secuencia Didáctica 1

• Optimización en la construcción de canales hidráulicos.

Inicio

En la Secuencia Didáctica 2 del Bloque 2 del Módulo de Matemáticas 2 se habla de la importancia de los canales hidráulicos para la distribución del agua en regiones como la nuestra en las que este preciado líquido es escaso; en dicha secuencia se habló de los diferentes tipos de canales que pueden construirse dependiendo de la forma geométrica de su sección transversal, en relación con la cual se señalaron algunos conceptos importantes que toman en cuenta los ingenieros a la hora de construir un canal, en especial se hizo referencia al área mojada también llamada área hidráulica y al perímetro mojado de dicha sección.

En esta secuencia didáctica, vas a analizar y tratar de resolver algunos problemas relacionados con la construcción de canales hidráulicos.

ACTIVIDAD 1

SD1-B2

El problema de la construcción de un canal hidráulico de sección transversal rectangular.

Considera primero el caso de un canal de sección transversal rectangular que se quiere construir con una larga lámina rectangular que mide $60\ cm$ de ancho, como la que se observa en la Figura 2.1



FIGURA 2.1

Para decidir cómo hacerlo es necesario saber a qué se llama sección transversal del canal (para recordarlo puedes consultar en la Secuencia Didáctica 2 del Bloque 2 de Matemáticas 2 el significado de los siguientes términos relacionados con los canales hidráulicos. También puedes consultarlo en el Applet Canal triangular disponible en www.appletscobach.mat.uson.mx):

a) Sección transversal (también llamada sección hidráulica)
b) Sección transversal rectangular
c) Área Mojada (también llamada área hidráulica)
d) Perímetro mojado

Ahora empieza describiendo por escrito lo que debes hacer con la lámina para construir el canal y haz un dibujo donde muestres cómo quedará el canal después de construido. Después comenten en equipo lo que cada uno escribió y dibujó y pónganse de acuerdo de cómo proceder.

Si ya se pusieron de acuerdo en cómo hacerlo, es conveniente que analicen un poco más la situación, lo cual pueden hacer contestando cada quien las siguientes preguntas para después comentar y comparar sus respuestas tratando de llegar a una versión compartida por todos.

1) ¿Cómo se calcula el volumen de agua que puede contener el canal?

2) Sabiendo que el largo del canal que se construya con esta lámina será siempre el mismo ¿De qué depende el volumen de agua que puede contener?

3) ¿Qué sucede con el volumen de agua del canal si aumenta el área de su sección transversal?

4) ¿De qué depende el valor del área?

5) Dibujen al menos tres canales diferentes que se pueden construir con la lámina del problema y calculen el área de su sección transversal en cada caso.

6) ¿Cuánto mide el perímetro mojado de cada uno de los tres canales que has dibujado?

7) ¿Qué sucede con el perímetro mojado de la sección transversal del canal al cambiar su área?

8) ¿De qué depende el perímetro mojado de la sección transversal del canal?



ACTIVIDAD 2

SD1-B2

Utilizando la misma dinámica que emplearon en la actividad anterior, contesten las siguientes preguntas y analicen sus respuestas.

1) Sabiendo que el ancho de la lámina con que se va a construir el canal mide $60\ cm$, ¿Cómo calculas el valor de la base de la sección transversal, si representas con h el valor de la altura? Escribe la expresión analítica correspondiente

2) ¿Cómo están relacionadas la base y la altura de la sección transversal del canal?

3) ¿Cuál es el máximo valor que puede tener la altura de la sección transversal? ¿Y el mínimo?

4) Y el valor del área de la sección transversal ¿Cómo lo calculas cuando conoces el valor de la altura? Escribe la expresión analítica correspondiente.

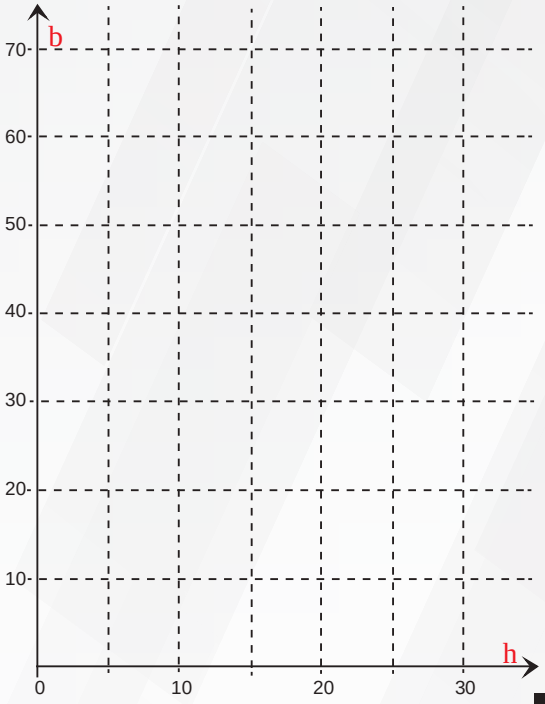
5) En la Tabla 2.1 anota, en cada caso, los valores que faltan a partir del valor conocido, que en algunos casos es la altura, en otros, la base y en otros el área

h (cm)	*b (cm)*	*A (cm^2)*
o		
1		
2		
3		
	50	
	40	
	36	
	30	
		412
		378
		288
		208

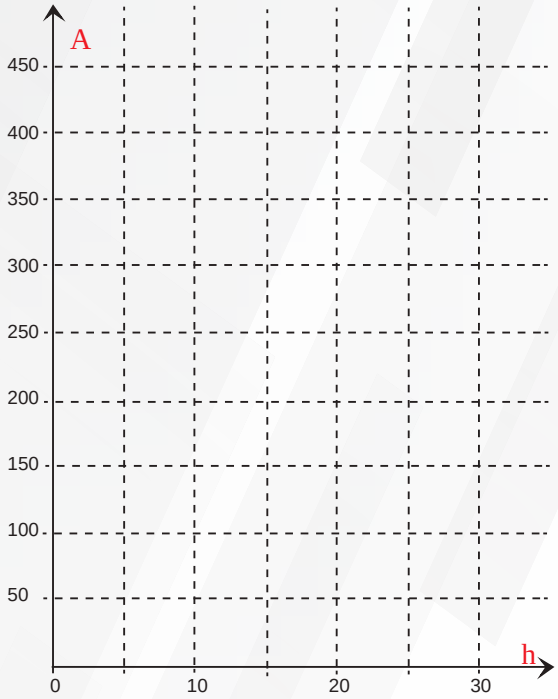
6) ¿Cómo están relacionadas el área de la sección transversal del canal y su altura?

ACTIVIDAD 3
SD1-B2

1) A partir de las expresiones analíticas que has escrito en los incisos 1) y 4) de la actividad 2, representa gráficamente la variación de la base con respecto a la altura en un caso y la variación del área de la sección transversal con respecto a la altura, en el otro.



a) Gráfica de la base con respecto a la altura



b) Gráfica del área de la sección transversal con respecto a la altura

FIGURA 2.2

2) En el caso de la variación de la base con respecto a la altura, en la gráfica resulta evidente que decrece y que lo hace con rapidez constante. En el caso de la variación del área con respecto a la altura ¿Cómo resulta ser dicha variación?

3) En la gráfica de la variación del área con respecto a la altura también puede verse que hay un valor de la altura para el cual el valor del área resulta máximo. Determina ambos valores (el de la altura y el del área).

4) La primera gráfica también permite analizar la variación de la rapidez con que varía la base de la sección transversal con respecto a la altura. Describe dicha variación y explica cómo la determinaste.

5) Con base en la segunda gráfica analiza la variación de la rapidez con que varía el área de la sección transversal con respecto a la altura, descríbela y, al igual que en el caso anterior, explica cómo la determinaste.

Desarrollo

ACTIVIDAD 1

SD1-B2

Del análisis que hasta este momento han hecho del proceso de construcción de un canal de sección transversal rectangular utilizando una larga lámina rectangular, se espera haya quedado claro:

a) Que para construirlo sólo se necesita doblar la lámina de los extremos de su ancho de tal manera que las partes dobladas sean de la misma longitud y formen ángulos rectos con la base del canal tal como se observa en la Figura 2.3

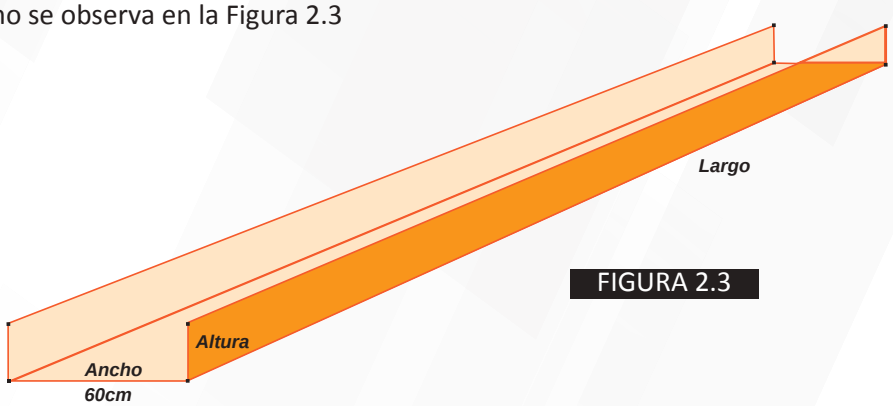


FIGURA 2.3

b) Que la longitud de la parte que se dobla de la lámina, es la altura de la sección transversal del canal.

c) Que el ancho de la lámina es el perímetro mojado del canal

d) Que el área de la sección transversal del canal puede calcularse con la expresión analítica $A = (a - 2h)\,h$ donde a es el ancho de la lámina y h es la altura de la sección transversal.

e) Que la expresión analítica $A = (a - 2h)h$ también puede escribirse $A = ah - 2h^2$

f) Que esta última forma de la expresión analítica hace evidente que su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo.

g) Que en esta parábola puede observarse que el área de la sección transversal del canal primero crece con rapidez decreciente y luego decrece con rapidez creciente.

h) Que existe un valor de la altura que hace que la sección transversal del canal tenga un área máxima.

Considerando que, efectivamente, ha quedado claro lo anterior; analicen y comenten ¿Cómo puede determinarse el valor de la altura de la sección transversal que hace que su área sea máxima?

Sugerencia: Contestar las siguientes preguntas puede servirles de guía para lo que se pide que determinen.

1. ¿Cuál es el punto de la gráfica que corresponde al máximo valor del área de la sección transversal?

2. ¿Qué representan las coordenadas de dicho punto?

3. ¿Cómo puede determinarse el valor de su abscisa?

4. Conocido el valor de la abscisa del punto de la gráfica que corresponde al área máxima, ¿Cómo se calcula su ordenada y qué representa ésta?

Haber contestado las cuatro preguntas, equivale a haberse puesto de acuerdo en cómo puede determinarse el valor de la altura de la sección transversal que hace que su área sea máxima. Ahora utilicen el procedimiento que han acordado para determinar dicho valor y luego úsenlo para calcular el valor del área.

ACTIVIDAD 2

SD1-B2

En esta segunda actividad de desarrollo van a reflexionar sobre otra manera de resolver el problema anterior, es decir, van a determinar otra manera en que puede calcularse el valor de la altura de la sección transversal de área máxima.

También en este caso, la sugerencia es que efectúen lo que se les propone en los siguientes incisos y respondan las preguntas que se les formulan, pues hacerlo de seguro les ayudará a lograr lo que se pretende en esta actividad.

1) Observando la gráfica del área de la sección transversal con respecto a la altura, que aparece en la Figura 2.4, ya se había determinado que la rapidez con que varía el área al variar la altura es decreciente, es decir que el valor de dicha rapidez va disminuyendo al aumentar el valor de la altura.

   Por otra parte, en la Secuencia Didáctica 3 del bloque anterior se analizó y se estableció que en la gráfica de una función, la rapidez con que varía ésta, está representada por la pendiente de la recta tangente a dicha gráfica en el punto considerado, además se determinó como puede calcularse el valor de dicha pendiente.

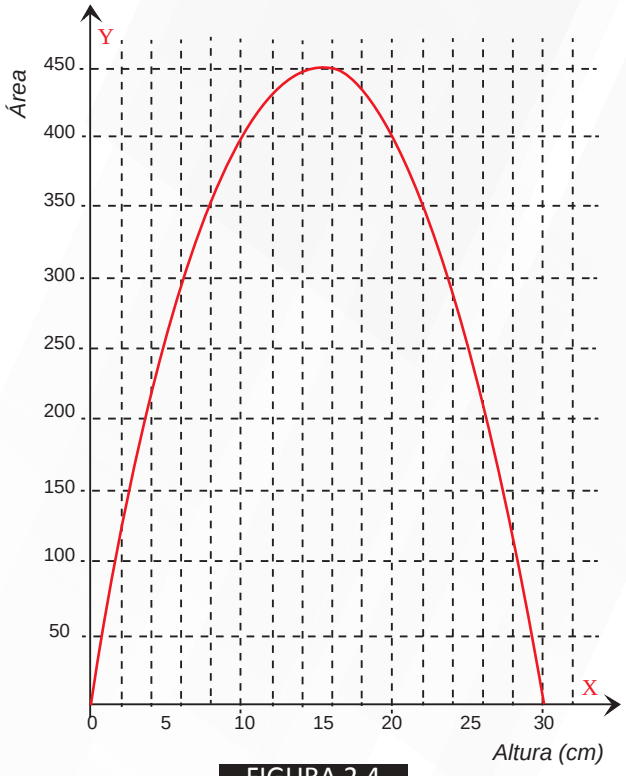


FIGURA 2.4

Con base en esto determinen la expresión analítica con que puede calcularse la pendiente de la recta tangente a la curva que es gráfica del área de la sección transversal del problema.

2) ¿Qué pueden decir de la recta tangente a la curva en el punto que corresponde al valor máximo del área? ¿Y qué pueden decir de su pendiente?

3) ¿Cómo pueden calcular el valor de la abscisa del punto que representa el máximo valor del área a partir de la expresión analítica con la que se calcula la pendiente de la recta tangente? Háganlo y utilicen dicho valor para calcular el valor del área máxima de la sección transversal.

4) De la misma manera que lo hicieron en la Actividad 1, comenten, analicen y describan el procedimiento que acaban de utilizar para determinar el valor de la altura de la sección transversal de área máxima.

ACTIVIDAD 3

SD1-B2

A continuación aparecen descritos los dos procedimientos que se espera hayan utilizado para calcular el valor de la altura que maximiza el valor del área. Analícenlos y coméntenlos y luego contesten las preguntas que se formulan después.

Primer procedimiento

Partiendo de la gráfica del área de la sección transversal con respecto a su altura, que sabían que es una parábola, observaron que su máximo valor corresponde al valor de la ordenada del vértice y que la abscisa de dicho punto corresponde al valor de la altura; luego, sabiendo esto, se plantearon el problema de calcular las coordenadas del vértice; lo cual resultó relativamente fácil por tratarse de una curva simétrica, cuyo eje de simetría pasa por su vértice.

Segundo procedimiento

Para calcular las coordenadas del vértice de la parábola, lo que observaron fue que la recta tangente a la curva en ese punto, era horizontal y que por tanto, su pendiente tenía que valer cero; así que procedieron a obtener la expresión analítica con la que se calcula la pendiente de las rectas tangentes a la curva en cualquier punto y con ella determinaron la abscisa del punto de la curva que tenía una tangente con pendiente igual a cero.

1) ¿Consideran que efectivamente, están descritos los procedimientos que ustedes utilizaron?

2) ¿Consideran que las descripciones que ustedes hicieron de los procedimientos en las actividades 1 y 2 son equivalentes a las que acaban de analizar?

3) ¿Consideran que analizar y comentar las descripciones de los dos procedimientos les ha ayudado a comprenderlos mejor?

4) ¿Cuál de los dos procedimientos les parece mejor y por qué?

5) ¿Notan alguna ventaja o desventaja de un procedimiento con respecto al otro?

6) ¿Ambos procedimientos se podrán aplicar siempre que se quiera maximizar una variable?

ACTIVIDAD 4 Canales de forma trapezoidal

SD1-B2



Analicen ahora el caso de la construcción del canal si su sección transversal en lugar de ser rectangular, fuera trapezoidal en el que la base y los lados adyacentes a la misma formaran ángulos de $120°$ como se observa en la Figura 2.5 y determinen qué parte de la lámina deberá doblarse para que el área de la sección transversal del canal sea máxima y cuál sería el valor de dicha área.

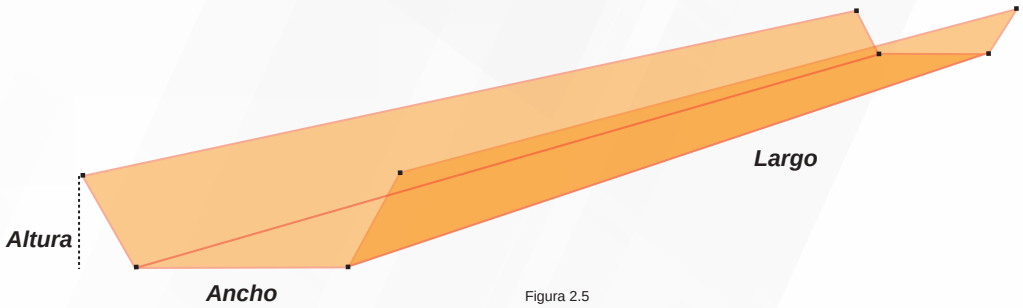


Figura 2.5

FIGURA 2.5

Cierre

ACTIVIDAD 1

SD1-B2

En esta primera secuencia del bloque denominado Problemas de Optimización se han analizado dos problemas relacionados con la construcción de un canal hidráulico utilizando una larga lámina rectangular cuyo ancho mide $60\ cm$, en el primer problema se planteó decidir cuánto doblar al ancho de la lámina para maximizar el área de la sección transversal del canal si ésta fuera rectangular y en el segundo problema se planteó la misma interrogante si la sección transversal fuera trapezoidal y el ángulo entre la base y los lados adyacentes fuera de $120°$. Para resolver estos dos problemas se utilizó un procedimiento matemático para calcular qué parte de la lámina doblar para que el área de la sección transversal del canal sea máxima y, como consecuencia también sea máxima la capacidad del canal.

El procedimiento establecido consistió en los siguientes cuatro pasos.

1. Obtención de la expresión analítica de la función que modela el problema, esto es, representa la relación entre la variable que se quiere maximizar y la variable de la cual depende su valor.

2. Obtención de la expresión analítica de la derivada de la función que modela el problema con la cual se puede calcular la pendiente de las rectas tangentes a la curva que es la representación gráfica de la función obtenida en el primer paso.

3. Determinación del valor de la variable independiente del punto donde la pendiente de la recta tangente a la curva es igual a cero.

4. Cálculo del valor máximo de la función utilizando el valor de la variable independiente obtenido en el paso anterior.



Secuencia Didáctica 2

• Optimización en construcciones que permiten reducir costo.

Inicio

Las actividades de esta nueva secuencia tienen al menos dos propósitos:

a) Que adquieran una mayor familiaridad con el procedimiento descrito en la actividad de cierre de la secuencia anterior para resolver problemas de optimización.

b) Que conozcan otras aplicaciones de la derivada a la resolución de problemas de optimización, ligados a problemas de diseño de ventanas y cajas, cuya optimización abarata costos, a la vez que conozcan cómo se puede usar la derivada en el análisis de la variación.

ACTIVIDAD 1 El problema del diseño de una ventana típica

SD2-B2

Se quiere construir una ventana rectangular coronada con un semicírculo (como la que se observa en la Figura 2.6), cuyo perímetro mida $5m$, y se quiere determinar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de luz que permita pasar sea la mayor posible. Te sugiero que revises el Applet Ventana disponible en www.appletscobch.mat.uson.mx.

FIGURA 2.6



De acuerdo con el procedimiento que se pretende que utilicen, ¿Qué es lo primero que deben hacer?

Responder las siguientes preguntas puede serles útil para hacerlo.

a) ¿De qué depende la cantidad de luz que deja pasar la ventana?

b) ¿Cómo puede calcularse el área de la ventana? Sugerencia: Llámenle b a la longitud de la base de la ventana, h a la longitud de la altura de la parte rectangular y r al radio del semicírculo que corona la ventana y escriban la expresión analítica con la que calcularían el área A de la ventana.

c) En la expresión analítica que han escrito, ¿De cuántas variables depende el valor del área y cuáles son?

d) Utilicen las relaciones que conocen entre las variables que aparecen en la expresión analítica que han obtenido, para determinar una expresión analítica que permita calcular el área de la ventana en función de una sola variable.

   Sugerencia:

   i) Elijan la base de la ventana como la variable independiente

   ii) Determinen cómo pueden calcular la longitud del radio de la parte semicircular de la ventana a partir de lo que mide la base de la ventana.

   iii) Luego determinen cómo calcular la altura de la parte rectangular de la ventana también a partir de la medida de la base

iv) Ahora están en condiciones de escribir la expresión analítica con la que se puede calcular el área de la ventana en función de la longitud de la base. Escríbanla

e) La expresión analítica que han obtenido para calcular el área de la ventana en función de su base ¿Qué es, del problema?

Desarrollo

ACTIVIDAD 1
SD2-B2

La expresión analítica que han obtenido en la actividad de inicio es lo que se denomina *modelo matemático del problema*, en nuestro caso, es el modelo matemático del problema de maximizar el área de la ventana.

1. ¿Qué necesitan hacer de acuerdo con lo establecido en el segundo paso del procedimiento que están aprendiendo a utilizar para resolver problemas de optimización?

2. Si ya tienen claro lo que requieren hacer en este segundo paso, háganlo.

3. La nueva función que han obtenido ¿Qué es de la que obtuvieron en el primer paso y qué se calcula con ella?

4. De acuerdo con lo establecido en el tercer paso del procedimiento que están utilizando deben determinar el valor de la variable independiente del punto donde la pendiente de la recta tangente a la curva es igual a cero. Expliquen por qué se requiere determinar este valor, cómo se hace y finalmente, háganlo.

5. ¿Pueden ahora determinar las dimensiones de la ventana que deja pasar la mayor cantidad de luz? Expliquen cómo lo van a hacer y luego háganlo.

ACTIVIDAD 2 El diseño de una ventana de construcción sencilla

SD2-B2

Considera ahora el caso de querer construir una ventana rectangular coronada no con un semicírculo, sino con un triángulo equilátero (como la que se observa en la Figura 2.7), cuyo perímetro mida $8m$, y determina las dimensiones que debe tener para que la cantidad de luz que permita pasar sea la mayor posible.

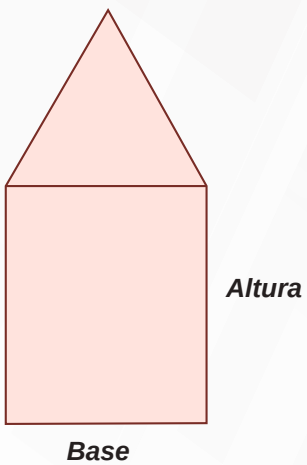


FIGURA 2.7

1. Dado que se trata de un problema muy similar al de la ventana coronada con un semicírculo, seguramente queda claro que la cantidad de luz que puede pasar a través de ella, depende de su área. Así que el modelo matemático que necesitas es la función que permite calcular el área de la ventana. Para obtener dicho modelo, responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cómo puedes calcular el área de la parte rectangular de la ventana?

   b) Y el área de la parte triangular ¿Cómo puede calcularse?

   c) ¿Cómo puede calcularse la altura de la parte triangular de la ventana a partir de la longitud de la base de la parte rectangular?

   d) ¿Cómo puedes calcular la altura de la parte rectangular de la ventana a partir de lo que mide la base?

   e) Con base en las respuestas que has dado a las preguntas anteriores, ¿Puedes obtener el modelo matemático del problema en función de la longitud de la base de la ventana? Hazlo y utiliza dicho modelo para resolver el problema.



FIGURA 2.8

En la introducción al Bloque 4 del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 1, se hicieron una serie de reflexiones sobre la fabricación de envases y en particular se hizo referencia a algunos de los problemas que es necesario resolver al fabricarlos. Algunos de esos problemas especialmente importantes relacionados con la fabricación de los mismos son de optimización. En esta actividad vas a resolver uno de ellos que vamos a denominar "El problema de la caja sin tapa".

Se trata de las cajas en las cuales se empacan diversas mercancías y cuya tapa se fabrica por separado. En la Figura 2.8 se ve una imagen que las ilustra. Estas cajas se fabrican utilizando láminas rectangulares de cartón a las cuales se les cortan cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas y doblando las cejas para formar las caras laterales de la caja tal como se ilustra en la Figura 2.9. El problema a resolver consiste en determinar la longitud del lado de los cuadrados que deben cortarse en las esquinas de una lámina rectangular de $40X50\ cm$ para que la capacidad de la caja sea máxima.

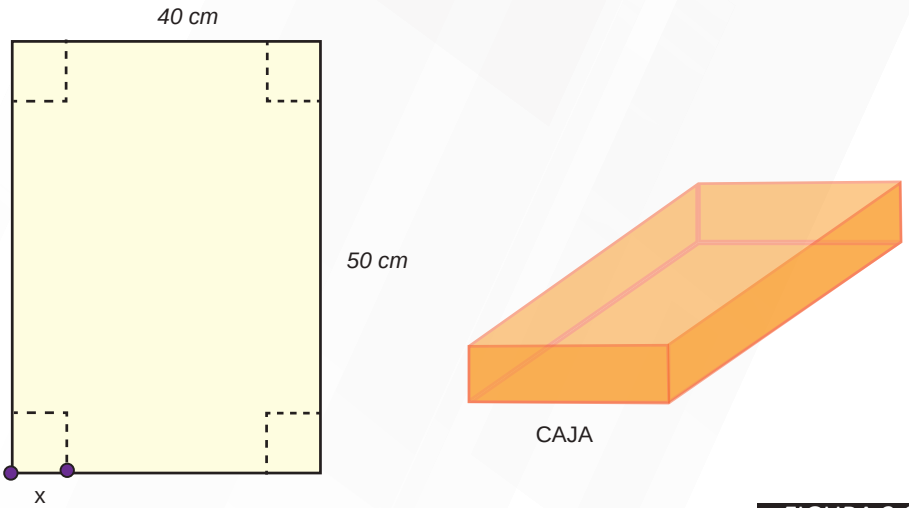


FIGURA 2.9

Al igual que en los problemas anteriores, a continuación se formulan una serie de preguntas y se proponen varias tareas que pueden servirte de guía para, primero obtener el modelo matemático del problema y después resolverlo. Para simular la construcción de una caja con estas características, se dispone del Applet Caja sin tapa en www.appletscobach.mat.uson.mx.

A) Obtención del modelo matemático del problema

1) Es necesario que tengas claro que se llama *capacidad* de un recipiente a su *volumen interior*, es decir, "lo que le cabe". Hecha esta aclaración y dado que la forma geométrica de la caja es la de un prisma de base rectangular, escribe la fórmula con la que se calcula su volumen.

2) La fórmula que has escrito indica que el volumen de la caja depende ¿De qué variables?

3) Y el largo, el ancho y la altura de la caja ¿De qué variable dependen?

4) Si se designa con x a la longitud (en cm) del lado de los cuadrados que se recortarán en las esquinas ¿Cómo puede expresarse la longitud del largo, del ancho y de la altura de la caja? Llama $L(x)$ al largo, $A(x)$ al ancho y $H(x)$ a la altura de la caja y escribe la expresión analítica que utilizarías en cada caso.

a) En la fórmula que has escrito en 1) (que se utiliza para calcular el volumen de la caja), sustituye $L(x)$, $A(x)$ y $H(x)$ por las expresiones analíticas que has obtenido en el inciso 4) para obtener la expresión analítica que permite calcular el volumen de la caja a partir del valor de x. Llama $V(x)$ a dicho volumen y escribe dicha expresión analítica.

b) ¿Cuál es el menor valor que puede tener x?

c) ¿Cuál es el mayor valor que puede tener x?

d) De los dos incisos anteriores determina el intervalo de valores que puede tomar x

e) La expresión analítica que has escrito en el inciso a), con la de los valores de x restringidos a los indicados en el intervalo que has determinado en el inciso anterior, es lo que se denomina *modelo matemático del problema*. Escríbelo.

B) Uso del modelo matemático que permite determinar la longitud del lado de los cuadrados que deben cortarse en las esquinas de la lámina para que la capacidad de la caja sin tapa sea máxima.

a) De acuerdo con el procedimiento que has estado utilizando para calcular el valor de la variable independiente que maximiza el valor de la función (variable dependiente) es necesario que obtengas la derivada de la función que modela matemáticamente el problema y que has escrito en el inciso f), es decir necesitas derivar la función $\boldsymbol{V}(x) = (50 - 2x)(40-2x)x$ y para hacerlo es necesario que primero efectúes las operaciones indicadas para transformarla en una expresión polinomial. Cuando lo hayas hecho obtén la derivada y explica para qué se utiliza en el problema.

b) Al efectuar las operaciones indicadas debes haber obtenido $\boldsymbol{V}(x) = 4x^3-108x^2+2000x$ y al derivarla, debiste obtener la función:

$$\boldsymbol{V}'(x) = 12x^3-260x+2000$$

que, de acuerdo con el procedimiento establecido, debes utilizar para calcular los valores de x para los cuales dicha derivada vale cero. Explica cómo se hace y luego calcúlalos.

c) Para determinar los valores de x que hacen que la derivada sea igual a 0, debiste haber resuelto la ecuación:

$$12x^2-260x+2000 = 0$$

y al resolverla, obtener dos soluciones, que deben haber sido

$$x_1 = 15 - \frac{5\sqrt{21}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = 15 + \frac{5\sqrt{21}}{3}$$

cuyos valores aproximados son: $x_1 = 7.3623$ y $x_2 = 22.6377$

d) ¿A qué corresponden, en la gráfica de la función $V(x) = 4x^3 - 180x^2 + 2000x$ estos dos valores de x que hacen que la derivada valga cero?

e) Utiliza los valores de x obtenidos, para determinar los correspondientes valores de las ordenadas de dichos puntos, (Al hacerlo, puedes utilizar el valor aproximado de x_1 y de x_2).

f) Dado que la gráfica de la función que modela matemáticamente el problema de la caja sin tapa, tiene dos puntos con tangente horizontal ¿Significa esto que hay dos valores de x que hacen que la capacidad de la caja sea máxima? Responde a esta pregunta argumentando tu respuesta.

g) Si tu respuesta es no, ¿Cuál de los dos valores corresponde al que maximiza la capacidad y qué representa el otro valor?

Al determinar el valor de x que corresponde a lo que debe medir el lado de los cuadrados que se requiere cortar en las esquinas de la lámina para maximizar la capacidad de la caja, indica que ya has resuelto el problema propuesto. Sin embargo, para tener una mayor comprensión de la manera en que la derivada puede utilizarse para analizar el comportamiento de una función, vamos a hacer un análisis más completo de la variación de $\boldsymbol{V}(x)$ en el intervalo de valores de x para los cuales $\boldsymbol{V}(x)$ tiene valor, en este caso, todos los números reales**.** Este análisis se hará en la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 4 El uso de la derivada para trazar la gráfica de una función

SD2-B2

En el curso de Matemáticas 4 pudiste darte cuenta de la utilidad de la representación gráfica de las funciones para analizar su variación. Por esta razón, en esta actividad vas a reflexionar sobre el uso de la derivada para trazar la gráfica de la función $\boldsymbol{V}(x) = 4x^3 - 180x^2 + 2000x$ para luego utilizarla para visualizar y analizar la variación de $\boldsymbol{V}(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 20$, que es donde la función es modelo del problema de la caja sin tapa.

Para trazar la gráfica de $\boldsymbol{V}(x) = (50 - 2x)(40 - 2x)x$ es conveniente localizar algunos puntos que te resultarán especialmente útiles, tales como los puntos que están en el eje de las X o los que tienen tangente horizontal. Para localizarlos y entender por qué son especialmente útiles, contesta las preguntas que se formulan a continuación y realiza las tareas que se proponen:

1) ¿Cómo puedes determinar el valor de x, de los puntos de la gráfica que están en el eje X a partir de la expresión analítica de la función?

a) Calcula dichos valores y en un sistema de coordenadas ubica los puntos correspondientes.

b) Debes haber determinado tres valores de $x = (0, 20 \text{ y } 25)$ y como consecuencia, las coordenadas de los puntos que debes haber ubicado en el eje X son $x = (0,0), (20,0)$ y $(25,0)$ ¿Qué puedes decir de la ubicación de cualquier otro punto de la gráfica?

c) Si ahora eliges un valor de x entre 0 y 20, es decir, eliges x tal que $0< x <20$ y calculas el valor de $\boldsymbol{V}(x)$ ¿Cómo deberá resultar dicho valor? Argumenta tu respuesta.

d) Si tomas $x= 1$, $\boldsymbol{V}(x)$, será igual a 1824, es decir, resulta positivo. Sabiendo esto ¿Cómo resultará el valor de $\boldsymbol{V}(x)$ para cualquier otro valor de x que esté en el intervalo $0< x <20$? Argumenta tu respuesta.

e) Si ahora tomas un valor de x del intervalo $20< x <25$ y calculas el valor de $\boldsymbol{V}(x)$ y éste resulta negativo ¿Cómo crees que resultará el valor de $\boldsymbol{V}(x)$ para cualquier otro valor de x que esté en el mismo intervalo? Argumenta tu respuesta.

f) Ya dijimos que otros puntos de la gráfica que resultan especialmente útiles para trazarla son los puntos en los que la tangente es horizontal. En la actividad anterior, utilizando la derivada, determinaste que hay dos (y sólo dos) y calculaste sus coordenadas a partir de saber que los valores de la x de dichos puntos son:

$$x_1 = 15 - \frac{5\sqrt{21}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = 15 + \frac{5\sqrt{21}}{3}$$

donde puede verse que x_1 está en el intervalo $[0, 20]$ y x_2 en el intervalo $[20, 25]$.

Considera el primero de estos dos puntos, cuyas coordenadas son $(x_1 \boldsymbol{V}(x_1))$ y analiza el comportamiento de la función $\boldsymbol{V}(x)$ en el intervalo $[0, x_1]$ argumentando la veracidad de las siguientes afirmaciones:

i) Dado que $\boldsymbol{V}(0) = 0$ y $\boldsymbol{V}(x_1) > 0$; $\boldsymbol{V}(x)$ debe ser creciente en todo el intervalo $[0, x_1]$.

ii) Dado que la función $\boldsymbol{V}(x)$ es monótonamente creciente en el intervalo $[0, x_1]$, $\boldsymbol{V}(x_1)$ debe ser el máximo valor de $\boldsymbol{V}(x)$ en ese intervalo

g) Ahora analiza el comportamiento de la función $\boldsymbol{V}(x)$ en el intervalo $[x_1, 20]$ argumentando, al igual que en el caso anterior, la veracidad de las siguientes afirmaciones:

h) Dado que $\boldsymbol{V}(x_1) > 0$ y $\boldsymbol{V}(20) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{V}(x)$, debe ser decreciente en todo el intervalo $[x_1, 20]$.

i) Dado que la función $\boldsymbol{V}(x)$ es monótonamente decreciente en el intervalo $[x_1, 20]$, $\boldsymbol{V}(x)$ debe ser el máximo valor de $\boldsymbol{V}(x)$ en ese intervalo.

j) Con base en el análisis que hasta aquí has hecho del comportamiento de la función $\boldsymbol{V}(x)$, describe su variación en el intervalo $[x_1, 20]$.

k) Analiza ahora el comportamiento de la función en el intervalo $[20, 25]$ procediendo de la misma manera que lo has hecho al analizar el comportamiento en el intervalo $[0, 20]$, esto es, empieza analizando el comportamiento en el intervalo $[20, x_1]$, luego analízalo en el intervalo $[x_1, 25]$ para luego describir el comportamiento en el intervalo $[20, 25]$.

l) Hasta aquí has analizado el comportamiento de la función $\boldsymbol{V}(x)$ utilizando la siguiente estrategia:

- Determinaste los valores de x para los cuales $\boldsymbol{V}(x) = 0$, que resultaron ser tres.
- Estos valores te permitieron ubicar los puntos de la gráfica que están en el eje X, puesto que en los tres casos $\boldsymbol{V}(x) = 0$
- Luego calculaste los valores de x que corresponden a los puntos de la gráfica donde ésta tiene una tangente horizontal. Para hacerlo utilizaste la derivada y resultaron ser dos y pertenecer, uno de ellos al intervalo $[0, 20]$ y el otro al intervalo $[20, 25]$.
- Luego, al analizar la variación de $\boldsymbol{V}(x)$ en cada uno de los dos intervalos concluiste que en el intervalo $[0, 20]$ la función es creciente de 0 a x_1 y decreciente de x_1 a 20, lo que a su vez te

permitió concluir que el valor $\boldsymbol{V}(x_1)$ donde x_1 es el valor de x del punto de la gráfica que tiene tangente horizontal, es un máximo; y que el valor de $\boldsymbol{V}(x)$ del punto de la gráfica cuya x está en el intervalo $[20, 25]$ que tiene tangente horizontal es un mínimo.

m) Bosqueja ahora la gráfica de la función $\boldsymbol{V}(x) = (50–2x)(40–2x)\,x$ en el intervalo en el que has analizado su comportamiento y describe la variación de $\boldsymbol{V}(x)$ en el intervalo $[0, 25]$. (No olvides que al describir la variación es necesario que digas si la función creció, decreció o permaneció constante y si lo hizo con rapidez creciente, decreciente o constante).

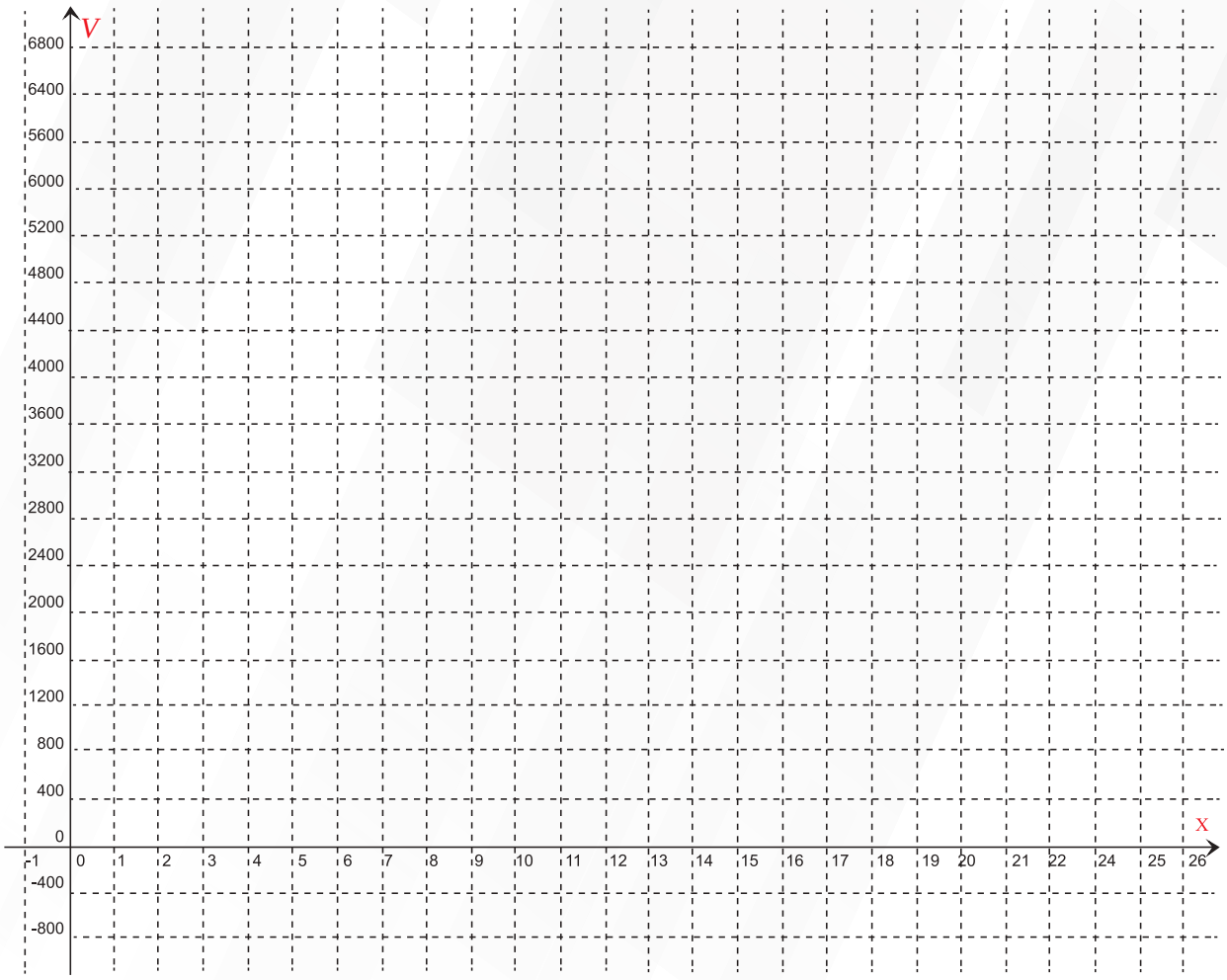


FIGURA 2.10

n) Hasta este momento sólo has descrito la variación de $V(x)$ en el intervalo $[0, 25]$; Ahora analiza y describe la variación de la función en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(25, +\infty)$ y completa el bosquejo de la gráfica y la descripción de la variación de la función.

ACTIVIDAD 5 La representación gráfica de la función y el análisis de la variación.

SD2-B2

La gráfica que has bosquejado te permite determinar visualmente los intervalos en los cuales la función es creciente y aquéllos en los cuales es decreciente; de la misma manera puedes ver dónde la función es positiva, dónde es negativa y dónde vale cero. Determina dichos intervalos o puntos y anótalos en la siguiente tabla.

Determina los puntos o intervalos donde la función es:	
	Puntos o Intervalos
Positiva	
Negativa	
Ni positiva, ni negativa	
Creciente	
Decreciente	
Ni creciente, ni decreciente	

TABLA 2.2

1) Observando la gráfica que bosquejaste analiza y determina lo que, en cada caso se te pide de la función $V(x)$.

   a) El intervalo en el que la función es positiva y crece con rapidez creciente.

b) El intervalo en el que la función es negativa y decreciente.

c) El intervalo en el que la función es negativa y decrece con rapidez decreciente.

2) Describe la variación de $V(x)$ en el intervalo donde es el modelo matemático del problema de la caja sin tapa.

ACTIVIDAD 6 La derivada y el análisis de la variación de una función representada analíticamente.

SD2-B2

La gráfica que bosquejaste te permitió describir la variación de $V(x)$ en todo el intervalo donde $V(x)$ tiene valor; en este caso, todos los números reales. En esta actividad se pretende reflexionar sobre cómo puede utilizarse la derivada para analizar la variación de una función.

1) En la gráfica resultó fácil establecer los intervalos en los cuales la función es creciente. En esos mismos intervalos ¿Cómo resultan ser las pendientes de las tangentes? Y como consecuencia ¿Cómo resulta ser la derivada?

2) De la misma manera resultó fácil establecer, en la gráfica, los intervalos en los cuales la función es decreciente. ¿Cómo resultan ser en esos intervalos las pendientes de las tangentes? Y como consecuencia ¿Cómo resulta ser la derivada?

3) De las respuestas a las preguntas de los incisos 1 y 2 se deduce que se puede saber si una función es creciente o decreciente en un punto o en un intervalo utilizando su derivada. En el caso de la función que estamos analizando, esto es, la función

$$V(x) = 4x^3 - 180x^2 + 2000x$$

a) ¿Cómo puede saberse si la función es creciente o decreciente cuando x toma un determinado valor?

b) Si lo que se quiere determinar son los intervalos donde la función es creciente o aquéllos en los que es decreciente ¿Cómo puede hacerse si no se tiene la gráfica?

c) ¿En qué caso el valor de una función en un punto donde la gráfica de la tangente es horizontal, es un máximo y en qué caso es un mínimo?

4) Analiza y describe la variación de y con respecto a x en la función cuya representación analítica es $y = x^3 - 3x - 2$.

Sigue una estrategia similar a la utilizada con la función del problema de la caja sin tapa.

a) Determina el dominio de la función.

b) Encuentra los valores de x para los cuales y = 0 resolviendo la ecuación $x^3 - 3x - 2 = 0$.

c) Calcula los valores de x de los máximos y los mínimos de la función.

d) Determina los intervalos la función donde es creciente y aquéllos en los que es decreciente.

e) Bosqueja la gráfica de la función.

f) Describe la variación de la función en todo su dominio.

Cierre

ACTIVIDAD 1

SD2-B1

En esta segunda secuencia de actividades se espera que hayas logrado una mayor comprensión, por una parte, de la utilidad e importancia que tiene en la vida cotidiana y en la ciencia aprender a optimizar y, por otra, del procedimiento matemático general que se utiliza para hacerlos, esto es, que ahora tienes más claro que para resolver un problema de optimización:

a. Primero tienes que tratar de entenderlo y que entenderlo significa identificar la variable que quieres optimizar, la información que tienes de ella; así como las relaciones que hay entre la variable a optimizar y lo que de ella sabes. Que tienes claro que habrás comprendido el problema cuando hayas logrado expresar la relación de la variable que quieres optimizar con las otras variables que intervienen en el problema por medio de una función, que equivale a decir que has logrado convertir el problema que quieres resolver en un problema de matemáticas.
b. Que para formular la función, puedes dibujar un diagrama de la situación que te ayude a visualizar las relaciones entre las variables que intervienen en el problema, explorar los cambios que se producen en la variable que se quiere optimizar a partir de asignar valores específicos a las variables que están relacionadas con ella; registrar la información en tablas para facilitar el análisis de la variación, que cuando la función obtenida dependa de más de una variable, debes tratar de identificar las relaciones entre tales variables para lograr establecer una función que dependa de una sola variable.
c. Que una vez obtenida la función que modela el problema, el siguiente paso del proceso de resolución del mismo, consiste en aplicar el procedimiento establecido previamente que a su vez consiste en obtener la función derivada, igualarla a cero y resolver la ecuación que resulta para, finalmente, determinar cuál o cuáles de las soluciones de la ecuación son soluciones del problema de optimización. Este último paso del proceso puede, en muchas ocasiones, presentar dificultades al querer derivar o al querer resolver la ecuación que resulta de igualar a cero la función derivada o al tratar de determinar la solución del problema a partir de la solución de la ecuación; pero se espera que, con el tiempo, vayas aprendiendo a superarlas.

Secuencia Didáctica 3

• Obtención de valores mínimos.



Inicio

En esta tercera secuencia deberás analizar y resolver nuevos problemas de optimización, sólo que ahora se trata de problemas en los que se requiere minimizar una cierta cantidad.

Dado que el procedimiento que se emplea para minimizar es el mismo que el empleado para maximizar, se espera que te resulte relativamente fácil resolver estos nuevos problemas.

ACTIVIDAD 1 El problema del granjero

SD3-B2

Un granjero necesita cercar un terreno rectangular que tenga 7,200 m^2 de área y quiere hacerlo utilizando la mínima cantidad de cerca, para lo cual aprovechará la margen de un arroyo que le permitirá ahorrar uno de los lados de la cerca. ¿Cuáles deberán ser las dimensiones del terreno para que el granjero consiga su objetivo de minimizar la cantidad de cerca que requiere?

A) De acuerdo con el procedimiento que has venido utilizando para resolver los problemas de optimización de las secuencias didácticas anteriores, el primer paso es la obtención del modelo matemático del problema y para obtenerlo es necesario que analices la situación tratando de entenderla.

Realizar las tareas y contestar las preguntas que se te proponen a continuación puede ayudarte a obtener el modelo.

1) Empieza dibujando al menos tres terrenos rectangulares de diferentes dimensiones que cumplan con lo que el granjero quiere, esto es:

   a) Que el terreno tenga forma rectangular y que uno de sus lados sea el arroyo.

   b) Que el área del terreno sea de 7,200 m^2.

2) En los terrenos que dibujaste ¿Cómo hiciste para determinar la medida de su largo y de su ancho? y ¿Cómo resultó ser la cantidad de cerca requerida en cada caso?

3) En general, si representas con b la longitud del lado del terreno paralelo al arroyo, con h la de los lados perpendiculares y con P la cantidad de cerca que se requiere para cercarlo, escribe la expresión analítica que indica cómo calcular el valor de P a partir de los valores de b y h.

4) La expresión analítica que has escrito es un modelo matemático del problema que se quiere resolver, sólo que en este modelo la variable P, que es la que se quiere minimizar, depende de dos cantidades también variables, b y h, y lo que se requiere para seguir adelante con el procedimiento que conoces, es un modelo en el que P dependa de una sola variable.

Para obtener este modelo necesitas eliminar una de las dos variables, b o h, en el modelo que obtuviste en el inciso 2) y para eliminarla debes encontrar una manera de calcular su valor a partir del valor de la otra. ¿Cómo puedes hacerlo? Hazlo y obtén una expresión analítica para calcular P en función de b o de h.

5) De acuerdo con la expresión analítica que has obtenido para calcular el valor de P ¿Cuáles son el mínimo y el máximo valor que pueden tener b y h? Escribe los intervalos correspondientes como lo hiciste en el problema de la caja sin tapa.

Desarrollo

ACTIVIDAD 1
SD3-B2

1) Ya has obtenido el modelo matemático del problema que debe haber sido

$$P = b + \frac{14400}{b}, \quad \text{donde } b>0 \text{ (Si elegiste } b \text{ como la variable independiente), o}$$

$$P = 2h + \frac{7200}{h}, \quad \text{donde } h>0 \text{ (Si elegiste } h \text{ como la variable independiente)}$$

y seguramente sabes qué debes hacer con él para resolver el problema; sin embargo es conveniente que antes de seguir adelante con el procedimiento que ya conoces, analices la variación de P al variar b o h (según tu modelo sea uno u otro). Para ello puedes calcular el valor de P para algunos valores de b (o de h, según el modelo que tengas) y anótalos en la tabla que aparece a continuación.

b(m)	*h(m)*	*P(m)*
30		
60		
72		
100		
144		
180		
240		
300		

TABLA 2.3

2) En la Tabla 2.3 puedes ver lo que sucede con el valor de h y con el valor de P al aumentar el valor de b. Describe lo que sucede en cada caso.

3) De acuerdo con los datos que has registrado en la Tabla 2.3, ¿Entre qué valores consideras que debe estar la longitud de b que minimiza el valor de P?

4) ¿Cuánto valdría h, si b valiera $3600\ m$?, ¿Y cuál sería el valor de P?

5) Y si b valiera $7200\ m$, ¿Cuánto valdría h y cuánto valdría P?

6) ¿Cuál es el máximo valor que puede tener b?

7) Si el valor de b continuara creciendo, ¿A qué valor se iría aproximando el valor de h?, y el valor de P ¿A qué valor se aproximaría?

8) Después de haber respondido las preguntas anteriores, bosqueja la gráfica de P con respecto a b.

9) Calcula el valor de b y de h que minimizan la cantidad de cerca que se requiere para cercar el terreno del granjero y determina cuánto medirá la cerca

ACTIVIDAD 2 El problema de la fabricación de una lata

SD3-B2

Se desea elaborar un proyecto para fabricar latas que tengan forma de cilindro circular recto y se te aclara que la capacidad de la lata debe ser un litro (o sea, $1000\ cm^3$), y que se quiere que la cantidad de metal que se utilice en su fabricación sea la mínima posible.

Valorando que sabes cómo resolver este tipo de problemas, que fácilmente identificas como un problema de optimización, específicamente lo identificas como un problema de minimización, aceptas la encomienda y te dispones a cumplirla.

Empiezas dibujando una lata en forma de cilindro circular recto, y preguntándote ¿Cómo puedo saber la cantidad de metal que se requiere para fabricarla? ¿Cómo hay que cortar la lámina para fabricarla? ¿Cómo puedo saber en cuál lata se utiliza más metal para fabricarla, cuando su base es pequeña o cuando es grande? Si la base es pequeña, para que le quepa un litro tendrá que ser más alta que si la base fuera grande; esto te lleva a dibujar varias latas que tienen diferente base y como consecuencia, diferente altura puesto que quieres que a todas les quepa la misma cantidad, es decir, un litro.

Todo esto lo haces tratando de entender qué es lo que debes minimizar para que la cantidad de metal que se utilice para fabricar la lata sea la mínima y de qué dimensiones depende, pues también sabes que para decidir las dimensiones de la lata que minimizan la cantidad de metal que se utiliza en su fabricación, necesitas obtener una función que modele matemáticamente el problema para luego utilizar el procedimiento matemático con que se resuelve dicho problema de optimización y que ya conoces.

Utiliza las preguntas que aparecen en los párrafos anteriores que, según dice, tú mismo las formulaste y de ser necesario formula otras más tratando de obtener la función que modele matemáticamente el problema de minimizar la cantidad de material necesario para construir la lata pues se supone que si logras obtenerla, podrás resolver el problema planteado.





Complejo Petroquímico en Villahermosa Tabasco, México
http://empleospetroleros.org/2012/03/01/palabras-de-un-petrolero/

Se va a construir un oleoducto desde una refinería hasta unos tanques de almacenamiento cruzando un pantano. El costo de construcción a través del pantano es de $\$50{,}000.00$ por km y sobre el terreno firme es de $40,000.00 por km. La refinería está ubicada junto a una orilla del pantano y los tanques de almacenamiento están ubicados en la orilla contraria, $4\ km$ al este tal como se ve en la Figura 2.11. Si el pantano mide $4\ km$ de orilla a orilla, ¿Cuál debe ser la trayectoria del oleoducto para que el costo de construcción sea mínimo?

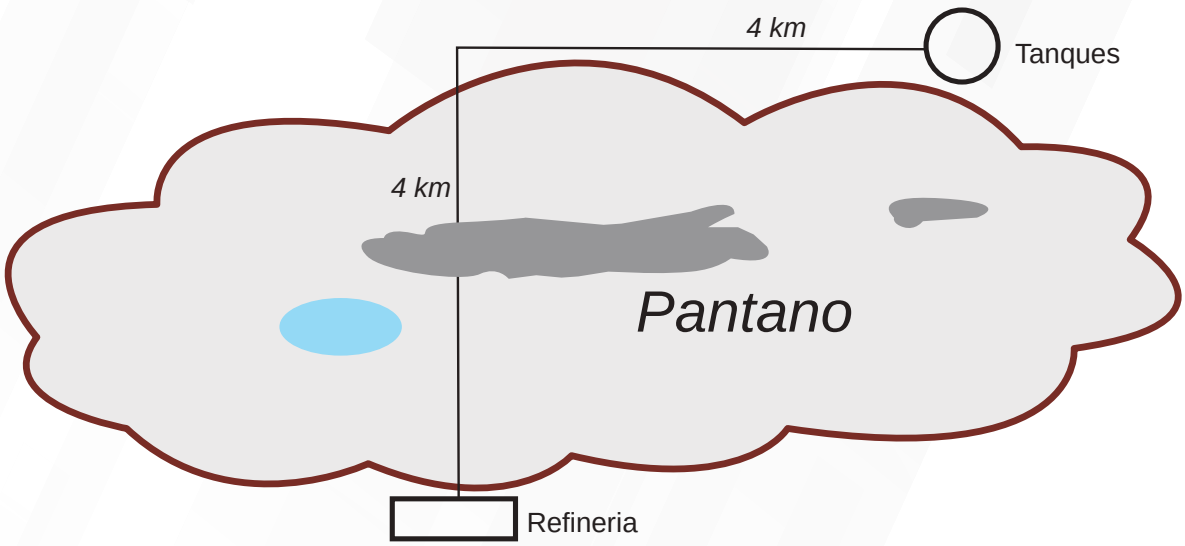


FIGURA 2.11

A) De acuerdo con la estrategia que has utilizado en los problemas de optimización anteriores, lo primero que necesitas obtener es el modelo matemático del problema. Para ello es bueno que empieces considerando trayectorias particulares y calcules los costos. Por ejemplo:

1) Si decidieras que la parte del oleoducto que fuera por el pantano fuera la menor posible, ¿Cuánto mediría ésta? ¿Y cuánto costaría? ¿Y cuánto mediría la parte del oleoducto construida sobre el terreno firme? y ¿Cuánto costaría? ¿Cuál sería el costo total del oleoducto?

2) Por el contrario si decidieras que la longitud del oleoducto fuera la más corta posible ¿Por dónde tendrías que construirlo? ¿Cuánto mediría? Y ¿Cuánto costaría?

3) También podrías decidir que la parte del oleoducto que fuera por el terreno firme midiera $2\ km$, en ese caso ¿Cuál sería la longitud del oleoducto que se construiría por el terreno pantanoso? ¿Y cuál sería el costo total del oleoducto en este caso?

4) Para obtener el modelo matemático del problema, observa el croquis del oleoducto que aparece en la figura y llama x a la distancia del punto A al punto B que indica el punto donde terminaría la parte del oleoducto que se construiría por el pantano y procede a determinar:

   a) ¿Cuánto mediría la parte del oleoducto que se construiría por el pantano y cuánto costaría?

   b) ¿Cuánto mediría la parte del oleoducto que se construiría por terreno firme y cuánto costaría?

c) ¿Cuál sería el costo total del oleoducto?

d) ¿Cuál es el menor valor que puede tener x? ¿Y cuál es el mayor?

e) Escribe el modelo matemático del problema

5) Si se quiere minimizar la función de costo que has obtenido como modelo matemático del problema del oleoducto, necesita derivarse dicha función, lo cual, de acuerdo con las reglas que hasta este momento conoces para derivar, no estás en condiciones de hacer. Por esta razón, para que puedas obtener la función derivada, sigue las instrucciones que se te dan a continuación, en el entendido que esta regla de derivación la podrás entender en el siguiente bloque en donde será objeto de estudio.

La función que debes haber obtenido como modelo matemático del problema es:

$$C(x) = 50\sqrt{4^2 + x^2} + 40\,(4 - x)$$

donde $C(x)$ es el costo del oleoducto (en miles de pesos) y x la distancia (medida en km) de A a B que se ilustra en el croquis. Para obtener su derivada:

a) Primero escribe de nuevo la función expresando la raíz como una potencia.

b) Luego deriva la función aplicando las reglas que consideres que son las que corresponden y que conociste en el Bloque 1, sólo que al derivar la función "raíz cuadrada" la multiplicarás por la derivada de la función que aparece en el radicando, es decir la multiplicarás por la derivada de $4^2 + x^2$

Si interpretaste bien las instrucciones al escribir de nuevo la función, debiste escribir:

$$C(x) = 50(4^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + 160 - 40x$$

y al derivarla debiste obtener:

$$C'(x) - 25(4^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) - 40$$

Que al simplificar y escribir de nuevo en forma de raíz cuadrada debiste obtener:

$$C'(x) = \frac{50x}{\sqrt{4^2 + x^2}} - 40$$

c) Luego es necesario que obtengas el valor de x donde esta derivada vale 0, pues ese valor corresponde al punto de la gráfica de $C(x)$ donde tiene una tangente horizontal y la ordenada de ese punto corresponde al mínimo valor de la función. Así que debes resolver la ecuación

$$\frac{50x}{\sqrt{4^2 + x^2}} - 40 = 0$$

Para lo cual debes despejar x. Hazlo y determina el valor de x que resuelve la ecuación.

Si lo hiciste bien debes haber obtenido:

$$x = \frac{16}{3} \ km$$

Que, como puedes ver, este valor de la variable x está fuera del intervalo donde la función es modelo matemático del problema, razón por la cual la solución de la ecuación no puede ser la solución del problema, es decir, no puedes creer que cuando la distancia AB es de aproximadamente $5.33\ km$ el costo del oleoducto sea el mínimo posible.

Analiza la situación en el diagrama que has hecho del oleoducto y la variación del costo en la gráfica de la función que modela el problema, con dos propósitos:

- Interpretar por qué el valor de x obtenido al resolver la ecuación no minimiza el costo del oleoducto a pesar de que dicho valor corresponde al punto de la gráfica donde ésta tiene una tangente horizontal.
- Determinar el valor de x que minimiza el costo del oleoducto.

Cierre

ACTIVIDAD 1

SD2-B1

En esta tercera y última secuencia didáctica de este segundo bloque dedicado a los problemas de optimización se espera que hayas mejorado tu comprensión de la manera en que las Matemáticas se utilizan para resolver este tipo de problemas al aplicarlas a los llamados problemas de minimización.

También se espera hayas mejorado tu manejo del objeto matemático llamado *derivada de una función* y ampliado su significado al ver que no sólo se utiliza para calcular la rapidez con que cambia una función en un punto y determinar sus valores máximos y mínimos, sino también se usa para determinar las regiones de crecimiento y de decrecimiento de la misma. Si lo que aquí se ha dicho te ha quedado claro, entonces dada una función cualquiera, podrás utilizar su derivada para analizar su variación, procediendo de la siguiente manera:

Dada una función $y = f(x)$

a) Para determinar si en un valor particular x_1 de la variable x, la función está creciendo, decreciendo o ni creciendo ni decreciendo, evaluarás su derivada y, si $f'(x_1) > 0$ sabrás que la función está creciendo; por el contrario, si $f'(x_1) < 0$, entonces sabrás que la función está decreciendo y si $f'(x_1)=0$ entonces la función ni está creciendo ni está decreciendo.

b) Si lo que se quiere determinar son los intervalos donde la función es creciente o decreciente, entonces bastará resolver la desigualdad $f'(x_1) > 0$ para determinar los intervalos de crecimiento; y la desigualdad $f'(x_1) < 0$ para determinar los intervalos de decrecimiento.

c) Si lo que se quiere determinar son los mínimos y los máximos relativos o locales de la función, entonces se determinarán:

i) Primero los valores de x para los cuales $f'(x_1) = 0$

ii) Luego, para cada uno de esos valores se tomará un valor a la izquierda y otro a la derecha y se evaluará $f'(x)$ en dichos puntos.

ii) Si a la izquierda resulta negativo y a la derecha positivo, entonces el valor de $f(x)$ en el punto donde $f'(x) = 0$ será un mínimo local de la función (Esto puedes verlo en la gráfica que aparece en la Figura 2.12)

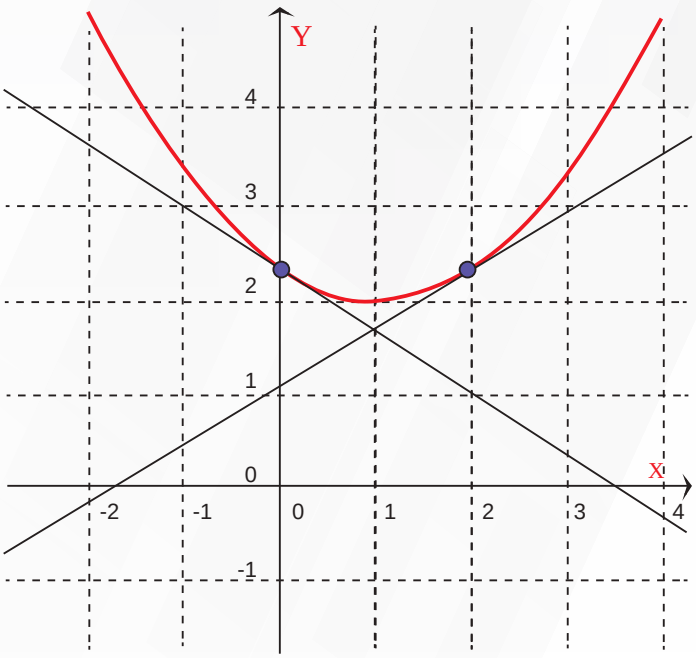


FIGURA 2.12

iv) Esto se debe a que si la derivada a la izquierda es negativa, la función está decreciendo y si a la derecha es positiva, la función está creciendo, de donde se deduce que si la derivada pasa de negativa a positiva el valor de la función en el punto donde $f\,'(x) = 0$ debe ser un mínimo.

v) Si sucede lo contrario, es decir si a la izquierda la derivada es positiva y a la derecha es negativa, entonces el valor de $f(x)$ en el punto donde $f\,'(x) = 0$ es un máximo. (Esto puedes verlo en la gráfica que aparece en la Figura 2.13)

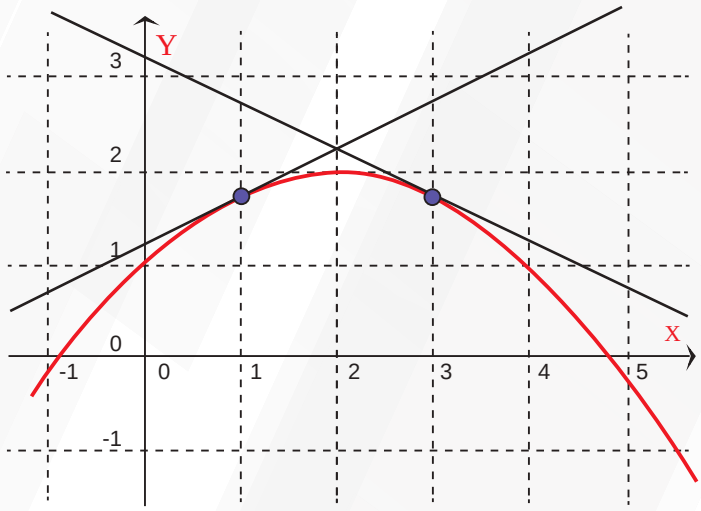


FIGURA 2.13

vi) Si lo que sucede es que el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha del punto donde $f\,'(x) = 0$, no cambia, entonces ese punto no es ni máximo, ni mínimo; pues si a ambos lados la derivada es positiva entonces a ambos lados la función será creciente y al punto donde $f\,'(x) = 0$ de denomina *punto de inflexión* y lo que indica es un cambio de la concavidad de la gráfica, que a su vez indica que la rapidez con que crece la función pasa de ser decreciente a ser creciente (Esto puedes verlo en la gráfica que aparece en la Figura 2.14)

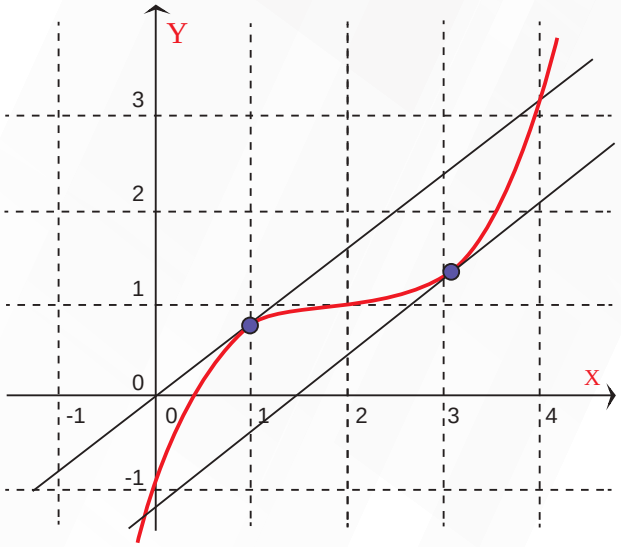


FIGURA 2.14

vii) Finalmente si la derivada tanto a la izquierda como a la derecha del punto donde $f'(x) = 0$, es negativa entonces será decreciente a ambos lados del punto y, en consecuencia, el punto será de inflexión y gráficamente se observará sólo un cambio de la concavidad de la curva que pasará de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo lo cual indicará que la rapidez con que varía la función pasará de ser creciente a ser decreciente (Esto puedes verlo en la gráfica que aparece en la Figura 2.15).



FIGURA 2.15

Discusión grupal (La participación del profesor es esencial)

Hasta el momento se han resuelto problemas de optimización empleando lo que en los textos suelen llamar "el criterio de la primera derivada". Pero también puede utilizarse el "criterio de la segunda derivada", en el cual no se profundizará en este módulo, pero se hará uso del mismo en el siguiente problema.

Una característica que has estudiado de las gráficas de las funciones es la concavidad, con la cual es posible representar o identificar si una variación creciente lo hace con rapidez a su vez creciente o decreciente y lo mismo sucede para el caso de variaciones que son decrecientes.

Pero también podemos identificar que si la gráfica de una función es cóncava hacia arriba, las rectas tangentes se ubican "por debajo de la gráfica de la función" y que el ángulo de inclinación es cada vez mayor, esto es, si el valor de x aumenta, la pendiente de la recta tangente aumenta. Esto significa entonces que la función derivada es creciente y por lo tanto tiene una derivada positiva. En este caso estamos hablando de la segunda derivada de la función original y tenemos, por lo tanto, que la segunda derivada de la función es positiva.



FIGURA 2.16

Un análisis similar se puede hacer para el caso de las funciones que son cóncavas hacia abajo, notando ahora que las rectas tangentes a la gráfica se ubican “por arriba de la gráfica de la función”. Sin embargo, como se puede observar en la Figura 2.17, ahora las pendientes de las rectas tangentes son cada vez menores y por lo tanto la derivada de la función derivada es decreciente, lo cual significa que el valor de la segunda derivada es negativo.

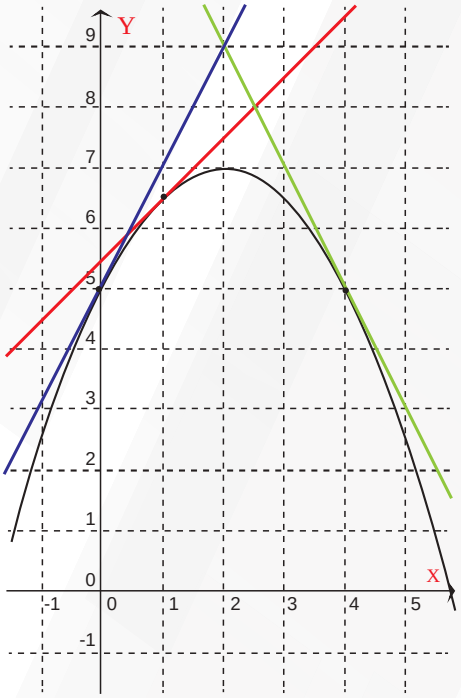


FIGURA 2.17

Si una función $y = f(x)$ se puede derivar dos veces, se llama segunda derivada a la derivada de la función derivada y se denota por:

$$y = f''(x) \text{ o } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ o } \frac{d^2f}{df^2}$$

Se cumple que:

1. Si $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de $y = f(x)$es cóncava hacia arriba.
2. Si $y = f''(x) < 0$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo.

ACTIVIDAD 1
SD3-B2

Determina los intervalos (los valores de x) en los cuales las gráficas de las siguientes funciones son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo. Con esa información y tus conocimientos sobre las funciones, elabora la gráfica de las funciones indicadas.

a) $y = x^2$

b) $y = x^3$

c) $y = x^2 + 3x - 2$

Considerando las concavidades de las funciones, es posible ahora determinar los valores en los cuales una función toma valores máximos y mínimos, utilizando la segunda derivada de una función. Para visualizar cómo proceder, observemos la Figura 2.18:

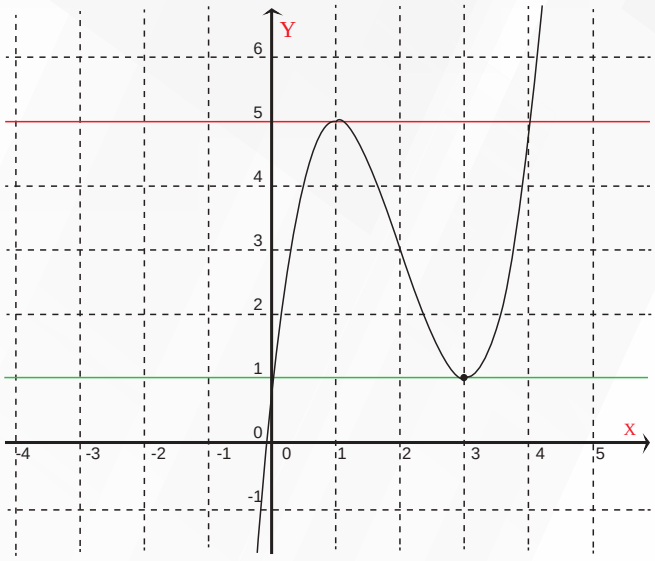


FIGURA 2.18

Para determinar el valor óptimo (máximo o mínimo) es necesario que sigas el siguiente procedimiento:

CRITERIO DE LA SEGUNA DERIVADA PARA MÁXIMIOS Y MÍNIMOS

1. Determina los valores de x para los cuales la función $y = f(x)$ tiene derivada igual a 0, esto es, los calores de x de los puntos de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente igual a 0.

2. Obtén la segunda derivada de $y = f(x)$ y evalúala en c, donde c es uno de los valores de x para los cuales $f'(c)=0$; si al hacerlo resulta que:

   a) $f''(c)>0$ entonces $y = f(x)$ tiene un mínimo en $x = c$.

   b) $f''(c)<0$ entonces $y=f(x)$ tiene un máximo en $x = c$.

   c) $f''(c)=0$ entonces el criterio de la segunda derivada no se puede emplear y es necesario analizar la situación con base en el criterio de la primera derivada, que es el usado en los problemas anteriores.

ACTIVIDAD 2

SD3-B2

La virulencia es un término que se emplea en biología y medicina para referirse a la capacidad de un microorganismo para producir una enfermedad.

En general la virulencia de un microorganismo se mide de acuerdo a diversos factores y en algunos casos se emplea una escala de 0 a 50, mediante la fórmula $V(t) = t^3 - 9t^2 + 15t+40$, donde V representa la virulencia y t el tiempo transcurrido en horas, a partir de iniciar un estudio para la medición de la virulencia. La fórmula sólo es aplicable en tanto el valor de V esté entre 0 y 50.

En un laboratorio se hace un estudio sobre la virulencia de una bacteria, durante 6 horas. Determina, empleando el criterio de la segunda derivada, los instantes en los que la virulencia es mínima y en los que la virulencia es máxima.



SERIE DE PROBLEMAS

1. Cuando se analizó el problema del granjero, se construyó una tabla que mostraba diversos valores para b (la longitud de uno de los lados del terreno que se quiere cercar y los correspondientes valores de $P(b)$, es decir, los correspondientes valores de la cantidad de cerca que se requiere. ¿Cómo puede mostrarse que esta tabla no contiene la solución exacta del problema?

2. Supóngase que $s(t)$ y t son dos variables relacionadas por la fórmula: $s(t) = 10 + 4t - 2t^2$ donde el valor de t está restringido por la condición $0 < t < 3$. Demuestra que en estas condiciones $s(t) = 11$ no es el máximo valor posible.

3. Calcula el mínimo valor que toma $s(t)$ del problema 2 en el intervalo de valores de t que ahí mismo se indica y determina para qué valor de t, $s(t)$ tiene ese valor. (Sugerencia: Traza la gráfica de $s(t)=10 + 4t - 2t^2$ que seguramente te ayudará a visualizar el comportamiento de $s(t)$ en el intervalo indicado).

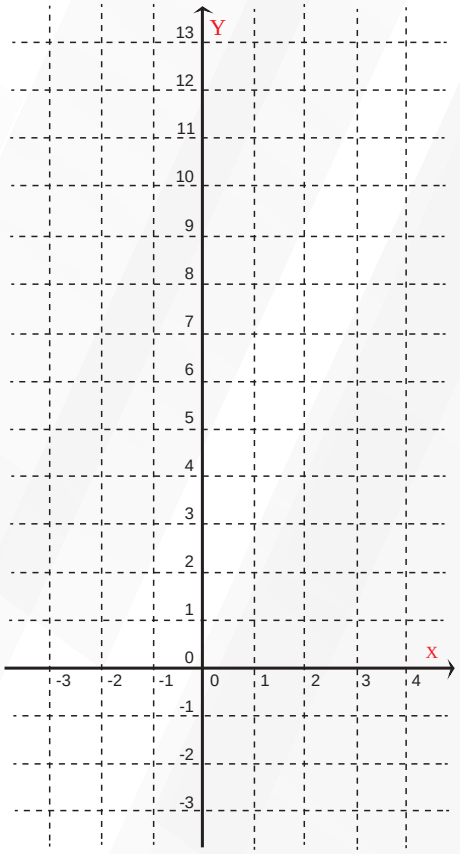


FIGURA 2.19

4. **El problema de la caja con tapa**. De un cartón rectangular de $50 \times 90\ cm$ se quiere fabricar una caja con tapa, recortando cuadrados de igual tamaño como se muestra en la Figura 2.17, doblando a lo largo de las líneas punteadas y recogiendo hacia adentro las cejas extras.

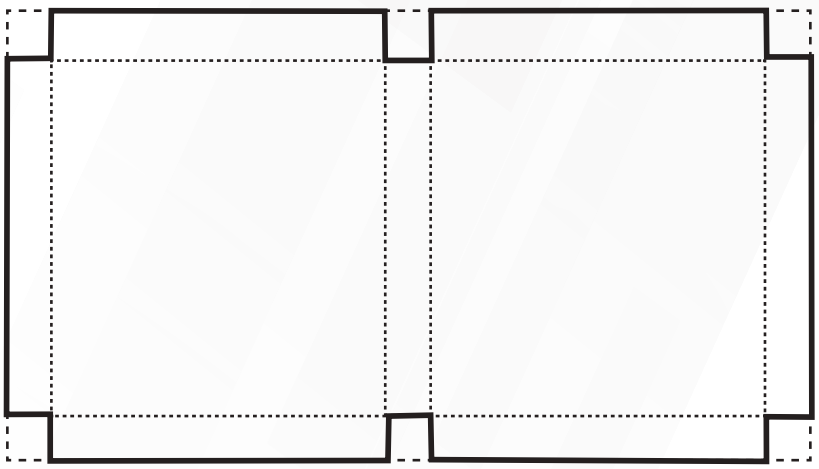


FIGURA 2.20

a) Si x representa la longitud de los lados de los cuadrados recortados en las esquinas, encuentra la expresión analítica con que puede calcularse el valor de $V(x)$, es decir, el valor del volumen de la caja con tapa a partir del valor de x.

b) Escribe una desigualdad que exprese las restricciones físicas sobre el valor de x.

c) Traza la gráfica de la variación de $V(x)$ con respecto a x

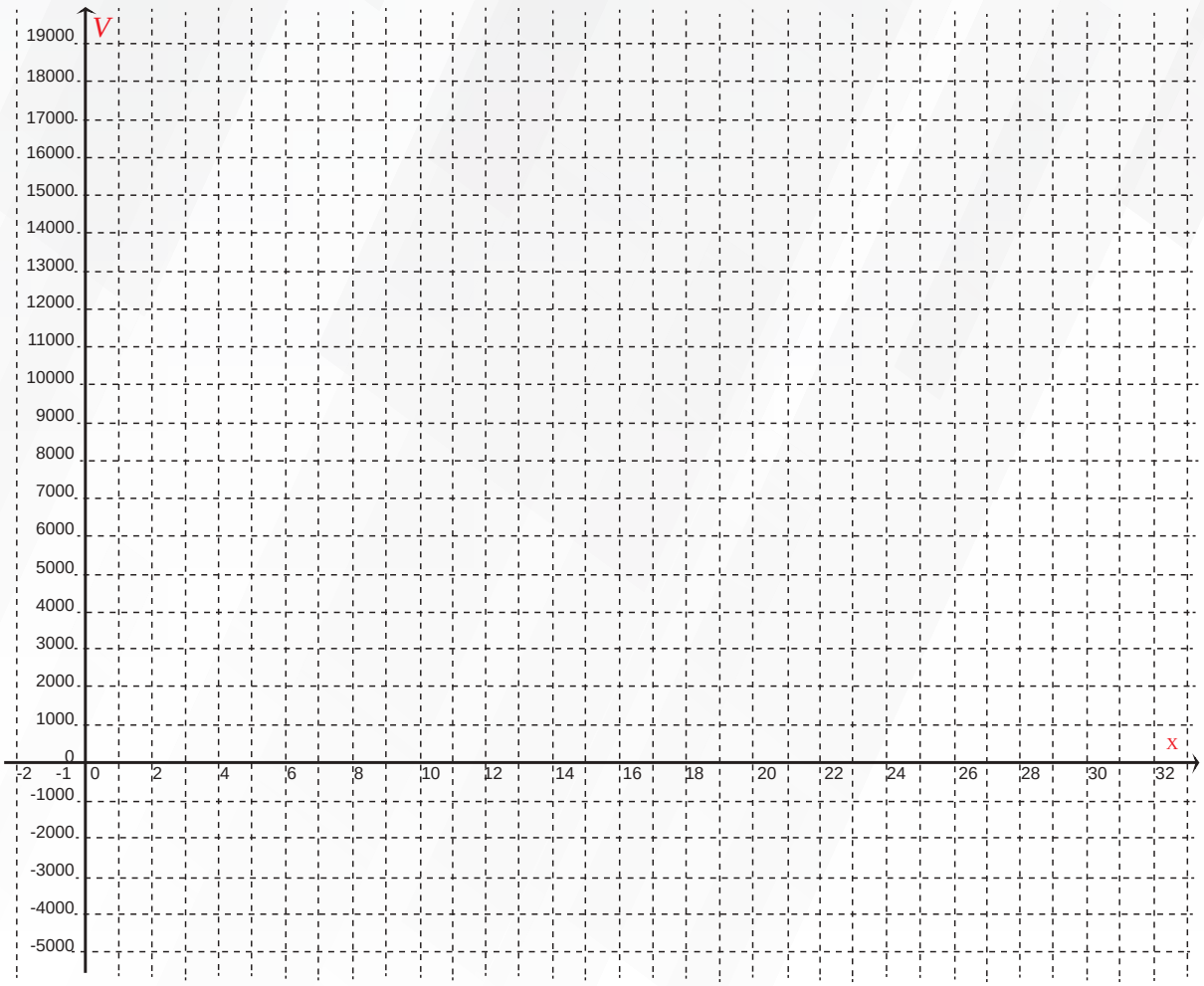


FIGURA 2.21

d) Estima las dimensiones de la caja de volumen máximo y luego calcúlalas utilizando lo que has aprendido sobre problemas de optimización

5. El problema del patio. López y Pérez poseen lotes vecinos de $25X50\ m$. López ha construido ya una cerca alrededor de su terreno, Pérez quiere construir ahora un patio rectangular para su perro, de área tan grande como sea posible, pero no dispone más que de $80\ m$ de alambre para cercar. Por supuesto Pérez puede utilizar parte de la cerca de López como la cerca de uno de los lados del patio que quiere cercar para su perro.

a) Si x representa la longitud de la porción de cerca de López que Pérez comparte, encuentra la expresión analítica que permite calcular el área del patio de Pérez en términos de x si sabemos que López y Pérez son vecinos por compartir la parte más larga de sus terrenos.

b) Encuentra una desigualdad para expresar las restricciones físicas sobre el valor de x.

c) Bosqueja la gráfica correspondiente a la expresión analítica del área $A(x)$.

d) Estima las dimensiones que Pérez debe usar para su patio y luego calcúlalas.

6. **El problema del anuncio en el periódico**. Una tienda departamental contrata regularmente un anuncio de $10x24\ cm$ en un díario. El periódico vende su espacio por cm^2 y obliga a los anunciantes a incluir márgenes de 1 cm arriba, abajo y a los lados de sus anuncios. ¿Puede la tienda departamental continuar gastando la misma cantidad de dinero, pero obtener más área de texto impreso alterando la forma de su anuncio? ¿Cuáles deben ser las dimensiones del anuncio para que el área escrita sea máxima?

7. **El problema del huerto de manzanas**. Un huerto de manzanas tiene actualmente 40 árboles por hectárea, con una producción promedio de 500 manzanas por árbol. Por cada árbol plantado adicional por hectárea, la producción promedio se reduce en alrededor de una docena de manzanas por árbol. ¿Puede obtenerse una cosecha mayor de manzanas al plantar un número mayor de árboles? Estima el número de árboles que deberán plantarse por hectárea para que la producción sea máxima.

8. **El problema del correo**. Un paquete puede enviarse por correo ordinario solamente si la suma de su altura y el perímetro de su base es menor que $2.5m$. Encuentre las dimensiones de la caja del volumen máximo que puede enviarse por correo si la base de la caja es cuadrada.

9. **El problema de las vallas**. Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular y dividirlo en dos parcelas por una valla paralela a uno de los lados. Si el área del campo es dada, hallar la razón de los lados para que la longitud de la valla sea mínima.

10. **El problema del cable más corto**. Dos postes con longitud de 6 y $8\ m$ respectivamente se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas por una distancia de $10\ m$. Calcula la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los dos postes y luego hasta la punta del otro poste.

11. **El problema del yate y el vapor**. Un yate se mueve en línea recta hacia el punto donde se encuentra un vapor con una velocidad de $60\ km/hr$. En el momento en que la distancia entre ambos es de $4.225\ km$, el vapor se empieza a mover en dirección perpendicular a la del yate con una velocidad de $25\ km/hr$. Determinar el momento en que las embarcaciones se encuentran a la mínima distancia.

12. **El problema de la escalera**. Una cerca de $8\ pies$ de altura colocada al nivel del piso corre paralela a un edificio alto. La cerca se encuentra a $3\ pies$ del edificio. Encuentra la longitud de la escalera más corta que pueda colocarse en el suelo y recargarse en el edificio por encima de la cerca.





AUTOEVALUACIÓN

Al igual que en el primer bloque de este módulo de aprendizaje y en todos bloques de los anteriores módulos, éste termina con la sección denominada Autoevaluación, así que seguro sabes muy bien cuál es su propósito y en qué consiste. Se espera que también tengas una opinión de qué tan útil te ha resultado realizar las actividades propuestas en ellas, ojalá esta opinión sea favorable en el sentido de que consideres que tener la oportunidad de reflexionar sobre lo que has aprendido y sobre las cuestiones que todavía no tienes claras y las dificultades que has tenido, te resulte útil a la hora de tomar decisiones sobre qué hacer para mejorar.

Una buena manera de iniciar la actividad de Autoevaluación es revisar la introducción al Bloque para tener presente lo que se espera sepas y sepas hacer al terminar de estudiarlo, es decir, al terminar de realizar las actividades de las diferentes secuencias. Después de hacerte consciente de lo que se espera de ti, cerciórate en qué medida lo has logrado, resolviendo los siguientes problemas y, si en alguno o algunos de ellos, no sabes cómo proceder o no sabes si lo que hiciste es correcto o no, toma nota para que consultes con el profesor, con otros compañeros o con quien tú decidas para que te ayuden a aclarar tus dudas.

Problema 1. Estima en la gráfica mostrada en la Figura 2.15 las coordenadas de los puntos en los que la tangente tiene pendiente igual a cero.



FIGURA 2.22

Problema 2. Suponte que $y(x)$ y x son dos variables relacionadas por la fórmula: $y(x)=(x-2)^2 + 3$, sin ninguna restricción para los valores de x. Explica por qué en estas condiciones $y(x) = 3$ es el mínimo valor posible.

Problema 3. Para las siguientes funciones determina su valor máximo y su valor mínimo en el intervalo que se señala en cada caso. Justifica tu respuesta

a) $f(x) = 40 - 2x$ para $0 \leq x \leq 10$

b) $f(x)=1+\sqrt{1} + x$ para $0 \leq x < 9$

c) $f(x) = 4 + x^2$ para $-2 \leq x < 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$ para $3 < x \leq 5$

e) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ para $-3 < x \leq 1$

Problema 4. El problema del cenicero. Con una hoja de estaño, de $8 \, X \, 15 \, cm$ se hace un cenicero recortando cuadrados de igual tamaño de las esquinas y doblando las cejas para formar los lados.

a) Si x representa la longitud de los lados de los cuadrados recortados en las esquinas, encuentra una expresión analítica para calcular el volumen del cenicero en términos de x.

b) Encuentra una desigualdad para expresar las restricciones físicas sobre el valor de x.

c) Traza la gráfica de la variación de $V(x)$ con respecto a x.

d) Estima las dimensiones del cenicero de volumen máximo y luego calcúlalas.

Problema 5. **El problema del depósito rectangular**. Se desea construir un depósito rectangular de base cuadrada, abierto por arriba, que debe tener $125\ m^3$ de capacidad. Si el costo de las caras laterales es de $\$\ 400.00$ por metro cuadrado y el del fondo es de $\$500.00$ por metro cuadrado ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo se mínimo?

Problema 6. **Tercer problema de la ventana**. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado con un triángulo equilátero. El área de la ventana es de $3.4\ m^2$. Encuentra las dimensiones del rectángulo para el cual el perímetro de la ventana es mínimo

Problema 7. **El problema del tanque de gas**. Se desea construir un tanque de acero para almacenar gas propano; que tenga forma de un cilindro circular recto con un hemisferio en cada extremo. La capacidad deseada es de $2m^3$. ¿Cuáles son las dimensiones que requieren menor cantidad de acero?

MIS ANOTACIONES:

Bloque 3

18 Horas

Estudiando la Función Derivada

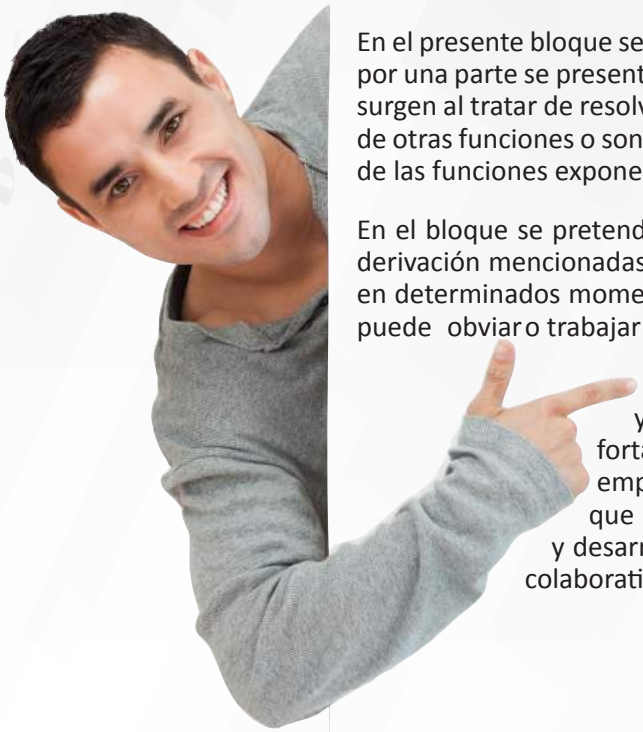


Introducción B-III

Aunque los orígenes del Cálculo Diferencial e Integral pueden ubicarse en el remoto pasado, incluyendo los notables trabajos de Arquímedes, quien vivió entre los años 287 a.n.e. a 212 a.n.e, se reconoce como sus fundadores a Isaac Newton y a Gottfried Wilhelm Leibniz.

Newton y Leibniz desarrollaron las ideas del cálculo durante la segunda mitad del Siglo XVII, trabajando cada quien de manera independiente, es decir, sin conocer uno, lo que estaba haciendo el otro y las desarrollaron resolviendo, precisamente, problemas similares a los que se han estudiado en los Bloques 1 y 2 de este módulo. Particularmente Newton, interesado en el estudio del movimiento de los planetas alrededor del sol, desarrolló un método para la determinación de la velocidad instantánea de un cuerpo que se mueve con velocidad variable, en tanto Leibniz estaba más interesado en la resolución de problemas de carácter geométrico, en particular desarrolló un método para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un determinado punto.

Las ideas y conceptos originales de Newton y Leibniz han sufrido algunas modificaciones desde su creación hasta la actualidad, pero persisten en general sus métodos y concepciones fundamentales, así como también se usa, en lo esencial, la notación creada por Leibniz para denotar a los objetos del cálculo.



En el presente bloque se profundizará en el estudio de la derivada en dos aspectos: por una parte se presentarán algunas reglas necesarias para derivar funciones que surgen al tratar de resolver diversos problemas y que son el producto o el cociente de otras funciones o son funciones compuestas y, por otra, se estudiará la derivada de las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

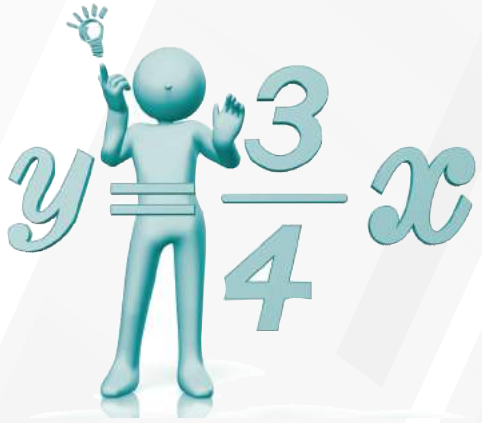
En el bloque se pretende que aprendas, fundamentalmente, a usar las reglas de derivación mencionadas y las derivadas de las funciones indicadas. Sin embargo, en determinados momentos se presentan algunas ideas formales que el profesor puede obviar o trabajar de forma combinada entre clases, exposiciones y tareas.

En general, se espera que en el bloque aprendas a obtener y a utilizar la función derivada de las funciones presentadas, fortalezcas tus concepciones del cálculo diferencial con el empleo de representaciones gráficas, numéricas y algebraicas, que aprendas a comunicar tus ideas en el uso de la derivada y desarrolles competencias para el trabajo tanto individual como colaborativo.

Secuencia Didáctica 1

- Las reglas elementales de derivación

Inicio



En los bloques anteriores has tenido oportunidad de darte cuenta de la gran utilidad de la derivada para analizar y resolver diversos problemas de variación, especialmente la has utilizado en los denominados problemas de optimización.

También aprendiste una serie de reglas elementales para obtener la derivada de ciertas funciones, entre las que se encuentran:

a) La regla para obtener la derivada de una función potencia

b) La regla para obtener la derivada de una suma de funciones

c) La regla para obtener la derivada del producto de una función por una constante.

En realidad, al tratar de resolver cierto tipo de problemas, al modelarlos matemáticamente, aparecerán funciones cuya derivada no podrías obtener todavía. Las actividades de esta secuencia están planeadas para que conozcas otras reglas de derivación que te permitan obtener la derivada de una mayor diversidad de funciones y, como consecuencia, te hagas más competente para utilizarla en la resolución de un mayor número de problemas.

ACTIVIDAD 1 La regla para derivar funciones compuestas

SD1-B3

En la actividad 3 de desarrollo del bloque 2 resolviste el problema del oleoducto, en el cual aparece la función de costo $C(x) = 50\sqrt{4^2 + x^2} + 40(4 - x)$, de la cual obtuviste su derivada como:

$$C'(x) = \frac{50x}{\sqrt{4^2 + x^2}} - 40$$

Para hacerlo, se tomó en cuenta que la derivada de la función $y = \sqrt{x}$ es $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pero esa regla se aplicó a $\sqrt{4^2 + x^2}$ y el resultado se multiplicó por la derivada de la función que aparece en el radicando, esto es por la derivada de la función $y = 4^2 + x^2$.

Esta regla de derivación, que en Matemáticas se conoce como "*La regla de la cadena*", es correcta y tiene una justificación que aún no conoces pero que estudiarás en la primera actividad de desarrollo de esta misma secuencia. Sin embargo, en esta actividad, considerando que te resultará de utilidad familiarizarte un poco más con dicha regla, antes de estudiar su justificación, utilízala para obtener la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{3x^2 - 2x}$

b) $y = (x^4 + 3x)^7$

ACTIVIDAD 2 Las reglas para derivar funciones que son el producto o el cociente de funciones.

SD3-B2

Otros casos que se presentan en la resolución de diversos problemas matemáticos se relacionan con funciones que son el producto o el cociente de otras funciones. Veamos algunos ejemplos:

a) Al tratar de resolver cierto problema de optimización, la función que lo modela matemáticamente es $y = (3x - 1)^2 (x + 2)^3$ que necesitas derivar para determinar el máximo y el mínimo valor de y en un cierto intervalo. Como puedes observar, la función está expresada como el producto de las funciones $u = (3x - 1)^2$ y $v=(x + 2)^3$ y . Para derivarla puedes transformar la expresión efectuando las operaciones indicadas y obtener una función polinómica que sí sabes derivar. Hazlo y obtén la función derivada y'.

b) ¿Podrías obtener la función derivada de otra manera? Si es así, comprueba que obtuviste el mismo resultado que en el inciso anterior.

c) ¿Cuál es la función derivada de $y = (x - 1)^5 (x + 2)^7$?

d) Obtén la derivada de la función $y = \frac{x^2+5x-2}{x^3-3x}$ y explica qué hiciste para obtenerla.

Desarrollo

ACTIVIDAD 1 La regla de la cadena

SD1-B3

En la primera actividad de las de inicio, se hizo explícito que para derivar la función $C(x) = 50\sqrt{4^2 + x^2} + 40(4 - x)$, al derivar $\sqrt{4^2 + x^2}$, se derivara de la misma manera que se deriva $\sqrt{x}$ y que el resultado se multiplicara por la derivada de $4^2 + x^2$. Esta nueva actividad tiene como propósito darle sentido a esta regla, es decir, la pretensión es que comprendas su significado. Para lograr esto vamos a analizar el comportamiento de una función que de seguro te resultará muy familiar.

1.-El volumen de un cilindro se puede calcular utilizando la función representada analíticamente por la expresión $V = Ah$, donde A representa el área de la base y h la altura del cilindro; expresión en la que resulta evidente que el volumen del cilindro depende de dos variables: del área A de la base y de la altura h del cilindro.

a) Si ahora consideramos todos los cilindros que tienen la misma base, es decir, si consideramos fijo el valor del área A ¿De qué variable depende, en este caso, el valor del volumen V?

b) Dibuja tres cilindros con alturas diferentes que tengan la misma base y determina su volumen.

c) Si ahora dejamos fijo el valor de la altura ¿De qué variable depende el volumen?

d) Consideremos todos los cilindros cuya altura sea $h = 15\ cm$ y dibuja tres de esos cilindros con diferente base, es decir, con base de diferente área A.

e) Escribe ahora la expresión analítica con la que se puede calcular el volumen V de cualquier cilindro cuya altura mida $15\ cm$, en función del área A de su base.

f) Determina la derivada de la función que has obtenido en 5 y explica qué significa para ti el valor de dicha derivada.

g) Con base en lo que significa para ti el valor de la derivada, determina ¿Cuánto aumentará el volumen V del cilindro si el área A de su base aumenta 3 unidades?

h) El área de la base del cilindro, cuando se trata de un cilindro circular, depende, a su vez, del radio r del círculo, pues $A(r) = \pi r^2$. Determina la rapidez instantánea de cambio del área A, con respecto al radio r.

i) En 5.- escribiste una expresión analítica para calcular el valor del volumen V del cilindro de altura $h = 15\ cm$ en función del área A de la base. Escribe ahora la expresión para calcular el volumen del cilindro en función del radio de la base y escribe también la expresión analítica con la que se puede calcular la rapidez instantánea de cambio del volumen V del cilindro con respecto al radio r de la base.

j) Compara ahora la expresión obtenida de $V'(r)$ con el resultado de multiplicar $V'(A)$ por $A'(r)$ y escribe lo que significa para ti la igualdad:

$$V'(r) = V'(A)A'(r)$$

ACTIVIDAD 2

SD1-B3

En el Módulo de Física 1 se establece que la velocidad de un objeto que se mueve en caída libre tiene una velocidad que se puede calcular mediante la expresión $v(t) = -9.81t$ y, por otra parte, la energía cinética que adquiere un cuerpo en movimiento se rige por la Ley $E_C(v) = \frac{1}{2}mv^2$.

1.- Si un objeto de $0.5kg$ de masa cae libremente desde una altura de $100\ m$.

a) Escribe la expresión para determinar su energía cinética en función de su velocidad.

b) Con base en la expresión obtenida en a) obtén ahora una expresión para determinar la rapidez instantánea de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad.[1]

c) Utilizando la expresión con que se calcula la velocidad en función del tiempo en la caída libre, obtén una expresión para calcular la rapidez instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo.

d) Escribe ahora una expresión para determinar la energía cinética del objeto en función del tiempo en la caída libre y obtén también la expresión analítica que permite calcular la rapidez instantánea de cambio de la energía cinética con respecto al tiempo.

e) En el inciso b) obtuviste una expresión analítica para calcular la rapidez instantánea de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad; luego en el inciso c) obtuviste una expresión analítica para calcular la rapidez instantánea de cambio de la velocidad con respecto al tiempo en la caída libre y finalmente en el inciso d) obtuviste una expresión analítica para calcular la rapidez instantánea de cambio de la energía cinética con respecto al tiempo. Observa estas expresiones y determina si se cumple que:

$$E'_c(t) = E'_c(v)\, v'(t)$$

Y enuncia con tus propias palabras lo que significa que se cumpla o no la igualdad.

2. Considera un prisma de base cuadrada cuya altura h mide 20 cm.

a) Escribe una expresión analítica para calcular el volumen V en dependencia del área A de su base. Obtén también una expresión analítica para calcular la rapidez instantánea de cambio del volumen V del prisma con respecto al área A de la base.

b) Escribe una expresión para calcular el área A de la base en función de la longitud de su lado l. Obtén también una expresión para calcular la rapidez instantánea de cambio del área A de la base con respecto a la longitud l de su lado.

c) Multiplica las dos razones instantáneas de cambio anteriores y compáralas con la razón instantánea de cambio del Volumen V del prisma con respecto a la longitud l del lado de la base.

En los tres casos que se han analizado se ha partido de una función cuya variable independiente es, a su vez, función de otra variable. Así, por ejemplo, en el primero de ellos, partimos de la función del volumen de un cilindro circular recto de altura $h = 15\ cm$, esto es, partimos de la función $V(A) = 15A$, que tiene como derivada $V'(A) = 15$, que indica que la rapidez instantánea con que cambia el volumen con respecto al área de la base, es constante y vale 15.

Luego vimos que el área A es una función del radio r de la base, siendo $A(r) = \pi r^2$, de donde se sigue que su derivada es $A'(r) = 2\pi r$ que indica que la rapidez instantánea con que cambia el área de la base es directamente proporcional al radio y su valor es $2\pi r$.

Después, sustituyendo el valor de A en la expresión $V(A) = 15A$ se obtuvo $V(r) = 15\pi r^2$ que es la expresión con la que se calcula el volumen V del cilindro en función del radio, y cuya derivada es $V'(r) = 30\pi r^2$ que es la expresión con que se calcula la rapidez instantánea con que cambia V con respecto a r.

Finalmente se observó que la rapidez instantánea con que cambia V con respecto a r es igual al producto de la rapidez con que cambia V con respecto a A por la rapidez con que cambia A con respecto a r, es decir, se observó que $V'(r) = V'(A)A'(r)$.

Como esto sucedió también en el caso de la función $E_c(v)= \frac{1}{2} mv^2$, donde v es a su vez una función del tiempo t, donde pudimos ver que:

$$E'_c(t)= E'_c(v)\, v'(t)$$

Que significa que la rapidez con que cambia la energía cinética con respecto al tiempo es igual al producto de la rapidez con que cambia la energía cinética con respecto a la velocidad por la rapidez con que cambia la velocidad con respecto al tiempo.

Y lo mismo sucedió con el volumen del prisma en el que se observó que:

$$V'(l) = V'(A)A'(r)$$

Puede aceptarse que se trata de una regla general la cual se enuncia a continuación

La operación que consiste en aplicar una función a otra función, se le llama *composición de funciones* y a la función que se obtiene de esta operación se le denomina *función compuesta* o *función composición*.

Si se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, a la función composición se le representa por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para indicar que la función $f(x)$ se aplica a $g(x)$; de la misma manera $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ significa que la función $g(x)$ se aplica a $f(x)$.

Si se tienen dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ derivables, entonces la derivada de la función composición $y=(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f'(x))$$

A esta forma de derivar una función composición se le conoce con el nombre de ***regla de la cadena***.

3.- En los siguientes casos se proporcionan dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. En cada uno de ellos determina la función composición $(g \circ f)(x)$ y obtén su derivada $(g \circ f)'(x)$

a) $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x^5$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, $g(x) = x^7$

c) $f(x) = 4x - 2x^5$, $g(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = 2x^4 + 5x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$

4. Obtén la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = (6x - 5x^3)^5$

b) $y = \sqrt{2x^2 - 5x}$

c) $y = (x^7 + 2x^3)^9$

d) $y = \frac{1}{x^2 + x}$

e) $y = \frac{5}{2x^3 - x^2}$

En el Bloque 1 se estudió la función $y = \frac{1}{x}$, encontrando que $y' = -\frac{1}{x^2}$. Este hecho permite hacer el cálculo de muchas derivadas que tienen una forma similar, por ejemplo las funciones de los incisos d y e del punto anterior.

En general si se tiene una función de la forma $y = \frac{1}{g(x)}$ con $g(x)$ una función derivable, entonces $y' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

ACTIVIDAD 3 La derivada de un producto de funciones

SD1-B3

Al resolver determinadas situaciones es frecuente encontrar la necesidad de obtener la función derivada de un producto de funciones, como por ejemplo $f(x) = (x^2 - x^3)^5 (2x^3 - 5x)^7$. ¿Cómo proceder en este caso?

Para obtener la función derivada de un producto de dos funciones cualesquiera, lo cual se puede escribir como $y = f(x)\, g(x)$, se procede como en los casos anteriores, es decir, calcularemos:

a) Primero Δy, esto es, el incremento de la función producto.

b) Posteriormente obtendremos la razón promedio de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es decir, el cociente del incremento de la función entre el incremento de la variable.

Por último calcularemos el valor del $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ que es lo que llamamos derivada de la función.

Para proceder a realizar estos cálculos utilizaremos la Figura 3.1 como auxiliar, en la cual el valor de $f(x)$ representa la longitud de la base del rectángulo señalado con R_1 y $g(x)$ representa la altura, de tal manera que y representa el área de dicho rectángulo puesto que $y = f(x)\, g(x)$.

En la figura también se observa que al incrementar en Δx el valor de x se incrementan los valores de $f(x)$ y de $g(x)$, es decir, los valores de $f(x + \Delta x)$ y de $g(x + \Delta x)$ se han incrementado $\Delta f(x)$ y $\Delta g(x)$ respectivamente con respecto a los valores de $f(x)$ y de $g(x)$ y como consecuencia se ha incrementado el valor del área del rectángulo, es decir, se ha incrementado el valor de y en Δy.

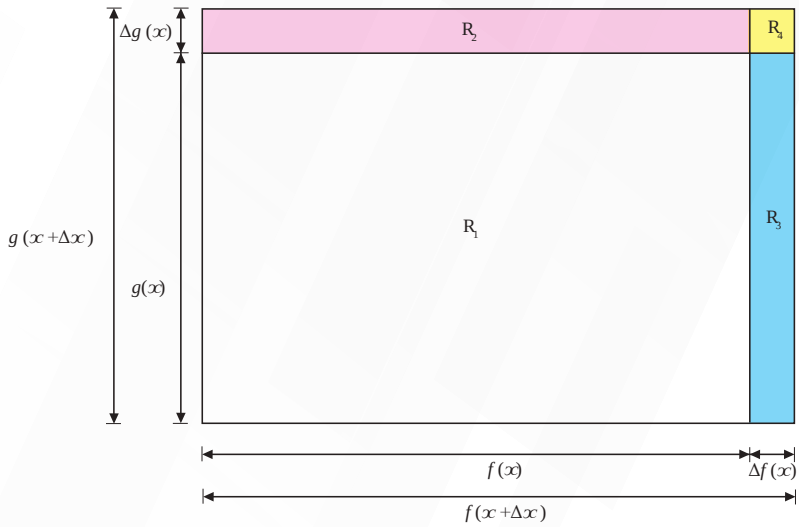


FIGURA 3.1

De acuerdo con la figura hay dos maneras de calcular el incremento del área del rectángulo, es decir Δy; una es restando al área del rectángulo que resulta al incrementar las dimensiones de la base y de la altura, el área del rectángulo original, esto es:

$$\Delta y = f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) - f(x)\, g(x)$$

La otra es calculando el área de cada una de las regiones R_2, R_3 y R_4 y sumándolas; pues en la figura es evidente que estos rectángulos representan el incremento Δy.

1. Escribe a continuación cómo obtener el área de:

   a) La región R_2

   b) La región R_3

   c) La región R_4

   d) Δy (Utilizando los resultados obtenidos en los incisos a), b) y c))

2. Utilizando la expresión $\Delta y = f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)$, la expresión para calcular el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x)\, g(x + \Delta x) - f(x)\, g(x)}{\Delta x}$$

   Ahora tú escribe la expresión para calcular el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ utilizando la expresión obtenida en el segundo procedimiento establecido para calcular Δy

Se espera que hayas escrito la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)g(x) + \Delta g(x)f(x) + \Delta f(x)\,\Delta g(x)}{\Delta x}$$

Donde el miembro derecho de la igualdad puede escribirse como la suma de tres fracciones y obtener:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)\,g(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)\,f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta f(x)\Delta g(x)}{\Delta x}$$

Que es equivalente a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x) + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}f(x) + \frac{\Delta f(x)\Delta g(x)}{\Delta x}$$

3. Se espera que tengas claro que esta expresión, que hemos obtenido, representa la razón promedio de cambio de y con respecto a x, es decir, la rapidez promedio con que cambia y con respecto a x y que la derivada es la razón instantánea de cambio o la rapidez instantánea con que cambia y con respecto a x y también se espera que tengas claro que para obtener la expresión analítica de la razón instantánea de cambio, esto es, de la derivada, se requiere calcular $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

   La derivada de la función $y = f(x)\,g(x)$ es:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

   O, lo que es lo mismo,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x) + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}f(x) + \frac{\Delta f(x)\Delta g(x)}{\Delta x} \right]$$

   Que de acuerdo con las propiedades de los límites enunciadas en el Bloque 1, dado que se trata del límite de una suma de funciones, su límite es igual a la suma de los límites de cada uno de los sumandos, eso significa que ahora podemos escribir:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}g(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}f(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\Delta g(x)$$

   Y como ahora cada uno de estos límites es el límite de un producto, aplicando la propiedad del límite de un producto que establece que ese límite es igual al producto de los límites de cada uno de los factores y como $g(x)$ y $f(x)$, en este caso son valores constantes puesto que no dependen del valor de Δx, el límite que nos interesa calcular puede ahora escribirse:

$$y' = g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g(x)$$

Ahora sólo necesitamos determinar $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$ y $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta g(x)$

a) ¿Qué es $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ de la función $f(x)$? y ¿Qué es el $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$ de la función $g(x)$?

b) ¿Qué sucede con el valor de $\Delta g(x)$ a medida que el valor de $\Delta x \to 0$?

c) Con base en lo que respondiste en el inciso anterior ¿Cuál será el $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta g(x)$?

d) Con base en las respuestas que diste a las preguntas formuladas en los incisos a) y c) determina ¿Cómo se calcula la derivada de la función $y = f(x)\, g(x)$?

Se espera que hayas podido concluir que:

Si $y = f(x)\, g(x)$ es el producto de dos funciones derivables, entonces el producto es derivable y

$$y = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

4. Utilizando la regla para derivar una función que es el producto de dos funciones, así como la regla de la cadena, obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^6 (x + 3)^5$

b) $y = (x – 3)^4 (x + 4)^5$

c) $f (x) = (x^2 – x^3)^5 (2x^3 –5 x)^7$

d) $f (x) = (x – 1)^5\sqrt{x}$

e) $y = (3x^2 + 2x + 1)^4\sqrt{x}$

f) $y = (6x – 5x^3)^5\sqrt{2x^2 – 5x}$

ACTIVIDAD 4 La derivada de una función que es cociente de funciones

SD1-B3

1. Considérese ahora una función racional, esto es, una función que es el cociente de otras dos funciones, por ejemplo $y = \frac{x^2+1}{x-3}$

   a) Utilizando las propiedades de los exponentes escribe la función como un producto de funciones.

   b) Obtén la función derivada aplicando la regla del producto ya establecida.

2. Procede igual que en el ejercicio anterior pero ahora para el caso general $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Se espera que hayas logrado formular la siguiente regla para derivar funciones que son el cociente de otras funciones, esto es, que hayas establecido algo similar al enunciado que aparece a continuación:

Si se tiene una función racional de la forma $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $f(x)$ y $g(x)$ derivables, entonces

$$y = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$$

1. Utilizando la nueva regla de derivación y algunas otras de las establecidas anteriormente, obtén la función derivada de las siguientes funciones:

   a) $y = \frac{x+2}{x+1}$

b) $y = \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^3 - 3x}$

c) $y = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 2}$

d) $y = \frac{(2x^2 - 3x)^4}{(3x - 1)^5}$

e) $y = \frac{x\sqrt{x - 2}}{(3x^2 + 2x^3)^4}$

f) $y = \frac{(2x^4 - 5x)^3}{\sqrt{3x^2 - 4x^5}}$

Secuencia Didáctica 2

- La derivada de las funciones exponenciales

Inicio

El Bloque 3 del Módulo de Matemáticas 4 fue dedicado al estudio de dos tipos especiales de variación, denominadas variación exponencial y variación logarítmica. Como consecuencia de dicho estudio, conociste los modelos matemáticos correspondientes a cada uno de estos tipos de variación, las llamadas *función exponencial* y *función logarítmica*, que utilizaste para analizar y comprender las características fundamentales de estos tipos de variación; por esta razón se espera que recuerdes:

a) El tipo de fenómenos que varían exponencialmente y los que varían logarítmicamente; en particular se espera que recuerdes algunos de los fenómenos estudiados y la importancia de estudiarlos, como es el caso del crecimiento poblacional o el del crecimiento del área de la mancha de petróleo que se forma al derramarse una cierta cantidad de este preciado combustible en el mar; o el de la determinación de la antigüedad de un fósil.

b) Las diferentes formas de representar matemáticamente la variación de este tipo de fenómenos, esto es, las diferentes representaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas (analítica, gráfica y tabular) y cómo se usan para el análisis de la variación.

En esta secuencia estudiarás de nuevo las funciones exponenciales y en la secuencia 3 estudiarás de nuevo las funciones logarítmicas con el propósito de aprender a derivarlas pues, por el uso que has hecho de la derivada de diversas funciones en los dos bloques anteriores, se espera que estés plenamente convencido de la gran utilidad e importancia que tiene para el estudio de la variación.

ACTIVIDAD 1

SD2-B3

Antes de aprender a derivarlas, te será útil repasar algunas de las propiedades de estas funciones que estudiaste en el curso de Matemáticas 4. Seguramente recordarás que la representación analítica básica de las funciones exponenciales es:

$$y = a^x$$

donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y a es una constante positiva denominada *base de la función*.

y también recordarás que la forma en que se representan gráficamente estas funciones es como las curvas trazadas en los dos sistemas de coordenadas que aparecen en la Figura 3.2.

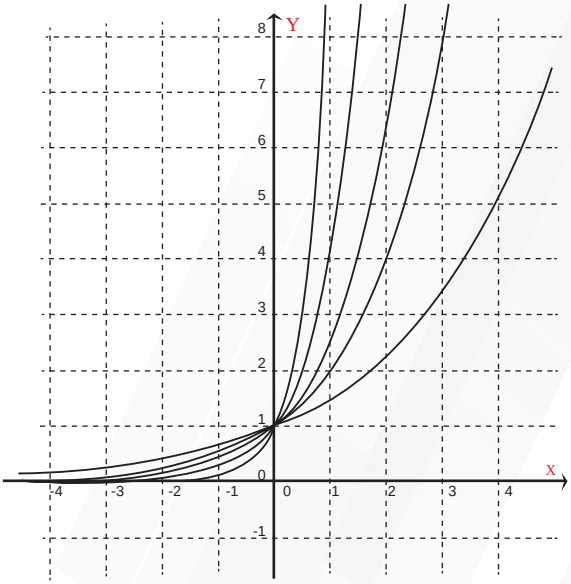


FIGURA 3.2a

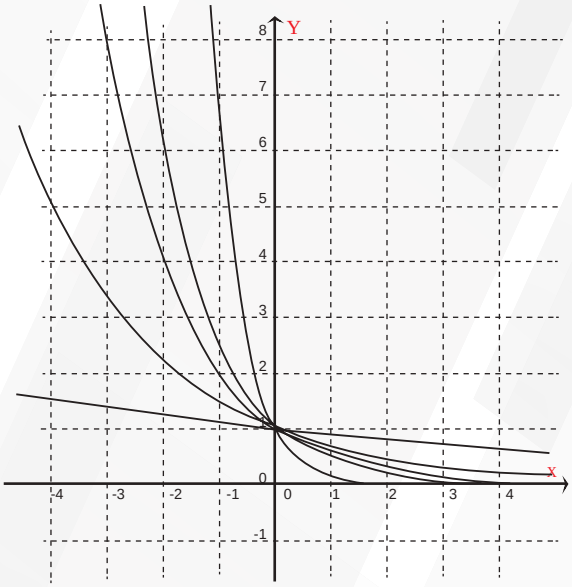


FIGURA 3.2b

1) Observa las gráficas del inciso a) que corresponden, todas ellas a funciones exponenciales y di ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian?

2) Y las que aparecen en el inciso b), que también corresponden a funciones exponenciales ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian?

3) Y si comparas las del inciso a) con las del inciso b) ¿En qué se diferencian y qué tienen en común?

4) Seguramente tienes claro que cada una de estas gráficas está asociada a una expresión analítica de la forma $y = a^x$. ¿Qué tienen en común todas las expresiones analíticas asociadas a las gráficas del inciso a) y qué tienen diferente?

5) Y las del inciso b), ¿Qué tienen en común todas las expresiones analíticas y qué tienen diferente?

6) ¿Qué característica de la expresión analítica de las funciones representadas en el inciso b) hace que sean decrecientes?

ACTIVIDAD 2

SD2-B3

La Actividad 1 se espera te haya permitido:

a) Recordar que las funciones exponenciales son monótonas, esto es, que la dirección de la variación que representan no cambia, que equivale a decir que o es siempre creciente o es siempre decreciente.

b) Cerciorarte que cuando $x = 0$, y siempre vale 1 y recordar que esto se debe a que cualquier número real elevado a la cero es igual a1.

c) Establecer que las funciones exponenciales son crecientes cuando $a>1$ y que son decrecientes cuando $a<1$.

d) Darte cuenta que lo que tienen diferente todas las que son crecientes es la rapidez con que crecen y que esta rapidez depende del valor de a, que mientras mayor sea, mayor será la rapidez con que crece la función.

e) Darte cuenta que lo mismo sucede con las que son decrecientes.

1. En esta segunda actividad se pretende que, con base en lo que has estado estudiando sobre las funciones derivadas, establezcas la relación existente entre lo que se observa en la gráfica y la función derivada de la exponencial; lo cual podrás hacerlo contestando las siguientes preguntas:

a) Dado que sabes que la derivada de una función cualesquiera, está representada geométricamente por la pendiente de las rectas tangentes a su gráfica, elige una de las gráficas del inciso a) (que sabes que corresponde a una función exponencial), obsérvala y, con base en lo que observes, determina:

i) ¿Qué sucede con el valor de la derivada a medida que el valor de x aumenta?

ii) ¿Cómo son los valores de la derivada cuando los valores de x crecen, pero son negativos?

iii) ¿Cómo son los valores de la derivada cuando los valores de x son positivos muy grandes?

b) De acuerdo con lo que has dicho de la derivada de la función que observaste para contestar las preguntas formuladas en el inciso a), bosqueja la gráfica de la función derivada.

c) ¿Cómo es la gráfica que has bosquejado comparada con la gráfica de la función exponencial que observaste?

d) ¿Cómo supones que será la expresión analítica de la función derivada, dada la similitud que tienen sus gráficas y, desde luego, su comportamiento?

2. Observa al menos otra gráfica de las que aparecen en el inciso a) y responde las mismas preguntas que contestaste en el primer caso; luego hazlo con al menos dos gráficas de las que aparecen en el inciso b) para que, con base en lo que observes, respondas la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de función supones que será la función derivada de una función exponencial?

Desarrollo

ACTIVIDAD 1

SD2-B3

Como te habrás dado cuenta, de la misma manera que la representación gráfica de una función proporciona una gran cantidad de información sobre el comportamiento de la misma; también proporciona información sobre su derivada.

En el caso de las funciones exponenciales, se espera que lo realizado en la Actividad 2, te haya permitido percatarte que la función derivada tiene un comportamiento muy similar al de la función original, es decir, parece que la función derivada de una función exponencial es también una función exponencial.

Esto también es equivalente a decir que la variación de la rapidez con que varía una función exponencial es muy similar a la manera en que varía la propia función.

Sin embargo lo que no es posible hacer, observando la gráfica, es determinar el valor exacto de la rapidez con que está cambiando la función cuando la variable x tiene un determinado valor; para esto es necesario obtener la representación analítica de la función derivada que es el modelo matemático de la rapidez con que varía la función. Ese es el propósito de las actividades de esta segunda etapa del estudio de las funciones exponenciales que denominamos *Actividades de desarrollo*.

Una vez más, nos basaremos en la gráfica de la función para obtener la expresión analítica de su función derivada, es decir, utilizaremos la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función y obtendremos la expresión analítica con la que se puede calcular dicha pendiente, que será la expresión analítica de su derivada.

Como se ha venido haciendo en los casos anteriores, habrá de obtenerse una expresión analítica para calcular las pendientes de las rectas secantes para luego obtener la que corresponde a las pendientes de las tangentes.

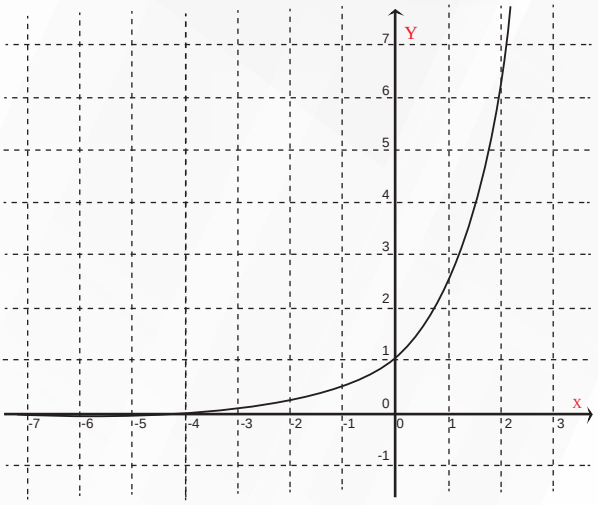


FIGURA 3.3

1. Supongamos que la gráfica de la Figura 3.3 corresponde a la función $y=a^x$. ¿Qué representan en la gráfica, las parejas ordenadas (x,a^x), $(x+h, a^{x+h})$, donde $h>0$?

2. Localiza los puntos cuyas coordenadas son las parejas ordenadas del inciso anterior y traza la recta que pasa por ellos.

3. ¿Qué es de la curva, la recta que acabas de trazar?

4. Si llamas Δy al incremento del valor de la ordenada y ¿Cómo se calcula el valor de dicho incremento?

5. ¿Cuál es el valor de Δx, el incremento de x?

6. Sabiendo que la pendiente de una recta se calcula dividiendo el incremento de y entre el incremento de x, esto es, si m representa la pendiente de una recta, entonces $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Llama m_s a la pendiente de la recta secante que trazaste en la gráfica y escribe la expresión analítica con la que se calcula su pendiente.

7. La expresión analítica que escribiste en el inciso 6, debe haber sido

$$m_s = \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

que, aplicando las propiedades de los exponentes, puede transformarse en:

$$m_s = \frac{a^x a^h - a^x}{h}$$

y ésta a su vez, factorizando a^x, puede escribirse

$$m_s = \frac{a^x (a^h - 1)}{h}$$

que también puede escribirse:

$$m_s = a^x \frac{(a^h - 1)}{h}$$

8. De acuerdo con lo estudiado en la secuencia 1 del bloque 1, ¿Cómo se define la pendiente de la recta tangente a la curva $y = a^x$, en un punto cualquiera de coordenadas (x,a^x), a partir de la expresión con que se calculan las pendientes de las secantes a la curva que pasan por el punto de tangencia? Escribe la expresión analítica correspondiente.

9. La expresión que debiste escribir en el inciso anterior es

$$m_t = \lim_{h\to 0} a^x \frac{(a^h - 1)}{h}$$

y como el valor de a^x no depende del valor de h, este límite puede escribirse

$$m_t = a^x \lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$$

que indica que la pendiente de la tangente y la función son directamente proporcionales siendo el $\lim_{h\to 0} \frac{(a^h - 1)}{h}$ el valor de la constante de proporcionalidad. Considera el caso particular en el cual $a = 2$, esto es, considera la función $y = 2^x$ y calcula el

$\lim_{h\to 0} \frac{(2^h - 1)}{h}$, que es la constante de proporcionalidad entre la pendiente de la tangente en un punto y el valor de la función en el mismo punto. Utiliza una calculadora para determinar el valor aproximado del límite indicado, precisando las primeras seis cifras decimales. Hazlo haciendo que $h \to 0$ tanto por la izquierda como por la derecha, dando a h los valores indicados en las Tablas 3.1

h	$\frac{2^h - 1}{h}$
1	
.1	
.01	
.001	
.0001	
.00001	
.000001	
.0000001	

h	$\frac{2^h - 1}{h}$
-1	
-.1	
-.01	
-.001	
-.0001	
-.00001	
-.000001	
-.0000001	

10. Los datos obtenidos con la calculadora indican que el valor del límite corresponde al valor aproximado de $ln2$. Compruébalo.

11. Ahora escribe la expresión analítica que se usa para calcular la pendiente de las tangentes a la curva que es gráfica de la función $y = 2^x$ sustituyendo la expresión del límite por su valor que es $ln2$. La expresión obtenida es la función derivada de la función exponencial $y = 2^x$.

12. Si ahora se toma $a = 3$ se obtiene la función $y = 3^x$. Derívala utilizando el procedimiento que usaste para obtener la derivada de $y = 2^x$ (Usa la calculadora para comprobar que el valor que has obtenido para el $\lim_{h\to 0} \frac{(3^h - 1)}{h}$ corresponde al $ln3$.

13. Con base en las funciones que has obtenido como derivadas de $y = 2^x$ y de $y = 3^x$ determina la regla que indica cómo obtener la derivada de cualquier función de la forma $y = a^x$.

ACTIVIDAD 2

SD2-B3

La función exponencial $y = e^x$ llamada *función exponencial natural* y su derivada

En la actividad anterior obtuviste la expresión analítica que permite calcular la derivada de cualquier función exponencial de la forma $y = a^x$ que resultó ser:

$$y' = ln a\ (a^x)$$

De ahí se deduce fácilmente la derivada de cualquier función exponencial que tenga esa forma. Las correspondientes a $a = 2$ y $a = 3$ las obtuviste en la actividad anterior y resultaron ser: para $y = 2^x$, $y' = ln2\ (2^x)$ y para $y = 3^x$, $y' = ln3\ (3^x)$.

Utiliza la expresión analítica de la derivada para calcular la pendiente de la tangente a cada una de las dos curvas, esto es, las gráficas de $y = 2^x$, y $y = 3^x$, en el punto (0, 1). (Expresa el valor aproximado que obtuviste para y) y traza las tangentes a las curvas que están en la Figura 3.4

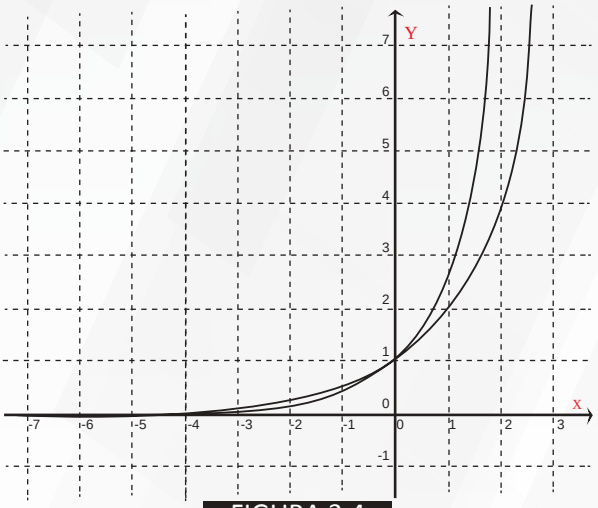


FIGURA 3.4

1. Ya en la Actividad 1 de inicio de esta secuencia te habías dado cuenta que la gráfica de toda función exponencial de la forma $y = a^x$ pasa por el punto $(0,1)$ y que cuando $a > 1$, todas resultan ser monótonamente crecientes y que sólo difieren en la rapidez con que crecen.

   Ahora también sabes que mientras mayor es el valor de a, mayor es la rapidez y que utilizando la derivada de la función puedes cuantificar dicha rapidez.

2. En particular, acabas de calcular (al calcular las pendientes de las tangentes) la rapidez de crecimiento de las funciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$ cuando $x = 0$, habiendo obtenido, para la curva $y = 2^x$, $y' = ln2$ y para la curva $y = 3^x$, $y' = ln3$ y como $ln2 < 1$ y $ln3 > 1$, resulta válido pensar que debe haber un valor de a, entre 2 y 3 para el cual $ln a = 1$.

Ese número existe y se representa con la letra e y aunque no sabes cuál es su valor exacto, sabes que es mayor que 2 y menor que 3; que es lo mismo que decir que sabes que $2 < e < 3$.

3. Partiendo de que e es un número, determina:

   a) La expresión analítica de la función exponencial cuya base es el número e.

   b) La expresión analítica de la derivada de esa función.

   c) El valor del $\lim_{h \to 0} \frac{(e^h - 1)}{h}$

   d) El valor de lne

   e) El valor de la pendiente de la tangente a la gráfica de esa función cuando $x = 0$

   f) El punto de la gráfica de la función $y = e^x$ en el cual su tangente es paralela a la recta $y = 2x$

g) Utiliza una calculadora para que veas cuál es el valor aproximado del número e. Exprésalo utilizando seis cifras decimales.

h) ¿Cómo interpretas en la gráfica de la función $y = e^x$ el que su derivada sea $y' = e^x$? Es decir, ¿Qué significa gráficamente que la función y su derivada tengan la misma representación analítica?

ACTIVIDAD 3

SD2-B3

Establecida la regla para obtener la derivada de la función exponencial simple, estás ahora en condiciones de obtener la derivada de funciones exponenciales compuestas aplicando la regla de la cadena que conociste en la secuencia didáctica 1 de este mismo bloque y de otras funciones que incluyen funciones exponenciales y que se derivan utilizando las reglas de derivación del producto y del cociente de funciones y que también conociste en la secuencia didáctica anterior.

1. Utilizando las reglas de derivación que ya conoces, deriva cada una de las siguientes funciones:

a) $y = e^x$

b) $y' = e^x$

c) $y = e^{\frac{1}{2}x}$

d) $y = -2e^{-3x}$

e) $y = e^{x^2}$

f) $y = e^{\sqrt{x}}$

g) $y = xe^{\frac{1}{x}}$

h) $y = e^{\sqrt{2x}}$

i) $y = x^2\,2^x$

j) $y = 5^{\sqrt{x}}$

k) $y = \frac{4^x}{3^{2x}}$

l) $y = 6^x\, e^{3x}$

m) $y = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2^{3x}}$

n) $y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{e^{x^2+1}} + x^3$

ACTIVIDAD 4

SD2-B3

Las derivadas de las funciones exponenciales cuando $0 < a < 1$

1. Considera ahora el caso de las funciones de la forma $y = a^x$ cuando a es un número positivo menor que 1, por ejemplo $\frac{1}{2}$, es decir considera la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. De acuerdo con la regla establecida para derivar las funciones exponenciales, la derivada resulta ser $y' = ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Que puede reescribirse aplicando la regla de transformación de las operaciones con logaritmos y la de operaciones con exponentes.

   a) De acuerdo con la regla del logaritmo de un cociente se tiene que $ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln1 - ln2$ y como $ln(1) = 0$ resulta que $ln\left(\frac{1}{2}\right) = -ln2$

   b) Por otra parte, de acuerdo con la regla para elevar una fracción a una determinada potencia se tiene que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1^x}{2^x}$ y como $1^x = 1$, resulta que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$ y $\frac{1}{2^x} = 2^{-x}$

   Utiliza estas transformaciones y reescribe la expresión analítica de la derivada de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

2. Observa que desde un principio la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ pudo haberse escrito $y = 2^{-X}$ y aplicar la regla de la cadena para derivarla. Hazlo y comprueba que se obtiene la misma expresión que obtuviste en el inciso anterior.

3. Determina los valores de y y de y' de la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ para los valores de x que aparecen en la primera columna de la tabla. Hazlo también tomando la función en la forma $y = 2^{-X}$ y corrobora que en ambas expresiones resultan iguales. Localiza los puntos en el sistema de coordenadas de la Figura y traza las gráficas de la función y de su derivada.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = 2^{-x}$	$y' = -ln2(2^{-x})$
-5			
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			
5			

TABLA 3.2

4. Considera ahora la función $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ y reescríbela utilizando las propiedades de los exponentes como lo hiciste en el caso anterior y luego derívala aplicando la regla de la cadena.

5. De los dos casos que se han utilizado como ejemplos, se pretende que te des cuenta que dada una función de la forma $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ utilizando el hecho de que $\frac{1}{a} = a^{-1}$ la función puede escribirse $y = (a^{-1})^x$ que a su vez, utilizando las reglas de los exponentes puede escribirse $y = a^{-x}$.

   a) Cuando $a > 1$ ¿Qué sucede con los valores de y a medida que los valores de x aumentan?

   b) Describe el comportamiento de esta función e ilústralo gráficamente.

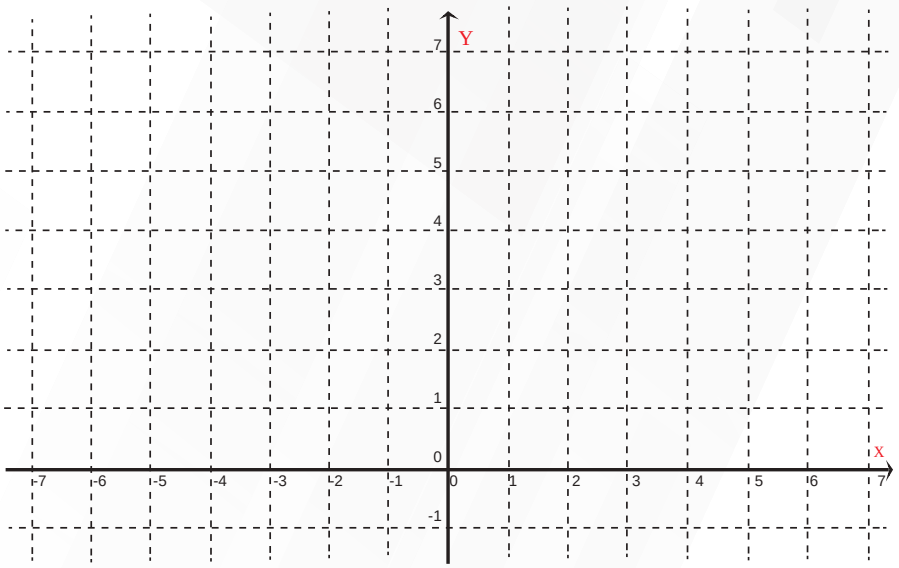


FIGURA 3.5

c) Obtén la expresión analítica de la función derivada

d) ¿Cuál es el dominio y cuál es el rango de la función derivada?

e) Describe el comportamiento de la función y de su derivada cuando $a < 1$ e ilústralo gráficamente

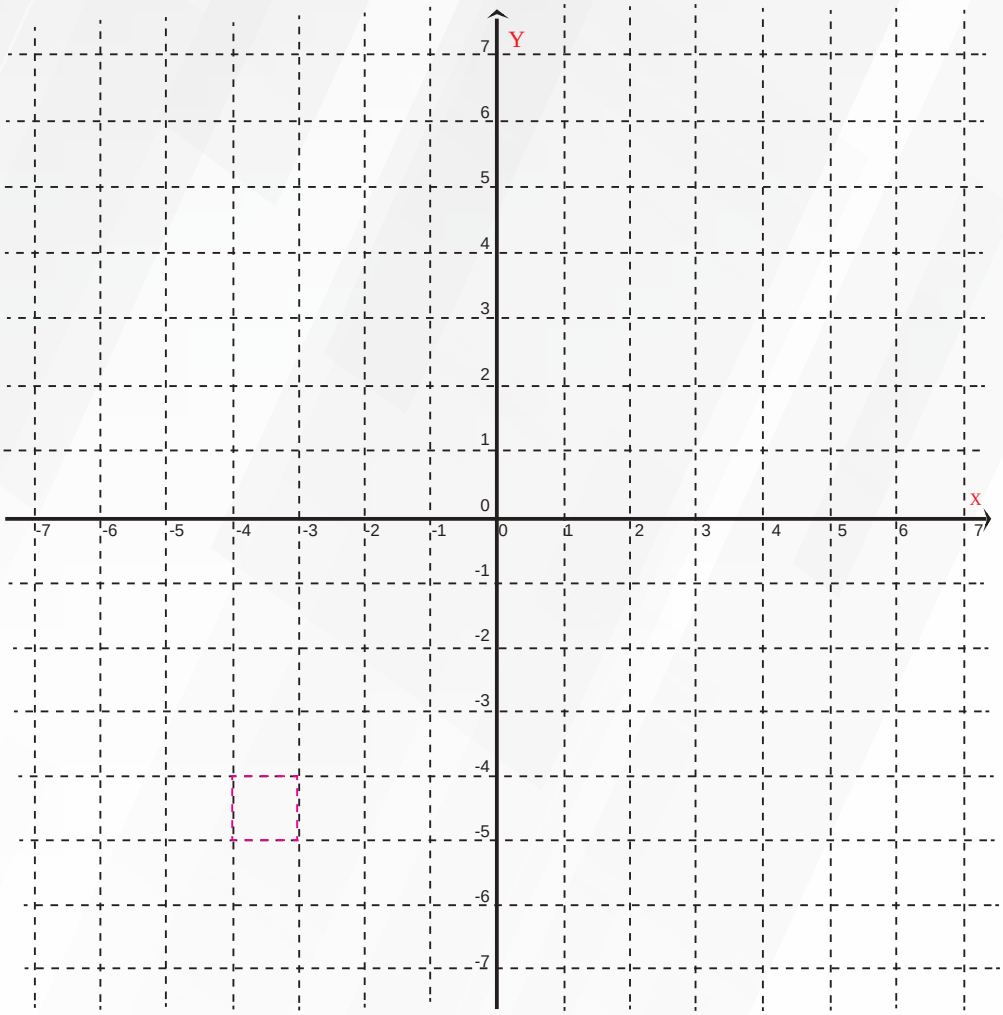


FIGURA 3.6

Cierre

ACTIVIDAD 1

SD2-B3

Al realizar las diversas actividades de esta secuencia, se espera hayas aprendido:

1. A obtener la derivada de la función exponencial simple y a utilizarla para obtener la derivada de las funciones exponenciales compuestas y de las que son producto o cociente de funciones donde intervienen exponenciales.

2. Que la función exponencial, cuya base es el número e, llamada *función exponencial natural*, es especialmente importante por ser modelo de una diversidad de procesos de cambio que suceden en la naturaleza y en la sociedad.

3. Que la función exponencial natural tiene una característica que la distingue de cualquier otra función: su función derivada es ella misma y que gráficamente esto significa que la ordenada de cualquier punto de la gráfica es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

4. A calcular la pendiente de cualquier tangente a una curva que sea gráfica de una función exponencial utilizando la derivada.

5. A utilizar la derivada para determinar la rapidez con que varía una función exponencial en un punto cualquiera y a utilizarla para analizar la rapidez con que varía.

También se espera que hayas avanzado en tu comprensión de la utilidad que tiene aprender a calcular y a usar la derivada de una función para analizar procesos de variación y la importancia que esto tiene en una diversidad de problemas técnicos y científicos e incluso en algunos problemas de la vida cotidiana.

Secuencia Didáctica 3

- La derivada de las funciones logarítmicas

Inicio

ACTIVIDAD 1

SD2-B3

Al igual que se hizo con las funciones exponenciales, antes de aprender a derivar las funciones logarítmicas, es conveniente y útil que repases algunas de las propiedades de estas funciones que estudiaste en el curso de Matemáticas 4. Se espera que recuerdes que la representación analítica básica de las funciones logarítmicas simples es:

$$y = \log_a x$$

donde x es la variable independiente, y la variable dependiente y a es una constante positiva, diferente de 1, denominada *base de la función* y que cuando $a = 10$, la expresión se escribe $y = \log x$ y $\log x$ se *lee logaritmo decimal de* x.

y también se espera que recuerdes que:

$\log_a x$ es el exponente al que debe elevarse la base a para obtener x, de tal modo que:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

que se lee: *logaritmo en base a de x es igual* a y *si y sólo si* a^y *es igual* a x

1) Utiliza la definición de $\log_a x$ para calcular el valor de los siguientes logaritmos y anótalos en la Tabla 3.3

x	$\log_2 x$	$\log_4 x$
1/16		
1/4		
1/2		
1		
2		
3		
4		
8		
16		
64		

TABLA 3.3

2) De acuerdo con lo establecido como definición de $\log_a x$

a) ¿Cuál es su dominio? (¿Cuál es el conjunto de valores que puede tomar x?)

b) ¿Cuál es su rango? (¿Cuál es el conjunto de valores que puede tomar y?)

c) ¿A cuánto equivale $log_a(a^x)$?

d) Y $a^{log_a x}$ ¿A cuánto es igual?

e) En todos los casos justifica tu respuesta.

3) Las curvas trazadas en los dos sistemas de coordenadas que aparecen en la Figura 3.7, son gráficas de funciones logarítmicas. Obsérvalas y contesta las siguientes preguntas

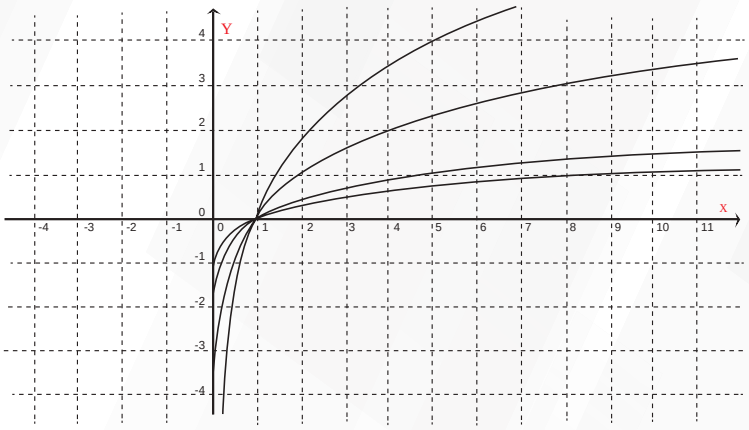


FIGURA 3.7a

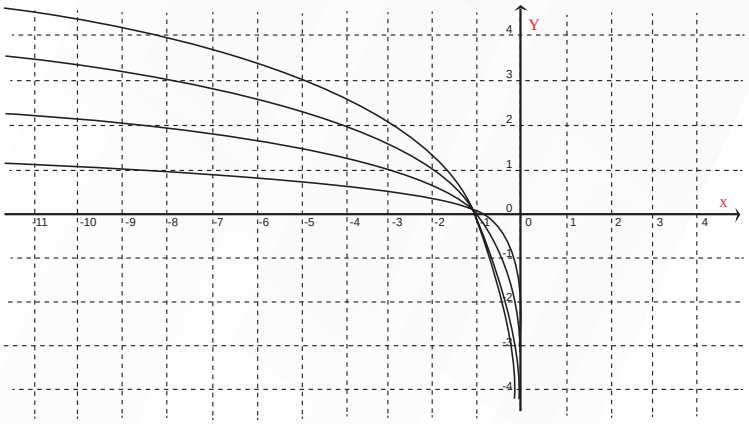


FIGURA 3.7b

1) ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian las gráficas que aparecen en el inciso a)?

2) Y las que aparecen en el inciso b), ¿Qué tienen en común y en qué se diferencian?

3) Comparando las del inciso a) con las del inciso b) ¿En qué se diferencian y qué tienen en común?

4) Dado que cada una de estas gráficas está asociada a una expresión analítica de la forma $y = log_a x$. ¿Qué tienen en común todas las expresiones analíticas asociadas a las gráficas del inciso a) y qué tienen diferente?

5) Y las del inciso b), ¿Qué tienen en común todas las expresiones analíticas y qué tienen diferente?

6) ¿Qué característica de la expresión analítica de las funciones representadas en el inciso b) hace que sean decrecientes?

ACTIVIDAD 2

SD3-B3

La Actividad 1 se espera te haya permitido:

a) Recordar que las funciones logarítmicas, al igual que las exponenciales, son monótonas, esto es, que la dirección de la variación que representan es siempre la misma, que equivale a decir que o es siempre creciente o es siempre decreciente.

b) Cerciorarte que cuando $x=1$, y siempre vale 0 y recordar que esto se debe a que cualquier número real elevado a la cero es igual a1.

c) Establecer que las funciones logarítmicas son crecientes cuando $a>1$ y que son decrecientes cuando $a<1$.

d) Darte cuenta que lo que tienen diferente todas las que son crecientes es la rapidez con que crecen y que esta rapidez depende del valor de a, que mientras mayor sea, menor será la rapidez con que crece la función.

e) Darte cuenta que lo mismo sucede con las que son decrecientes.

1. En esta segunda actividad se pretende que, con base en lo que has estado estudiando sobre las funciones derivadas, establezcas la relación existente entre lo que se observa en la gráfica y la función derivada de la logarítmica; lo cual podrás hacerlo contestando las siguientes preguntas:

a) Sabiendo que la derivada de una función cualesquiera, está representada geométricamente por la pendiente de las rectas tangentes a su gráfica, elige una de las gráficas del inciso a) (que sabes que corresponde a una función logarítmica), obsérvala y, con base en lo que observes, determina:

i) ¿Qué sucede con el valor de la derivada a medida que el valor de x aumenta?

ii) ¿Cómo son los valores de la derivada cuando los valores de x se van acercando a 0?

b) De acuerdo con lo que has dicho de la derivada de la función que observaste para contestar las preguntas formuladas en el inciso a), bosqueja la gráfica de la función derivada.

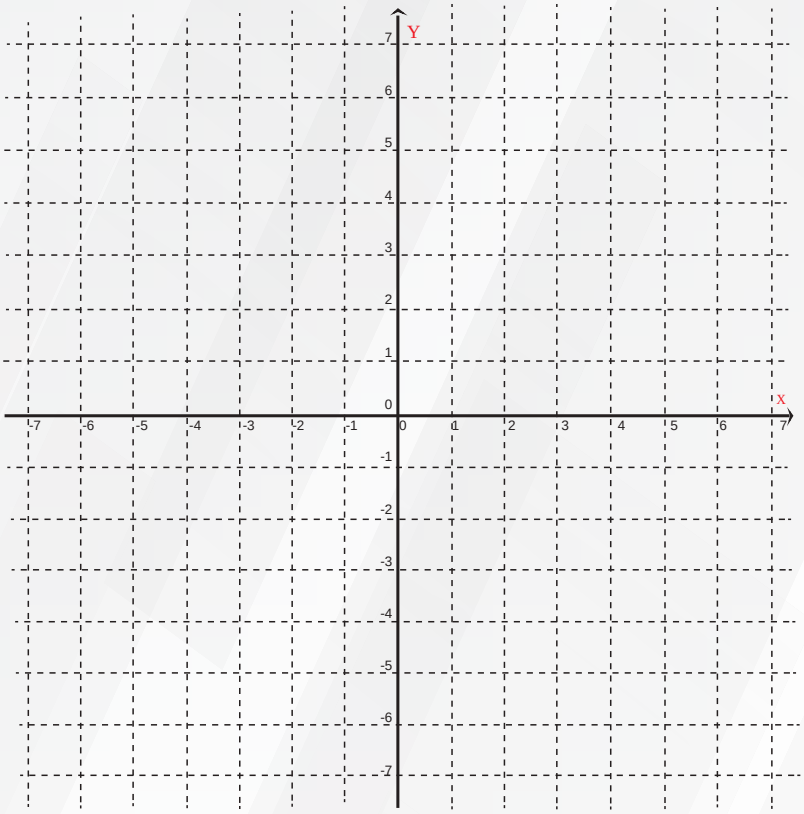


FIGURA 3.8

c) ¿Cómo es la gráfica que has bosquejado comparada con la gráfica de la función logarítmica que observaste?

d) ¿Qué puedes decir de la expresión analítica de la función derivada, de acuerdo con la gráfica que de ella bosquejaste y, desde luego, de su comportamiento?

ACTIVIDAD 3

SD3-B3

Las propiedades de las funciones logarítmicas que se enuncian a continuación se derivan de las propiedades correspondientes de las funciones exponenciales que conoces y has venido utilizando desde el curso de Matemáticas 4.

Propiedades de las funciones logarítmicas

Si x y y son números reales positivos, entonces

1. $log_a(xy) = log_a x + log_a y$
2. $\log_a x \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (donde r es cualquier número real).
4. $\frac{\log_a x}{\log_b x} = \log_a b \Leftrightarrow \log_a x = (\log_a b)(\log_b x)$

1. Utiliza las propiedades enunciadas para calcular los siguientes logaritmos:

a) $\log_4 8 + \log_4 32 =$

b) b) $\log_8 4 - \log_8 32 =$

c) $\frac{1}{2}\log_3 \left(\frac{1}{81}\right) =$

d) $\frac{1}{3}\log_5 15625 =$

Desarrollo

ACTIVIDAD 1

SD3-B3

De igual manera que en el caso de las funciones exponenciales, de la observación de las gráficas de las funciones logarítmicas, permite obtener una gran cantidad de información no sólo sobre el comportamiento de la misma; sino también proporciona información sobre su derivada.

Sin embargo, en este caso tampoco es posible, observando la gráfica, determinar el valor exacto de la rapidez con que está cambiando la función cuando la variable x tiene un determinado valor; ahora también es necesario obtener la representación analítica de la función derivada que es el modelo matemático que permite calcular la rapidez con que varía la función. Ese es el propósito de las actividades de esta segunda etapa del estudio de las funciones logarítmicas llamada *Actividades de desarrollo*.

En esta ocasión, utilizaremos la llamada *regla de la cadena* (aprendida en la Secuencia Didáctica 1 de este mismo bloque y que utilizaste en la Secuencia Didáctica 2) y el hecho de que la función exponencial y la función logarítmica sean funciones inversas para obtener la expresión analítica de la función derivada de ésta última que, al igual que en los casos anteriores, podrás utilizar, para calcular la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica y para determinar la rapidez con que está cambiando la función en un punto determinado, entre otras aplicaciones.

1. La expresión analítica de la función logarítmica básica es:

$$y = \log_a x$$

En ella es explícito que y es un función de x y su gráfica nos permite suponer que es derivable pues siendo una curva suave, debe poder trazarse su tangente en cualquiera de sus puntos. Si ahora despejamos x, se obtiene

$$a^y = x$$

Si ahora derivamos ambos miembros de la igualdad con respecto a x, al lado derecho obtendremos 1; para derivar el miembro izquierdo de la igualdad, utilizaremos la regla de la cadena, es decir derivaremos primero con respecto a y (que sabemos que es una función de x) y luego multiplicaremos por la derivada de y con respecto a x.

Escribe la derivada de a^y con respecto a y y multiplícala por $\frac{dy}{dx}$ que representa la derivada de y con respecto a x para obtener la derivada de a^y con respecto a x. La expresión que obtengas será igual a 1, que es la derivada de x con respecto a ella misma.

2. De la igualdad que has obtenido en el inciso anterior, necesitas despejar $\frac{dy}{dx}$, que es la derivada que nos interesa; al hacerlo deberás obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a}$$

Y como $a^y = x$, al hacer la sustitución de a^y habrás obtenido la expresión analítica de la derivada de $y = \log_a x$ en función de x, que es la que queremos obtener. Hazlo

ACTIVIDAD 2

SD3-B3

La función logaritmo natural, que se escribe $y = lnx$ y su derivada

1. En la actividad anterior obtuviste la expresión analítica que permite calcular la derivada de cualquier función logarítmica de la forma $y = log_a x$ que resultó ser:

$$y' = \frac{1}{xlna}$$

de donde resulta fácil obtener la derivada de cualquier función logarítmica que tenga esa forma. Obtén ahora la función derivada de

a) $y = \log_2 x$

b) $y = \log_3 x$

c) $y = \log_{½} x$

d) $y = \log x$

2. Si ahora tomas $a = e$, la función logarítmica será $y = \log_e x$, pero ya sabes que el *logaritmo en base e* es al que se denomina *logaritmo natural* y que $\log_e$ se representa con *ln*; así que la función $y = ln\, x$ en realidad debe escribirse $y = \log_e x$. Ahora tú escribe la expresión analítica de su derivada sin olvidar el valor de *ln e*.

3. Las gráficas que aparecen en la Figura 3.9 corresponden a las funciones $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ y $y = ln\ x$, en cada una de ellas se ha trazado la tangente en el punto cuya $x = 1$. Calcula la pendiente de tales tangentes.

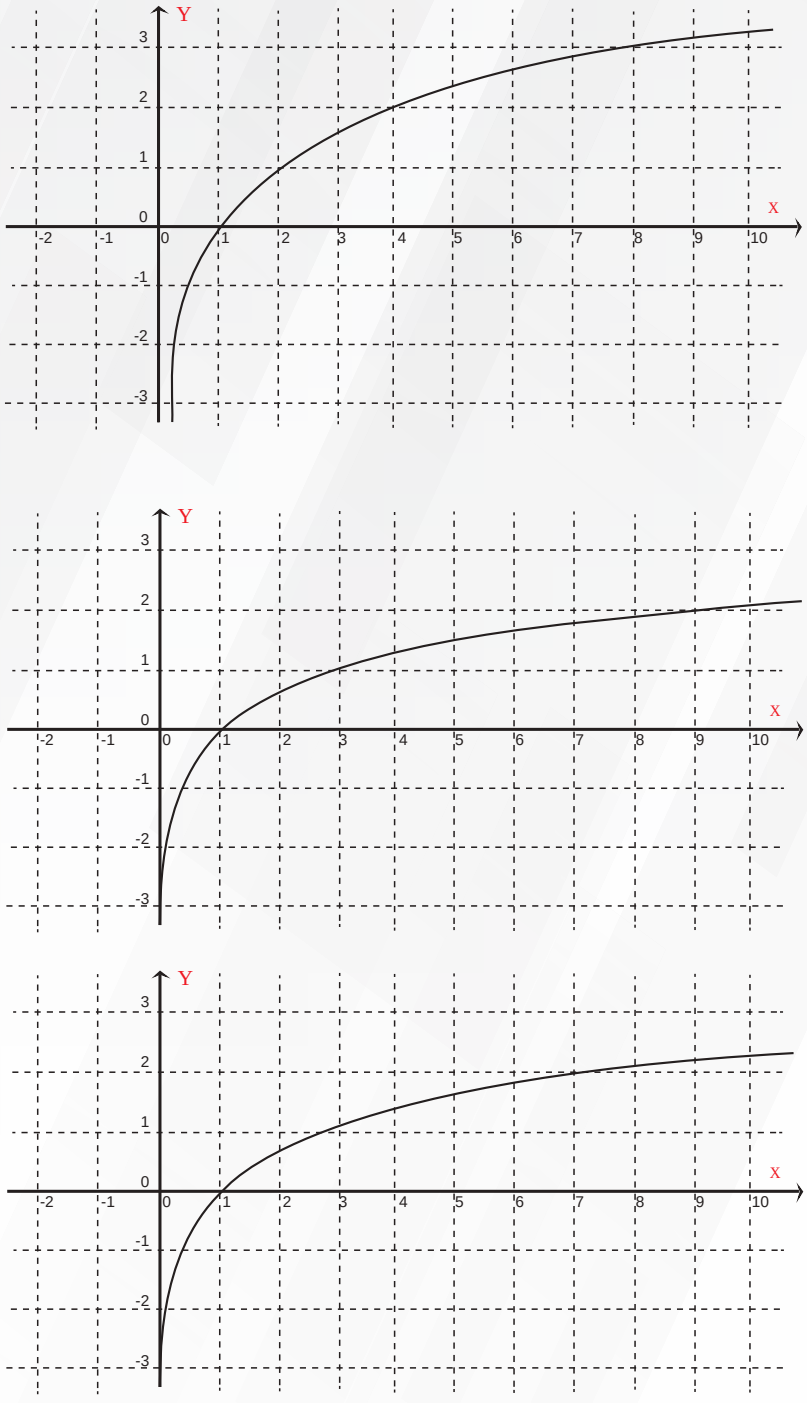


FIGURA 3.9

4. Observando la gráfica de la función $y = ln\ x$, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué sucede con los valores de las pendientes de las tangentes a la curva a medida que los valores de x se van a acercando a 0?

b) Y a medida que los valores de x van siendo cada vez más grandes ¿Qué sucede con los valores de las pendientes de las tangentes a la curva?

c) ¿Cuál es el dominio y cuál es el rango de la función?

d) Y el dominio y el rango de la derivada de la función ¿Cuáles son?

5. Ahora utiliza la expresión analítica de la derivada de la función $y = ln\ x$ para responder primero las preguntas de los incisos a), b) y d) del punto anterior, y luego las que se te formulan a continuación:

e) ¿Para qué valor de x la gráfica de la función tiene una tangente con pendiente igual a $\frac{1}{2}$?

f) ¿En qué intervalo de valores de x, la gráfica tiene tangentes con pendientes menores que 1?

g) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x? ¿Y la de la tangente en el punto de abscisa $x = 1$. ¿Cuál es?

6. Traza la gráfica de la derivada de la función $y = ln\ x$ y a partir de ella describe su comportamiento.

ACTIVIDAD 3

SD3-B3

Habiendo quedado establecida la regla para obtener la derivada de la función logarítmica simple, utilízala junto con el resto de las reglas de derivación que ya conocías, para obtener la derivada de las siguientes funciones.

1. Utilizando las reglas de derivación que ya conoces, deriva cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \log_2 (2x)$

b) $y = \log_3 (x^2)$

c) $y = ln(\sqrt{x})$

d) $y = ln\ (2^x)$

e) $y = ln^2\ (x)$

f) $y = \sqrt{ln(3x)}$

g) $y = xlnx$

h) $y = \sqrt{2x}ln(\sqrt{x}\,)$

i) $y = ln\dfrac{2x-1}{x^2+1}$

j) $y = \dfrac{ln(x-1)}{x^2}$

k) $y = \log_2 (x)\ lnx$

l) $y = \log_2 (x^2)\ e^{3x}$

m) $y = x - ln\ (x-1)$

n) $y = \frac{1}{2}\ ln\ (x^2+1) + ln\ (x^3)$

Al realizar las diversas actividades de esta secuencia, se espera hayas aprendido:

Cierre

ACTIVIDAD 1

SD3-B3

1. A obtener la derivada de cualquier función logarítmica simple y a utilizarla para obtener la derivada de las funciones logarítmicas compuestas y de las que son producto o cociente de funciones donde intervienen funciones logarítmicas.

2. Que la *función logaritmo natural*, es especialmente importante en el análisis, interpretación y resolución de una diversidad de problemas relacionados con los procesos de cambio que suceden en la naturaleza y en la sociedad.

3. A calcular la pendiente de cualquier tangente a una curva que sea gráfica de una función logarítmica utilizando la derivada.

4. A utilizar la derivada para determinar la rapidez con que varía una función logarítmica en un punto cualquiera y a utilizarla para analizar la rapidez con que varía.

Secuencia Didáctica 4

- La derivada de las funciones Trigonométricas seno y Coseno

Inicio

ACTIVIDAD 1

SD4-B3

El Bloque 4 del Módulo de Aprendizaje del curso de Matemáticas 4 fue dedicado al estudio de la variación periódica y los modelos matemáticos que se utilizaron fueron las funciones Seno y Coseno. En esta secuencia didáctica estudiarás una vez más, estas funciones con el propósito fundamental de que aprendas a derivarlas y a utilizar las derivadas para analizar cuantitativamente la rapidez con que varían.

De la misma manera que lo hicimos en las secuencias anteriores, al estudiar las funciones exponenciales y logarítmicas, antes de aprender a derivarlas vamos a hacer un repaso de lo que se espera que ya sepas de estas funciones por lo estudiado anteriormente.

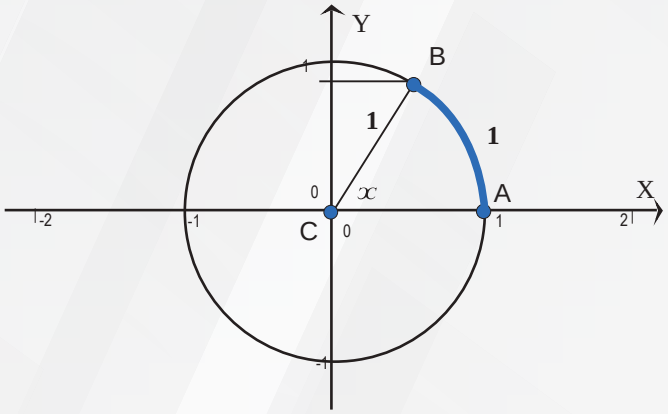
Entre las cosas que es importante recordar de la función Seno, están las siguientes:

a) La expresión $y = sen\ x$ es la representación analítica de la función seno, donde $sen\ x$ representa el valor del seno del ángulo x medido en radianes.

b) Que el ángulo x a que se refiere la expresión es el ángulo central de un círculo unitario (círculo cuyo radio mide 1) y que $sen\ x$ se refiere al valor de la ordenada del extremo del arco que subtiende al ángulo

c) Que el ángulo que mide un radián es el ángulo central subtendido por un arco de longitud igual a la del radio, que en el caso del círculo unitario mide1.

Lo dicho en estos tres puntos está ilustrado en la Figura 3.10 considerando que puede ayudarte a recordarlo más fácilmente e incluso, a entenderlo.



Para que sigas recordando lo ya estudiado sobre la función *sen x* es conveniente que contestes las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto mide el ángulo de vuelta entera, en radianes?

2. ¿Cuánto mide en radianes el ángulo de media vuelta?

3. Y el de un cuarto de vuelta ¿Cuánto mide?

4. Teniendo presente que el valor del Seno del ángulo es el valor de la ordenada del punto que es el extremo donde termina el arco que subtiende al ángulo, Determina el valor de:

a) $sen\ 0 =$ b) $sen\ \frac{\pi}{2} =$ c) $sen\pi =$

d) $sen\frac{3\pi}{2} =$ e) $sen2\pi$

Sugerencia: Observa la Figura 3.10 para determinar los valores que se te piden

5. Determina también el valor del *senx* para los siguientes valores de *x*

$x(rad)$	$senx$
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{7\pi}{4}$	
5π	
$\frac{17\pi}{2}$	
$\frac{23\pi}{6}$	
18π	

Tabla 3.4

6. Describe la variación del valor del *senx* cuando *x* varía de:

a) 0 a $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{2}$ a π

c) π a $\frac{3\pi}{2}$

b) $\frac{3\pi}{2}$ a 2π

7. Traza la gráfica de la función $y = senx$ en el intervalo de -2π a 2π

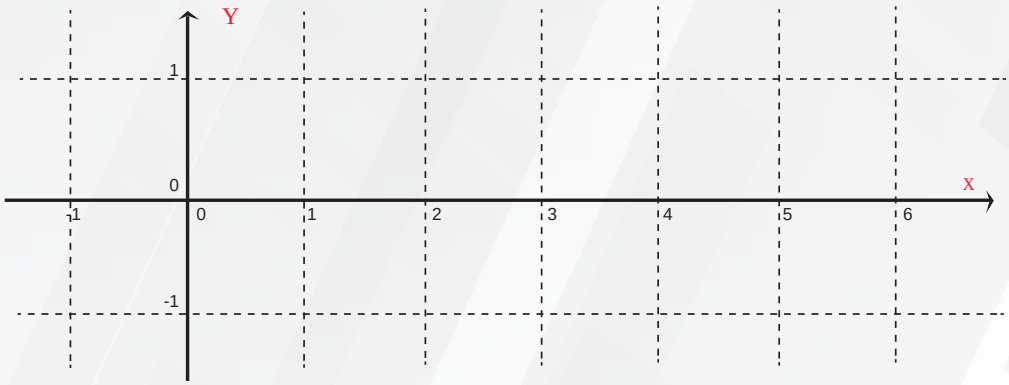


FIGURA 3.11

ACTIVIDAD 2

SD4-B3

En esta segunda actividad se trata de recordar lo relativo a la función coseno y empezaremos de la misma manera que acabamos de hacerlo con la función seno, recordando que:

a) La representación analítica de la función coseno es $y = cosx$, donde $cosx$ es el valor de la abscisa del extremo del arco que subtiende al ángulo x que, al igual que en el caso de la función seno, está medido en radianes.

Con base en lo dicho sobre la función $y = cosx$ y observando la Figura 3.12 contesta las siguientes preguntas:

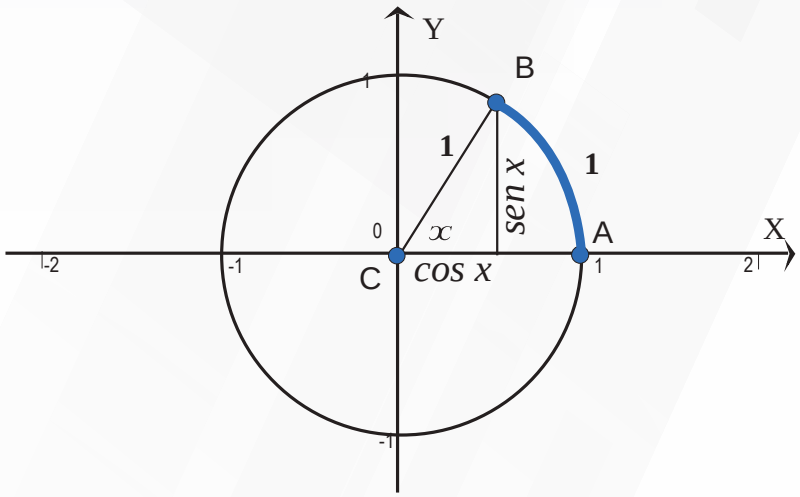


FIGURA 3.12

1. Teniendo presente que el valor del Coseno del ángulo es el valor de la abscisa del punto que es el extremo donde termina el arco que subtiende al ángulo, Determina el valor de:

a) $cos\ 0 =$ b) $cos\ \frac{\pi}{2} =$ c) $cos\ \pi =$

d) $cos\frac{3\pi}{2} =$ e) $cos 2\pi =$

2. Determina también el valor del $cos\ x$ para los siguientes valores de x

$x(rad)$	$Cosx$
$\frac{\pi}{6}$	
$\frac{\pi}{4}$	
$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{2\pi}{3}$	
$\frac{3\pi}{4}$	
$\frac{7\pi}{6}$	
$\frac{7\pi}{4}$	
5π	
$\frac{17\pi}{2}$	
$\frac{23\pi}{6}$	
18π	

3. Describe la variación del valor del $\cos x$ cuando x varía de:

a) 0 a $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{2}$ a π

c) π a $\frac{3\pi}{2}$

b) $\frac{3\pi}{2}$ a 2π

4. Traza la gráfica de la función $y = \cos x$ en el intervalo de -2π a 2π



FIGURA 3.13

Desarrollo

ACTIVIDAD 1 La derivada de la función y = *senx*

SD4-B3

En la Figura 3.14 y 3.15 aparecen las gráficas de las funciones $y = senx$ y $y = cosx$ compáralas con las que tú trazaste en las actividades de inicio 1 y 2 y determina si lo hiciste bien y si no coinciden, reflexiona sobre los errores que hayas cometido.

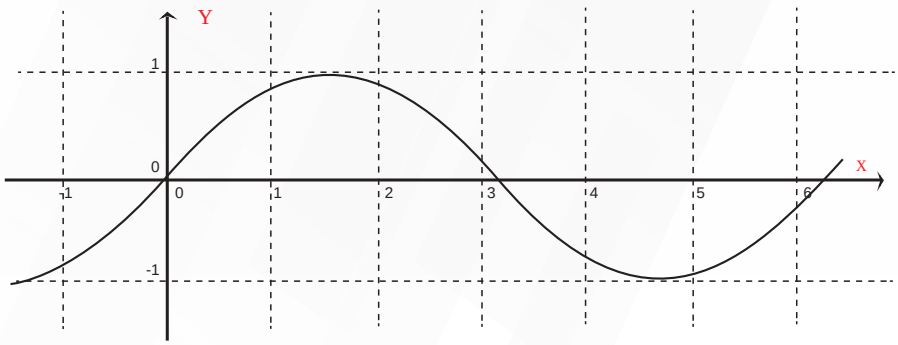


FIGURA 3.14

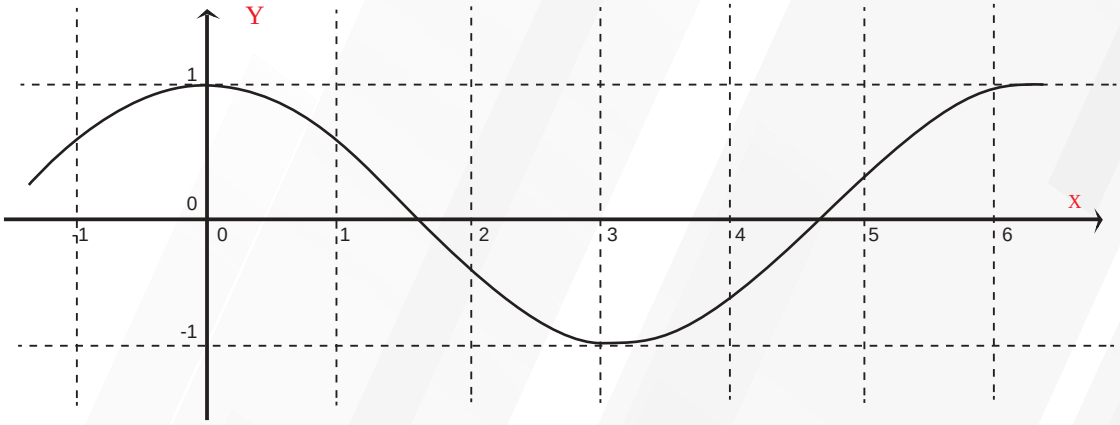


FIGURA 3.15

1. Observa la gráfica de la función $y = senx$ y contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuánto estimas que sea el valor de la pendiente de la tangente a la curva en los puntos donde la x tiene los siguientes valores: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$?

   b) Describe la variación de la rapidez en los siguientes intervalos de valores de x

   i) 0 a $\frac{\pi}{2}$

   ii) $\frac{\pi}{2}$ a π

   iii) π a $\frac{3\pi}{2}$

   iv) $\frac{3\pi}{2}$ a 2π

   c) Bosqueja la gráfica de la rapidez con que varía la función $y = senx$ en el intervalo de -2π a 2π

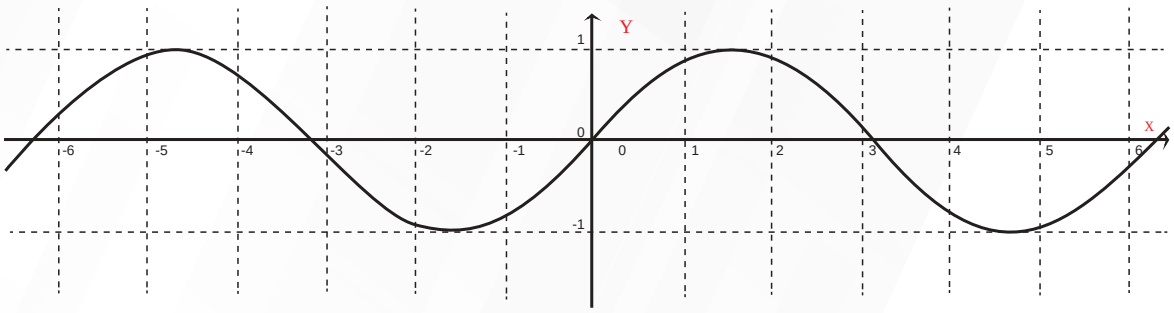


FIGURA 3.16

d) Compara la gráfica que has bosquejado, que muestra la variación de los valores de las pendientes de las tangentes a la curva que es gráfica de la función $y = senx$, en el intervalo de -2π a 2π, con la gráfica de la función $y = cosx$.

Después de haberlas comparado ¿Consideras que podría la función $y = cosx$ ser la expresión analítica de la derivada de la función $y = senx$? Justifica tu respuesta.

2. Se espera que la gráfica que tú bosquejaste sea prácticamente igual a la de la función $y = cosx$ y que por esa razón veas como muy probable que ésta sea la derivada de la función $y = senx$, sin embargo, a pesar de que así parece ser, es importante que tengas claro que la semejanza de las gráficas no es razón suficiente para concluir que lo es. Para tratar de confirmar o desechar la conjetura, vamos a recurrir a la definición de derivada que se estableció en el Bloque 1 para obtener, por un procedimiento analítico, la expresión que representa la derivada de la función $y = senx$.

Para desarrollar el procedimiento analítico que se requiere, te será de mucha ayuda guiarte por las preguntas o tareas que se te proponen a continuación:

a) En el Bloque 1 quedó establecido que dada una función cualquiera, $y = f(x)$, entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En el caso de la función $y = senx$, donde $f(x) = senx$ y $\Delta x = h$

i). ¿A qué es igual $f(x + h)$?

ii). Sustituye $f(x + h)$ y $f(x)$ en la expresión de la derivada y obtén la correspondiente a la derivada de la función $senx$.

iii). ¿Qué representa gráficamente la expresión $sen(x + h) - sen(x)$? y h ¿Qué representa?

iv). Y el cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ¿Qué representa en la gráfica de la función $y=sen\ x$?

v). Finalmente ¿Qué representa gráficamente $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$?

b) Se espera que hayas concluido que el $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y=sen\ x$ en el punto $(x, f(x))$ y que eso te permita concluir que ese límite es la derivada de la función. Si así fue, el siguiente paso es tratar de transformar la expresión $\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ en alguna otra que permita determinar más fácilmente el valor del límite. Para ello será necesario recurrir a algunas identidades trigonométricas y a las reglas de transformación algebraica que conoces.

i) Utilizando la identidad correspondiente al Seno de la suma de dos ángulos que establece que:

$$sen(a+b) = sena\ cosb + senb\ cosa$$

escribe a qué es igual $sen(x+h)$ y sustitúyelo en la expresión del límite.

ii) Debes haber obtenido $\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{senx\ cosh + senh\ cosx - sen(x)}{h}$

y conmutando los términos del numerador y separando en la suma de dos fracciones, esta expresión se transforma en:

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\frac{sen(x)\ cosh - sen(x)}{h} + \frac{cosx - senh}{h}\right]$$

y factorizando $sen\ x$ en el primer sumando del numerador se obtiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[sen(x)\left(\frac{cosh-1}{h}\right) + cosx\left(\frac{senh}{h}\right)\right]$$

iii) En esta nueva expresión queda establecido que el límite que nos interesa calcular puede obtenerse si calculamos el límite del miembro derecho de la igualdad que es el límite de una suma de dos funciones de h para lo cual puede utilizarse la propiedad del límite de una suma de funciones enunciada en el Bloque 1 estableciéndose que ese límite es igual a la suma de los límites de cada uno de los sumandos, esto significa que:

Si $f(x)$ y $g(x)$, son dos funciones cualesquiera, entonces

$$\lim_{h\to 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{h\to 0} f(x) + \lim_{h\to 0} g(x)$$

Utilizando esta propiedad, podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left[sen\ x\left(\frac{cosh-1}{h}\right)\right] + \lim_{h\to 0} \left[cosx\left(\frac{senh}{h}\right)\right]$$

iv) En esta nueva expresión lo que se requiere calcular es el límite de un producto para lo cual es necesario aplicar otra de las propiedades enunciadas en el Bloque 1, donde se establece que "El

límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de cada una de las funciones", lo cual en el lenguaje simbólico se escribe:

Si $f(x)$ y $g(x)$, son dos funciones cualesquiera, entonces:

$$\lim_{h\to 0}[f(x)\,g(x)] = \lim_{h\to 0} f(x) \lim_{h\to 0} g(x)$$

Aplicando esta propiedad al miembro derecho de la igualdad se obtiene:

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} sen\,x \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{cosh-1}{h}\right)\right] + \lim_{h\to 0} cosx \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{senh}{h}\right)\right]$$

Y como ni $senx$ ni $cosx$ dependen de h y x es un valor fijo, se tiene que:

$$\lim_{h\to 0} senx = senx \text{ y } \lim_{h\to 0} cosx = cosx$$

Razón por la cual ahora podemos escribir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h} = sen\,x \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{cosh-1}{h}\right)\right] + cosx \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{senh}{h}\right)\right]$$

v) Ahora nuestro problema se reduce a calcular dos límites:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{cosh-1}{h}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\left(\frac{senh}{h}\right)$$

Para calcular el primer límite, esto es, para calcular $\lim_{h\to 0}\left(\frac{senh}{h}\right)$ sólo es necesario darse cuenta que a medida que $h\to 0$ $cosh\to 1$, es decir, que a medida que los valores de h se van acercando a 0, los valores de $cos\,h$ se van acercando a 1 y, por tanto, los valores de $cosh-1$ se van acercando a 0, lo cual permite concluir que:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{cosh-1}{h}\right) = 0$$

De donde se sigue que el límite del primer sumando, esto es, el límite de:

$$senx \lim_{h\to 0}\left(\frac{cosh-1}{h}\right) = 0$$

ya que el valor de $senx$ está multiplicado por un valor que cada vez está más cercano al cero, el producto será cada vez más cercano al cero y, en consecuencia el límite del producto es 0.

vi) Ahora veamos qué hacer para saber cuál es el valor del límite que nos falta, es decir, el

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{senh}{h}\right)$$

En este caso, cuando $h\to 0$ (tanto para valores de $h > 0$ como para $h < 0$), $senh\to 0$ y saber qué sucede con el cociente cuando tanto el numerador como el denominador de una fracción, se van acercando a cero, no es evidente; pero podemos analizar el valor del cociente haciendo cálculos para valores de h que sean cada vez más cercanos al cero, tanto por la izquierda ($h < 0$) como por la derecha ($h > 0$).

En las tablas de tres columnas, que aparecen a continuación, anota los valores que faltan (Utiliza una calculadora para obtenerlos) y luego observa lo que pasa con el valor del cociente a medida que los valores de h se van acercando a 0 para que determines el valor del límite requerido.

h (medida en *rad*)	$senh$	$\frac{senh}{h}$
.1		
.01		
.001		
.0001		
.00001		

Tabla 3.6

(medida en *rad*)	$senh$	$\frac{senh}{h}$
-0.1		
-0.01		
-0.001		
-0.0001		
-0.00001		

Tabla 3.7

Si consideras necesario, en los dos últimos renglones de cada tabla, anota valores de h todavía más cercanos al 0 y determina a qué valor tienden los valores de $\frac{senh}{h}$, es decir, determina el valor del

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{senh}{h}\right)$$

vii) Seguramente te diste cuenta que mientras más cercano a 0 es el valor de h, más se acerca a 1 el valor de $\frac{senh}{h}$; es decir, has encontrado que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{senh}{h}\right)= 1$$

Por lo tanto, resulta fácil concluir que el valor de

$$cosx \lim_{h\to 0}\left(\frac{senh}{h}\right)= cosx$$

viii) Si ahora se sustituyen los sumandos por su respectivo valor en:

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\,(x+h)-sen\,(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[sen\,x\left(\frac{cosh-1}{h}\right)\right]+\lim_{h\to 0}\left[cosx\left(\frac{senh}{h}\right)\right]$$

Se obtiene:

$$\lim_{h\to 0}\frac{sen\,(x+h)-sen\,(x)}{h}=cosx$$

Y como:

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{sen\,(x+h)-sen\,(x)}{h};$$

sustituyendo el límite por su valor se tiene que:

$$y'=cosx$$

Que significa que, efectivamente,

la derivada de $y=sen\,(x)$ es $y'=cos\,x$

ACTIVIDAD 3 El cálculo de la derivada de funciones que tienen la forma $y=f(x)\,sen\,(u(x))+g(x)$ donde $f(x)$, $u(x)$ y $g(x)$ son funciones

SD4-B3

1. Ahora que sabes que la derivada de $y=sen\,x$ y las reglas de derivación que ya conoces, deriva las siguientes funciones:

a) $y=2sen\,(3x)$

b) $y=-sen\,(4-x)$

c) $y=xsen\,(\sqrt{x})$

d) $y=(2x-1)\,sen\,(x-\pi)$

e) e) $y=\sqrt{senx}+(1-\sqrt{x})$

f) $y=(2e^{senx}-sen\,(e^{x})$

Para obtener la derivada de la función $y=cosx$ vamos a utilizar una identidad trigonométrica que estableceremos primero.

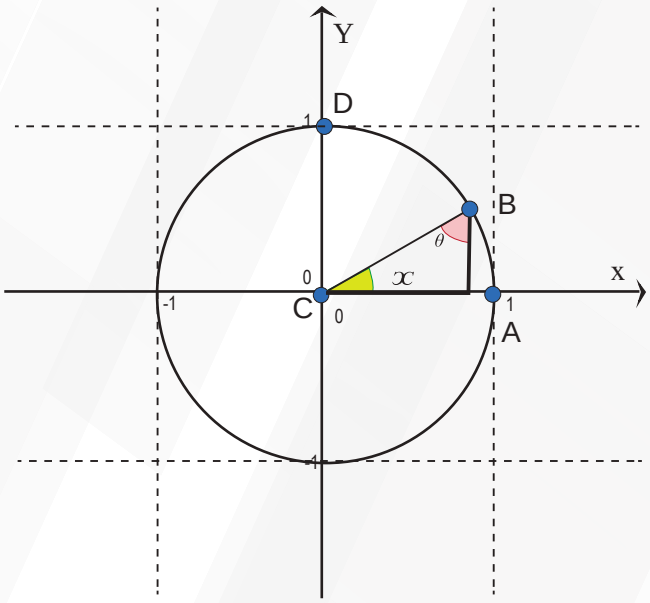


FIGURA 3.17

1. En la Figura 3.17 puede observarse que el cateto opuesto al ángulo x es el valor del $senx$ y que el cateto adyacente es el valor del $cosx$. También está indicado el valor del otro ángulo agudo del triángulo rectángulo con la letra θ. Con base en esa información responde las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuánto suman los ángulos θ y x?

   b) Escribe el valor de θ en función de x

   c) ¿A qué es igual el $sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$?

   d) $cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ¿A qué es igual?

Las respuestas a las preguntas formuladas en el inciso 1, permiten establecer las siguientes identidades trigonométricas.

$$senx = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{y} \quad cos\, x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Utilizando las identidades trigonométricas establecidas y la regla de la cadena, obtén la derivada de la función $y = cosx$.

a) De acuerdo con la segunda de las identidades trigonométricas establecidas, calcular la derivada de la función $y = cosx$ es equivalente a calcular la derivada del *seno* ¿De qué ángulo?

b) Obtén la derivada del *Cosx* calculando la derivada del $sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

c) Utiliza la primera de las identidades para escribir la expresión analítica de la derivada del *cosx* en función del *senx*.

d) Traza la gráfica de la derivada de la función $y = cosx$ para valores de x tales que $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

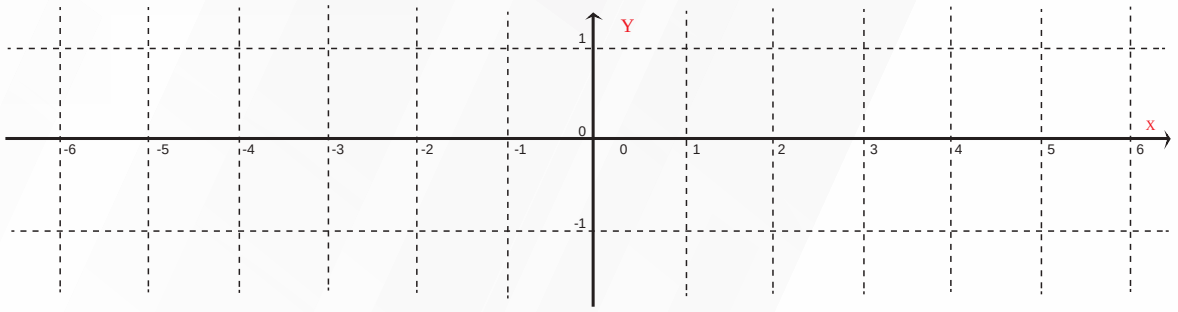


FIGURA 3.18

2. Calcula las siguientes derivadas

a) $y = 3cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

b) $y = x - \frac{\pi}{3} cos\,(x^2 + \frac{\pi}{6})$

c) $y = x - \frac{x}{2} cos\,(\sqrt{x})$

d) $y = sen^2 x + cos^2 x$

e) $y = 2^{cosx}$

f) $y = \frac{1+cosx}{1-cosx}$

ACTIVIDAD 5

SD4-B3

Las derivadas de las funciones trigonométricas *tanx*, *cotx*, *secx* y *cscx*

Para obtener las derivadas de estas funciones trigonométricas utilizaremos las siguientes identidades trigonométricas y la regla de derivación del cociente de dos funciones.

1) $tanx = \frac{senx}{cosx}$

2) $cotx = \frac{cosx}{senx}$

3) $secxcosx = 1$

4) $cscxsenx = 1$

5) $sen^2x + cos^2x = 1$

6) $sen^2x - tan^2x = 1$

7) $csc^2x - cot^2x = 1$

La derivada de la función $y = tanx$

a) Utiliza la identidad 1) para escribir la función $tanx$ como el cociente de las funciones $senx$ y $cosx$ y usa la regla para derivar el cociente de dos funciones.

b) El resultado obtenido debe haber sido $y' = \dfrac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x}$.

Utilizando las identidades 5) y 3) simplifica esta expresión hasta obtener:

$$y' = sen^2 x$$

La derivada de la función $y = cotx$

a) Ahora utiliza la identidad 2) y procede como lo hiciste para obtener la derivada de la función $tanx$; luego utilizando las identidades 3) y 4) simplificas la expresión que resulte, hasta obtener:

$$y' = -csc^2 x$$

La derivada de la función $y = secx$

Obtén la derivada de la función $y = secx$ utilizando la identidad 3) y luego simplifícala hasta obtener $y' = senxtanx$ (Para simplificar utiliza las identidades 1) y 3).

1. **La derivada de la función $y = cscx$**

Para obtener la derivada de esta función, procede como lo hiciste en el caso anterior utilizando la identidad 4) y la regla para derivar un cociente de funciones; y para simplificarla utiliza la identidad 2) y la identidad 4). Deberás obtener $y' = cscxcotx$.

ACTIVIDAD 6

SD4-B3

1. Calcula las siguientes derivadas:

a) $y = tan\,(2x + \pi)$

b) $y = \frac{1}{4} sec\,(\frac{\pi}{4} - x)$

c) $y = x^2\, sec^2 x$

d) $y = x^2 - csc^2\,(2x)$

e) $y = cot\,(\pi - \sqrt{x}\,) + secxtanx$

f) $y = \frac{1+tanx^2x}{x^2+1}$

Cierre

ACTIVIDAD 1

SD4-B3

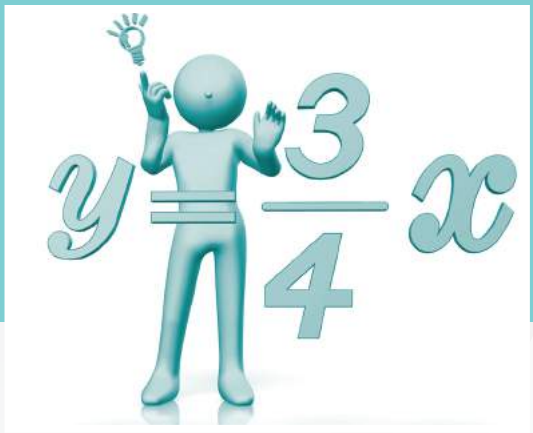
1. A través de esta Secuencia Didáctica has estudiado y se espera hayas aprendido cuáles son las expresiones analíticas de las derivadas de las funciones trigonométricas las cuales aparecen en la siguiente Tabla.

Derivada de las funciones trigonométricas

Función	Derivada
$y = sen\ x$	$y' = cos\ x$
$y = cos\ x$	$y' = -\ sen\ x$
$y = tan\ x$	$y' = sec^2\ x$
$y = cot\ x$	$y' = -\ csc^2\ x$
$y = sec\ x$	$y' = sec\ x\ tan\ x$
$y = csc\ x$	$y' = -\ csc\ x\ cot\ x$

2. También se espera que hayas aprendido a derivar funciones trigonométricas compuestas y funciones en las que las funciones trigonométricas son sumandos, factores o términos de una división.

3. También se espera que, además de haber aprendido a calcular las derivadas, hayas logrado una mayor comprensión de la utilidad que tienen para el estudio de los procesos de cambio, específicamente para analizar y cuantificar la rapidez con que está cambiando una cierta magnitud variable con relación a otra y la importancia que esto tiene en una gran diversidad de problemas de prácticamente todos los campos de la ciencia y de la técnica e, incluso en muchos problemas de la vida cotidiana.



SERIE DE PROBLEMAS

1. Encuentra la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - \frac{1}{4}\ secx$

b) $y = 2sen(3x) + \frac{1}{4}\ cos^2x - 1$

c) $y = e^{-x}\ cot\ (2x)$

d) $y = \frac{1}{2}\ xtan^2x$

e) $y = csc(e^{2x}) - \sqrt{sen(2x)}$

f) $y = \frac{1 - cosx}{1 + senx}$

2. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = \frac{1}{senx + cosx}$ en el punto (0,1).

3. A la derivada de la derivada de una función se le llama segunda derivada de la función y se representa y''; de la misma manera a la derivada de la segunda derivada se le denomina tercera derivada de la función y se representa y'''; y así sucesivamente.

Sabiendo lo anterior, determina:

a) La segunda derivada, la tercera y la cuarta derivada de las siguientes funciones:

i) $y = sen\ x$

ii) $y = e^{-x}$

iii) $y = cos\ (2x)$

iv) $y = e^{-x}senx$

b) ¿Cuál será la décima y la vigésima derivada de la función $y = cos\ x$?

c) Traza la gráfica de la segunda derivada de la función $y = sen\ x$.

4. Sabiendo que la aceleración de un objeto que se está moviendo, es la rapidez con que cambia la velocidad, determina su valor en el instante $t = 1$ seg si sabes que la posición de cierto objeto en movimiento está determinada por la función $y = 10tsent$, donde t representa el tiempo medido en segundos y y la posición medida en cm.

Si conoces una función $x = f(x)$ que permite calcular la posición en que se encuentra una partícula en cada instante, al estarse moviendo en una trayectoria recta, indica las cuestiones relacionadas con el movimiento de la partícula que requieren el uso de la derivada de la función posición para ser comprendidas y/o resueltas. Luego que las señales (procura señalar las más que puedas) explica por qué es necesario utilizar la derivada y cómo la usarías.

5. Ahora considera un caso concreto del Problema 1, supón que la función posición que modela el movimiento de la partícula es $x(t) = 100 - 15t^2 + t^3$ donde t representa el tiempo medido en seg y x la posición medida en metros y que la partícula se movió durante 15 segundos. Determina ¿Cuáles de las siguientes interrogantes requieren el uso de la derivada para responderse y cuáles no?

a) ¿Cuál era la posición de la partícula en el instante $t=0$?

Al empezar a moverse ¿Se estaba alejando o se estaba acercando a la posición 0?

b) ¿En qué instante o en qué instantes pasó por la posición 0?

c) ¿Cuál fue la máxima velocidad que alcanzó la partícula y en qué instante o en qué instantes sucedió?

d) ¿Durante cuánto tiempo se estuvo moviendo en una dirección y durante cuánto tiempo en la otra?

e) ¿Durante cuánto tiempo se estuvo acercando a la posición 0 y durante cuánto tiempo se estuvo acercando?

f) ¿En qué posición estaba al final de los 15 segundos?

g) ¿En qué intervalo de tiempo la velocidad de la partícula fue aumentando y hacia donde se movía en ese intervalo de tiempo?

Cuando consideres que se necesita, explica por qué y qué requieres hacer para responder; y cuando consideres que no se necesita explica cómo harías para responder.

6. El recipiente de la Figura 3.19 es un prisma de base rectangular que se está llenando con agua que sale de un grifo a flujo constante, una de las aristas del prisma, que mide 20 cm, está apoyada sobre una superficie horizontal, mientras que las caras del prisma que son perpendiculares a la superficie horizontal son cuadradas y sus lados miden 12cm. Si el ángulo que forma una de las caras laterales del prisma con la superficie horizontal es de 30°, ¿Cómo puedes determinar la rapidez con varía el área de la sección transversal del agua que está entrando al recipiente con respecto a la altura a que se encuentra dicha sección transversal de la superficie horizontal?

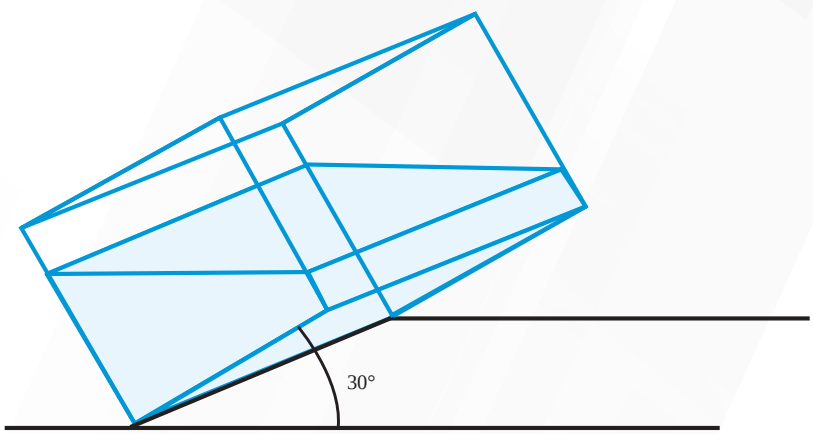


FIGURA 3.19

7. La gráfica de la figura corresponde a la función $y = f(x)$. Determina ¿Para qué valores de x la rapidez con que varía la ordenada con respecto a la abscisa es creciente, para cuáles es decreciente y para cuáles es constante?

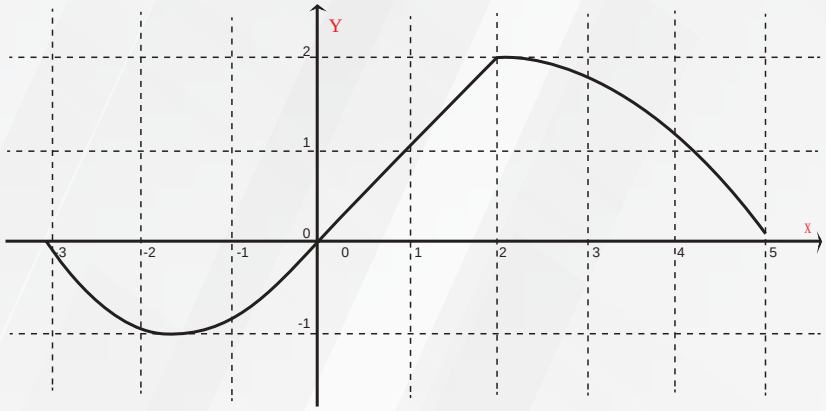


FIGURA 3.20

8. Dada la función $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 11$. Determina el punto o puntos de la gráfica de esta función, donde tiene la tangente de mínima pendiente y donde tiene la tangente de máxima pendiente, en el intervalo (0, 4) de valores de x.

9. Determina ¿para qué valores de x las pendientes de las tangentes a la gráfica de la función $y = tan\ x$ crecen y para qué valores decrecen? Considera sólo el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.



AUTOEVALUACIÓN

1. Sin recurrir a verlo escrito, escribe la regla para obtener la derivada de la función composición $y = (gof)(x)$. Si no pudiste hacerlo ¿cuál fue tu dificultad?

2. Procede de la misma manera con la derivada del producto de dos funciones.

3. Ahora hazlo con la derivada del cociente de dos funciones.

4. ¿Tienes dificultades para determinar la derivada de algún tipo de funciones? ¿De cuáles?

5. ¿Pudiste resolver los problemas de la serie de problemas del bloque? ¿Cuáles no? ¿Identificas las dificultades para resolver algún problema?

6. ¿Puedes explicar a sus compañeros sus dificultades en las situaciones presentadas en el bloque?

7. Si un compañero te pide ayuda para resolver un problema o para entender mejor alguna parte del cuerpo del bloque ¿tienes facilidad para explicar tus ideas?

Himno al Cobach

Letra: Julio César Cruz Díaz.
Música: Jorge Reynaldo Monreal Martínez.

Estrofa I

"Con el sonar del clarín de mi escuela
y el redoblar de sus fieles tambores,
con el cantar de sus vástagos jóvenes
a mi Colegio venimos a honrar".

Estrofa II

"Das de beber el saber a Sonora,
formas su suelo con esfuerzo noble,
marcas el sino del joven al hombre;
por esto y más hoy te quise cantar.

Estrofa III

"Generaciones enteras esperan
salvaguardar tus hermosos blasones:
honor, saber, siempre bellos valores
que al alma joven habrás de sembrar".

Estrofa IV

"La tradición que tus almas encierran,
templada a pulso por tus hijos jóvenes;
naranja y blanco serán tus colores
que con orgullo se harán respetar".

CORO

"Eres pasado y presente,
recinto de tradición;
Colegio de Bachilleres,
eres mi orgullo, forjas mi honor".

"Eres de ayer y por siempre,
lo canto de corazón,
Colegio de Bachilleres,
lo que en la vida recuerdo yo;
Colegio de Bachilleres,
eres mi orgullo, forjas mi honor".

PLAN DE ESTUDIOS

PRIMER SEMESTRE	H	C	SEGUNDO SEMESTRE	H	C	TERCER SEMESTRE	H	C	CUARTO SEMESTRE	H	C	QUINTO SEMESTRE	H	C	SEXTO SEMESTRE	H	C
Asignatura			Asignatura			Asignatura			Asignatura			Asignatura			Asignatura		
Matemáticas 1	5	10	Matemáticas 2	5	10	Matemáticas 3	5	10	Matemáticas 4	5	10	Historia Regional de Sonora	3	6	Filosofía	4	8
Química 1	5	10	Química 2	5	10	Biología 1	4	8	Biología 2	4	8	Geografía	4	8	Ecología y Medio Ambiente	3	6
Introducción a las Ciencias Sociales	4	8	Historia de México 1	4	8	Historia de México 2	4	8	Estructura Socioeconómica de México	4	8	Historia Universal	4	8	Métodos de Investigación	3	6
Taller de Lectura y Redacción 1	4	8	Taller de Lectura y Redacción 2	4	8	Literatura 1	4	8	Literatura 2	4	8	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Ética y Valores 1	3	6	Ética y Valores 2	3	6	Física 1	5	10	Física 2	5	10	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Lengua Adicional al Español 1	4	8	Lengua Adicional al Español 2	4	8	Lengua Adicional al Español 3	4	8	Lengua Adicional al Español 4	3	6	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Informática 1	4	8	Informática 2	4	8	Formación para el trabajo	7	14	Formación para el trabajo	7	14	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Actividades Paraescolares: Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		Formación para el trabajo	7	14	Formación para el trabajo	7	14
												Actividades Paraescolares: Orientación Educativa	1		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa	1	
TOTALES	**32**	**58**		**32**	**58**		**36**	**66**		**35**	**64**		**31**	**60**		**30**	**58**

FORMACIÓN PARA EL TRABAJO

1. Desarrollo Microempresarial
2. Comunicación
3. Servicios Turísticos
4. Inglés para Relaciones Laborales
5. Contabilidad
6. Informática
7. Gastronomía y Nutrición
8. Técnicas de Construcción

FORMACIÓN PROPEDÉUTICA

GRUPO 1
Químico Biológico

GRUPO 2
Físico Matemático

GRUPO 3
Económico-Administrativo

GRUPO 4
Humanidades y Ciencias Sociales

COMPONENTE	ASIGNATURAS	CRÉDITOS
FORMACIÓN BÁSICA	32	260
FORMACIÓN PROPEDÉUTICA	8	48
FORMACIÓN PARA EL TRABAJO	8	56
ACTIVIDADES PARAESCOLARES	10	-
TOTAL:	58	364

-Enero 2011-

SEP Secretaría de Educación Pública

Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Gobierno del Estado de Sonora

SEC Secretaría de Educación y Cultura

SONORA Unidos logramos más