6

SEMESTRE

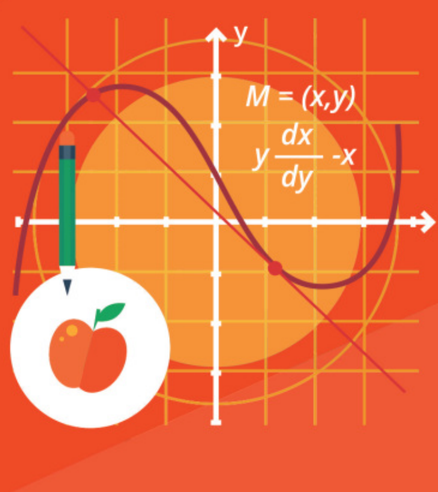
Reforma Integral de la Educación Media Superior

Cálculo Diferencial e Integral 2

FORMACIÓN PROPEDÉUTICA

ISBN: 978-607-730-043-4

9 786077 300434



COLEGIO DE BACHILLERES DEL ESTADO DE SONORA

Cálculo Diferencial e Integral 2

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL 2

Bufete de Asesoría en Educación Matemática de la Universdad de Sonora

Autores:
Silvia Elena Ibarra Olmos
Agustín Grijalva Monteverde
Ramiro Ávila Godoy
José María Bravo Tapia

Coordinación General:
Mtra. Laura Isabel Quiroz Colossio

Supervisión Académica:
Vanesa Guadalupe Angulo Benítez

Coordinación Técnica:
Rubisela Morales Gispert

Revisión Disciplinar:
María Elena Conde Hernández
Hermenegildo Rivera Martínez

Desarrollo Editorial: Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.
Coordinación Editorial: LDG. Luis Ricardo Sánchez Landín
Edición: LDG. Yolanda Yajaira Carrasco Mendoza

Diseño de portada:
María Jesús Jiménez Duarte

Foto de portada:
Mtra. Laura Cecilia Hernández Garza

Contenido: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Módulo de Aprendizaje:

Dirección Académica
Departamento de Innovación y Desarrollo de la Práctica Docente.
Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur.
Hermosillo, Sonora. México. C.P. 83280.

ISBN: 978-607-730-043-4

Primera Edición: 2015

Se terminó la impresión de esta obra en diciembre de 2015.
En los talleres de ***Grupo de Servicios Gráficos del Centro, S.A. de C.V.***
Lambda No. 216 • Fraccionamiento Industrial Delta • C.P. 37545
León, Guanajuato, México.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro No. 3681

Diseñada en Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora
Blvd. Agustín de Vildósola; Sector Sur. Hermosillo, Sonora, México
La edición consta de 4,159 ejemplares.

Impreso en México/Printed in Mexico

Ubicación Curricular

COMPONENTE: **FORMACIÓN PROPEDÉUTICA**	CAMPO DE CONOCIMIENTO: **FÍSICO MATEMÁTICO/ QUÍMICO BIOLÓGICO**
HORAS SEMANALES: **03**	CRÉDITOS: **06**

DATOS DEL ALUMNO

Nombre: ____

Plantel: ____

Grupo: __________ Turno: __________ Teléfono: __________

E-mail: ____

Domicilio: ____

____

Presentación

Éste es el último curso de Matemáticas que estudiarás en el Colegio de Bachilleres, y, conforme al modelo educativo basado en competencias, se espera que te hayas ido preparando para enfrentar y resolver situaciones problemáticas en las que es necesario poner en juego tus conocimientos, habilidades y actitudes positivas para aplicar estrategias de solución a las situaciones planteadas tanto en el salón de clases, en otras asignaturas y en la vida diaria.

Con los estudios realizados hasta este momento, particularmente en Matemáticas 4 y Cálculo Diferencial, tu conocimiento de la variación se ha venido incrementando y, a la vez, tus habilidades para emplear las matemáticas en la caracterización cualitativa y cuantitativa de la variación, ensanchando tus posibilidades para interpretar y dar a conocer información empleando gráficas, tablas numéricas y expresiones algebraicas, adicionalmente al lenguaje natural, para algunos aspectos de los fenómenos de variación.

En este curso, el de Matemáticas 5, el foco estará puesto en aspectos de la variación ligados a los llamados fenómenos de acumulación. Con eso nos referimos a casos como el cálculo de la distancia recorrida por un objeto moviéndose a velocidad variable, que conforme transcurre el tiempo recorre más y más distancia. ¿Cómo determinar dicha distancia recorrida?

Otros fenómenos en los que se presenta la acumulación los encontramos en casos como los siguientes: Cuando un automóvil o una fábrica emite gases tóxicos al ambiente ¿cómo saber qué tantos de esos gases se acumulan en la atmósfera? Si se llena un recipiente con líquido, a flujo variable, ¿Cómo determinar la cantidad de líquido contenida en el recipiente? ¿Qué tanto trabajo mecánico realiza una fuerza variable en tanto mueve un objeto?

Los fenómenos de acumulación se resuelven con la aplicación de técnicas matemáticas que, al igual que los de la cuantificación de la rapidez de cambio y determinación de pendientes de rectas tangentes a las gráficas de funciones, son creación de dos grandes científicos, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz, desde la segunda mitad del Siglo XVII. En este caso, los métodos usados dan origen al objeto matemático conocido como integral de una función.

De esta manera se pueden seguir estudiando fenómenos relacionados con la acumulación en fenómenos de la física, como el movimiento, el comportamiento de la energía, del trabajo mecánico, la presión, temperatura y volumen de los gases, por citar unos ejemplos y, por otra, el estudio de múltiples fenómenos en biología, economía, sociología y cualquier otra rama del conocimiento y de la actividad humana.

De forma análoga a los módulos de aprendizaje anteriores, aquí se presentan los materiales de discusión organizados en bloques, los cuales se organizan a su vez en secuencias didácticas formadas por una o más actividades. Es importante que sigas las instrucciones de tu profesor respecto a las dinámicas de trabajo que se usarán para abordar cada una de ellas.

Las secuencias didácticas de cada bloque se organizan en actividades de inicio, en las cuales se presentan problemáticas que quizá sean nuevas pero que se pueden abordar con base en las competencias previamente generadas. En las actividades de desarrollo se presentan nuevas situaciones, de cuya resolución deberá emerger nuevo conocimiento y requerirán el uso de nuevas habilidades. Finalmente, en las actividades de cierre se procura que, con la conducción de tu profesor, se establezcan de manera clara y precisa los nuevos objetos matemáticos generados y las potencialidades de su uso en la resolución de diferentes problemáticas.

Al final de cada bloque se presentan dos tipos de actividades adicionales. Por una parte se presentan una serie de problemas en las cuales debes usar las competencias desarrolladas para su resolución y, por otra, un conjunto de cuestionamientos en la sección denominada como Autoevaluación, la cual dará oportunidad de que tú mismo tengas una valoración adecuada de lo aprendido, pero también de tus dificultades. Consecuentemente, permitirá que elabores una estrategia para mejorar tu desempeño.

Por último, en las líneas siguientes se enuncian las principales características de cada uno de los tres bloques que conforman este módulo de aprendizaje.

EN EL BLOQUE 1 se presentan algunos fenómenos de acumulación, particularmente los de emisión de gases de tipo invernadero, distancias recorridas y de áreas de figuras con un lado no rectilíneo, dando lugar al objeto fundamental del cálculo, además del de derivada: LA INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN.

EN EL BLOQUE 2 se abordan algunos resultados de suma trascendencia, se formalizan algunos resultados del cálculo por medio del llamado TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, se resuelven problemas de cálculo de áreas y se introducen algunas técnicas de integración.

EN EL BLOQUE 3 se profundiza en las técnicas de integración y se resuelven problemas de cálculo de volúmenes. Asimismo, se estudian las posibilidades matemáticas de resolver situaciones empleando procedimientos algebraicos, gráficos y, de manera especial, métodos numéricos.

Glosario Icónico

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Representa la **Evaluación Diagnóstica**, la cual te permitirá estar consciente de tus conocimientos acerca del tema a abordar.

ACTIVIDAD INTEGRADORA

En esta sección realizarás la **Actividad Integradora**, la cual será tu proyecto durante todo el semestre, pondrás en práctica tus conocimientos y fortalecerás tu aprendizaje.

ACTIVIDAD 1

SD1-B1

Con este gráfico identificarás las **Actividades** dentro del texto, con las cuales optimizarás los conocimientos aprendidos. Debajo del ícono sabrás la secuencia y bloque al que pertenece y arriba si es individual, en equipo o grupal.

Íconos para indicar si una actividad es:

Individual **En Equipo** **Grupal**

EVALUACIÓN DE ACTIVIDADES

En este apartado encontrarás la **Evaluación de Actividades**, donde tu profesor calificará tu desempeño.

AUTOEVALUACIÓN

Ícono de **Autoevaluación** en este espacio tendrás que evaluarte a ti mismo honestamente y te darás cuenta de los conocimientos adquiridos, así como de las áreas que necesitas mejorar.

COEVALUACIÓN

Ícono de **Coevaluación**, donde deberás evaluar a tu compañero y él te evaluará a ti.

EVALUACIÓN DE LA ACT. INT.

Con este ícono se muestra la **Evaluación** de tu proyecto, donde se valorará tu desempeño.

PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

El **Portafolio de Evidencias** lo encontrarás al finalizar cada bloque. Aquí se especifica qué actividades debes incluir y entregar a tu profesor para que te evalúe.

REACTIVOS DE CIERRE

En este espacio encontrarás los **Reactivos de Cierre**, con los cuales reforzarás los conocimientos que adquiriste durante el bloque y desarrollarás tus habilidades.

GLOSARIO

Con esta ilustración localizaremos el **Glosario**, ya sea dentro del texto o al final del libro. Será tu ayuda para conocer nuevos conceptos y comprender mejor las lecturas.

FUENTES DE INFORMACIÓN

Útil para tener referencias acerca del contenido de tus libros, además que podrás utilizar las **Fuentes** para tener más herramientas que contribuyan a mejorar tu desempeño académico.

NOTA ENFÁTICA

En **Notas Enfáticas** podrás encontrar contenido importante que complementará tu aprendizaje.

ÍNDICE

Competencias Genéricas

1	Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.
2	Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros.
3	Elige y practica estilos de vida saludables.
4	Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
5	Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
6	Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
7	Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
8	Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.
9	Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo.
10	Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales.
11	Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica, con acciones responsables.

Competencias Disciplinares Básicas

	COMPETENCIAS DISCIPLINARES EXTENDIDAS DEL CAMPO DE MATEMÁTICAS	BLOQUES DE APRENDIZAJE		
		I	II	III
1	Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebráicos geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales	✓	✓	✓
2	Formula y resuelve problemas matemáticos aplicando diferentes enfoques.	✓	✓	✓
3	Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.	✓	✓	✓
4	Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.	✓	✓	✓
5	Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.	✓	✓	✓
6	Cuantifica representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.		✓	✓
7	Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio de un proceso o fenómeno y argumenta su pertinencia.		✓	✓
8	Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	✓	✓	✓

Cálculo Diferencial e Integral 2

Bloque 1

B-1

Secuencia Didáctica 1

- Profundizando en el estudio de la variación

Secuencia Didáctica 2

- Profundizando en la cuantificación de la variación

Secuencia Didáctica 3

- Aproximaciones a magnitudes físicas

Secuencia Didáctica 4

- El problema del cálculo de áreas

Bloque 2

B-2

Secuencia Didáctica 1

- Pendiente de la recta tangente y cálculo de áreas: dos problemas vinculados.

Secuencia Didáctica 2

- La antiderivada de una función

Secuencia Didáctica 3

- Cálculo de áreas de regiones planas limitadas por más de una curva.

Bloque 3

B-3

Secuencia Didáctica 1

- Volumen de cuerpos con superficies que no son planas.

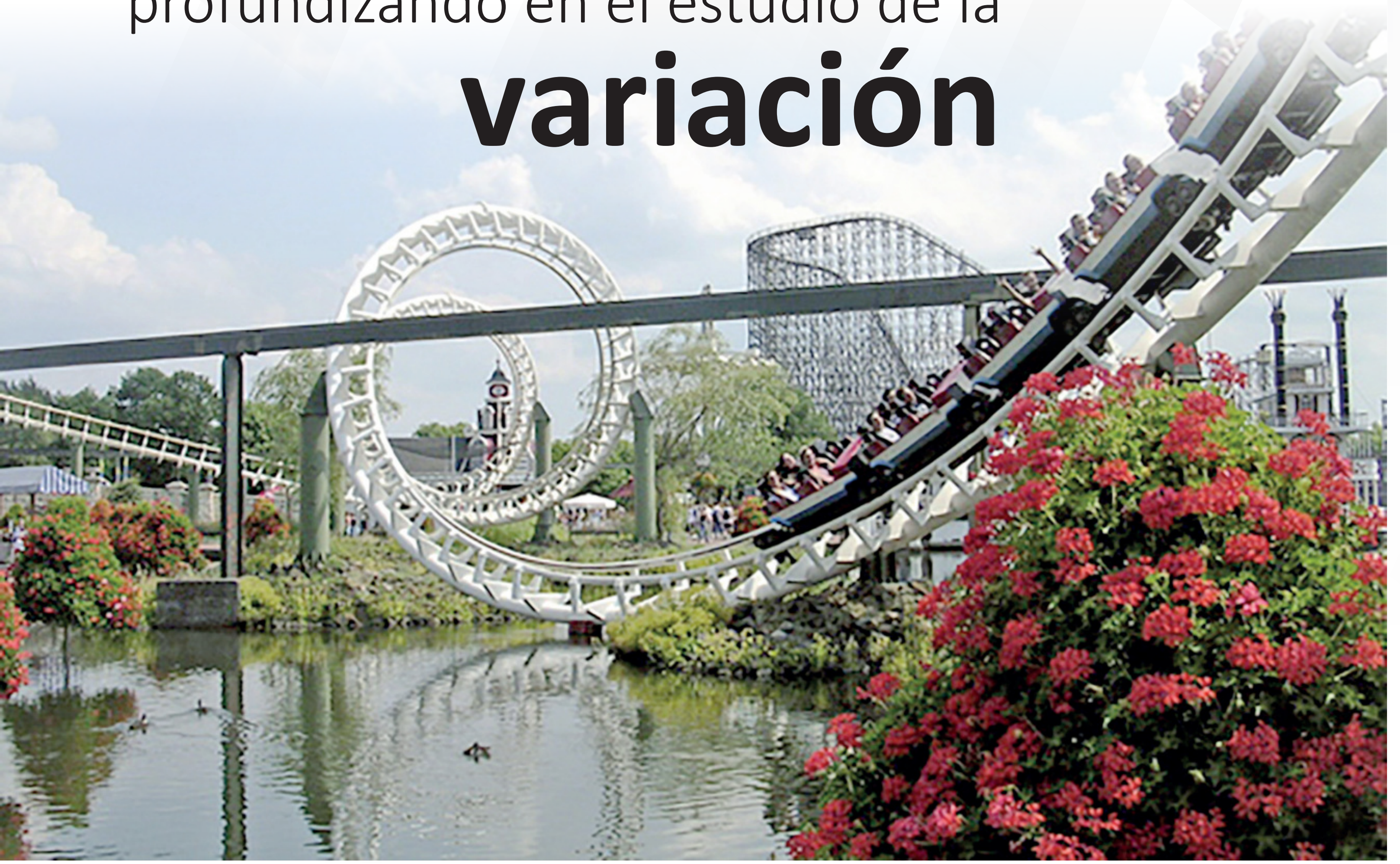
Secuencia Didáctica 2

- Técnicas de integración.

Bloque 1

18 Horas

Los fenómenos de acumulación: profundizando en el estudio de la variación



Introducción B-1

En el estudio de algunos fenómenos de variación, has podido caracterizar si una variable que depende de otra lo hace de forma creciente, decreciente o es constante. Asimismo, por medio del empleo de la derivada, has cuantificado la rapidez de la variación de algunas variables con respecto a otras. Por ejemplo, si conoces la ley de movimiento de un objeto, en la cual se relaciona su posición en dependencia del tiempo, la derivada te permite obtener el valor de la velocidad instantánea en cualquier instante t de tiempo.

Sin embargo, hay aspectos en los cuales la derivada no es suficiente para caracterizarlos. Veamos algunos ejemplos:

1). Si un objeto se mueve a velocidad variable ¿cómo se calcula la distancia que recorre en un determinado lapso? ¿Cómo medimos la cantidad de distancia recorrida que se va agregando conforme transcurre el tiempo?

2). Si aplicamos una fuerza para comprimir un resorte (como el caso de las mancuernas para ejercitar la mano) has podido observar que cada vez es más difícil hacerlo y se requiere aplicar más fuerza para seguir comprimiéndolo. En ese caso, con la aplicación de una fuerza variable, ¿cómo se mide el trabajo mecánico realizado?

3). Cuando una persona decide ahorrar dinero para algún propósito, lo hace frecuentemente asegurando sólo sus gastos más elementales. Sin embargo, los cambios en las necesidades o en los precios de los artículos mínimos de consumo, modifican las cantidades ahorradas. En ese caso ¿cómo medir el comportamiento que seguirá la acumulación de cantidades ahorradas?

En este Bloque iniciaremos el estudio de las estrategias matemáticas que se pueden aplicar para cuantificar magnitudes variables en las que la derivada de una función no es suficiente para determinar los valores buscados.

Las secuencias están organizadas rescatando algunas ideas básicas de la medición de la razón instantánea de cambio por medio de la derivada de una función, poniendo posteriormente el énfasis en problemas en los cuales es necesario ampliar los recursos necesarios para cuantificar la magnitud de algunas variables, como las ejemplificadas anteriormente.

En los problemas que se estudiarán en este Bloque, de contextos diferentes, que incluyen situaciones de emisión de gases de invernadero, de trabajo mecánico y de distancias recorridas por un objeto, es posible interpretarlos geométricamente como el cálculo del área de figuras que pueden incluir un lado con curvas no rectilíneas.

Así como estos casos existen una gran cantidad de situaciones que se pueden resolver usando los mismos procedimientos. Para profundizar estas ideas y encontrar procedimientos rápidos e efectivos, en este Bloque se analizarán con detalle, determinando los objetos matemáticos que son de utilidad en la resolución de diversas situaciones en las que la acumulación es trascendente.

En la resolución de las situaciones presentadas en este Bloque, tendrás la oportunidad de hacer análisis que involucran informaciones presentadas de forma verbal, gráfica, analítica y numérica. Tendrás la oportunidad no sólo de interpretar la información de las situaciones sino también de emplear diferentes formas de representación, de escuchar los argumentos de tus compañeros y de expresar tus propias ideas utilizando el lenguaje matemático.

Las situaciones presentadas requieren que hagas, asimismo, interpretaciones cualitativas y cuantitativas, que reflexiones sobre los aspectos tanto conceptuales como algorítmicos. La aplicación de tus conocimientos en diferentes contextos posibilitará que en el futuro estés en posibilidades de extender lo aquí estudiado a otros problemas de la vida cotidiana, de la física, la economía, la biología y otras disciplinas científicas.

Como siempre, es fundamental que sigas las instrucciones de tu profesor o profesora y participes activamente en las discusiones de equipos y grupales.

Secuencia Didáctica 1

• Profundizando el estudio de la variación

Inicio

ACTIVIDAD 1 Recuperando ideas sobre la variación

SD1-B1

A continuación se muestran tres gráficas, cada una de las cuales representa la variación de la posición de un objeto con respecto al otro.

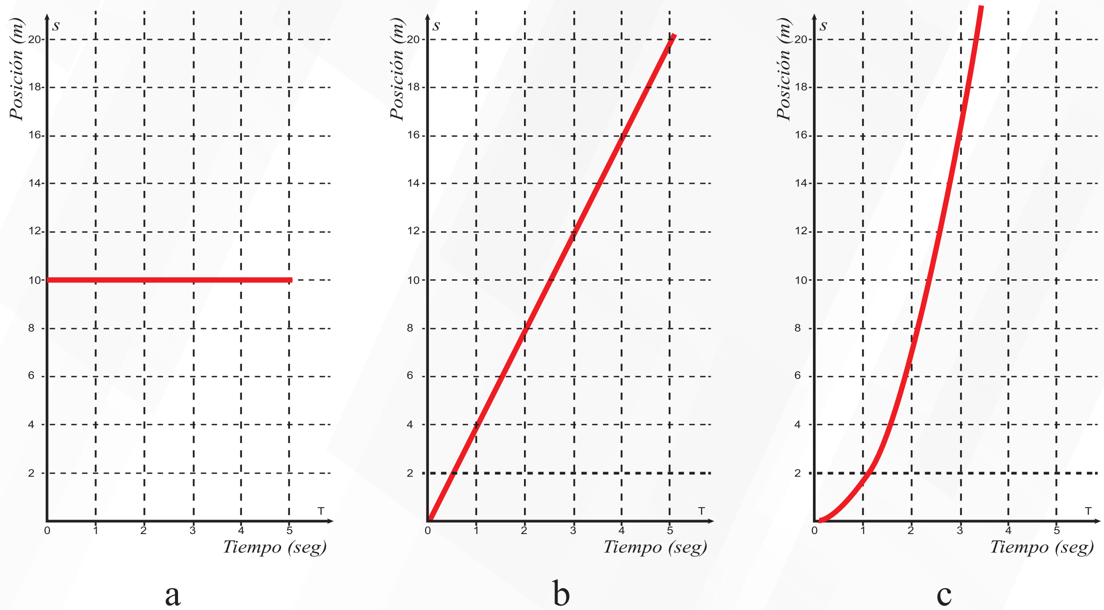


FIGURA 1.1

1. ¿En cuál de las gráficas se muestra que la posición con respecto al tiempo tiene un comportamiento constante, creciente o decreciente?

2. Indica cuándo, en caso de que la posición con respecto al tiempo sea creciente o decreciente, la rapidez de crecimiento o decrecimiento (la velocidad) está aumentando, disminuyendo o es constante.

3. Con base en tus estudios de cálculo diferencial y en particular de la derivada, determina, en cada caso de los mostrados en la Figura 1.1, el valor de la velocidad en los instantes de tiempo indicados.

i) $t = 1\ seg$

ii) $t = 2\ seg$

iii) $t = 3\ seg$

Desarrollo

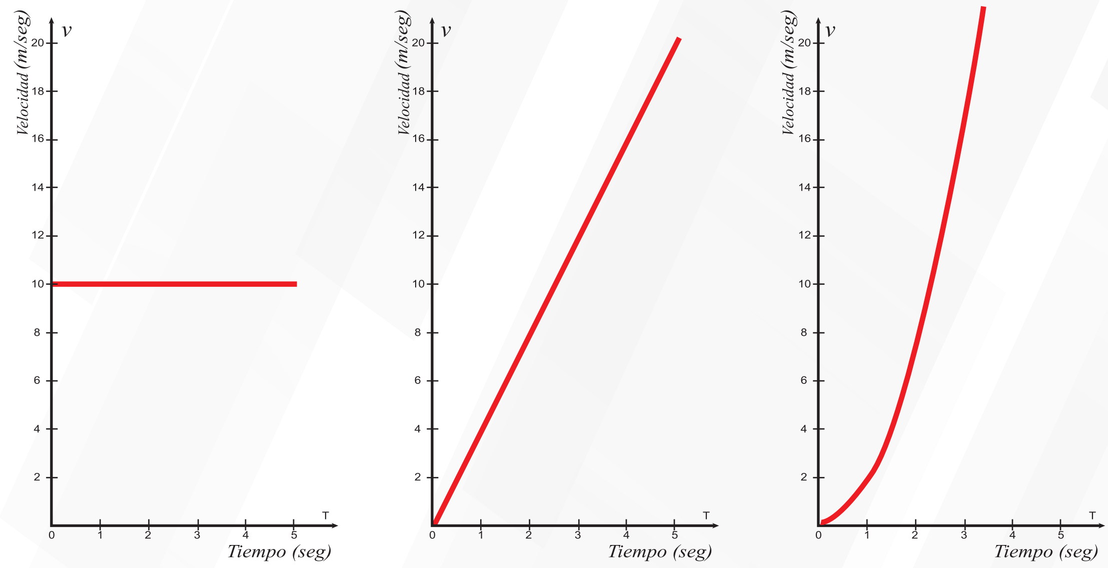
ACTIVIDAD 2 — Nuevas ideas en el estudi o de la variación.

SD1-B1

Distancia recorrida por un objeto

En cada caso de los mostrados en la Figura 1.2, se representa la velocidad contra el tiempo. Encuentra lo que se solicita en cada inciso.

Velocidad - Tiempo - Velocidad



a b c

FIGURA 1.2

4. De acuerdo con la gráfica del inciso a, determina la distancia que recorrió el objeto en los primeros 5 segundos de movimiento y explica qué hiciste para determinarla.

5. ¿Cómo está representada la distancia recorrida en la gráfica del inciso a de la Figura 1.2?

6. ¿Puedes calcular la distancia recorrida durante los primeros 5 segundos de movimiento en los casos representados en los incisos b y c?

7. En caso de no poder hacer el cálculo ¿cuál es la dificultad para ello?

Cierre

ACTIVIDAD 3 ¿Qué podemos concluir hasta el momento?

SD1-B1

Se espera que con lo realizado hasta este momento, podamos establecer que:

Cuando la velocidad de un objeto es constante, la cual puede representarse con la letra v, la distancia que recorre el objeto en un tiempo determinado t, se calcula mediante la expresió $d = vt$.

En este caso la distancia recorrida se representa mediante el rectángulo que en el eje de las ordenadas representa a la velocidad y en el eje de las abscisas al tiempo.

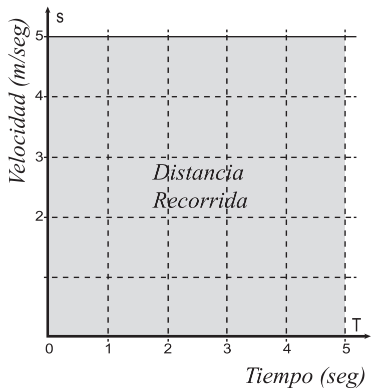


FIGURA 1.3

Pero el cálculo de la distancia recorrida cuando la velocidad es variable requiere de cálculos más complejos, los cuales son parte del estudio que se hará en Cálculo Diferencial e Integral 2. En el curso desarrollaremos algunas técnicas para el estudio de la variación que nos permitirán determinarla no sólo en el caso de las distancias recorridas por un objeto que se mueve a velocidad variable, sino también cuando se trate de otras magnitudes físicas, económicas, sociales y matemáticas.

Inicio

ACTIVIDAD 1 Gases de invernadero

SD2-B1

Uno de los grandes problemas actuales en el mundo es el llamado calentamiento global. Aunque los ciclos naturales que influyen en el clima y las condiciones meteorológicas juegan un papel importante en este fenómeno, los científicos han señalado que la causa principal del calentamiento global es la emisión de los llamados gases de invernadero, que son originados por la actividad humana.

En general los gases de invernadero tienen la característica de que dejan pasar los rayos del sol pero retienen la radiación infrarroja que emite la tierra y que de otra manera escaparía hacia el exterior. Esto produce el llamado efecto invernadero denominado así por su similitud con los invernaderos usados en agricultura, en los cuales los vidrios usados dejan pasar los rayos solares pero capturan la radiación infrarroja y con ello crean un clima cálido.

Los gases más abundantes en la atmósfera terrestre son el nitrógeno y el oxígeno, que no retienen la radiación infrarroja. Si fueran los únicos gases existentes, la vida en la tierra sería prácticamente imposible pues se calcula que la temperatura promedio sería de -18°C. Sin embargo, la existencia de otros gases que producen el efecto invernadero permite que la atmósfera retenga parte de la radiación solar y terrestre, elevando la temperatura a un promedio global de15°C.

a) ¿Habías escuchado hablar del efecto invernadero? ¿Qué conoces acerca del mismo?

b) ¿Qué actividades humanas influyen en la producción del efecto invernadero?

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 Automóviles y gases de invernadero

SD2-B1

Aún en los países más industrializados, como los pertenecientes a la Unión Europea, en donde las fábricas y los procesos agrícolas y ganaderos producen grandes cantidades de contaminantes, la polución ocasionada por los medios de locomoción es la responsable del 25% de las emisiones de dióxido de carbono (CO_2), del 87% de las de monóxido de carbono (CO) y del 66% de las de óxido de nitrógeno (NO), las cuales no sólo contribuyen al calentamiento global, sino que afectan directamente a la salud de los habitantes.

Para reducir la cantidad de gases contaminantes, en los automóviles se colocan dispositivos llamados convertidores catalíticos o catalizadores, que reducen la cantidad de contaminantes que se emiten a la atmósfera.

1. Investiga y escribe cómo funcionan, en términos generales, los convertidores catalíticos.

A pesar de la colocación de los dispositivos señalados en los automóviles, la emisión de contaminantes es muy elevada. Por ejemplo, el 2008 en España la emisión sólo de dióxido de carbono de los automóviles fue de $148\ \frac{\text{g}}{\text{km}}$, lo cual nos lleva a concluir que en una etapa de $1000\ km$ un automóvil, emite $148\ kg$ de dióxido de carbono.

2. Considerando que en el mundo hay actualmente cerca de 1,200 000,000 de automóviles y, suponiendo que en promedio se desplazarán $20\ k\ m$ diarios, ¿qué tanto dióxido de carbono emitirían en un año si se considera una emisión igual al promedio en España el 2008?

Para analizar con más detalle la situación descrita, se puede decir que los convertidores catalíticos bajan su rendimiento de forma continua y que por esa razón los automóviles emiten cada vez más contaminantes. En la tabla siguiente se proporcionan los datos de emisión de gases de invernadero de un automóvil, en el cual se realizaron 6 mediciones, al inicio de cada etapa de $1000\ km$ de recorrido del automóvil.

Etapa de recorrido (una etapa es de $1000\ km$)	0	1	2	3	4	5
Razón de escape de contaminantes ($km/Etapa$)	200	212	224	236	248	260

Tabla 1.1

Veamos si es posible hacer un cálculo de la emisión total de contaminantes que el automóvil había efectuado durante el lapso de las 5 etapas consideradas. Para hacerlo, tomando en cuenta que el deterioro en el funcionamiento del convertidor catalítico es continuo, unimos en una gráfica los puntos señalados en la Tabla 1.1

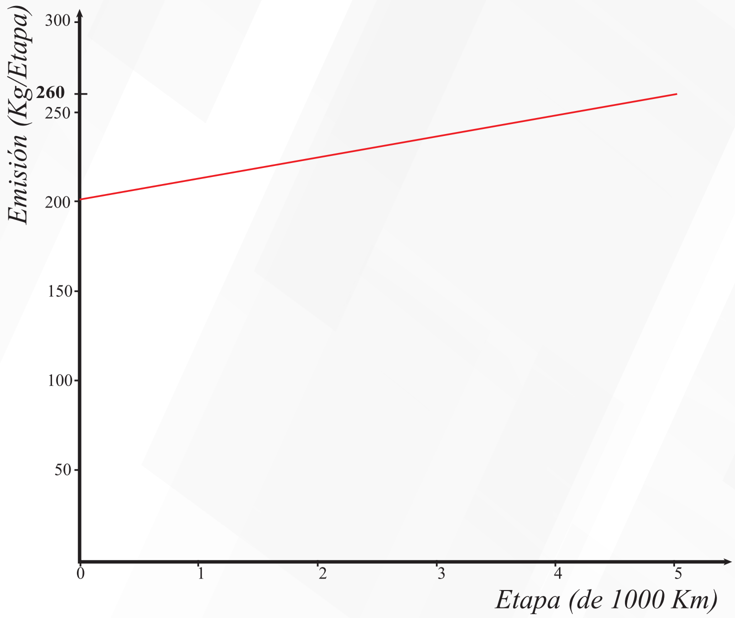


FIGURA 1.4

Para darnos una idea de cómo hacer el cálculo de la emisión total de gases emitidos por el automóvil, nos formulamos la interrogante de qué pasaría si el convertidor catalítico hubiera conseguido mantenerse funcionando igual que al principio, dejando pasar siempre $200\ \frac{\text{g}}{\text{km}}$ o, lo que es lo mismo, $200\ kg/Etapa$.

3. Determina la cantidad total de contaminantes emitidos por el automóvil a lo largo de las cinco etapas consideradas.

4. ¿Cómo se representa gráficamente esta cantidad? Haz la representación gráfica en la Figura 1.5.

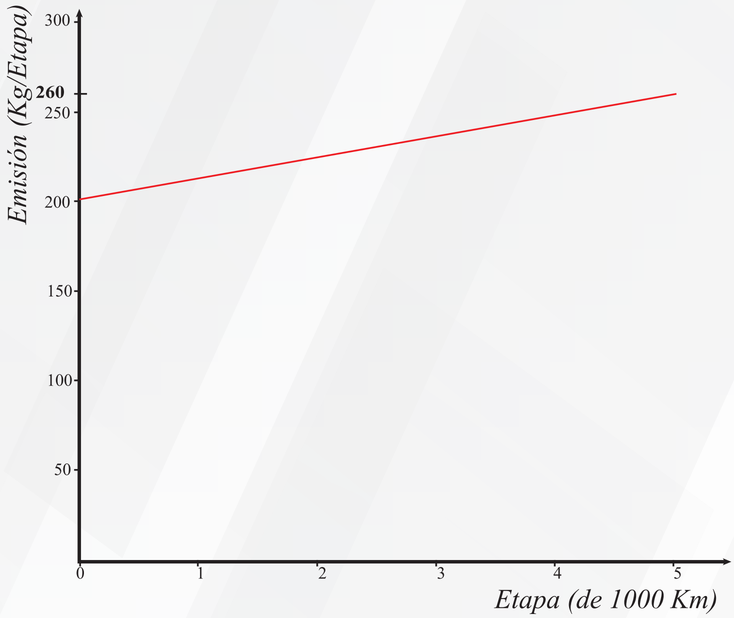


FIGURA 1.5

5. Posteriormente nos podemos plantear qué sucedería si el convertidor catalítico siempre hubiera dejado pasar una cantidad de contaminantes igual a la de la última medición medida, que es igual a $200\ \frac{\text{g}}{\text{km}}$. Haz el cálculo correspondiente a las 5 Etapas con dicha emisión y elabora la gráfica que representa ahora la situación.

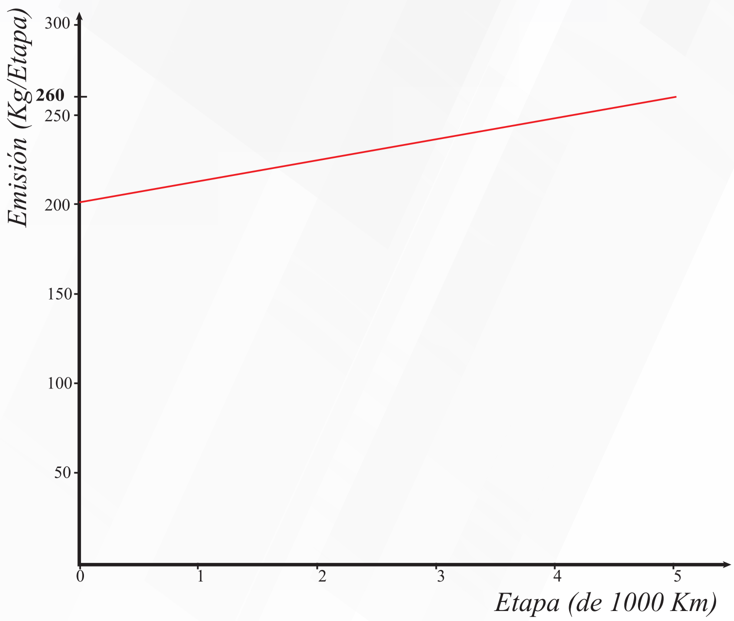


FIGURA 1.6

De esta manera establecemos que la emisión de contaminantes del automóvil durante las etapas consideradas es una cantidad que se ubica entre 1 y 1. 3 toneladas. Para tener una idea más aproximada, sigamos ahora la siguiente estrategia:

Así como tomamos primero la cantidad menor de emisiones en todas las etapas, podemos hacerlo para cada una de dichas etapas. Esto quiere decir que consideramos que durante los primeros $1000\ kg$ de recorrido la emisión de contaminantes podía ser constante e igual a $200\ kg$, en la segunda etapa tomar el valor menor, que en este caso es igual $212\ kg$ y así hasta considerar la quinta etapa con una emisión de $248\ kg$.

El cálculo de emisión de gases contaminantes seguiría siendo una aproximación por defecto a la cantidad real, pero más parecida que a la del cálculo anterior.

6. Realiza el cálculo correspondiente a esta aproximación por defecto.

7. En la siguiente figura, representa gráficamente el cálculo realizado.

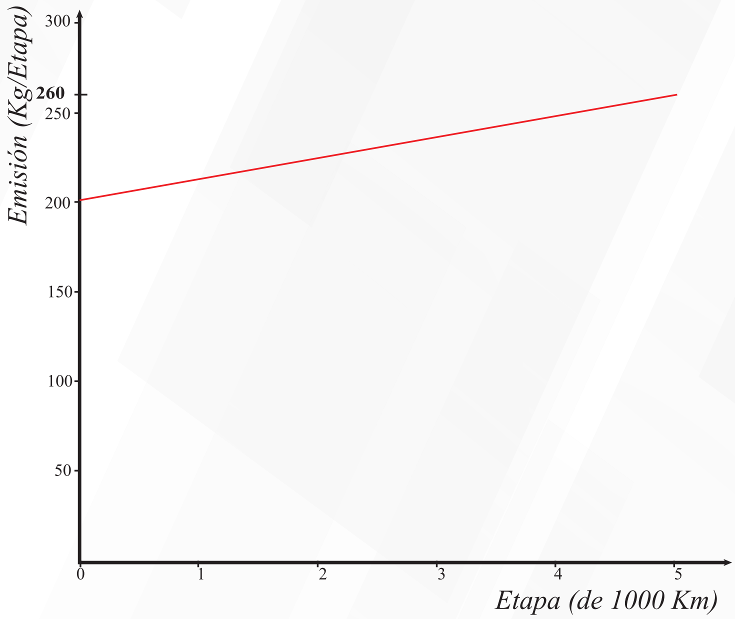


FIGURA 1.7

Continuando con esta estrategia, observamos que también podemos tomar en cada etapa el máximo valor posible y aproximar ahora por exceso el valor de la emisión durante las cinco etapas.

8. Determina el valor de la cantidad de la aproximación por exceso al tomar los valores máximos de emisión de contaminantes en cada etapa.

ACTIVIDAD 3 Industria y contaminación

SD2-B1

Otra fuente importante de emisión de gases de invernadero es originada por las fábricas que usan energía proveniente del uso de la gasolina, diésel, carbón y otros combustibles fósiles.

1. Investiga el porcentaje de contaminantes en forma de gases de tipo invernadero que se estima genera la industria en México y en el mundo. ¿Cuáles son los países que más contaminantes arrojan a la atmósfera y en qué proporción lo hacen?

Así como en los automóviles se emplean convertidores catalíticos, en las fábricas se emplean depuradores de los gases contaminantes que con el paso del tiempo se hacen menos eficientes. En la Tabla 1.2 se muestra el caso de una fábrica en el que se toman medidas al inicio de cada mes durante 6 meses, de la velocidad con la que se escapan gases contaminantes de tipo invernadero a la atmósfera, medido en toneladas por mes.

Tiempo *(meses)*	0	1	2	3	4	5	6
Rapidez de escape de contaminantes *(Tm/mes))*	4	6	8	10	12	14	16

Tabla 1.2

2. Haz una estimación por defecto y una estimación por exceso de la cantidad de contaminantes de gases de tipo invernadero que arroja la fábrica a la atmósfera terrestre y estima entonces el total de gases contaminantes durante los primero 6 meses.

3. Representa en una misma gráfica la estimación por defecto y la estimación por exceso de los gases emitidos por la fábrica.

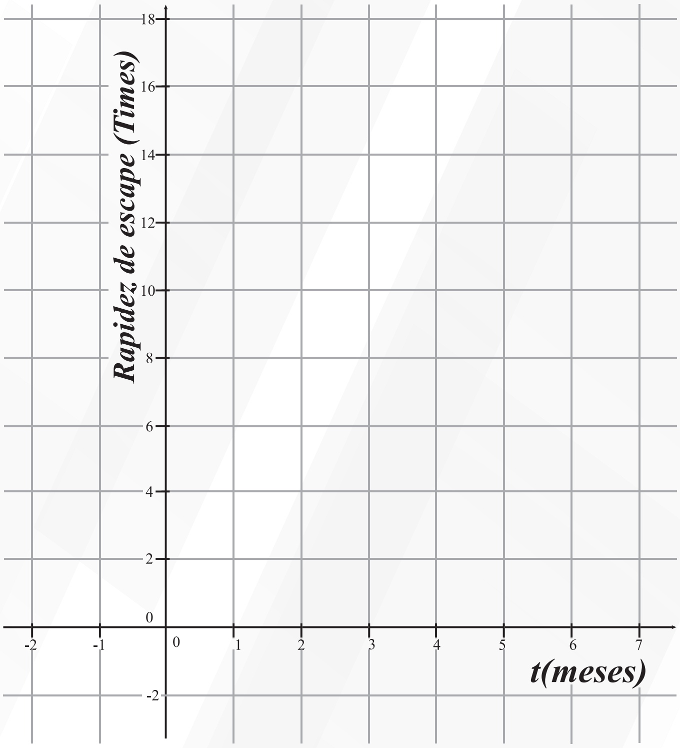


FIGURA 1.8

4. ¿Cómo podrías hacer una mejor estimación de los gases de invernadero arrojados por la fábrica a la atmósfera? Describe el procedimiento a emplear.

5. Representa en una misma gráfica las nuevas estimaciones realizadas.

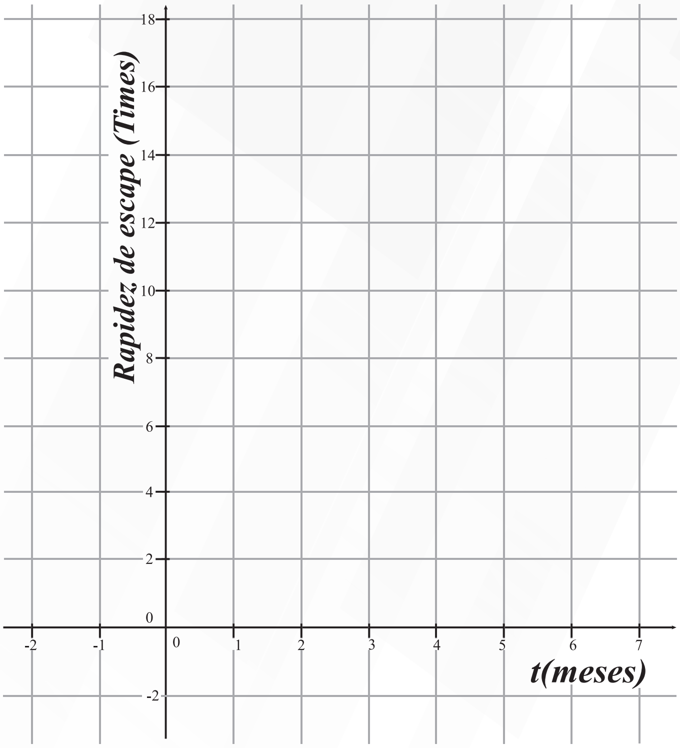


FIGURA 1.9

Cierre

ACTIVIDAD 4
SD2-B1

En el estudio de este fenómeno, ¿en qué nos ayuda la matemática?

EMISIÓN DE GASES Y MATEMÁTICAS

Sin lugar a dudas que el problema de la emisión de gases de invernadero producido por fábricas y automóviles crea graves problemas de contaminación, de los cuales seguramente has escuchado y leído en más de una ocasión.

Como has visto en esta secuencia, las matemáticas pueden ayudar a tener una idea más profunda del fenómeno, al menos en uno de sus aspectos, el de la acumulación total emitida de sustancias contaminantes a la atmósfera por un automóvil o una fábrica.

1. ¿Cómo podrías hacer una mejor estimación de los gases de invernadero arrojados por la fábrica a la atmósfera? Describe el procedimiento a emplear.

2. Representa en una misma gráfica las nuevas estimaciones realizadas.

Para analizar la efectividad de la estrategia seguida, veamos con más detenimiento lo que se ha realizado y la forma de continuar con el proceso. En el punto 6 de la Actividad 2 se solicitó que representaras en una gráfica el cálculo realizado para aproximar por defecto la cantidad total de gases emitidos a la atmósfera por un automóvil. Se espera que tu gráfica haya sido similar a la que se muestra en la Figura 1.10.

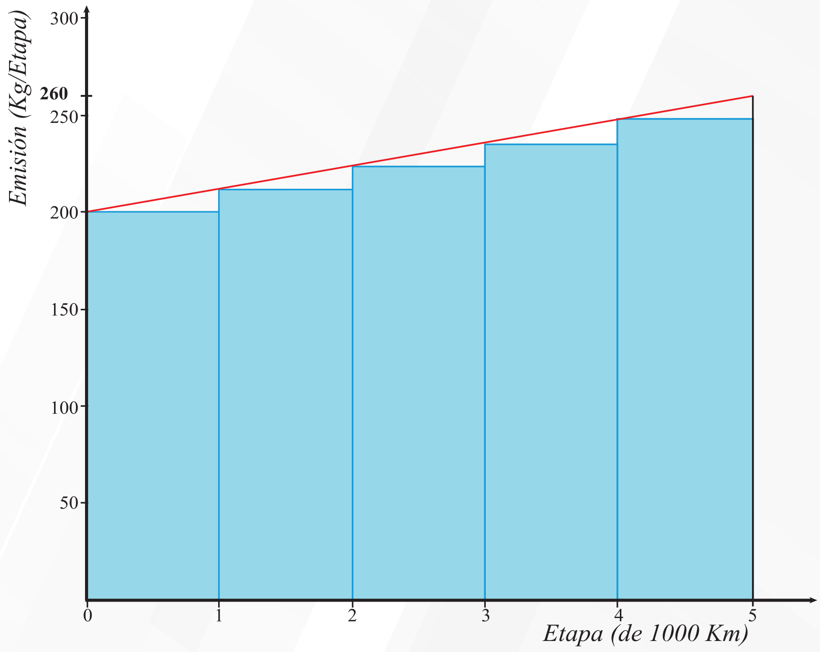


FIGURA 1.10

3. En las dos siguientes figuras se muestran las gráficas que representan dos aproximaciones por defecto, en las cuales se han tomado más datos. ¿Qué observas en ellas? ¿Cuál representa una mejor aproximación?

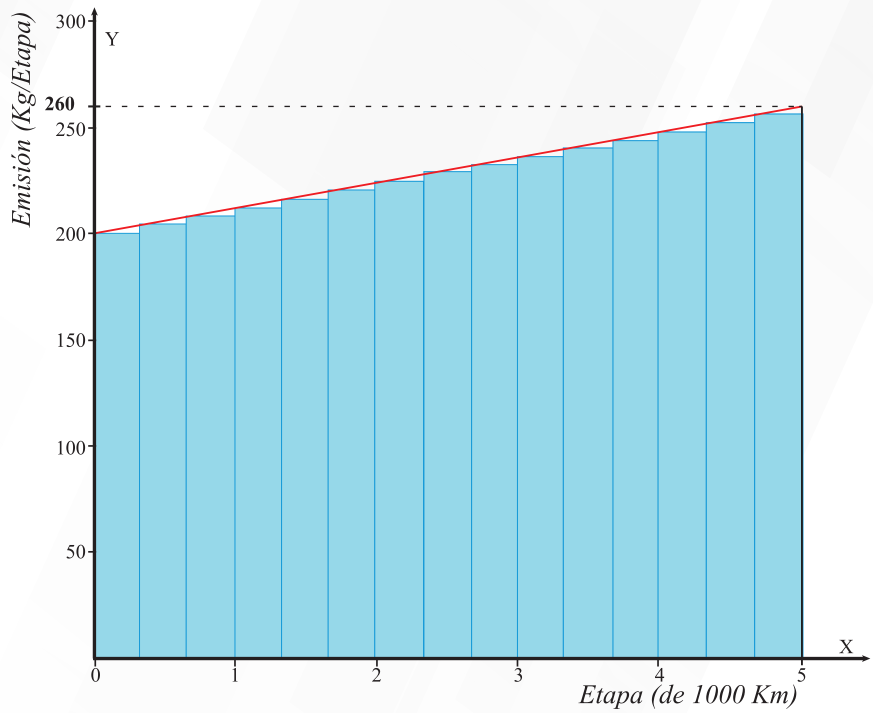


FIGURA 1.11

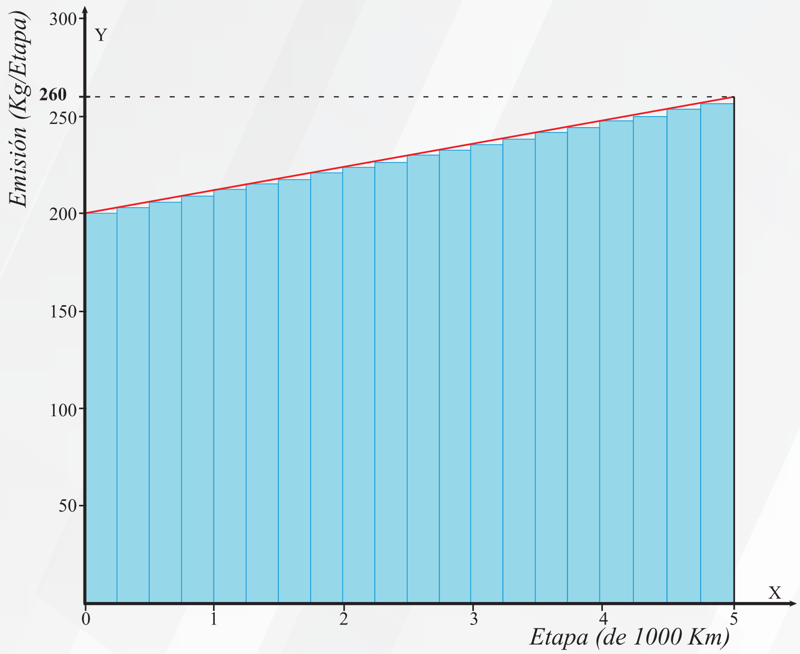


FIGURA 1.12

Secuencia Didáctica 3

- Aproximaciones a magnitudes físicas

Inicio

ACTIVIDAD 1 Trabajo mecánico

SD3-B1

En tus cursos de física has estudiado que el trabajo realizado por una fuerza constante que se aplica a un objeto para moverlo, si la fuerza se aplica en la misma dirección que el movimiento del objeto, es W -Fx, en donde W representa el trabajo mecánico, F la fuerza aplicada y x el desplazamiento del objeto.

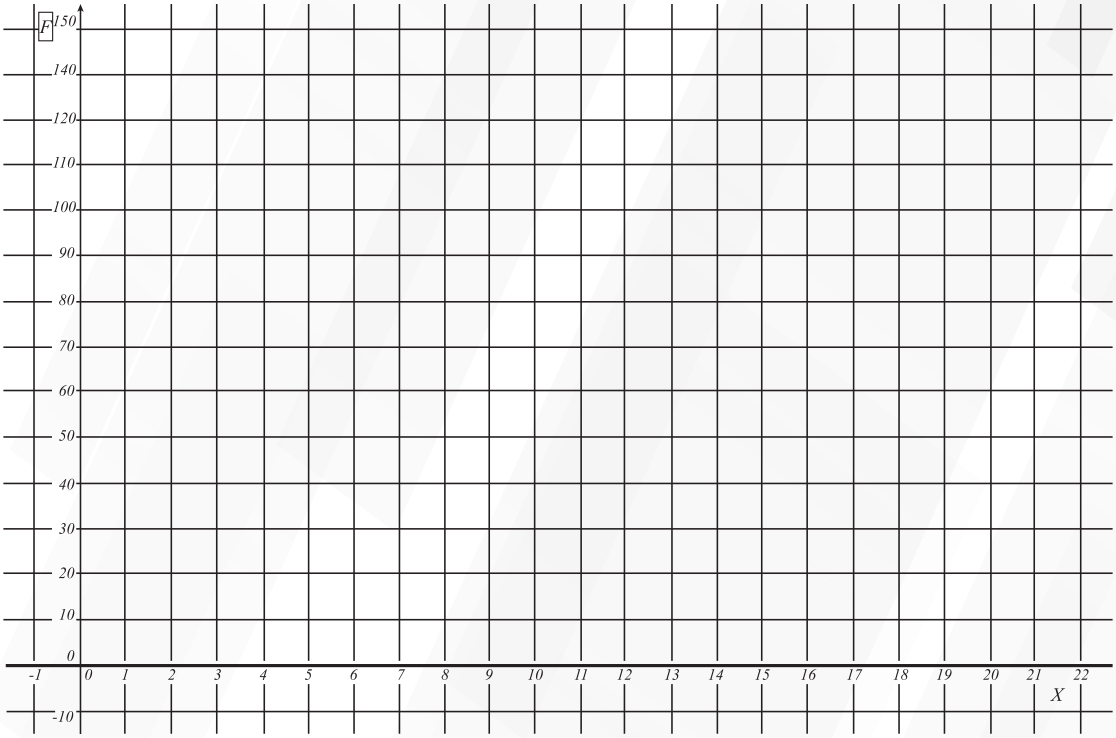


FIGURA 1.13

Las actividades que se presentan a continuación y las acciones que se deben ir realizando en ellas, tienen la finalidad de usar la estrategia de la secuencia anterior en las nuevas situaciones, así como de ir construyendo formas diferentes de realizarlas. En ese sentido es importante que pongas atención no sólo en la acción específica que vas realizando, sino en la forma en que se va abordando la solución del problema en su conjunto.

1. Determina el trabajo realizado por una fuerza de 100 N(Newton) que aplica una persona para mover una carreta sobre la calle de su casa, un total de 20 metros.

2. Haz una gráfica de fuerza contra desplazamiento e indica en ella cómo se representa el trabajo realizado.

3. Un objeto de 800 kg de peso es levantado con una grúa desde el suelo hasta una altura de 30 metros, empleando un cable de acero reforzado homogéneo, que pesa 15 kg. Conforme el objeto se va levantando, el cable se va enrollando. Determina una expresión analítica que represente el trabajo realizado en dependencia de la altura h a la que se va elevando el objeto.

4. Haz una gráfica de la fuerza F contra el desplazamiento vertical h del objeto levantado. ¿Cómo se representa ahora el trabajo realizado? Haz el cálculo correspondiente.

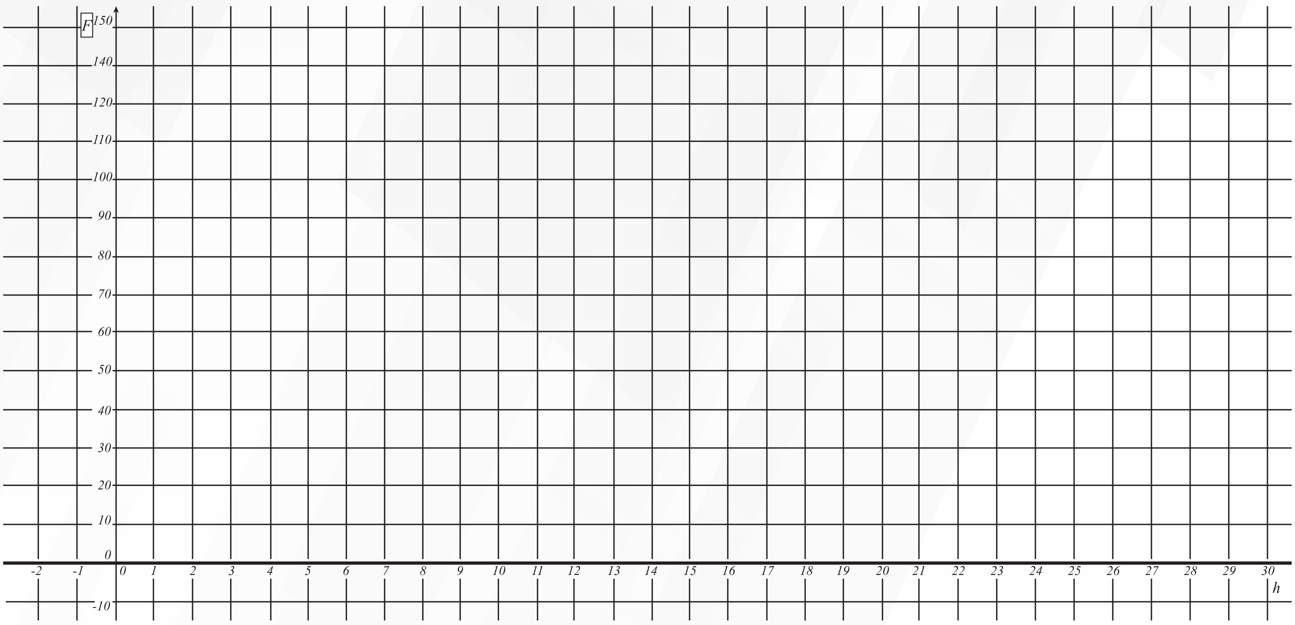


FIGURA 1.14

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 Distancia recorrida

SD3-B1

En esta actividad volveremos a usar la misma estrategia de aproximación a la solución del problema que aquí se formula, pero también revisaremos otra forma de analizar la situación.

Un objeto se mueve de tal manera que en los primeros cuatro segundos de movimiento, la gráfica de su velocidad contra tiempo es la siguiente: y sigue los pasos indicados.

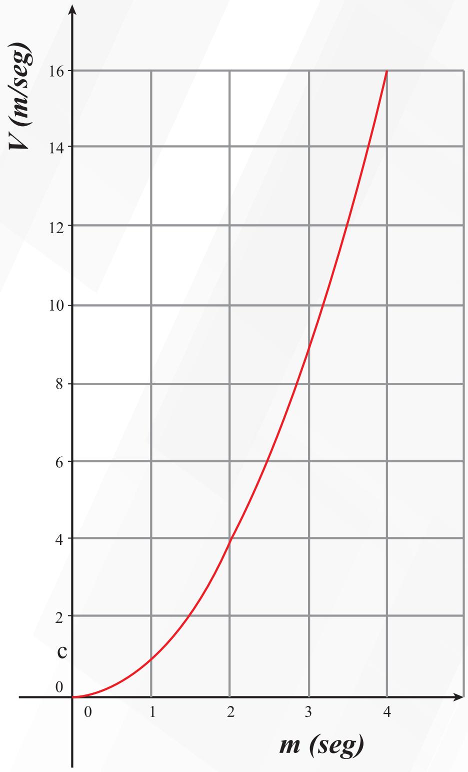


FIGURA 1.15

1. Escribe la expresión analítica para determinar la velocidad v en cualquier instante de tiempo t.
2. De acuerdo a lo estudiado hasta el momento, ¿cómo se representa en la gráfica la distancia recorrida? ¿Puedes determinar la distancia recorrida por el objeto en los primeros cuatro segundos del movimiento? De no ser así, explica las razones de ello.

3. Para aproximar el valor de la distancia recorrida durante los primeros cuatro segundos de movimiento, procede como en el caso de la emisión de gases, haciendo una aproximación por defecto y una por exceso. Procede de acuerdo a los siguientes pasos:

   a) Completa la tabla siguiente con los valores faltantes.

Tiempo *t(seg)*	0	1	2	3	4
Velocidad *v(m/seg)*	0	1			

Tabla 1.3

   b) Obtén una aproximación por defecto y una aproximación por exceso de la distancia recorrida, tomando cuatro subintervalos.

   c) Representa en una misma figura ambas aproximaciones.

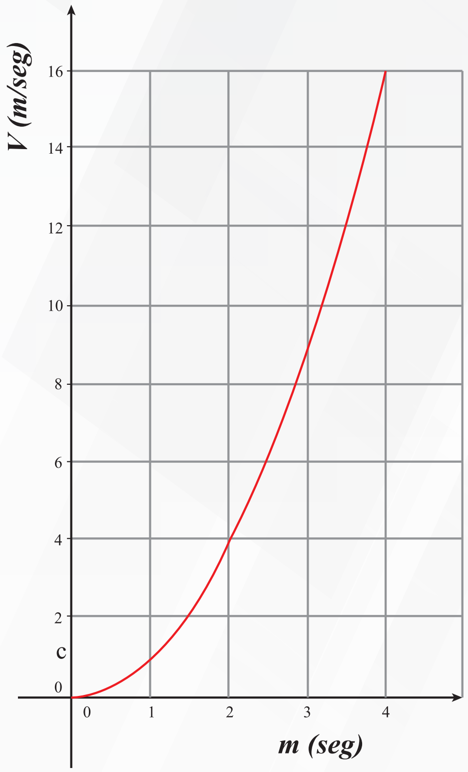


FIGURA 1.16

4. Para hacer una mejor aproximación, toma ahora ocho subintervalos iguales de tiempo y sigue las indicaciones.

a) Completa la siguiente tabla de valores de tiempo y velocidad.

t(seg)	0								4
v(m/seg)	1								16

Tabla 1.4

b) Haz una aproximación por defecto y otra por exceso de la distancia recorrida.

c) Representa ambas aproximaciones en una misma figura.

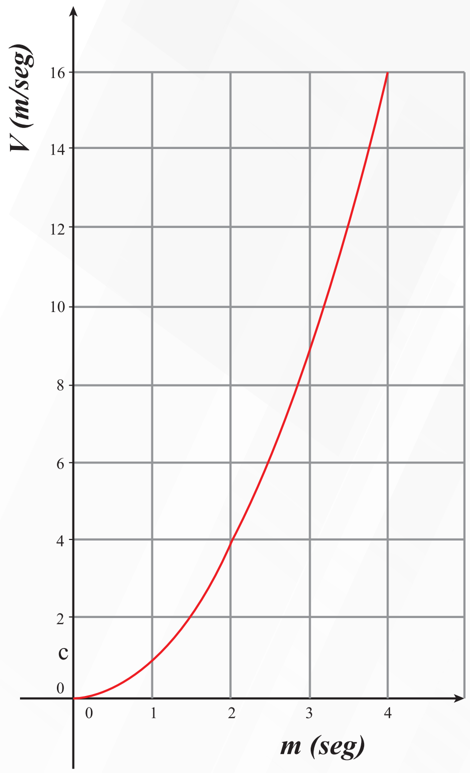


FIGURA 1.17

d) Si ahora quisieras hacer una mejor aproximación ¿qué procedimiento deberás seguir? Sin hacer cálculos, representa en la gráfica cómo sería la situación en caso de tomar 16 intervalos iguales de tiempo.

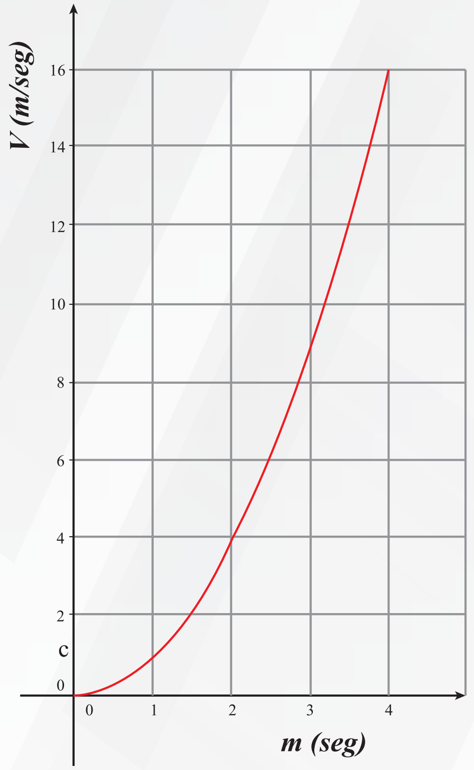


FIGURA 1.18

e) Escribe en el espacio siguiente, los pasos que, a tu juicio, deberían seguirse para lograr mejores aproximaciones. ¿Cómo podría obtenerse con precisión el valor de la distancia recorrida?

Te podrás haber dado cuenta que la estrategia de aproximación a la cantidad de gases de invernadero emitidos a la atmósfera por un actor contaminante, se puede emplear para aproximar la solución de situaciones problema diferentes como el cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable o de la distancia recorrida por un objeto.

En todos estos casos y contextos, se pueden interpretar los fenómenos de forma gráfica por medio de un área. Sin embargo, el cálculo de áreas, en casos como el de la última situación revisada, puede ser particularmente complicado, pues se trata de una figura en la cual uno de los lados no es rectilíneo.

Para la obtención de una solución exacta es necesario contar con procedimientos adicionales, como el que se desarrollará en la siguiente actividad.

ACTIVIDAD 3 Algunos cálculos interesantes

SD3-B1

En el punto 1 de esta actividad escribiste una expresión de la velocidad v en función del tiempo t transcurrido, y, por otra parte, desde el curso de cálculo diferencial estudiaste que la velocidad instantánea de un objeto es la derivada de la posición contra el tiempo. Tomando esto en cuenta escribe ahora la expresión para la velocidad como la derivada de la posición contra el tiempo:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

1. A partir de esta expresión para la velocidad como derivada de la posición ¿puedes dar una expresión para la posición en función del tiempo? De ser así escríbela a continuación:

$$s(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. Emplea esta expresión para calcular la distancia recorrida durante los primeros cuatro segundos de movimiento del objeto. Éste es un valor preciso de la distancia recorrida, ¿las aproximaciones anteriores se corresponden con este valor?

3. Determina la velocidad promedio con la cual se movió el objeto durante los primeros cuatro segundos.

4. Si el objeto se hubiera movido siempre a velocidad constante e igual al promedio ¿cuál hubiera sido la distancia recorrida por él?

5. En la siguiente gráfica de la velocidad contra el tiempo, representa ahora: la velocidad promedio contra el tiempo y la distancia recorrida cuando el objeto se mueve a velocidad constante e igual a la velocidad promedio.

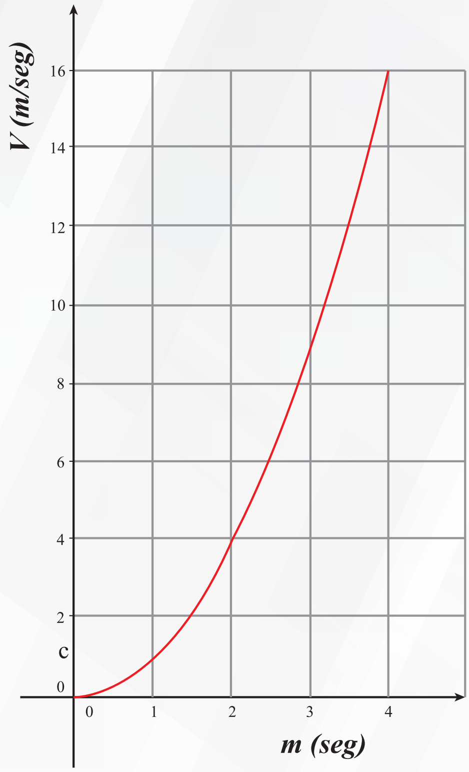


FIGURA 1.19

6. Emplea la misma expresión para calcular la distancia recorrida:

   a) Entre $t = 1\ seg$ y $t = 4\ seg$

   b) Entre $t = 1\ seg$ y $t = 3\ seg$

c) Entre $t = 2\ seg$ y $t = 4\ seg$

d) En los tres primeros segundos de movimiento.

Cierre

ACTIVIDAD 4
SD3-B1

A partir de las actividades de esta secuencia nos interesa concluir que:

Cuando se conoce una expresión para la velocidad de un objeto en función del tiempo y considerando que $v(t) = \frac{ds}{dt} =$, es posible, al menos en muchos casos, obtener la expresión de la posición en función del tiempo "*antiderivando*" la velocidad. Esto es, determinando una expresión $s(t)$ para la posición que al derivarla dé como resultado la expresión para la velocidad. Si la posición es constante, o positiva y creciente, la distancia recorrida se puede determinar entonces restando a la posición final de un objeto su posición inicial.

En general, si se tiene una función $g(x)$ que al derivarla dé como resultado una función $f(x)$, se dice que ***es*** $g(x)$ ***la antiderivada de*** $f(x)$.

7. ¿Este procedimiento es aplicable al caso de los ejemplos estudiados anteriormente (emisión de gases de invernadero y trabajo realizado)? Argumenta tu respuesta. De ser positiva tu respuesta, emplea el procedimiento descrito para cada uno de los casos anteriores, esto es, los de emisión de gases y de trabajo mecánico ya vistos.

8. A continuación se enuncian algunos problemas. Resuélvelos por medio de la obtención de antiderivadas:

a) Un objeto se suelta desde una altura de $100\ m$ y, moviéndose en caída libre, su velocidad se puede determinar por medio de la expresión $v(t) = -9.8t$, midiendo el tiempo t en segundos y la velocidad en v en m/seg. Determina la distancia recorrida por el objeto al cabo de tres segundos de movimiento.

b) Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo a la ley de movimiento

$$v(t) = -3t^2 - 2t + 1.$$

Si el tiempo está dado en segundos y la velocidad en m/seg, determina:

i) La distancia recorrida en los primeros dos segundos de movimiento del objeto.

ii) La distancia recorrida por el objeto entre los tiempos $t - 1$ y $t - 3$.

c) Un objeto se mueve en línea recta siguiendo la ley de movimiento $v(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2$. Determina la distancia recorrida en los primeros tres segundos de movimiento del objeto, si el tiempo está medido en segundos y la velocidad en m/seg.

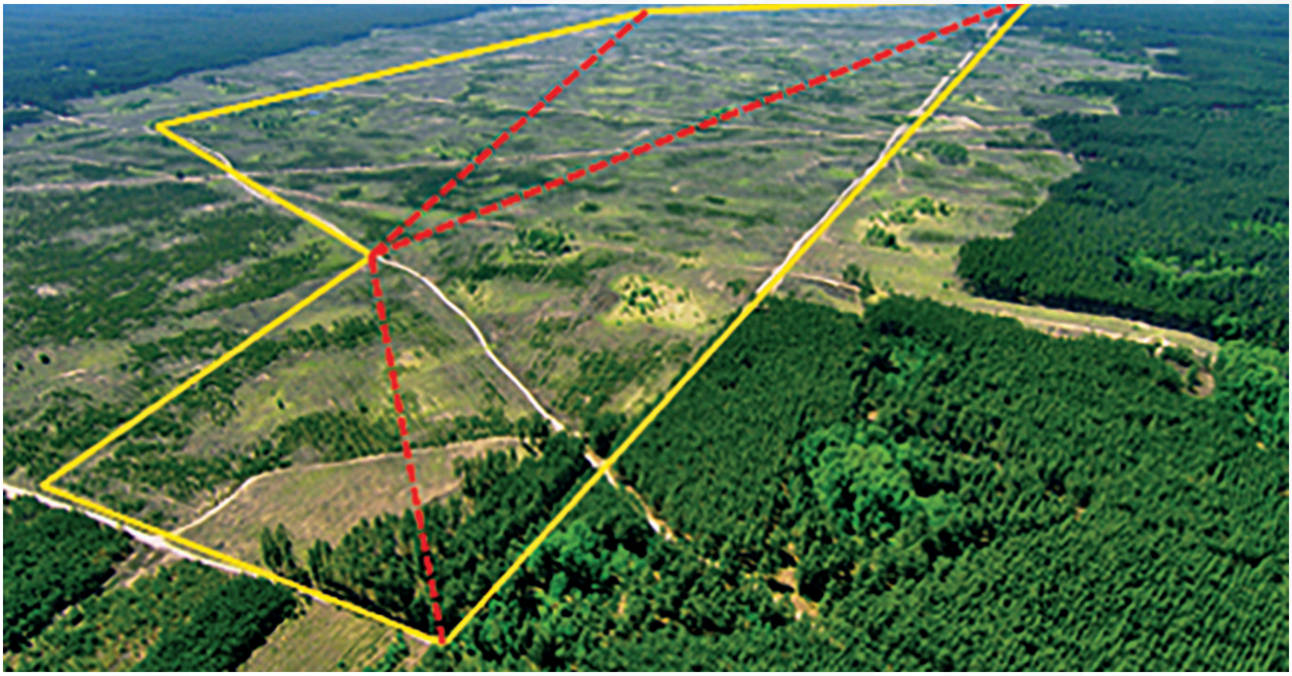
En los problemas estudiados en esta secuencia, pudiste observar que las situaciones tratadas, así sean de emisión de gases de invernadero, de trabajo mecánico o de distancias recorridas por un objeto, es posible interpretarlas geométricamente como el cálculo del área de figuras que pueden incluir un lado con curvas no rectilíneas.

Así como estos casos existen una gran cantidad de situaciones que se pueden resolver usando los mismos procedimientos. Para profundizar estas ideas y encontrar procedimientos rápidos e efectivos es necesario analizar con más detalle lo que sucede. Esto será tratado en la siguiente secuencia de este Bloque.

Inicio

ACTIVIDAD 1 — Áreas con un lado no rectilíneo

SD4-B1



A continuación se muestra la gráfica de una función $y = f(x)$ cualquiera, que es siempre positiva y acotada (sus valores se encuentran en un determinado intervalo finito, "no se van al infinito"), centrando la atención en el intervalo $[a,b]$.

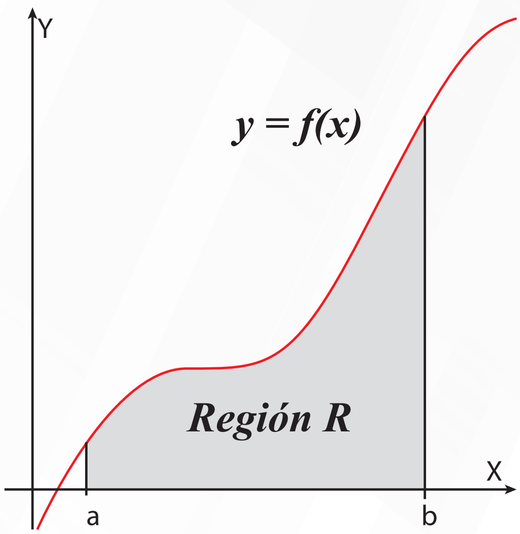


FIGURA 1.20

1. Describe el procedimiento que emplearías para aproximar por defecto y el procedimiento para aproximar por exceso el área de la Región R limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje de las abscisas, las rectas $x - a$ y $x - b$.

2. Las figuras 1.21 Y 1.22 muestran los rectángulos de dos aproximaciones por defecto del área de la Región R. ¿Cuál de las dos aproximaciones es mejor? ¿Cómo se podría aproximar de mejor manera el área de la Región R?

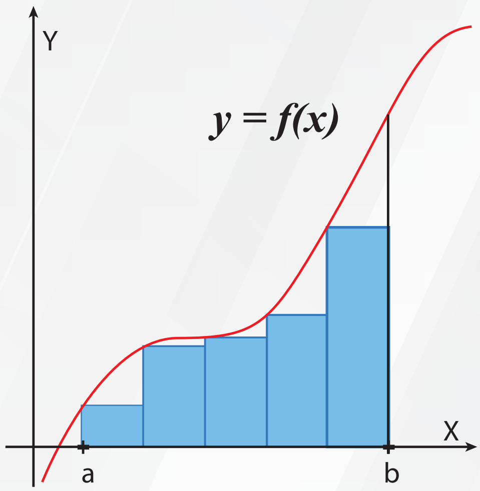


FIGURA 1.21

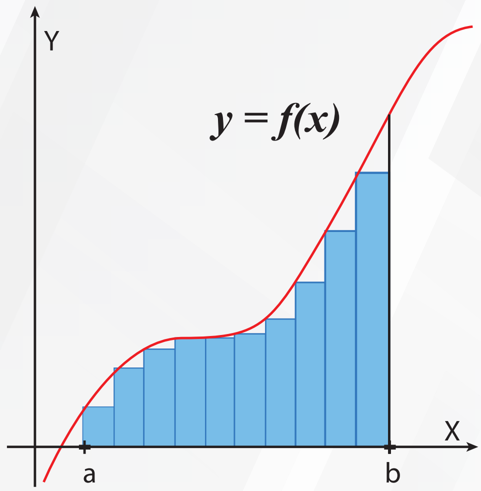


FIGURA 1.22

Desarrollo

ACTIVIDAD 2
SD4-B1

Estableciendo un procedimiento para mejorar nuestras aproximaciones.

1. Describe el procedimiento para hacer aproximaciones cada vez mejores para aproximar el valor de la Región R.

2. ¿Qué sucede con la dimensión de cada uno de los rectángulos cuando “partimos” el intervalo $[a,b]$ en subintervalos más pequeños?

3. ¿Cómo son entre sí las aproximaciones por defecto y por exceso cuándo se toman grandes cantidades de subintervalos?

Cierre

ACTIVIDAD 3 SD4-B1 Institucionalizando nociones y procedimientos

Los subintervalos que se forman cuando consideramos una partición infinita del intervalo $[a,b]$ se dice que son "infinitamente pequeños" o que son "segmentos diferenciales".

Así, cada subintervalo que se toma en una partición infinita produce cantidades diferenciales que suelen denominarse diferenciales de x y se representan con el símbolo dx, pues corresponden a segmentos "infinitamente pequeños" del eje de las "x".

Cada subintervalo da lugar a un rectángulo de área "infinitamente pequeña" por lo cual se le denomina diferencial de área y se representa como dA.

Cada elemento diferencial dA tiene un área igual a

$$dA = f(x^*)dx$$

en donde $f(x^*)$ es el valor de la función $y = f(x)$ en algún punto x^* del subintervalo correspondiente.

El área total es entonces la suma de todas las "áreas diferenciales" formadas de esta manera. Esa suma se conoce con el nombre de "INTEGRAL" y se expresa con el símbolo $\int_a^b$ que corresponde a una letra S de suma que se fue modificando con el tiempo. Así:

$$A = \int_a^b f(x^*)\, dx$$

Cuando determinamos la forma de obtener el valor de un área diferencial, llegamos a que:

$$dA = f(x^*)\, dx$$

Si despejamos de aquí el valor de $f(x^*)$, tenemos entonces:

$$f(x^*) = \frac{dA}{dx}$$

Este resultado nos indica que $f(x^*)$ es entonces la derivada de A con respecto a x, vista ahora la derivada como el cociente de dos magnitudes diferenciales.

En general si tenemos una función $y = f(x)$ decimos que el ***diferencial de la función f***, o simplemente el ***diferencial de y*** es:

$$dy = f'(x)\, dx$$

En el Bloque 2 se profundizará en la conexión que existe entre el cálculo de integrales y la derivada de una función, relacionando a la derivada de una función con la integral.

Por otro lado, observando lo que hiciste en el caso del cálculo de la distancia, y haciendo una analogía con el cálculo del área de la Región R, es posible determinar el valor del área por medio de la evaluación de una integral en los extremos del intervalo $[a,b]$. Como además en cada caso revisado en la secuencia anterior se necesitó hacer el cálculo de un área, las ideas construidas ahora permiten decir que:

Si tenemos una función $y = f(x)$ acotada y positiva como se muestra en la siguiente figura:

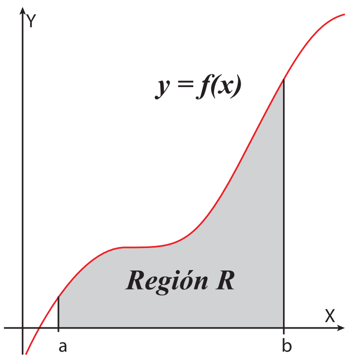


FIGURA 1.23

Entonces la integral $\int_a^b f(x)dx = \text{Área de la Región } R$, se puede determinar con el siguiente procedimiento:

1. Obtener una función $g(x)$ que sea antiderivada de $f(x)$, esto es, una función $g(x)$ tal que $g'(x)=f(x)$.
2. Restar la evaluación de $g(x)$ en los extremos, esto es, $\int_a^b f(x)dx = g(b)-g(a)$.

ACTIVIDAD 4 Pongamos en juego lo aprendido

SD4-B1

1. Obtén en cada caso el área de la región señalada y representa gráficamente la situación descrita.

   a) La región limitada por las gráficas de: $y = x + 2$, el eje x, las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

   b) La región limitada por las gráficas de: $y = -x^2 + 4$ y el eje x.

   c) La región limitada por las gráficas de: $y = x^3$, el eje y, el eje x y la recta $x = 1$.

   d) La región limitada por las gráficas de: $y = x^3$, el eje x, las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

SERIE DE PROBLEMAS

1. Conforme un automóvil entra en movimiento, el convertidor catalítico que tiene integrado permite pasar cada vez mayor cantidad de dióxido de carbono. Las emisiones medidas al principio de cada periodo o etapa de 5000 km recorrido son las que se muestran en la siguiente tabla.

Etapa de recorrido (una etapa es de $1000\ km$)	0	1	2	3	4	5
Razón de escape de contaminantes ($kg/Etapa$)	180	189	198	207	216	225

Tabla1.5

a) Haz una aproximación por defecto y otra por exceso, de la emisión total de gases emitidos a la atmósfera por el automóvil en los 5 meses considerados y representa la situación en una misma gráfica.

b) Obtén una expresión analítica que represente la cantidad de gases emitidos por el automóvil, en dependencia de la etapa de recorrido.

c) Determina la cantidad total de gases emitidos por medio de la integral de una función.

2. Un elevador de carga (montacargas) que tiene una masa de 1600 kg está sostenido por un cable de 6m de largo y una densidad lineal de masa de 12 kg por metro lineal. Calcule el trabajo que se requiere para subir el ascensor $4m$ enrollando el cable en un torno.

3. Conforme una saco de harina es levantado a una distancia de 16 metros, la harina se sale con un flujo tal que el número de kilogramos que se pierden es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la distancia recorrida. Si inicialmente el saco contenía 80 kg de harina y pierde un total de 16 kg mientras se levanta los 16 metros deseados, calcula el trabajo realizado para levantar el saco.

4. Una cubeta de *10 kg* de peso, la cual contiene *30 kg* de arena, es atada al extremo inferior de una cadena de *30* metros de largo y *5 kg* de peso que pende en un pozo profundo. Encuentre el trabajo realizado al subir la cubeta al borde del pozo.

5. Resuelva el ejercicio anterior considerando que la arena se sale por un orificio de la cubeta a flujo constante, y al llegar arriba se ha vaciado por completo.

6. Calcula por medio de una integral el área que se solicita en cada caso y representa gráficamente la situación descrita.

   a) La región limitada por las gráficas de: $y = 5$, los ejes coordenados y la recta $x = 4$.

b) La región limitada por las gráficas de: $y = x + 3$, el eje x y la recta $x = 2$.

c) La región limitada por las gráficas de: $y = x^2 - 4$ y el eje x.

d) La región limitada por las gráficas de: $y = 2x^2 - 8$ y el eje x.

e) La región limitada por las gráficas de: $y = x^2 - 8x + 18$, el eje x,las rectas $x=1$ y $x=2$.

7. En la Figura 1.24 se muestran gráficamente algunas regiones. Determina en cada caso el área de la región señalada.

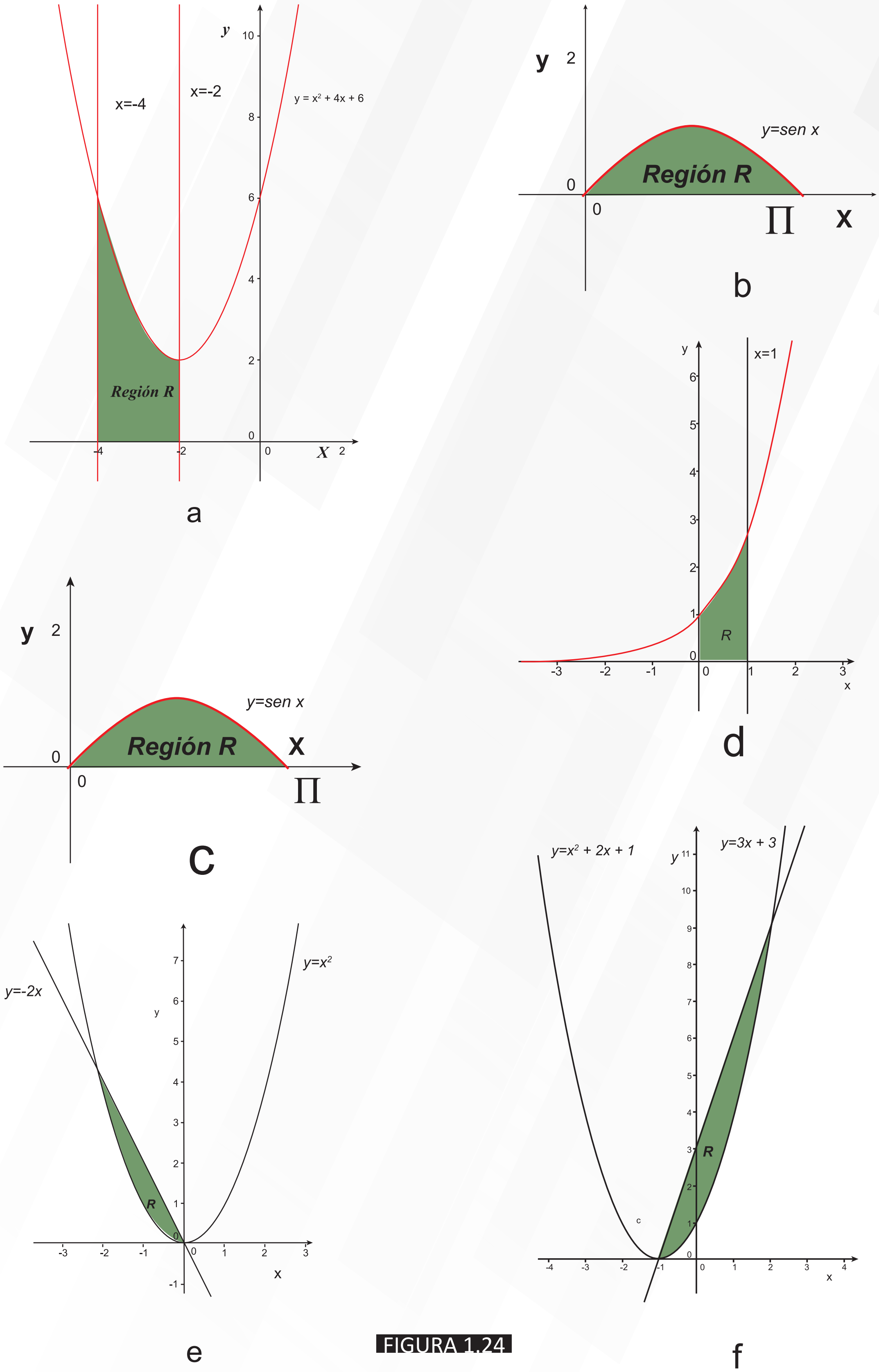


FIGURA 1.24

a).

b).

c).

d).

e).

f).

AUTOEVALUACIÓN

Este apartado tiene un papel importante en tu proceso de aprendizaje, pues te permite tener una valoración propia de qué tanto has aprendido de lo tratado en este Bloque. Una buena manera de obtener esta valoración consiste en regresar a la sección Introducción, donde se explicita qué es lo que se espera que aprendas, para posteriormente iniciar la solución de los problemas aquí planteados, así como responder a las preguntas contenidas en el apartado Reflexiones Generales.

Es importante también que ubiques las dificultades que todavía subsistan, y las compartas con tus compañeros y profesor, con la intención de que puedas solicitar el apoyo necesario para que puedan ser superadas.

SECCIÓN 1

1. La siguiente es la gráfica de una fuerza variable F, en dependencia de la distancia x en que va desplazando a un objeto. Describe e ilustra gráficamente cómo se puede aproximar el valor del trabajo mecánico realizado cuando el desplazamiento del objeto va de x–a a x–b.

2. ¿Cómo se puede calcular el área de una figura que tiene un lado no rectilíneo? Describe el procedimiento e ilústralo gráficamente.

¿Qué relación guardan entre sí las situaciones planteadas en los dos puntos anteriores?

¿Qué es la integral de una función? ¿Cómo se expresa matemáticamente la integral de una función en el intervalo [a,b]?

¿Qué es la antiderivada de una función? ¿Cómo puedes usar la antiderivada de una función para obtener el valor de una integral?

Usando el procedimiento descrito en el punto 5 para usar la antiderivada de una función en el cálculo de una integral, obtén el área de la región sombreada de la siguiente Figura. Si tienes alguna dificultad para hacerlo, comenta con tus compañeros y tu profesor lo que pueda estar ocurriendo.

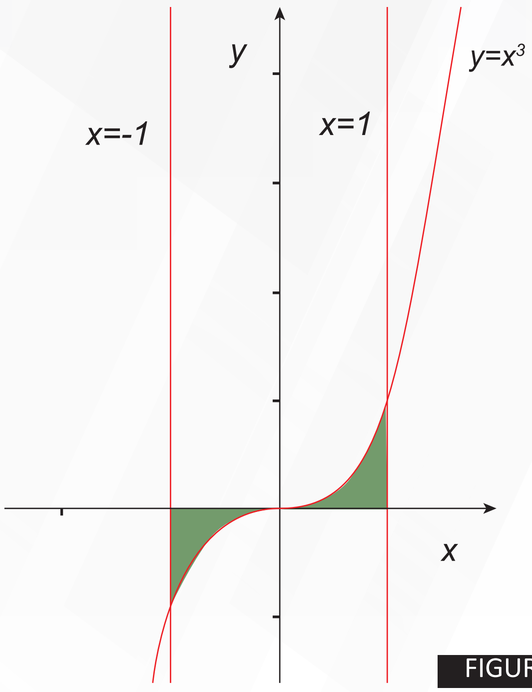


FIGURA 1

SECCIÓN 2. Reflexiones generales

1. Cuando trabajaste individualmente, ¿lograste responder las actividades solicitadas?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

2. ¿Las participaciones de tus compañeros fueron importantes para responder las actividades de las diferentes secuencias?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

3. ¿Fuiste capaz de exponer tus ideas cuando realizaste trabajo en equipo o en el grupo?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

4. Cuando tuviste alguna duda, ¿Pudiste explicarle a tus compañeros las dificultades que se te presentaron?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

5. ¿Utilizaste algún tipo de recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.), para apoyar tus actividades en clase y/o extra clase?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

6. En este Bloque me parecieron muy interesantes los temas siguientes:

-
-
-

7. En este Bloque me pareció particularmente difícil lo siguiente:

-
-
-

8. Mis conclusiones generales de este Bloque son las siguientes:

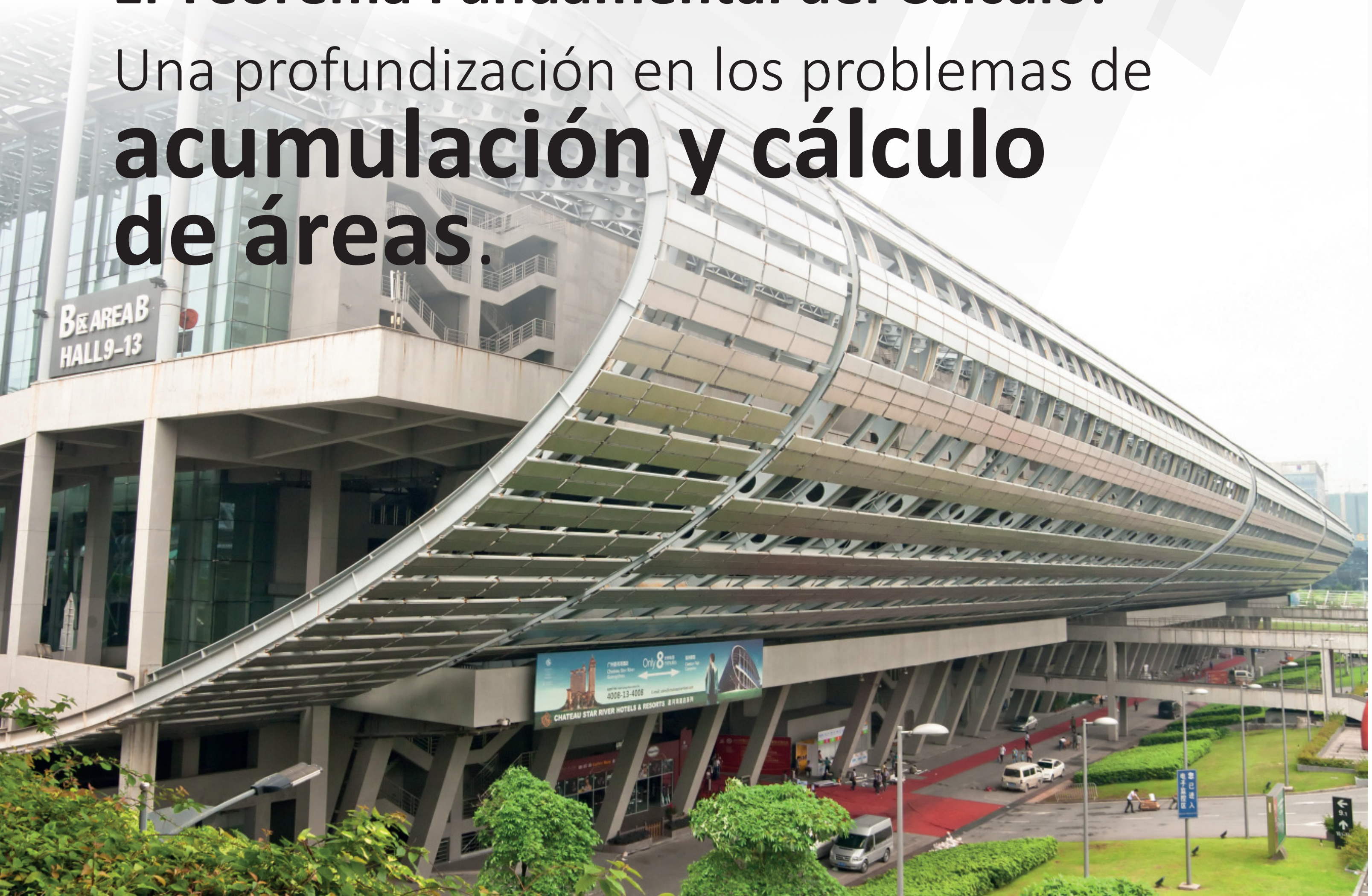
MIS NOTAS:

Bloque 2

18 Horas

El Teorema Fundamental del Cálculo:

Una profundización en los problemas de **acumulación y cálculo de áreas.**



Introducción B-2

Al desarrollar las actividades de este Bloque se pretende, por una parte, que mejores tu comprensión de la integral de una función y de su estrecha relación con la derivada de la misma, estableciendo lo que se conoce con el nombre de Teorema Fundamental del Cálculo.

Por otra parte, con base en la conceptualización de la integral como el “área bajo la curva”, se estudiará el cálculo de áreas entre las gráficas de funciones, analizando diferentes situaciones y sumando a lo ya estudiado en el Bloque anterior, el caso de funciones que toman valores negativos

Asimismo, se analizarán las dificultades que existen para obtener antiderivadas de funciones y la necesidad de emplear métodos especiales que conduzcan a su obtención. En ese sentido se revisarán los casos en los cuales es posible obtener antiderivadas directamente, a partir del conocimiento que ya se tiene de la derivada de algunas funciones, la posibilidad de hacer transformaciones algebraicas relativamente sencillas para obtener directamente las antiderivadas y, por último, la necesidad de usar un método especial de antiderivación conocido como integración por sustitución o integración por cambio de variables.

Para el tratamiento de los temas señalados podrás hacer uso de procedimientos algebraicos, numéricos, gráficos y variacionales, verificar las soluciones a los problemas planteados que obtuviste por medio de procedimientos algorítmicos, cuantificar áreas de gráficas de funciones obtenidas con las intersecciones correspondientes e interpretar información proporcionada en diferentes representaciones simbólicas.

Es importante que realices las actividades siguiendo las indicaciones del Módulo y de tu profesor o profesora, trabajando en ocasiones individualmente, otras en equipos pequeños de tres o cuatro estudiantes y otras más en trabajo grupal. Cuando realices actividades colectivas es necesario que te involucres tanto expresando tus ideas como escuchando atentamente las propuestas y explicaciones de tus compañeros.

Secuencia Didáctica 1

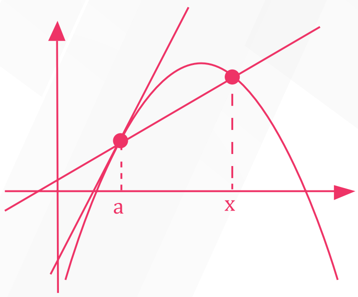
• Pendiente de la recta tangente y cálculo de área: dos problemas vinculados.

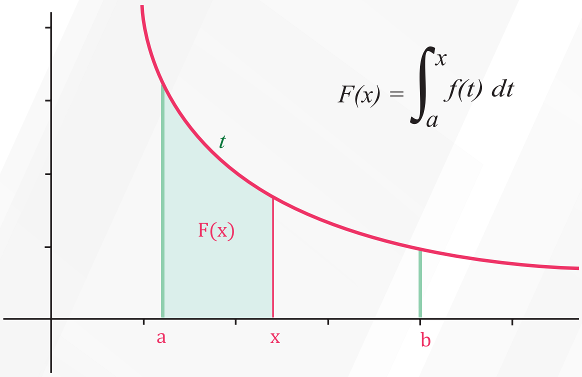
Inicio

ACTIVIDAD 1 Algunas reflexiones sobre el cálculo de áreas

SD1-B2

$$f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$





Empezaremos estas reflexiones retomando el procedimiento establecido para abordar el problema del cálculo del área de una región ***R*** del plano determinada por la gráfica de una función $y = f(x)$ (mayor o igual que cero, en el intervalo $[a,b]$), el eje ***X*** y las rectas verticales $x - a$ y $x - b$.

Para ello:

1. Calcula el área de la región ***R*** del plano delimitada por el eje ***X*** y las rectas $x = 2$ y $y = 2x$.

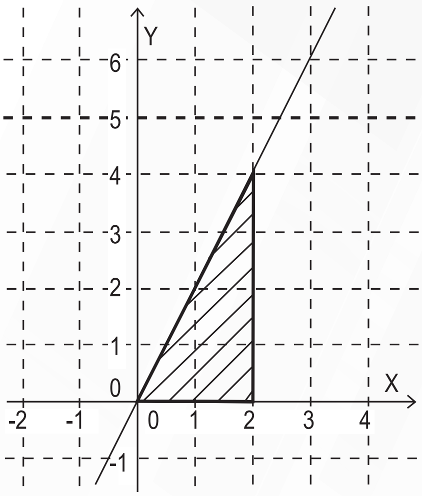


FIGURA 2.1

A partir de los cálculos realizados, revisa los señalamientos siguientes e indica si estás o no de acuerdo con ellos:

a) La región cuya área se pide calcular está representada en la Figura 2.1 en donde puede verse que la función $y = 2x$ es mayor o igual que cero en el intervalo de valores de x que se requiere considerar, razón por la cual el valor del área puede obtenerse calculando el valor de la siguiente integral

$$\int_0^2 2xdx$$

Aplicando el procedimiento establecido es necesario antiderivar la función $f(x) = 2x$, lo cual resulta sencillo puesto que es fácil reconocer que se trata de la derivada de la función

g $(x) = x^2 + c$, donde c es cualquier constante.

Al evaluar esta función en $x = 0$ y en $x = 2$, se obtiene $g\,(0) = c$ y $g\,(2) = 4 + c$ y al restar estos valores se obtiene g $(2) - g(0) = (4 + c) - c = 4$ que debe ser el valor del área de la región R del plano.

b) Verificar que dicha área tiene valor 4 es realmente fácil, ya que la región R es un triángulo (ver Figura 2.1), por lo que es posible calcular su área utilizando la fórmula $A = \frac{bh}{2}$ y como dicho triángulo es rectángulo, puede tomarse uno de los catetos como la base y el otro como la altura. Dado que éstos miden respectivamente 2 y 4, el área resulta ser 4.

2. Dado que la región R del plano comprendida entre la recta $y = 2x$, el eje X y cualquier otra recta paralela al eje Y que pase por un punto cuya abscisa sea mayor que cero, siempre será un triángulo rectángulo donde uno de los catetos valdrá x y el otro $2x$; el área de la región R podrá calcularse utilizando la fórmula $A = \frac{bh}{2}$ o calculando el valor de la integral $\int_0^2 2xdx$, en el intervalo $[0, x]$. Haz el cálculo con ambos procedimientos y verifica que el resultado es el mismo.

ACTIVIDAD 2 Integrales y funciones lineales

SD1-B2

1. Considera ahora la función $y = 2x + 1$ y obtén la función que puede utilizarse para calcular el área de la región R que se forma en el intervalo $[1, x]$ donde $x > 1$. Al igual que en el inciso 2 de la Actividad 1 hazlo por los dos procedimientos siguientes:

   a) El basado en el cálculo del valor de una integral;

   b) El basado en el uso de la fórmula con que se calcula el área de un trapecio, esto es, la fórmula $A = \frac{(B + b)\,h}{2}$.

   Verifica que se obtiene el mismo resultado.

Responder las siguientes preguntas puede resultar de utilidad para hacer tus cálculos.

a) ¿Qué figura geométrica tiene la región R que forman la recta $y = 2x + 1$, el eje X, la recta $x = 1$ y otra recta vertical que pasa por un punto cualquiera del eje X cuya abscisa es mayor que 1? (Utiliza el sistema de coordenadas de la Figura 2.2 para trazar las rectas indicadas y observar la figura geométrica mencionada).

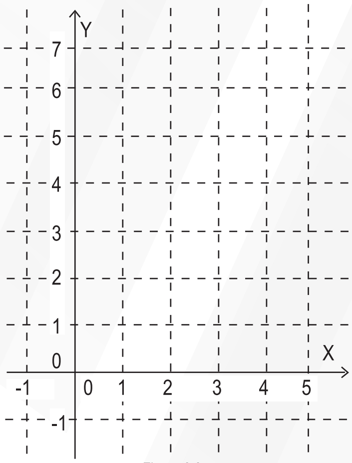


Figura 2.2

FIGURA 2.2

b) Escribe la integral con la que puede obtenerse la función área de dicha figura y calcúlala.

c) Ahora obtén dicha función a partir de la fórmula del área del trapecio, que es la figura geométrica de la región R (recuerda que dicha fórmula es $A = \frac{(B + b)\, h}{2}$). Para hacerlo determina el valor de las bases b, B y el de la altura h , sustitúyelos en la fórmula y simplifícala).

d) Verifica que has obtenido la misma función por los dos procedimientos.

5) Dado que la gráfica de toda función lineal de la forma $y = mx + b$ es una recta, la región R limitada por dicha recta, el eje X y dos rectas paralelas al eje Y, que pasen por los puntos de abscisa x y $x+h$, (siempre y cuando $y \geq 0$ para todo valor del intervalo $[x, x+h]$), será siempre un trapecio o un triángulo, como se muestra en la Figura 2.3.

La expresión analítica con la que se puede calcular el área de dicha región puede obtenerse por medio de:

$$\int_{x}^{x+h} (mx + b)\, dx$$

O utilizando la fórmula para calcular el área del triángulo o del trapecio. Hazlo y verifica que la expresión que se obtiene por ambos procedimientos es la misma.

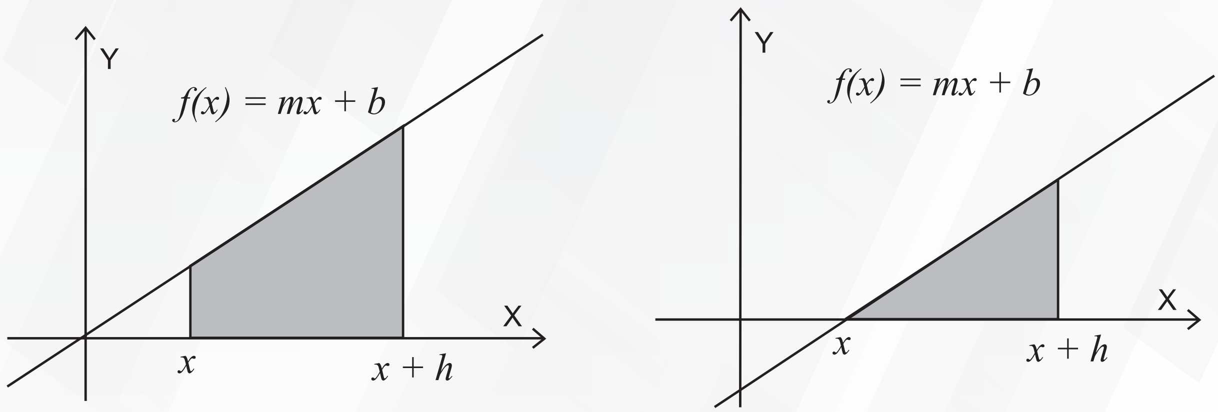
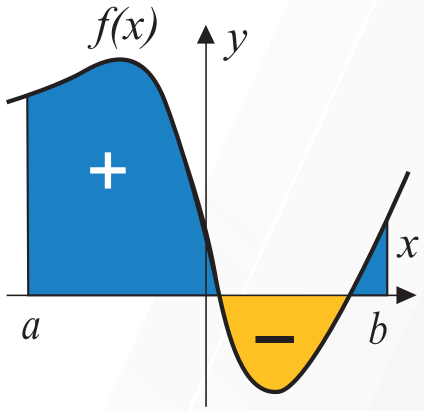


FIGURA 2.3

Desarrollo

ACTIVIDAD 3 Función de área
SD1-B2



1. En el caso de las funciones lineales has podido verificar que la expresión analítica con la que puede calcularse el área de una región R del plano localizada en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas, que está delimitada por el eje X, las rectas paralelas al eje Y que pasan por los extremos de un intervalo $[x, x+h]$ y la recta que es gráfica de la función lineal puede obtenerse por medio de una integral.

A partir de esta actividad el propósito es que mejores tu comprensión de la relación existente entre la integral y la derivada de una función. Para hacer este análisis, vamos a retomar el caso del cálculo del área de la región R del plano delimitada por el eje X, dos rectas paralelas al eje Y que pasan por los extremos de un cierto intervalo $[a, b]$ que denominaremos intervalo de integración, y la gráfica de una función cualquiera $y = f(x)$ que es mayor o igual que cero en dicho intervalo, como se ve en la Figura 2.4.

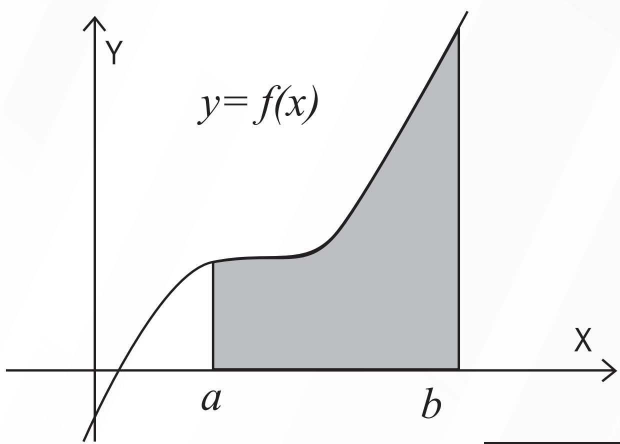


FIGURA 2.4

La primera cuestión que es conveniente reflexionar, es la existencia de una función que permite calcular el área de la región R. Para ello, considera la curva sólo en el intervalo donde $f(x) \geq 0$, es decir a partir del punto donde corta al eje X, que denominaremos con x_0 y observa que desde ese punto (donde $f(x) = 0$) hasta el punto donde $x = a$ hay una región limitada por la curva, el eje X y la recta $x = a$ que tiene un área y que lo mismo sucede para cualquier otro valor de x del intervalo en el cual $f(x) \geq 0$, esto es, para cada valor de x existe un valor A del área, esto significa que el área es una función de x y que si tuviéramos una expresión analítica de dicha función, al evaluarla para cualquier valor de x del intervalo donde $f(x) \geq 0$, obtendríamos el valor del área.

Habiendo establecido que A es una función de x; podemos escribir

$$A = g(x)$$

donde g representa la instrucción de lo que debe hacerse al valor de x para obtener el valor de A.

De acuerdo con este significado de g, y con base en la Figura 2.4, determina:

a) ¿Qué representa $g(a)$ y qué representa $g(b)$?

b) ¿Cuál es el valor de $g(x_0)$?

c) ¿Qué representa en la figura $g(b) - g(a)$?

d) ¿Qué sucede con el valor de $g(x)$ a medida que el valor de x aumenta?

e) De acuerdo con tu respuesta a la pregunta anterior ¿Cómo resulta ser la función $g(x)$?

2. Utiliza el sistema de coordenadas que aparece en la Figura 2.5 para bosquejar la gráfica de la función $A = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

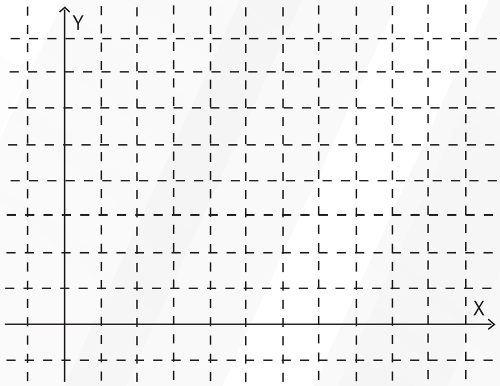


FIGURA 2.5

a) En la gráfica que has bosquejado ¿Cómo están representados $g(a)$ y $g(b)$?

b) En esa misma gráfica ¿Cómo está representado $g(b) - g(a)$?

c) En general ¿Cómo representas las coordenadas de un punto cualquiera que esté en la gráfica que has bosquejado?

3. Sean $(x, g(x))$ y $(x + h, g(x + h))$ las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la gráfica de la función Área que bosquejaste. Márcalos. A partir de esa información, determina lo que representan en esa gráfica las siguientes expresiones:

a) $g(x + h) - g(x)$

b) h

c) $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

d) $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

4. En la gráfica de la función $y = f(x)$ que aparece en la Figura 2.6 determina:

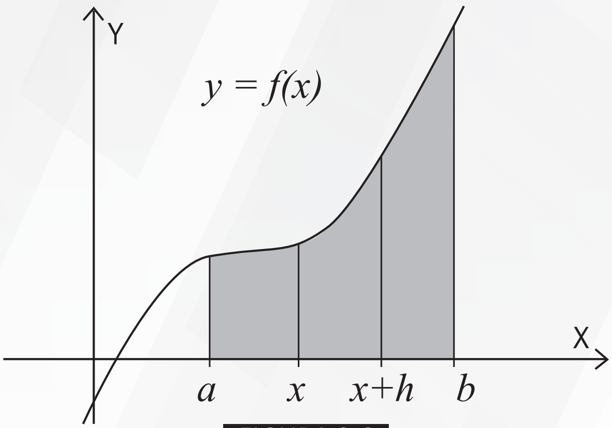


FIGURA 2.6

a) ¿Qué representan las expresiones $f(x+h)h$ y $f(x)h$?

b) ¿Cómo resulta ser el área del rectángulo representada con $f(x)h$ comparada con el área $g(x+h)-g(x)$?

c) ¿Cómo es el área del rectángulo representada con $f(x+h)h$ en comparación con $g(x+h)-g(x)$?

d) Con base en las respuestas que has dado en los incisos b) y c) interpreta lo que significa la siguiente desigualdad y escríbelo:

$$f(x)h < g(x+h) - g(x) < f(x+h)h$$

e) Escribe la desigualdad que resulta al dividir entre h los tres miembros de esta desigualdad

f) Si consideras h la base de los rectángulos cuyas áreas son $f(x)h$ y $f(x+h)h$, ¿Qué resultan ser $f(x)$ y $f(x+h)$ de dichos rectángulos?

g) Si llamamos h a la base de la figura de la región R y $g(x+h) - g(x)$ como el valor del área de un rectángulo, ¿Qué representa $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$?

h) Con base en las consideraciones hechas en los incisos f) y g) interpreta lo que significa la desigualdad que escribiste en el inciso e).

5. Se espera que en el inciso e) hayas escrito:

$$f(x) < \frac{g(x+h) - g(x)}{h} < f(x+h)$$

y que esta desigualdad la hayas interpretado diciendo que la altura del rectángulo que tiene la misma área que la región R de la figura n, es mayor que $f(x)$ y menor $f(x+h)$.

a) Ahora observa la Figura 2.6 y determina ¿Qué sucede con los valores de $f(x+h)$ a medida que se toman valores de h cada vez más pequeños?

b) En la figura puede observarse que cuando $h \to 0$, $f(x+h) \to f(x)$, mientras que el valor de $f(x)$ permanece constante (ya que dicho valor no depende del valor de h), lo cual es equivalente a decir que:

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x) \text{ y que } \lim_{h\to 0} f(x) = f(x)$$

y con el valor de $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ ¿Qué sucede cuando $h \to 0$?

c) Partiendo de la desigualdad escrita al principio de esta actividad puede escribirse esta otra

$$\lim_{h\to 0} f(x) \leq \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} f(x+h)$$

y utilizando los límites ya establecidos para $f(x)$ y $f(x+h)$ puede determinarse el valor de

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Encuentra dicho valor en el espacio siguiente:

Cierre

ACTIVIDAD 4 SD2-B2 la integral de una función y su relación con su derivada

El problema fundamental que se analiza y se pretende resolver en un curso de Cálculo Diferencial es el de determinar la rapidez instantánea de cambio del valor de una magnitud que varía en función de otra, cuando se conoce la función que las relaciona. Para analizar y resolver este problema es necesario estudiar y aprender a usar el concepto matemático denominado *derivada* de una función.

Mientras que el problema fundamental que se analiza y se pretende que aprendas a resolver en este curso de Cálculo Integral es el problema inverso del estudiado en Cálculo Diferencial, que, en términos generales puede enunciarse diciendo que si se tiene una función $f(x)$ que permite calcular la rapidez instantánea de cambio del valor de una magnitud y que varía con respecto a una variable x ¿Cómo puede determinarse el cambio total de la magnitud y originado por un determinado cambio de la variable x? Para analizar y resolver este problema se requiere estudiar y aprender a usar el concepto matemático denominado *integral* de una función.

En esta primera secuencia se han desarrollado una serie de actividades con el propósito de analizar y establecer la relación existente entre estos dos conceptos matemáticos.

Para llevar a cabo este análisis se planteó el problema de calcular el área de una región del plano cartesiano delimitada por el eje x, dos rectas paralelas al eje y y la gráfica de una función $f(x) \geq 0$ y continua en un intervalo cerrado.

Este problema dio lugar al establecimiento de una función $g(x)$ que permite calcular dicha área y el desarrollo de las actividades de la secuencia se espera te haya permitido concluir que la función $f(x)$ es su derivada o lo que es equivalente a decir que $g(x)$ es la antiderivada de la función $f(x)$ y que con dicha función $g(x)$, el valor del área de la región R bajo la curva $y = f(x)$, en un intervalo cualquiera $[a, b]$ está dado por $g(b) - g(a)$.

1. **El Teorema Fundamental del Cálculo**

Esta relación, entre la integral de una función y su derivada, constituye lo que se denomina Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) que se enuncia por medio de las dos siguientes proposiciones:

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 1

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{para } a \leq x \leq b$$

es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $g'(x) = f(x)$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2

Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, F es una función tal que $F'(x) = f(x)$

Secuencia Didáctica 2

• La antiderivada de una función

Las actividades de esta segunda secuencia de este bloque están orientadas a establecer una serie de reglas que te permitan obtener las antiderivadas de una función en forma rápida y sencilla. A las funciones que son antiderivadas de una función también se les llama *funciones primitivas* y al conjunto de todas ellas se les denomina *integral indefinida* y se representa:

Inicio

ACTIVIDAD 1 SD2-B2 Teorema Fundamental del Cálculo y la obtención de antiderivadas

Ha quedado establecido, en la parte 1 del TFC, que si una función f es continua en $[a,b]$, entonces es integrable, esto significa que existe una función g definida por:

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

que es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $g'(x) = f(x)$ lo cual indica que los procesos de derivación y de integración son uno el inverso del otro, es decir, cuando se conoce la función g, la función f se obtiene derivando g; pero si la que se conoce es la función f para obtener la función g se requiere integrar f.

En el curso de Cálculo Diferencial aprendiste una serie de reglas para obtener de manera rápida y sencilla la derivada de una función. Aprendiste por ejemplo a derivar cualquier función de la forma $y = x^n$ aplicando la regla que establece que la derivada es de la forma $y' = nx^{n-1}$, donde n es cualquier número real.

Ahora se trata de establecer una serie de reglas que te permitan obtener las antiderivadas de una función en forma rápida y sencilla. A las funciones que son antiderivadas de una función también se les llama *funciones primitivas* y al conjunto de todas ellas se les denomina *integral indefinida* y se representa:

$$\int f(x)dx$$

Empezaremos estableciendo la regla para antiderivar funciones de la forma $y = x^n$

1. Intenta determinar la forma que debe tener una función para que su derivada sea de la forma x^n. Las siguientes preguntas pueden ayudarte a determinar dicha forma.

   i. Si sabes que el exponente de la función derivada es n, ¿Cuál deberá ser el exponente de la función que se derivó?, es decir ¿Cuál será el exponente de la antiderivada?

   ii. Seguramente te diste cuenta que ese exponente debe ser una unidad mayor que el de la derivada. ¿Significa esto que la antiderivada debe ser de la forma $y = x^{n+1}$? ¿Qué puedes hacer para saber si es así o no?

   iii. Si consideras que sí es de esa forma, deriva la función $y = x^{n+1}$ y cerciórate si resulta ser $y' = x^n$

   iv. Si derivaste la función $y = x^{n+1}$ y lo hiciste bien, debes haber obtenido $y' = (n+1)x^n$ y con eso darte cuenta que para obtener $y' = x^n$ la función debió haber sido

   $$y = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \text{ con } n \neq -1$$

   lo cual constituye una regla para obtener una antiderivada de las funciones de la forma $y = x^n$

   ¿Por qué n debe ser diferente de -1?

   v. ¿Cuáles otras funciones tienen como derivada la función $y = x^n$?

Nota: Para responder correctamente esta pregunta es necesario que recuerdes dos importantes reglas de derivación.

i) La derivada de una función que es la suma de dos funciones derivables, es la suma de las derivadas de cada una de las funciones sumandos, esto es:

Si $y = u(x) + v(x)$, entonces $y' = u'(x) + v'(x)$

ii) La derivada de una función constante es igual a cero, esto es:

Si $y = c$ donde c es una constante; entonces $y' = 0$

i. ¿Cuál es la derivada de una función de la forma $y = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, donde $n \neq -1$ y c es una constante?

ii. ¿Cuántas funciones primitivas tiene la función $y = x^n$ y cuál es la diferencia entre ellas?

El propósito de esta primera actividad fue propiciar la reflexión sobre el proceso de antiderivación de una función, haciendo notar algunas sutilezas del mismo que debemos tener presentes al llevarlo a cabo. En el caso particular de las funciones de la forma $y = x^n$ que hemos utilizado en esta primera actividad para ilustrar el proceso de antiderivación, la conclusión a la que se espera que hayas llegado, queda expresada en la siguiente regla de antiderivación.

Regla para determinar la integral indefinida o funciones primitivas o antiderivadas de las funciones de la forma $y = x^n$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \ (donde\ n \neq -1 \ \ y \ \ C \ \ es\ una\ constante)$$

1. Utilizando la regla establecida calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int x^3 dx =$ b) $\int x^5 dx =$ c) $\int x^{-2} dx =$

d) $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$ e) $\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx=$ f) $\int \frac{1}{x^3}dx =$

g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$ h) $\int \frac{1}{x}\,dx =$ i) $\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx =$

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 Obteniendo antiderivadas

SD2-B2

1. Con base en las reglas de derivación que aprendiste en el curso de Cálculo Diferencial y en la Parte 1 del TFC, justifica la validez de las siguientes reglas de antiderivación:

Reglas para determinar la integral indefinida en los siguientes casos

1. $\int dx = x + C$
2. $\int kdx = kx + C$ (k constante)
3. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
4. $\int [u(x)+v(x)]dx = \int u(x)dx + \int v(x)dx$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \frac{1}{x}dx = ln \mid x \mid + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$
8. $\int senxdx = -cosx + C$
9. $\int cosxdx = Senx + C$
10. $\int csc^2xdx = tanx + C$
11. $\int csc^2xdx = -cotx + C$
12. $\int secxtanxdx = secx + C$
13. $\int cscxcotxdx = -cscx + C$
14. $\int \frac{1}{x^2+1}dx = tan^{-1}x + C$

FIGURA 2.1

2. Utiliza las reglas de antiderivación que aparecen en la Tabla 2.1 y que previamente has verificado que son válidas, para calcular las siguientes integrales indefinidas

a) $\int 3dx$

b) $\int[2x^3 + \frac{1}{4}x^2]dx$

c) $\int \left[\sqrt{x^3} - \frac{5}{x^4} + 2\right] dx$

d) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

e) $\int \left[\frac{3}{4} senx + 2cosx\right] dx$

f) $\int[1 - sec^2 x]dx$

g) $\int \frac{cosx}{sen^2 x} dx$

h) $\int[\frac{senx}{cos^2 x} - 2^x + x]dx$

3. Comprueba mediante derivación que el resultado del proceso de integración que aparece a la derecha del signo "igual" es correcto.

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} + C$

b) $\int xcosx\, dx = xsenx + cosx + C$

b) $\int (2x+1)e^{2x}\, dx = xe^{2x} + C$

d) $\int x^2 Cosxdx = x^2 Senx + 2xCosx - 2Senx + C$

ACTIVIDAD 3 La regla de cambio de variable o de sustitución
SD2-B2

En el punto 3 de la actividad 3 se te pidió que comprobaras que el resultado de la integral indefinida que aparece a la derecha del signo “igual” era correcto.

Se espera que hayas derivado esa función y que, al hacerlo, hayas obtenido la función que está en el integrando, es decir que hayas verificado que la función integrando es la derivada de la función obtenida al integrar. Sin embargo ¿En algún momento te preguntaste cómo se obtuvo ese resultado?; ¿Cuál fue o cuáles fueron las reglas que se utilizaron para integrar?

Pues resulta que las reglas que hemos anotado en la Tabla 1 sólo sirven para antiderivar de manera directa unas cuantas funciones que resultan tan fáciles de integrar que se les denomina *integrales inmediatas.* Por ejemplo la regla 9 establece que la antiderivada de la función Coseno es la función Seno, lo cual resulta obvio para alguien que sabe que la derivada de la función Seno es la función Coseno y lo mismo sucede con el resto de las reglas establecidas en la tabla.

Esas reglas permiten antiderivar muchas más funciones si las usamos junto con otras reglas de transformación de las funciones que se quieren integrar; es decir, hay muchas funciones que no pueden integrarse de manera directa con las reglas que hemos enunciado en la tabla, de tal manera que nuestro reto es aprender a transformar esas funciones en otras que sí puedan integrarse con esas reglas.

En este curso conocerás y aprenderás a utilizar algunas de esas otras reglas. Empezaremos con una que se denomina *regla de cambio de variable o de sustitución.*

1. Para ilustrar esta regla veamos el caso de la función que se integró en el inciso a) del punto 3 de la Actividad 2, a la que directamente no se puede aplicar ninguna de las reglas de integración que aparecen en la tabla. En dicho inciso aparece la siguiente integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

Para integrarla vamos a tratar de transformarla en otra a la que sí se le pueda aplicar alguna regla de las que aparecen en la Tabla 2.1. Lo primero que podemos observar es que en el denominador aparece la raíz cuadrada de una función y que eso impide que se pueda antiderivar directamente; así que vamos a transformar la función haciendo un cambio de variable. Vamos a cambiar la variable x por una variable que llamaremos u haciendo $x^2+1=u$ con el propósito de que sea la raíz de la variable.

a) Sustituye x^2+1 por u y escribe la nueva integral

b) Al cambiar la variable es necesario cambiar también la diferencial de dicha variable, es decir, debe sustituirse dx por du. Para hacerlo, es necesario obtener la diferencial de u utilizando la expresión $u = x^2 + 1$ de donde se obtiene $du = 2xdx$ y multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos miembros de la igualdad se obtiene $\frac{1}{2}du = xdx$, pero como xdx aparece en el integrando se puede sustituir. Hazlo para que obtengas la integral en función de u:

c) Al hacer el cambio de variable la nueva integral debe haber quedado

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}du$$

pero $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$, sustituye $\sqrt{u}$ y escríbela en el numerador para que obtengas una integral que sí puede resolverse aplicando las reglas de integración que aparecen en la tabla.

d) Observa que al cambiar la variable has obtenido una función de u que sí puedes integrar. Hazlo.

e) Desde luego la antiderivada que has obtenido es una función de u; pero u es una función de x, por lo que puedes obtener la antiderivada como función de x sustituyendo u por su valor en x. Hazlo y habrás terminado el proceso de integración.

2. Es importante que el ejemplo desarrollado para ilustrar el significado de la regla de sustitución o cambio de variable, te haya permitido darte cuenta que para aplicar esta regla es necesario analizar la función y elegir cuál podrá ser la nueva variable, pues además de cambiar la variable es necesario cambiar también su diferencial, de tal manera que se obtenga una nueva función que sí pueda integrarse utilizando las reglas que ya conoces.

Por ejemplo, si la función que se requiere integrar es

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

notemos que es muy similar a la función

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

la cual acabamos de integrar sustituyendo x^2+1 por u. Entonces podemos creer que haciendo el mismo cambio de variable lograremos una función que pueda integrarse con las reglas conocidas y al hacerlo, obtenemos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}}dx$$

Pero sabemos que, dado que ahora la variable es u, es necesario cambiar dx por du, por lo que obtenemos du a partir de $u = x^2+1$. Como ya sabes, resulta ser $du = 2xdx$.

De esta expresión despejamos dx para sustituirla en la integral obteniendo $dx = \frac{du}{2x}$, expresión que al sustituirla en la integral que queremos resolver resulta ser:

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x}$$

En la que sigue estando presente la variable x, así que la despejamos de la expresión $u = x^2+1$ para que nos quede en función de u. Al despejarla obtenemos

$$x = \sqrt{u-1}$$

Este valor de x lo sustituimos en la integral, con lo que

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{2\sqrt{u-1}}$$

Esta integral se puede reescribir y obtener

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}}$$

Sin embargo esta nueva integral tampoco se puede resolver a partir de las reglas de la Tabla.

¿Qué concluyes de lo sucedido al realizar lo pedido en cada uno de los cinco incisos de esta actividad?

Comenten en su equipo lo que cada uno aprendió al realizar las actividades de la secuencia tratando de establecer algunas conclusiones al respecto que deberán anotar para luego compartirlas con el resto del grupo.

Practicando la integración por sustitución o cambio de variable

1. Para resolver las siguientes integrales es necesario hacer un cambio de variable. Analiza qué cambio es conveniente hacer, luego efectúalo y resuelve la integral. Cada vez que hayas obtenido la función primitiva, verifica que lo has hecho bien, derivándola.

a) $\int (2x^2 - 3)x dx$

b) $\int t^2\sqrt{t^3 - 1}dt$

c) $\int (3u + 1)^4 du$

d) $\int \sqrt{(5 - x)}dx$

e) $\int \frac{z^2+z}{(4-3z^2-2z^3)^4} dz$

f) $\int \frac{t}{\sqrt[3]{1-2t^2}} dt$

g) $\int \sqrt[5]{x^4 - x^2}(10x^3 - 5x)dx$

h) $\int \sqrt[3]{2x - 1dx}$

i) $\int \frac{w-2}{(w^2-4w+3)^2}dw$

j) $\int \frac{(3+\sqrt{v})^4}{\sqrt{v}}dv$

k) $\int sen(2x)dx$

l) $\int xcos(x^2)dx$

m) $\int 3x^2e^{x^3}dx$

n) $\int sen^2xcosxdx$

o) $\int 4xsec^2(x^2)dx$

p) $\int sec(2x + 1)tan(2x + 1)dx$

Cierre

ACTIVIDAD 5
SD2-B2

El desarrollo de las actividades de esta secuencia se espera te hayan permitido familiarizarte con las técnicas que puedes utilizar para integrar una función, esto es, con las técnicas que permiten obtener la función que es antiderivada de la que se quiere integrar.

Que cuando la función que se quiere integrar se reconoce como la derivada de otra, las antiderivadas se pueden obtener de manera inmediata. Un ejemplo de este tipo es el reconocer que la función e^x es la derivada de ella misma; que permite de inmediato establecer que sus antiderivadas son de la forma $e^x + C$ y como consecuencia, calcular

$\int e^x dx$ de inmediato se sabe que es $e^x + C$.

Que cuando la función que se quiere integrar no se reconoce como derivada de una función conocida, entonces la estrategia de antiderivación consiste en transformar la función integrando en otra que pueda integrarse de manera inmediata.

Que para hacer estas transformaciones hay diversas técnicas, algunas de estas técnicas son sólo transformaciones algebraicas, como es el caso de la función $\sqrt{x}$ que basta escribirla como $x^{\frac{1}{2}}$ para obtener la antiderivada de manera inmediata, en este caso $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Que hay otras técnicas de transformación, como es el caso de la técnica denominada *cambio de variable* que consiste en hacer una sustitución de la variable independiente por otra que transforme la función en otra que sea integrable en forma inmediata.

Que existen otras técnicas de transformación de las funciones que se requiere.

Secuencia Didáctica 3

• Cálculo de áreas de regiones planas limitadas por más de una curva.

Inicio

ACTIVIDAD 1
SD3-B2

En esta nueva secuencia vamos a estudiar una de las muchas aplicaciones de la integral a la resolución de problemas, específicamente estudiaremos cómo se calcula el área de una región del plano que está delimitada por más de una curva.

En el Bloque 1 y en la primera secuencia de este Bloque 2 se mostró cómo se utiliza la integral para calcular el área de una región del plano limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, cuando la función $f(x) \geq 0$ y continua en el intervalo $[a, b]$. Dicha región se concibe formada por un número infinito de rectángulos diferenciales (de base diferencial dx infinitamente pequeña) y altura $f(x)$ de tal manera que el área de la región es la suma de las áreas de todos los rectángulos diferenciales que se forman desde $x = a$ hasta $x = b$, suma que se representa por medio de la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ahora se trata de establecer la manera de calcular el área de una región limitada por dos o más curvas.

ACTIVIDAD 1 Funciones de valores positivos
SD3-B2

1. Empezaremos considerando el caso de la región sombreada en la Figura 2.7 limitada por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, cuando $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo valor de x en el intervalo $[a, b]$. Esta región también puede concebirse formada por rectángulos de base diferencial cuya altura mide $f(x) - g(x)$.

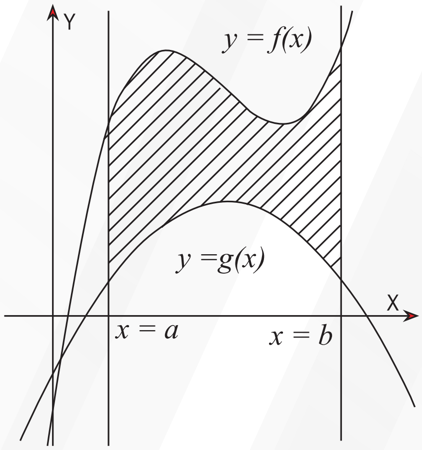


FIGURA 2.7

a) ¿Cómo se calcula el área de cada uno de esos rectángulos diferenciales?

b) Y el área de la toda la región ¿Cómo se calcula?

1. Calcula el área de la región comprendida entre la recta $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = (x-1)^2$

   a) Dibuja las curvas y señala la región cuya área se te pide que calcules.

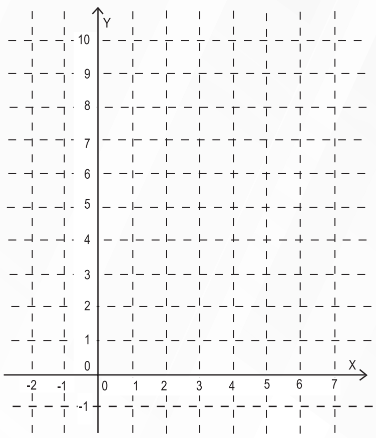


FIGURA 2.8

b) Determina los valores de a y b, los extremos del intervalo de integración.

c) Escribe la expresión que representa el área de un rectángulo de base diferencial

d) Escribe la integral con la que se calcula el área de la región y calcúlala

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 SD2-B2 Combinación de funciones de valores positivos con funciones de valores negativos

1. Considera el caso de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ cuando $f(x) \geq 0$ y $g(x) \leq 0$ para todo valor de x en el intervalo $[a, b]$ como se ilustra en la Figura 2.9. Dado que esta región también puede concebirse formada por rectángulos de base diferencial,

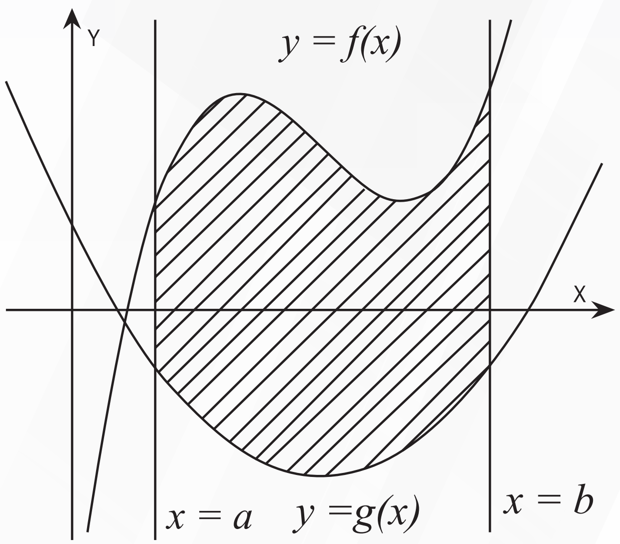


FIGURA 2.9

a) ¿Cómo se calcula la altura de dichos rectángulos?

b) ¿Cómo se calcula el área de cada uno de esos rectángulos diferenciales?

c) Y el área de la toda la región ¿Cómo se calcula?

2. Calcula el área de la región comprendida entre las curvas $f(x) = 1 - (x-2)^2$ y $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$

a) Dibuja las curvas y señala la región cuya área se te pide que calcules.

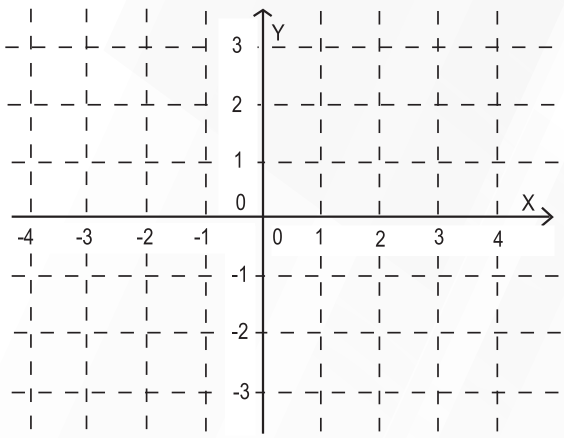


FIGURA 2.10

b) Determina los valores de a y b, los extremos del intervalo de integración.

c) Escribe la expresión que representa el área de un rectángulo de base diferencial.

d) Escribe la integral con la que se calcula el área de la región y calcúlala.

ACTIVIDAD 3 Funciones con valores negativo

SD3-B2

1. Consideremos ahora dos casos especiales.

a) El primero cuando la función $g(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo valor de x en el intervalo de integración. En este caso ¿Cuál es la integral con la que se calcula el área de la región? ¿Qué tiene de especial?

b) El segundo caso es cuando la función $f(x) = 0$ y la función $g(x) \leq 0$ para todo valor de x en el intervalo de integración.

i. Dibuja la curva de la función $f(x)$ y una curva $g(x)$ que sea menor o igual que cero para todo valor de x en el intervalo de integración $[a, b]$.

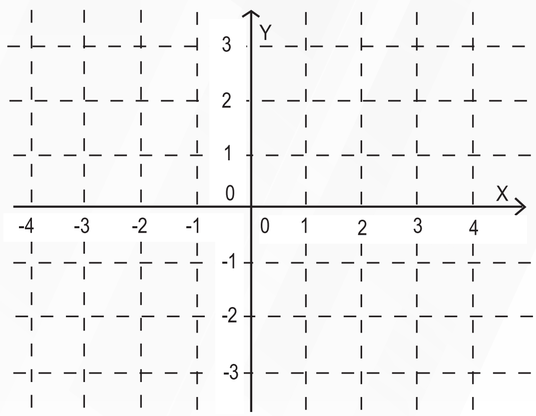


FIGURA 2.11

ii. Como esta región también puede concebirse formada por rectángulos de base diferencial ¿Cómo se calcula la altura de dichos rectángulos?

iii. ¿Cómo se calcula el área de cada uno de esos rectángulos diferenciales?

iv. ¿Cómo se calcula el área de la toda la región?

2. Considera ahora el caso de la región entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ cuando $f(x) \leq 0$ y $g(x) \leq 0$ con $f(x) \geq g(x)$ para todo valor de x en el intervalo $[a, b]$.

a) Utiliza el plano de la Figura 2.12 para dibujar dos curvas $f(x)$ y $g(x)$, que tengan las características establecidas.

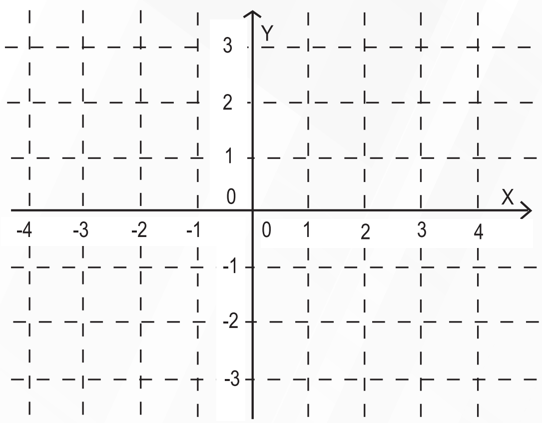


FIGURA 2.12

b) Como esta región también puede concebirse formada por rectángulos de base diferencial ¿Cómo se calcula la altura de dichos rectángulos?

c) ¿Cómo se calcula el área de cada uno de esos rectángulos diferenciales?

d) Y el área de la toda la región ¿Cómo se calcula?

3. Las gráficas que aparecen en la Figura 2.13 corresponden a las funciones ahí mismas indicadas y las letras A, B y C representan, cada una, la región del plano en la que se encuentran.

   a) Escribe la integral con la que se calcula el área de cada una de las regiones y determina su valor.

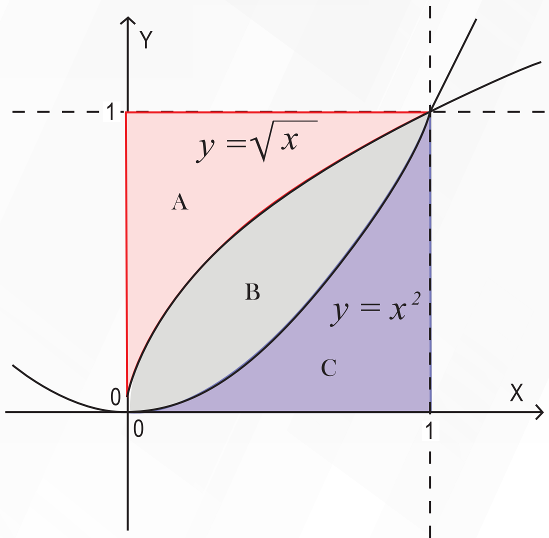


FIGURA 2.13

a) Procede de la misma manera que lo hiciste en el inciso a) con las regiones señaladas en la Figura 2.14. Escribe la integral y calcula el área de cada una de las regiones.

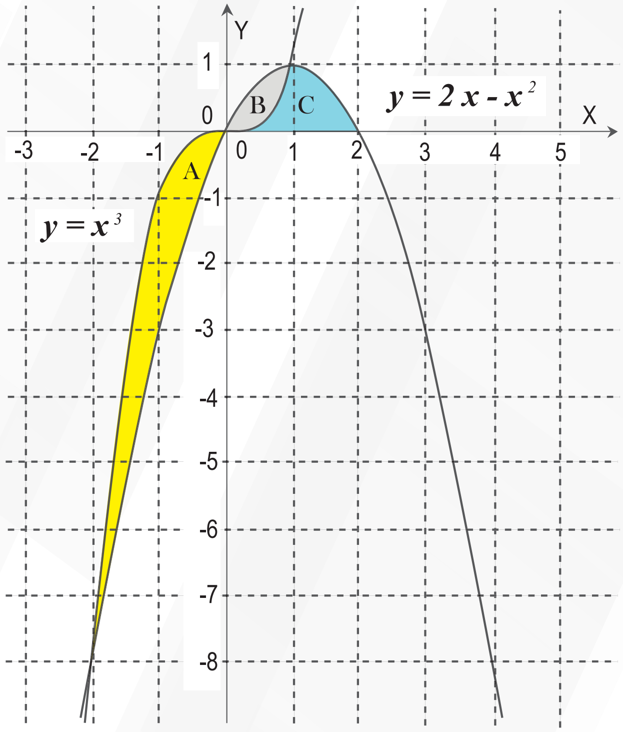


FIGURA 2.14

b) Procede de igual manera que lo hiciste en los incisos a) y b) con las regiones señaladas en la Figura 2.15. Escribe la integral y calcula el área de cada una de las regiones.

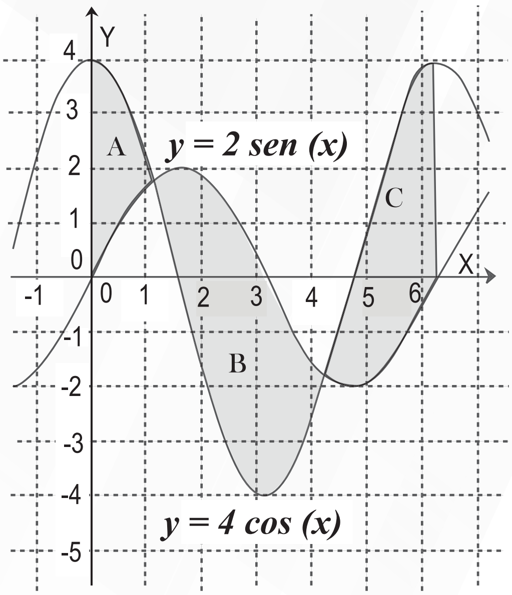


FIGURA 2.15

Cierre

ACTIVIDAD 5
SD3-B2

1. En esta tercera y última secuencia de este bloque se espera hayas logrado una mayor comprensión de la estrategia general que se utiliza para calcular el área de una región del plano limitada por una o más curvas y que ésta consiste en:

   a) Trazar las gráficas de las funciones que delimitan la región cuya área se quiere calcular.

   b) Visualizar dicha región formada por rectángulos de base diferencial.

   c) Establecer el intervalo o los intervalos de integración

   d) Representar las alturas de los rectángulos diferenciales y escribir la función que permite calcular su área.

   e) Resolver la integral que representa la suma de las áreas de todos los rectángulos diferenciales

   f) Evaluar la función primitiva obtenida al antiderivar en los extremos del intervalo de integración y calcular la diferencia entre los valores obtenidos.

2. De los diversos casos que se presentan, como son:

   a) La región limitada por una curva $y = f(x)$, el eje X y dos rectas paralelas al eje Y cuyas ecuaciones son: $x = a$ y $x = b$

      i) Cuando $f(x) \geq 0$ para todo valor de x en el intervalo de integración.

      ii) Cuando $f(x) \leq 0$ para todo valor de x en el intervalo de integración.

      iii) Cuando $f(x) \geq 0$ en una parte del intervalo de integración y menor o igual que 0 en otra.

   b) La región está entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ y ambas son mayores o guales que cero y $f(x) \geq g(x)$ para todo valor de x en el intervalo de integración.

   c) La región está entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ y ambas son menores o guales que cero y $f(x) \geq g(x)$ para todo valor de x en el intervalo de integración.

   d) La región está entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ con $f(x) \geq 0$ y $g(x) \leq 0$ para todo valor de x en el intervalo de integración.

SERIE DE PROBLEMAS

1. Haz lo que se solicita en cada caso.

a) Si $v = f(t)$ es una función que permite calcular la velocidad de una partícula que se mueve en una trayectoria recta, ¿Qué representan cada una de las siguientes expresiones?

i) $f(t)dt$

ii) $\int f(t)dt$

iii) $\int_0^t f(x)dx$

iv) $\int_0^3 f(t)dt$

b) Si $\frac{di}{dv}$ representa la rapidez instantánea con que cambia la corriente i en un circuito eléctrico, en función del voltaje v,

i) ¿Qué representan en esa expresión di y dv ?

ii) ¿Qué representa $\int_{v_0}^{v_1} \frac{di}{dv} dv$?

c) Si $f(x)$ permite calcular la pendiente de una carretera a x Km de donde empieza dicha carretera, ¿Qué representa $\int_2^5 f(x)dx$?

d) Si $r(t)$ es una función que permite calcular la rapidez (en litros por segundo) con que se está derramando un líquido contenido en un recipiente, ¿Cuál es la expresión con la que se calcula la cantidad litros que se derraman en los primeros dos minutos

e) Si la gráfica que aparece en la Figura 2.16 corresponde a la función $y = f(x)$ ¿Cómo se calcula el área de las regiones A, B y C?

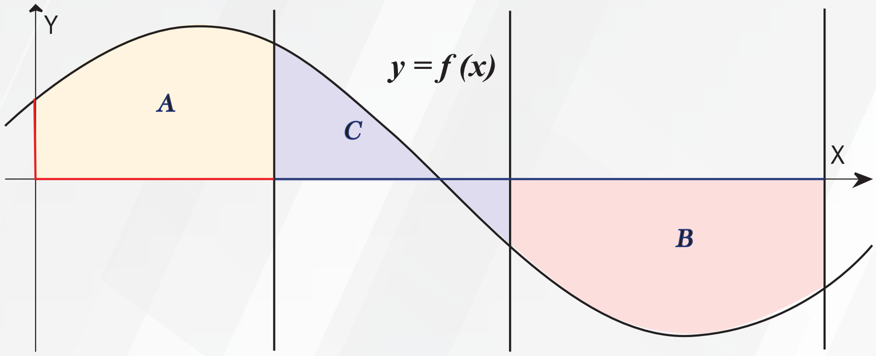
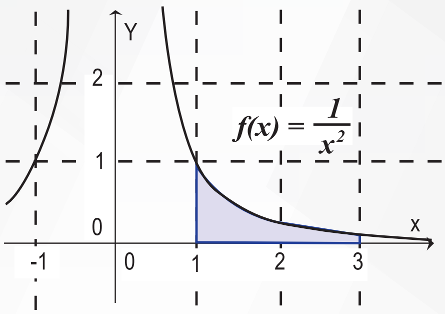
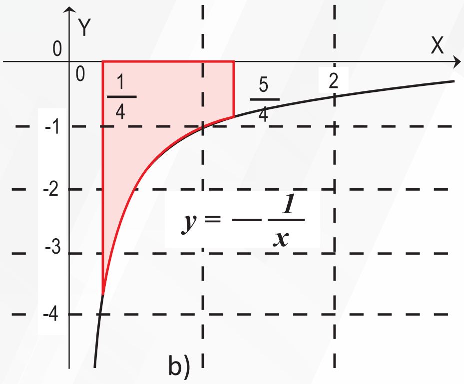


FIGURA 2.16

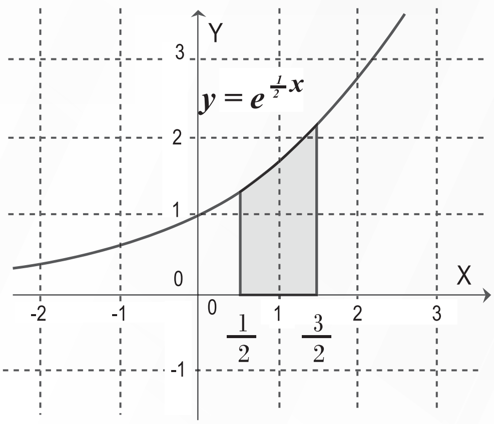
2. Calcula en cada caso el área de la región sombreada.



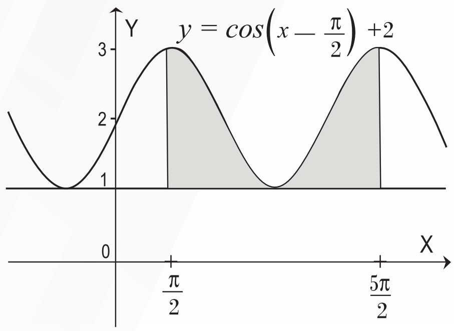
a)



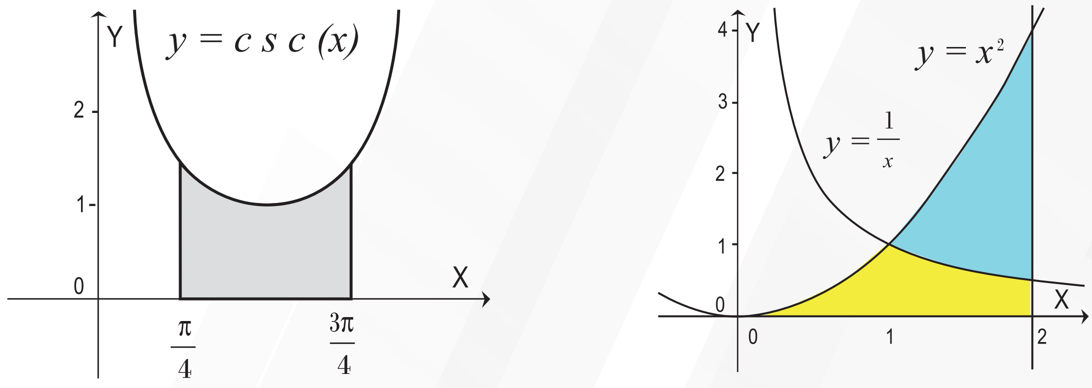
b)



c)



d)



e) f)

FIGURA 2.17

3. Calcula el área de la región del plano, que aparece sombrerada en la figura.

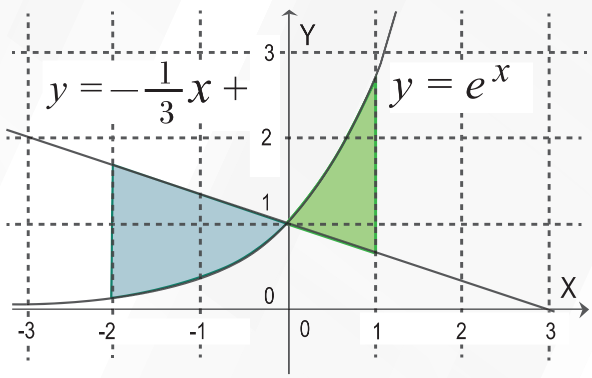


FIGURA 2.18

4. Calcula el área de las regiones A y B del plano, señaladas en la figura.

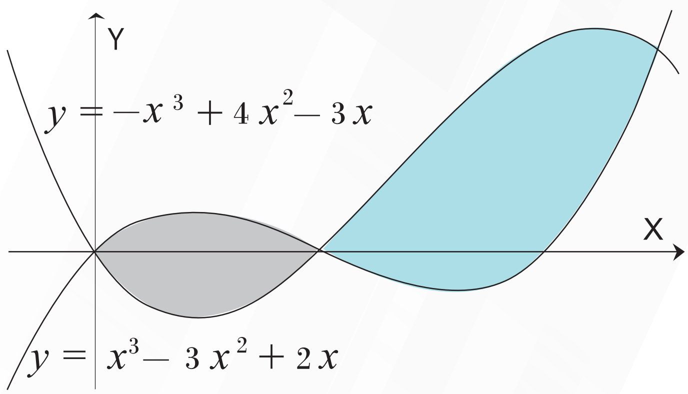


FIGURA 2.19

5. En los incisos a) y b) se describe, en cada caso, una región del plano. Dibújala y calcula su área.

La región del plano limitada por las curvas $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$, el eje *x* y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

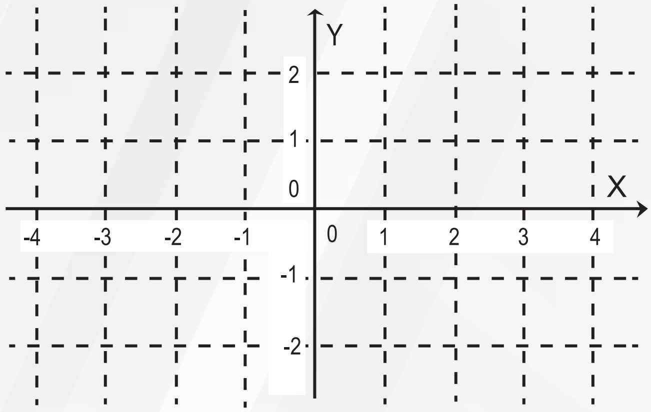


FIGURA 2.20

b) La región del plano comprendida entre las curvas definidas por las funciones $y = x^2 - 4$ y $y = 8 - x^2$.

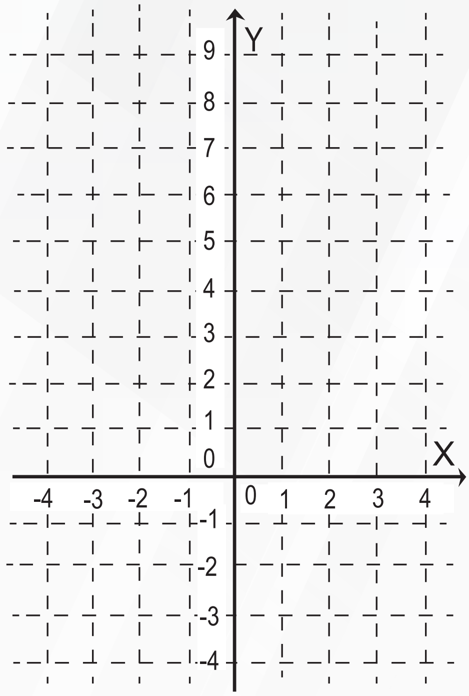


FIGURA 2.21

6. En cada uno de los dos incisos siguientes, bosqueja la región descrita y calcula su área.

a) La región delimitada por las curvas $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x.

b) La región limitada por: $y = x^2$, $y = \frac{1}{2} - x^2$ y $y = 2x$.

7. Calcula en cada caso, el área de la región sombreada.

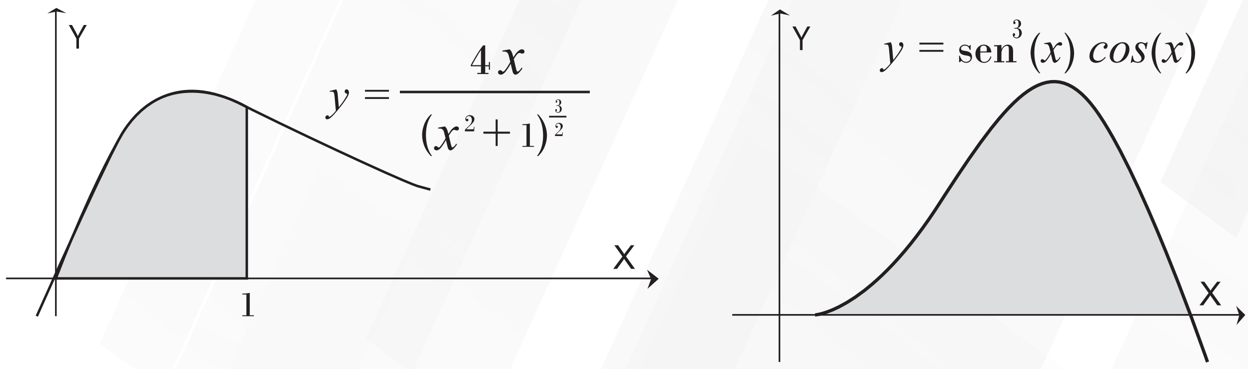


FIGURA 2.22

8. Procede como en el problema anterior.

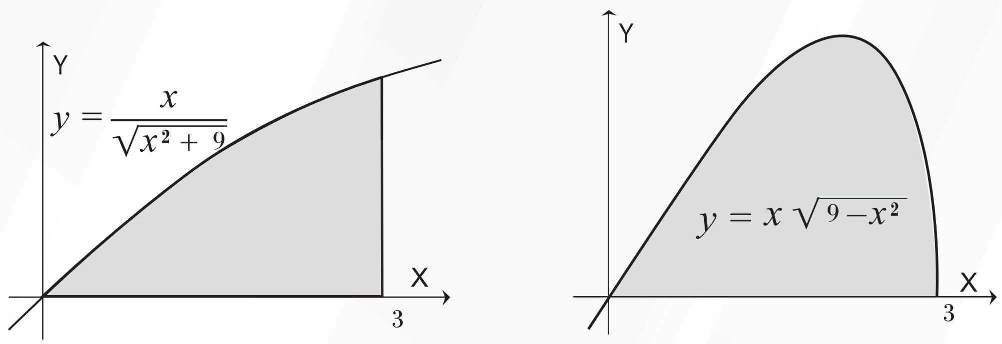


FIGURA 2.23

9. Estima el área comprendida entre la curva $y = 1 + 3x + x^2 - 4x^3$ y el eje x

AUTOEVALUACIÓN

Al igual que en el primer bloque de este módulo de aprendizaje y en todos bloques de los anteriores módulos, éste termina con la sección denominada Autoevaluación, que seguramente sabes muy bien cuál es su propósito y en qué consiste. Se espera que el tener la oportunidad de reflexionar sobre lo que has aprendido y sobre las cuestiones que todavía no tienes claras y las dificultades que se te han presentado, te resulte útil a la hora de tomar decisiones sobre qué hacer para mejorar; también se espera que haya resultado útil realizar las actividades propuestas en esta sección en las ocasiones anteriores y que así suceda ahora.

Una buena manera de iniciar la actividad de Autoevaluación es revisar la introducción al Bloque para tener presente lo que se espera sepas y sepas hacer al terminar de estudiarlo, es decir, al terminar de realizar las actividades de las diferentes secuencias. Después de hacerte consciente de lo que se espera de ti, cerciórate en qué medida lo has logrado, resolviendo los siguientes problemas y, si en alguno o algunos de ellos, no sabes cómo proceder o no sabes si lo que hiciste es correcto o no, toma nota para que consultes con el profesor, con otros compañeros o con quien tú decidas para que te ayuden a aclarar tus dudas.

SECCIÓN 1

1. Calcula el área de la región del plano descrita en cada caso:

a) La región comprendida entre los ejes de coordenadas y la recta $y = 12 - 3x$

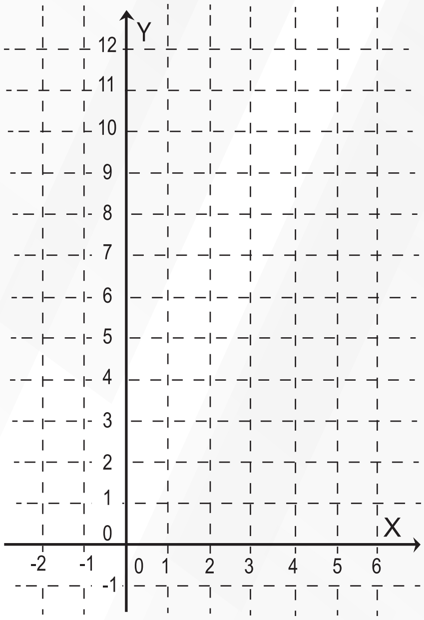


FIGURA 2.24

b) La regiones comprendidas entre los ejes de coordenadas y las rectas $y = 5 - 2x$ y $y = 1 + 2x$

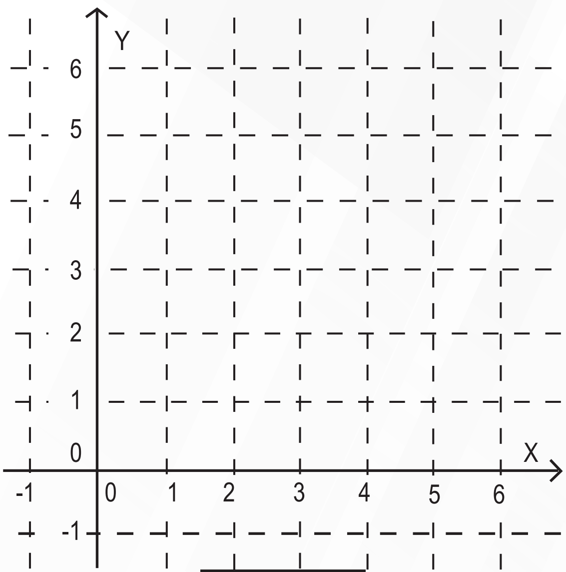


FIGURA 2.25

2.

a) ¿Qué figura geométrica forman los ejes de coordenadas, la recta $y = 12 - 3x$ y una recta vertical que corte al eje X en algún punto cuya abscisa sea diferente de cero y menor que 4?

b) Dibuja dos de esas figuras, una para un valor de x positivo, menor que 4 y otro para un valor de $x < 0$. En ambos casos escribe una expresión analítica que permita calcular el área de la figura a partir del valor x cualquiera que éste sea.

3. En la figura aparece la gráfica de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. ¿Cómo puedes calcular el área de la región del plano comprendida entre la gráfica y el eje X?

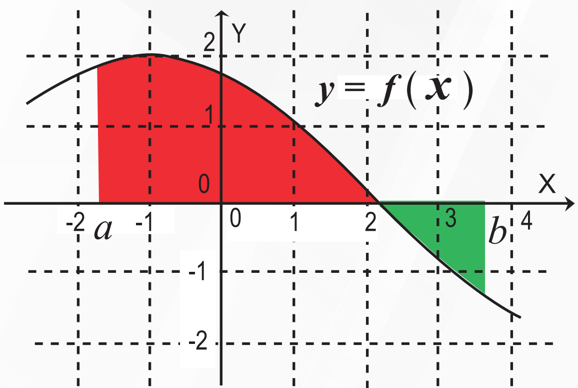


FIGURA 2.26

4. Traza la gráfica de la función $y = x^2 - 4x$ y calcula el área de las siguientes regiones:

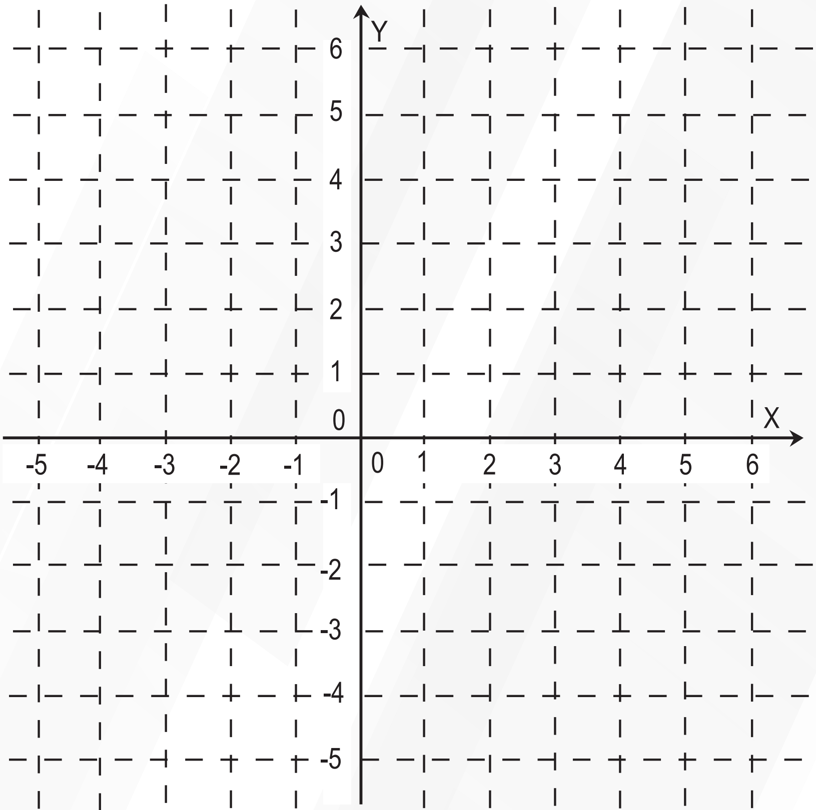


FIGURA 2.27

a) La comprendida entre la curva y el eje x

b) La comprendida entre la curva, el eje x y la recta $x = 5$

c) La comprendida entre la curva y la recta $y = 2x - 5$

d) La comprendida entre la curva y la recta $y = 5$

e) La comprendida entre la curva y la gráfica de la función $y = 2x - x^2$

f) La comprendida entre las dos parábolas y la gráfica de la función $y = 2x - 5$

5. En la gráfica de la función $y = f(x)$ que aparece en la figura, ¿Qué representan las siguientes expresiones?

a) $\int_a^b f(x)dx$

b) $\int_{x_0}^x f(t)dt$

c) $\int_1^3 f(x)dx$

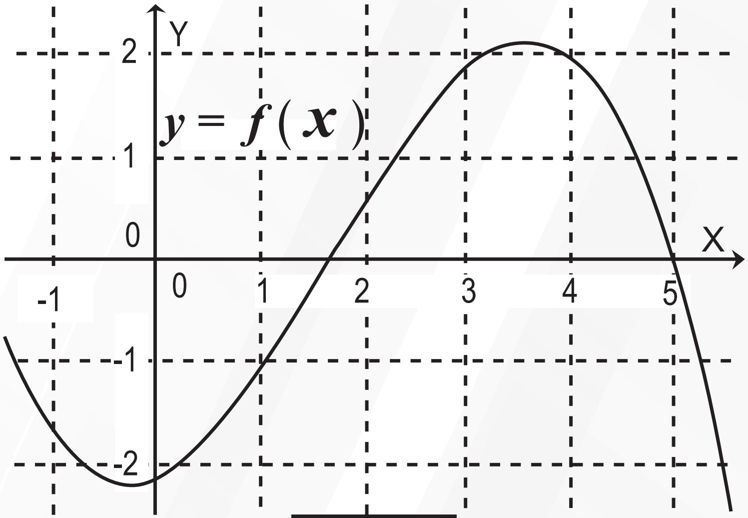


FIGURA 2.28

6. Evalúa las siguientes integrales

a) $\int_0^3 (4x^2 - 3x + 2)dx$

b) $\int_1^2 (e^x - x)dx$

c) $\int_0^3 (2(1-3x)^2 dx$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} Sen(2x)dx$

e) $\int_1^2 (xe^{x^2} - 2x)dx$

f) $\int_2^3 \sqrt{u}(1+u^2)du$

SECCIÓN 2. Reflexiones generales

1. Cuando trabajaste individualmente, ¿lograste responder las actividades solicitadas?

Nunca   Muy pocas veces   Frecuentemente   Siempre

2. ¿Las participaciones de tus compañeros fueron importantes para responder las actividades de las diferentes secuencias?

Nunca   Muy pocas veces   Frecuentemente   Siempre

3. ¿Fuiste capaz de exponer tus ideas cuando realizaste trabajo en equipo o en el grupo?

Nunca   Muy pocas veces   Frecuentemente   Siempre

4. Cuando tuviste alguna duda, ¿Pudiste explicarle a tus compañeros las dificultades que se te presentaron?

Nunca   Muy pocas veces   Frecuentemente   Siempre

5. ¿Utilizaste algún tipo de recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.), para apoyar tus actividades en clase y/o extra clase?

Nunca   Muy pocas veces   Frecuentemente   Siempre

6. En este Bloque me parecieron muy interesantes los temas siguientes:

-
-
-

7. En este Bloque me pareció particularmente difícil lo siguiente:

-
-
-

8. Mis conclusiones generales de este Bloque son las siguientes:

Bloque 3

18 Horas

Volúmenes de Sólidos de Revolución y técnicas de Integración

Introducción B-3

En este tercer y último Bloque del curso de Cálculo Diferencial e Integral 2 estudiarás otros casos en los cuales la integral de una función puede ser útil en la resolución de problemas de carácter práctico.

En particular tendrás la oportunidad de determinar volúmenes de cuerpos geométricos que no necesariamente tienen una forma típica, para los cuales es posible usar una fórmula, como el caso de esferas y cilindros. Este estudio es importante porque muchos objetos de la naturaleza, de la industria y de otras actividades humanas tienen formas cuyo volumen requiere de métodos de cálculo en los cuales la integral de una función es de utilidad.

Por otro lado, así como los problemas que se resuelven con la integral de una función son una extensión del cálculo de áreas, de volúmenes, distancias recorridas y de otras características de los objetos y fenómenos del mundo que nos rodea, los cuales no se pueden resolver con fórmulas predeterminadas, las situaciones a que dan lugar dichos fenómenos no necesariamente se resuelven con integrales de cálculo directo.

Frecuentemente las integrales que deben determinarse al resolver un problema son complejas y se requiere de métodos especiales para obtener una antiderivada o integral indefinida y estar en condiciones de usar el Teorema Fundamental del Cálculo, estudiado en el Bloque 2. En este Bloque estudiarás las antiderivadas de funciones que son potencia de funciones trigonométricas, un método especial denominado integración por partes y uno más que recibe el nombre de integración por fracciones parciales.

En el estudio del cálculo de volúmenes de sólidos de revolución y de determinación de antiderivadas mediante algunos métodos especiales, te enfrentarás a la necesidad de interpretar gráficas, representaciones variacionales y el uso de procedimientos algebraicos, para obtener, en algunos casos, resultados numéricos.

Además de hacer interpretaciones, la cuantificación de valores y el desarrollo de procedimientos algebraicos serán importantes y es necesario que participes en los equipos de trabajo, sigas las instrucciones de tu profesor o profesora, que expreses tus ideas y valores adecuadamente las ideas de tus compañeros.

Secuencia Didáctica 1

• Volumen de cuerpos con superficies que no son planas.

Inicio

Cuando se elabora una pieza de un determinado material, por ejemplo de metal o de madera, es necesario conocer cuánto material se requiere. De la misma manera, cuando se construye un edificio es necesario saber el volumen que ocupará para hacer diversos cálculos, por ejemplo, de la capacidad de los aparatos de refrigeración que deberán emplearse para refrescarlos.

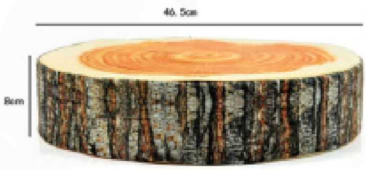
ACTIVIDAD 1 Volúmenes de objetos

SD1-B3

1. En las siguientes imágenes se muestran algunas piezas ya construidas o algunas edificaciones.

   a) Empleando los conocimientos que tienes hasta el momento, ¿En qué casos podrías determinar su volumen?

   b) Para aquellos casos en los que sepas cómo hacerlo, explica el procedimiento que seguirías. Para los que no sepas, explica las razones por las que no puedes hacerlo.



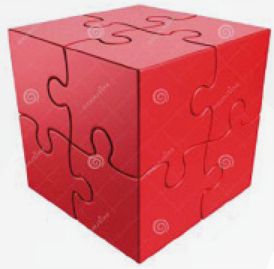
a

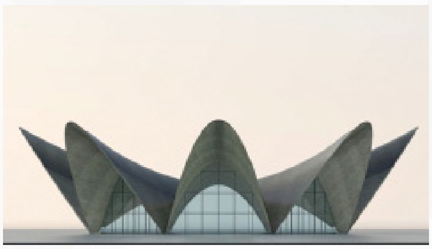
b

c

d


e


f


g


h

ACTIVIDAD 2 Volumen de un cilindro y la integral

SD1-B3

1. En la Figura 3.1 se muestra la región rectangular delimitada por las gráficas de: la recta $y = 4$, la recta $x = 7$ y los ejes coordenados. Al girar la figura en torno al eje de las x, se genera un "sólido de revolución" que tiene forma de un cilindro circular recto, identificado en la Figura 3.2.

   a) Escribe la expresión analítica para obtener el volumen de un cilindro. Identifica los valores correspondientes al cilindro de la Figura 3.2 y determina su volumen.

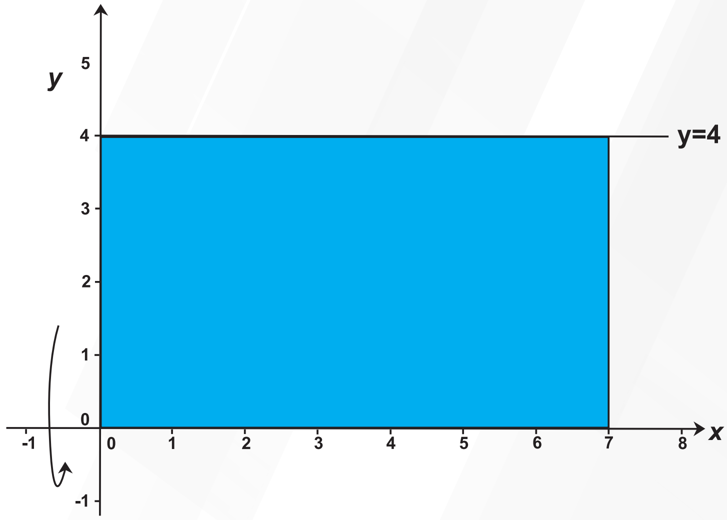


FIGURA 3.1

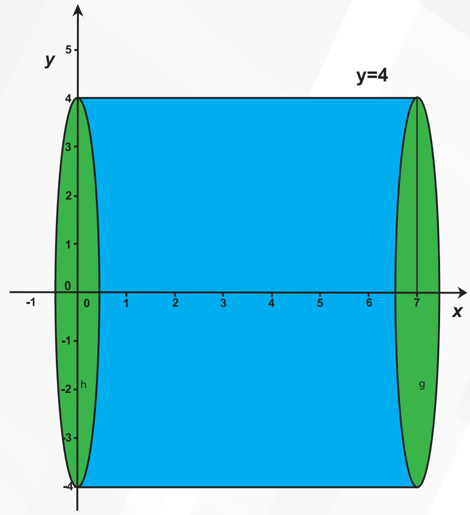


FIGURA 3.2

Con el propósito de obtener un método general para determinar volúmenes de sólidos que pudieran no sernos tan familiares, analizaremos ahora el volumen del cilindro de la Figura 3.2 bajo otra perspectiva.

Para ello, observa que en la Figura 3.3 hemos dibujado un "cilindro diferencial" o "disco infinitamente pequeño", esto es, un cilindro cuyo grosor es de magnitud infinitamente pequeña, correspondiente al segmento diferencial dx.

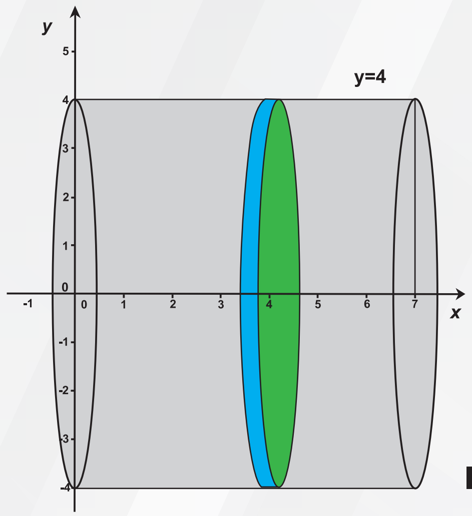


FIGURA 3.3

b) ¿Qué representa el segmento diferencial dx en el cilindro diferencial?

c) ¿Qué valor tiene el radio de la base de este cilindro o disco diferencial? Determina su volumen.

El sólido de revolución de la Figura 3.4 lo podemos concebir entonces como formado por una cantidad infinita de discos infinitamente pequeños, cuya suma de volúmenes da como resultado el volumen total del sólido.

d) Empleando la noción de integral, escribe una expresión para la suma de los volúmenes de los discos infinitamente pequeños así constituidos y determina ahora el volumen V del sólido de la Figura 3.4 y compara su valor con el obtenido previamente.

$V =$

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 Extendiendo ideas: Volúmenes de sólidos de revolución

SD1-B3

1. Considera ahora la Figura 3.4, en la que se muestra la superficie plana formada por la recta $y = x$, la recta $x = 1$ y los ejes coordenados.

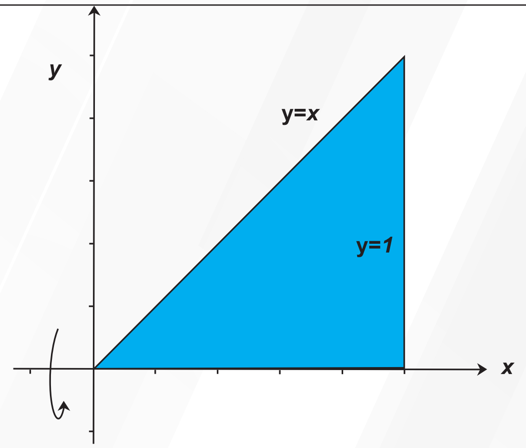


FIGURA 3.4

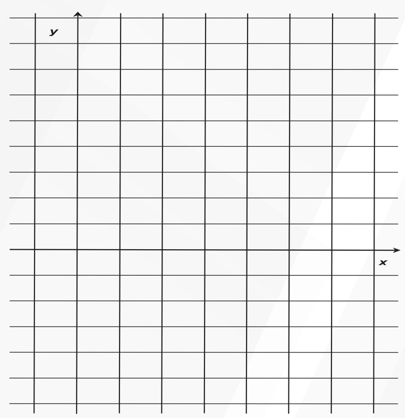


FIGURA 3.5

a) Al girar la superficie alrededor del eje x a) ¿Qué sólido se forma? Dibújalo usando el plano cartesiano mostrado en la Figura 3.5.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del cilindro circular recto, puede tomarse en cuenta una descomposición del sólido formado en discos infinitamente pequeños, como se muestra en la Figura 3.6

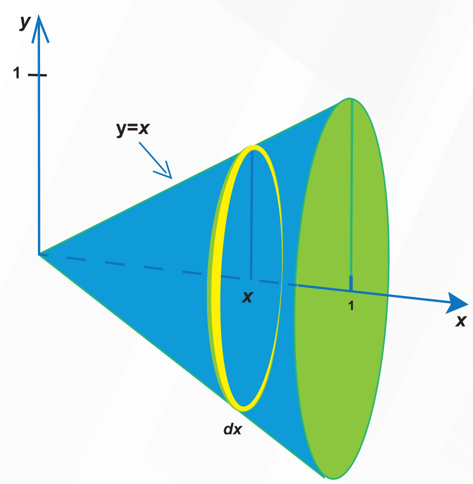


FIGURA 3.6

b) Determina el valor del radio de la base del disco en el punto de abscisa x, así como el valor de su altura. Con base en dichos valores, obtén una expresión del volumen del disco.

c) Determina el volumen V del sólido de revolución.

$V =$

2. La región plana que se muestra en la Figura 3.7 está formada por las gráficas de $y = x^2$, el eje x, las rectas $x = 1$ y $x = 2$. Al hacerla girar alrededor del eje de las x, se genera el sólido de revolución mostrado en la Figura 3.8.

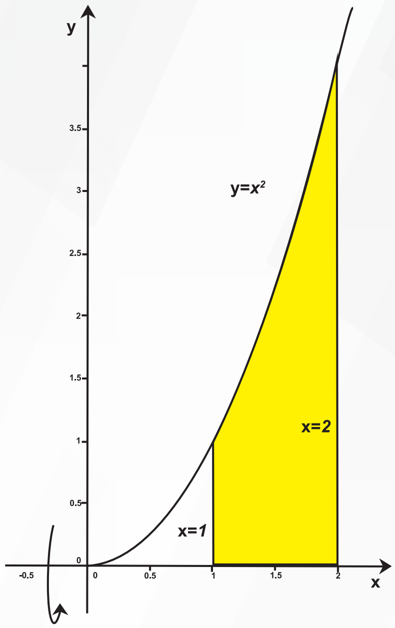


FIGURA 3.7

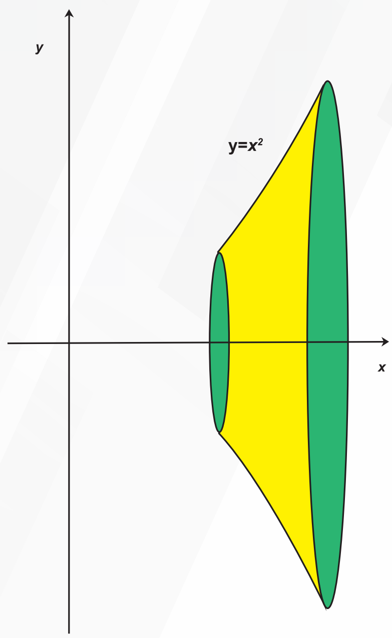


FIGURA 3.8

a) Toma un disco infinitamente pequeño con grosor dx y obtén una expresión para calcular su volumen.

b) Usando la integral de una función, determina el volumen del sólido de revolución de la Figura 3.8.

3. Usando el método de los problemas discutidos en esta secuencia, determina el volumen que se genera al girar alrededor del eje de las x la región plana limitada por las gráficas de $y = x^3$, la recta $x = 2$ y el eje X. Dibuja tanto la región señalada como el sólido de revolución generado.

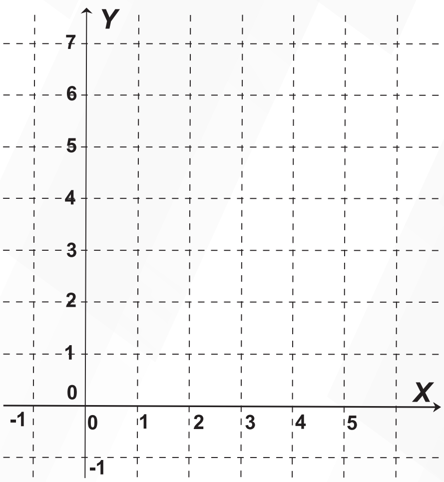


FIGURA 3.9

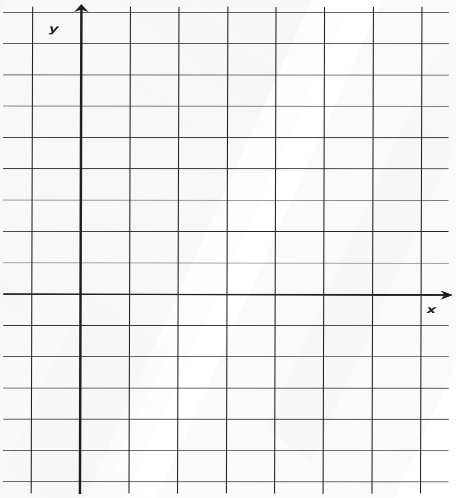


FIGURA 3.10

Cierre

ACTIVIDAD 1 Resumiendo ideas y procedimientos

SD1-B3

1. Las actividades realizadas en este Bloque te han permitido percatarte que la integral de una función es de suma utilidad en la resolución de problemas en muy diversos contextos, en los cuales están presentes procesos de acumulación.

En los Bloques 1 y 2 estudiaste situaciones en las cuales la integral es útil para calcular el trabajo mecánico realizado por una fuerza variable, la distancia recorrida por un objeto, la emisión de gases de invernadero y el cálculo de áreas.

En esta secuencia las aplicaciones de la integral se han extendido al cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, con un procedimiento similar al usado con anterioridad, que se describe en las siguientes líneas.

Un sólido de revolución se genera al girar alrededor de un eje una región plana, como se ilustra el la Figura 3.11.

En este caso la región que se está girando es la formada por las gráficas de una función $y = f(x)$ cualquiera, el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$. El giro se realiza alrededor del eje x.

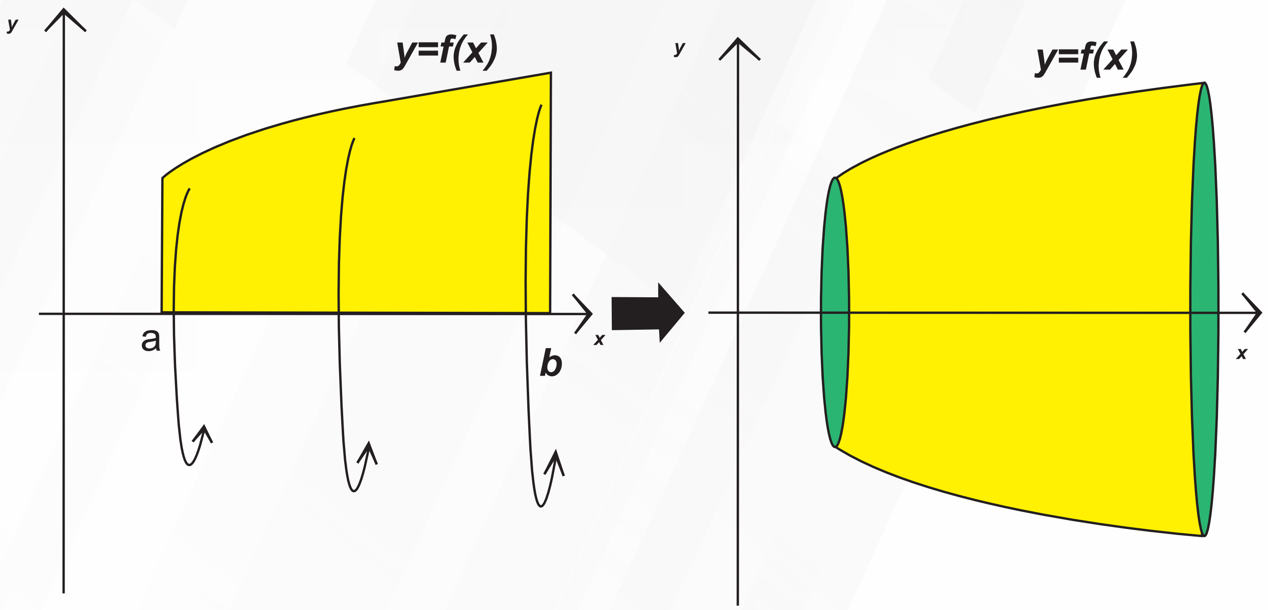


FIGURA 3.11

El sólido de revolución puede concebirse como formado por una infinidad de discos infinitamente pequeños, lo cual se pretende, de alguna manera, ilustrar en la Figura 3.12, cada uno de los cuales tiene una altura de magnitud diferencial dx. El radio de cada disco está dado por el correspondiente valor de la función, lo cual podemos representar, consecuentemente, como $f(x)$.

El disco infinitamente pequeño puede concebirse como un cilindro diferencial cuyo volumen viene dado por:

$$v = \pi f(x)^2 dx$$

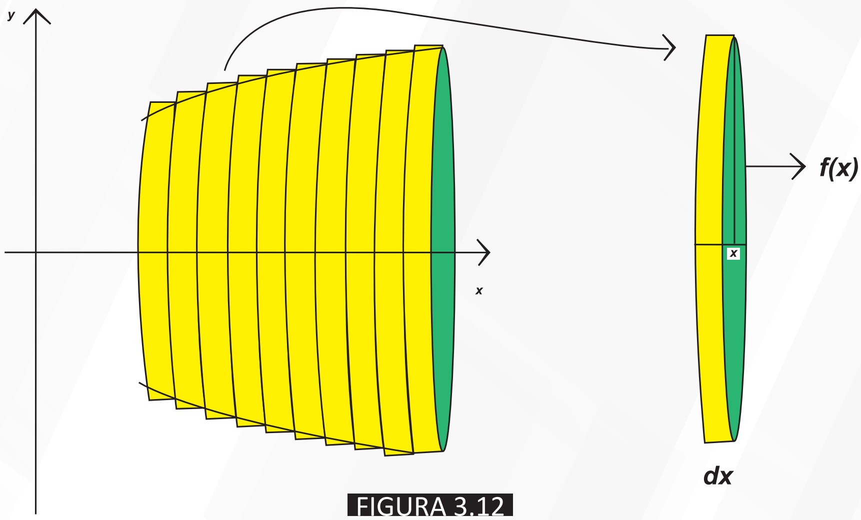


FIGURA 3.12

El Volumen V del sólido de revolución se obtiene, entonces, como la suma de los volúmenes de todos los discos infinitamente pequeños, esto es,

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

ACTIVIDAD 2 Calculando el volumen de algunos sólidos de revolución

SD1-B3

1. En cada uno de los siguientes casos, en el sistema de coordenadas de la izquierda, traza la gráfica de la función representada analíticamente, así como las rectas indicadas y señala la región del plano que determinan al intersectarse. Luego, en el sistema de coordenadas de la derecha, dibuja el sólido de revolución que se genera al girar dicha región alrededor del Eje X.

   a) $y = 2x$, el eje x y la recta $x = 1$.

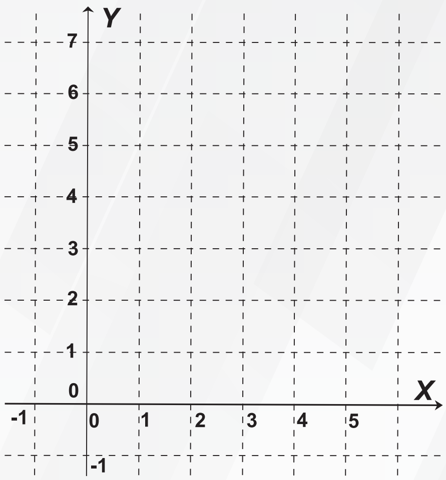


FIGURA 3.13

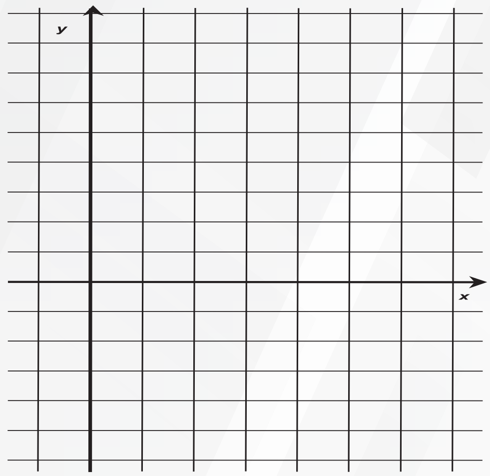


FIGURA 3.14

   b) $y = 3x + 1$, el eje x y la recta $x = 2$.

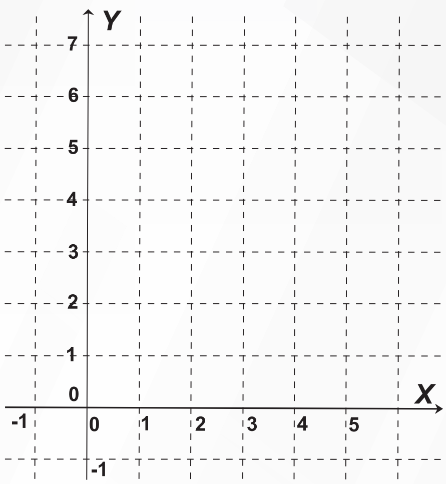


FIGURA 3.15

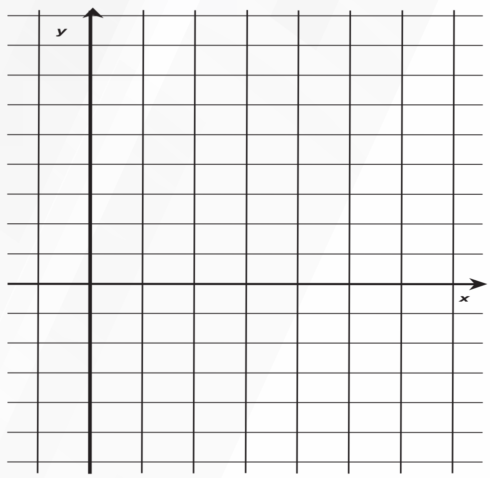


FIGURA 3.16

c) $y = 3x^2 + 2$, el eje x y la recta $x = 2$.

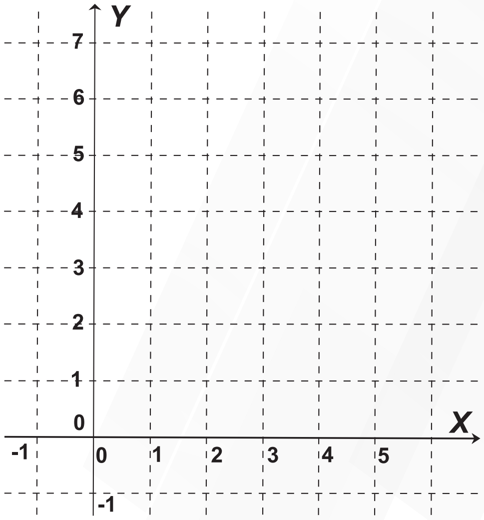


FIGURA 3.17

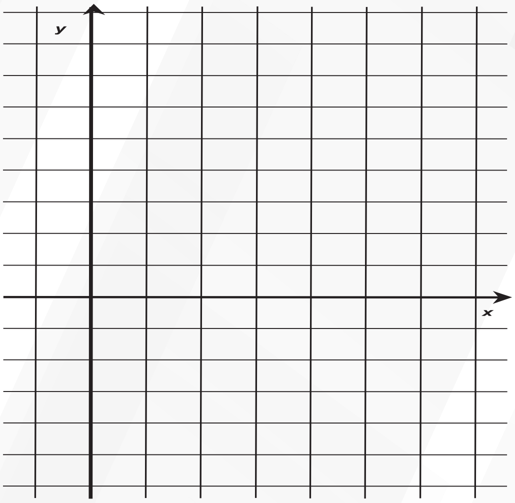


FIGURA 3.18

d) $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje x.

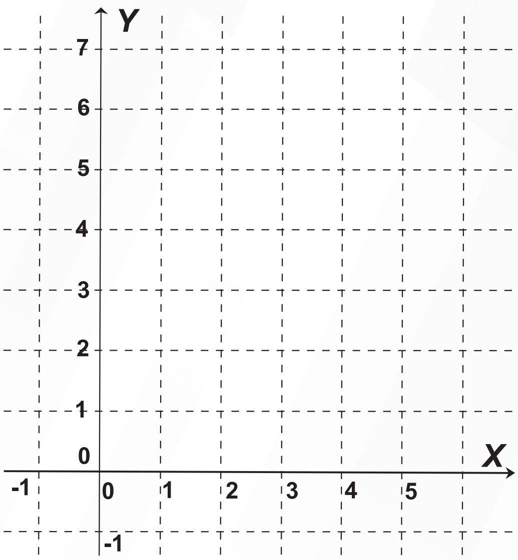


FIGURA 3.19

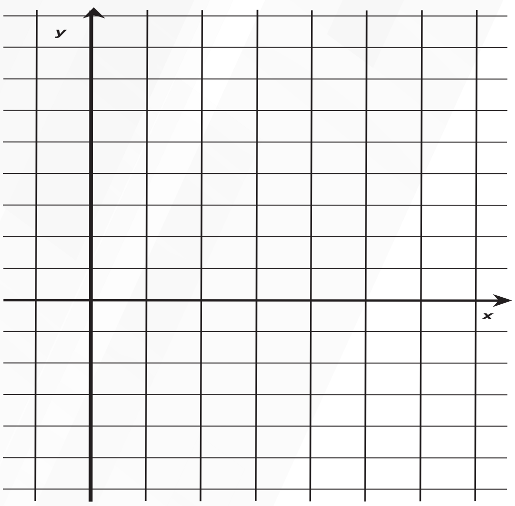


FIGURA 3.20

Secuencia Didáctica 2

• Técnicas de integración

ACTIVIDAD 1 Nuevas antiderivadas

SD2-B3

1. **Si se hace girar alrededor del eje x la región formada por la gráfica de la función $y = senx$ y el propio eje x, con valores de la abscisa entre $x = 0$ y $x = \pi$, se genera el sólido de revolución que se ilustra en la Figura 3.22.**

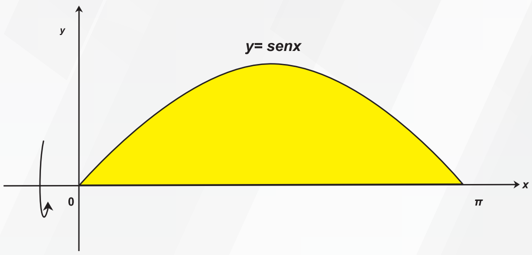


FIGURA 3.21

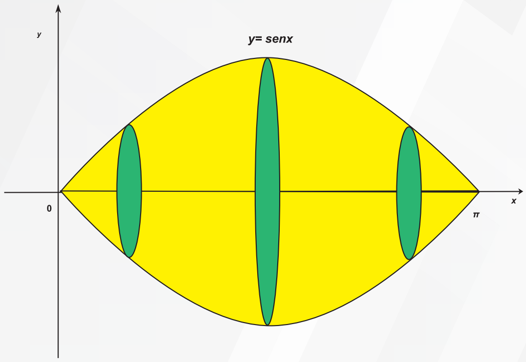


FIGURA 3.22

a) Escribe la integral que debe calcularse para obtener el sólido de revolución generado.

b) ¿Puedes hacer el cálculo de esa integral? De no ser así explica las razones.

Las situaciones que se han propuesto hasta el momento se relacionan con las llamadas funciones continuas, esto es, funciones que se comportan de tal manera que se pueden graficar “sin despegar el lápiz del papel”. Pero también existen funciones cuyo comportamiento no es tan “suave”, por ejemplo, en el Bloque 5 del Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 4 estudiaste una función cuya gráfica es la siguiente:

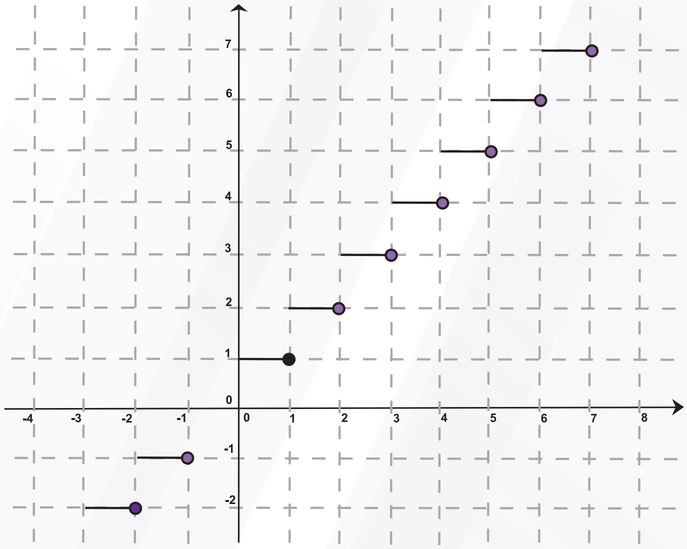


FIGURA 3.23

En ocasiones las funciones pueden tener comportamientos incluso más complejos. Este tipo de casos se presentan con frecuencia cuando se modelan poblaciones, ya sea de seres humanos, de bacterias o de cualquier otro ser vivo. Por ejemplo, en una mina cuya producción va en aumento se inician labores con 20 trabajadores y con el paso del tiempo se tiene que la población laboral sigue la Ley $N(t) = 20 + 10t$, donde t representa el tiempo en meses y N el número de trabajadores, entonces su gráfica debería ser de la forma que se señala en la Figura 3.24, en la cual los puntos están aislados unos de otros.

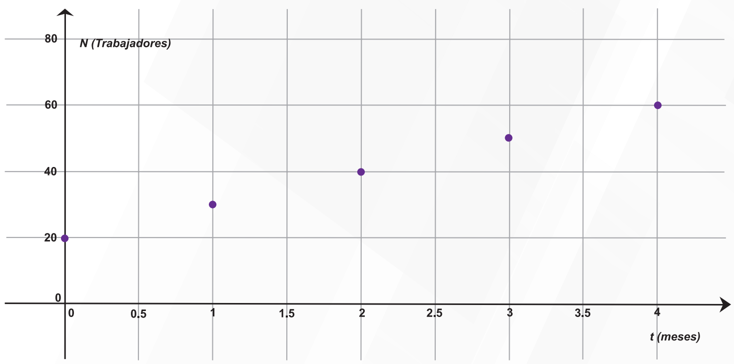


FIGURA 3.24

a) ¿Por qué en la gráfica de la Figura 3.24, los puntos no están unidos?

b) Describe otra situación que se modele considerando sólo puntos aislados.

2. Sin embargo, cuando las poblaciones son muy grandes, los modelos matemáticos continuos pueden ser útiles aún en casos como los de la población, pues en general su comportamiento es el mismo que en el de los casos continuos, pero teniendo siempre cuidado de no confundir las situaciones evitando considerar, por citar un caso, hacer referencia a fracciones de individuos.

   Por ejemplo, un modelo del crecimiento de una población viene dado por la Ley $\frac{dN}{dt} = te^{0.1t}$, donde $N(t)$ es el número de individuos de la población, y t es el tiempo medido en años.

   En este caso, entonces, una expresión adecuada para conocer el comportamiento de la población, denotada por medio de $N(t)$ se puede obtener por medio de la siguiente antiderivada:

$$N(t) = \int te^{0.1t}\,dt$$

a) ¿Puedes obtener esta última antiderivada? Si tu respuesta es afirmativa, escribe a continuación los pasos que seguiste.

b) De no ser así ¿cuáles son tus dificultades?

Desarrollo

ACTIVIDAD 2 SD2-B3 Antiderivadas de funciones trigonométricas

En la determinación del volumen del sólido de revolución de la Figura 3.22 se espera que hayas llegado a formular la necesidad de calcular la integral $\int_0^{\pi} sen^2 x\, dx$.

De acuerdo a lo establecido en el Bloque 2, para obtener el valor de la integral señalada es necesario primero determinar la función primitiva o integral indefinida de la función $sen^2 x$ para posteriormente evaluarla en los extremos de integración. Pero obtener $\int sen^2 x\, dx$ no es inmediato pues no se trata de una integral directa ni existe una función que permita resolverla por medio de un cambio de variable.

Sin embargo, así como se procedió con el caso de $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$, es posible hacer transformaciones de $sen^2 x$ que permitan obtener una función primitiva a partir de integraciones directas o por medio de un cambio de variable. En este caso la transformación que se realizará será a partir del uso de las llamadas identidades trigonométricas.

1. **El caso de $sen^2 x$. (Trabajo grupal).** En el caso señalado es posible encontrar diferentes identidades trigonométricas en las que aparece esta expresión, pero existen dos que tienen un uso frecuente:

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

$$sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos 2x$$

a) Si se desea determinar la integral indefinida $\int sen^2 x\, dx$ ¿Cuál de las dos identidades es de mayor utilidad? ¿Por qué?

b) Sustituye en $\int sen^2 x\, dx$ la identidad trigonométrica que seleccionaste. ¿Cómo puede ahora obtenerse la función primitiva correspondiente? Hazlo.

c) Una vez obtenida la función primitiva señalada, determina el volumen del sólido de revolución de la Figura 3.22, esto es, calcula

$$\int_0^{\pi} sen^2 x\, dx.$$

Así como lo hiciste para obtener $\int sen^2x\,dx$, existen muchos otros casos que involucran a potencias de funciones trigonométricas que se pueden resolver haciendo transformaciones mediante el uso de identidades trigonométricas.

Aunque los casos a tratar pueden ser muchos, las identidades que se usan con mayor frecuencia en la integración de potencias de funciones trigonométricas son las siguientes:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

$$sen^2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x$$

$$cos^2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2x$$

$$1 + tan^2x = sec^2x$$

$$1 + cot^2x = csc^2x$$

2. **El caso de cos^2x (Trabajo en equipo).** Determina $\int cos^2x\,dx$

   a) ¿Qué identidad trigonométrica es útil en este caso?

   b) Haz la transformación que hayas elegido para cos^2x y sustitúyela en $\int cos^2x\,dx$.

   c) Determina $\int cos^2x\,dx$.

3. **(Trabajo individual).** Determina las siguientes integrales indefinidas.

a) $\int sen^4 x\, dx$

b) $\int cos^4 x\, dx$

4. **Funciones impares de seno y coseno (Trabajo grupal).** Determinar $\int sen^3 x\, dx$

a) Partiendo de reescribir la integral indefinida como $\int sen^3 x\, dx = \int sen^2 x\, senx\, dx$ ¿Qué identidad trigonométrica es más útil emplear aquí? ¿Por qué?

b) Una vez seleccionada la identidad trigonométrica adecuada, continúa desarrollando hasta determinar $\int sen^3 x\, dx$.

c) Determina $\int cos^3 x\, dx$

5. **(Trabajo en equipo).**

a) Obtén la integral indefinida de $\int sen^5 x\, dx$

b) Obtén la integral indefinida de $\int cos^5 x\, dx$

En ocasiones las funciones que se necesita antiderivar revisten una complejidad mayor y no se pueden obtener las primitivas de las mismas haciendo transformaciones algebraicas o trigonométricas y es pertinente usar otros recursos. Por ejemplo, en la actividad de Inicio surgió la integral indefinida:

$$N(t) = \int te^{0.1t}dt$$

la cual no se puede determinar con una transformación algebraica sencilla.

Para su solución se requiere de un método que es conocido como "integración por partes", que surgió como resultado del esfuerzo y horas de búsqueda de grandes matemáticos. En el caso presente se seguirá el camino, que en sus ideas fundamentales, siguió Wilfred Leibniz, que junto a Isaac Newton, es reconocido como uno de los fundadores del Cálculo Diferencial e Integral.

1. **Ideas esenciales de la integración por partes (Trabajo grupal).** Observa la siguiente Figura 3.25, en la cual se representa una función v que depende de u.

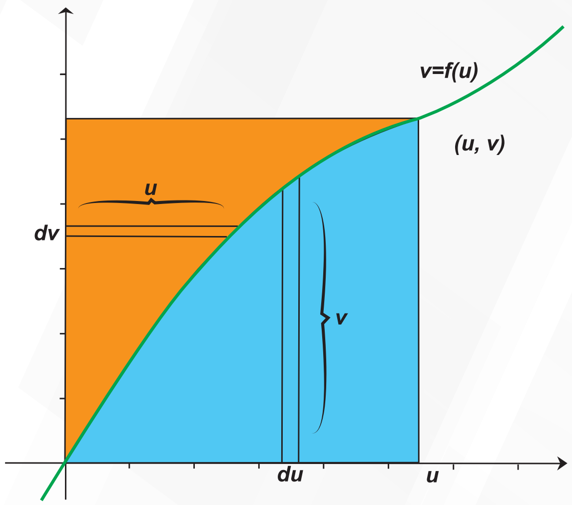


FIGURA 3.25

a) ¿Cuál es el valor del área del rectángulo dibujado en la Figura 3.25?

b) ¿Cuál es el valor del área diferencial del rectángulo de dimensiones dv y u? Con base en eso escribe una expresión del área que se encuentra dentro del rectángulo pero por arriba de la función $v = f(u)$. Para simplificar las cosas omite los límites de integración.

c) ¿Cuál es el valor del área diferencial del rectángulo de dimensiones du y v? Con base en eso escribe una expresión del área que se encuentra dentro del rectángulo pero por abajo de la función $v = f(u)$. Para simplificar las cosas omite nuevamente los límites de integración.

d) Escribe ahora una expresión para el área del rectángulo de la Figura 3.25 que tome en cuenta los resultados de los incisos b y c.

Al hacer uso de la integración por partes, no se hacen sustituciones de variables, como en la caso de la integración de cambios de variable, sólo se toman en cuenta las partes constituyentes. Por ejemplo, para obtener

$$\int x\, lnx\, dx$$

se puede tomar

$$u = lnx,\ dv = x\ dx$$

De esta manera se tiene que

$du = \frac{dx}{x}$ y $v = \int x\ dx = \frac{x^2}{2}$, omitiendo agregar una constante de integración.

Empleando la expresión $u\ dv = uv - \int v\ du$ obtenida anteriormente, se tiene

$$\int x\ lnx\ dx = \frac{x^2}{2} lnx - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{2}\int x\ dx = \frac{x^2}{2} lnx - \frac{1}{4}x^2 + c$$

2. **Usando las ideas esenciales de la integración por partes (Trabajo grupal).** Encuentra $\int xe^x dx$..

a) En la expresión $xe^x dx$, denomina a una parte como u y a otra como dv. Toma en cuenta que la parte que denominaste dv debe incluir a dx ¿Por qué?

b) Con base en a) determina du y v.

c) Tomando en cuenta los resultados de los dos incisos previos y lo obtenido en la Actividad 1, reescribe la integral indefinida $\int xe^x dx$ en términos de $u,\ v,\ du$ y dv. Resuelve entonces la integral indefinida.

3. **Practicando la integración por partes (Trabajo en equipo)**

a) Obtén la integral indefinida $\int xsenx\, dx$

b) Obtén la integral indefinida $\int x^2 cosx\, dx$

ACTIVIDAD 3 SD2-B3 Integración por Fracciones Parciales

1. Obtener $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$.

Determinar esta integral indefinida aparentemente resulta muy complicado porque no se puede resolver haciendo un cambio de variable o no es claro que se pueda resolver por medio del procedimiento de la integración por partes. Pero es posible hacer una transformación algebraica para simplificar la expresión y encontrar entonces la antiderivada solicitada.

a) Para comprobarlo, puedes verificar que $\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}$ y consecuentemente $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx = \int (\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2}) dx$

b) Obtén ahora la antiderivada solicitada.

La cuestión ahora es saber cómo es que se obtuvo la igualdad $\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{4}{x-3}-\frac{3}{x-2}$. El procedimiento a seguir en un caso de esta naturaleza es conocido como descomposición en fracciones parciales y se ilustrará con este ejemplo.

En un principio es posible observar que el denominador de $\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ se factoriza como:

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

Entonces se tiene que $\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$. Para hacer la descomposición en fracciones parciales se deben tomar tantas fracciones como sea posible con la condición de que el común denominador no altere lo que ya se tiene.

En este caso se llega a dos fracciones, una con denominador igual a (x-3) y otra con denominador igual a (x-2). Por ser denominadores de primer grado, en el numerador de cada fracción aparecerá una expresión de grado inferior, de tal manera que ahora se tiene

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

Para que la descomposición en fracciones parciales se pueda realizar, es necesario que esta igualdad constituya una identidad, lo cual quiere decir que

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

debe ser cierta para cualquier valor de x.

Como los denominadores de las expresiones a ambos lados de la igualdad ya son idénticos, se requiere que los numeradores también lo sean, es decir, se requiere que

$$x+1=A(x-2)+B(x-3)$$

Entonces, si la igualdad es cierta para cualquier valor de x, con una selección adecuada de valores es sencillo determinar los correspondientes valores de A y B. En este caso, si se toma $x=3$ se elimina $B(x-3)$ y si se toma $x=2$, se elimina $A(x-2)$. Así,

Si $x=3$, $x+1=3+1=4=A(3-2)+B(3-3)=A$ y de aquí que $A=4$.

Si $x=2$, $x+1=2+1=3=A(2-2)+B(2-3)=-B$ y de aquí que $B=-3$.

La igualdad de fracciones queda entonces así

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{4}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

Ésta es la expresión con la cual se obtuvo la antiderivada en el inciso b de esta actividad.

2. Determina $\int \frac{x-5}{x^2+7x+12}\,dx$

Cierre

Se espera que te hayas percatado de que el proceso de obtención de antiderivadas es complejo y, salvo las antiderivadas directas, algunas antiderivadas se pueden hacer haciendo transformaciones algebraicas o trigonométricas y, otras más son posibles de encontrarse haciendo cambios de variable adecuados.

En particular el caso de la integración por partes en el cual es necesario utilizar el resultado

$$\int udv = uv - \int vdu$$

En otros casos más es necesario hacer una descomposición en fracciones parciales, de cuyas posibilidades aquí sólo se revisó un tipo.

En esta actividad de Cierre tendrás oportunidad de practicar los casos de antiderivación discutidos en la actividad de Desarrollo de la presente secuencia.

ACTIVIDAD 1 Practicando las técnicas de integración
SD-B3

Actividad 1. Practicando las técnicas de integración

Obtén las antiderivadas solicitadas.

1. $\int sen^2 2x\,dx$

2. $\int sen^2 3x \, dx$

3. $\int cos^2 5x \, dx$

4. $\int cos^3 2x \, dx$

5. $\int sen^3 4x \, dx$

6. $\int x cosx \, dx$

7. $\int x^2 senx \, dx$

8. $\int e^x senx \, dx$

9. $\int e^x cosx \, dx$

10. $\int \frac{2x-3}{x^2+5x+4} dx$

REFLEXIONES FINALES

Con el estudio que has realizado hasta este momento, has extendido y profundizado en el estudio de los fenómenos de variación, incluyendo ahora los procesos de acumulación. Dichos procesos están presentes en múltiples situaciones de la vida real y de la ciencia, por lo cual sus posibilidades de uso son muchas.

Con lo discutido en el presente Módulo has tenido la oportunidad de apreciar que en las matemáticas, los recursos de que se dispone son variados y es necesario estar en condiciones de usar siempre los más convenientes.

Por ejemplo, cuando se inició el Módulo, la primera situación de análisis de un fenómeno de acumulación que se estudió fue la referente a la emisión de gases de invernadero de un automóvil, con énfasis en la obtención de un dato de carácter numérico. Sin embargo, en la solución del problema planteado surgió la representación gráfica como un recurso auxiliar, de tal suerte que para la obtención de un dato numérico –la cantidad total de emisión de gases en un cierto periodo de tiempo- se recurrió a la obtención de una suma de áreas de rectángulos.

Posteriormente el problema de la determinación de áreas condujo al surgimiento de la integral de una función, en la cual, relacionando a la derivada con la integral, la obtención de un área se realizó siguiendo procedimientos algebraicos por medio de un proceso de antiderivación.

El uso de variados recursos y en particular de diferentes representaciones (gráficas, numéricas y algebraicas) es una característica de las matemáticas que siempre es útil tener presente y, en lugar de despreciar a alguna de ellas, es pertinente identificar cuando es más útil usar una y cuando otra, así como identificar cuáles son las posibilidades más provechosas de combinarlas.

A manera de ejemplo de estas aseveraciones, veamos dos casos interesantes.

Uno de ellos es el de la función vista al inicio de la secuencia anterior y cuya gráfica es la mostrada en la Figura 3.26.

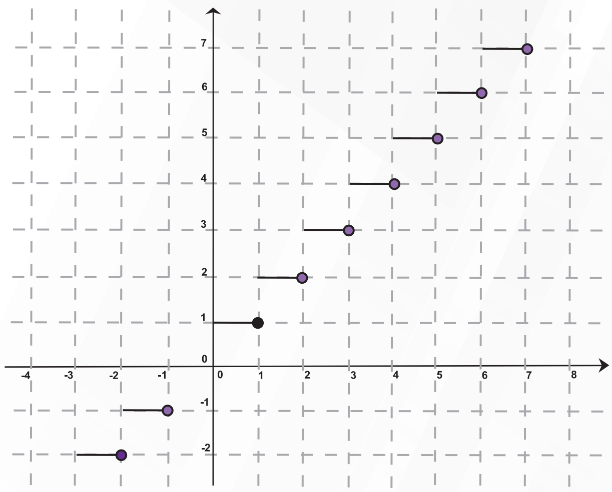


FIGURA 3.26

Si ahora necesitamos obtener el valor de $\int_0^4 f(x)dx$ podemos hacerlo encontrando una antiderivada de la función $y = f(x)$ y evaluando después en los extremos, haciendo uso del Teorema Fundamental del Cálculo. Por una parte este proceso es relativamente tedioso, aunque sencillo, pues la función $y = f(x)$ está definida por trozos, pero por otra parte, el valor de esa integral es más sencillo de obtener calculando el área de los rectángulos que se forman tomando valores de x entre $x = 0$ y $x = 4$, y sumando dichos resultados. Esto se ilustra en la Figura 3.27.

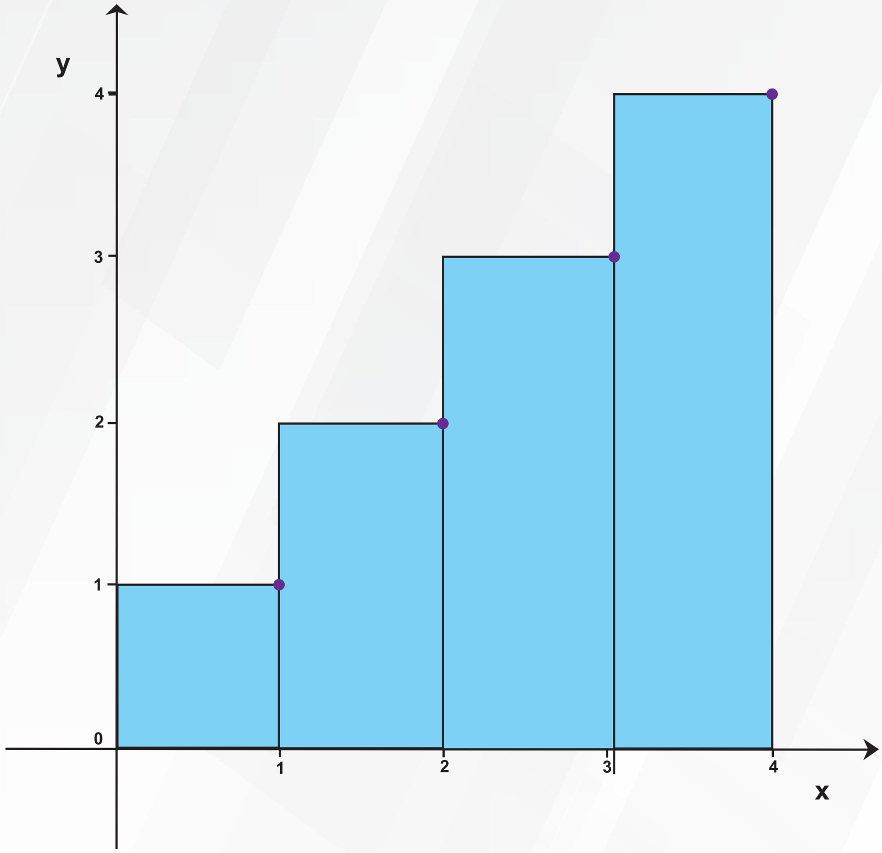


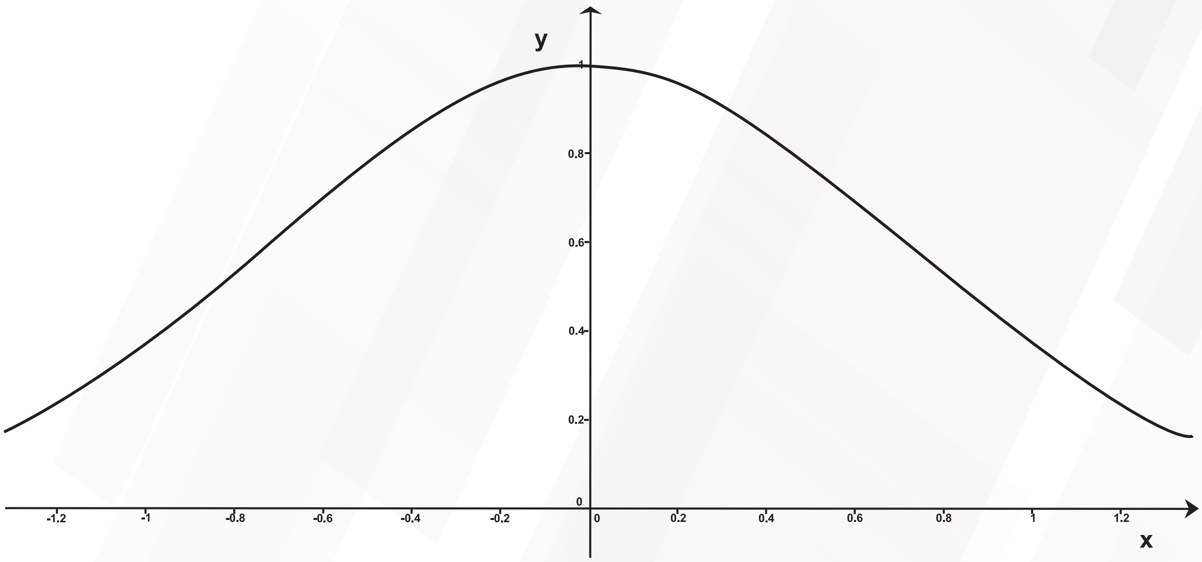
FIGURA 3.27

De esta manera, calculando las áreas tenemos que:

$$\int_0^4 f(x)dx = 1(1) + 1(2) + 1(3) + 1(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

FIGURA 3.28

Otro ejemplo lo tenemos en una función que es de suma utilidad en Estadística, la función $y = e^{-x^2}$. Esta función, con pequeñas variantes, aparece con mucha frecuencia en cálculos estadísticos y tiene la característica de que no tiene antiderivada. Su gráfica se muestra en la Figura 3.36.



Si se desea obtener algún valor como por ejemplo:

$$\int_{0.2}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

como la función $y = e^{-x^2}$no tiene antiderivada, no es posible emplear el Teorema Fundamental de Cálculo para determinar su valor.

¿Quiere decir entonces que no se puede obtener el valor de la integral?

Si se observa la Figura 3.29, se ve que el valor de la integral en cuestión corresponde al valor del área de la región sombreada.

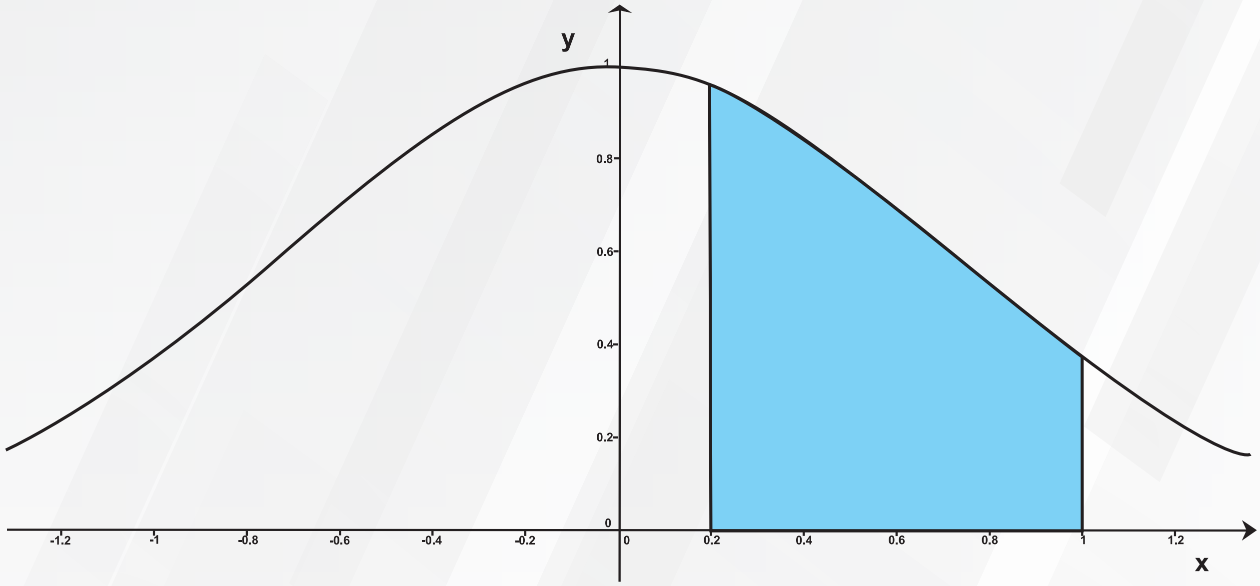


FIGURA 3.29

De entrada, es claro que esa área tiene un valor determinado. ¿Cómo se puede obtener?
En el espacio siguiente escribe cómo consideras que es posible obtener o por lo menos aproximar el valor de dicha área y por lo tanto del valor de la integral.

$$\int_{0.2}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

Este ejemplo es muestra de cómo las matemáticas utilizan diferentes medios para la resolución de problemas y es necesario, según el caso, emplear recursos gráficos, numéricos o algebraicos sin privilegiar ni desdeñar ninguno de ellos. De hecho, numerosos problemas prácticos no se pueden modelar algebraicamente y para su solución se utilizan métodos numéricos que en ocasiones son muy sofisticados y requieren del apoyo de cálculos con programas de computación.

SERIE DE PROBLEMAS

1. Determina el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la región limitada por la gráfica de $y = x^2$ y la recta $y = x$.

2. Obtén el volumen del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje x la región limitada por la gráfica de $y = x^3$ y la recta $y = x$.

3. Obtén el volumen del sólido de revolución que se genera al girar alrededor del eje x la región limitada por la gráfica de $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = x$.

4. La región limitada por la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = x^2$ es girada alrededor del eje de las x. Determina el volumen del sólido de revolución generado.

5. La región limitada por la gráfica de $y = x^2$ y la gráfica de $y = \sqrt{x}$ es girada alrededor del eje de las x. Determina el volumen del sólido de revolución generado.

6. La región limitada por la gráfica de $y = x^3$ y la gráfica de $y = \sqrt{x}$ es girada alrededor del eje de las x. Determina el volumen del sólido de revolución generado.

Obtén las antiderivadas que se enuncian a continuación.

7. $\int sen^2 7x\, dx$

8. $\int sen^4 x\, dx$

9. $\int cos^2 4x\, dx$

10. $\int cos^4 x\, dx$

11. $\int sen^3 7x\, dx$

12. $\int sen^5 x\, dx$

13. $\int cos^3 5x\, dx$

14. $\int cos^5 x\, dx$

En la secuencia didáctica 2 se señaló que entre las identidades trigonométricas más empleadas están las siguientes:

$$1 + tan^2x = sec^2x$$

$$1 + cot^2x = csc^2x$$

En los siguientes ejercicios utiliza dichas identidades para obtener las antiderivadas, primitivas o integrales indefinidas indicadas. ***Para la determinación de estas antiderivadas no has tenido referentes previos, por lo que, en caso de tener dificultades, analiza las situaciones con tus compañeros o recurre a tu profesor para recibir orientaciones.***

15. $\int tan^3x\, dx$

16. $\int tan^4x\, dx$

17. $\int cot^3x\, dx$

18. $\int sec^4 x\, dx$

19. $\int csc^4 x\, dx$

20. $\int x\ lnx\, dx$

21. $\int x\ \ e^{2x} dx$

22. $\int x\, cos2x\, dx$

23. $\int lnx\, dx$

24. $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\, dx$

25. $\int \frac{x-1}{x^3-x^2-2x}\, dx$

AUTOEVALUACIÓN

Como es usual, este apartado tiene un papel importante en tu proceso de aprendizaje, pues te permite tener una valoración propia de qué tanto has aprendido de lo tratado en este Bloque. Una buena manera de obtener esta valoración consiste en regresar a la sección Introducción, donde se explicita qué es lo que se espera que aprendas, para posteriormente iniciar la solución de los problemas aquí planteados, así como responder a las preguntas contenidas en el apartado Reflexiones Generales.

Es importante también que ubiques las dificultades que todavía subsistan, y las compartas con tus compañeros y profesor, con la intención de que puedas solicitar el apoyo necesario para que puedan ser superadas.

SECCIÓN 1

1. Describe como se forma un sólido de revolución.

2. Describe la estrategia que puedes seguir para determinar el volumen de un sólido de revolución.

3. ¿Puedes aplicar los métodos de integración estudiados en el Bloque? ¿Cuáles te causan dificultades? Describe el tipo de dificultades que detectas en la aplicación de los métodos de integración.

4. Usando calculadora o algún otro auxiliar, estima por defecto y por exceso, usando 4 subintervalos, el valor de

$$\int_{0.2}^{1} e^{-x^2}\,dx$$

SECCIÓN 2. Reflexiones generales

1. Cuando trabajaste individualmente, ¿lograste responder las actividades solicitadas?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

2. ¿Las participaciones de tus compañeros fueron importantes para responder las actividades de las diferentes secuencias?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

3. ¿Fuiste capaz de exponer tus ideas cuando realizaste trabajo en equipo o en el grupo?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

4. Cuando tuviste alguna duda, ¿Pudiste explicarle a tus compañeros las dificultades que se te presentaron?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

5. ¿Utilizaste algún tipo de recurso tecnológico (software, internet, calculadoras, etc.), para apoyar tus actividades en clase y/o extra clase?

Nunca Muy pocas veces Frecuentemente Siempre

6. En este Bloque me parecieron muy interesantes los temas siguientes:

-
-
-

7. En este Bloque me pareció particularmente difícil lo siguiente:

-
-
-

8. Mis conclusiones generales de este Bloque son las siguientes:

MIS NOTAS:

MIS NOTAS:

Diseñada en Dirección Académica del
Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora

Blvd. Agustín de Vildósola, Sector Sur
Hermosillo Sonora, México.

La Edición consta de 4,159 ejemplares
Impreso en México/Printed in Mexico

PLAN DE ESTUDIOS

PRIMER SEMESTRE Asignatura	H	C	SEGUNDO SEMESTRE Asignatura	H	C	TERCER SEMESTRE Asignatura	H	C	CUARTO SEMESTRE Asignatura	H	C	QUINTO SEMESTRE Asignatura	H	C	SEXTO SEMESTRE Asignatura	H	C
Matemáticas 1	5	10	Matemáticas 2	5	10	Matemáticas 3	5	10	Matemáticas 4	5	10	Historia Regional de Sonora	3	6	Filosofía	4	8
Química 1	5	10	Química 2	5	10	Biología 1	4	8	Biología 2	4	8	Geografía	4	8	Ecología y Medio Ambiente	3	6
Introducción a las Ciencias Sociales	4	8	Historia de México 1	4	8	Historia de México 2	4	8	Estructura Socioeconómica de México	4	8	Historia Universal	4	8	Métodos de Investigación	3	6
Taller de Lectura y Redacción 1	4	8	Taller de Lectura y Redacción 2	4	8	Literatura 1	4	8	Literatura 2	4	8	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Ética y Valores 1	3	6	Ética y Valores 2	3	6	Física 1	5	10	Física 2	5	10	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Lengua Adicional al Español 1	4	8	Lengua Adicional al Español 2	4	8	Lengua Adicional al Español 3	4	8	Lengua Adicional al Español 4	3	6	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Informática 1	4	8	Informática 2	4	8	Formación para el trabajo	7	14	Formación para el trabajo	7	14	Formación Propedéutica	3	6	Formación Propedéutica	3	6
Actividades Paraescolares: Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa: 1 hr. **Opcional:** 2 hrs. - Artísticas - Deportivas - Culturales	3		Formación para el trabajo	7	14	Formación para el trabajo	7	14
												Actividades Paraescolares: Orientación Educativa	1		**Actividades Paraescolares:** Orientación Educativa	1	
TOTALES	**32**	**58**		**32**	**58**		**36**	**66**		**35**	**64**		**31**	**60**		**30**	**58**

FORMACIÓN PARA EL TRABAJO

1. Desarrollo Microempresarial
2. Comunicación
3. Servicios Turísticos
4. Inglés para Relaciones Laborales
5. Contabilidad
6. Informática
7. Gastronomía y Nutrición
8. Técnicas de Construcción

FORMACIÓN PROPEDÉUTICA

GRUPO 1
Químico Biológico

GRUPO 2
Físico Matemático

GRUPO 3
Económico-Administrativo

GRUPO 4
Humanidades y Ciencias Sociales

COMPONENTE	ASIGNATURAS	CRÉDITOS
FORMACIÓN BÁSICA	32	260
FORMACIÓN PROPEDÉUTICA	8	48
FORMACIÓN PARA EL TRABAJO	8	56
ACTIVIDADES PARAESCOLARES	10	-
TOTAL:	58	364

-Enero 2011-